Der Mordell-Weil-Rang abelscher Varietäten in unendlichen Erweiterungen und in Familien von Twists

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Sebastian Petersen
im Dezember 2004

Betreuer: Prof. Dr. Cornelius Greither
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Cornelius Greither
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Jürgen Ritter

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Informatik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der arithmetischen Geometrie werden Varietäten über Zahlkörpern k (oder allgemeineren Körpern von arithmetischem Interesse) untersucht. Im Zentrum des Interesses stehen Fragen zur Endlichkeit der Menge $X(k)$ der k-rationalen Punkte einer Varietät über k und zu Rang und Torsion in der Mordell-Weil Gruppe $A(k)$ einer abelschen Varietät über k. Der wichtigste Endlichkeitssatz für abelsche Varietäten ist das Mordell-Weil-Theorem. Wir geben es in einer durch Lang und Néron verallgemeinerten Form an.

Satz (Mordell-Weil, Lang-Néron) *Sei k endlich erzeugt und $A|k$ eine abelsche Varietät. Dann ist $A(k)$ endlich erzeugt.*

Über separabel abgeschlossenen Körpern lässt sich nun ein ganz anderes Verhalten ausmachen:

Satz (Frey und Jarden, 1974) *Sei Ω separabel abgeschlossen und nicht algebraisch über einem endlichen Körper. Ist $A|\Omega$ eine abelsche Varietät positiver Dimension, so ist $A(\Omega)$ von unendlichem Rang.*

Dieser Satz wurde von Frey und Jarden in ihrer Arbeit [FJ74] bewiesen. Ein Alternativbeweis wird in dieser Arbeit mitentstehen.

Sei nun k ein Zahlkörper (oder allgemeiner ein unendlicher, endlich erzeugter Körper), $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension und $\Omega|k$ eine algebraische Erweiterung. Wenn $\Omega|k$ von unendlicher Dimension ist, sodass das Mordell-Weil-Theorem nicht greift, und Ω nicht separabel abgeschlossen ist, sodass obiger Satz von Frey und Jarden nicht greift, so ist es interessant, in Abhängigkeit von A und Ω nach der Struktur der abelschen Gruppe $A(\Omega)$ zu fragen. Ist der Rang von $A(\Omega)$ endlich oder nicht? Wir interessieren uns vornehmlich, aber bei weitem nicht ausschliesslich, für den Fall, dass $\Omega = k^{ab}$ die maximale abelsche Erweiterung von k ist. Die Frage nach dem Rang von $A(k^{ab})$ wurde im Jahre 1974 von Frey und Jarden in ihrer Arbeit [FJ74] aufgeworfen.

Frage von Frey und Jarden: *Sei k ein Zahlkörper und $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension. Ist dann $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang?*

Das Problem ist nach wie vor ungelöst. Es gibt aber einige Arbeiten dazu. Z.B. wurde von Frey und Jarden unter Benutzung einer expliziten Gleichung in Weierstraß-Form gezeigt, dass $\mathrm{rg}(E(\mathbb{Q}^{ab})) = \infty$ für jede elliptische Kurve $E|\mathbb{Q}$ gilt. Das dem Wissen des Autors nach aktuellste Resultat zu obiger Frage wurde von Rosen und Wong [RW02] veröffentlicht.

Satz (Rosen und Wong, 2002) *Sei k ein Zahlkörper. Sei $C|\mathbb{P}_1$ eine zyklische Überlagerung von positivem Geschlecht. Dann ist $J_C(k^{ab})$ von unendlichem Rang.*

Der Fall einer primzyklischen Überlagerung ist vorher von Murabayashi [Mu93], der hyperelliptische Fall von Top [To88] und Imai [I80] und der elliptische Fall von Frey und Jarden [FJ74] behandelt worden. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang, dass die Frage, ob $A(k^{ab})_{\mathrm{Tors}}$ endlich ist, von Zarhin beantwortet wurde.

Satz (Zarhin, 1987) *Sei k ein Zahlkörper und $A|k$ eine abelsche Varietät. Genau dann ist der Torsionsteil von $A(k^{ab})$ unendlich, wenn A komplexe Multiplikation über k hat.*

Siehe [La2] oder [Z87]. Wir werden in dieser Arbeit das oben genannte Ergebnis von Rosen und Wong zur Frage von Frey und Jarden verallgemeinern. Wir beweisen in Kapitel 3 die folgende hinreichende Bedingung für unendlichen Rang über unendlichen Erweiterungen:

Satz *Sei k ein Hilbert-Körper und $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension. Es existiere eine projektive, glatte Varietät $T|k$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Ihr Funktionenkörper $R(T)$ enthalte einen rein-transzendenten Unterkörper K, über dem $R(T)$ galoissch mit Gruppe Γ ist.*
2. *Es existiere eine endliche Galoiserweiterung $F|k$ und ein nicht-konstanter F-Morphismus $f : T_F \to A_F$.*

Dann gibt es eine Galoiserweiterung $\Omega|k$ mit Gruppe $G(F|k) \times \prod_{i=1}^{\infty} \Gamma$ derart, dass $A(\Omega)$ von unendlichem Rang ist. (Insbesondere gilt: Ist Γ abelsch und $F|k$ abelsch, so ist $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang.)

Ist etwa $T|k$ eine projektive, glatte Kurve, die als abelsche Galois-Überlagerung von $\mathbb{P}_1$ realisiert werden kann und positives Geschlecht hat, so existiert eine abelsche Erweiterung $F|k$ mit $T(F) \neq \emptyset$. Dann existiert auch eine F-Einbettung $\lambda : T_F \to J_T \otimes F$. Ist A ein Quotient positiver Dimension von J_T und $p : J_T \to A$ die Projektion, so ist $p_F \circ \lambda$ nicht-konstant und der Satz liefert, dass $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang ist. Man erhält demnach als Folgerung:

Folgerung: *Ist A eine abelsche Varietät positiver Dimension, die als Quotient der Jacobi-Varietät einer abelschen Überlagerung von $\mathbb{P}_1$ realisiert werden kann, so ist $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang.*

Bekanntlich ist jede abelsche Varietät über k Quotient einer geeigneten Jacobi-Varietät. Es stellt sich in diesem Zusammenhang folgende

Frage: *Kann man jede abelsche Varietät realisieren als Quotient der Jacobi-Varietät einer projektiven, glatten Kurve, die ihrerseits als abelsche Überlagerung von $\mathbb{P}_1$ realisiert werden kann?*

Sollte die Antwort auf diese Frage wenigstens für jede einfache abelsche Varietät positiv ausfallen, so hätte dies offenbar die vollständige Lösung der Frage von Frey und Jarden zur Folge. In Gesprächen mit diversen Mathematikern, unter anderem mit H. Lange, einem führenden Experten in diesen Fragen, war zu erfahren, dass obige Frage als notorisch hartes Problem gilt. Man geht jedoch durchaus davon aus, dass die Antwort für jede einfache abelsche Varietät positiv ausfallen könnte. Mit anderen Worten: Der Autor kennt keine abelsche Varietät, auf welche die Voraussetzungen seines Satzes nicht zuträfen.

Die Methode des Beweises des obigen Satzes unterscheidet sich wesentlich von den Methoden, die von Rosen und Wong, Top, Imai und von Frey und Jarden herangezogen wurden. Wir erläutern die Grundideen, die dem Beweis unseres Satzes zugrunde liegen. Sei in der Situation des Satzes der Einfachheit halber zusätzlich $F = k$ vorausgesetzt.

1. Nach der Voraussetzung an $R(T)$ existieren offene Teilmengen $\emptyset \neq T_0 \subset T$ und $\emptyset \neq U \subset \mathbb{A}_n$ und eine étale Galois-Überlagerung $p : T_0 \to U$ mit Gruppe Γ. Siehe 1.4.6.

2. Aus unserer Diskussion wohlbekannter Tatsachen über Galois-Überlagerungen in Kapitel 1 folgt, dass für jeden geometrischen Punkt $P \in T_0(\overline{k})$, *der über einem k-rationalen Punkt von U liegt*, die Erweiterung $k(P)|k$ galoissch ist. Die Galois-Gruppe von $k(P)|k$ bettet sich ein in Γ.

3. Ein Argument, das die in 2.1 dargelegte Theorie von gewöhnlichen und abstrakten Hilbert-Mengen involviert, zeigt dann, dass man eine Folge $(P_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset T(\overline{k})$ von über k-rationalen Punkten in $U(k)$ liegenden Punkten derart konstruieren kann, dass $(k(P_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine linear disjunkte Folge von Erweiterungskörpern von k ist, und $G(k(P_i)|k) \cong \Gamma$ für alle i gilt.

4. Der wesentliche Punkt ist, dass unter Beachtung des Spezialisierungssatzes 2.3.6, für den wir in Kapitel 2 einen ausführlichen Beweis geben, die Folge $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sogar so gewählt werden kann, dass $f(P_i) \in A(k(P_i))$ Nicht-Torsion ist für alle i. Wegen der linearen Disjunktheit der Folge $(k(P_i))_{i\in\mathbb{N}}$, muss die Familie $(f(P_i))_{i\in\mathbb{N}}$ schon $\mathbb{Z}$-linear unabhängig sein. Sei Ω das Kompositum der Körper $k(P_i)$. Dann ist $\Omega|k$ eine (unendliche) Galoiserweiterung mit Gruppe $\prod_{i=1}^{\infty}\Gamma$ und $\mathrm{rg}(A(\Omega)) = \infty$.

Unsere Methoden erlauben auch Alternativbeweise für einige der klassischen Sätze zu geben, die von Frey und Jarden in [FJ74] bewiesen wurden. Diese Alternativbeweise scheinen deutlich einfacher zu sein als die klassischen Beweise. (Die von Frey und Jarden zum Beweis ihrer Sätze entwickelte Approximationstheorie bleibt jedoch sicher von unabhängigem Interesse.) Sei k ein Hilbert-Körper, k^s ein separabler Abschluß von k und $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension. Sei $e \geq 2$. Sei G_k die absolute Galois-Gruppe von k. Für $\sigma \in G_k^e$ sei

$$k^s(\sigma) := \{x \in k^s \mid x^{\sigma_i} = x \ \forall i = 1, \cdots, e\}$$

der entsprechende Fixkörper. Wir können dann zeigen, dass für fast alle σ (im Sinne des Haarschen Maßes) der Rang von $A(k^s(\sigma))$ unendlich ist. Insbesondere ist $A(k^s)$ von unendlichem Rang.

Des weiteren erlauben unsere Methoden, einen Satz von Rosen und Wong [RW02] zu verschärfen. Sei k ein Hilbert-Körper, $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension und $f : A \to \mathbb{P}^N$ eine projektive Einbettung vom Grad d. Dann ist $A(\Omega)$ von unendlichem Rang, wenn Ω das Kompositum aller Erweiterungen E von k vom Grad $[E : k] = d$ ist. (Rosen und Wong hatten gezeigt, dass im Falle eines Zahlkörpers k die Gruppe $A(\Omega')$ von unendlichem Rang ist, wenn Ω' das Kompositum aller Erweiterungen E von k vom Grad $[E : k] \leq d(4\dim(A) + 2)$ ist.)

Im 4. Kapitel der Arbeit übertragen wir Ergebnisse von Gouvêa, Mazur, Stewart, Top, Rubin und Silverberg zum Mordell-Weil-Rang elliptischer Kurven in Familien von quadratischen Twists auf den Fall superelliptischer Kurven. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein quadratfreies Polynom vom Grad 3 und

$$E : Y^2 = f(X)$$

die entsprechende (projektive) elliptische Kurve. Für $D \in \mathbb{Q}^\times$ sei

$$E^D : DY^2 = f(X)$$

der entsprechende quadratische Twist. Dann besteht ein $\overline{\mathbb{Q}}$-Isomorphismus

$$E^D \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \cong E \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \ (X, Y) \mapsto (X, \sqrt{D}Y),$$

der genau dann über $\mathbb{Q}$ definiert ist, wenn D in $\mathbb{Q}^{\times 2}$ liegt. Insbesondere hat man einen i.a. nicht $G_{\mathbb{Q}}$-linearen Isomorphismus $E^D(\overline{\mathbb{Q}}) \cong E(\overline{\mathbb{Q}})$. $E(\mathbb{Q}) = E(\overline{\mathbb{Q}})^{G_{\mathbb{Q}}}$ und $E^D(\mathbb{Q}) = E^D(\overline{\mathbb{Q}})^{G_{\mathbb{Q}}}$ können aber stark voneinander abweichen. Sei

$$M_f^r(z) := |\{D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid D \text{ quadratfrei}, |D| \leq z, \mathrm{rg}(E^D(\mathbb{Q})) \geq r\}|.$$

Diese Funktion zählt die quadratischen Twists vom Rang $\geq r$, ohne offensichtlich $\mathbb{Q}$-isomorphe Twists E^D und E^{Da^2} doppelt zu zählen. In der Serie von Arbeiten [GM91], [ST95], [RS01], [RS02], [RS04] wurde unter anderem folgendes gezeigt.

Satz (Gouvêa & Mazur 1991, Stewart & Top 1995, Rubin & Silverberg 2001-2004)

1. Für jedes quadratfreie Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 3 gilt $M_f^1(z) \gg \sqrt{z}$. Insbesondere gibt es unendlich viele $D \in \mathbb{Q}^\times/2$ mit $\mathrm{rg}(E^D(\mathbb{Q})) \geq 1$.

2. Die folgende Tabelle gibt für gewisse $f \in \mathbb{Q}[X]$ und kleine Werte von r Auskunft über über das asymptotische Verhalten von $M_f^r(z)$.

$f(X)$	$M_f^r(z)$
$f(X) = X^3 + aX + b, ab \neq 0$	$M_f^2(z) \gg \sqrt[7]{z}\log(z)^{-2}$
$f(X) = X(X-a)(X-c^2a)$, $a \in \mathbb{Q}^\times, c \in \mathbb{Q}^\times \setminus \{\pm 1\}$	$M_f^3(z) \gg \sqrt[6]{z}$
$f(X) = X(X-1)(X - \frac{1-a^2}{a^2+2}), a \in \mathbb{Q}^\times \setminus \{\pm 1\}$	$M_f^4(z) \to \infty$

Unter der Paritätsvermutung kann man etwas schärfere Ergebnisse erzielen. Es ist nicht bekannt, ob für f quadratfrei vom Grad 3 ein $c_f \in \mathbb{R}$ existiert mit $\mathrm{rg}(E_f^D(\mathbb{Q})) \leq c_f$ für alle $D \in \mathbb{Q}^\times$. Hierzu wurden kontroverse Vermutungen ausgesprochen. Siehe 4.3 für eine genauere Diskussion bestehender Ergebnisse und Vermutungen.

Sei k ein endlich erzeugter Hilbert-Körper und $n \geq 2$ eine nicht durch $\mathrm{char}(k)$ teilbare Zahl. Wir untersuchen im 4. Kapitel (projektive, glatte) superelliptische Kurven $C_{f,n}$ mit affiner Gleichung von der Form

$$C_{f,n} : Y^n = f(X)$$

und deren Twists mit affiner Gleichung

$$C_{f,n}^D : DY^n = f(X).$$

Sei $J_{f,n}^D$ die Jacobi-Varietät von $C_{f,n}^D$. Über den Mordell-Weil-Rang in solchen Familien $(C_{f,n}^D)_{D\in k^\times}$ von Twists superelliptischer Kurven können wir folgendes zeigen. (Wir beschränken uns an dieser Stelle auf die wichtigsten Ergebnisse.)

1. Wenn ein für die Überlagerung $C_{f,n} \to \mathbb{P}_1$ rein-verzweigter, k-rationaler Punkt existiert, und das Geschlecht von $C_{f,n}$ positiv ist, dann gilt

$$\mathrm{rg}(J_{f,n}^D(k)) \geq 1$$

für unendlich viele $D \in k^\times/n$.

2. Für jedes $n \geq 2$, das teilerfremd zu $\mathrm{char}(k)$ ist, und jedes $r \in \mathbb{N}$ können wir separable Polynome $f(X) \in k[X]$ derart angeben, dass $\mathrm{rg}(J_{f,n}^D(k)) \geq r$ für unendlich viele $D \in k^\times/n$ gilt.

Wir bemerken des weiteren, dass $\mathrm{rg}(J_{f,n}^D(k))$ durch $n-1$ teilbar ist, wenn n prim ist, und $k^\times$ die n-ten Einheitswurzeln enthält. Über den Mordell-Weil-Rang in Familien von Twists hyperelliptischer Kurven haben wir die folgenden Ergebnisse: Sei $n = 2$ und $f(X) \in k[X]$ ein separables, quadratfreies Polynom vom Grad $d \geq 3$. Entweder sei d ungerade oder $f(X)$ möge eine k-rationale Nullstelle haben.

1. Es gibt unendlich viele $D \in k^\times/2$ mit $\mathrm{rg}(J_{f,2}^D(k)) \geq \mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$.

2. Wir kennen diverse Beispiele für Polynome f mit obigen Eigenschaften derart, dass sogar $\mathrm{rg}(J_{f,2}^D(k)) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$ für unendlich viele $D \in k^\times/2$ gilt.

Im Sonderfall $k = \mathbb{Q}$ erhalten wir in Kombination mit Ergebnissen von Stewart und Top asymptotische Aussagen, die völlig analog zu den asymptotischen Aussagen in obigem Satz von Gouvea, Mazur et. al. sind.

Wir erläutern nun den engen Zusammenhang zwischen der Frage von Frey und Jarden und unseren obigen Ergebnissen zum Mordell-Weil-Rang in Familien von Twists. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall hyperelliptischer Kurven. Sei $E|k$ eine endliche Kummer-Erweiterung vom Exponent 2 und $\Delta := \frac{E^{\times 2}\cap k^\times}{k^{\times 2}}$. Dann gilt die Rangformel

$$\mathrm{rg}(J_{f,2}(E)) = \sum_{D\in\Delta} \mathrm{rg}(J_{f,2}^D(k)).$$

Sei nun $\Omega|k$ die maximale Kummererweiterung vom Exponent 2. Aus obigem Satz von Rosen und Wong folgt, dass $J_{f,2}(\Omega)$ von unendlichem Rang ist. In Kapitel 3 wird ein Alternativbeweis dafür mitentstehen. Die Aussage, dass $\mathrm{rg}(J_{f,2}(\Omega))$ von unendlichem Rang ist, ist nach obiger Rangformel äquivalent zu der Aussage, dass $\mathrm{rg}(J_{f,2}^D(k)) \geq 1$ für unendlich viele $D \in k^\times/2$ gilt, und beide Aussagen sind wahr. Die Ergebnisse, die wir im 4. Kapitel beweisen, betreffen die weitergehende Frage, wann es unendlich viele Twists von höherem Rang als 1 gibt.

Die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit finden sich in Kapitel 3 und 4. Kapitel 1 enthält für die Arbeit sehr wichtige, aber großenteils wohlbekannte Tatsachen über Galois-Überlagerungen. Kapitel 2 enthält eine Übersicht über die Theorie der Hilbert-Körper, die Formulierung des Begriffes der abstrakten Hilbert-Menge und einen Spezialisierungssatz für abelsche Varietäten über Hilbert-Körpern, der in vielen Beweisen die zentrale Rolle spielt. Dem eiligen Leser wird empfohlen, evtl. nach einem kurzen Blick auf die Sätze 1.4.6, 1.4.7 und 1.4.8 am Ende von Kapitel 1 und auf die in Abschnitt 2.1 dargelegte Definition von gewöhnlichen und abstrakten Hilbert-Mengen, mit der Lektüre von Abschnitt 2.3 zu beginnen und dann mit Kapitel 3 und 4 fortzufahren.

Danksagung:

Bei der Erstellung dieser Arbeit ist mir von mehrerlei Seite Hilfe zuteil geworden. Prof. Silverman hat mir per E-Mail eine Frage zu seinem Spezialisierungssatz beantwortet. Prof. Lange hat mir seine Einschätzung zu einem Problem über Kurven auf abelschen Varietäten per E-Mail mitgeteilt. Ich hatte die Gelegenheit, mit Prof. Brian Conrad eine längere Korrespondenz über die Möglichkeit zu führen, den Spezialisierungssatz von Silverman auf den Fall globaler Körper positiver Charakteristik zu übertragen. Er hat mir ein Preprint zukommen lassen, in dem er eine solche Verallgemeinerung beweist. Prof. Husemöller hat mit mir eine Diskussion über einige Teile der vorliegenden Arbeit geführt. Schließlich hat mir Prof. Forster mehrfach die Gelegenheit gegeben, im Oberseminar Komplexe Analysis der LMU über meine Arbeit vorzutragen. Mein Kollege und Freund Dr. Christian Wittmann ist seit langem ein anregender Gesprächspartner zu diversen mathematischen Problemen. All diesen Mathematikern danke ich für ihre Kooperation und Hilfe.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kollegen vom Institut 1 der Fakultät für Informatik der Universität der Bundeswehr für die angenehme und freundschaftliche Zusammenarbeit in den letzten Jahren.

Mein besonderer und herzlicher Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Greither. Seiner konstanten Hilfe und Ermutigung ist die Entstehung der vorliegenden Arbeit ganz wesentlich zu verdanken. Prof. Greither hat mit mir diverse längere Diskussionen über die Arbeit geführt und an vielen Stellen Verbesserungsvorschläge gemacht und Anregungen gegeben. Kontinuierlich ist er mir bei Problemen aller Art mit Rat und Tat zur Seite gestanden.

München, Dezember 2004 *Sebastian Petersen*

Kapitel 1

Grundlagen: Galois-Überlagerungen

1.1 Grundlegende Notationen

Wir halten es für nötig, einige Begriffe und Notationen festzulegen, die in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt werden.

Sei k ein Körper. Wir beginnen mit der Definition einiger Kategorien von k-Schemata.

1. Wir bezeichnen mit Sch_k die Kategorie der k-Schemata. $\mathrm{Mor}_k(X, Y)$ bedeutet die Morphismenmenge in dieser Kategorie. (Wir bezeichnen wie heute üblich die Objekte als Schema, die in [EGA] mit Präschema bezeichnet wurden. Die Objekte, welche in [EGA] als Schema bezeichnet wurden, nennen wir separierte Schemata. In diesem Punkt halten wir es wie Hartshorne [H]. Abgesehen davon stimmt unsere Notation weitgehend mit der in [EGA] verwendeteten überein.)

2. Mit Sch_k^* wird die Kategorie der punktierten k-Schemata (d.h. der Paare (X, P) mit $X \in \mathrm{Sch}_k$ und $P \in X(k)$) bezeichnet. Sind $(X, P), (Y, Q) \in \mathrm{Sch}_k^*$, so sei

   $$\mathrm{Mor}_k^*((X, P), (Y, Q)) := \{f \in \mathrm{Mor}_k(X, Y) \mid f(P) = Q\}.$$

   Dies ist die Morphismenmenge in Sch_k^*. Wenn klar ist, welche Bezugspunkte gemeint sind, schreiben wir einfach $\mathrm{Mor}_k^*(X, Y)$ für diese Morphismenmenge. Als Bezugspunkt eines Gruppenschemas nehmen wir immer das neutrale Element.

3. Eine **k-Varietät** ist ein separiertes, algebraisches k-Schema X, das geometrisch integer ist (d.h. $X \otimes_k \overline{k}$ ist integer). Sei Var_k die Kategorie der k-Varietäten als volle Unterkategorie von Sch_k und Var_k^* die entsprechende volle Unterkategorie von Sch_k^*.

4. Eine **k-Kurve** ist eine 1-dimensionale k-Varietät. Sei Cur_k die Kategorie der Kurven über k als volle Unterkategorie von Sch_k und Cur_k^* die entsprechende volle Unterkategorie von Sch_k^*.

5. Für Gruppenschemata G, H über k sei $\mathrm{Hom}_k(G, H)$ die Menge der Morphismen $G \to H$, welche die Gruppenstruktur respektieren. Die Kategorie der Gruppenschemata über k wird mit Grp_k bezeichnet.

6. Eine **abelsche k-Varietät** ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der *projektiven* k-Varietäten. Die Kategorie der abelschen Varietäten über k wird mit AbVar_k bezeichnet. Es ist eine volle Unterkategorie von Grp_k.

Sei X ein Schema und $x \in X$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe von X, mit $\mathcal{O}_{X,x}$ den lokalen Ring von X in x, mit $\mathfrak{m}_{X,x}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ und mit $k(x)$ den Restklassenkörper des lokalen Ringes $\mathcal{O}_{X,x}$. Unter dem **Funktionenkörper** eines integren Schemas X verstehen wir den Restklassenkörper $k(\xi)$ im generischen Punkt ξ von X. Wir setzen $R(X) := k(\xi)$. Für $U \subset X$ offen bezeichnet $\Gamma(U, -)$ wie üblich den **Schnittfunktor**. Wir nennen X **normal** genau dann, wenn X integer ist, und für jede offene, affine Teilmenge $U \subset X$ der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ganz-abgeschlossen (in seinem Quotientenkörper) $R(X)$ ist. Des weiteren nennen wir X **regulär** genau dann, wenn jeder lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von X regulär ist.

Sei X ein Schema und E ein Körper. Sei

$$u \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(E), X)$$

ein geometrischer Punkt. Sei $*$ der einzige Punkt in dem topologischen Raum $\mathrm{Spec}(E)$ und $x := u(*)$. Wir sagen dann, der geometrische Punkt u ist **lokalisiert in x**. Bezeichnet

$$g : \mathrm{Spec}(k(x)) \to X$$

die kanonische Abbildung, so existiert genau ein Morphismus $w : \mathrm{Spec}(E) \to \mathrm{Spec}(k(x))$ mit $g \circ w = u$. Es gibt genau eine Einbettung $\alpha : k(x) \to E$ mit $w = \mathrm{Spec}(\alpha)$. (Die in x lokalisierten geometrischen Punkte in $\mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(E), X)$ entsprechen also eindeutig den Einbettungen $k(x) \to E$.) Wir setzen $k(u) := \mathrm{im}(\alpha)$ und nennen $k(u)$ den **Restklassenkörper des geometrischen Punktes** u. $k(u)$ ist also ein Unterkörper von E, der k-isomorph zu $k(x)$ ist. Die Unterscheidung von $k(x)$ und $k(u)$ ist in vielen Zusammenhängen nicht besonders wichtig.

Beispiel: Sei

$$S := \mathrm{Spec}\left(\frac{\mathbb{Q}[X, Y]}{Y^5 - X^3 - X}\right).$$

Wir betrachten die $\mathbb{C}$-rationalen geometrischen Punkte $u_1 := (1, \sqrt[5]{2}) \in S(\mathbb{C})$ und $u_2 := (1, \exp(\frac{2\pi i}{5})\sqrt[5]{2})$. Beide sind in dem selben Punkt $x \in S$ lokalisiert. Es gilt

$$k(x) = \mathrm{Spec}\left(\frac{\mathbb{Q}[Y]}{Y^5 - 2}\right),$$

$k(u_1) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ und $k(u_2) = \mathbb{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{5})\sqrt[5]{2})$.

Ist k ein Körper, so wird der **separable Abschluß** von k mit k^s, der **algebraische Abschluß** von k mit $\overline{k}$ und die **maximale abelsche Erweiterung** von k mit k^{ab} bezeichnet. Wir erinnern an die folgenden Aussagen, die z.B. in [EGA, IV.4.-IV.6., IV.17.5] bewiesen werden.

Bemerkung 1.1.1 *1. Ist X eine (geometrisch reguläre) k-Varietät, so ist $X_K := X \otimes_k K$ für* jeden *Erweiterungskörper $K|k$ eine (geometrisch reguläre) K-Varietät.*

2. Sind X, Y (geometrisch reguläre) k-Varietäten, so ist $X \times_k Y$ eine (geometrisch reguläre) k-Varietät. Ferner ist $X(k^s)$ nichtleer.

3. Sei X ein separiertes, algebraisches, integres k-Schema. Genau dann ist X eine Varietät (d.h. geometrisch integer), wenn $R(X) \otimes_k \overline{k}$ ein Körper ist.

4. Sei X eine k-Varietät. Genau dann ist X geometrisch regulär, wenn X glatt ist, d.h. genau dann, wenn die Garbe der Kähler-Differentiale $\Omega_{X|k}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang $\dim(X) = \mathrm{trdeg}_k(R(X))$ ist. Ist dies der Fall, so ist $\Omega_{R(X)|k}$ ein $R(X)$-Vektorraum der Dimension $\mathrm{trdeg}_k(R(X))$, d.h. $R(X)|k$ ist separabel erzeugt.

Wenn $K|k$ eine Galoiserweiterung ist, dann bezeichnen wir die **Galoisgruppe** mit $G_{K|k} := \mathrm{Aut}_k(\mathrm{Spec}(K))$. Sie operiert *von links* auf $\mathrm{Spec}(K)$ und *von rechts* auf K vermöge $x^\sigma = \Gamma(\sigma)x$ ($x \in k$, $\sigma \in G_{K|k}$). Mit $G_k := G_{k^s|k}$ wird die absolute Galoisgruppe von k bezeichnet. Sei nun $K|k$ eine Galoiserweiterung und $G := G_{K|k}$. Sind X und Y k-Varietäten, so operiert G *von rechts* auf $\mathrm{Mor}_K(X_K, Y_K)$ vermöge

$$f^\sigma := (Id_Y \times \sigma^{-1}) \circ f \circ (Id_X \times \sigma).$$

Die kanonische Abbildung $\mathrm{Mor}_k(X,Y) \to \mathrm{Mor}_K(X_K, Y_K)$ ist injektiv und das Bild ist gerade $\mathrm{Mor}_K(X_K, Y_K)^G$. (Ein Beweis für diese Aussage wird in 1.2.8 mitentstehen.) G operiert auch auf $X(K) = \mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(K), X)$ *von rechts* vermöge $x^\sigma = x \circ \sigma$ und die kanonische Bijektion

$$X(K) \cong \mathrm{Mor}_K(\mathrm{Spec}(K), X_K)$$

ist G-linear.

Sei S ein Schema und X ein S-Schema. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}_S(X)$ oder mit $\mathrm{Aut}(X|S)$ die Gruppe der in $\mathrm{Mor}_S(X,X)$ liegenden Isomorphismen.

Einige Standardeigenschften von Morphismen werden im Folgenden besonders wichtig sein. Sei $p : X \to Y$ ein Morphismus. Man nennt p **affin** genau dann, wenn für jede offene, affine Teilmenge $U \subset Y$ die Menge $p^{-1}(U)$ wieder affin ist. p heißt **endlich** (bzw. **ganz**), wenn p *affin* ist, und $\Gamma(p^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ eine endliche (bzw. ganze) $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$-Algebra ist, für jede offene, affine Menge $U \subset Y$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen zu rationalen Abbildungen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall von algebraischen, separierten, integren Schemata über einem Körper k. Seien X und Y

algebraische, separierte, integre k-Schemata. Sei R die Menge der Paare (U, f), die aus einer nichtleeren, offenen Menge $U \subset X$ und einem k-Morphismus $f : U \to Y$ bestehen. Auf R betrachtet man die Äquivalenzrelation

$$(U, f) \sim (V, g) \;:\Longleftrightarrow\; f|U \cap V = g|U \cap V.$$

Sei $\mathrm{Rat}_k(X, Y)$ die Menge der Äquivalenzklassen von R modulo $\sim$. Die Elemente von $\mathrm{Rat}_k(X, Y)$ heißen **rationale Abbildungen**. Die Komposition von rationalen Abbildungen wird in naheliegender Weise definiert. Ist ξ der generische Punkt von X, so ist durch

$$h_{X,Y} : \mathrm{Rat}_k(X, Y) \to \mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(R(X)), Y),\ (U, f) \mapsto f \circ (\mathrm{Spec}(R(X)) \to U)$$

eine Abbildung gegeben. Diese ist bijektiv nach [EGA, I.7.1.11].

Die naheliegende Abbildung

$$g_{X,Y} : \mathrm{Mor}_k(X, Y) \to \mathrm{Rat}_k(X, Y), f \mapsto (X, f) \text{ modulo } \sim$$

ist injektiv nach [EGA, I.7.2.2]. ($g_{X,Y}$ ist natürlich i.a. nicht surjektiv.)

Proposition 1.1.2 *Seien X, Y algebraische, separierte, integre k-Schemata.*

1. *Ist Y eine abelsche Varietät und X eine geometrisch reguläre k-Varietät, so ist $g_{X,Y}$ bijektiv.*
2. *Ist X eine reguläre Kurve und Y eigentlich über k, so ist $g_{X,Y}$ bijektiv.*

Beweis:

1. Siehe [Mi86a, 3.1.].
2. Siehe [EGA, II.7.4.9].

□

1.2 Der Quotient eines Schemas modulo einer endlichen Gruppe

Diese Arbeit setzt diverse Grundlagen der algebraischen Geometrie im Sinne von [EGA] und [SGA1] als bekannt voraus. Eigentlich hätte man auch den Begriff des Quotienten eines Schemas modulo einer (zulässig operierenden) endlichen Gruppe im Bereich dieser Grundlagen anzusiedeln. Aufgrund ihrer zentralen Bedeutung in diversen Teilen der vorliegenden Arbeit haben wir diesem Begriff einen eigenen Abschnitt gewidmet. Die wichtigste Referenz für diesen Abschnitt ist [SGA1, Exposé V].

Sei X ein Schema und Γ eine endliche Gruppe, die (von links) auf X operiert. Eine solche Operation ist durch einen Homomorphismus $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X)$ gegeben. Man nennt die Operation **zulässig** genau dann, wenn X eine offene, affine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ besitzt, die aus Γ-invarianten Mengen U_i besteht. Ist X ein S-Schema, so sagt man, dass Γ **durch S-Morphismen operiert** genau dann, wenn $\rho(\sigma) \in \mathrm{Aut}_S(X)$ für alle $\sigma \in \Gamma$ gilt.

Bemerkung 1.2.1 *1. Wenn $p : X \to S$ ein* über S affines *S-Schema ist (d.h. der Morphismus p ist affin) und Γ auf X durch S-Morphismen operiert, so ist diese Operation automatisch zulässig, da für jede offene, affine Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von S durch $(p^{-1}(V_i))_{i\in I}$ eine offene, affine, Γ-invariante Überdeckung von X gegeben ist.*

2. *Insbesondere ist jede Operation einer endlichen Gruppe Γ auf einem* affinen *Schema X zulässig.*

Sei nun X ein Schema, auf dem die endliche Gruppe Γ (von links) operiert. Für jedes Schema Y operiert dann Γ *von rechts* auf $\mathrm{Mor}(X, Y)$ vermöge $f^\sigma := f \circ \sigma$. Ist der Funktor

$$F : Z \mapsto \mathrm{Mor}(X, Z)^\Gamma$$

auf der Kategorie der Schemata darstellbar und (Y, p) ein darstellendes Objekt, so sagt man, **der Quotient von X modulo Γ existiert** und nennt (Y, p) den **Quotienten von X modulo Γ.** Oft schreibt man X/Γ für den Quotienten. Wenn der Quotient existiert, so ist er eindeutig.

Bemerkung: Sei $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X)$ eine Operation der endlichen Gruppe Γ auf dem Schema X.

1. Falls der Quotient (Y, p) von X modulo Γ existiert und p *affin* ist, so operiert Γ durch Y-Morphismen und die Operation ist zulässig nach obiger Bemerkung. (Wir werden im Folgenden die Umkehrung beweisen: Im Fall einer zulässigen Operation existiert der Quotient und p ist affin.)

2. Sei $\Gamma' \subset \mathrm{Aut}(X)$ das Bild von ρ. Dann gilt für jedes Schema Z

$$\mathrm{Mor}(X, Z)^\Gamma = \mathrm{Mor}(X, Z)^{\Gamma'}.$$

   Sei Y ein Schema und $p \in \mathrm{Mor}(X, Y)^\Gamma$. Dann gilt: Genau dann ist (Y, p) ein Quotient von X modulo Γ, wenn (Y, p) ein Quotient von X modulo Γ' ist. Man kann sich also bei der Diskussion von Quotienten auf den Fall zurückziehen, in dem Γ treu (d.h. ρ ist injektiv) auf X operiert.

Wir beginnen mit der Diskussion von Quotienten im Sonderfall affiner Schemata.

Proposition 1.2.2 *Sei B ein Ring. Die endliche Gruppe Γ operiere auf $X := \mathrm{Spec}(B)$ von links und somit auf B von rechts. Sei $A := B^\Gamma$, $Y := \mathrm{Spec}(A)$ und $p : X \to Y$ die von der Inklusion induzierte Abbildung. Dann gilt:*

1. *p ist surjektiv und ganz.*

2. *Für jede multiplikative Menge $S \subset A$ gilt $S^{-1}A = (S^{-1}B)^\Gamma$. Insbesondere ist die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_Y \to p_*(\mathcal{O}_X)^\Gamma$ bijektiv.*

3. *$p^{-1}p(P) = \{\sigma P \mid \sigma \in \Gamma\}$ für $P \in X$.*

4. *p ist offen.*

Beweis:

1. Sei $b \in B$. Dann gilt
$$f(X) := \prod_{\sigma\in\Gamma}(X - b^\sigma) \in B^\Gamma[X]$$
und wegen $f(b) = 0$ ist b ganz über $A = B^\Gamma$. Somit ist p ganz. p ist dominant, da $p^\sharp : B^\Gamma \to B$ injektiv ist. Ferner ist p als ganzer Morphismus abgeschlossen. (Dies folgt unter Benutzung des Satzes von Cohen-Seidenberg, siehe [EGA, II.6.1.10].) Also ist p surjektiv.

2. Wir haben zu zeigen, dass $S^{-1}(B^\Gamma) = (S^{-1}B)^\Gamma$ gilt. Man hat eine exakte Folge
$$0 \to B^\Gamma \to B \to \prod_{\sigma\in\Gamma} B$$
von A-Moduln. (Die rechte Abbildung ist durch $x \mapsto (x - x^\sigma)_\sigma$ gegeben.) Tensoriert man mit der flachen A-Algebra $S^{-1}A$, so bleibt die Sequenz exakt. Daraus folgt die Behauptung.

3. Offenbar gilt $p \circ \sigma = p$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Daraus folgt bereits die Inklusion
$$p^{-1}p(P) \supset \{\sigma P \,|\, \sigma \in \Gamma\}.$$
Sei $Q := p(P)$. Wegen 2. darf man im Beweis der umgekehrten Inklusion annehmen, dass A lokal und Q das maximale Ideal von A ist. B/QB ist dann als ganze Algebra über dem Körper A/Q null-dimensional. Somit besteht $p^{-1}p(P)$ aus maximalen Idealen von B.

   Widerspruchsannahme: Es existiert ein $M \in p^{-1}p(P)$ mit $M \neq \sigma(P)$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Dann existiert nach dem chinesischen Restsatz ein $b \in B$ mit $b \in M$ und $b - 1 \in \sigma(P)$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Wegen $b \in M$ und $M \cap A = Q$ gilt
$$c := \prod_{\sigma\in\Gamma} b^\sigma \in Q \subset P.$$
Andererseits folgt $b^\sigma \notin P$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Dies impliziert $c \notin P$. Widerspruch.

4. Sei $U \subset X$ offen. Wir zeigen, dass $p(U)$ offen ist. Wir haben gesehen, dass p abgeschlossen und surjektiv ist. Es gilt
$$Y \setminus p(U) = p(X \setminus p^{-1}p(U)).$$
Somit genügt es zu zeigen, dass $p^{-1}p(U)$ offen ist. Dies folgt aber daraus, dass nach 3.
$$p^{-1}p(U) = \bigcup_{\sigma\in\Gamma} \sigma U$$
gilt.

$\square$

Proposition 1.2.3 *Sei die Situation obiger Proposition 1.2.2 zugrunde gelegt. Dann ist für jedes Schema Z die Abbildung*

$$\alpha_Z : \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z)^\Gamma, \quad f \mapsto f \circ p$$

bijektiv. (Z braucht nicht affin zu sein!) D.h. (Y,p) ist der Quotient von X modulo Γ.

Beweis: Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte.

1. Sei zunächst $Z = \mathrm{Spec}(C)$ mit einem Ring C. Dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}(X,Z)^\Gamma &= \mathrm{Hom}(C,B)^\Gamma = \mathrm{Hom}(C,B^\Gamma) = \\ &= \mathrm{Mor}(Y,Z).\end{aligned}$$

   (Wir bezeichnen hier die Menge der Ringhomomorphismen $C \to B$ mit $\mathrm{Hom}(C,B)$.) Also ist α_Z für jedes *affine* Schema Z bijektiv.

2. Sei Z ein Schema und $f \in \mathrm{Mor}(X,Z)^\Gamma$. Als unmittelbare Folgerung aus 1. erhält man: Falls eine offene, affine Menge $W \subset Z$ existiert mit $f^{-1}(W) = X$, so besteht $\alpha_Z^{-1}(f)$ aus genau einem Element.

3. Wir nennen eine offene Menge $V \subset Y$ fundamental genau dann, wenn ein $f \in A$ mit $V = \mathrm{Spec}(A_f)$ existiert. Ist $U \subset X$ eine Γ-invariante, offene Menge und $P \in U$, so gilt $U = p^{-1}p(U)$ und, da $p(U)$ nach 1.2.2 offen ist, existiert eine fundamentale, offene Umgebung V von $p(P)$ mit $p^{-1}(V) \subset U$. Sei nun $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, die aus Γ-invarianten, offenen Mengen besteht. Wir nennen eine offene Teilmenge $V \subset Y$ der Überdeckung untergeordnet genau dann, wenn ein i existiert mit $p^{-1}(V) \subset U_i$. Obiges Argument zeigt, dass eine Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von Y existiert, die aus fundamentalen, offenen, der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordneten Mengen besteht.

4. Sei Z ein Schema und $f \in \mathrm{Mor}(X,Z)^\Gamma$. Sei $(W_i)_{i\in I}$ eine offene, affine Überdeckung von Z und $U_i := f^{-1}(W_i)$. Dann ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Γ-invariante, offene Überdeckung von X. Sei $V = \mathrm{Spec}(A_g)$ eine der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete, fundamentale, offene Teilmenge von Y. Dann ist $U := p^{-1}(V) = \mathrm{Spec}(B_g)$ in einem U_i enthalten. $f|U \to Z$ faktorisiert sich durch die offene, affine Teilmenge W_i von Z. Ferner gilt $(B_g)^\Gamma = A_g$ nach 1.2.2. Nach 2. (angewendet mit U statt X und V statt Y) folgt, dass *genau ein* Morphismus $F : V \to Z$ existiert mit $F \circ (p|U \to V) = f|U$.

5. Sei die Situation 4. beibehalten. Dann existiert nach 3. eine Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von Y, die der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnet ist, und aus fundamentalen, offenen Mengen besteht. Sei $U'_j := p^{-1}(V_j)$. Nach 4. existiert für jedes j genau ein Morphismus $F_j : V_j \to Z$ mit $F_j \circ (p|U'_j \to V_j) = f|U'_j$. Nach der Eindeutigkeitsaussage in 4. gilt für jede in $V_j \cap V_k$ enthaltene, fundamentale offene Menge V schon $F_j|V = F_k|V$. Deshalb kann man die F_j verkleben zu einem Morphismus $F : Y \to Z$, der $F|V_j = F_j$ erfüllt.

Daraus folgt $F \circ p|U'_j = f|U'_j$ für alle j, d.h. $F \circ p = f$. Sei $H : Y \to Z$ ein Morphismus mit $H \circ p = f$. Dann muss $H|V_j = F_j = F|V_j$ für alle j gelten. Daher gilt $H = F$. Dies zeigt, dass α_Z für jedes Schema Z bijektiv ist.

□

Proposition 1.2.4 *Sei X ein Schema, auf dem die endliche Gruppe Γ operiert. Sei Y ein weiteres Schema und $p \in \mathrm{Mor}(X,Y)^\Gamma$. Wir setzen voraus, dass p affin ist, und dass die kanonische Abbildung $p^\sharp : \mathcal{O}_Y \to p_*(\mathcal{O}_X)^\Gamma$ bijektiv ist. Dann ist die Operation automatisch zulässig und es gilt:*

1. *p ist offen, surjektiv und ganz.*
2. *$p^{-1}p(P) = \{\sigma P \,|\, \sigma \in \Gamma\}$ für $P \in X$.*
3. *(Y,p) ist Quotient von X modulo Γ.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist für jede offene, affine Menge $V \subset Y$ das Urbild $U := p^{-1}(V) = \mathrm{Spec}(B)$ affin und $V = \mathrm{Spec}(B^\Gamma)$. Nach 1.2.2 ist $p|p^{-1}(V) = U \to V$ offen, surjektiv und ganz. Daraus folgt, dass p offen, surjektiv und ganz ist. Dies zeigt 1. Auch die 2. Behauptung folgt unmittelbar aus der entsprechenden Aussage in 1.2.2.

Sei Z ein beliebiges Schema. Sei $V \subset Y$ eine beliebige offene, affine Menge und $p_V : p^{-1}(V) \to V$ die Restriktion von p. Dann ist nach 1.2.2

$$\mathrm{Mor}(V,Z) \to \mathrm{Mor}(p^{-1}(V),Z)^\Gamma,\ g \mapsto g \circ p_V$$

bijektiv nach 1.2.2. $\mathrm{Mor}(-,Z)$ ist eine Garbe von Mengen auf Y. Da der Funktor $-^\Gamma$ auf der Kategorie der Γ-Mengen Differenzkerndiagramme respektiert, muss $\mathrm{Mor}(-,Z)^\Gamma$ eine Garbe von Mengen auf X sein und es folgt, dass

$$\mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z)^\Gamma,\ g \mapsto g \circ p$$

bijektiv ist □

Folgerung: *Sei die Situation der Proposition zugrunde gelegt. Sei $U \subset X$ eine offene, Γ-invariante Menge. (U braucht nicht affin zu sein.) Sei $q : U \to V := p(U)$ die Restriktion von p. Dann ist $\mathcal{O}_V \to q_*(\mathcal{O}_U)^\Gamma$ bijektiv. Insbesondere ist (V,q) der Quotient von U modulo Γ.*

Bemerkung: Sei $F|k$ eine endliche Körpererweiterung und

$$p : X := \mathrm{Spec}(E) \to Y := \mathrm{Spec}(k)$$

die kanonische Abbildung. Sei $\Gamma := G_{E|k}$ die Galoisgruppe. Genau dann ist (Y,p) Quotient von X modulo Γ, wenn $E^\Gamma = k$ gilt, d.h nach wohlbekannten Sätzen der Galois-Theorie genau dann, wenn $E|k$ separabel und normal ist.

Mit obiger Proposition haben wir ein Kriterium an der Hand, das es erlaubt zu entscheiden, wann das Paar (Y,p) ein Quotient von X modulo der zulässig auf X operierenden, endlichen Gruppe Γ ist. Der folgende Satz besagt unter anderem, dass der Quotient eines Schemas modulo einer zulässig operierenden, endlichen Gruppe Γ existiert.

Satz 1.2.5 *Sei X ein Schema. Die endliche Gruppe Γ operiere zulässig auf X. Dann existiert der Quotient (Y,p) von X modulo Γ. Es gilt:*

1. *p ist offen, surjektiv und ganz.*
2. *Die kanonische Abbildung $p^\sharp : \mathcal{O}_Y \to p_*(\mathcal{O}_X)^\Gamma$ ist bijektiv.*
3. *$p^{-1}p(P) = \{\sigma P \mid \sigma \in \Gamma\}$ für $P \in X$.*

Beweis: Nach obiger Proposition 1.2.4 genügt es zu zeigen, dass ein Schema Y und ein $p \in \mathrm{Mor}(X,Y)^\Gamma$ existieren mit p affin und $p^\sharp : \mathcal{O}_Y \to p_*(\mathcal{O}_X)^\Gamma$ bijektiv.

Da Γ zulässig operiert, existiert eine offene, affine, Γ-invariante Überdeckung $(X_i)_{i\in I}$ von X. $X_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ mit einem Ring B_i. Sei $Y_i := \mathrm{Spec}(B_i^\Gamma)$ und $p_i : X_i \to Y_i$ die von der Inklusion induzierte Abbildung. Nach 1.2.2 ist $\mathcal{O}_{Y_i} \to p_{i,*}(\mathcal{O}_{X_i})^\Gamma$ bijektiv, und p_i ist surjektiv, offen und ganz. Nach 1.2.3 ist (Y_i, p_i) der Quotient von X_i modulo Γ. Sei $Y_{ij} := p_i(X_i \cap X_j)$. Y_{ij} ist offen. Sei

$$p_{ij} := (p_i | X_i \cap X_j \to Y_{ij})$$

der restringierte Morphismus. Dann ist (Y_{ij}, p_{ij}) der Quotient von $X_i \cap X_j$ modulo Γ nach 1.2.4.

Für $i,j \in I$ existiert wegen der Γ-Invarianz von p_{ij} genau ein Morphismus $f_{ij} : Y_{ji} \to Y_{ij}$, der $f_{ij} \circ p_{ji} = p_{ij}$ erfüllt. Man kann nun die Y_{ij} entlang der f_{ij} zu einem Schema Y verkleben. Die p_i induzieren dann eine Projektion $p : X \to Y$ derart, dass $\mathcal{O}_Y \to p_*(\mathcal{O}_X)^\Gamma$ bijektiv ist. Wir verzichten auf die Details, insbesondere auf den Nachweis der Kozykeln-Bedingung. □

Sei nun S ein Schema und X ein S-Schema. Die endliche Gruppe Γ operiere in zulässiger Weise durch S-Morphismen auf X. Sei (Y,p) der Quotient von X Modulo Γ. Dann ist

$$\alpha_Z : \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z)^\Gamma, \quad f \mapsto f \circ p$$

bijektiv. Sei $g_X : X \to S$ die Strukturabbildung. Da Γ durch S-Morphismen operiert gilt $g_X \in \mathrm{Mor}(X,S)^\Gamma$. Sei $g_Y := \alpha_S^{-1}(g_X)$. Dann ist (Y, g_Y) ein S-Schema und $p \in \mathrm{Mor}_S(X,Y)^\Gamma$. Sei nun Z ein beliebiges S-Schema mit Strukturabbildung g_Z. Dann induziert α_Z eine Bijektion

$$\mathrm{Mor}_S(Y,Z) \to \mathrm{Mor}_S(X,Z)^\Gamma, f \mapsto f \circ p.$$

(Dafür hat man sich nur zu überlegen, dass wenn $f : Y \to Z$ ein beliebiger Morphismus ist, für den $F := f \circ p$ ein S-Morphismus ist, schon $f \circ g_Z = g_Y$ gilt. Dies folgt aus der Rechnung

$$p \circ f \circ g_Z = F \circ g_Z = g_X = p \circ g_Y$$

und der Bijektivität von α_S.) (Y,p) ist also dann automatisch auch darstellendes Objekt des Funktors $\mathrm{Mor}_S(X,-)^\Gamma$ auf der Kategorie der S-Schemata.

Die folgende Proposition benennt einige Eigenschaften, die sich von X auf seine Quotienten vererben. Ist T ein S-Schema, so nennt man $T|S$ affin, wenn der Morphismus $T \to S$ affin ist.

Proposition 1.2.6 *Sei X ein S-Schema. Die endliche Gruppe Γ operiere in zulässiger Weise durch S-Morphismen auf X. Sei (Y,p) ein Quotient von X modulo Γ (mit der oben definierten Struktur als S-Schema). Dann gilt:*

1. *Genau dann ist $X|S$ affin, wenn $Y|S$ affin ist.*
2. *Genau dann ist $X|S$ separiert, wenn $Y|S$ separiert ist.*
3. *Ist S noethersch und $X|S$ von endlichem Typ, so ist $Y|S$ von endlichem Typ und p ein endlicher Morphismus.*
4. *Ist X integer, so ist Y integer.*
5. *Ist X normal, so ist Y normal.*

Beweis: Für den Beweis der Behauptungen 1. - 3. verweisen wir auf [SGA1, Exposé V]. Wir zeigen 4. und 5.

4. Wir nehmen an, dass X integer ist. Dann ist Y irreduzibel, denn p ist surjektiv. Sei $V = \mathrm{Spec}(A) \subset Y$ offen und affin. Wir haben zu zeigen, dass A integer ist. Dies folgt daraus, dass $A = p_*(\mathcal{O}_X)^\Gamma(V)$ Unterring des Integritätsringes $p_*(\mathcal{O}_X)(V)$ ist.
5. Wir nehmen an, dass X normal (d.h. integer und ganz abgeschlossen) ist. Sei $V = \mathrm{Spec}(A) \subset Y$ offen und affin. Dann ist $p^{-1}(V) = \mathrm{Spec}(B)$ offen und affin und es gilt $A = B^\Gamma$. B ist ein normaler Ring. Wir zeigen, dass auch A normal ist. Sei K der Quotientenkörper von A und F der Quotientenkörper von B. K bettet sich ein in F. Sei $x \in K$ ganz über A. Dann liegt x auch in F und ist ganz über B. Somit gilt $x \in B$. Ferner existieren $a, b \in A$ mit $b \neq 0$ und $x = \frac{a}{b}$. Daher gilt $xb = a$. Für $\sigma \in \Gamma$ gilt $x^\sigma b = a$, d.h. $x \in B^\Gamma = A$. Daher ist A normal.

□

Sehr wichtig ist der folgende Satz über den flachen Basiswechsel.

Satz 1.2.7 *Sei X ein S-Schema. Die endliche Gruppe Γ operiere in zulässiger Weise durch S-Morphismen auf X. Sei (Y,p) ein Quotient von X modulo Γ. Sei T ein flaches S-Schema. Dann ist durch*

$$\Gamma \to \mathrm{Aut}_T(X \times_S T), \quad \sigma \mapsto \sigma \times_S Id_T$$

eine zulässige Operation von Γ auf $X \times_S T$ durch T-Morphismen gegeben und $(Y \times_S T, p \times_S Id_T)$ ist Quotient von $X \times_S T$ modulo Γ.

Beweis: Mit $Y' := Y \times_S T$ ist $Y'|Y$ flach und $X \times_S T$ identifiziert sich mit dem Faserprodukt $X \times_Y Y'$. D.h. es bestehen kartesische Quadrate

$$\begin{array}{ccccc} X \times_S T & \to & Y' & \to & T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y & \to & S. \end{array}$$

Die Abbildung

$$p \times_S Id_T : X \times_S T \to Y \times_S T \cong Y'$$

entspricht unter dem Isomorphismus $X \times_S T \cong X \times_Y Y'$ einfach der Projektion $q : X \times_Y Y' \to Y'$. (Man darf also de facto $Y = S$ annehmen.) Γ operiert auf $X' := X \times_Y Y'$ durch Y'-Morphismen. Mit $X|Y$ ist $X'|Y'$ affin. Also ist die Operation zulässig. Wir zeigen, dass $\mathcal{O}_{Y'} \to q_*(\mathcal{O}_{X'})^\Gamma$ bijektiv ist. Dafür darf man $Y = \mathrm{Spec}(A)$ und $Y' = \mathrm{Spec}(A')$ affin annehmen. Dann muss aber auch $X = \mathrm{Spec}(B)$ affin sein. Es gilt $X' = \mathrm{Spec}(B \otimes_A A')$. Wir wissen, dass $B^\Gamma = A$ gilt und haben $(B \otimes_A A')^\Gamma = A'$ nachzuweisen. Wegen $B^\Gamma = A$ besteht eine exakte Folge von A-Moduln

$$0 \to A \to B \to \prod_{\sigma \in \Gamma} B,$$

in der die rechte Abbildung durch $x \mapsto (x^\sigma - x)_{\sigma \in \Gamma}$ gegeben ist. Da A' flach über A ist, ist die mit A' tensorierte Folge

$$0 \to A' \to B' \to \prod_{\sigma \in \Gamma} B'$$

wieder exakt. Daher gilt $A' = (B')^\Gamma$. $\square$

Folgerung: *Sei k ein Körper und X ein algebraisches, integres k-Schema, auf dem die endliche Gruppe Γ zulässig durch k-Morphismen operiert. Sei (Y, p) ein Quotient von X modulo Γ. Ist X eine (normale) k-Varietät, so ist Y eine (normale) k-Varietät.*

Beweis: Sei X eine k-Varietät, d.h. für jeden Erweiterungskörper F von k ist X_F ein algebraisches, separiertes, integres F-Schema. Sei $F|k$ ein beliebiger Erweiterungskörper. Da $F|k$ flach ist, identifiziert sich Y_F mit dem Quotient von X_F modulo Γ. Nach 1.2.6 ist Y_F algebraisches, separiertes, integres F-Schema. Demnach ist Y eine k-Varietät. Wenn X normal ist, dann ist auch Y normal nach 1.2.6. $\square$

Bemerkung 1.2.8 Sei k ein Körper und X ein k-Schema. Sei $E|k$ eine endliche Galois-Erweiterung mit Gruppe $G := G_{E|k}$. Sei $p : X_E = X \otimes_k E \to X$ die Projektion. Dann operiert G zulässig auf X_E durch k-Morphismen und (X, p) ist Quotient von X_E modulo G. Insbesondere gilt

$$\mathrm{Mor}_k(X, Z) \cong \mathrm{Mor}_k(X_E, Z)^G \cong \mathrm{Mor}_E(X_E, Z_E)^G$$

für jedes k-Schema Z. (Die Operationen von G auf den Morphismenmengen wurden am Ende von Abschnitt 1.1 diskutiert.)

Wir wenden uns nun dem für uns besonders wichtigen Fall von Quotienten integrer Schemata zu.

Sei nun $p : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}_Y(X)$ beliebig, $x \in X$ und $x' := \sigma(x)$. Dann existiert genau ein $k(p(x))$-Isomorphismus

$$\sigma_x : \mathrm{Spec}(k(x)) \to \mathrm{Spec}(k(x')),$$

der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(k(x)) & \xrightarrow{\sigma_x} & \mathrm{Spec}(k(x')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

kommutativ macht.

Sei nun $p : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von integren Schemata. Dann bildet p den generischen Punkt ξ von X auf den generischen Punkt η von Y ab und p induziert einen Morphismus $\mathrm{Spec}(R(X)) \to \mathrm{Spec}(R(Y))$. Für $\sigma \in \mathrm{Aut}_Y(X)$ gilt $\sigma(\xi) = \xi$. Nach obiger Konstruktion erhält man einen Homomorphismus

$$\pi_\xi : \mathrm{Aut}_Y(X) \to G(R(X)|R(Y)) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Spec}(R(Y))}(\mathrm{Spec}(R(X))).$$

Proposition 1.2.9 *1. Ist p affin, so ist der Homomorphismus π_ξ injektiv.*

2. Sei p ganz. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(R(X)) & \to & \mathrm{Spec}(R(Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

kartesisch.

Beweis:

1. Ein Standardargument zeigt, dass man Y und damit auch X als affin annehmen darf. Dann gilt $X = \mathrm{Spec}(B)$ mit einem Inegritätsring B, und die Behauptung folgt daraus, dass die kanonische Abbildung von B in den Quotientenkörper $R(X)$ injektiv ist.

2. Wir dürfen annehmen, dass $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affin ist. Dann ist auch $X = \mathrm{Spec}(B)$ affin und der von p induzierte Ringhomomorphismus $A \to B$ ist injektiv. Ferner ist B ganz über A. Sei $S = A \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$X \times_Y \mathrm{Spec}(R(Y)) \cong \mathrm{Spec}(B \otimes_A S^{-1}A) = \mathrm{Spec}(S^{-1}B)$$

und $S^{-1}B \neq 0$ ist eine ganze, integre Algebra über dem Körper $S^{-1}A$. Somit ist $S^{-1}B$ ein Körper, der dann offensichtlich mit dem Quotientenkörper $R(X)$ von B übereinstimmt. Also gilt

$$X \times_Y \mathrm{Spec}(R(Y)) = \mathrm{Spec}(R(X)).$$

□

Folgerung: *Sei $p : X \to Y$ ein Morphismus von integren Schemata. Sei $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}_Y(X)$ eine zulässige Operation der endlichen Gruppe Γ. ρ sei injektiv. Wir nehmen an, dass (Y, p) Quotient von X modulo Γ ist. Dann operiert Γ auf* $\mathrm{Spec}(R(X))$ *via $\pi_\xi \circ \rho : \Gamma \to G(R(X)|R(Y))$.*

1. $\mathrm{Spec}(R(Y))$ *ist der Quotient von* $\mathrm{Spec}(R(X))$ *modulo* Γ.

2. *π_ξ und ρ sind bijektiv, d.h. es gilt $\Gamma \cong \mathrm{Aut}_Y(X) \cong G(R(X)|R(Y))$.*

3. *$|\Gamma| = [R(X) : R(Y)]$.*

Beweis: p ist ganz nach 1.2.5. Somit ist

$$\mathrm{Spec}(R(X)) \cong X \times_Y \mathrm{Spec}(R(Y))$$

nach 1.2.9.

$$\pi_\xi : \mathrm{Aut}_Y(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Spec}(R(Y))}(\mathrm{Spec}(R(X)))$$

identifiziert sich mit dem Homomorphismus

$$\mathrm{Aut}_Y(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Spec}(R(Y))}(X \times_Y \mathrm{Spec}(R(Y))),\ \sigma \mapsto \sigma \times_Y Id.$$

Mit 1.2.7 folgt, dass $R(Y) = R(X)^\Gamma$ gilt. Die Erweiterung $R(X)|R(Y)$ ist somit galoissch und nach der gewöhnlichen Galoistheorie für Körper muss

$$\pi_\xi \circ \rho : \Gamma \to G(R(X)|R(Y))$$

surjektiv sein. Da sowohl π_ξ als auch ρ injektiv sind, müssen beide bijektiv sein. Insbesondere gilt $|\Gamma| = |G(R(X)|R(Y))| = [R(X) : R(Y)]$. $\square$

Satz 1.2.10 *Seien X und Y normale Schemata. Sei $p : X \to Y$ ein endlicher, dominanter Morphismus. Sei ξ der generische Punkt von X und $\Gamma := G(R(X)|R(Y))$. Dann gilt:*

1. *Der naheliegende Homomorphismus*

$$\pi_\xi : \mathrm{Aut}_Y(X) \to \Gamma,\ \sigma \mapsto \sigma_\xi$$

ist bijektiv. Die resultierende Operation $\pi_\xi^{-1} : \Gamma \to \mathrm{Aut}_Y(X)$ von Γ auf X ist zulässig.

2. *Genau dann ist (Y, p) Quotient von X modulo Γ, wenn $R(X)|R(Y)$ eine Galoiserweiterung ist.*

Beweis:

1. Sei $\sigma \in G_{R(X)|R(Y)}$. Sei $V = \mathrm{Spec}(A)$ eine offene, affine Teilmenge von Y und $U := p^{-1}(V)$. Es gilt $U = \mathrm{Spec}(B)$ wobei B die Normalisierung von A in E ist. Sei $b \in B$. Dann ist b^σ ganz über A und somit Element von B. σ induziert demnach durch Restriktion einen Isomorphismus $\sigma|B \to B$. Es existiert also *genau ein* V-Automorphismus σ_V von U, der $i_U \circ \sigma = \sigma_V \circ i_U$ erfüllt, wenn $i_U : \mathrm{Spec}(R(X)) \to U$ die kanonische Abbildung bedeutet. Sind V' und W weitere offene, affine Teilmengen von Y mit $W \subset V \cap V'$, so gilt

$$\sigma_V|p^{-1}(W) = \sigma_W = \sigma_{V'}|p^{-1}(W).$$

Somit kann man die σ_V verkleben. D.h. es existiert *genau ein* Y-Automorphismus $\hat{\sigma} : X \to X$, der $\hat{\sigma}|p^{-1}(V) = \sigma_V$ für jede offene, affine Teilmenge V von Y erfüllt. $\hat{\sigma}$ erfüllt $i_X \circ \hat{\sigma} = \sigma \circ i_X$ und $\hat{\sigma}$ ist der einzige Y-Automorphismus von X der diese Eigenschaft besitzt. Daher gilt $\pi_\xi^{-1}(\sigma) = \{\hat{\sigma}\}$. Somit ist π_ξ bijektiv. Die resultierende Operation von Γ auf X ist zulässig, da p affin ist.

2. Ist (Y, p) ein Quotient von X modulo Γ, so ist $R(X)|R(Y)$ galoissch nach dem Satz vom flachen Basiswechsel 1.2.7. Wir nehmen nun an, dass $R(X)|R(Y)$ galoissch ist und zeigen, dass (Y, p) Quotient von X modulo Γ ist. Sei $V = \mathrm{Spec}(A) \subset Y$ affin und $U := p^{-1}(V)$. Dann ist $U = \mathrm{Spec}(B)$ mit einer endlichen A-Algebra B. Die Ringe A und B sind normal und B ist die Normalisierung von A im Quotientenkörper F von B. Sei K der Quotientenkörper von A. Nach 1.2.4 genügt es $B^\Gamma = A$ zu zeigen. Aber offenbar ist
$$B^\Gamma = F^\Gamma \cap B = K \cap B$$
und $K \cap B$ ist ein in K enthaltener, über A ganzer Oberring von A. Da A normal ist, muss $K \cap B = A$ gelten.

□

Bemerkung: Sei Y ein noethersches, normales Schema und F ein endlicher, separabler Erweiterungskörper von $K := R(Y)$. Sei X die Normalisierung von Y in F.

1. p ist endlich.

2. Ist $F|K$ galoissch, so ist (Y, p) Quotient von X modulo $G(F|K)$.

Beweis: Sobald wir die erste Behauptung zeigen, folgt die zweite aus dem Satz. Sei $V = \mathrm{Spec}(A) \subset Y$ eine offene affine Menge und $U := p^{-1}(V)$. Dann ist $U = \mathrm{Spec}(B)$ affin. B ist die Normalisierung von A in F. Es genügt zu zeigen, dass B endich über A ist. Da $E|K$ endlich und separabel ist, existiert nach [AMac, 5.17] eine K-Basis $(v_1, \cdots, v_d)$ von F mit $B \subset \sum Av_i$. B ist also endlich als Untermodul eines endlichen Moduls über dem noetherschen Ring A.
□

1.3 Zerlegungsgruppe und Trägheitsgruppe

Wir diskutieren in diesem Abschnitt den Begriff der Zerlegungs- und Trägheitsgruppe im Fall einer zulässigen Operation einer endlichen Gruppe Γ auf einem Schema X. (Der Sonderfall, in dem $X = \mathrm{Spec}(B)$ die Normalisierung des Spektrums $Y = \mathrm{Spec}(A)$ eines Dedekindringes A in einer Galois-Erweiterung seines Quotientenkörpers ist, ist in der Zahlentheorie von Interesse und wohlbekannt.) Ist (Y, p) der Quotient von X modulo Γ und p endlich und treuflach, so gilt ein partielles Analogon zur fundamentalen Gleichung.

Die endliche Gruppe Γ operiere zulässig auf X. Sei (Y, p) ein Quotient von X modulo Γ. Für $x \in X$ nennt man
$$\Gamma_x := \{\sigma \in \Gamma \,|\, \sigma(x) = x\}$$
die **Zerlegungsgruppe von** x. Sei $y := p(x)$. Für $\sigma \in \Gamma$ ist dann σ_x ein $\mathrm{Spec}(k(y))$-Isomorphismus $\mathrm{Spec}(k(x)) \to \mathrm{Spec}(k(x))$. Durch
$$\pi_x : \Gamma_x \to \mathrm{Aut}_{k(y)}(\mathrm{Spec}(k(x))), \quad \sigma \mapsto \sigma_x$$

ist ein Homomorphismus gegeben. Man nennt π_x die **Spezialisierungsabbildung auf den Galois-Gruppen**. Der Kern Γ_x^T der Spezialisierungsabbildung π_x wird **Trägheitsgruppe** genannt.

Satz 1.3.1 *In obiger Situation gilt:*

1. *$k(x)|k(p(x))$ ist normal für $x \in X$.*
2. *Die Spezialisierungsabbildung π_x ist surjektiv.*

Ist also $k(x)|k(p(x))$ separabel, so ist $k(x)|k(p(x))$ galoissch und π_x induziert einen Isomorphismus $\Gamma_x/\Gamma_x^T \cong G_{k(x)|k(p(x))}$.

Beweis: Sei $x \in X$ und $y := p(x)$. Sei $Y' := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, $X' := X \times_Y Y'$ und $p' : X' \to Y'$. Da $Y'|Y$ flach ist, ist (Y', p') Quotient von X' modulo Γ nach 1.2.7. y identifiziert sich mit dem abgeschlossenen Punkt von Y' und x identifiziert sich mit einem abgeschlossenen Punkt von X'. Man darf also annehmen, dass $Y = \mathrm{Spec}(A)$ lokales Schema, $X = \mathrm{Spec}(B)$ affines Schema, $A = B^\Gamma$, $x = \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von B und $y = \mathfrak{p}$ das maximale Ideal von A ist.

1. Sei $Q(t)$ ein irreduzibles Polynom in $k(y) = A/\mathfrak{p}$ und $b \in k(x) = B/\mathfrak{m}$ eine Nullstelle von $Q(t)$. Sei $\hat{b} \in B$ ein Repräsentant von b. Das Polynom
$$\hat{P}(t) := \prod_{\sigma \in \Gamma} (t - \hat{b}^\sigma)$$
liegt in $A[t]$, zerfällt über $B[t]$ in Linearfaktoren und hat $\hat{b}$ als Nullstelle. Sei $P(t) \in k(y)[t]$ die Reduktion von $\hat{P}(t)$ modulo $\mathfrak{p}$. Dann zerfällt $P(t)$ über $k(x)$ in Linearfaktoren und b ist Nullstelle von $P(t)$. $Q(t)$ zerfällt nun als Teiler von $P(t)$ in Linearfaktoren. Daher ist $k(x)|k(y)$ normal.

2. Sei $k := k(y)$, $K := k(x)$ und k' die maximale, separable Erweiterung von k in K. Für jedes Element $b \in k'$ haben wir in 1. gesehen, dass b Nullstelle eines Polynoms in $k[t]$ vom Grad $\leq |\Gamma|$ ist. Wäre k' nicht endlich und vom Grad $\leq |\Gamma|$ über k, so gäbe es einen über k endlichen Zwischenkörper F von $k'|k$ vom Grad $> |\Gamma|$ über k. Nach dem Satz vom primitiven Element gäbe es ein $b \in F$ mit $F = k[b]$ und b könnte nicht Nullstelle eines Polynoms in $k[t]$ vom Grad $\leq |\Gamma|$ sein. Widerspruch. Also ist $k'|k$ endlich vom Grad $\leq |\Gamma|$.

   Nach dem Satz vom primitiven Element existiert ein $b \in k'$ mit $k' = k(b)$. Nach dem chinesischen Restsatz existiert ein Repräsentant $\hat{b}$ von b, der
$$\hat{b}^\sigma \in \mathfrak{m} \quad \forall \sigma \in \Gamma \setminus \Gamma_x$$
erfüllt. Sei wieder
$$\hat{P}(t) := \prod_{\sigma \in \Gamma} (t - \hat{b}^\sigma) \in A[t]$$
und $P(t)$ die Reduktion von $\hat{P}(t)$ modulo $\mathfrak{p}$. Sei $\tau \in \mathrm{Aut}_k(\mathrm{Spec}(K))$ beliebig. Dann ist b^τ Nullstelle von $P(t)$. Es existiert also ein $\sigma \in \Gamma$ derart, dass

$\hat{b}^\sigma$ Repräsentant von b^τ ist. Wäre $\sigma \notin \Gamma_x$ folgte $\hat{b}^\sigma \in \mathfrak{m}$ im Widerspruch zu $b^\tau \neq 0$. Somit gilt $\sigma \in \Gamma_x$ und

$$b^\tau = b^{\pi_x(\sigma)}.$$

Daraus folgt zunächst $\tau|k' = \pi_x(\sigma)|k'$ und dann, wegen $K|k'$ rein inseparabel schon $\tau = \pi_x(\sigma)$.

□

Sei X ein Schema. Die endliche Gruppe Γ operiere zulässig auf X. Sei (Y, p) Quotient von X modulo Γ. Die Trägheitsgruppe Γ_x^T kann in folgender Weise als *geometrische* Isotropiegruppe aufgefasst werden.

Bemerkung: Sei $x \in X$, Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper und $u : \operatorname{Spec}(\Omega) \to X$ ein in x lokalisierter Ω-wertiger Punkt. Dann gilt

$$\Gamma_x^T = \{\sigma \in \Gamma \mid \sigma \circ u = u\}.$$

Wir verzichten auf den naheliegenden Beweis.

Wir wollen nun die Fasern einer Projektion $p : X \to Y$ von X auf einen Quotienten von X modulo einer Operation $\Gamma \to \operatorname{Aut}(X)$ untersuchen. Vernünftige Ergebnisse erhält man unter Zusatzvoraussetzungen, von denen die wichtigste Flachheit von p ist. Diese Zusatzvoraussetzungen sind in den für uns relevanten Situationen erfüllt.

Bemerkung: Sei $p : X \to Y$ ein endlicher Morphismus von Schemata und $y \in Y$. Dann gilt für das endliche $k(y)$-Schema $p^{-1}(y) := X \times_Y \operatorname{Spec}(k(y))$

$$p^{-1}(y) = \coprod_{x|y} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)).$$

Sei nun $p : X \to Y$ ein endlicher, flacher Morphismus von Schemata. Wir setzen voraus, dass Y noethersch und zusammenhängend ist. Dann ist $p_*\mathcal{O}_X$ ein lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul von konstantem Rang. Dieser Rang wird mit $\deg(p)$ bezeichnet und **Grad von** p genannt. Ist k ein Körper und $p : F \to \operatorname{Spec}(k)$ ein endliches k-Schema, so ist p automatisch flach und wir setzen $\deg_k(F) := \deg(p)$. F ist dann affin, $F = \operatorname{Spec}(B)$ und $\deg_k(F) = \dim_k(B)$.

Proposition 1.3.2 *Sei $p : X \to Y$ ein endlicher, flacher Morphismus von Schemata. Y sei noethersch und zusammenhängend und $X \neq \emptyset$. Sei $y \in Y$. Dann gilt*

$$\deg_{k(y)}(p^{-1}(y)) = \sum_{x|y} \dim_{k(y)}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) = \deg(p).$$

(Insbesondere ist diese Zahl unabhängig von y. Sind X und Y integer, so stimmt diese Zahl mit $[R(X) : R(Y)]$ überein.)

Beweis: Die linke Gleichung folgt unmittelbar aus obiger Bemerkung. Für den Beweis der 2. Gleichung wählen wir eine offene, affine Umgebung $U = \mathrm{Spec}(A)$ von y, die so beschaffen ist, dass $p_*\mathcal{O}_X|U$ ein freier $\mathcal{O}_Y$-Modul vom Rang $d = \deg(p)$ ist. Dann gilt

$$p^{-1}(y) = \mathrm{Spec}(\Gamma(U, p_*\mathcal{O}_X) \otimes_A k(y))$$

und $\dim_{k(y)}(\Gamma(U, p_*\mathcal{O}_X) \otimes_A k(y)) = d$. Ist ξ der generische Punkt von Y, so gilt $p^{-1}(\xi) = \mathrm{Spec}(R(X))$ und somit folgt $[R(X) : R(Y)] = d$. □

Bemerkung: In der Situation der Proposition folgt insbesondere, dass p surjektiv ist. Dies kann man auch anders beweisen: p ist abgeschlossen als endlicher Morphismus. Da p von endlichem Typ zwischen noetherschen Schemata und flach ist, muss p auch offen sein. Daher ist $p(X)$ offen und abgeschlossen, d.h. $p(X) = Y$.

Bemerkung: In der Situation der Proposition folgt insbesondere, dass für $x \in X$

$$[k(x) : k(p(x))] \leq \deg(p)$$

gilt. Sind X und Y integer, so läuft dies auf $[k(x) : k(p(x))] \leq [R(X) : R(Y)]$ hinaus.

Bemerkung: Sei in der Situation der Proposition zusätzlich vorausgesetzt, dass X und Y integre Dedekind-Schemata sind, und $y \in Y$ ein abgeschlossener Punkt ist. Sei $x \in X$ mit $p(x) = y$. Dann setzt man $f_x := [k(x) : k(y)]$ und nennt diese Zahl den **Trägheitsindex von** x. $\mathcal{O}_{X,x} \supset \mathcal{O}_{Y,y}$ sind nun diskrete Bewertungsringe und die Zahl e_x mit $\mathfrak{m}_{Y,y}\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_{X,x}^{e_x}$ wird **Verzweigungsindex von** x genannt. Wegen $\dim_{k(y)}(\mathfrak{m}_{X,x}^i/\mathfrak{m}_{X,x}^{i-1}) = f_x$ gilt

$$\dim_{k(y)}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) = e_x f_x$$

und die Gleichung in der Proposition läuft auf die wohlbekannte **fundamentale Gleichung**

$$\deg(p) = \sum_{x|y} e_x f_x$$

hinaus.

Sei nun $p : X \to Y$ ein Morphismus und $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}_Y(X)$ eine zulässige Operation der endlichen Gruppe Γ. Wir nennen p (oder genauer das Tripel (Γ, ρ, p)) eine **Galois-Überlagerung** mit Gruppe Γ genau dann, wenn

1. X und Y noethersch und integer sind,
2. p endlich und treuflach ist,
3. (Y, p) Quotient von X modulo Γ ist und
4. ρ injektiv ist.

Satz 1.3.3 *Sei $p : X \to Y$ eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ. Sei $y \in Y$. Sei $s = |p^{-1}(y)|$. Sei $x \in X$ ein Punkt mit $p(x) = y$. Dann gilt:*

1. *Ist $x' \in X$ mit $p(x) = y = p(x')$, so besteht ein $k(y)$-Isomorphismus $k(x) \cong k(x')$ und ein $\mathcal{O}_{Y,y}$- Isomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x'}$. Insbesondere gilt: genau dann ist p étale in x, wenn p étale in x' ist.*

2. *$s \dim_{k(y)}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) = [R(X) : R(Y)] = |\Gamma|$.*

3. *$s = [\Gamma : \Gamma_x]$.*

4. *$|\Gamma_x| = \dim_{k(y)}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y))$.*

5. *$[\Gamma_x : \Gamma_x^T] = [k(x) : k(y)]^{sep}$ ist der Grad der maximalen, separablen Teilerweiterung von $k(x)|k(y)$.*

6. *Genau dann ist p étale in x, wenn $|\Gamma_x^T| = 1$ gilt.*

Beweis:

1. Wir haben gesehen, dass Γ auf dem unterliegenden Raum von $p^{-1}(y)$ transitiv operiert. Es existiert also ein $\sigma \in \Gamma$ mit $\sigma(x) = x'$. Dieser induziert die gewünschten Isomorphismen.

2. Seien $x_1, \cdots, x_s$ die paarweise verschiedenen Punkte über y. Da p flach ist, gilt
$$\sum_{i=1}^{s} \dim_{k(y)}(\mathcal{O}_{X,x_i} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) = [R(X) : R(Y)].$$
Nach 1. sind in dieser Summe alle Summanden gleich.

3. Dies folgt daraus, dass Γ transitiv auf $p^{-1}(y)$ operiert und aus der Definition von Γ_x.

4. Man kombiniere 2. und 3.

5. Γ_x/Γ_x^T wird mit der Automorphismengruppe der Erweiterung $k(x)|k(y)$ identifiziert, und diese Automorphismengruppe ist gerade die Galoisgruppe der maximalen separablen Teilerweiterung von $k(x)|k(y)$.

6. Genau dann ist p étale in x, wenn p unverzweigt in x ist, denn p ist nach Voraussetzung flach. p ist per Definition genau dann unverzweigt in x, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   a) $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)$ ist ein Körper (der dann notwendig mit $k(x)$ übereinstimmt).
   b) $k(x)|k(y)$ ist separabel.

   Die Bedingung a) ist äquivalent zu $\dim_{k(y)}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) = [k(x) : k(y)]$. Die Bedingung b) ist genau dann erfüllt, wenn $[k(x) : k(y)] = [k(x) :$

$k(y)]^{sep}$ gilt. Wir haben gezeigt, dass $\dim_{k(y)}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) = |\Gamma_x|$ und $[k(x) : k(y)]^{sep} = [\Gamma_x : \Gamma_x^T]$ gilt. Daher gilt

$$|\Gamma_x^T| = \frac{[k(x) : k(y)]}{[k(x) : k(y)]^{sep}} \frac{\dim_k(y)(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y))}{[k(x) : k(y)]}.$$

Dies zeigt insbesondere, dass a) und b) genau dann gelten, wenn $|\Gamma_x^T| = 1$ gilt.

□

Bemerkung: Sei in der Situation des Satzes zusätzlich voraus gesetzt, dass X und Y Dedekind-Schemata sind. Dann kann man mit Hilfe der Bemerkung zu 1.3.2 die 2. Aussage des Satzes umschreiben zu

$$s f_x e_x = \deg(p) = |\Gamma|.$$

Es gilt $f_x \geq [\Gamma_x : \Gamma_x^T]$ und $e_x \leq |\Gamma_x^T|$ und in diesen Ungleichungen gilt genau dann Gleichheit, wenn $k(x)|k(y)$ separabel ist.

Ist (Y, p) der Quotient von X modulo der zulässigen Operation einer endlichen Gruppe Γ, so stellt sich nun natürlich die Frage ob p flach ist. Im Falle regulärer, noetherscher Schemata X und Y ist das folgende Flachheits-Kriterium überaus nützlich.

Satz 1.3.4 *Seien X und Y reguläre, noethersche Schemata. Sei $p : X \to Y$ ein Morphismus. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ gilt mit $y := p(x)$ die Dimensionsformel*
$$\dim(\mathcal{O}_{f^{-1}(y),x}) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \dim(\mathcal{O}_{Y,y}).$$
2. *f ist flach.*

Beweis: Siehe [EGA, IV.6.1]. □

Folgerung: *Seien X und Y reguläre, noethersche Schemata und p ein endlicher, dominanter Morphismus. Dann ist p treuflach.*

Kombiniert man diese Folgerung mit Satz 1.2.10, so ergibt sich die folgende Folgerung:

Folgerung: *Seien X, Y noethersche, integre, reguläre Schemata und $p : X \to Y$ ein endlicher, dominanter Morphismus. Die von p induzierte Erweiterung $R(X)|R(Y)$ sei galoissch mit Gruppe Γ. Dann ist $p : X \to Y$ eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ.*

Beweis: Nach obiger Folgerung ist p treuflach. Nach 1.2.10 ist die kanonische Abbildung $\mathrm{Aut}_Y(X) \to G(R(X)|R(Y))$ bijektiv und (Y, p) ist Quotient von X modulo Γ. □

1.4 Das Main Theorem von Zariski

Sei $p : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von integren Schemata. Dann induziert p einen Morphismus $p' : \mathrm{Spec}(R(X)) \to \mathrm{Spec}(R(Y))$. Sei P eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata. (Uns interessieren hauptsächlich die Eigenschaften

1. endlich zu sein,
2. endlich und étale zu sein,
3. eine étale Galois-Überlagerung zu sein.)

Wenn p' die Eigenschaft P hat, so kann man fragen, ob schon eine dichte Teilmenge $U \subset Y$ existiert derart, dass $p|p^{-1}(U) \to U$ die entsprechende Eigenschaft besitzt. Wir beweisen in diesem Abschnitt einige Sätze in diese Richtung. Die Sätze 1.4.6, 1.4.7 und 1.4.8, die wir dann in Kombination mit Ergebnissen aus der vorigen Abschnitten des laufenden Kapitels erhalten, sind für das weitere von zentraler Bedeutung.

Zunächst zitierten wir das sogenannte Main Theorem von Zariski. Vorab erinnern wir daran, dass man einen Morphismus $f : X \to Y$ **quasi-endlich** nennt, wenn für jedes $y \in Y$ die Faser $p^{-1}(y)$ ein endliches $k(y)$-Schema ist.

Satz 1.4.1 *Seien X und Y noethersche Schemata. Sei $f : X \to Y$ ein separierter, quasi-endlicher Morphismus von endlichem Typ. Dann existiert ein Schema Y', ein endlicher Morphismus $u : Y' \to Y$ und eine offene Immersion $i : X \to Y'$ derart, dass $f = u \circ i$ gilt.*

Beweis: Siehe [EGA, IV.8.12.6]. □

Bemerkung: Ist in der Situation des Satzes X integer, so darf man Y' integer annehmen. (In der Tat, ist $Y'' := \overline{i(X)}$ der Abschluss von $i(X)$ in Y' mit der induzierten, reduzierten Struktur als Unterschema von Y', so induziert i eine offene Immersion $j : X \to Y''$ und wenn $k : Y'' \to Y'$ die naheliegende abgeschlossene Immersion bedeutet, so gilt $f = ukj$ und uk ist endlich. Ferner ist dann Y'' als reduziertes und irreduzibles Schema integer.)

Lemma 1.4.2 *Sei X ein noethersches Schema und Y ein integres Schema mit generischem Punkt ξ. Sei $p : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ. Die generische Faser*

$$p^{-1}(\xi) = X \times_Y \mathrm{Spec}(R(Y))$$

sei endlich über $\mathrm{Spec}(R(Y))$. *Dann existiert eine nichtleere, offene Teilmenge $Y' \subset Y$ derart, dass $p|p^{-1}(Y') \to Y'$ quasi-endlich ist.*

Beweis: Wir dürfen o.E. $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affin annehmen.

1. Wir behandeln zunächst den Fall, in dem auch $X = \mathrm{Spec}(B)$ affin ist. Es gibt $x_1, \cdots, x_n \in B$ mit $B = A[x_1, \cdots, x_n]$. Sei $S := A \setminus \{0\}$. Dann ist $S^{-1}B$ eine endliche Algebra über dem Körper $K := S^{-1}A$. Die x_j sind demnach algebraisch über K. Sei für jedes $j = 1, \cdots, n$

$$f_j = X^{r_j} + a_{j1}X^{r_j-1} + \cdots + a_{jr_j}$$

das Minimalpolynom von $x_j|S^{-1}A$. Es existiert ein $f \in S$ derart, dass $a_{ji} \in A_f$ für alle i, j gilt. Dann sind die x_i ganz über A_f. Somit ist $B_f = A_f[x_1, \cdots, x_n]$ eine ganze A_f-Algebra von endlichem Typ. Daraus folgt, dass B_f endliche A_f-Algebra ist. $Y' := \mathrm{Spec}(A_f) \to Y$ ist eine offene Immersion und $p^{-1}(Y') = \mathrm{Spec}(B_f)$. Somit ist $p|p^{-1}(Y') \to Y'$ endlich und insbesondere quasi-endlich.

2. Wir behandeln den allgemeinen Fall. X besitzt eine endliche, offene, affine Überdeckung $(X_i)_{i=1,\cdots,s}$, die aus nichtleeren Mengen besteht. Nach dem Sonderfall existieren offene, affine Teilmengen $\emptyset \neq Y_i \subset Y$ derart, dass $p|X_i \cap p^{-1}(Y_i) \to Y_i$ quasi-endlich ist. Sei $Y' := \bigcap_{i=1}^{s} Y_i$. Dann ist Y' nichtleer, und für $y \in Y'$ besitzt $p^{-1}(y)$ eine endliche, offene Überdeckung $(U_i)_{i=1,\cdots,s}$ derart, dass die U_i endlich über $k(y)$ sind. Daher ist $p^{-1}(y)$ endlich über $k(y)$. Dies zeigt, dass $p|p^{-1}(Y') \to Y'$ quasi-endlich ist.

$\square$

Bemerkung: Seien X, Y integre Schemata mit generischen Punkten ξ_X bzw. ξ_Y. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus.

1. Genau dann ist f dominant, wenn $f(\xi_X) = \xi_Y$ gilt. Ist dies der Fall, so induziert f kanonische Morphismen

$$\mathrm{Spec}(R(X)) \to f^{-1}(\xi_Y) \to \mathrm{Spec}(R(Y)).$$

2. Sei f dominant. Genau dann ist die generische Faser $f^{-1}(\xi_Y)$ endlich über $\mathrm{Spec}(R(Y))$, wenn die Körpererweiterung $R(Y) \to R(X)$ endlich ist. Ist dies der Fall, so ist die kanonische Abbildung $\mathrm{Spec}(R(X)) \to f^{-1}(\xi_Y)$ ein Isomorphismus.

Lemma 1.4.3 *Sei $p : X \to Y$ ein endlicher Morphismus von integren Schemata und $\emptyset \neq U \subset X$ offen. Dann existiert eine offene Teilmenge $\emptyset \neq V \subset Y$ mit $p^{-1}(V) \subset U$.*

Beweis: Sei $S := X \setminus U$. Dann ist S abgeschlossen. Da p als endlicher Morphismus abgeschlossen ist, muss $p(S)$ abgeschlossen sein. $V := Y \setminus p(S)$ ist offen und es gilt $p^{-1}(V) \subset U$. Ferner ist V nichtleer, da der generische Punkt ξ_Y von Y in V liegt. (Sonst würde $\xi_Y \in p(S)$ gelten. Aber der generische Punkt ξ_X ist der einzige Punkt von X, der auf ξ_Y abgebildet wird und es gilt $\xi_X \notin S$. Widerspruch.) $\square$

Die folgende Proposition ist oft nützlich. Vgl. [Mi, I.12].

Proposition 1.4.4 *Seien X und Y noethersche, integre Schemata und ξ der generische Punkt von Y. Sei $p : X \to Y$ ein separierter Morphismus von endlichem Typ. Wir setzen voraus, dass die generische Faser $p^{-1}(\xi) = X \times_Y \operatorname{Spec}(R(Y))$ endlich über $\operatorname{Spec}(R(Y))$ ist. Dann existiert eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subset Y$ derart, dass $p|p^{-1}(U) \to U$ endlich ist.*

Beweis: Nach dem ersten Lemma darf man p quasi-endlich annehmen. Nach dem Main Theorem existiert ein integres, endliches Y-Schema $u : Y' \to Y$ und eine offene Immersion $i : X \to Y'$ derart, dass $p = u \circ i$ gilt. Nach dem zweiten Lemma existiert eine offene Teilmenge $U \subset Y$ derart, dass $u^{-1}(U) \subset i(X)$ gilt. Demnach ist $p|p^{-1}(U) \to U$ endlich. □

Wir benötigen den Satz von der generischen Flachheit, um obige Proposition weiter zu verschärfen.

Satz 1.4.5 *Seien X, Y noethersche Schemata und $f : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ. Sei U die Menge der Punkte $x \in X$ mit f flach in x. Dann ist U eine offene (möglicherweise leere) Teilmenge von X.*

Beweis: Siehe [EGA, IV.11.1.1]. □

Satz 1.4.6 *Seien X und Y noethersche, integre Schemata. Sei $p : X \to Y$ ein dominanter, separierter Morphismus von endlichem Typ. Die entsprechende Körpererweiterung $R(X)|R(Y)$ sei endlich.*

1. *Es gibt eine offene, nichtleere Teilmenge $U \subset Y$ derart, dass $p|p^{-1}(U) \to U$ ein endlicher, treuflacher Morphismus ist. (Insbesondere gilt*

$$[k(x) : k(p(x))] \leq [R(X) : R(Y)]$$

für alle $x \in p^{-1}(U)$.)

2. *Sei $R(X)|R(Y)$ separabel. Dann existiert sogar eine nichtleere, offene Menge $U \subset Y$ derart, dass $p|p^{-1}(U) \to U$ endlich und étale ist. (Insbesondere ist für $x \in p^{-1}(U)$ die Körpererweiterung $k(x)|k(p(x))$ separabel und es gilt $[k(x) : k(p(x))] \leq [R(X) : R(Y)]$.)*

3. *Ist p birational (d.h. $[R(X) : R(Y)] = 1$), so existiert eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subset Y$ derart, dass $p|p^{-1}U \to U$ ein Isomorphismus ist.*

4. *Falls $R(X)|R(Y)$ galoissch mit Gruppe Γ ist und sowohl X als auch Y normal ist, so existiert eine offene, nichtleere Teilmenge $U \subset Y$ derart, dass $p|p^{-1}(U) \to U$ eine étale Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ ist. (Insbesondere ist für $x \in p^{-1}(U)$ die Erweiterung $k(x)|k(p(x))$ galoissch mit Galoisgruppe Γ_x.)*

Beweis:

1. Nach 1.4.4 darf man annehmen, dass p endlich ist und dass Y (und damit auch X) affin ist. Nach dem Satz von der generischen Flachheit 1.4.5 ist die Menge V der $x \in X$, mit p flach in x, offen. Offenbar liegt der generische Punkt von Y in V, d.h. V ist nichtleer. Nach 1.4.3 existiert eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subset Y$ derart, dass $p^{-1}(U) \subset V$ gilt. Daher ist $p|p^{-1}(U) \to U$ endlich (und insbesondere eine abgeschlossene Abbildung) und flach (und insbesondere eine offene Abbildung). Da U zusammenhängt, muss $p|p^{-1}(U) \to U$ auch surjektiv sein. Ist $x \in p^{-1}(U)$, so gilt $[k(x) : k(p(x))] \leq [R(X) : R(Y)]$ nach 1.3.2.

2. Wir dürfen nach 1. annehmen, dass p endlich und treuflach ist. Sei $i : \mathrm{Spec}(R(X)) \to X$ der kanonische Morphismus. Sei S der Träger des Moduls $\Omega_{X|Y}$ der Kähler-Differentiale. Da $\Omega_{X|Y}$ kohärent ist, muss S abgeschlossen sein. Es gilt
$$i^*\Omega_{X|Y} = \Omega_{R(X)|R(Y)} = 0,$$
weil $R(X)|R(Y)$ separabel ist. Also ist $S \neq X$. (Der generische Punkt ξ_X von X liegt nicht in S.) Nach 1.4.3 existiert eine offene, nichtleere Teilmenge U von Y derart, dass $p^{-1}(U) \cap S = \emptyset$ gilt. Es folgt $\Omega_{p^{-1}(U)|U} = 0$, d.h. $p|p^{-1}(U) \to U$ ist unverzweigt. Da p ohnehin flach ist, muss $p|p^{-1}(U) \to U$ étale sein. Da nun $p|p^{-1}(U) \to U$ unverzweigt ist, muss $k(x)|k(p(x))$ separabel sein für alle $x \in p^{-1}(U)$.

3. Nach 2. gibt es eine offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset Y$ derart, dass $p|p^{-1}(U) \to U$ endlich und étale ist. Aus $[R(X) : R(Y)] = 1$ folgt, dass der Grad dieser endlichen, étalen Abbildung gleich 1 ist. Daher ist $p|p^{-1}(U) \to U$ ein Isomorphismus.

4. Nach 2. existiert eine offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset Y$ derart, dass
$$p|p^{-1}(U) \to U$$
endlich und étale ist. Nach 1.2.10 folgt, dass $p^{-1}(U) \to U$ eine Galois-Überlagerung ist. Für $x \in X$ ist nun $k(x)|k(p(x))$ normal nach 1.3.1 und separabel, da p étale ist. Daher ist $k(x)|k(p(x))$ galoissch. Nun ist $\pi_x : \Gamma_x \to G(k(x)|k(p(x))$ ein Epimorphismus mit Kern Γ_x^T und $|\Gamma_x^T| = 1$ nach 1.3.3.

□

Ist X ein integres Schema, so bezeichnen wir im Folgenden Satz mit $i_X : \mathrm{Spec}(R(X)) \to X$ den kanonischen Morphismus.

Satz 1.4.7 *Sei k ein Körper. Seien X und Y algebraische, integre, separierte Schemata. Sei $g : \mathrm{Spec}(R(X)) \to \mathrm{Spec}(R(Y))$ ein endlicher Morphismus.*

1. *Es existieren nichtleere, offene Teilmengen $X_0 \subset X$ und $Y_0 \subset Y$ und ein endlicher, treuflacher Morphismus $p : X_0 \to Y_0$, der $i_{Y_0} \circ g = p \circ i_{X_0}$ erfüllt.*

2. *Ist g étale (d.h. $R(X)|R(Y)$ separabel), so darf man in 1. zusätzlich p als étale annehmen.*

3. *Ist g ein Isomorphismus, so darf man in 1. zusätzlich annehmen, dass p ein Isomorphismus ist.*

4. *Ist g eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ (d.h. $R(X)|R(Y)$ ist galoissch mit Gruppe Γ) und sowohl X als auch Y normal, so darf man in 1. zusätzlich p als étale Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ annehmen.*

Beweis: $i_{Y_0} \circ g : \mathrm{Spec}(R(X)) \to Y$ entspricht einer rationalen Abbildung $X \to Y$. Es existiert also eine affine, offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset X$ und ein Morphismus $q : U \to Y$ mit $q \circ i_U = i_{Y_0} \circ g$. Dann ist q separiert. (Siehe [EGA, I.5.5.1.v, I.5.5.7].) Da Y separiert über k und U von endlichem Typ über k ist, muss q von endlichem Typ sein. q ist dominant, da q den generischen Punkt von X auf den generischen Punkt von Y abbildet. Nach 1.4.6 existiert eine offene Teilmenge $\emptyset \neq X_0 \subset X$ derart, dass $q|q^{-1}(X_0) \to X_0$ endlich und treuflach ist. Dies zeigt die 1. Behauptung. Die Behauptungen 2. bis 4. folgen, wenn man die 1. Behauptung mit 1.4.6 kombiniert. □

Es ist interessant, den obigen Satz mit $Y = \mathbb{A}_{n,k}$ anzuwenden. Man beachte, dass $\mathbb{A}_{n,k}$ unendlich viele k-rationale Punkte hat, falls k unendlich ist!

Satz 1.4.8 *Sei k ein unendlicher Körper. Sei X ein separiertes, algebraisches, integres k-Schema. Sei $t \geq 1$ und $K = k(u_1, \cdots, u_t)$ ein rein-transzendenter Unterkörper von $R(X)$, über dem $R(X)$ endlich ist.*

1. *Es gibt unendlich viele abgeschlossene Punkte $x \in X$ derart, dass $[k(x) : k] \leq [R(X) : K]$ ist. Insbesondere ist $X(\overline{k})$ unendlich.*

2. *Wenn $R(X)|K$ eine separable Körpererweiterung vom Grad d ist, so existieren unendlich viele abgeschlossene Punkte $x \in X$ derart, dass $k(x)|k$ eine separable Erweiterung vom Grad $\leq d$ ist. Insbesondere ist $X(k^s)$ unendlich.*

3. *Ist $R(X)|K$ eine Galois-Erweiterung mit Gruppe Γ, so existieren unendlich viele abgeschlossene Punkte $x \in X$ derart, dass $k(x)|k$ eine Galois-Erweiterung ist und $G(k(x)|k)$ isomorph zu einem Normalteiler von Γ ist. Ist dann $X = \mathrm{Hom}(G_k, \Gamma)$ und Ω der Fixkörper von $\bigcap_{\chi \in X} \ker(\chi)$, so ist $X(\Omega)$ unendlich.*

4. *Ist $R(X)$ eine abelsche Galois-Erweiterung, so ist $X(k^{ab})$ unendlich.*

Beweis: Wir identifizieren K mit $R(\mathbb{A}_{n,k})$. Zunächst existieren nach 1.4.7 nichtleere Teilmengen $X_0 \subset X$ und $Y_0 \subset \mathbb{A}_{n,k}$ und ein endlicher, treuflacher Morphismus $p : X_0 \to Y_0$ derart, dass der von p induzierte Morphismus $\mathrm{Spec}(R(X)) \to \mathrm{Spec}(K)$ der Inklusion $K \subset R(X)$ entspricht. Ist $Y_1 \subset Y_0$ nichtleer und offen, so ist

$$Y_1(k) = \{y \in Y_1 | k(y) = k\}$$

unendlich. p ist surjektiv, d.h. für $y \in Y_1(k)$ existiert ein (nicht notwendig k-rationaler) Punkt $x \in X_0$ mit $p(x) = y$. Die Behauptungen folgen leicht daraus, unter Beachtung von 1.4.6. □

Folgerung: *Sei k ein Körper und X eine k-Varietät der Dimension ≥ 1.*

1. *$X(\overline{k})$ ist unendlich.*
2. *Ist X glatt, so ist $X(k^s)$ unendlich.*

Beweis: Wir dürfen o.E. $k = k^s$ annehmen. k^s ist unendlich, selbst wenn k endlich ist. Man beachte nun, dass $R(X)$ in jedem Fall eine Transzendenzbasis $(u_1, \cdots, u_t)$ enthält und dass $R(X)|k(u_1, \cdots, u_t)$ endlich ist. Falls X glatt ist, so ist $\Omega_{X|k}$ lokal frei vom Rang gleich $\dim(X)$. Also ist $\Omega_{R(X)|k}$ ein $R(X)$-Vektorraum der Dimension gleich $\dim(X)$, und $\dim(X)$ ist gerade der Transzendenzgrad von $R(X)|k$. Somit ist $R(X)|k$ dann separabel erzeugt, d.h. es existiert sogar eine Transzendenzbasis $(u_1, \cdots, u_t)$ derart, dass $R(X)|k(u_1, \cdots, u_t)$ eine separable Erweiterung ist. Der Rest folgt unmittelbar aus dem Satz. □

Kapitel 2

Ein Spezialisierungssatz für Hilbert-Körper

2.1 Hilbert-Irreduzibilität

Wir diskutieren zu Beginn dieses Abschnittes kurz die Theorie der Hilbert-Körper, Hilbert-Mengen und den Irreduzibilitätssatz von Hilbert. Eine ausführlichere Darstellung der Grundlagen dieser Theorie findet sich in [La] oder [FJ].

Sodann leiten wir aus diesen Grundlagen einige Folgerungen ab, die später eine wichtige Rolle spielen werden. Insbesondere führen wir den Begriff der zu einer sogenannten Hilbert-Überlagerung von Schemata assoziierten abstrakten Hilbert-Menge ein. Die Definition ist ähnlich der in [La, 9.5.] getroffenen. Jedoch beschränkt sich Lang auf den Fall von Ringen. Dies auf die nicht-affine Situation zu übertragen ist zwar einfach - wir wollten aber mangels geeigneter Referenz auf eine Diskussion dieser Übertragung nicht verzichten.

Sei k ein Körper und $n \geq 1$. Sei $T = (T_1, \cdots, T_n)$ ein Satz von Unbestimmten. Wir fassen die T_i als Koordinaten von $\mathbb{A}_n = \mathrm{Spec}(k[T])$ auf. Zur Abkürzung setzen wir $A := k[T]$, $K := k(T)$ und $A_U := \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n})$ für $U \subset \mathbb{A}_n$ offen. Man hat dann Inklusionen $A \subset A_U \subset K$. Ist $a(T) \in A$, so bezeichnen wir wie üblich mit

$$D_a = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_n | a(T) \notin \mathfrak{p}\}$$

die entsprechende offene Basis-Menge für die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}_n$. Dann gilt $D_a(k) = \{t \in \mathbb{A}_n(k) | a(t) \neq 0\}$.

Ist $\emptyset \neq U \subset \mathbb{A}_n$ offen und $t \in U(k)$, so hat man die kanonische Abbildung

$$A_U \to k, \ a(T) \mapsto a(t).$$

Sei X eine (einzelne) Variable. Die obige Abbildung induziert eine kanonische Abbildung

$$\rho_t : A_U[X] \to k[X], \ f(T, X) \mapsto f(t, X).$$

Ist

$$f(T, X) = a_d(T)X^d + a_{d-1}(T)X^{d-1} + \cdots + a_0(T) \in A_U[X]$$

ein irreduzibles Polynom von positivem Grad d, so darf man fragen, für welche $t \in U(k)$ das spezialisierte Polynom

$$\rho_t(f) = f(t, X) = a_d(t)X^d + a_{d-1}(t)X^{d-1} + \cdots + a_0(t) \in k[X]$$

irreduzibel ist. Ist etwa k algebraisch abgeschlossen, $a_d(T) = 1$ und $d \geq 2$, so ist dies für *kein einziges* t erfüllt. Wir werden aber sehen, dass für viele arithmetisch interessante Körper k (z.B. für Zahlkörper) das spezialisierte Polynom durchaus für (in einem zu präzisierenden Sinn) viele t irreduzibel bleibt.

Sei weiter $\emptyset \neq U \subset \mathbb{A}_n$ offen und $f(T, X) \in A_U[X]$ ein Polynom von positivem Grad d in X. Wir interessieren uns für die Menge

$$H_f^U := H(f, U) := \{t \in U(k) | \rho_t(f) \text{ ist irreduzibel vom Grad } d\},$$

sowie für

$$H^-(f, U) := \{t \in U(k) | \rho_t(f) \text{ ist irreduzibel}\}.$$

Ist $f(T, X)$ in $A[X]$ enthalten, von positivem Grad in X und irreduzibel als Element von $A[X]$, so nennt man die Menge $H^-(f, \mathbb{A}_n)$ eine **fundamentale Hilbert-Menge**. Sei $M \subset \mathbb{A}_n(k)$. M heißt **Hilbert-Menge** genau dann, wenn eine offene Teilmenge $\emptyset \neq V \subset \mathbb{A}_n$ und endlich viele in $A[X]$ irreduzible Elemente

$$f_1(T, X), \cdots, f_s(T, X) \in A[X]$$

von positivem Grad in X existieren, mit

$$M = V(k) \cap H^-(f_1, \mathbb{A}_n) \cap \cdots \cap H^-(f_s, \mathbb{A}_n).$$

Endliche Durchschnitte von Hilbert-Mengen sind demnach Hilbert-Mengen.

Bemerkung: Sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{A}_n$ offen und $f(T, X) \in A_U[X]$ ein Polynom von positivem Grad d in X, das in $K[X]$ irreduzibel ist. (f braucht dann als Element von $A_U[X]$ nicht irreduzibel sein, ist es aber doch, wenn f primitiv ist. Wir verlangen auch *nicht*, dass f geometrisch irreduzibel ist.) Dann ist sowohl $H^-(f, U)$ als auch $H(f, U)$ eine Hilbert-Menge.

Beweis: Es existiert ein $0 \neq a(T) \in A$ derart, dass $g(T, X) := f(T, X)a(T) \in A$ und $D_a \supset U$ gilt. Dann ist

$$H^-(f, U) = H^-(g, U) = H^-(g, \mathbb{A}_n) \cap U(k).$$

$g(T, X)$ ist irreduzibel in $K[X]$. Daher existiert ein $0 \neq b(T) \in A$ und ein in $A[X]$ irreduzibles, primitives Polynom $g_1(T, X) \in A[X]$ derart, dass

$$g(T, X) = g_1(T, X)b(T)$$

gilt. Dann ist

$$H^-(g, \mathbb{A}_n) = H^-(g_1, \mathbb{A}_n) \cap D_b(k).$$

$H^-(g, \mathbb{A}_n)$ ist also eine Hilbert-Menge als Durchschnitt einer fundamentalen Hilbert-Menge mit einer nicht-leeren, offenen Menge. Somit ist auch $H^-(f, U)$ eine Hilbert-Menge.

Es gibt $a_i(T) \in A_U$ derart, dass

$$f(X,T) = a_d(T)X^d + \cdots + a_0(T)$$

gilt. Ferner existieren teilerfremde Elemente $0 \neq c(T), e(T) \in A$ mit $a_d(T) = \frac{c(T)}{e(T)}$ und $D_e \supset U$. Offenbar gilt

$$H(f,U) = H^-(f,U) \cap D_c(k).$$

Somit ist auch $H(f,U)$ eine Hilbert-Menge. $\square$

k heißt **Hilbert-Körper** genau dann, wenn für jedes $n \geq 1$ und jede Hilbert-Menge $H \subset \mathbb{A}_n(k)$ schon $H \neq \emptyset$ gilt. $\mathbb{A}_n(k)$ identifiziert sich in naheliegender Weise mit der Teilmenge

$$\{x \in \mathbb{A}_n \mid [k(x):k] = 1\}$$

des topologischen Raumes $\mathbb{A}_n$, und wir betrachten $\mathbb{A}_n(k)$ als topologischen Raum mit der Relativ-Topologie. Aus der Definition folgt, dass in einem Hilbert-Körper k jede Hilbert-Menge $H \subset \mathbb{A}_n(k)$ dicht in $\mathbb{A}_n(k)$ ist. $H \cap U(k)$ ist ja wieder Hilbert-Menge für alle offenen Mengen $U \neq \emptyset$, also nichtleer.

Bemerkung: Sei k ein Hilbert-Körper.

1. k ist unendlich. Jede Hilbert-Menge in $\mathbb{A}_n(k)$ ist unendlich.
2. k ist nicht separabel abgeschlossen.

Beweis: Sei k ein Hilbert-Körper und $d \geq 2$ prim zur Charakteristik von k. Dann ist das Polynom

$$f(T,X) := X^d - T \in k(T)[X]$$

irreduzibel nach dem Kriterium von Eisenstein. Für $t \in (k^\times)^d \cup \{0\}$ ist $f(X,t) = X^d - t$ nicht irreduzibel. Somit ist

$$H(f,\mathbb{A}_1) \subset \mathbb{A}_1(k) \setminus ((k^\times)^d \cup \{0\}) =: M.$$

Da k ein Hilbert-Körper ist, muss M dicht sein. Wäre k separabel abgeschlossen, so wäre $M = \emptyset$. Widerspruch. Wäre k endlich, so wäre auch M endlich und somit abgeschlossen. Da M auch dicht ist, folgte $M = \mathbb{A}_1(k)$ - ein Widerspruch wegen $0 \notin M$.

Also ist k unendlich und nicht separabel abgeschlossen. Wenn k unendlich ist, müssen aber die in $\mathbb{A}_n(k)$ dichten Teilmengen auch unendlich sein. D.h. über einem Hilbert-Körper ist jede Hilbert-Menge unendlich. $\square$

Wir können nun den Irreduzibilitätssatz von Hilbert aussprechen. Er zeigt für viele Körper von arithmetischem Interesse, dass sie hilbertsch sind.

Satz 2.1.1 (Hilbert) *1. Zahlkörper sind Hilbert-Körper.*

2. *Ist k ein beliebiger Körper, so ist der rationale Funktionenkörper $k(u)$ ein Hilbert-Körper.*

3. *Ist k ein Hilbert-Körper und $E|k$ eine endliche Körpererweiterung, so ist E ein Hilbert-Körper.*

Beweis: Siehe [La, Ch. 9], [FJ, 11.11] und [FJ, 12.10]. □

Wir leiten nun eine sich etwas mehr an die Theorie der Schemata orientierende Interpretation der Hilbert-Irreduzibilität ab. Dies ist inspiriert durch die Theorie der sogenannten abstrakten Hilbert-Mengen in [La, 9.5.].

Sei k ein Körper. Sei X ein integres, algebraisches, separiertes k-Schema. Sei $p : Y \to X$ ein Morphismus. Wir nennen $p : Y \to X$ eine **Hilbert-Überlagerung** von X genau dann, wenn

1. Y ein integres, separiertes, algebraisches k-Schema ist,

2. p ein endlicher, treuflacher Morphismus ist und

3. die von p induzierte Körpererweiterung $R(Y)|R(X)$ separabel ist.

Wir nehmen also Y als integer, aber *nicht notwendig geometrisch integer* an. Ist z.B. $E|k$ ein echter, endlicher, separabler Erweiterungskörper und X eine k-Varietät, so ist $X_E \to X$ eine Hilbert-Überlagerung, aber X_E ist nicht geometrisch integer als k-Schema. ($X_E \times_k \mathrm{Spec}(\overline{k})$ zerfällt in ein Koprodukt von $[E : k]$ Kopien von $X_{\overline{k}}$.)

Proposition 2.1.2 *Sei k ein Körper. Sei $p : Y \to X$ eine Hilbert-Überlagerung des integren, algebraischen, separierten k-Schemas X. Sei $d := [R(Y) : R(X)]$ der Grad dieser Überlagerung. Sei $x \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es existiert genau ein $y \in Y$ mit $p(y) = x$, und $k(y)|k(x)$ ist eine separable Körpererweiterung vom Grad d.*

2. *Es existiert ein separabler Erweiterungskörper $E|k(x)$ und ein $k(x)$-Isomorphismus $p^{-1}(x) \cong \mathrm{Spec}(E)$.*

3. *$p^{-1}(x)$ ist zusammenhängend und geometrisch reduziert.*

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, so nennen wir den Punkt x **träge (für** p**)**.

Beweis: Wir zeigen die Implikation 1) $\Longrightarrow$ 2). Gilt 1.), so ist der dem endlichen $k(x)$-Schema $p^{-1}(x) = Y \times_X k(x)$ unterliegende Raum ein-elementig. Somit ist $p^{-1}(x) \cong \mathrm{Spec}(B)$ mit einer endlichen, lokalen $k(x)$-Algebra B, deren Restklassenkörper $k(y)$ ist. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von B. Wegen der Flachheit von p gilt $d = \dim_{k(x)}(B)$. Da auch $d = \dim_{k(x)}(k(y))$ gilt, muss $B \to k(y)$ ein Isomorphismus sein. D.h. es gilt 2).

Wir zeigen 2) $\Longrightarrow$ 3): Bekanntlich gilt für jede endliche Körpererweiterung $L|F$, dass $L|F$ genau dann separabel ist, wenn $L \otimes_F \overline{F}$ reduziert ist, d.h. genau dann, wenn $\mathrm{Spec}(L)$ geometrisch reduziert als $\mathrm{Spec}(F)$-Schema ist.

Es bleibt die Implikation 3) $\Longrightarrow$ 1) nachzuweisen. $p^{-1}(x)$ ist als endliches k-Schema diskret. Da $p^{-1}(x)$ auch zusammenhängt, muss es ein-elementig sein. Es gibt also genau ein $y \in Y$ mit $p(y) = x$. Somit ist $p^{-1}(x) = \mathrm{Spec}(B)$ mit einer lokalen, endlichen $k(x)$-Algebra, deren $k(x)$-Dimension d ist. Ihr Restklassenkörper ist $k(y)$. Da $p^{-1}(x)$ auch geometrisch reduziert ist, muss B ein endlicher, separabler Erweiterungskörper von $k(x)$ sein. Dies erzwingt $B = k(y)$. $\square$

Sei k ein Körper und $p : Y \to X$ eine Hilbert-Überlagerung des algebraischen, separierten, integren k-Schemas X. Wir setzen

$$\mathrm{Inert}(Y|X) := \{x \in X \mid x \text{ ist träge für } p\}$$

und nennen $\mathrm{Inert}(Y|X)$ die **abstrakte Hilbert-Menge** zur Hilbert-Überlagerung p. Man beachte: Die abstrakte Hilbert-Menge $\mathrm{Inert}(Y|X)$ ist eine Teilmenge des unterliegenden topologischen Raumes von X. $X(k)$ identifiziert sich in naheliegender Weise mit der Teilmenge $\{x \in X \mid [k(x) : k] = 1\}$ dieses topologischen Raumes X. Die Elemente von $\mathrm{Inert}(Y|X)$ brauchen nicht abgeschlossene Punkte zu sein. Ferner kann $X(k) \cap \mathrm{Inert}(Y|X) = \emptyset$ gelten, selbst wenn k ein Hilbert-Körper ist. Ist H eine Hilbert-Menge, so ist H eine Teilmenge von $\mathbb{A}_n(k)$.

Bemerkung 2.1.3 Wir untersuchen zwei wichtige Beispiele von Hilbert-Überlagerungen.

1. Sei wieder $T = (T_1, \cdots, T_n)$ ein Satz von Unbestimmten, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{A}_n = \mathrm{Spec}(k[T])$ offen und affin. Sei $f(T, X) \in A_U[X]$ ein normiertes Polynom von positivem Grad d in X. *Wir setzen voraus, dass f als Polynom in $K[X]$ irreduzibel und separabel ist, d.h. dass $\frac{K[X]}{f(T,X)}$ ein separabler Erweiterungskörper von $K = k(T)$ ist.* Wegen der Normiertheit von f ist $B := \frac{A_U[X]}{f(T,X)}$ eine freie A_U-Algebra der Dimension d. Daher ist

$$B \to B \otimes_{A_U} K = \frac{K[X]}{f(T,X)}$$

injektiv. Da $F := \frac{K[X]}{f(T,X)}$ nach Voraussetzung ein Körper ist, muss B integer sein und F sich mit dem Quotientenkörper von B identifizieren. (Insbesondere ist f als Element von $A_U[X]$ irreduzibel.) Sei $Y := \mathrm{Spec}(B)$. Dann ist $p : Y \to U = \mathrm{Spec}(A_U)$ eine Hilbert-Überlagerung. Sei $t \in U(k)$. Es besteht die Isomorphie

$$p^{-1}(t) \cong \mathrm{Spec}\left(\frac{k[X]}{f(t,X)}\right)$$

und es gilt $t \in \mathrm{Inert}(Y|\mathbb{A}_n)$ genau dann, wenn $\frac{k[X]}{f(t,X)}$ ein separabler Erweiterungskörper von k ist, d.h. genau dann, wenn $f(t, X)$ ein separables, irreduzibles Polynom ist. Somit gilt

$$\mathrm{Inert}(Y|U) \cap U(k) = \{t \in U(k) \mid f(t,X) \text{ ist separabel und irreduzibel}\}.$$

Es existiert nach 1.4.6 eine nichtleere, offene Teilmenge $V \subset U$ derart, dass $p|p^{-1}(V) \to V$ étale ist. Für $t \in V(k)$ ist dann $p^{-1}(t) \otimes_k \overline{k} = \mathrm{Spec}\left(\frac{\overline{k}[X]}{f(t,X)}\right)$ ein endliches étales $\overline{k}$-Schema, d.h. $f(t,X) \in k[X]$ zerfällt in $\overline{k}[X]$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren und ist somit separabel. Dies zeigt, dass

$$\mathrm{Inert}(Y|U) \cap V(k) = \{t \in V(k) | f(T,X) \text{ irreduzibel}\} = H(f,V)$$

gilt. Daher enthält $\mathrm{Inert}(Y|U) \cap U(k)$ eine Hilbert-Menge. (Ist k ein Hilbert-Körper, so ist $\mathrm{Inert}(Y|U) \cap U(k)$ unendlich und dicht in $\mathbb{A}_n(k)$).

2. Sei X eine k-Varietät und $E|k$ ein endlicher, separabler Erweiterungskörper. Dann ist $p : X_E \to X$ eine Hilbert-Überlagerung. Ist $x \in X$, so gilt

$$p^{-1}(x) = X_E \times_X \mathrm{Spec}(k(x)) = \mathrm{Spec}(E \otimes_k k(x)).$$

Somit ist $\mathrm{Inert}(X_E|X)$ die Menge der $x \in X$ mit zu E linear disjunktem Restklassenkörper.

Proposition 2.1.4 *Sei k ein Körper und X ein separiertes, integres, algebraisches k-Schema. Sei $p : Y \to X$ eine Hilbert-Überlagerung von X und $q : Z \to Y$ eine Hilbert-Überlagerung von Y. Ist $x \in \mathrm{Inert}(Y|X)$, so bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Punkt $y \in Y$ über X mit $s_{Y|X}(x)$.*

1. *Sei $x \in X$. Falls $x \in \mathrm{Inert}(Z|X)$ gilt, so gilt auch $x \in \mathrm{Inert}(Y|X)$ und $s_{Y|X}(x) \in \mathrm{Inert}(Z|Y)$.*

2. *Sei $x \in X$. Falls $x \in \mathrm{Inert}(Y|X)$ und $s_{Y|X}(x) \in \mathrm{Inert}(Z|Y)$ gilt, so liegt x in $\mathrm{Inert}(Z|X)$.*

Beweis: Sei $d = [R(Y) : R(X)]$ und $e = [R(Z) : R(Y)]$.

1. Es existiert genau ein $z \in Z$ mit $pq(z) = x$. Die Erweiterung $k(z)|k(x)$ ist separabel vom Grad de. Sei $y = q(z)$. Da q surjektiv ist, ist y der einzige Punkt in Y mit $p(y) = x$. Nun gilt

$$de = [k(z) : k(x)] = [k(z) : k(y)][k(y) : k(x)]$$

und, da p und q flach sind, auch $[k(z) : k(y)] \leq e$ und $[k(y) : k(x)] \leq d$. Daher muss in beiden Ungleichungen Gleichheit gelten. Mit $k(z)|k(x)$ ist sowohl $k(z)|k(y)$ als auch $k(y)|k(x)$ separabel.

2. Sei $y := s_{Y|X}(x)$ und $z = s_{Z|Y}(y)$. Offenbar ist z der einzige Punkt in Z mit $pq(z) = x$. Es gilt

$$[k(z) : k(x)] = [k(z) : k(y)][k(y) : k(x)] = de = [R(Z) : R(X)].$$

Da sowohl $k(z)|k(y)$ als auch $k(y)|k(x)$ separabel ist, muss $k(z)|k(x)$ separabel sein.

$\square$

Lemma 2.1.5 *Sei k ein Körper und X ein separiertes, integres, algebraisches k-Schema. Seien $p_1 : Y_1 \to X$ und $p_2 : Y_2 \to X$ Hilbert-Überlagerungen. Sei $f : Y_1 \to Y_2$ ein birationaler Morphismus mit $p_2 \circ f = p_1$. Dann existiert eine offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset X$ mit $\mathrm{Inert}(Y_1|X) \cap U = \mathrm{Inert}(Y_2|X) \cap U$.*

Beweis: Für jede nichtleere, offene Teilmenge $U \subset X$ gilt offenbar

$$\mathrm{Inert}(p_i^{-1}(U)|U) = \mathrm{Inert}(Y_i|X) \cap U.$$

Ferner gibt es nach 1.4.6 eine nichtleere, offene Teilmenge $Y' \subset Y_2$ derart, dass $f|f^{-1}(Y') \to Y'$ ein Isomorphismus ist. Nach 1.4.3 gibt es eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subset X$ derart, dass $Y'' := p_2^{-1}(U) \subset Y'$ gilt. $f|f^{-1}(Y'') \to Y''$ ist ein Isomorphismus. Dadurch reduziert sich die Ausgangsfrage auf den Fall, in dem f ein Isomorphismus ist, und dieser Fall ist trivial. $\square$

Satz 2.1.6 *Sei k ein Körper und $n \geq 1$. Sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{A}_n$ offen und $p : X \to U$ eine Hilbert-Überlagerung. Dann enthält*

$$\mathrm{Inert}(X|U) \cap U(k)$$

eine Hilbert-Menge. (Ist k ein Hilbert-Körper, so ist $\mathrm{Inert}(X|U) \cap U(k)$ dicht in $\mathbb{A}_n(k)$ und insbesondere unendlich.)

Beweis: Nach eventueller Verkleinerung von U dürfen wir $U = \mathrm{Spec}(A)$ affin annehmen. Dann ist auch $Y = \mathrm{Spec}(B)$ affin. Nach weiterer Verkleinerung von U darf man annehmen, dass B eine freie A-Algebra vom Rang d ist. Seien $T = (T_1, \cdots, T_n)$ die Koordinaten von $\mathbb{A}_n$. Sei $K := R(U) = k(T)$ und $F := R(Y)$ der Quotientenkörper von B. Dann hat man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \supset & K \\ \cup & & \cup \\ B & \supset & A. \end{array}$$

Da $F|K$ separabel ist, existiert ein $b \in F$ derart, dass $F = K[b]$ gilt. Wegen $B \otimes_A K = F$ darf man $b \in B$ annehmen. Sei $f(T, X) \in K[X]$ das Minimalpolynom von $b|K$. Dann ist f normiert, irreduzibel und separabel in $K[X]$ und vom Grad d. Da $B|A$ endlich ist, muss $b|A$ ganz sein. Somit sind die Koeffizienten von f ganz über A und somit gilt $f(X, T) \in A[X]$. (Man beachte, dass A normal ist.) Sei $B' := \frac{A[X]}{f(T,X)}$

Nach 2.1.3 ist B' integer und der Quotientenkörper von B' identifiziert sich mit

$$B' \otimes_A K = \frac{K[X]}{f(T, X)}.$$

$Y' := \mathrm{Spec}(B') \to U$ ist eine Hilbert-Überlagerung und wir haben in 2.1.3 gesehen, dass $\mathrm{Inert}(Y'|U) \cap U(k)$ eine Hilbert-Menge H enthält.

Der A-Algebrahomomorphismus

$$\alpha : \frac{A[X]}{f(T,X)} \to B, \ X \mapsto b$$

ist injektiv und induziert einen Isomorphismus auf den Quotientenkörpern. Somit ist der U-Morphismus $\mathrm{Spec}(\alpha) : Y \to Y'$ birational. Nach dem Lemma 2.1.5 existiert eine offene Menge $\emptyset \neq V \subset U$ derart, dass

$$\mathrm{Inert}(Y|U) \cap V = \mathrm{Inert}(Y'|U) \cap V$$

gilt. Daher enthält $\mathrm{Inert}(Y|U) \cap U(k)$ die Hilbert-Menge $H \cap V(k)$. □

Ist X ein Schema, so wird mit X^{cl} die Menge der abgeschlossenen Punkte des unterliegenden Raumes bezeichnet. Sei nun X ein separiertes, algebraisches, integres Schema über dem Hilbert-Körper k. Sei $(p_i : T_i \to X)_{i=1,\cdots,s}$ eine endliche Familie von Hilbert-Überlagerungen. Wir schreiben in dieser Situation oft $T_\bullet$ für diese Familie und nennen

$$\mathrm{Inert}(T_\bullet|X) := \bigcap_{i=1,\cdots,s} \mathrm{Inert}(T_i|X)$$

die **abstrakte Hilbert-Menge** zur Familie $T_\bullet$ von Hilbert-Überlagerungen. In den Anwendungen werden wir oft in der Situation sein, dass X gegeben ist, und dass man weiß, dass für eine geeignete endliche Familie von Hilbert-Überlagerungen $T_\bullet$ von X die Elemente von $\mathrm{Inert}(T_\bullet|X) \cap X^{cl}$ eine gewisse gute Eigenschaft besitzen. Die folgenden Sätze zeigen, dass die Mengen $\mathrm{Inert}(T_\bullet|X) \cap X^{cl}$ groß sind. Wir betonen noch einmal, dass $X(k) \cap \mathrm{Inert}(T_\bullet|X) = \emptyset$ gelten kann. Bereits $X(k)$ kann ja leer sein.

Satz 2.1.7 *Sei X ein integres, algebraisches, separiertes Schema über dem Hilbert-Körper k. Sei $T_\bullet$ eine endliche Familie von Hilbert-Überlagerungen von X. Sei $n \geq 1$, $X_0 \subset X$ nichtleer und offen, $U \subset \mathbb{A}_n$ offen und $p : X_0 \to U$ ein endlicher, étaler Morphismus. Sei d der Grad von p. Sei $H \subset U(k)$ eine Hilbert-Menge.*

1. *Die Menge I der $x \in \mathrm{Inert}(T_\bullet|X) \cap X_0^{cl}$, für die $k(x)|k$ separabel vom Grad d ist, und $p(x) \in H$ gilt, ist unendlich.*

2. *Ist p sogar eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ, so ist $k(x)|k$ galoissch mit Gruppe Γ für alle $x \in I$.*

Beweis: Seien $p_i : T_i \to X$ die betrachteten Hilbert-Überlagerungen. Sei $S_i := p_i^{-1}(X_0)$. Dann besteht das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \coprod S_i & \subset & \coprod T_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \subset & X \\ \downarrow & & \\ U & \subset & \mathbb{A}_n. \end{array}$$

Offenbar gilt

$$\mathrm{Inert}(S_\bullet|X_0) = \mathrm{Inert}(T_\bullet|X) \cap X_0.$$

Nach 2.1.6 enthält

$$\hat{H} := \mathrm{Inert}(S_\bullet|U) \cap U(k) \cap H$$

eine Hilbert-Menge. Da k ein Hilbert-Körper ist, muss $\hat{H}$ unendlich sein. D.h. es existiert eine unendliche Familie $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \hat{H}$ mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$. Dann gilt $t_i \in \mathrm{Inert}(X_0|U) \cap U(k)$ für alle i nach 2.1.4. Daher existiert genau ein $x_i \in X_0$ mit $p(x_i) = t_i$ und $k(x_i)|k$ ist eine separable Erweiterung vom Grad d. Wieder mit 2.1.4 sieht man, dass $x_i \in \mathrm{Inert}(S_\bullet|X_0)$ gilt.

Wenn p eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ ist, dann muss $[k(x_i) : k]$ galoissch mit Gruppe Γ sein, denn es gilt $\Gamma_{x_i} = \Gamma$ und, da p étale ist, $|\Gamma_{x_i}^T| = 1$. (Siehe 1.3.1). □

Bemerkung: Sei k ein Hilbert-Körper.

1. Die Aussage des Satzes ist auch für $H = U$ und sogar im Spezialfall, dass keine zusätzlichen Bedingungen durch die T_i gestellt werden (d.h. man betrachtet nur die eine Hilbert-Überlagerung $Id : T_1 = X \to X$), interessant.

2. Sei X integer, separiert und algebraisch über k. Der Funktionenkörper $R(X)$ enthalte einen rein-transzendenten Unterkörper $K = k(u_1, \cdots, u_n)$ mit $n \geq 1$, über dem $R(X)$ separabel vom Grad d (bzw. galoissch mit endlicher Gruppe Γ) ist. Wir wissen nach 1.4.7, dass dann offene Unterschemata $\emptyset \neq X_0 \subset X$ und $U \subset \mathbb{A}_n$ und ein endlicher étale Morphismus $X_0 \to U$ vom Grad d (eine étale Galois-Überlagerung $X_0 \to U$ mit Gruppe Γ) existieren. Der Satz liefert dann, dass unendlich viele abgeschlossene Punkte $x \in X$ existieren derart, dass $k(x)|k$ separabel vom Grad d (bzw. galoissch mit Gruppe Γ) ist.

3. Sei $T_\bullet$ eine endliche Familie von Hilbert-Überlagerungen eines integren, separierten, algebraischen k-Schemas X. $R(X)$ sei separabel erzeugt. Dann liefert der Satz in Kombination mit 1.4.7, dass für jede offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset X$ die Menge $U^{cl} \cap \mathrm{Inert}(T_\bullet|X)$ unendlich ist.

4. Sei X eine k-Varietät und $R(X)$ separabel erzeugt. (Ist X glatt, so ist dies automatisch erfüllt.) Sei $F|k$ ein endlicher, separabler Erweiterungskörper. Dann ist $X_F \to X$ eine Hilbert-Überlagerung und

$$\mathrm{Inert}(X_F|X) \cap X^{cl} = \begin{array}{l} \{x \in X^{cl} \mid k(x) \otimes_k F \text{ ist separabler} \\ \text{Erweiterungskörper von } k(x)\} \end{array}$$

ist unendlich. Es gibt also unendlich viele abgeschlossene Punkte $x \in X$ mit zu F linear disjunktem Restklassenkörper.

Im Fall von k-Varietäten werden wir den obigen Satz weiter verschärfen. Die Verschärfung mag auf den ersten Blick etwas künstlich wirken; sie wird aber später eine wichtige Rolle spielen. Sei k ein Körper und $(k_i)_{i\in I}$ eine Familie von

Erweiterungskörpern von k. Man nennt $(k_i)_{i\in I}$ eine **linear disjunkte Familie** genau dann, wenn die k-Algebra

$$\bigotimes_{i\in I} k_i = \lim_{\leftarrow} \bigotimes_{i\in I'} k_i$$

(I' durchläuft die endlichen Teilmengen von I) integer ist. Sind die k_i Unterkörper eines gemeinsamen Erweiterungskörpers Ω von k, so ist das Kompositum der k_i in Ω gerade das Bild der kanonischen Abbildung

$$\bigotimes_{i\in I} k_i \to \Omega.$$

Bekanntlich ist $(k_i)_{i\in I}$ genau dann linear disjunkt, wenn für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ die Familie $(k_i)_{i\in J}$ linear disjunkt ist. Sind alle $k_i|k$ algebraisch, so ist $(k_i)_{i\in I}$ genau dann eine linear disjunkte Familie, wenn $\bigotimes_{i\in I} k_i$ ein Körper ist. Im Fall $I = \mathbb{N}$ sprechen wir oft von linear disjunkten Folgen anstatt von linear disjunkten Familien.

Bemerkung: Sei $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von über k endlichen Zwischenkörpern von $\overline{k}|k$. Bekanntlich sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine linear disjunkte Folge.

2. Für jedes n ist $(k_1, \cdots, k_n)$ eine linear disjunkte Familie.

3. Für jedes n gilt $[k_1 k_2 \cdots k_n : k] = \prod_{i=1}^{n} [k_i : k]$.

Satz 2.1.8 *Sei k ein Hilbert-Körper. Sei X eine k-Varietät positiver Dimension. Sei $T_\bullet$ eine endliche Familie von Hilbert-Überlagerungen von X. Sei $X_0 \subset X$ nichtleer und offen, $U \subset \mathbb{A}_n$ offen und $p : X_0 \to U$ ein endlicher, étaler Morphismus (bzw. eine endliche, étale Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ). Sei d der Grad von p. Sei $H \subset U(k)$ eine Hilbert-Menge. Sei $F|k$ ein endlicher, separabler Erweiterungskörper. Dann existiert eine Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset H$ und eine Folge*

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X_0^{cl} \cap \mathrm{Inert}(T_\bullet|X)$$

mit folgenden Eigenschaften.

1. *$p(x_i) = t_i$ für alle i.*

2. *$(F, k(x_1), k(x_2), \cdots)$ ist eine linear disjunkte Folge von Erweiterungen von k.*

3. *$k(x_i)|k$ ist separabel vom Grad d (bzw. galoissch mit Gruppe Γ).*

Beweis: Sei $S_i := T_i|X_0$. Wir konstruieren $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ rekursiv. Seien $t_1, \cdots, t_s \in H$ und $x_1, \cdots, x_s \in X_0^{cl} \cap \mathrm{Inert}(T_\bullet|X)$ bereits konstruiert. Wir nehmen an, dass $p(x_i) = t_i$ für $i \leq s$ gilt, und dass $k(x_i)|k$ für $i \leq s$ separabel vom Grad d (bzw. galoissch mit Gruppe Γ) ist. Des weiteren nehmen wir an, dass

$$F_s := F \otimes \bigotimes_{i=1}^{s} k(x_i)$$

ein Körper ist.

Nach 2.1.6 enthält

$$H_s := \mathrm{Inert}(S_\bullet|U) \cap \mathrm{Inert}(X_{0,F_s}|U) \cap U(k) \cap H$$

eine Hilbert-Menge. Wir wählen nun $t_{s+1} \in H_s$. Nach 2.1.4 gilt

$$t_{s+1} \in \mathrm{Inert}(X_0|U),$$

d.h. es existiert genau ein abgeschlossener Punkt $x_{s+1} \in X_0$ mit $p(x_{s+1}) = t_{s+1}$. Es folgt, dass $k(x_{s+1})|k$ separabel vom Grad d (bzw. galoissch mit Gruppe Γ) ist. Nach 2.1.4 gilt $x_{s+1} \in \mathrm{Inert}(T_\bullet|X)$ und $x_{s+1} \in \mathrm{Inert}(X_{0,F_s}|X_0)$. Daher ist

$$F_s \otimes k(x_{s+1}) = F \otimes \bigotimes_{i=1}^{s+1} k(x_i)$$

ein Körper. □

2.2 Der Satz von Lang-Néron

Sei k ein Körper, $T|k$ eine projektive, glatte Varietät und $A|k$ eine abelsche Varietät. Wir benötigen im Folgenden einige Aussagen über die Struktur der abelschen Gruppe $\mathrm{Mor}_k(T,A)$ sowie der Faktorgruppe $\frac{\mathrm{Mor}_k(T,A)}{A(k)}$, die entsteht, wenn wir in $\mathrm{Mor}_k(T,A)$ die Gruppe der konstanten Morphismen ausfaktorisieren. Aus dem Lang-Néron-Theorem, das wir zu Beginn des Abschnittes zitieren, folgt, dass letztere abelsche Gruppe endlich erzeugt ist.

Ist $\varphi : T \to \mathrm{Spec}(k)$ der Strukturmorphismus, so hat man einen kanonischen Morphismus

$$j : A(k) \to \mathrm{Mor}_k(T,A),\ a \mapsto a \circ \varphi,$$

der einen k-rationalen Punkt von A auf den entsprechenden konstanten Morphismus $T \to A$ abbildet. Wir identifizieren $A(k)$ mit seinem Bild in $\mathrm{Mor}_k(T,A)$ und bezeichnen mit

$$M_k(T,A) := \frac{\mathrm{Mor}_k(T,A)}{A(k)}$$

den Kokern von j. Wir haben bereits in Abschnitt 1.1 erwähnt, dass jede rationale Abbildung $T \to A$ überall definiert ist, d.h. dass die kanonische Abbildung

$$h : \mathrm{Mor}_k(T,A) \to \mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(R(T)),A)),\ f \mapsto f \circ (\mathrm{Spec}(R(T)) \to T)$$

bijektiv ist. (Hier verwenden wir, dass T glatt ist.) $A(k)$ identifiziert sich in naheliegender Weise mit einer Untergruppe von $A(R(T))$ und h induziert einen Isomorphismus

$$M_k(T,A) \cong \frac{A(R(T))}{A(k)}.$$

Bevor wir den Satz von Lang-Néron aussprechen, erinnern wir an das Konzept der $K|k$-Spur einer abelschen Varietät $A|K$ über einer regulären Erweiterung K des Grundkörpers. Sei k ein Körper und $K|k$ eine Körpererweiterung. Bekanntlich nennt man $K|k$ eine **reguläre Körpererweiterung** genau dann, wenn $K|k$ endlich erzeugt und linear disjunkt zu $\overline{k}$ ist. (Die regulären Erweiterungen von k sind genau die Funktionenkörper der k-Varietäten.) Sei $K|k$ eine reguläre Körpererweiterung und A eine abelsche Varietät über K. Der Funktor

$$F : C \mapsto \mathrm{Hom}_K(C_K, A)$$

auf der Kategorie AbVar_k der abelschen Varietäten über k ist darstellbar nach [Mi86a, 20.5]. Sei B eine abelsche Varietät über k und $\tau : B_K \to A$ ein K-Homomorphismus. Man nennt (B, τ) eine $K|k$**-Spur** von A genau dann, wenn (B, τ) darstellendes Objekt des obigen Funktors F ist, d.h. genau dann, wenn die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_k(C, B) \to \mathrm{Hom}_K(C_K, A), \quad f \mapsto \tau \circ f_K$$

bijektiv ist. In [Mi86a, 20.5ff] wird überdies gezeigt, dass für jede $K|k$-Spur (B, τ) von A, der Kern von $\tau : B_K \to A$ endlich über K ist.

Seien A und C abelsche Varietäten über k. Sei $K|k$ eine reguläre Körpererweiterung. Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_k(C, A) \to \mathrm{Hom}_K(C_K, A_K), \quad f \mapsto f_K$$

bijektiv nach [Mi86a, 20.4]. Insbesondere ist (A, Id_{A_K}) eine $K|k$-Spur von A_K.

Sei A eine abelsche Varietät über K und (B, τ) eine $K|k$-Spur von A. Dann hat man eine kanonische Abbildung

$$i : B(k) \subset B(K) = \mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(K), B) \cong \mathrm{Mor}_K(\mathrm{Spec}(K), B_K) = B_K(K)$$

und eine von τ induzierte Abbildung

$$\tau : B_K(K) = \mathrm{Mor}_K(\mathrm{Spec}(K), B_K) \to \mathrm{Mor}_K(\mathrm{Spec}(K), A) = A(K).$$

Es ist üblich, i in der Notation zu unterdrücken und z.B. $\tau(B(k))$ statt $\tau \circ i(B(k))$ für das Bild von $B(k)$ in $A(K)$ zu schreiben.

Wir können nun den Satz von Lang-Néron aussprechen.

Satz 2.2.1 (Lang-Néron) *Sei k ein Körper und $K|k$ eine reguläre Körpererweiterung. Sei A eine abelsche Varität über K. Sei (B, τ) eine $K|k$-Spur von A. Dann ist die abelsche Gruppe*

$$\frac{A(K)}{\tau(B(k))}$$

endlich erzeugt.

Beweis: Siehe [La, Ch. 6, Th. 2]. □

Bemerkung:

1. Natürlich braucht $B(k)$ nicht endlich erzeugt sein, wenn man keine zusätzlichen Voraussetzungen an k stellt. Ist etwa $B \neq 0$ eine abelsche Varietät über $\mathbb{C}$, so ist $B(\mathbb{C})$ nicht endlich erzeugt. ($B(\mathbb{C})$ ist von der Form $\mathbb{C}^n/\Lambda$ mit einem Gitter Λ.)

2. Ist in der Situation des Satzes die $K|k$-Spur $B = 0$, so ist $A(K)$ endlich erzeugt.

Folgerung: (Lang-Néron) *Sei k ein (über seinem Primkörper) endlich erzeugter Körper und $A|k$ eine abelsche Varietät. Dann ist $A(k)$ endlich erzeugt.*

Beweis: Siehe [La]. □

Folgerung: *Sei k ein Körper, $T|k$ eine projektive, glatte Varietät und $A|k$ eine abelsche Varietät. Dann ist $M_k(T, A)$ endlich erzeugt. Genau dann ist $\mathrm{Mor}_k(T, A)$ endlich erzeugt, wenn $A(k)$ endlich erzeugt ist.*

Beweis: Sei $K := R(T)$. Dann ist K eine reguläre Erweiterung von k. Ferner ist, wie bereits erwähnt, (A, Id_{A_K}) eine $K|k$-Spur von A_K. Obiger Satz von Lang-Néron liefert daher, dass

$$\frac{A(R(T))}{A(k)}$$

endlich erzeugt ist. Wir haben bereits erwähnt, dass

$$\frac{A(R(T))}{A(k)} \cong M_k(T, A)$$

gilt. □

Wir werden nun das Ergebnis der Folgerung deutlich verschärfen.

Satz 2.2.2 *Sei k ein Körper, T eine glatte, projektive k-Varietät und A eine abelsche Varietät über k. Dann ist*

$$M_k(T, A) = \frac{\mathrm{Mor}_k(T, A)}{A(k)}$$

ein endlich erzeugter, freier $\mathbb{Z}$-Modul.

Beweis: Da $M := M_k(T, A)$ nach obiger Folgerung endlich erzeugt ist, genügt es zu zeigen, dass M torsionsfrei ist. Sei $f \in \mathrm{Mor}_k(T, A)$ ein Element, dessen Bild in M ein Torsionselement ist. Dann existiert ein $n \neq 0$ mit $n_A \circ f \in A(k)$. Wir zeigen, dass das Bild von f in M Null ist, d.h. dass $f \in A(k)$ konstant ist. Dafür ist nachzuweisen, dass ein k-Morphismus $Q : \mathrm{Spec}(k) \to A$ existiert, der $f = Q \circ \varphi_T$ erfüllt, wenn $\varphi_T : T \to \mathrm{Spec}(k)$ die Strukturabbildung von T bedeutet. Sei $P := n_A \circ f$. Dann besteht das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & & \downarrow_{n} \\ \mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{P} & A \end{array} .$$

Wir bilden das kartesische Quadrat

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{q'} & A \\ \downarrow & & \downarrow_{n} \\ \mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{P} & A \end{array}.$$

Dann existiert genau ein k-Morphismus $g' : T \to F$ mit $q' \circ g' = f$. Wendet man den Funktor $-_{\mathrm{red}}$ an, der jedem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ das zugehörige reduzierte Schema $(X, \mathcal{O}_X/\mathrm{Nilrad}(\mathcal{O}_X))$ zuordnet, so erhält man eine Faktorisierung von f in k-Morphismen

$$f : T = T_{\mathrm{red}} \xrightarrow{g} F_{\mathrm{red}} \xrightarrow{q} A_{\mathrm{red}} = A.$$

Da n_A eine Isogenie (d.h. endlich und treuflach) ist, muss F endlich über k sein. Somit gilt

$$F_{\mathrm{red}} = \coprod_{j=1}^{s} \mathrm{Spec}(E_j)$$

mit geeigneten Erweiterungskörpern E_j, die endlich über k sind. Da T zusammenhängt, existiert ein j und ein k-Morphismus $h : T \to \mathrm{Spec}(E_j)$ mit $g = I_j \circ h$, wenn $I_j : \mathrm{Spec}(E_j) \to F_{\mathrm{red}}$ die j-te Inklusion bedeutet. f faktorisiert sich demnach in k-Morphismen

$$f : T \xrightarrow{h} \mathrm{Spec}(E_j) \xrightarrow{I_j} F_{\mathrm{red}} \xrightarrow{q} A.$$

Ist $E|k$ ein echter, endlicher Erweiterungskörper, so gibt es wegen der geometrischen Integrität von T *keinen* k-Morphismus $T \to \mathrm{Spec}(E)$. Daher muss $E_j = k$ gelten. □

In der Situation des Satzes sei $R_k(T, A)$ der Rang des endlich erzeugten, freien $\mathbb{Z}$-Moduls $M_k(T, A)$. Wir nennen $R_k(T, A)$ den **Morphismenrang des Tupels** (T, A). Die Zahl $R_k(T, A)$ ist eine in diversen Abschnitten der vorliegenden Arbeit wichtige Invariante. Sei nun $E|k$ eine Körpererweiterung. Nach dem Satz ist auch

$$M_E(T_E, A_E) = \frac{\mathrm{Mor}_E(T_E, A_E)}{A(E)}$$

ein freier $\mathbb{Z}$-Modul. Sein Rang ist $R_E(T_E, A_E)$. Der naheliegende Homomorphismus

$$\mathrm{Mor}_k(T, A) \to \mathrm{Mor}_E(T_E, A_E), \; f \mapsto f_E$$

induziert einen Homomorphismus

$$M_k(T, A) \to M_E(T_E, A_E).$$

Proposition 2.2.3 *Sei k ein Körper, $T|k$ eine geometrisch reguläre, projektive k-Varietät und $A|k$ eine abelsche Varietät. Sei $E|k$ eine algebraische Körpererweiterung.*

1. *Die kanonische Abbildung*

$$M_k(T,A) \to M_E(T_E, A_E)$$

ist injektiv. Insbesondere gilt

$$R_k(T,A) \leq R_E(T_E, A_E) \leq R_{\overline{k}}(T_{\overline{k}}, A_{\overline{k}}).$$

2. *Ist $E|k$ galoissch, so besteht eine exakte Folge*

$$0 \to M_k(T,A) \to M_E(T_E,A_E)^{G_{E|k}} \xrightarrow{d} H^1(G_{E|k}, A(E)) \to \cdots .$$

Beweis:

1. Es besteht das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A(k) & \to & \mathrm{Mor}_k(T,A) & \to & M_k(T,A) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A(E) & \to & \mathrm{Mor}_E(T,A) & \to & M_E(T,A) & \to & 0. \end{array}$$

Der mittlere, vertikale Pfeil ist bekanntlich injektiv. Nach dem Schlangenlemma genügt es zu zeigen, dass

$$\frac{A(E)}{A(k)} \to \frac{\mathrm{Mor}_E(T_E,A_E)}{\mathrm{Mor}_k(T,A)}$$

injektiv ist. Man kann $\mathrm{Mor}_E(T_E,A_E)$ mit $\mathrm{Mor}_k(T_E,A)$ identifizieren. Sei $x \in A(E) = \mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(E), A)$. Nehmen wir an, es existiert ein $f \in \mathrm{Mor}_k(T,A)$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_E & \to & \mathrm{Spec}(E) \\ \downarrow & & \downarrow x \\ T & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

kommutativ ist. Es genügt $x \in A(k)$ zu zeigen. Sei $a \in A$ der Punkt, in dem der geometrische Punkt x lokalisiert ist. a ist ein abgeschlossener Punkt, da $E|k$ algebraisch ist. Wir zeigen, dass $k(a) = k$ gilt. Es muss $f(T) = \{a\}$ gelten. Da T reduziert ist und $j : \mathrm{Spec}(k(a)) \to A$ eine abgeschlossene Immersion ist, existiert ein k-Morphismus $g : T \to \mathrm{Spec}(k(a))$, der $j \circ g = f$ erfüllt. Dies erzwingt $k(a) = k$, da T geometrisch integer ist.

2. Sei nun $E|k$ sogar eine Galois-Erweiterung. Dann gilt bekanntlich

$$\mathrm{Mor}_E(T_E,A_E)^{G_{E|k}} = \mathrm{Mor}_k(T,A)$$

(vgl. 1.2.8) und $A(E)^{G_{E|k}} = A(k)$. Die lange exakte Kohomologiefolge zu der kurzen exakten Folge

$$0 \to A(E) \to \mathrm{Mor}_E(T_E,A_E) \to M_E(T_E,A_E) \to 0$$

beginnt mit

$$0 \to A(k) \to \mathrm{Mor}_k(T,A) \to M_E(T_E,A_E)^{G_{E|k}} \to H^1(G_{E|k}, A(E)) \to \cdots .$$

Dies impliziert die Behauptung.

$\square$

Bemerkung: Es sei die Situation des Satzes zugrunde gelegt. $E|k$ sei galoissch.

1. Die Gruppe $H^1(G_k, A(\overline{k}))$ identifiziert sich mit der sogenannten Weil-Châtelet-Gruppe homogener Räume für A.
2. Die kanonische Injektion $M_k(T,A) \to M_E(T_E, A_E)^{G_{E|k}}$ ist im allgemeinen *nicht* bijektiv.
3. *Falls aber* $T(k) \neq \emptyset$ *gilt*, so ist $M_k(T,A) \to M_E(T_E, A_E)^{G_{E|k}}$ bijektiv: Sei $x \in T(E)^{G_{E|k}} = T(k)$. Dann ist der Homomorphismus
$$\sigma : \mathrm{Mor}_E(T_E, A_E) \to A(E),\ f \mapsto f(x)$$
eine (wegen der Galois-Invarianz von x) $G_{E|k}$-lineare Spaltung der kurzen exakten Folge
$$0 \to A(E) \to \mathrm{Mor}_E(T_E, A_E) \to M_E(T_E, A_E) \to 0.$$
In der zugehörigen langen exakten Kohomologiefolge sind daher alle Randhomomorphismen Null, insbesondere der erste.

Sei k ein Körper, (T, P) eine punktierte k-Varietät und $A|k$ eine abelsche Varietät. Für $Q \in A(k)$ sei $T_Q : A \to A$ die entsprechende Translation. Dann hat man einen kanonischen Homomorphismus

$$\alpha_P : \mathrm{Mor}_k(T,A) \to \mathrm{Mor}_k^*((T,P),A),\ f \mapsto T_{-f(P)} \circ f.$$

Für $f \in \mathrm{Mor}^*((T,P),A)$ gilt $\alpha_P(f) = f$, d.h. α_P ist (zerfallend) surjektiv. Ferner gilt $\ker(\alpha_P) = A(k)$, d.h. α_P induziert einen Isomorphismus

$$\overline{\alpha_P} : M_k(T,A) \cong \mathrm{Mor}_k^*((T,P),A).$$

Wir sehen, dass auch $\mathrm{Mor}_k^*((T,P),A)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $R_k(T,A)$ ist.

Bemerkung: Sei k ein Körper und T eine k-Varietät. Sei $\overline{T} := T_{\overline{k}}$. Dann existiert ein $P \in \overline{T}(\overline{k})$ nach 1.4. Bekanntlich ist der Funktor

$$\overline{B} \mapsto \mathrm{Mor}_{\overline{k}}^*((\overline{T},P),\overline{B})$$

auf der Kategorie $\mathrm{AbVar}_{\overline{k}}$ darstellbar. Ein darstellendes Objekt $(\mathrm{Alb}_{\overline{T}}, \lambda^P)$ wird **Albanese-Varietät** von $(\overline{T}, P)$ genannt. Es gilt somit

$$M_{\overline{k}}(T_{\overline{k}}, A_{\overline{k}}) \cong \mathrm{Mor}_{\overline{k}}^*((T_{\overline{k}},P),A_{\overline{k}}) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{k}}(\mathrm{Alb}_{\overline{T}}, A_{\overline{k}}).$$

Sind B_1, B_2 abelsche Varietäten über k, so ist $\mathrm{Hom}_k(B_1, B_2)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $\leq 4\dim(B_1)\dim(B_2)$ nach [Mi86a]. Dies impliziert, dass $M_{\overline{k}}(T_{\overline{k}}, A_{\overline{k}})$ $\mathbb{Z}$-frei vom Rang $\leq 4\dim(\mathrm{Alb}_{\overline{T}})\dim(A)$ ist. $M_k(T,A)$ identifiziert sich mit einem $\mathbb{Z}$-Untermodul von $M_{\overline{k}}(T_{\overline{k}}, A_{\overline{k}})$. Dies ergibt einen alternativen Beweis für die Tatsache, dass $M_k(T,A)$ endlich erzeugter, freier $\mathbb{Z}$-Modul ist, mit der zusätzlichen Information, dass

$$R(T,A) \leq 4\dim(\mathrm{Alb}_{\overline{T}})\dim(A)$$

gilt. Wir werden diese zusätzliche Information nicht brauchen. (Wir sind oft daran interessiert, T für A so zu wählen, dass $R(T,A)$ groß ist.)

2.3 Ein Spezialisierungssatz

Wir beweisen nun einen Spezialisierungssatz für konstante abelsche Varietäten über einer regulären Erweiterung $K|k$. Dieser Satz wird impliziert von einem Spezialisierungssatz in dem Buch [La2, I.7.2] von Lang. Lang gibt dort keinen Beweis für diesen Satz. Er schreibt diesen Satz der bekannten Arbeit [N52] von Néron zu. Diese über 50 Jahre alte Arbeit ist aus heutiger Sicht recht schwer zu lesen, da sie die Notationen der Weil'schen Foundations of Algebraic Geometry und nicht die moderne, in den 60er Jahren durch Grothendieck eingeführte Sprache der Schemata [EGA] benutzt. Des weiteren scheint die Arbeit von Néron sich auf den Fall von Jacobi-Varietäten zu beschränken (siehe S. 155, Th. 6 in [N52]), während wir den Fall beliebiger abelscher Varietäten benötigen. In [Se] findet sich mit Beweis ein schwächerer Spezialisierungssatz, der für unsere Anwendung nicht ausreicht. Da uns keine wirklich geeignete Referenz vorliegt, geben wir in diesem Abschnitt einen Beweis für den Spezialisierungssatz, den wir in den folgenden Abschnitten brauchen. Wir erheben keinerlei Anspruch auf Originalität für den Satz. Der folgende Beweis ist eine Adaptierung der Argumente in [Se].

Sei k ein Körper, $A|k$ eine abelsche Varietät und $T|k$ eine projektive, glatte Varietät. Sei $t \in T$. Wir betrachten die **Spezialisierungsabbildung**

$$\sigma_t : \mathrm{Mor}_k(T, A) \to A(k(t)),\ f \mapsto f(t)$$

und die von σ_t induzierte Abbildung

$$\overline{\sigma_t} : M_k(T, A) \to \frac{A(k(t))}{A(k)}.$$

Wir werden im Folgenden zeigen, dass im Fall eines Hilbert-Körpers k (in einem zu präzisierenden Sinn) viele $t \in T$ existieren, für die σ_t injektiv ist. Einige Bemerkungen scheinen vorab angebracht zu sein.

Bemerkung 2.3.1

1. Sei $t \in T$. Es besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A(k) & \to & \mathrm{Mor}_k(T, A) & \to & M_k(T, A) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A(k) & \to & A(k(t)) & \to & \frac{A(k(t))}{A(k)}. & & \end{array}$$

   Daher ist die kanonische Abbildung $\ker(\sigma_t) \to \ker(\overline{\sigma_t})$ bijektiv. $\ker(\overline{\sigma_t})$ ist als Untermodul des nach 2.2.2 endlich erzeugten, freien $\mathbb{Z}$-Moduls $M_k(T, A)$ endlich erzeugt und $\mathbb{Z}$-frei. Es gilt: Genau dann ist σ_t injektiv, wenn $\overline{\sigma_t}$ injektiv ist.

2. Ist also σ_t injektiv und $R_k(T, A) \geq 1$, so muss $[k(t) : k] \geq 2$ wegen der Injektivität von $\overline{\sigma_t}$ gelten.

3. Ist $|T(k)| = \infty$ und $R_k(T, A) \geq 1$ (z.B. $T = A$ eine abelsche Varietät mit $|A(k)| = \infty$), so gibt es unendlich viele $t \in T$, für die σ_t nicht injektiv ist.

Ist $\theta \in T(\overline{k})$ ein geometrischer Punkt, so können wir auch die Spezialisierungsabbildung

$$\eta_\theta : \mathrm{Mor}_k(T, A) \to A(\overline{k}),\ f \mapsto f(\theta)$$

sowie die von η_θ induzierte Abbildung

$$\overline{\eta_\theta} : M_k(T, A) \to \frac{A(\overline{k})}{A(k)}$$

betrachten. Ist der geometrische Punkt $\theta \in T(\overline{k})$ in $t \in T$ lokalisiert, so faktorisiert sich $\theta : \mathrm{Spec}(\overline{k}) \to T$ als

$$\mathrm{Spec}(\overline{k}) \xrightarrow{u} \mathrm{Spec}(k(t)) \to T,$$

wobei u einer k-Einbettung $k(t) \to \overline{k}$ entspricht. u induziert eine Injektion $u' : A(k(t)) \to A(\overline{k})$ und $\eta_\theta = u' \circ \sigma_t$. Ist $\overline{u'}$ die von u' induzierte Injektion $\frac{A(k(t))}{A(k)} \to \frac{A(\overline{k})}{A(k)}$, so gilt $\overline{\eta_\theta} = \overline{u'}\overline{\sigma_t}$. Ist X eine abelsche Gruppe (bzw. eine abelsche Varietät), so wird im Folgenden mit n_X die Multiplikation mit n auf X bezeichnen. X_n steht für den Kern von n_X.

Bemerkung 2.3.2 Sei $t \in T$ und $\theta \in T(\overline{k})$ ein in t lokalisierter, geometrischer Punkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. σ_t ist injektiv.
2. η_θ ist injektiv.
3. $\overline{\sigma_t}$ ist injektiv.
4. $\overline{\eta_\theta}$ ist injektiv.

Wir beginnen nun den Beweis des Spezialisierungssatzes.

Bis auf weiteres sei k ein Hilbert-Körper, $T|k$ eine projektive, glatte Varietät, $A|k$ eine abelsche Varietät. Des weiteren sei $M := \mathrm{Mor}_k(T, A)$.

Wir bemerken vorab, dass M nach 2.2 endlich erzeugt ist.

Lemma 2.3.3

1. *$M_n = A_n(k)$, d.h. M_n besteht aus konstanten Morphismen zu k-rationalen n-Torsionspunkten.*
2. *Für jedes $t \in T$ ist $\ker(\sigma_t)$ ein endlich erzeugter, freier $\mathbb{Z}$-Modul.*
3. *Für jedes $n \neq 0$ ist die restringierte Abbildung*

$$\sigma_t | M_n \to A_n(k(t))$$

injektiv.

Beweis: Sei $n \neq 0$. Aus der kurzen exakten Folge

$$0 \to A(k) \to M \to M_k(T, A) \to 0$$

erhält man die exakte Folge

$$0 \to A_n(k) \to M_n \to M_k(T, A)_n$$

und $M_k(T, A)_n = 0$ nach 2.2.2. Daher ist $M_n = A_n(k)$. Dies zeigt 1. Da $A_n(k) \to A(k(t))$ offensichtlich injektiv ist, folgt auch 3. Für den Beweis von 2. beachte man, dass $\ker(\sigma_t) \cong \ker(\overline{\sigma_t})$ gilt. $\ker(\overline{\sigma_t})$ ist endlich erzeugt und $\mathbb{Z}$-frei als Untermodul des endlich erzeugten, freien $\mathbb{Z}$-Moduls $M_k(T, A)$. □

Lemma 2.3.4 *Sei l eine Primzahl, die teilerfremd zur Charakteristik von k ist. Dann existiert eine (von l abhängende) endliche, separable Erweiterung $F|k$ derart, dass für alle $t \in \mathrm{Inert}(T_F, T)$ die restringierte Spezialisierungsabbildung*

$$\sigma_t | M_l \to A_l(k(t))$$

bijektiv ist.

Beweis: Nach 2.3.3 genügt es zu zeigen, dass eine endliche, separable Erweiterung $F|k$ existiert derart, dass $A_l(k) = A_l(k(t))$ für alle $t \in \mathrm{Inert}(T_F|T)$ gilt.

Die Multiplikation l_A mit l auf A ist eine Isogenie. Da l zur Charakteristik teilerfremd ist, ist l_A étale. Daher ist A_l ein endliches, étales Gruppenschema über k. Es gibt somit endliche, separable Erweiterungen $E_i|k$ derart, dass

$$A_l \cong \coprod_{i=1}^{s} \mathrm{Spec}(E_i)$$

gilt. Wir dürfen uns die E_i so nummeriert denken, dass

$$E_1 = \cdots = E_j = k$$

und

$$E_{j+1}, \cdots, E_s \neq k$$

gilt. Ist $K|k$ eine Körpererweiterung, so gilt

$$A_l(K) = \mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(K), A_l) = \coprod_{i=1}^{j} \mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(K), \mathrm{Spec}(E_i)).$$

Nun gilt aber

$$|\mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(K), \mathrm{Spec}(E_i))| = |\mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(K), \mathrm{Spec}(k))| = 1 \quad \forall i = 1, \cdots, j,$$

d.h. $|A_l(K)| \geq j$. Genau dann gilt $|A_l(K)| = j$, wenn für *kein* $i \geq j + 1$ eine k-Einbettung $E_i \to K$ existiert. Insbesondere gilt $|A_l(k)| = j$. Sei F das Kompositum $E_{j+1} \cdots E_s$. Ist K linear disjunkt zu F, so existiert für *kein* $i \geq j + 1$ eine k-Einbettung $E_i \to K$, d.h. es gilt $|A_l(K)| = j$ und die kanonische Injektion $A_l(k) \to A_l(K)$ muss bijektiv sein. Wenn nun $t \in \mathrm{Inert}(T_F|T)$ gilt, so ist $k(t)$ zu F linear disjunkt und $A_l(k) \to A_l(k(t))$ ist bijektiv. □

Lemma 2.3.5 *Sei l eine Primzahl, die teilerfremd zur Charakteristik von k ist.* $A(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l$ möge endlich sein. *Dann existiert eine endliche Familie von étalen Hilbert-Überlagerungen $(g_i : X_i \to T)_{i=1,\cdots,s}$ von T derart, dass für $t \in$* $\mathrm{Inert}(X_\bullet|T)$ *die von der Spezialisierungsabbildung σ_t induzierte Abbildung*

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l \to A(k(t)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l$$

injektiv ist.

Beweis: Sei $f \in M$ und $t \in T$ beliebig. Wir bilden kartesische Quadrate

$$\begin{array}{ccccc} F^{(f)} & \to & X^{(f)} & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k(t)) & \to & T & \xrightarrow{f} & A \end{array},$$

wobei der rechte, vertikale Morphismus l_A ist. Mit l_A sind alle drei vertikalen Morphismen endlich und étale. Da $X^{(f)} \to T$ endlich und étale ist, muss $X^{(f)}$ reguläres, separiertes, algebraisches k-Schema sein. (Man benutze [Mi, I.3.17], um die Regularität zu erhalten). Somit sind die lokalen Ringe von $X^{(f)}$ regulär, d.h. insbesondere integer. Die irreduziblen Komponenten von $X^{(f)}$ stimmen also mit den Zusammenhangskomponenten von $X^{(f)}$ überein, und diese sind offen. (Siehe [EGA, I.6.1.10].) Seien $X_1^{(f)}, \cdots, X_{s^f}^{(f)}$ die Zusammenhangskomponenten von $X^{(f)}$. Dann zerfällt $X^{(f)}$ in ein Koprodukt

$$X^{(f)} = \coprod_{i=1}^{s^f} X_i^{(f)}$$

wobei jedes $X_i^{(f)}$ endlich und étale über T ist. Sei $g_i : X_i^{(f)} \to T$ die Restriktion der mittleren, vertikalen Abbildung. g_i ist dann eine étale Hilbert-Überlagerung. Es ist klar, dass $F^{(f)}$ in ein Koprodukt

$$F^{(f)} = \coprod_{i=1}^{s^f} g_i^{-1}(t)$$

zerfällt.

Wir setzen nun $t \in \mathrm{Inert}(X_\bullet^{(f)}|T)$ voraus. Dann existiert für jedes i genau ein $x_i \in X_i^{(f)}$ derart, dass $g_i^{-1}(t) = \mathrm{Spec}(k(x_i))$ und $[k(x_i) : k(t)] = \deg(g_i)$ gilt. Wir haben nun die folgende Kette von Implikationen:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_t(f) \in l \cdot A(k(t)) & \Longleftrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathrm{Spec}(k(t))}(\mathrm{Spec}(k(t)), F^{(f)}) \neq \emptyset \\ & \Longleftrightarrow & \exists i : [k(x_i) : k] = 1 \iff \exists i : \deg(g_i) = 1 \\ & \Longleftrightarrow & \mathrm{Mor}_T(T, X^{(f)}) \neq \emptyset \\ & \Longleftrightarrow & f \in l \cdot M. \end{array}$$

Es besteht eine exakte Folge $0 \to A(k) \to M \to M_k(T, A) \to 0$. Da $A(k)/l$ nach Voraussetzung endlich ist, und $M_k(T, A)$ nach 2.2.2 endlich erzeugt und frei ist, muss M/l endlich sein. Sei $R \subset M$ ein Repräsentantensystem für M/l. Nun ist

$$\Sigma := \{X_i^{(f)} \mid f \in R, i \in \{1, \cdots, s^f\}\}$$

eine endliche Menge von étalen Hilbert-Überlagerungen von T. Sei

$$I := \bigcap_{X \in \Sigma} \mathrm{Inert}(X|T).$$

Dann gilt:

$$\forall t \in I : \forall f \in R : \sigma_t(f) \in l \cdot A(k(t)) \iff f \in l \cdot M.$$

Daraus folgt, dass für alle $t \in I$ die von σ_t induzierte Abbildung $M/l \to A(k(t))/l$ injektiv ist. □

Wir werden nun den Spezialisierungssatz aussprechen und den Beweis beenden.

Satz 2.3.6 *Sei k ein Hilbert-Körper, $T|k$ eine glatte, projektive Varietät und $A|k$ eine abelsche Varietät.* Wir setzen voraus, dass eine von $\mathrm{char}(k)$ verschiedene Primzahl l existiert, für die $A(k)/l$ endlich ist. *Dann existiert eine endliche Familie $(g_i : X_i \to T)_{i=1,\cdots,r}$ étaler Hilbert-Überlagerungen von T derart, dass für alle*

$$t \in \mathrm{Inert}(X_\bullet|T)$$

die Spezialisierungsabbildungen

$$\sigma_t : \mathrm{Mor}_k(T, A) \to A(k(t))$$

und

$$\overline{\sigma_t} : M_k(T, A) \to \frac{A(k(t))}{A(k)}$$

injektiv sind.

Beweis: Nach 2.3.4 und 2.3.5 gibt es eine endliche Familie von Hilbert-Überlagerungen $X_\bullet$ von T derart, dass für $t \in \mathrm{Inert}(X_\bullet|T)$

1. die von σ_t induzierte Abbildung $M_l \to A_l(k(t))$ bijektiv ist und
2. die von σ_t induzierte Abbildung $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l \to A(k(t)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l$ injektiv ist.

Sei $t \in \mathrm{Inert}(X_\bullet|T)$. Wir beweisen, dass σ_t injektiv ist. (Nach 2.3.1 ist dann auch $\overline{\sigma_t}$ injektiv.) Sei $K := \ker(\sigma_t)$ und $I := \mathrm{im}(\sigma_t)$. Aus der exakten Folge

$$0 \to K \to M \xrightarrow{\sigma_t} I \to 0$$

erhält man eine exakte Folge

$$M_l \to I_l \to K/l \to M/l \to I/l.$$

Nun ist aber $M_l \to I_l$ surjektiv nach 1. und $M/l \to I/l$ injektiv nach 2. Daher gilt $K/l = 0$. Nach 2.3.1 ist K ein endlich erzeugter, freier $\mathbb{Z}$-Modul. Dies erzwingt $K = 0$. □

Bemerkung:

1. Es ist uns leider nicht gelungen, die technische Voraussetzung zu eliminieren, dass eine von $\mathrm{char}(k)$ verschiedene Primzahl l existieren soll, für die $A(k)/l$ endlich ist.

2. Ist $A(k)$ endlich erzeugt, und das ist nach 2.2.1 der Fall, wenn k endlich erzeugt ist, so ist $A(k)/l$ automatisch endlich. In dem für uns hauptsächlich interessanten Spezialfall, dass k ein Zahlkörper ist, ist die o.g. Voraussetzung also nicht restriktiv.

3. Wir werden in 2.3.7 zeigen, dass auch wenn nur $A(k)$ von endlichem Rang ist, die Gruppe $A(k)/l$ automatisch endlich ist. Im nächsten Kapitel werden wir den obigen Satz benutzen, um in vielen Fällen nachzuweisen, dass $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang ist. Wenn bereits $A(k)$ von unendlichem Rang ist, so ist trivialerweise auch $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang, ohne dass man dafür den obigen Satz strapazieren müsste. So gesehen wirkt sich die o.g. Voraussetzung in dieser Arbeit nicht sonderlich störend aus.

Bemerkung: Sei die Situation des obigen Satzes zugrunde gelegt. Sei $I := \mathrm{Inert}(X_\bullet|T)$.

1. Ist $\theta \in T(\overline{k})$ ein in einem $t \in I$ lokalisierter, geometrischer Punkt, so ist η_θ und auch $\overline{\eta_\theta}$ injektiv nach 2.3.2.

2. T habe positive Dimension. Da T glatt ist, existiert eine offene Teilmenge $T_0 \subset T$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{A}_n$ $(n \geq 1)$ und ein endlicher, étaler Morphismus $p : T_0 \to \mathbb{A}_n$ nach 1.4.7. Sei $Y_i := g_i^{-1}(X_i)$. Dann enthält
$$H := \mathrm{Inert}(Y_\bullet|U) \cap U(k)$$
nach 2.1.6 eine Hilbert-Menge und ist somit unendlich. Ist $\theta \in T(\overline{k})$ ein geometrischer Punkt mit $p(\theta) \in H$ (und es gibt unendlich viele solche Punkte, da p surjektiv ist), so ist θ in einem Punkt aus I lokalisiert nach 2.1.4 und somit ist η_θ und auch $\overline{\eta_\theta}$ injektiv. (In dieser Form wird der Satz in dem eingangs erwähnten Buch [La2] von Lang ausgesprochen.)

Ist der Grundkörper k ein Zahlkörper, so gibt es einen sehr starken Spezialisierungssatz von Silverman. Brian Conrad hat mir vor kurzem (d.h. im August 2004) ein Preprint zukommen lassen, in dem er den Spezialisierungssatz von Silverman auf die Situation überträgt, in der k ein globaler Funktionenkörper ist. In der folgenden Bemerkung vergleichen wir obigen Spezialisierungssatz mit dem von Silverman/Conrad und erläutern, warum wir den obigen Satz für den Rest des laufenden Kapitels bevorzugen.

Bemerkung: Sei k ein globaler Körper, $T|k$ eine projektive, glatte Varietät positiver Dimension und $A|k$ eine abelsche Varietät. Sei $\Lambda \subset \mathrm{Mor}_k(T, A)$ eine Untergruppe. Sei
$$S_\Lambda := \{t \in T(\overline{k}) : \eta_t|\Lambda \to A(\overline{k}) \text{ nicht injektiv}\}.$$
Sei $S := S_{Mor_k(T,A)}$ die Menge der $t \in T(\overline{k})$, für die η_t und damit auch $\overline{\eta_t}$ injektiv ist.

1. Der Spezialisierungssatz von Conrad und Silverman impliziert folgendes: Ist die Néron-Severi-Gruppe $NS(T)$ zyklisch, Λ $\mathbb{Z}$-frei und $\Lambda \cap A(k) = \{0\}$, so ist S_Λ eine Menge beschränkter Höhe in $T(\overline{k})$. Insbesondere ist $S_\Lambda \cap T(k)$ endlich.

2. Die Forderung an $NS(T)$ ist im Fall $\dim(T) = 1$ immer erfüllt. Im Fall von Varietäten höherer Dimension ist sie relativ restriktiv.

3. Obiger Satz liefert ohne restriktive Voraussetzung an $NS(T)$ oder Λ (also z.B. auch für $\Lambda = \mathrm{Mor}_k(T, A)$, und das ist im Folgenden besonders wichtig), dass $T(\overline{k}) \setminus S_\Lambda$ eine unendliche Menge ist. Auch ist der Satz für jeden Hilbert-Körper k und nicht nur für globale Körper wahr. Allerdings ist die Abschätzung wesentlich schwächer.

4. Im Satz von Conrad und Silverman darf man die Voraussetzung an Λ nicht ersatzlos streichen. Ist $R_k(T, A) \geq 1$, so gilt $S \supset T(k)$, und $T(k)$ braucht i.a. nicht endlich zu sein. (Der Fall $R_k(T, A) = 0$ ist ohnehin uninteressant).

Der Beweis des folgenden Satzes wird nach der Idee meines Betreuers, Prof. Greither, geführt.

Satz 2.3.7 *Sei k ein Körper und $A|k$ eine abelsche Varietät. $A(k)$ möge von endlichem Rang sein. Sei l eine Primzahl. Dann ist $A(k)/l$ endlich.*

Beweis: Sei $T := A(k)_{\mathrm{Tors}}$ und $F := \frac{A(k)}{A(k)_{\mathrm{Tors}}}$.

1. Da eine exakte Folge $T/l \to A(k)/l \to F/l \to 0$ besteht, genügt es zu zeigen, dass sowohl T/l also auch F/l endlich ist.

2. Es gibt eine Injektion
$$T' := T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \to A(\overline{k})_{\mathrm{Tors}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \cong (\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^m,$$
mit $0 \leq m \leq 2\dim(A)$. (Nebenbemerkung: Wenn l zu $\mathrm{char}(k)$ teilerfremd ist, so gilt sogar $m = 2\dim(A)$.) Daher muss $T' \cong (\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^i \oplus T_0$ mit einem endlichen $\mathbb{Z}_l$-Modul T_0 und $i \leq m$ gelten. Daraus folgt, dass $T/l = T' \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l/l = T_0/l$ endlich ist.

3. In der kanonischen exakten Folge
$$0 \to T \otimes \mathbb{Q} \to A(k) \otimes \mathbb{Q} \to F \otimes \mathbb{Q} \to 0$$
ist der Term $T \otimes \mathbb{Q}$ Null. Da die $\mathbb{Q}$-Dimension von $A(k) \otimes \mathbb{Q}$ nach Voraussetzung endlich ist, muss auch $F \otimes \mathbb{Q}$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum sein. Sei r dessen Dimension. Die kanonische Abbildung $F \to F \otimes \mathbb{Q}$ ist injektiv, weil F torsionsfrei ist. Es besteht also eine Injektion $F \to \mathbb{Q}^r$.

4. Wir beweisen nun durch vollständige Induktion nach r, dass F/l endlich ist. Im Fall $r = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $r \geq 1$ und $pr_r : \mathbb{Q}^r \to \mathbb{Q}$ die Projektion auf die letzte Koordinate. Sei $U := pr_r(F)$ und $F_0 := \ker(pr_r) \cap F$. Dann besteht eine exakte Folge

$$0 \to F_0 \to F \to U \to 0.$$

Diese induziert eine exakte Folge

$$F_0/l \to F/l \to U/l \to 0.$$

Da sich F_0 in $\ker(pr_r) = \mathbb{Q}^{r-1}$ einbettet, muss nach Induktions-Hypothese F_0/l endlich sein. Es genügt also zu zeigen, dass U/l endlich ist. U ist offensichtlich eine Untergruppe von $\mathbb{Q}$. Wir bezeichnen die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ an dem Primideal $l\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}_{(l)}$. $\mathbb{Z}_{(l)}$ ist ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $\mathbb{Q}$. $U \otimes \mathbb{Z}_{(l)}$ identifiziert sich mit einem $\mathbb{Z}_{(l)}$-Untermodul U' von $\mathbb{Q}$. Es genügt nun U'/l endlich nachzuweisen. Falls U' als $\mathbb{Z}_{(l)}$-Modul endlich erzeugt ist, so ist U' ein gebrochenes Ideal und somit $\mathbb{Z}_{(l)}$-isomorph zu $\mathbb{Z}_{(l)}$. In diesem Fall ist also $U'/l \cong \mathbb{F}_l$ endlich. Falls U' nicht als $\mathbb{Z}_{(l)}$-Modul endlich erzeugt ist, so muss $\sup(\{v_l(x) \mid x \in U'\})$ unendlich sein. Dies impliziert, dass $l^k \in U'$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, und daraus folgt $U' = \mathbb{Q}$. Dann ist aber $U'/l = 0$.

$\square$

Kapitel 3

Der Rang abelscher Varietäten in unendlichen Erweiterungen

3.1 Hinreichende Bedingung für unendlichen Rang

In diesem Abschnitt kombinieren wir den Spezialisierungssatz 2.3.6 mit dem Satz 2.1.8. Wir erhalten einen Satz, der es für gewisse abelsche Varietäten A über einem Hilbert-Körper k und gewisse unendliche, algebraische Erweiterungen Ω des Grundkörpers k erlaubt, auf die Unendlichkeit des Ranges von $A(\Omega)$ zu schließen.

Wir erinnern daran, dass für jeden Erweiterungskörper $F|k$

$$M_F(T_F, A_F) := \frac{\mathrm{Mor}_F(T_F, A_F)}{A(F)}$$

gesetzt wurde. Ferner wurde mit $R_F(T_F, A_F)$ der Rang von $M_F(T_F, A_F)$ bezeichnet.

Proposition 3.1.1 *Sei k ein Hilbert-Körper, $A|k$ eine abelsche Varietät und $T|k$ eine glatte, projektive Varietät positiver Dimension. Sei $n \geq 1$. Seien $\emptyset \neq T_0 \subset T$ und $U \subset \mathbb{A}_n$ offene Mengen und $p : T_0 \to U$ ein endlicher, étaler Morphismus (bzw. eine endliche, étale Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ). Sei d der Grad von p. Sei $F|k$ eine endliche, separable Erweiterung.* Wir setzen voraus, dass $R_k(T, A) \geq 1$ gilt, und dass $A(k)$ von endlichem Rang ist. *Dann existiert eine Folge*

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset T(\overline{k})$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *$p(x_i) \in U(k)$ für alle i.*

2. *$(F, k(x_1), k(x_2), \cdots)$ ist eine linear disjunkte Folge.*

3. *$k(x_i)|k$ ist eine separable Erweiterung vom Grad d (bzw. eine Galois-Erweiterung mit Gruppe Γ).*

4. $\mathrm{rg}(A(k(x_i))) \geq \mathrm{rg}(A(k)) + R_k(T, A)$.

Beweis: Nach 2.3.6 und 2.3.7 existiert eine endliche Familie $(g_i : X_i \to T)_{i=1,\cdots,r}$ étaler Hilbert-Überlagerungen derart, dass für jeden geometrischen Punkt $x \in T(\overline{k})$, der in einem Punkt in $\mathrm{Inert}(X_\bullet|T)$ lokalisiert ist, die Spezialisierungsabbildung

$$\overline{\eta_x} : M_k(T, A) = \frac{\mathrm{Mor}_k(T, A)}{A(k)} \to \frac{A(k(x))}{A(k)}$$

injektiv ist. Nach 2.1.8 existiert eine Folge $t_i \in T^{cl} \cap \mathrm{Inert}(X_\bullet|T)$ derart, dass $p(t_i) \in U(k)$ für alle i gilt, $k(t_i)|k$ für alle i separabel vom Grad d (bzw. galoissch mit Gruppe Γ) ist und $(F, k(t_1), k(t_2), \cdots)$ eine linear disjunkte Folge ist. Für jedes i wählen wir einen in t_i lokalisierten, geometrischen Punkt $x_i \in T(\overline{k})$ entsprechend einer k-Einbettung $\alpha_i : k(x_i) \to \overline{k}$. Es gilt $k(x_i) = \alpha_i(k(t_i)) \cong k(t_i)$. Die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erfüllt demnach 1.-3. Nun gilt aber wegen der Injektivität von $\overline{\eta_{x_i}}$ die Ungleichung

$$\mathrm{rg}\left(\frac{A(k(x_i))}{A(k)}\right) \geq R_k(T, A).$$

Somit erfüllt $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auch die 4. Bedingung. □

Bemerkung:

1. Die Voraussetzung, dass $R_k(T, A) \geq 1$ sein soll, ist redundant, da 1.-3. nichts mit $R_k(T, A)$ (und auch nichts mit A) zu tun hat und 4. im Falle $R_k(T, A) = 0$ trivialerweise erfüllt ist. Im Fall $R_k(T, A) = 0$ reduziert sich die Aussage der Proposition einfach auf 2.1.8.

2. Die Aussage der Proposition ist bereits im Fall $F = k$ interessant. Der Hilfskörper F wird erst deutlich später eine Rolle spielen.

3. In den Voraussetzungen des Satzes steht, dass $A(k)$ von endlichem Rang sein soll. Dies ist für endlich erzeugte Hilbert-Körper (z.B. für Zahlkörper) automatisch erfüllt.

4. Wenn bereits $A(k)$ von unendlichem Rang ist, dann ist die Frage nach einer Folge, die 4. erfüllt, nicht mehr interessant.

Ist Y ein algebraisches k-Schema und

$$(y_i)_{i\in I} \subset Y(\overline{k})$$

eine Familie von geometrischen Punkten, so sei $k((y_i)_{i\in I}) = k(y_i : i \in I)$ das Kompositum der Körper $(k(y_i))_{i\in I}$, d.h. das Bild von

$$\bigotimes_{i\in I} k(y_i) \to \overline{k}.$$

Wenn

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I$$

eine aufsteigende Folge von Teilmengen von I mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = I$ ist, dann gilt

$$k(y_i : i \in I) = \bigcup_{i=1}^{\infty} k(y_i : i \in I_i).$$

Falls $I = \{1, \cdots, s\} \subset \mathbb{N}$ endlich ist, so schreiben wir $k(y_1, \cdots, y_s)$ statt $k(y_i : i \in I)$.

Bemerkung: Sei $\Omega := k(y_i : i \in I)$.

1. Wenn für alle $i \in I$ die Erweiterung $k(y_i)|k$ galoissch ist, dann ist $\Omega|k$ galoissch und

$$G(\Omega|k) \to \prod_{i \in I} G(k(y_i)|k), \ \sigma \mapsto (\sigma|k(y_i))_{i \in I}$$

ist ein stetiger, injektiver Homomorphismus von proendlichen Gruppen. (Das Produkt ist mit der Tychonoff-Topologie auszustatten.)

2. Ist $(k(y_i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine linear disjukte Familie und $k(y_i)|k$ galoissch für alle i, so ist

$$G(\Omega|k) \to \prod_{i \in I} G(k(y_i)|k)$$

sogar ein Isomorphismus.

Wir wollen nun in der Situation obiger Proposition zeigen, dass

$$A(k(x_i : i \in \mathbb{N}))$$

von unendlichem Rang ist. Wir benötigen ein naheliegendes Lemma.

Lemma 3.1.2 *Sei $A|k$ eine abelsche Varietät. Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine linear disjunkte Folge von über k endlichen Zwischenkörpern von $\overline{k}|k$. Dann ist die von den Inklusionen*

$$\frac{A(E_i)}{A(k)} \subset \frac{A(\overline{k})}{A(k)}$$

induzierte Abbildung

$$\bigoplus_{i \in I} \frac{A(E_i)}{A(k)} \to \frac{A(\overline{k})}{A(k)}$$

injektiv.

Beweis: Sei $M_i := \frac{A(E_i)}{A(k)}$ und $M := \frac{A(\overline{k})}{A(k)}$. Die M_i sind $\mathbb{Z}$-Untermoduln von M. Will man die Injektivität der kanonischen Abbildung $\bigoplus_{i \in I} M_i \to M$ nachweisen, so genügt es zu zeigen, dass für jede Wahl von endlich vielen, paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \cdots, i_s \in I$

$$M_{i_1} \cap (M_{i_2} + \cdots + M_{i_s}) = 0$$

gilt. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} A(E_{i_1}) \cap (A(E_{i_2}) + \cdots + A(E_{i_s})) &\subset A(E_{i_1}) \cap A(E_{i_2} \cdots E_{i_s}) = \\ &= A(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cdots E_{i_s}) = A(k). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$M_{i_1} \cap (M_{i_2} + \cdots + M_{i_s}) = \frac{A(E_{i_1}) \cap (A(E_{i_2}) + \cdots + A(E_{i_s}))}{A(k)} = 0$$

wie gewünscht. □

Folgerung: *Sei die Situation obiger Proposition 3.1.1 zugrunde gelegt.*

1. *Für jede Wahl von paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \cdots, i_s \in \mathbb{N}$ gilt*

   $$\mathrm{rg}(A(k(x_{i_1}, \cdots, x_{i_s}))) \geq \mathrm{rg}(A(k)) + sR_k(T, A).$$

   Ist p eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ, so ist $k(x_{i_1}, \cdots, x_{i_s})|k$ galoissch mit Gruppe Γ^s.

2. *Sei $I \subset \mathbb{N}$ unendlich und $\Omega := k(x_i : i \in I)$. Dann ist $A(\Omega)$ von unendlichem Rang. Wenn p eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ ist, dann muss $\Omega|k$ galoissch mit Gruppe $\prod_{i \in I} \Gamma$ sein. Sollte Γ sogar abelsch sein, so ist $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang.*

Bemerkung: Sei k ein Hilbert-Körper und $A|k$ eine abelsche Varietät. $A(k)$ sei von endlichem Rang. Wenn eine projektive, glatte Varietät T positiver Dimension derart existiert, dass

1. $R_k(T, A) \geq 1$ gilt (d.h. dass ein nicht-konstanter Morphismus $f : T \to A$ existiert) und

2. $R(T)$ einen rein-transzendenten Unterkörper $K = k(u_1, \cdots u_d)$ enthält, über dem $R(T)$ separabel vom Grad n ist (bzw. galoissch mit Gruppe Γ ist),

so kann man nach 1.4.7 p, T_0 und U derart wählen, dass der obige Satz 3.1.1 und seine Folgerung anwendbar werden.

Man erhält dann eine linear disjunkte Folge $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von über k separablen Zwischenkörpern von $k^s|k$ vom Grad n (bzw. von Zwischenkörpern von $k^s|k$, die über k galoissch mit Gruppe Γ sind) derart, dass für jede Wahl von paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \cdots, i_s \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{rg}(A(k_{i_1} \cdots k_{i_s}) \geq \mathrm{rg}(A(k)) + sR_k(T, A)$$

gilt. Ist in dieser Situation $I \subset \mathbb{N}$ unendlich und Ω das Kompositum der Familie $(k_i)_{i \in I}$, so ist $\mathrm{rg}(A(\Omega)) = \infty$.

Will man obige Theorie anwenden, so ist der kritische Punkt, für gegebenes A eine im Sinne der Bemerkung geeignete Hilfsvarietät T zu finden.

3.2 Alternativbeweis für einige klassische Resultate

Um die etwas abstrakt wirkenden Sätze des letzten Abschnittes zu illustrieren, geben wir in diesem Abschnitt alternative Beweise für diverse wohlbekannte Sätze, die großenteils in der klassischen Arbeit von Frey und Jarden [FJ74] behandelt wurden. Unsere Alternativbeweise unterscheiden sich deutlich von den klassischen Beweisen und wir halten unsere Methode für wesentlich einfacher. Des weiteren verschärfen wir einen Satz, der von Rosen und Wong in [RW02] bewiesen wurde.

Wir haben erwähnt, dass bei dem Versuch, 3.1.1 anzuwenden, die Hauptschwierigkeit darin besteht, für eine gegebene abelsche Varietät $A \neq 0$ über k eine im Sinne von 3.1.1 geeignete Hilfsvarietät T zu finden. Im Folgenden verwenden wir $T = A$. Dann ist jedenfalls

$$M_k(T, A) = \mathrm{Mor}_k^*(A, A) = \mathrm{Hom}_k(A, A)$$

vom Rang ≥ 1.

Proposition 3.2.1 *Sei k ein Hilbert-Körper und $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension.*

1. *Es gilt* $\mathrm{rg}(A(k^s)) = \infty$.

2. *Sei $A(k)$ von endlichem Rang. Es gibt einen rein-transzendenten Unterkörper $K \subset R(A)$, über dem $R(Y)$ endlich und separabel ist. Sei K ein solcher und $d := [R(X) : K]$. Dann existiert eine linear disjunkte Folge $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Zwischenkörpern von $k^s|k$, die alle $[k_i : k] = d$ erfüllen und derart, dass für jede Wahl von paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \cdots, i_s$*

   $$\mathrm{rg}(A(k_{i_1} \cdots k_{i_s}) \geq \mathrm{rg}(A(k)) + sR_k(A, A) \geq \mathrm{rg}(A(k)) + s$$

   gilt.

Beweis: Man wähle wie gesagt $T = A$. Da A dann eine glatte Varietät ist, muss $R(A)$ separabel erzeugt sein. Sei K ein rein-transzendenter Unterkörper von $R(A)$, über dem $R(A)$ endlich und separabel ist und $d := [R(T) : K]$. Wenn $A(k)$ von endlichem Rang ist, dann folgen beide Behauptungen aus 3.1.1 (einschließlich der Folgerung und Bemerkungen). Sollte $\mathrm{rg}(A(k)) = \infty$ gelten, so ist trivialerweise auch $\mathrm{rg}(A(k^s)) = \infty$. □

Bemerkung:

1. Die 1. Aussage wurde auf anderem Wege von Frey und Jarden in [FJ74] bewiesen.

2. Wenn in der Situation des Satzes Ω das Kompositum aller Zwischenkörper E von $k^s|k$ mit $[E : k] = d$ ist, dann ist $A(\Omega)$ von unendlichem Rang.

3. Sei k ein Hilbert-Körper der Charakteristik 0 und $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension. Wenn eine projektive Einbettung $A \to \mathbb{P}_N$ vom Grad d existiert, dann besitzt $R(A)$ einen rein-transzendenten Unterkörper, über dem $R(A)$ endlich vom Grad d ist.

4. Rosen und Wong hatten in [RW02] mit anderen Methoden folgendes gezeigt: Ist k ein Zahlkörper und $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension, die eine projektive Einbettung $A \to \mathbb{P}_N$ vom Grad d besitzt, so ist $A(\Omega')$ von unendlichem Rang, wenn Ω' das Kompositum aller Zwischenkörper E von $k^s|k$ mit $[E:k] \leq d(4\dim(A)+2)$ ist. Unsere Aussage ist somit um einiges stärker.

Sei $e \geq 1$, k ein Körper und μ_e das normierte, reguläre Haarsche Maß auf der proendlichen Gruppe G_k^e. Sei $\mu := \mu_1$. (Dann ist μ_e einfach das Produkt-Maß.) Für

$$\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_e) \in G_k^e$$

betrachten wir den Fixkörper

$$k^s(\sigma) = \{x \in k^s \,|\, x^{\sigma_i} = x \;\forall i \in \{1, \cdots, e\}\}.$$

Frey und Jarden zeigen in [FJ74], dass für μ_e-fast alle $\sigma \in G_k^e$ die abelsche Gruppe $A(k^s(\sigma))$ von unendlichem Rang ist, falls k ein Hilbert-Körper ist. Auch hierfür geben wir einen Alternativbeweis. Zunächst zitieren wir den elementaren Satz von Borel-Cantelli.

Proposition 3.2.2 (Borel-Cantelli) *Sei G eine proendliche Gruppe und μ das normierte, reguläre Haarsche Maß auf G. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Teilmengen von G. Wir setzen voraus, dass die Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μ-unabhängig ist (d.h., dass für jede Wahl von paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \cdots, i_s$*

$$\mu(\bigcap_{j=1}^{s} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{s} \mu(A_{i_j})$$

gilt.) Falls die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ divergiert, so gilt

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) = 1.$$

Beweis: Siehe das Buch [FJ, 16.7] von Fried und Jarden. □

Satz 3.2.3 (Frey-Jarden) *Sei k ein Hilbert-Körper und $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension. Sei $e \geq 1$. Dann gilt*

$$\mu_e(\{\sigma \in G_k^e \,|\, \mathrm{rg}(A(k^s(\sigma))) = \infty\}) = 1.$$

Beweis: Sei $X := \{\sigma \in G_k^e \,|\, \mathrm{rg}(A(k^s(\sigma))) = \infty\}$. Wenn $A(k)$ von unendlichem Rang ist, dann gilt $X = G_k^e$ und wir sind fertig. Sei also $A(k)$ von endlichem Rang. Sei $(k_i)_{i\in I}$ die linear disjunkte Folge von Zwischenkörpern von $k^s|k$, deren Existenz in 3.2.1 gezeigt wird. Es gilt $[k_i : k] = d$ für alle i. Sei $\sigma \in G_k^e$. Wenn $k_i \subset k^s(\sigma)$ für unendlich viele $i \in I$ gilt, so ist $A(k^s(\sigma))$ von unendlichem Rang. Sei $H_i := G_{k_i}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} X & \supset & \{\sigma \in G_k^e \,|\, k^s(\sigma) \text{ umfasst unendlich viele der } k_i\ \} \\ & = & \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \{\sigma \in G_k^e \,|\, k^s(\sigma) \supset k_i\} \\ & = & \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \{\sigma \in G_k^e \,|\, \sigma_j|k_i = id \; \forall j = 1, \cdots e\} \\ & = & \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \{\sigma \in G_k^e \,|\, \sigma_j \in H_i \; \forall j = 1, \cdots, e\} \\ & = & \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} H_i^e \end{array}$$

Nun ist

$$\mu_e(H_i^e) = \mu_1(H_i)^e = [G_k : H_i]^{-e} = [k_i : k]^{-e} = d^{-e},$$

d.h. die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_e(H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} d^{-e}$ ist divergent. Nach 3.2.2 genügt es zu zeigen, dass $(H_i^e)_{i\in\mathbb{N}}$ eine μ_e-unabhängige Folge ist. Dies liegt an der linearen Disjunktheit der Folge $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$: Sind $i_1, \cdots, i_s \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden, so gilt

$$\begin{array}{rcl} \mu_e(\cap_{j=1}^s H_{i_j}^e) & = & \mu_e(G^e_{k_{i_1}\cdots k_{i_s}}) = \\ & = & [k_{i_1} \cdots k_{i_s} : k]^{-e} = \prod_{j=1}^s [k_{i_j} : k]^{-e} = \\ & = & \prod_{j=1}^s \mu_e(H_{i_j}^e). \end{array}$$

□

Satz 3.2.4 (Frey-Jarden) *Sei K ein separabel abgeschlossener Körper. Wir setzen voraus, dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. $\mathrm{char}(K) = 0$.

2. $\mathrm{char}(K) > 0$ *und k ist* nicht *algebraisch über seinem Primkörper.*

Sei $A|K$ eine abelsche Varietät positiver Dimension. Dann ist $A(K)$ von unendlichem Rang.

Beweis: Sei k der Primkörper von K. Dann existiert ein über k endlich erzeugter Zwischenkörper F von $K|k$ und eine abelsche Varietät $A_0|F$ derart, dass $A \cong A_0 \otimes_F K$ gilt. (vgl. [EGA, V.8.].) (Die Grundidee ist dabei, dass $A|K$ von endlichem Typ ist. $A|K$ ist also durch endlich viele, polynomiale Gleichungen gegeben, deren Koeffizienten alle in einer endlich erzeugten Erweiterung des Primkörpers liegen.)

Ist nun $\mathrm{char}(K) = p$ und $F|k$ algebraisch, so existiert nach der Voraussetzung an K ein über k transzendenter und endlich erzeugter Oberkörper F_1 von F, der in K enthalten ist. F_1 ist dann ein Hilbert-Körper nach 2.1.1. Ist $\mathrm{char}(K) = p$ und $F|k$ transzendent, so ist $F_1 := F$ ein Hilbert-Körper nach 2.1.1. Wenn schließlich $\mathrm{char}(K) = 0$ gilt, dann ist $F_1 := F$ ein Hilbert-Körper nach 2.1.1. Wir setzen $A_1 := A_0 \otimes_F F_1$.

Nun ist $A_1 \otimes_{F_1} K = A$ und F_1 ein Hilbert-Körper, welcher über seinem Primkörper endlich erzeugt ist. Somit ist $A_1(F_1)$ endlich erzeugt. Nach 3.2.1 ist $A_1(F_1^s)$ von unendlichem Rang. Da aber K separabel abgeschlossen ist, muss es eine F_1-Einbettung $F_1^s \to K$ geben. Daher identifiziert sich $A_1(F_1^s)$ mit einer Untergruppe von $A(K)$. Somit ist $\mathrm{rg}(A(K)) = \infty$. □

Bemerkung: Sei k ein endlicher Körper und $A|\overline{k}$ eine abelsche Varietät. Dann ist $A(\overline{k})$ vom Rang Null. Es gibt nämlich eine endliche Erweiterung $k'|k$ und eine abelsche Varietät $A_0|k'$ derart, dass $A \cong A_0 \otimes_{k'} \overline{k}$ gilt. Wäre $P \in A(\overline{k})$ ein Nicht-Torsionspunkt, so gäbe es eine endliche Erweiterung $k''|k'$ derart, dass $P \in A_0(k'')$ gilt. Dies stellt einen Widerspruch dar, da mit k'' die Gruppe $A_0(k'')$ endlich ist.

Wir wenden uns nun dem Fall $\dim(A) = 1$ zu. Sei im Folgenden k ein Hilbert-Körper, $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$ und $f(X)$ ein separables, quadratfreies Polynom vom Grad 3. Sei A die elliptische Kurve (d.h. 1-dimensionale abelsche Varietät) mit affiner Gleichung

$$A : Y^2 = f(X).$$

Wir nehmen an, dass $A(k)$ von endlichem Rang ist. Sei $p : A \to \mathbb{P}_1$ der naheliegende Morphismus vom Grad 2. Sei $U := \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$. Dann gilt

$$p^{-1}(U) = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[X,Y]}{Y^2 - f(X)}\right).$$

$R(A) = k(X)[\sqrt{f(X)}]$ ist eine separable Erweiterung von $R(\mathbb{P}_1) = k(X)$ vom Grad 2. $R(A)|R(\mathbb{P}_1)$ ist also eine Galois-Erweiterung mit Gruppe $\Gamma := \{\pm 1\}$.

Nach 1.4.6 existiert eine offene Teilmenge $\emptyset \neq V \subset U \cong \mathbb{A}_1$ derart, dass $p^{-1}(V) \to V$ eine étale Galois-Überlagerung mit Gruppe $\Gamma = \{\pm 1\}$ ist. (In der Tat genügt es, den Träger des Nullstellendivisors von $f(X)$ aus U zu entfernen, wie man leicht mit Hilfe von Kähler-Differentialen nachrechnen kann.)

Nach 3.1.1 existiert eine Folge geometrischer Punkte $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A(\overline{k})$ derart, dass $k(x_i)|k$ galoissch vom Grad 2 ist, $p(x_i) \in k$ gilt und

$$\mathrm{rg}(A(k(x_{i_1}, \cdots, x_{i_s}))) \geq \mathrm{rg}(A(k)) + sR_k(A, A) \geq \mathrm{rg}(A(k)) + s$$

für jede Wahl von paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \cdots, i_s$ gilt. Sei $t_i := p(x_i) \in k$. Dann ist $k(x_i) = k(\sqrt{f(t_i)})$ und $x_i = (t_i, \sqrt{f(t_i)})$.

Proposition 3.2.5 *In obiger Situation ist $A(k(\sqrt{f(t_1)}, \sqrt{f(t_2)}, \cdots))$ von unendlichem Rang. Insbesondere ist $A(\Omega)$ von unendlichem Rang, wenn Ω die maximale Kummererweiterung vom Exponent 2 bedeutet.*

Bemerkung:

1. Frey und Jarden haben im Sonderfall $k = \mathbb{Q}$ in ihrer Arbeit [FJ74] für eine geschickt gewählte Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ für jedes i durch Reduktion modulo einer Primzahl p_i gezeigt, dass

$$(t_i, \sqrt{f(t_i)}) \in A(\overline{k})$$

Nicht-Torsion ist. Die Wahl der Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erfolgt in [FJ74] derart, dass $(k(\sqrt{f(t_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ eine linear disjunkte Folge ist. Frey und Jarden schlossen daraus, dass $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang ist.

2. Das Argument von Frey und Jarden benutzt somit die Tatsache, dass für Primzahlen p guter Reduktion $A(\mathbb{Q}) \to A_p(\mathbb{F}_p)$ injektiv auf dem Torsionsteil $A(\mathbb{Q})_{\mathrm{Tors}}$ ist, wenn A_p die Reduktion von A modulo p bedeutet. Diese Technik scheint nur im Fall $\mathrm{char}(k) = 0$ Erfolg versprechend zu sein.

3.3 Verschärfte Bedingung für unendlichen Rang

Wir wollen später Proposition 3.1.1 im Falle von Jacobi-Varietäten anwenden. Wenn in der Situation der Proposition 3.1.1 T eine Kurve von positivem Geschlecht ist, *die einen k-rationalen Punkt besitzt*, dann existiert eine Einbettung $\lambda : T \to J_T$ in die Jacobi-Varietät. λ ist nicht-konstant. (Das Bild von λ in $J_T(\overline{k})$ erzeugt ganz $J_T(\overline{k})$ und $\dim(J_T) = g \geq 1$.) Somit ist dann $R_k(T, J_T) \geq 1$ und man kann den Satz anwenden. Ist etwa T eine Galois-Überlagerung von $\mathbb{P}_1$ mit abelscher Gruppe Γ und $T(k) \neq \emptyset$, so ist $J_T(k^{ab})$ von unendlichem Rang.

Wenn in der Situation des Satzes $\dim(T) = 1$ und $T(k) = \emptyset$ gilt, so kann $R_k(T, J_T)$ Null sein. Ist aber $F|k$ eine endliche, separable Erweiterung mit $T(F) \neq \emptyset$ (und eine solche Erweiterung existiert, denn $T(k^s)$ ist unendlich), so existiert wenigstens ein nicht-konstanter F-Morphismus $\lambda : T_F \to J_{T,F}$, d.h. $R_F(T_F, A_F) \geq 1$.

Wir werden in diesem Abschnitt die Proposition 3.1.1 dahingehend verschärfen, dass wir statt $R_k(T, A) \geq 1$ nur noch verlangen, dass eine endliche, separable Erweiterung $F|k$ mit $R_F(T_F, A_F) \geq 1$ existieren soll.

Vorab halte man sich den folgenden, elementaren Sachverhalt vor Augen. Seien X, Y Varietäten über einem Körper k. Sei $F|k$ ein Zwischenkörper von $\overline{k}|k$ und $f : X_F \to Y_F$ ein Morphismus. Dann induziert f einen Morphismus

$$X_F(\overline{k}) = \mathrm{Mor}_F(\overline{k}, X_F) \to \mathrm{Mor}_F(\overline{k}, Y_F) = Y_F(\overline{k}),\ u \mapsto f \circ u,$$

welcher üblicherweise wieder mit f bezeichnet wird. Nun identifiziert sich

$$X_F(\overline{k}) = \mathrm{Mor}_F(\overline{k}, X_F)$$

mit $X(\overline{k}) = \mathrm{Mor}_k(\overline{k}, X)$ nach der universellen Eigenschaft des Faserproduktes $X_F = X \times_k \mathrm{Spec}(F)$. Man erhält somit eine Abbildung $X(\overline{k}) \to Y(\overline{k})$, die üblicherweise auch wieder mit f bezeichnet wird. Diese Abbildung ist i.a. nicht G_k-linear, ist es aber doch, wenn $k = F$ gilt. Ist $E|k$ ein weiterer Zwischenkörper von $\overline{k}|k$, so induziert $f : X(\overline{k}) \to Y(\overline{k})$ durch Restriktion eine Abbildung $f : X(E) \to X(\overline{k})$, denn $X(E)$ identifiziert sich mit einer Untergruppe von $X(\overline{k})$. *Man beachte:* Für $x \in X(E)$ gilt $f(x) \in Y(FE)$, aber im allgemeinen *nicht* $f(x) \in Y(E)$.

Satz 3.3.1 *Sei k ein Hilbert-Körper, $A|k$ eine abelsche Varietät und $T|k$ eine projektive, glatte Varietät positiver Dimension. Sei $n \geq 1$, $\emptyset \neq T_0 \subset T$ offen, $U \subset \mathbb{A}_n$ offen und $p : T_0 \to U$ ein endlicher, étaler Morphismus (bzw. eine étale Galois-Überlagerung mit endlicher Gruppe Γ). Sei d der Grad von p. $A(k)$ sei von endlichem Rang.* Wir setzen voraus, dass ein endlicher, separabler Erweiterungskörper $F|k$ existiert mit $R := R_F(T_F, A_F) \geq 1$. *Dann existiert eine Folge*

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset T_0(\overline{k})$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *$p(x_i) \in U(k)$ für alle i.*

2. *$(F, k(x_1), k(x_2), \cdots)$ ist eine linear disjunkte Folge.*

3. *$k(x_i)|k$ ist eine separable Erweiterung vom Grad d (bzw. eine Galois-Erweiterung mit Gruppe Γ).*

4. *Für jede Wahl von paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \cdots i_s \in \mathbb{N}$ gilt*
$$\operatorname{rg}(A(Fk(x_{i_1}, \cdots, x_{i_s}))) \geq \operatorname{rg}(A(F)) + sR_F(T_F, A_F).$$

5. *Sei $I \subset \mathbb{N}$ unendlich. Dann ist $A(Fk(x_i : i \in I))$ von unendlichem Rang.*

6. *Ist $(f_1, \cdots, f_R) \subset \operatorname{Mor}_F(T_F, A_F)$ eine Familie, deren Bild in $M_F(T_F, A_F)$ $\mathbb{Z}$-linear unabhängig ist, so ist $(f_j(x_i))_{i \in \mathbb{N}, j=1,\cdots,R} \subset A(\overline{k})$ eine $\mathbb{Z}$-linear unabhängige Familie. Sogar das Bild dieser Familie in $\frac{A(\overline{k})}{A(F)}$ ist $\mathbb{Z}$-linear unabhängig.*

Beweis: Nach dem Spezialisierungssatz 2.3.6 gibt es eine endliche Familie étaler Hilbert-Überlagerungen $X_\bullet|T_F$ derart, dass für alle geometrischen Punkte $t \in T_F(\overline{k}) = \operatorname{Mor}_F(\overline{k}, T_F)$, die in einem Punkt von $\operatorname{Inert}(X_\bullet|T_F)$ lokalisiert sind, die Spezialisierungsabbildung

$$\eta_t : M_F(T_F, A_F) \to \frac{A_F(\overline{k})}{A_F(F)}, \ \overline{f} \mapsto f \circ t$$

injektiv ist. Sei $Y_i := X_i|T_{0,F}$. Es besteht das folgende Diagramm von Morphismen und Schemata:

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod Y_i & \subset & \coprod X_i & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
T_{0,F} & \subset & T_F & \xrightarrow{f_i} & A_F \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T_0 & \subset & T & & A \\
\downarrow & & & & \\
U & \subset & \mathbb{A}_n & &
\end{array}$$

Alle Quadrate in diesem Diagramm sind kartesisch. Nach 2.1.8 existiert eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset T_0(\overline{k})$, welche die Bedingungen 1. bis 3. erfüllt und derart, dass jedes x_i in einem Punkt x_i' in $\mathrm{Inert}(X_\bullet|T)$ lokalisiert ist. Nach 2.1.4 liegt x_i' in $\mathrm{Inert}(T_F|T)$. Sei y_i' der eindeutig bestimmte Punkt in T_F über x_i'. Nach 2.1.4 gilt dann $y_i' \in \mathrm{Inert}(X_\bullet|T_F)$. Wir bilden das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \coprod Y_i & \subset & \coprod X_i & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Spec}(F \otimes_k k(x_i)) & \xrightarrow{y_i} & T_{0,F} & \subset & T_F & \xrightarrow{f_i} & A_F \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(k(x_i)) & \rightarrow & T_0 & \subset & T & & A \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & U & \subset & \mathbb{A}_n & &
\end{array}$$

Man beachte, dass sich der Körper $F \otimes_k k(x_i)$ mit $Fk(x_i)$ identifiziert. y_i kann demnach als in y_i' lokalisierter, geometrischer Punkt in $T(Fk(x_i))$ aufgefasst werden. Wegen $y_i' \in \mathrm{Inert}(X_\bullet|T_F)$ ist η_{y_i} injektiv. Somit ist das Bild der Familie

$$(f_1(y_i), \cdots, f_R(y_i)) \subset A_F(Fk(x_i))$$

in $\frac{A_F(Fk(x_i))}{A_F(F)}$ $\mathbb{Z}$-linear unabhängig.

Die Folge $(Fk(x_i))_{i\in I}$ ist linear disjunkt über F. In der Tat, wenn $i_1, \cdots, i_s \in \mathbb{N}$ eine Wahl paarweise verschiedener Indizes, dann ist

$$\begin{aligned}
k(x_{i_1})F \otimes_F \cdots \otimes_F k(x_{i_s})F &= (k(x_{i_1}) \otimes_k F) \otimes_F \cdots \otimes_F (k(x_{i_s}) \otimes_k F) = \\
&= F \otimes_k k(x_{i_1}) \otimes_k \cdots \otimes_k k(x_{i_s})
\end{aligned}$$

ein Körper, da die Familie $(F, k(x_1), k(x_2), \cdots)$ nach Konstruktion der x_i linear disjunkt über k ist.

Nach 3.1.2 ist nun die von den Inklusionen $A_F(Fk(x_i)) \to A_F(\overline{k})$ induzierte Abbildung

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \frac{A_F(Fk(x_i))}{A_F(F)} \to \frac{A_F(\overline{k})}{A_F(F)}$$

injektiv. Dies zeigt, dass das Bild der Familie

$$(f_i(y_j))_{j\in\mathbb{N}, i=1,\cdots,R} \subset A_F(\overline{k})$$

in $\frac{A_F(\overline{k})}{A_F(F)}$ $\mathbb{Z}$-linear unabhängig ist. Ist $q : A_F \to A$ die Projektion, so ist $q \circ f \circ y_i \in A(Fk(x_i))$ gerade $f(x_i)$. Damit folgt die 6. Behauptung und somit auch 4. und 5. $\square$

Bemerkung: Wenn in der Situation des Satzes p eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ ist, und $F|k$ galoissch ist, dann ist für jede Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ die Erweiterung $Fk(x_i : i \in I)|k$ galoissch mit Gruppe $G(F|k) \times \prod_{i\in I} \Gamma$.

Folgerung: *Sei k ein Hilbert-Körper und $A|k$ eine abelsche Varietät. Sei $T|k$ eine projektive, glatte Varietät positiver Dimension derart, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $R(T)$ enthält einen rein-transzendenten Unterkörper K, über dem $R(T)$ eine endliche Galois-Erweiterung mit Gruppe Γ ist.

2. Es existiert eine endliche Galois-Erweiterung $F|k$ derart, dass

$$R_F(T_F, A_F) \geq 1$$

gilt.

Dann existiert eine Galois-Erweiterung $\Omega|k$ mit Gruppe $G(F|k) \times \prod_{i \in \mathbb{N}} \Gamma$ derart, dass $A(\Omega)$ von unendlichem Rang ist. Sind Γ und $G(F|k)$ abelsche Gruppen, so ist $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang.

Beweis: Sollte bereits $A(k)$ von unendlichem Rang sein, so ist nichts zu zeigen. Wir nehmen $\mathrm{rg}(A(k)) < \infty$ an. Nach 1.4.7 existieren offene Mengen $\emptyset \neq T_0 \subset T$ und $U \subset \mathbb{A}_n$ und eine endliche, étale Galois-Überlagerung $p : T_0 \to U$ mit Gruppe Γ. Wendet man den Satz an, so erhält man die Behauptung. □

3.4 Albanese-Varietäten und Jacobi-Varietäten

Wir wenden nun die Ergebnisse des vorigen Abschnittes im Fall von Albanese-Varietäten und dann auch im Fall von Jacobi-Varietäten an. Sei k ein perfekter Körper. (Mir ist nicht bekannt, ob man im Falle eines nicht perfekten Körpers eine vernünftige Theorie von Albanese-Varietäten hat.) Sei (T, P) eine punktierte, projektive, glatte k-Varietät. Dann ist der Funktor

$$F : A \mapsto \mathrm{Mor}_k^*((T, P), A)$$

auf der Kategorie AbVar_k darstellbar durch eine abelsche Varietät nach [La2, S. 31]. Ist $(\mathrm{Alb}_T, \lambda^P)$ ein darstellendes Objekt dieses Funktors, so nennt man Alb_T die Albanese-Varietät. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Alb}_T, A) \to \mathrm{Mor}_k^*((T, P), A), \ f \mapsto \lambda^P \circ f$$

eine Bijektion. Wir benötigen ein simples Lemma.

Lemma 3.4.1 *Sei B eine abelsche Varietät positiver Dimension und*

$$p : \mathrm{Alb}_T \to B$$

ein surjektiver Homomorphismus. Dann ist $p \circ \lambda^P$ nicht-konstant.

Beweis: Wir treffen die Widerspruchsannahme, $p \circ \lambda^P$ wäre konstant. Dann müsste $p \circ \lambda^P$ gleich Null sein, da $p \circ \lambda^P(P) = 0$ gilt. Sei $\hat{A} := p^{-1}(0)$ und A die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes in $\hat{A}$. Dann ist A eine abgeschlossene, abelsche Untervarietät von A. Sei $i : A \to \mathrm{Alb}_T$ die entsprechende Einbettung. Da $p \circ \lambda^P = 0$ gilt, und T zusammenhängend ist, existiert genau ein Morphismus $h \in \mathrm{Mor}_k^*((T, P), A)$, der $i \circ h = \lambda^P$ erfüllt. Nach der universellen Eigenschaft von Alb_T existiert dann ein k-Morphismus $j : \mathrm{Alb}_T \to A$ mit $i \circ j = Id$. Daher muss i surjektiv und somit ein Isomorphismus sein. Dies impliziert $p = 0$. Da p surjektiv ist, folgt dann $B = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 3.4.2 *Sei k ein perfekter Hilbert-Körper und $T|k$ eine projektive, glatte k-Varietät derart, dass $R(T)$ einen rein-transzendenten Unterkörper K enthält, über dem $R(T)$ eine Galois-Erweiterung mit Gruppe Γ ist. Sei $B \neq 0$ eine abelsche Varietät und $p : \mathrm{Alb}_T \to B$ surjektiv. Dann existiert eine Galois-Erweiterung $\Omega|k$ mit Gruppe $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma$ derart, dass $B(\Omega)$ von unendlichem Rang ist. Ist Γ abelsch, so ist $B(k^{ab})$ von unendlichem Rang.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus 3.4.1 und aus der Folgerung zu 3.3.1. □

Wir kommen zur Anwendung im Fall von Jacobi-Varietäten. Wir geben zunächst einige allgemeine Informationen zu Jacobi-Varietäten.

Für jedes Schema X wird im Folgenden mit $\mathrm{Pic}(X)$ die Picard-Gruppe von X bezeichnet. $\mathrm{Pic}(X)$ ist die Gruppe der Isomorphieklassen von lokal freien $\mathcal{O}_X$-Moduln vom Rang 1 mit dem Tensorprodukt als Veknüpfung. Sei k ein Körper und $X|k$ ein integres, reguläres, algebraisches, separiertes k-Schema. Dann bezeichnen wir die Gruppe der Weil-Divisoren von X mit $Z^1(X)$. $Z^1(X)$ ist die freie, abelsche Gruppe über der Menge

$$X^{(1)} := \{x \in X \,|\, \mathcal{O}_{X,x} \text{ hat Krull-Dimension } 1\}.$$

$X^{(1)}$ identifiziert sich mit der Menge der irreduziblen, abgeschlossenen Unterschemata der Kodimension 1. Für $x \in X^{(1)}$ ist dann $\mathcal{O}_{X,x}$ ein diskreter Bewertungsring und die zugehörige Bewertung von $R(X)$ wird mit v_x bezeichnet. Die Weil-Divisorenklassengruppe (auch erste Chow-Gruppe genannt) ist definiert durch die exakte Folge

$$R(X)^\times \xrightarrow{div} Z^1(X) \to CH^1(X) \to 0,$$

wobei

$$div(f) := \sum_{x\in X^{(1)}} v_x(f)x$$

gesetzt ist. Bekanntlich besteht ein Isomorphismus

$$CH^1(X) \to \mathrm{Pic}(X),\ [D] \mapsto [\mathcal{L}(D)],$$

wobei für einen Divisor $D = \sum_{x\in X^{(1)}} w_x x$ das zugehörige Geradenbündel durch

$$\mathcal{L}(D) : U \mapsto H^0(U, \mathcal{L}(D)) := \{f \in R(X) \,|\, v_x(f) \geq -w_x \ \forall x \in U^{(1)}\}$$

definiert ist.

Sei nun $C|k$ eine glatte, projektive Kurve. Dann hat man den naheliegenden Homomorphismus

$$\deg : Z^1(C) \to \mathbb{Z},\ \sum_{x\in C^{(1)}} w_x x \mapsto \sum_{x\in C^{(1)}} w_x[k(x) : k].$$

Dessen Kern wird mit $Z_0^1(C)$ bezeichnet und Gruppe der Weil-Divisoren vom Grad Null genannt. deg faktorisiert sich zu einem Homomorphismus deg :

$CH^1(C) \to \mathbb{Z}$ mit Kern $CH^1_0(C)$. Man nennt $CH^1_0(C)$ die Gruppe der Divisorenklassen vom Grad Null. Mit Hilfe des Isomorphismus $CH^1(C) \cong \mathrm{Pic}(C)$ erhält man dann auch den Begriff des Grades eines Geradenbündels, d.h. man erhält einen Homomorphismus $\deg : \mathrm{Pic}(C) \to \mathbb{Z}$, der $\deg(\mathcal{L}(D)) = \deg(D)$ für jeden Weil-Divisor D erfüllt. Man bezeichnet den Kern von $\deg : \mathrm{Pic}(C) \to \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{Pic}^0(C)$. Nach der Riemann-Roch-Formel gilt

$$\chi(\mathcal{L}(nD)) = n\deg(D) + 1 - g_C,$$

d.h. man kann mit Hilfe der Euler-Charakteristik eine ganz von Weil-Divisoren unabhängige Beschreibung von $\deg : \mathrm{Pic}(C) \to \mathbb{Z}$ geben: Für ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf C ist die Abbildung

$$n \mapsto \chi(\mathcal{L}^{\otimes n}) = \dim_k(H^0(C, \mathcal{L}^{\otimes n})) - \dim_k(H^1(C, \mathcal{L}^{\otimes n}))$$

ein Polynom 1. Grades in n und $\deg(\mathcal{L})$ ist sein höchster Koeffizient.

Ist nun $p : X \to Y$ ein eigentlicher, flacher Morphismus von noetherschen Schemata und F ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Rang, so wird für $y \in Y$ mit F_y das zurückgezogene Vektorbündel

$$(p^{-1}(y) \to X)^* F$$

bezeichnet. F_y ist ein Vektorbündel auf $p^{-1}(y)$. In dieser Situation weiß man aufgrund von kohomologietheoretischen Argumenten (siehe [M, II.5.]), dass

$$y \mapsto \chi(F_y) = \sum_q (-1)^q \dim_{k(y)} H^q(p^{-1}(y), F_y)$$

lokal konstant ist. Sei nun $C|k$ eine projektive, glatte Kurve, X ein k-Schema und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $C \times_k X$. Wir bezeichnen mit $p : C \times_k X \to X$ die Projektion. Sie ist eigentlich und flach, da $C|k$ eigentlich und flach ist. Für $x \in X$ ist $p^{-1}(x) = C_{k(x)}$ und $\mathcal{L}_x$ ein Geradenbündel auf $C_{k(x)}$. Falls X noethersch ist, liefert obige kohomologietheoretische Aussage, dass

$$X \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \deg(\mathcal{L}_x)$$

lokal konstant ist. Ist $\mathcal{L} \in p^*(\mathrm{Pic}(X))$, so ist $\mathcal{L}_x \cong \mathcal{O}_{C_{k(x)}}$. Dies sieht man mit Hilfe des kommutativen Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} C_{k(x)} & \to & \mathrm{Spec}(k(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times_k C & \to & X \end{array}$$

und der Tatsache, dass $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(k(x))) = 0$ gilt. Daher hat es Sinn, die abelsche Gruppe

$$P^0_C(X) := \frac{\{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C \times_k X) \mid \deg(\mathcal{L}_x) = 0\ \forall x \in X\}}{p^*(\mathrm{Pic}(X))}$$

zu definieren. Ist X noethersch und zusammenhängend und $x \in X$, so gilt

$$P^0_C(X) := \frac{\{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C \times_k X) \mid \deg(\mathcal{L}_x) = 0\}}{p^*(\mathrm{Pic}(X))}.$$

Wenn Y ein weiteres k-Schema und $f : X \to Y$ ein Morphismus ist, dann hat man einen Homomorphismus

$$(Id \times_k f)^* : \mathrm{Pic}(C \times_k Y) \to \mathrm{Pic}(C \times_k X)$$

und dieser induziert einen Homomorphismus $P_C^0(Y) \to P_C^0(X)$. Man kann leicht nachprüfen, dass $P_C^0(-)$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der k-Schemata in die Kategorie der abelschen Gruppen wird. Sei $E|k$ ein Erweiterungskörper. Dann gilt $P_C^0(\mathrm{Spec}(E)) = \mathrm{Pic}^0(C_E)$. Die Jacobi-Varietät versucht nun diesen Funktor $P_C^0(-)$ darzustellen.

Satz 3.4.3 *Sei k ein Körper und $C|k$ eine projektive, glatte Kurve. Es existiert ein Paar (J_C, η') bestehend aus einer abelschen Varietät $J_C|k$ der Dimension g_C und einer natürlichen Transformation von Funktoren*

$$\eta' : P_C^0(-) \to \mathrm{Mor}_k(-, J_C)$$

derart, dass für jedes k-Schema X mit $\mathrm{Mor}_k(X, C) \neq \emptyset$ der Homomorphismus

$$\eta'_X : P_C^0(X) \to \mathrm{Mor}_k(X, J_C)$$

bijektiv ist.

Beweis: Siehe [Mi86b]. □

Bemerkung:

1. Falls $C(k)$ nichtleer ist, so ist η'_X für jedes k-Schema X ein Isomorphismus. Denn $\mathrm{Mor}_k(X, C)$ enthält dann wenigstens einen konstanten Morphismus.

2. In jedem Fall existiert eine Galoiserweiterung $E|k$ mit Gruppe G derart, dass $C(E) \neq \emptyset$ gilt. Dann hat man einen Isomorphismus

$$\eta_X : P_C^0(T_E)^G \cong \mathrm{Mor}_k(X_E, J_C)^G \cong \mathrm{Mor}_k(X, J_C),$$

d.h. $(J_C, \mathcal{P})$ ist darstellendes Objekt des Funktors $P_C^0(- \otimes_k E)^{G_{E|k}}$, wenn man

$$\mathcal{P} := \eta_{J_C}^{-1}(Id)$$

setzt. $\mathcal{P}$ heißt Poincaré-Garbe.

3. Ist $F|k$ ein Erweiterungskörper und $C(F) \neq \emptyset$, so hat man den Isomorphismus

$$\eta_F := \eta_{\mathrm{Spec}(F)} : \mathrm{Pic}^0(C_F) \cong J_C(F).$$

Durch Verketten mit dem Isomorphismus $\mathrm{Pic}^0(C_F) \cong CH_0^1(C_F)$ erhält man einen Isomorphismus $\tilde{\eta_F} : CH_0^1(C_F) \cong J_C(F)$.

4. Wir setzen nicht mehr $C(k) \neq \emptyset$ voraus. Sei $F|k$ ein Zwischenkörper von $k^s|k$. Dann hat man Isomorphismen $\eta_F : \mathrm{Pic}^0(C_{k^s})^{G_{k^s|F}} \cong J_C(F)$ und $\tilde{\eta}_F : CH_0^1(C_{k^s})^{G_{k^s|F}} \cong J_C(F)$.

5. Sei X ein k-Schema, $f : X \to J_C$ ein Morphismus und $\mathcal{L} = \eta_X^{-1}(f)$ das entsprechende Element von $P_C^0(X_{k^s})^{G_k}$. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathrm{Mor}_{k^s}(\mathrm{Spec}(k^s), X_{k^s}) = X(k^s) \xrightarrow{f} J_C(k^s) \cong \mathrm{Pic}(C_{k^s})$$

durch

$$x \mapsto (Id \times_k x : C \times_k k^s \to C \times_k X_{k^s})^* \mathcal{L}$$

gegeben. Dies gibt eine relativ anschauliche Vorstellung davon, wie f arbeitet.

6. Es gilt $J_C \otimes_k E = J_{C_E}$ für jeden Erweiterungskörper $E|k$.

Sei nun k ein Körper und $C|k$ eine projektive, glatte Kurve. Sei $P \in C(k)$ ein k-rationaler Punkt. Sei Δ_C die Diagonale in $C \times C$. Dann ist

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(\Delta_C - C \times_k \{P\} - \{P\} \times_k C)$$

ein Geradenbündel auf $C \times C$. Ist $Q \in C$ ein (nicht notwendig k-rationaler) Punkt, so ist

$$(C_{k(Q)} = k(Q) \times_k C \to C \times_k C)^* \mathcal{L} = \mathcal{L}(Q' - P'),$$

wenn Q' den über Q befindlichen und P' den über P befindlichen Punkt im unterliegenden Raum von $C_{k(Q)}$ bedeuten. Q' und P' sind dann $k(Q)$-rationale Punkte von $C_{k(Q)}$ und somit ist $\mathcal{L}(Q' - P')$ vom Grad Null. Sei $l \in P_C^0(C)$ das Bild von $\mathcal{L}$ und $\lambda^P : C \to J_C$ der entsprechende Morphismus. Dieser wird, aus Gründen die etwas später klar werden, Albanese-Morphismus genannt. Das Kompositum

$$C(\overline{k}) \to J_C(\overline{k}) \cong CH_0^1(C_{\overline{k}})$$

ist durch

$$Q \mapsto \tilde{\eta_{\overline{k}}}^{-1} \circ \lambda^P(Q) = [Q] - [P].$$

gegeben.

Bemerkung:

1. Das Bild der Abbildung $\lambda^P : C(\overline{k}) \to J_C(\overline{k})$ erzeugt ganz $J_C(\overline{k})$. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $CH_0^1(C_{\overline{k}})$.

2. Ist $B|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension und $q : J_C \to B$ ein surjektiver Homomorphismus, so erzeugt das Bild von

$$\lambda^P \circ q : C(\overline{k}) \to B(\overline{k})$$

ganz $B(\overline{k})$, d.h. $q \circ \lambda^P$ ist nicht-konstant. somit ist dann $R_k(C, B) \geq 1$.

Satz 3.4.4 *(J_C, λ^P) ist Albanese-Varietät für die punktierte Kurve (C, P), d.h.*

$$\mathrm{Hom}_k(J_T, B) \to \mathrm{Mor}_k^*((T,P), B),\ f \mapsto f \circ \lambda^P$$

ist bijektiv.

Beweis: Siehe [Mi86b]. □

Wir werden vorerst keinen Gebrauch davon machen. Sei nun k ein Körper und $C|k$ eine Kurve. Wir setzen nicht mehr $C(k) \neq \emptyset$ voraus. Wenn $F|k$ eine endliche Erweiterung und $P \in C(F)$ ein F-rationaler Punkt ist, dann hat man nach obigen Überlegungen einen F-Morphismus $\lambda^P : C_F \to J_C \otimes_k F$. Ist B eine abelsche Varietät positiver Dimension und $q : J_C \to B$ ein surjektiver Homomorphismus, so ist $q_F \circ \lambda^P : C_F \to B_F$ nicht-konstant. Daher gilt dann $R_F(C_F, B_F) \geq 1$.

Satz 3.4.5 *Sei k ein Hilbert-Körper und $C|k$ eine projektive, glatte Kurve. Sei B eine abelsche Varietät positiver Dimension und $q : J_C \to B$ ein surjektiver Homomorphismus. Sei $p : C \to \mathbb{P}_1$ eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ. (Ein solcher Morphismus p existiert, falls $R(C)$ einen rein-transzendenten Unterkörper $k(u)$ enthält, über dem $R(C)$ galoissch mit Gruppe Γ ist.)*

1. *Dann existiert eine Galois-Erweiterung $\Omega|k$ mit Gruppe $\prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma$ derart, dass $B(\Omega)$ von unendlichem Rang ist.*

2. *Falls Γ abelsch ist, so ist $B(k^{ab})$ von unendlichem Rang.*

Beweis: Die Haupt-Arbeit ist bereits erledigt. Sei $t \in \mathrm{Inert}(C|\mathbb{P}_1) \cap \mathbb{P}_1(k)$, $x \in C$ der Punkt über t und $F := k(x)$. Dann gilt $C(F) \neq \emptyset$ und $F|k$ ist galoissch mit Gruppe Γ. Wir haben oben gezeigt, dass $R_F(T_F, B_F) \geq 1$ gilt. Eine Anwendung der Folgerung zu 3.3.1 liefert die Behauptung. □

Bemerkung:

1. Sei die Situation des obigen Satzes zugrunde gelegt. Sei $F|k$ ein Zwischenkörper von $k^s|k$ und $P \in C(F)$. Sei $(f_1, \cdots, f_R) \subset \mathrm{Mor}_F^*(C_F, B_F)$ eine Familie, deren Bild in $M_F(C_F, B_F)$ $\mathbb{Z}$-unabhängig ist, und mit $f_1 = q_F \circ \lambda^P$.

   Eine Anwendung des Satzes 3.3.1 gibt dann die folgende detailliertere Information: Es existiert eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{k})$ derart, dass

   $$(F, k(x_1), k(x_2), \cdots)$$

   eine linear disjunkte Folge ist, $k(x_i)|k$ für alle i galoissch mit Gruppe Γ ist und

   $$(f_j(x_i))_{i\in\mathbb{N}, j=1,\cdots,R} \subset B(\overline{k})$$

   $\mathbb{Z}$- linear unabhängig ist. Sogar das Bild dieser Folge in $\frac{B(\overline{k})}{B(F)}$ bleibt $\mathbb{Z}$-linear unabhängig. Sei $E_i := Fk(x_i)$. Dann ist $f_j(x_i) \in B(E_i)$. Ist $F|k$ galoissch, so ist $E_i|k$ galoissch mit Gruppe $G(F|k) \times \Gamma$. War $F = k$, so ist $G(E_i|k) = \Gamma$. Es besteht immer die Möglichkeit, $F|k$ galoissch mit Gruppe Γ zu wählen, und dann ist $G(E_i|k) = \Gamma \times \Gamma$.

2. Betrachten wir den Fall $q = Id$, $B = J_C$. Wenn $C(k) \neq \emptyset$ gilt, wählen wir in 1. $F = k$ und $P \in C(k)$. Dann ist

$$(\lambda^P(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \subset J_C(\overline{k})$$

$\mathbb{Z}$-linear unabhängig. Daraus folgt, dass

$$([x_i] - [P])_{i\in\mathbb{N}} \subset CH_0^1(C_{\overline{k}})$$

$\mathbb{Z}$-linear unabhängig ist. Es gilt $\lambda^P(x_i) \in J_C(k(x_i))$.

Selbst wenn $C(k) = \emptyset$ gilt, so existiert eine endliche Galoiserweiterung $F|k$ (man kann $G(F|k) = \Gamma$ immer einrichten) derart, dass ein $P \in C(F)$ existiert. Dann folgt, dass

$$(\lambda^P(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \subset J_C(\overline{k})$$

und

$$([x_i] - [P])_{i\in\mathbb{N}} \subset CH_0^1(C_{\overline{k}})$$

$\mathbb{Z}$-unabhängig sind. Aber nun ist $\lambda^P(x_i)$ nur noch über dem Kompositum $E_i = Fk(x_i)$ definiert und $G(E_i|k) = G(F|k)\times\Gamma$. (Die Aussage über die $\mathbb{Z}$-unabhängige Folge in $CH_0^1(C_{\overline{k}})$ hat mit abelschen Varietäten nichts mehr zu tun. Es wäre schwierig, diese Aussage ohne Benutzung der Theorie der abelschen Varietäten zu beweisen.

3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse zu der Frage von Frey und Jarden

In den letzten Abschnitten haben wir diverse Sätze zur Frage von Frey und Jarden bewiesen. Wir stellen in diesem Abschnitt unsere Ergebnisse kurz zusammen und vergleichen sie mit dem, was bisher bekannt war. Wir nennen in diesem Abschnitt eine Varietät T über einem Körper k **generisch kommutativ**, wenn ihr Funktionenkörper $R(T)$ einen rein-transzendenten Unterkörper K enthält, über dem $R(T)$ eine endliche, abelsche Galois-Erweiterung ist.

Satz 3.5.1 *Sei k ein Hilbert-Körper und $A|k$ eine abelsche Varietät positiver Dimension über k.*

1. *Wenn eine generisch kommutative, projektive, glatte k-Varietät T, eine abelsche Erweiterung $F|k$ und ein nicht-konstanter F-Morphismus $T_F \to A_F$ existieren, so ist $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang.*

2. *Wenn der Funktionenkörper $R(A)$ einen rein-transzendenten Unterkörper enthält, über dem $R(A)$ eine endliche, abelsche Galois-Erweiterung ist, so ist $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang.*

3. *Sei T eine punktierte, generisch kommutative, projektive, glatte k-Varietät und $A \neq 0$ ein Quotient von* Alb_T*. Dann ist $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang. Insbesondere ist* $\mathrm{Alb}_T(k^{ab})$ *von unendlichem Rang, falls* $\mathrm{Alb}_T \neq 0$ *gilt.*

4. *Ist T eine generisch kommutative, projektive glatte Kurve über k und $A \neq 0$ ein Quotient von J_T, so ist $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang. Wenn $g_T \geq 1$ gilt, dann ist $J_T(k^{ab})$ von unendlichem Rang.*

In der Arbeit [RW02] wurde von Rosen und Wong folgendes gezeigt: Ist k ein Zahlkörper und $T|k$ eine projektive, glatte Kurve positiven Geschlechtes, die als *zyklische* Galois-Überlagerung von $\mathbb{P}_1$ realisiert werden kann, so ist $J_T(k^{ab})$ von unendlichem Rang.

Wir behandeln also de facto eine größere Klasse von abelschen Varietäten und auch eine größere Klasse von Grundkörpern. Wir finden interessant, dass unser Beweis auch im Fall eines globalen Funktionenkörpers k als Grundkörper funktioniert. Die Argumente von Rosen und Wong scheinen nicht unmittelbar auf den Fall eines globalen Funktionenkörpers übertragbar zu sein.

Man kann auch nicht-globale Funktionenkörper als Grundkörper zulassen, etwa $k = \mathbb{C}(u)$. Wenn dann z.B. $A \neq 0$ eine abelsche Varietät Kurve über k ist, so ist $A(k)$ genau dann endlich erzeugt, wenn die $k|\mathbb{C}$-Spur von A Null ist. Wenn dies der Fall ist, dann liefert der Satz, dass $A(k^{ab})$ von unendlichem Rang ist. Ist dies nicht der Fall, so ist sogar $A(k)$ von unendlichem Rang.

Wir haben bereits in der Einleitung erwähnt, dass uns keine abelsche Varietät über einem Zahlkörper bekannt ist, auf die sich unser Satz nicht anwenden läßt. Dennoch ist es uns nicht gelungen zu zeigen, dass jede abelsche Varietät die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

Kapitel 4

Twists superelliptischer Kurven

4.1 Superelliptische Kurven

Wir erinnern in diesem Abschnitt an einige grundlegende Tatsachen über superelliptische Kurven. Weil das in diesem Abschnitt dargelegte Material mit Sicherheit nicht neu ist, haben wir an dieser Stelle weitgehend auf Beweise verzichtet. Da uns andererseits keine wirklich alle Aussagen, die wir benötigen, umfassende Referenz bekannt ist, enthält die Arbeit einen ausführlichen Appendix über superelliptische Kurven.

Sei k ein Körper, $S|k$ eine glatte Kurve und n nicht durch die Charakteristik von k teilbar. (Wir interessieren uns im Folgenden hauptsächlich für den Sonderfall, in dem S ein offenes Unterschema von $\mathbb{P}_1$ ist.) Die Körpererweiterung $R(S)|k$ ist regulär, und $R(S) \otimes_k \overline{k} = R(S)\overline{k}$ ist ein Körper, der mit $R(S_{\overline{k}})$ identifiziert werden kann. Sei für den Rest der Arbeit

$$\mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n) := \left\{ f \in R(S)^\times \,\middle|\, \frac{R(S_{\overline{k}})[Y]}{Y^n - f} \text{ ist Körper} \right\}.$$

Sei $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$. Dann ist

$$R(S)[\sqrt[n]{f}] := \frac{R(S)[Y]}{Y^n - f}$$

ein regulärer Erweiterungskörper von k, der separabel über $R(S)$ ist. Sei $S[\sqrt[n]{f}]$ die Normalisierung von S in $R(S)[\sqrt[n]{f}]$ und $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ die Projektion. Dann ist p endlich und treuflach vom Grad n, und $S[\sqrt[n]{f}]$ ist eine reguläre Kurve.

Ist $U \subset S$ offen, so hat man einen kanonischen U-Isomorphismus $p^{-1}(U) \to U[\sqrt[n]{f}]$. Die reguläre Kurve $S[\sqrt[n]{f}]$ ist i.a. nicht geometrisch regulär, ist es aber doch, wenn k perfekt ist. Wir setzen

$$\mathrm{Zul}(S|k,n) := \left\{ f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n) \,\middle|\, S[\sqrt[n]{f}] \text{ ist geometrisch regulär} \right\}.$$

Die Elemente von $\mathrm{Zul}(S|k,n)$ werden n-**zulässige**, meromorphe Funktionen genannt.

Satz 4.1.1 *Sei* $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$, $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ *die Projektion. Sei*

$$B := \{P \in S^{cl} \,|\, n \textit{ teilt nicht } v_P(f)\}$$

1. *Wenn für alle* $P \in B$ *die Erweiterung* $k(P)|k$ *separabel ist, so gilt* $f \in \mathrm{Zul}(S|k,n)$. *Ist* k *perfekt, so gilt* $\mathrm{Zul}(S|k,n) = \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$.

2. *Sei* $E|k$ *ein Erweiterungskörper. Dann gilt* $\mathrm{Zul}(S|k,n) \subset \mathrm{Zul}(S_E|E,n)$. *Für* $f \in \mathrm{Zul}(S|k,n)$ *gilt* $S[\sqrt[n]{f}]_E \cong S_E[\sqrt[n]{f}]$.

Sei im Folgenden für $f \in R(S)^\times$

$$S_f := \{s \in S \,|\, f \in \mathcal{O}_{S,s}^\times\}$$

das offene Unterschema von S, das entsteht, wenn man aus S die Null- und Polstellen von f entfernt. Sei $f \in \mathrm{Zul}(S|k,n)$. Der folgende Satz gibt unter anderem ein genaues Bild von den geometrischen Punkten von $p^{-1}(S_f) = S_f[\sqrt[n]{f}]$. Ist s eine Null- oder Polstelle von f, so findet sich die Information über $p^{-1}(s)$ in 4.1.3.

Satz 4.1.2 *Sei* $f \in \mathrm{Zul}(S|k)$ *und* $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ *die Projektion.*

1. *Sei* $W = \mathrm{Spec}(B) \subset S_f$ *affin. Dann ist der kanonische* W*-Morphismus*

$$p^{-1}(W) \to \mathrm{Spec}\left(\frac{B[Y]}{Y^n - f}\right)$$

   ein Isomorphismus.

2. *Insbesondere gilt mit* $U := p^{-1}(S_f) = S_f[\sqrt[n]{f}]$

$$U(E) = \{(s,y) \in S_f(E) \times E \,|\, y = f(s)\}$$

   für jeden Erweiterungskörper E *von* k. *Man könnte* $U(E)$ *den sichtbaren Teil von* $S[\sqrt[n]{f}](E)$ *nennen.*

Wir untersuchen die Automorphismengruppe der Überlagerung $S[\sqrt[n]{f}] \to S$ und die Frage, ob diese Überlagerung eine Galois-Überlagerung ist.

Bemerkung: Sei in der Situation des Satzes $f \in \mathrm{Zul}(S|k,n)$ vorausgesetzt.

1. Es bestehen Isomorphismen

$$\boxed{\mathrm{Aut}(S[\sqrt[n]{f}]|S) \cong G(R(S)[\sqrt[n]{f}]|R(S)) \cong \mu_n \cap k^\times.}$$

   Die daraus resultierende Operation von $\mu_n \cap k^\times$ auf $S_f[\sqrt[n]{f}](k)$ ist durch

$$\boxed{\zeta(s,y) = (s, \zeta y)}$$

   für $\zeta \in \mu_n \cap k^\times$ und $(s,y) \in S_f[\sqrt[n]{f}](k)$ gegeben.

2. Ist $E|k$ ein Oberkörper mit $\mu_n \subset E^\times$ (z.B. $E = \overline{k}$ oder $E = k^s$), so ist $p_E : S[\sqrt[n]{f}]_E \to S_E$ eine Galois-Überlagerung mit Gruppe

$$\boxed{\mathrm{Aut}(S_E[\sqrt[n]{f}]|S_E) \cong \mu_n.}$$

3. Genau dann ist $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ eine Galois-Überlagerung, wenn $\mu_n \subset k^\times$ gilt.

Wir wollen nun das Geschlecht von Kurven der Form $S[\sqrt[n]{f}]$ (in Termen von g_S und f) ausdrücken. Da das Geschlecht einer geometrisch regulären Kurve eine geometrische Invariante ist, können und werden wir uns auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers beschränken. Sei nun k *algebraisch abgeschlossen*, n nicht durch $\mathrm{char}(k)$ teilbar, $f \in \mathrm{Zul}(S|k,n)$ und $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ die Projektion. Für $Q \in S[\sqrt[n]{f}](k)$ sei

$$e_Q := n|\{P \in S[\sqrt[n]{f}](k) : p(P) = p(Q)\}|^{-1}$$

der (geometrische) Verzweigungsindex.

Satz 4.1.3 *Sei $C := S[\sqrt[n]{f}]$.*

1. *In obiger Situation gilt*

$$\boxed{e_Q = \tfrac{n}{\mathrm{ggT}(n, v_{p(Q)}(f))}.}$$

Ist Q ein Verzweigungspunkt, so muss e_Q als Teiler von n zu $\mathrm{char}(k)$ *teilerfremd sein, d.h. die Verzweigung ist zahm.*

2. *Sei S projektiv über k. Dann gilt*

$$\boxed{2g_C - 2 = n(2g_S - 2) + \textstyle\sum_{P \in S^{cl}}(n - \mathrm{ggT}(n, v_P(f))).}$$

Man beachte, dass die Summe endlich ist. Sie erstreckt sich in der Tat nur über die Indexmenge $\{P \in S^{cl} \,|\, n \text{ teilt nicht } v_P(f)\}$.

Sei k ein Körper, n nicht durch $\mathrm{char}(k)$ teilbar, $f \in \mathrm{Zul}(S|k,n)$ und

$$p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$$

die Projektion. Wir nennen einen geometrischen Punkt $Q \in S[\sqrt[n]{f}](\overline{k})$ (für die Überlagerung $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$) **rein-verzweigt** genau dann, wenn $e_Q = n$ gilt. Ein k-rationaler, rein-verzweigter Punkt ist also ein Punkt $Q \in S[\sqrt[n]{f}](k) \subset S[\sqrt[n]{f}](\overline{k})$ mit

$$|\{P \in S[\sqrt[n]{f}](\overline{k}) \,|\, p(P) = p(Q)\}| = 1.$$

Sei nun $P \in S(k)$. Nach obigem Satz liegt über P genau dann ein rein-verzweigter, k-rationaler Punkt, wenn $v_P(f)$ zu n teilerfremd ist. Die Existenz eines rein-verzweigten, k-rationalen Punktes wird in vielen der folgenden Sätze eine wichtige Rolle spielen. Wir setzen

$$\mathrm{Zul}^+(S|k,n) := \begin{array}{l}\{f \in \mathrm{Zul}(S|k,n) \mid \text{es gibt einen für} \\ S[\sqrt[n]{f}] \to S \text{ rein-verzweigten,} \\ k\text{-rationalen Punkt}\}.\end{array}$$

Wir interessieren uns hauptsächlich für den Fall $S = \mathbb{P}_1$. Daher setzen wir

$$\mathrm{Zul}^{gi}(k,n) := \mathrm{Zul}^{gi}(\mathbb{P}_1|k,n),$$

$$\mathrm{Zul}(k,n) := \mathrm{Zul}(\mathbb{P}_1|k,n),$$

$$\mathrm{Zul}^+(k,n) := \mathrm{Zul}^+(\mathbb{P}_1|k,n).$$

Ist $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$, so nennen wir die Kurve $\mathbb{P}_1[\sqrt[n]{f}]$ eine **superelliptische Kurve**. Im Fall $n = 2$ sprechen wir von **hyperelliptischen Kurven**. Für das Geschlecht superelliptischer Kurven haben wir die folgenden Formeln.

Satz 4.1.4 *Sei k ein Körper und n nicht durch die Charakteristik von k teilbar. Sei $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(\mathbb{P}_1|k,n)$ von der Form*

$$f = P_1^{v_i} \cdots P_s^{v_s} \in k(t)^\times = R(\mathbb{P}_1)^\times,$$

mit paarweise verschiedenen, irreduziblen, separablen *Polynomen P_i und mit nicht durch n teilbaren Zahlen v_i. Sei $v_\infty := -\sum_{i=1}^s v_i$ und $C := \mathbb{P}_1[\sqrt[n]{f}]$.*

1. *Es gilt $f \in \mathrm{Zul}(\mathbb{P}_1|k)$.*
2. $g_C = -2(n-1) + (n - \mathrm{ggT}(n, v_\infty)) + \sum_{i=1}^s \deg(P_i)(n - \mathrm{ggT}(n, v_i))$.
3. *Gilt $v_1 = \cdots = v_s = 1$, so vereinfacht sich die Formel zu*

$$g_C = \frac{1}{2}(n-1)(\deg(f) - 2) + \frac{1}{2}(n - \mathrm{ggT}(n, \deg(f))).$$

4. *Insbesondere gilt im Fall $v_1 = \cdots = v_s = 1$*

$$\boxed{g_C = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-1)(\deg(f)-2) & \textit{falls } n \textit{ Teiler von } \deg(f) \textit{ ist} \\ \frac{1}{2}(n-1)(\deg(f)-1) & \textit{falls } n \textit{ zu } \deg(f) \textit{ coprim ist.} \end{cases}}$$

Wenn n prim ist, dann ist die Fallunterscheidung vollständig.

4.2 Twists superelliptischer Kurven

Sei k ein Körper und X eine k-Varietät. Unter einem **$k^s|k$-Twist (oder kurz: Twist)** von X verstehen wir eine k-Varietät Y, für die ein k^s-Isomorphismus $F : X_{k^s} \cong Y_{k^s}$ existiert. Dann induziert F eine Bijektion $F : X(k^s) \cong Y(k^s)$, die nicht G_k-äquivariant sein braucht, außer wenn f bereits über k definiert ist. Wir werden sehen, dass $X(k) = X(k^s)^{G_k}$ stark von $Y(k) = Y(k^s)^{G_k}$ abweichen kann. Wir untersuchen nun Twists superelliptischer Kurven. Dies gibt reichhaltige Beispiele für das Phänomen des Auftretens von Twists. Hauptziel dieses Kapitels wird dann die Untersuchung des Ranges superelliptischer Kurven in den Familien von Twists sein, die wir hier besprechen.

Für den Rest der Kapitels verwenden wir die folgenden Notationen. Sei k ein Körper und n nicht durch $\mathrm{char}(k)$ teilbar. Sei $f \in \mathrm{Zul}(k, n)$ und

$$\boxed{D_f := \mathbb{P}_1 \setminus \{P \in \mathbb{P}_1^{cl} \mid v_P(f) \neq 0\}}$$

die offene Teilmenge von $\mathbb{P}_1$, die entsteht, wenn man aus $\mathbb{P}_1$ die Null- u. Polstellen von f entfernt. D_f ist affin als echte, offene Teilmenge von $\mathbb{P}_1$.

$C_{f,n} := \mathbb{P}_1[\sqrt[n]{f}]$	ist projektives, glattes Modell für $Y^n = f(X)$.
$C_{f,n}^D := \mathbb{P}_1[\sqrt[n]{D^{-1}f}]$	ist projektives, glattes Modell für $DY^n = f(X)$.
$J_{f,n}$	sei die Jacobi-Varietät von $C_{f,n}$
$J_{f,n}^D$	sei die Jacobi-Varietät von $C_{f,n}^D$
$p_{f,n}$	bezeichnet die kanonische Projektion $C_{f,n} \to \mathbb{P}_1$.
$p_{f,n}^D$	bezeichnet die kanonische Projektion $C_{f,n}^D \to \mathbb{P}_1$.
$A_f := \Gamma(D_f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1})$	sei der Ring der regulären Funktionen auf D_f.
$U_{f,n} := p_{f,n}^{-1}(D_f)$	identifiziert sich mit dem offenen Unterschema $D_f[\sqrt[n]{f}] = \mathrm{Spec}\left(\frac{A_f[Y]}{Y^n - f}\right)$ von $C_{f,n}$.
$U_{f,n}^D := (p_{f,n}^D)^{-1}(D_f)$	identifiziert sich mit dem offenen Unterschema $D_f[\sqrt[n]{D^{-1}f}] = \mathrm{Spec}\left(\frac{A_f[Y]}{DY^n - f}\right)$ von $C_{f,n}^D$.

Wir müssen im Folgenden Morphismen von superelliptischen Kurven konstruieren. Dafür ist die folgende, elementare Bemerkung nützlich.

Bemerkung 4.2.1 Seien X und Y glatte Kurven. Y sei projektiv über k. Seien $\emptyset \neq U \subset X$ und $\emptyset \neq V \subset Y$ offen.

1. $\mathrm{Mor}_k(U, Y) \cong \mathrm{Mor}_k(\mathrm{Spec}(R(U)), Y) \cong \mathrm{Mor}_k(X, Y)$.

2. Jeder k-Morphismus $U \to V$ läßt sich eindeutig fortsetzen zu einem k-Morphismus $X \to Y$.

Bemerkung: Seien nun $D, E \in k^\times$.

1. Wenn $D = E \mod k^{\times n}$ gilt, so gibt es einen $\mathbb{P}_1$-Isomorphismus $C_{f,n}^D \cong C_{f,n}^E$. Denn dann gibt es ein $\omega \in k^\times$ mit $D = \omega^n E$ und der naheliegende Isomorphismus
$$\frac{A_f[Y]}{EY^n - f} \to \frac{A_f[Y]}{DY^n - f},\ Y \mapsto \omega Y$$
von A_f-Algebren induziert einen D_f-Isomorphismus $U_{f,n}^D \to U_{f,n}^E$, $Y \mapsto \omega Y$, der sich nach 4.2.1 eindeutig zu einem $\mathbb{P}_1$-Isomorphismus $F : C_{f,n}^D \to C_{f,n}^E$ fortsetzt. Dann induziert F eine Bijektion $C_{f,n}^D(k) \cong C_{f,n}^E(k)$ und einen Isomorphismus $F_* : J_{f,n}^D(k) \cong J_{f,n}^E(k)$.

2. Für $D, E \in k^\times$ beliebig existiert ein $\omega \in k^{s\times}$ mit $D = \omega^n E$. Daher existiert ein D_{f,k^s}-Isomorphismus $U^D_{f,n,k^s} \cong U^E_{f,n,k^s}$, $Y \mapsto \omega Y$, der sich nach 4.2.1 zu einem $\mathbb{P}_{1,k^s}$-Isomorphismus $F : C^D_{f,n,k^s} \cong C^E_{f,n,k^s}$ fortsetzt. F braucht nicht über k definiert sein. Somit ist $C^E_{f,n}$ ein $k^s|k$-Twist von $C^D_{f,n}$. F induziert eine Bijektion

$$\boxed{C^D_{f,n}(k^s) \cong C^E_{f,n}(k^s),}$$

die nicht G_k-äquivariant sein braucht und einen Isomorphismus

$$\boxed{J^D_{f,n}(k^s) \cong J^E_{f,n}(k^s),}$$

der nicht G_k-linear sein braucht. $C^D_{f,n}(k)$ und $C^E_{f,n}(k)$ (bzw. $J^D_{f,n}(k)$ und $J^E_{f,n}(k)$) können stark voneinander abweichen. Wir werden später sehen, dass z.B. $\mathrm{rg}(J^D_{f,n}(k)) \neq \mathrm{rg}(J^E_{f,n}(k))$ gelten kann.

Besonders wichtig ist der Fall $E = 1$. Sei $D \in k^\times$ und $\omega \in k^{s\times}$ mit $\omega^n = D$. Wendet man Teil 2 der obigen Bemerkung mit $E = 1$ an, so erhält man einen $\mathbb{P}_{1,k^s}$-Isomorphismus

$$\boxed{F^\omega_{f,n} : C^D_{f,n,k^s} \cong C_{f,n,k^s}.}$$

Für $(x, y) \in U^D_{f,n}(k^s) = \{(x, y) \in D_f(k^s) \times k^s \mid Dy^n = f(x)\}$ gilt

$$\boxed{F^\omega_{f,n}(x, y) = (x, \omega y).}$$

Proposition 4.2.2 *1. $C^D_{f,n}$ ist ein $k^s|k$-Twist von $C_{f,n}$.*

2. Für $\sigma \in G_k$ sei $\xi(\sigma) := \omega^{\sigma-1} \in \mu_n$. Wenn man μ_n in naheliegender Weise mit $\mathrm{Aut}_{k^s}(C_{f,n,k^s}|\mathbb{P}_{1,k^s})$ identifiziert, dann gilt

$$\boxed{(F^\omega_{f,n})^\sigma = \xi(\sigma) \circ F^\omega_{f,n}}$$

für alle $\sigma \in G_k$.

Beweis: Nur die zweite Behauptung ist noch zu zeigen. Sei $F := F^\omega_{f,n}$. Es genügt $F^\sigma|U^D_{f,n,k^s} = \xi(\sigma) \circ F|U^D_{f,n,k^s}$ nachzuweisen. Sei $(x, y) \in U^D_{f,n}(k^s)$ beliebig. Dann gilt

$$F^\sigma(x, y) = F(x^{\sigma^{-1}}, y^{\sigma^{-1}})^\sigma = (x^{\sigma^{-1}}, \omega y^{\sigma^{-1}})^\sigma = (x, \omega^\sigma y).$$

Ferner berechnet man

$$\xi(\sigma) \circ F(x, y) = \omega^{\sigma-1}(x, \omega y) = (x, \omega^{\sigma-1}\omega y) = (x, \omega^\sigma y).$$

□

Wir erinnern daran, dass für k-Varietäten X und Y das Bild der kanonischen Injektion

$$i : \mathrm{Mor}_k(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{k^s}(X_{k^s}, Y_{k^s})$$

gerade $\mathrm{Mor}_{k^s}(X_{k^s}, Y_{k^s})^{G_k}$ ist. Ein k^s-Morphismus $X_{k^s} \to Y_{k^s}$ ist ganau dann über k definiert, wenn er im Bild von i liegt.

Folgerung: *Genau dann ist $F^\omega_{f,n} : C^D_{f,n,k^s} \cong C_{f,n,k^s}$ über k definiert, wenn $\omega^{\sigma-1} = 1$ für alle $\sigma \in G_k$ gilt, d.h. genau dann, wenn $\omega \in k^\times$ gilt.*

Die im allgemeinen nicht G_k-äquivariante Bijektion

$$\boxed{F^\omega_{f,n} : C^D_{f,n}(k^s) \cong C_{f,n}(k^s)}$$

induziert durch Einschränkung eine Injektion $F^\omega_{f,n} : C^D_{f,n}(k) \to C_{f,n}(k^s)$. Das Bild dieser Injektion wird in aller Regel von $C_{f,n}(k)$ abweichen, außer wenn $F^\omega_{f,n}$ bereits über k definiert sein sollte. Völlig analog induziert der Isomorphismus

$$\boxed{(F^\omega_{f,n})_* : J^D_{f,n}(k^s) \to J_{f,n}(k^s)}$$

eine Injektion $J^D_{f,n}(k) \to J_{f,n}(k^s)$, deren Bild von $J_{f,n}(k)$ abweichen kann. Die folgende Proposition gibt eine explizite Beschreibung der Bilder.

Proposition 4.2.3 *Für $\sigma \in G_k$ sei $\xi(\sigma) := \omega^{\sigma-1}$. Wir identifizieren μ_n mit $\mathrm{Aut}(C_{f,n,k^s}|\mathbb{P}_{1,k^s})$.*

1. *Durch Restriktion von $F^\omega_{f,n}$ erhält man eine Bijektion*

$$\boxed{C^D_{f,n}(k) \cong C_{f,n}(k^s)^\xi := \{P \in C_{f,n}(k^s) \,|\, P^\sigma = \xi(\sigma)P \ \forall \sigma \in G_k\}.}$$

2. *Durch Restriktion von $(F^\omega_{f,n})_*$ erhält man eine Bijektion*

$$\boxed{J^D_{f,n}(k) \cong J_{f,n}(k^s)^\xi := \{P \in J_{f,n}(k^s) \,|\, P^\sigma = \xi(\sigma)_* P \ \forall \sigma \in G_k\}.}$$

Beweis: Sei $F := F^\omega_{f,n}$. Nach obiger Proposition 4.2.2 gilt $F^\sigma = \xi(\sigma) \circ F$ für alle $\sigma \in G_k$.

1. Sei $P \in C^D_{f,n}(k^s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P \in C^D_{f,n}(k) &\iff P^\sigma = P \ \forall \sigma \in G_k \\ &\iff F^\sigma(P^\sigma) = F^\sigma(P) \ \forall \sigma \in G_k \\ &\iff F(P)^\sigma = \xi(\sigma) F(P) \end{aligned}$$

2. Wegen $(F_*)^\sigma = (F^\sigma)_*$ folgt

$$(F_*)^\sigma = \xi(\sigma)_* \circ F_*.$$

Eine zu der Rechnung in 1. völlig analoge Rechnung liefert die Behauptung.

$\square$

4.3 Der Rang elliptischer Kurven in Familien von Twists

Dieser Abschnitt dient als Motivation für die folgenden Abschnitte. Wir zitieren einen Satz über den Rang elliptischer Kurven in Familien quadratischer Twists, der dann im Rest der Arbeit verallgemeinert werden soll. Dieser Satz entsteht als Kombination von Ergebnissen von Gouvêa und Mazur, von Stewart und Top und von Rubin und Silverberg. In der Arbeit [RS02] findet sich eine Übersicht über die Resultate, die im Erscheinungsjahr 2002 bereits bekannt waren. Es gibt ein sehr aktuelles Preprint [RS04], das Ergebnisse enthält, die in der Zusammenfassung in [RS02] noch nicht erwähnt sind.

Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein quadratfreies Polynom von Grad 3. Dann gilt $f \in \mathrm{Zul}(2, \mathbb{Q})$ und wir setzen

$$E_f^D := C_{f,2}^D = \mathbb{P}_1[\sqrt{D^{-1}f}]$$

für $D \in \mathbb{Q}^\times$. Sei $E := E_f^1$. Dann ist E_f^D das projektive glatte Modell der affinen Kurve

$$DY^2 = f(X).$$

E_f^D ist eine elliptische Kurve.

Für $D \in \mathbb{Q}^\times$ und $\sigma \in G_k$ sei $\xi_D(\sigma) := \sqrt{D}^{\sigma - 1}$. Des weiteren sei

$$r_f^D := \mathrm{rg}(E_f^D(\mathbb{Q})) = \mathrm{rg}(E(\overline{\mathbb{Q}})^{\xi_D}).$$

$$M_f^r(z) := |\{D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid D \text{ quadratfrei, } |D| \leq z,\, r_f^D \geq r\}|.$$

Über die Ränge elliptischer Kurven in Familien quadratischer Twists ist nun unter anderem folgendes bekannt.

Satz 4.3.1 (Gouvêa, Mazur, Stewart, Top, Rubin, Silverberg)

1. *Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ quadratfrei vom Grad 3. Dann gilt $M_f^1(z) \gg \sqrt{z}$ (für $z \to \infty$).*

2. *Sei $f(X) := X^3 + aX + b$ mit $ab \neq 0$. Dann gilt $M_f^2(z) \gg \frac{\sqrt[7]{z}}{\log^2(z)}$. Falls $f(X)$ überdies keine rationale Nullstelle besitzt, so gilt sogar $M_f^2(z) \gg \sqrt[3]{z}$.*

3. *Sei $f(X) = X^3 - X$ oder $f(X) = X(X-a)(X-c^2a)$ mit $a \in \mathbb{Q}^\times$ und $c \in \mathbb{Q}^\times \setminus \{\pm 1\}$. Dann gilt $M_f^3(z) \gg \sqrt[6]{z}$.*

4. *Sei $f(X) = X(X-1)(X - \frac{1-a^2}{a^2+2})$ mit $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1, -1\}$. Dann gilt $\lim\limits_{z \to \infty} M_f^4(z) = \infty$.*

5. *Falls die Paritätsvermutung gilt, so gilt*

$$M_f^2(z) \gg \sqrt{z}$$

für jedes quadratfreie $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad 3.

6. *Falls die Paritätsvermutung gilt, so gilt*

$$M_f^4(z) \gg \sqrt[6]{z}$$

für $f(X) = X^3 - X$ *oder für* $f(X) = X(X-a)(X-c^2a)$ *mit* $a \in \mathbb{Q}^\times$ *und* $c \in \mathbb{Q}^\times \setminus \{\pm 1\}$.

7. *Sei* $f(X) = X(X-1)(X - \frac{1-a^2}{a^2+2})$ *mit*

$$\begin{aligned} a \in \quad & \{2,5,6,7,8,12,13,14,15,16,17,18,21,22,23 \\ & 24,25,26,28,30,32,33,35,36,37,39,40,41\}. \end{aligned}$$

Wenn die Paritätsvermutung gilt, so gilt $\lim_{z\to\infty} M_f^5(z) = \infty$.

Für den Beweis dieser Aussagen siehe [RS01], [RS02], [RS04] und [S04] sowie [GM91] und [ST95]. Ohne Benutzung der Paritätsvermutung ist, soweit der Autor weiß, nicht einmal klar, ob $M_2^f(x) \to \infty$ für jedes quadratfreie Polynom $f(X)$ von Grad 3 gilt. Des weiteren scheint ohne Verwendung der Paritätsvermutung nicht bekannt zu sein, ob ein quadratfreies Polynom $f(X)$ vom Grad 3 derart existiert, dass $M_5^f(x) \to \infty$ gilt. Honda hat in [H60] eine Vermutung ausgesprochen, die folgendes impliziert.

Vermutung 4.3.2 (Honda) *Für jedes quadratfreie Polynom* $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *vom Grad* 3 *existiert eine nur von* $f(X)$ *abhängende Konstante* C *derart, dass für alle* $D \in \mathbb{Q}^\times$

$$r_f^D = \mathrm{rg}(E_f^D(\mathbb{Q})) \leq C$$

gilt.

Rubin und Silverberg bemerken in [RS02], dass heute manche Mathematiker vermuten, dass obige Vermutung von Honda falsch ist. Sollte die Aussage obiger Vermutung falsch sein, so impliziert dies offenbar die folgende **Rang-Vermutung** für elliptische Kurven.

Vermutung 4.3.3 *Für jedes* $r \geq 0$ *existiert ein quadratfreies Polynom* $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *von Grad* 3 *mit* $\mathrm{rg}(E_f(\mathbb{Q})) \geq r$.

Die Vermutung von Honda ist demnach äußerst umstritten. Wir schildern nun, in welcher Weise wir den obigen Satz 4.3.1 verallgemeinern wollen.

1. Wir wollen eine größere Klasse von Grundkörpern, nämlich die Klasse der endlich erzeugten Hilbert-Körper, zulassen.

2. Wir werden eine größere Klasse von Kurven untersuchen. Wir interessieren uns im Folgenden für Twists superelliptischer Kurven $C_{f,n}$.

Sei k ein Hilbert-Körper. Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ und $r \in \mathbb{N}$. Wir interessieren uns dann für die Frage, ob die Menge

$$X_{f,n}^r := \{D \in k^\times/n \,|\, \mathrm{rg}(J_{f,n}^D(k)) \geq r\}$$

unendlich ist. Man beachte, dass für $D, E \in k^\times$ mit $D = E \mod k^{\times n}$ die Kurven $C^D_{f,n}$ und $C^E_{f,n}$ k-isomorph sind und somit $J^D_{f,n}(k) \cong J^E_{f,n}(k)$ gilt. Wir zählen oben Klassen von D modulo $k^{\times n}$, da wir offensichtlich k-isomorphe Twists nicht doppelt zählen wollen. Wir werden im Folgenden unter anderem zeigen.

1. Ist $g(C_{f,n}) \geq 1$, so gilt $|X^1_{f,n}| = \infty$.

2. Für jedes $r \in \mathbb{N}$ und jedes $n \geq 2$ gibt es unendlich viele $f \in \mathrm{Zul}^+(k, n)$ mit $|X^r_{f,n}| = \infty$.

3. Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k, 2)$ und $r := \mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$. Dann ist $|X^r_{f,2}| = \infty$.

4. Es gibt Beispiele für Polynome $f \in \mathrm{Zul}^+(k, 2)$ derart, dass $|X^{2r}_{f,2}| = \infty$ gilt, wenn man $r := \mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$ setzt.

Des weiteren interessieren wir uns im Sonderfall $k = \mathbb{Q}$ für asymptotische Aussagen, die analog zu den asymptotischen Aussagen in 4.3.1 sein sollen. Dazu setzen wir

$$M^r_{f,n}(z) := |\{D \in \mathbb{Q}^\times \mid D \text{ } n\text{-frei}, |D| \leq z, \mathrm{rg}(J^D_{f,n}(\mathbb{Q})) \geq r\}|$$

für $f \in \mathrm{Zul}^+(\mathbb{Q}, n)$, $r \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{R}$. Im Sonderfall $k = \mathbb{Q}$ können wir dann z.B. die erste obige Aussage verschärfen zu der Aussage, dass im Fall $g(C_{f,n}) \geq 1$

$$M^1_{f,n}(z) \gg z^\epsilon \log(z)^{-2}$$

mit einem $\epsilon > 0$ gilt. Auch die anderen drei Aussagen können zu einer asymptotischen Aussage verschärft werden.

4.4 Twists vom Rang 1

Sei k ein endlich erzeugter Hilbert-Körper und $n \geq 2$ nicht durch $\mathrm{char}(k)$ teilbar. Wir behalten die zu Beginn des Abschnittes 4.2 eingeführten Notationen bei. Wir zeigen nun, dass für $f \in \mathrm{Zul}^+(k, n)$ mit $g(C_{f,n}) \geq 1$ unendlich viele $D \in k^\times/n$ existieren, für die der Rang $\mathrm{rg}(J^D_{f,n}(k))$ des entsprechenden $k^s|k$-Twists positiv ist. Wir werden unseren Beweis wesentlich auf den Spezialisierungssatz 2.3.6 stützen.

Sei $f \in \mathrm{Zul}(k, n)$ und A eine abelsche Varietät über k. Sei $\Lambda \subset \mathrm{Mor}_k(C_{f,n}, A)$ eine Untergruppe. Für $Q \in C_{f,n}(k^s)$ sei

$$\boxed{\eta_Q : \mathrm{Mor}_k(C_{f,n}, A) \to A(k^s), \; g \mapsto g(Q)}$$

die entsprechende Spezialisierungsabbildung. Des weiteren setzen wir

$$\boxed{\begin{aligned} S(C_{f,n}, A, \Lambda) := \quad & \{t \in D_f(k)| \\ & \forall Q \in C_{f,n}(k^s) : p_{f,n}(Q) = t \implies \ker(\eta_Q) \cap \Lambda = \{0\}\}. \end{aligned}}$$

Ferner sei $S(C_{f,n}, A) := S(C_{f,n}, A, \mathrm{Mor}_k(C_{f,n}, A))$. Wir erinnern daran, dass D_f das offene Unterschema von $\mathbb{P}_1$ war, das entsteht, wenn man die Null- und Polstellen von f entfernt. Somit gilt $S(C_{f,n}, A, \Lambda) \subset D_f(k) \subset \mathbb{P}_1(k)$.

Bemerkung:

1. Ist $\Lambda' \subset \Lambda$ eine Untergruppe, so gilt

$$\boxed{S(C_{f,n}, A) \subset S(C_{f,n}, A, \Lambda) \subset S(C_{f,n}, A, \Lambda').}$$

2. Da k endlich erzeugt ist, muss $A(k)$ nach dem Mordell-Weil-Theorem endlich erzeugt sein. Der Spezialisierungssatz 2.3.6 liefert, dass $S(C_{f,n}, A)$ eine Hilbert-Menge enthält. Da k ein Hilbert-Körper ist, muss $S(C_{f,n}, A)$ unendlich sein.

3. Wir werden später sehen, dass im Zahlkörperfall *unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen an* Λ sogar $\mathbb{P}_1(k) \setminus S(C_{f,n}, A, \Lambda)$ endlich ist, während $\mathbb{P}_1(k) \setminus S(C_{f,n}, A)$ nicht endlich sein muss. □

Wir haben in 4.1.2 gesehen, dass

$$U_{f,n}(k^s) = \{(x,y) \in D_f(k^s) \times k^s \,|\, y^n = f(x)\} \subset C_{f,n}(k^s)$$

gilt. Für jedes $a \in k^\times$ wählen wir nun ein für alle mal eine n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$. Für $t \in D_f(k)$ gilt $f(t) \in k^\times$ nach der Definition von D_f und

$$\{Q \in C_{f,n}(k^s) \,|\, p_{f,n}(Q) = t\} = \{(t, \zeta \sqrt[n]{f(t)}) \,|\, \zeta \in \mu_n\}$$

hat n Elemente. Zusammen mit der Definition von $S(C_{f,n}, A, \Lambda)$ ergibt sich unmittelbar die folgende Proposition.

Proposition 4.4.1 *Sei $t \in S(C_{f,n}, A, \Lambda) \subset D_f(k) \subset \mathbb{P}_1(k)$.*

1. *Für $Q := (t, \sqrt[n]{f(t)})$ ist die Restriktion der Spezialisierungsabbildung $\eta_Q|\Lambda \to A(k(\sqrt[n]{f(t)})) \subset A(k^s)$ injektiv. Insbesondere gilt*

$$\boxed{\operatorname{rg}(\Lambda) \leq \operatorname{rg}(A(k(\sqrt[n]{f(t)})) \quad \forall t \in S(C_{f,n}, A, \Lambda).}$$

2. *Wenn $(f_1, \cdots, f_r) \subset \Lambda \subset \mathrm{Mor}_k(C_{f,n}, A)$ eine $\mathbb{Z}$-linear unabhängige Familie ist, so ist die Familie*

$$(f_1(t, \sqrt[n]{f(t)}), \cdots, f_r(t, \sqrt[n]{f(t)})) \subset A(k(\sqrt[n]{f(t)}))$$

$\mathbb{Z}$-linear unabhängig.

Sei nun $g(C_{f,n}) \geq 1$, $P \in C_{f,n}(k)$ ein k-rationaler Punkt und $\lambda^P : C_{f,n} \to J_{f,n}$ der entsprechende Albanese-Morphismus mit $\lambda^P(P) = 0$. Wir werden nun obige Proposition in dem Spezialfall $A = J_{f,n}$ anwenden, wobei wir für Λ die von dem Albanese-Morphismus λ^P erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Mor}_k(C_{f,n}, J_{f,n})$ nehmen, d.h.

$$\Lambda := \mathbb{Z}\lambda^P \subset \mathrm{Mor}_k(C_{f,n}, J_{f,n}).$$

Weil wir $g(C_{f,n}) \geq 1$ vorausgesetzt haben, muss Λ Rang 1 haben.

Folgerung: *Sei $t \in S(C_{f,n}, J_{f,n}, \mathbb{Z}\lambda^P) \subset D_f(k) \subset \mathbb{P}_1(k)$. Dann ist*

$$\boxed{\eta_{(t, \sqrt[n]{f(t)})}(\lambda^P) = \lambda^P(t, \sqrt[n]{f(t)}) = [P] - [t, \sqrt[n]{f(t)}] \in J_{f,n}(k^s)}$$

ein Nicht-Torsionspunkt.

Die Grundidee in unserem Beweis dafür, dass $C_{f,n}$ unendlich viele Twists vom Rang $1 \geq$ hat, ist die simple Beobachtung, dass $J_{f,n}(k^s)^{\xi_{f(t)}} = J_{f,n}^{f(t)}(k)$ gilt, und $[P] - [t, \sqrt[n]{f(t)}]$ in $J_{f,n}(k^s)^{\xi_{f(t)}}$ liegt, *wenn P rein-verzweigt ist*, und $\xi_{f(t)}(\sigma) = \sqrt[n]{f(t)}^{\sigma-1}$ für $\sigma \in G_k$ gesetzt wird.

Sei nun $D \in k^\times$ und $\omega := \sqrt[n]{D} \in k^{s\times}$. In Abschnitt 4.2 haben wir den k^s-Isomorphismus

$$F^\omega_{f,n} : C^D_{f,n,k^s} \to C_{f,n,k^s}$$

betrachtet, der $F^\omega_{f,n}(x,y) = (x, \omega y)$ für $(x,y) \in U^D_{f,n}(k^s) \subset C^D_{f,n}(k^s)$ erfüllt. Sei $\xi_D(\sigma) = \omega^{\sigma-1}$ für $\sigma \in G_k$. Dann induziert $F^\omega_{f,n}$ nach 4.2.3 eine Bijektion

$$C^D_{f,n}(k) \cong C_{f,n}(k^s)^{\xi_D}.$$

Für jedes $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ wählen wir nun einen k-rationalen, reinverzweigten Punkt $P_{f,n} \in C_{f,n}(k)$. Dann gilt wegen der k-Rationalität $P^\sigma_{f,n} = P_{f,n}$ für alle $\sigma \in G_k$ und wegen der reinen Verzweigtheit $\zeta P_{f,n} = P_{f,n}$ für alle $\zeta \in \mu_n = \mathrm{Aut}(C_{f,n,k^s}|\mathbb{P}_{1,k^s})$. Somit gilt $P_{f,n} \in C_{f,n}(k^s)^{\xi_D}$ und

$$\boxed{P^D_{f,n} := (F^\omega_{f,n})^{-1}(P_{f,n}) \in C^D_{f,n}(k)}$$

ist k-rational! Dann ist $P^D_{f,n}$ ein für die Überlagerung $C^D_{f,n} \to \mathbb{P}_1$ reinverzweigter, k-rationaler Punkt.

Satz 4.4.2 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$, $P := P_{f,n}$ und $t \in S(C_{f,n}, J_{f,n}, \lambda^P\mathbb{Z})$. Sei $g(C_{f,n}) \geq 1$.*

1. *Es gilt*
$$\boxed{\lambda^P(t, \sqrt[n]{f(t)}) = [P_{f,n}] - [t, \sqrt[n]{f(t)}] \in J_{f,n}(k^s)^{\xi_{f(t)}}}$$
und dieser Punkt ist ein Nicht-Torsionpunkt.

2. *Der Punkt*
$$\boxed{[P^{f(t)}_{f,n}] - [t, 1] \in J^{f(t)}_{f,n}(k)}$$
ist Nicht-Torsion. *Somit gilt* $\mathrm{rg}(J^{f(t)}_{f,n}(k)) \geq 1$.

Beweis:

1. Nach der Folgerung zu obiger Proposition 4.4.1 ist $\lambda^P(t, \sqrt[n]{f(t)}) = [P] - [t, \sqrt[n]{f(t)}]$ ein in $J_{f,n}(k^s)$ liegender Nicht-Torsionspunkt. Wir zeigen dass er in dem zu $\xi := \xi_{f(t)}$ gehörenden Eigenraum liegt. Einerseits gilt
$$\begin{aligned} \lambda^P(t, \sqrt[n]{f(t)})^\sigma &= [P^\sigma] - [(t, \sqrt[n]{f(t)})^\sigma] \\ &= [P] - [t, \sqrt[n]{f(t)}^\sigma]. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\xi(\sigma)_*\lambda^P(t, \sqrt[n]{f(t)}) &= [\xi(\sigma)P] - [\xi(\sigma)(t, \sqrt[n]{f(t)})]\\ &= [P] - [t, \xi(\sigma)\sqrt[n]{f(t)}]\\ &= [P] - [t, \sqrt[n]{f(t)}^{\sigma-1}\sqrt[n]{f(t)}]\\ &= [P] - [t, \sqrt[n]{f(t)}^{\sigma}].\end{aligned}$$

2. Sei $\omega := \sqrt[n]{f(t)}$. Dann gilt $F^{\omega}_{f,n}(P^{f(t)}_{f,n}) = P_{f,n} = P$,

$$F^{\omega}_{f,n}(t, 1) = (t, \omega) = (t, \sqrt[n]{f(t)})$$

und somit

$$(F^{\omega}_{f,n})_*([P^{f(t)}_{f,n}] - [t, 1]) = [P] - [t, \sqrt[n]{f(t)}].$$

Da $(F^{\omega}_{f,n})_*$ ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

□

Für $f \in \mathrm{Zul}(k, n)$ und $H \subset D_f(k)$ sei

$$\boxed{B_{f,n}(H) := \{f(t) \mod k^{\times n} \,|\, t \in H\} \subset k^{\times}/n.}$$

Man beachte, dass $f(t) \in k^{\times}$ für $t \in D_f(k)$ nach der Definition von D_f gilt. $B_{f,n}(H)$ ist also das Bild von $f(H)$ in $k^{\times}/n$. Des weiteren sei

$$\boxed{X^r_{f,n} := \{D \in k^{\times}/n \,|\, \mathrm{rg}(J^D_{f,n}(k)) \geq r\}.}$$

Unser Anliegen ist im Moment zu zeigen, dass $X^1_{f,n}$ unendlich ist. Unmittelbar aus obiger Proposition folgt:

Folgerung: *Sei die Situation des obigen Satzes zugrunde gelegt. Sei* $H := S(C_{f,n}, J_{f,n}, \mathbb{Z}\lambda^P)$. *Dann gilt* $B_{f,n}(H) \subset X^1_{f,n}$.

Es bleibt zu zeigen, dass in obiger Situation $B_{f,n}(H)$ unendlich ist. Dies ist eine einfache Konsequenz aus der Hilbert-Irreduzibilität.

Proposition 4.4.3 *Sei* $f \in \mathrm{Zul}(k, n)$ *und* $H \subset D_f(k) \subset \mathbb{P}_1(k)$ *eine Hilbert-Menge. Dann ist* $B_{f,n}(H)$ *unendlich.*

Beweis: Wir betrachten die étale Überlagerung $p : U_{f,n} \to D_f$ vom Grad d. Für $t \in D_f(k)$ gilt

$$p^{-1}(t) = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[Y]}{Y^n - f(t)}\right)$$

und somit $t \in \mathrm{Inert}(U_{f,n}|D_f)$ genau dann, wenn $Y^n - f(t)$ irreduzibel ist. Nach 2.1.8 gibt es eine Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset H$ derart, dass

$$\left(\frac{k[Y]}{Y^n - f(t_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

eine linear disjunkte Folge von Körpern ist. $Y^n - f(t_i)$ ist dann irreduzibel für alle i. Für $i \neq j$ gilt dann $f(t_i) \neq f(t_j) \mod k^{\times n}$, denn sonst wäre $\frac{k[Y]}{Y^n - f(t_i)}$ k-isomorph zu $\frac{k[Y]}{Y^n - f(t_j)}$, im Widerspruch zur linearen Disjunktheit. Es folgt, dass $B_{f,n}(H)$ unendlich ist. □

Wir fassen zusammen:

Satz 4.4.4 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Sei $H := S(C_{f,n}, J_{f,n}, \mathbb{Z}\lambda^{P_{f,n}})$. Dann sind $B_{f,n}(H) \subset X^1_{f,n}$ unendliche Mengen.*

4.5 Generische Twists

Wir werden nun das Ergebnis des vorigen Abschnittes verschärfen. Sei k ein Körper und $n \geq 2$ zu $\mathrm{char}(k)$ teilerfremd. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir im Folgenden den kanonischen Isomorphismus

$$\mu_n \cong \mathrm{Aut}(C_{f,n,k^s} | \mathbb{P}_{1,k^s})$$

mit $\rho_{f,n}$. Dann gilt

$$\boxed{\rho_{f,n}(\zeta)(x,y) = (x, \zeta y)}$$

für $(x,y) \in U_{f,n}(k^s)$ und $\zeta \in \mu_n$. Des weiteren sei für $f, g \in \mathrm{Zul}(k,n)$

$$\boxed{\mathrm{Mor}^+_k(C_{g,n}, C_{f,n}) := \{h \in \mathrm{Mor}_k(C_{g,n}, C_{f,n}) | \rho_{f,n}(\zeta) \circ h_{k^s} = h_{k^s} \circ \rho_{g,n}(\zeta)\ \forall \zeta\}}$$

und

$$\boxed{\mathrm{Mor}^+_k(C_{g,n}, J_{f,n}) := \{h \in \mathrm{Mor}_k(C_{g,n}, J_{f,n}) \,|\, \rho_{f,n}(\zeta)_* \circ h_{k^s} = h_{k^s} \circ \rho_{g,n}(\zeta) \forall\, \zeta\}.}$$

Wie im vorigen Abschnitt wählen wir für $D \in k^\times$ eine n-te Wurzel $\sqrt[n]{D} \in k^{s\times}$ und setzen $\xi_D(\sigma) := \sqrt[n]{D}^{\sigma - 1}$ für $\sigma \in G_k$. Wir gehen in diesem Abschnitt folgendermaßen vor:

1. Wir werden feststellen, dass für $h \in \mathrm{Mor}^+_k(C_{g,n}, J_{f,n})$ und $t \in D_f(k)$

$$h(t, \sqrt[n]{g(t)}) \in J_{f,n}(k^s)^{\xi_{g(t)}} \cong J^{g(t)}_{f,n}(k)$$

   gilt.

2. Nach dem Spezialisierungssatz folgt dann

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}^+_k(C_{g,n}, J_{f,n})) \leq \mathrm{rg}(J^{g(t)}_{f,n}(k))$$

   für alle $t \in S(C_{g,n}, J_{f,n}, \mathrm{Mor}^+_k(C_{g,n}, J_{f,n}))$.

3. Wenn f in $\mathrm{Zul}^+(k,n)$ liegt, $g(C_{f,n}) \geq 1$ gilt und g von der Form $f \circ h(X)$ mit einer nicht-konstanten, rationalen Funktion $h \in k(X)^\times$ ist, dann ist $\mathrm{Mor}^+_k(C_{g,n}, J_{f,n})$ von positivem Rang. (Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass bereits $\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}^+_k(C_{f,n}, J_{f,n}))$ beliebig große Werte annehmen kann. Manchmal gelingt es ein g mit $\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k(C_{g,n}, J_{f,n})) > \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k(C_{f,n}, J_{f,n}))$ anzugeben.)

4. Am Ende des Abschnittes geben wir eine Interpretation der Gruppe

$$\mathrm{Mor}_k^+(C_{g,n}, J_{f,n})$$

in Termen von $k(X)^s|k(X)$-Twists von $J_{f,n} \otimes_k k(X)$.

Proposition 4.5.1 *Seien $f, g \in \mathrm{Zul}(k,n)$.*

1. *Sei $h \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{g,n}, C_{f,n})$ und $t \in D_g(k)$. Dann gilt*

$$\boxed{h(t, \sqrt[n]{g(t)}) \in C_{f,n}(k^s)^{\xi_{g(t)}} \cong C_{f,n}^{g(t)}(k).}$$

2. *Sei $h \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{g,n}, J_{f,n})$ und $t \in D_g(k)$. Dann gilt*

$$\boxed{h(t, \sqrt[n]{g(t)}) \in J_{f,n}(k^s)^{\xi_{g(t)}} \cong J_{f,n}^{g(t)}(k).}$$

3. *Wenn $g(C_{f,n}) \geq 1$ gilt, und P ein für $p_{f,n}$ rein-verzweigter, k-rationaler Punkt ist, dann ist die Albanese-Abbildung $\lambda^P : C_{f,n} \to J_{f,n}$ ein Nicht-Torsionselement in $\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n})$.*

4. *Wenn $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$ gilt, und $\mathrm{Mor}_k^+(C_{g,n}, C_{f,n})$ einen nicht-konstanten k-Morphismus enthält, dann gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{g,n}, J_{f,n}) \geq \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n})) \geq 1.}$$

Beweis: Wir verzichten auf den Beweis von 1., da er völlig analog zu dem Beweis von 2., den wir nun führen, verläuft. Es gilt

$$\begin{aligned} h(t, \sqrt[n]{g(t)})^\sigma &= h(t^\sigma, \sqrt[n]{g(t)}^\sigma) = \\ &= h(t, \xi_{g(t)}(\sigma) \sqrt[n]{g(t)}) = \\ &= h(\xi_{g(t)}(\sigma)(t, \sqrt[n]{g(t)})) = \xi_{g(t)}(\sigma)_* h(t, \sqrt[n]{g(t)}). \end{aligned}$$

Daher liegt $h(t, \sqrt[n]{g(t)})$ in $J_{f,n}(k^s)^{\xi_{g(t)}}$. Dass $J_{f,n}(k^s)^{\xi_{g(t)}} \cong J_{f,n}^{g(t)}(k)$ gilt, wurde in 4.2.3 bewiesen. Somit ist die 2. Behauptung bewiesen.

Wir kommen zum Beweis der 3. Behauptung. Wegen $g(C_{f,n}) \geq 1$ ist λ^P Nicht-Torsion. Es genügt zu zeigen, dass für $\zeta \in \mu_n$

$$\lambda_{k^s}^P \circ \rho_{f,n}(\zeta)|U_{f,n} = \rho_{f,n}(\zeta)_* \circ \lambda_{k^s}^P|U_{f,n}$$

gilt. Sei $(x,y) \in U_{f,n}(k^s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda^P(\rho_{f,n}(\zeta)(x,y)) &= \lambda_P(x, \zeta y) = [P] - [x, \zeta y] = \\ &= [\zeta P] - [x, \zeta y] = \rho_{f,n}(\zeta)_*([P] - [x, \zeta y]) = \\ &= \rho_{f,n}(\zeta)_*(\lambda^P(x,y)). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die 4. Behauptung. Sei $c \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{g,n}, C_{f,n})$ nicht-konstant. Dann ist c surjektiv. Der Homomorphismus

$$\nu : \mathrm{Mor}_k(C_{f,n}, J_{f,n}) \to \mathrm{Mor}_k(C_{g,n}, J_{f,n}), \ h \mapsto h \circ c$$

ist somit injektiv. Offenbar erhält man durch Restriktion von ν einen Homomorphismus

$$\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n}) \to \mathrm{Mor}_k^+(C_{g,n}, J_{f,n}),$$

der injektiv ist. Daraus folgt die 4. Behauptung.

□

Ist $f \in k(X)$ eine rationale Funktion und $g \in k(X)$ nicht-konstant, so bezeichnen wir mit $f \circ g$ die rationale Funktion, die entsteht, wenn man g in f einsetzt. Z.B. gilt $f \circ X = f$ oder $X^2 \circ (X+1) = (X+1)^2$. Sei $f \in \mathrm{Zul}(k,n) \subset k(X)^\times$. Dann setzen wir

$$\boxed{\mathrm{Zul}_f(k,n) := \{g \in k(X) \,|\, g \text{ nicht-konstant}, f \circ g \in \mathrm{Zul}(k,n)\}}$$

und

$$\boxed{\mathrm{Zul}_f^+(k,n) := \{g \in k(X) \,|\, g \text{ nicht-konstant}, f \circ g \in \mathrm{Zul}^+(k,n)\}.}$$

Sei nun $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$ und $g \in \mathrm{Zul}_f(k,n)$. Wir werden nun zeigen, dass $\mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, C_{f,n}) \neq \emptyset$ gilt. $g \in k(X) = R(\mathbb{P}_1)$ induziert einen k-Morphismus $\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, den wir wieder mit g bezeichnen. Dieser induziert seinerseits einen k-Morphismus $g|D_{f\circ g} \to D_f$. Des weiteren hat man einen k-Morphismus $c'_{f,g,n}$: $U_{f\circ g,n} \to U_{f,n}$, $X \mapsto g(X), Y \mapsto Y$, der sich nach 4.2.1 fortsetzt zu einem k-Morphismus

$$\boxed{c_{f,g,n} : C_{f\circ g,n} \to C_{f,n}.}$$

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_{f\circ g,n} & \xrightarrow{c_{f,g,n}} & C_{f,n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

ist kommutativ. Für $(x,y) \in U_{f\circ g,n}(k^s) \subset C_{f\circ g}(k^s)$ gilt

$$\boxed{c_{f,g,n}(x,y) = (g(x), y).}$$

$c_{f,g,n}$ ist nicht-konstant. Sonst wäre, da in obigen Diagrammen die vertikalen Pfeile surjektiv sind, g konstant, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist.

Proposition 4.5.2 *Es gilt*

$$\boxed{c_{f,g,n} \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, C_{f,n}).}$$

Beweis: Sei $c := c_{f,g,n}$. Wir zeigen, dass

$$c_{k^s} \circ \rho_{f\circ g,n}(\zeta)|U_{f\circ g,n} = \rho_{f,n}(\zeta) \circ c_{k^s}|U_{f\circ g}$$

für alle $\zeta \in \mu_n$ gilt. Sei $(x,y) \in U_{f\circ g,n}(k^s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c(\rho_{g,n}(\zeta)(x,y)) &= c(x, \zeta y) = \\ &= (g(x), \zeta y) = \rho_{f,n}(\zeta)(g(x), y) = \\ &= \rho_{f,n}(\zeta)(c(x,y)). \end{aligned}$$

$\square$

Wir kommen nun zum **Hauptergebnis** dieses Abschnittes. Wir erinnern daran, dass wir für $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$ und $H \subset D_f(k)$

$$\boxed{B_{f,n}(H) := \{f(t) \mod k^{\times n} \,|\, t \in H\} \subset k^\times/n}$$

und

$$\boxed{X^r_{f,n} := \{D \in k^\times/n \,|\, \mathrm{rg}(J^D_{f,n}(k)) \geq r\}}$$

gesetzt haben.

Satz 4.5.3 *Sei* $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$, $g \in \mathrm{Zul}_f(k,n)$ *und* $g(C_{f,n}) \geq 1$.

1. *Es gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}^+_k(C_{f\circ g,n}, J_{f,n})) \geq \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}^+_k(C_{f,n}, J_{f,n})) \geq 1.}$$

2. *Für alle* $t \in H := S(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}, \mathrm{Mor}^+_k(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}))$ *gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J^{f\circ g(t)}_{f,n}(k)) \geq \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}^+_k(C_{f\circ g,n}, J_{f,n})).}$$

3. *Sei* $r := \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}^+_k(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}))$. *Dann sind* $B_{f\circ g,n}(H) \subset X^r_{f,n}$ *unendliche Mengen.*

Beweis:

1. Man kombiniere 4.5.2 mit 4.5.1.

2. Sei $t \in H$ und $Q := (t, \sqrt[n]{(f\circ g(t))})$. Dann ist nach der Definition von H die Spezialisierungsabbildung

$$\eta_Q : \mathrm{Mor}^+_k(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}) \to J_{f,n}(k^s),\ h \mapsto h(Q)$$

injektiv, und H ist eine Hilbert-Menge. Das Bild von $\mathrm{Mor}^+_k(C_{f\circ g,n}, J_{f,n})$ unter η_Q ist in $J_{f,n}(k^s)^{\xi_{f\circ g(t)}}$ enthalten nach 4.5.1. Ferner gilt

$$J_{f,n}(k^s)^{\xi_{f\circ g(t)}} \cong J^{f\circ g(t)}_{f,n}(k)$$

nach 4.2.3 Daraus folgt sofort die Behauptung.

3. Dass $B_{f\circ g,n}(H) \subset X^r_{f,n}$ gilt, ist nur eine Umformulierung von 2. Nach 4.4.3 ist $B_{f\circ g,n}(H)$ unendlich.

$\square$

Bemerkung:

1. Die Aussage des Satzes ist bereits im Sonderfall $g(X) = X$ interessant. In diesem Sonderfall liefert der Satz, dass für alle t innerhalb einer geeigneten Hilbert-Menge H

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,n}^{f(t)}(k)) \geq \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n}))}$$

gilt.

2. Manchmal gelingt es, g so zu wählen, dass

$$\mathrm{Mor}_k^+(C_{g\circ f,n}, J_{f,n}) > \mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n})$$

gilt. Im nächsten Abschnitt beweisen wir eine obere Schranke für

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n})),$$

welche nahelegt, dass man die Untersuchungen nicht auf den Fall $g(X) = X$ beschränken sollte. Siehe 4.6.3.

Seien $f, g \in \mathrm{Zul}(k,n)$. Wir geben nun eine alternative Beschreibung für die im Satz wichtige Zahl $\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{g,n}, J_{f,n}))$ in Termen von so genannten generischen Twists.

Sei $K|k$ ein beliebiger Erweiterungskörper und $D \in K^\times$. Dann gilt $f(X) \in \mathrm{Zul}(K,n)$ und somit auch $D^{-1}f(X) \in \mathrm{Zul}(K,n)$. Wir setzen

$$\boxed{C_{f,n,K}^D := \mathbb{P}_{1,K}[\sqrt[n]{D^{-1}f}]}$$

und bezeichnen die Jacobi-Varietät dieser K-Kurve mit $J_{f,n,K}^D$. Die Projektion $C_{f,n,K}^D \to \mathbb{P}_{1,K}$ wird mit $p_{f,n,K}^D$ bezeichnet.

Bemerkung 4.5.4

1. Wendet man die Proposition 4.2.2 mit K statt k an, so ergibt sich, dass $C_{f,n,K}^D$ ein $K^s|K$-Twist von $C_{f,n,K}$ ist.

2. Sei $\omega \in K^s$ mit $\omega^n = D$. Für $\sigma \in G_K$ sei $\chi(\sigma) = \omega^{\sigma-1}$. Dann gilt

$$C_{f,n,K}^D(K) \cong C_{f,n}(K^s)^\chi := \{Q \in C_{f,n}(K^s) \,|\, Q^\sigma = \rho_{f,n}(\chi(\sigma))Q \;\forall \sigma \in G_K\}$$

und

$$J_{f,n,K}^D(K) \cong J_{f,n}(K^s)^\chi := \{Q \in J_{f,n}(K^s) \,|\, Q^\sigma = \rho_{f,n}(\chi(\sigma))_* Q \;\forall \sigma \in G_K\}.$$

Um dies zu beweisen, braucht man nur 4.2.3 mit K statt k anzuwenden.

Sei nun T eine Unbestimmte, $K = k(T)$ und $D(T) \in \mathrm{Zul}(k,n) \subset K(T)$. Wir nennen die K-Kurven der Form $C_{f,n,K}^{D(T)}$ die **generischen Twists** von $C_{f,n}$. $C_{f,n,K}^{D(T)}$ ist demnach projektives glattes Modell für die affine Gleichung

$$D(T)Y^n = f(X).$$

Dies ist eine Kurve über $K = k(T)$. $R(C_{D,n})$ ist k-isomorph zu

$$K[\sqrt[n]{D(T)}] = \frac{K[Y]}{Y^n - D(T)}$$

und wir wählen ein für alle mal eine Einbettung dieses Körpers in K^s, entlang derer wir ihn als einen Unterkörper von K^s auffassen dürfen.

Bemerkung: Für $\sigma \in G_K$ sei $\chi(\sigma) := \sqrt[n]{D(T)}^{\sigma - 1}$. Dann gilt

$$\boxed{\begin{array}{rcl} C_{f,n,K}^{D(T)}(K) & \cong & C_{f,n}(K(\sqrt[n]{D(T)}))^\chi := \\ & & \{P \in C_{f,n}(K(\sqrt[n]{D(T)})) \mid P^\sigma = \rho_{f,n}(\chi(\sigma))P \ \forall \sigma \in G_K\} \end{array}}$$

und

$$\boxed{\begin{array}{rcl} J_{f,n,K}^{D(T)}(K) & \cong & J_{f,n}(K(\sqrt[n]{D(T)}))^\chi := \\ & & \{P \in J_{f,n}(K(\sqrt[n]{D(T)})) \mid P^\sigma = \rho_{f,n}(\chi(\sigma))_* P \ \forall \sigma \in G_K\}. \end{array}}$$

Beweis: Nach obiger Bemerkung 4.5.4 gilt

$$C_{f,n,K}^{D(T)}(K) = \{P \in C_{f,n}(K^s) \mid P^\sigma = \rho_{f,n}(\chi(\sigma))P \ \forall \sigma \in G_K\}.$$

Des weiteren gilt $\chi(\sigma) = 1$ für $\sigma \in G(K^s | K(\sqrt[n]{D(T)}))$. Daraus folgt leicht die 1. Behauptung. Der Beweis der 2. Behauptung kann völlig analog geführt werden.
□

Wir bezeichnen nun für jeden Oberkörper $E|k$ die kanonische Bijektion

$$\mathrm{Mor}_E(C_{D,n,E}, C_{f,n,E}) \cong C_{f,n}(R(C_{D,n,E})) = C_{f,n}(E(T, \sqrt[n]{D(T)}))$$

mit i_E und den kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Mor}_k(C_{D,n,E}, J_{f,n,E}) \cong J_{f,n}(R(C_{D,n,E})) = J_{f,n}(E(T, \sqrt[n]{D(T)}))$$

mit j_E.

Satz 4.5.5 1. *Es gilt*

$$\boxed{\mathrm{Mor}_k^+(C_{D,n}, C_{f,n}) \cong C_{f,n}(K(\sqrt[n]{D(T)}))^\chi \cong C_{f,n,K}^{D(T)}(K).}$$

Die linke Bijektion ist die Restriktion von i_k.

2. *Ferner gilt*

$$\boxed{\mathrm{Mor}_k^+(C_{D,n}, J_{f,n}) \cong J_{f,n}(K(\sqrt[n]{D(T)}))^\chi \cong J_{f,n,K}^{D(T)}(K).}$$

Der linke Isomorphismus ist die Restriktion von j_k.

Beweis: Wir beweisen nur die 1. Behauptung, weil der Beweis der 2. Behauptung völlig analog zum Beweis der 1. Behauptung geführt werden kann. Sei $E := k(\mu_n)$. Wenn wir wüßten, dass die $G_{E|k}$-lineare Bijektion i_E durch Restriktion eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Mor}_E^+(C_{D,n,E}, C_{f,n,E}) & \cong & \{P \in C_{f,n}(E(T, \sqrt[n]{D(T)})| \\ & & P^\sigma = \rho_{f,n}(\chi(\sigma))P \;\forall \sigma \in G_{E(T)}\}\end{array}$$

induziert, so wären wir fertig, denn dann folgt die Behauptung durch Anwenden des Funktors $-^{G_{E|k}}$.

Wir dürfen also annehmen, dass $\mu_n \subset k$ gilt und somit $K(\sqrt[n]{D(T)})|K$ galoissch ist.

$$\chi : G(K(\sqrt[n]{D(T)})|K) \to \mu_n,\; \sigma \mapsto \sqrt[n]{D(T)}^{\sigma-1}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen. Sei $\nu : \mathrm{Spec}(K(\sqrt[n]{D(T)}) \to C_{D,n}$ die kanonische Abbildung. Sei $h \in \mathrm{Mor}_k(C_{D,n}, C_{f,n})$ und $P := i_k(h) = \nu \circ h$. Man beachte im Folgenden, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Spec}(K(\sqrt[n]{D(T)})) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Spec}(K(\sqrt[n]{D(T)})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{D,n} & \xrightarrow{\rho_{D,n}(\chi(\sigma))} & C_{D,n}.\end{array}$$

kommutiert. Sei $G := G(K(\sqrt[n]{D(T)})|K)$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl}h \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{D,n}, C_{f,n}) & \Longleftrightarrow & h \circ \rho_{D,n}(\zeta) = \rho_{f,n}(\zeta) \circ h \;\forall \zeta \in \mu_n \\ & \Longleftrightarrow & h \circ \rho_{D,n}(\chi(\sigma)) = \rho_{f,n}(\chi(\sigma)) \circ h \;\forall \sigma \in G \\ & \Longleftrightarrow & h \circ \rho_{D,n}(\chi(\sigma)) \circ \nu = \rho_{f,n}(\chi(\sigma)) \circ h \circ \nu \;\forall \sigma \in G \\ & \Longleftrightarrow & h \circ \nu \circ \sigma = \rho_{f,n}(\chi(\sigma)) \circ P \;\forall \sigma \in G \\ & \Longleftrightarrow & P \circ \sigma = \rho_{f,n}(\chi(\sigma)) \circ P \;\forall \sigma \in G.\end{array}$$

Daraus ergibt sich sofort die Behauptung. □

Wir gelangen damit zu der folgenden **Umformulierung des Hauptergebnisses** dieses Abschnittes.

Satz 4.5.6 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$, $g \in \mathrm{Zul}_f(k,n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Sei T eine Unbestimmte und $K := k(T)$. Dann gilt:*

1. *Es gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,n,K}^{f\circ g(T)}(K)) \geq \mathrm{rg}(J_{f,n,K}^{f(T)}(K)) \geq 1.}$$

2. *Für alle $t \in H := S(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}))$ gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,n}^{f\circ g(t)}(k)) \geq \mathrm{rg}(J_{f,n,K}^{f\circ g(T)}(K)).}$$

Es gibt also viele Twists, deren Rang mindestens so groß wie der Rang des betrachteten generischen Twists ist.

3. *$B_{f\circ g,n}(H) \subset X_{f,n}^r$ sind unendliche Mengen.*

Beweis: Man kombiniere 4.5.5 mit 4.5.3. □

Bemerkung:

1. Der Satz ist bereits im Sonderfall $g(T) = T$ interessant. Der generische Twist $C_{f,n,K}^{f(T)}$ wird im Folgenden der **generische Eigentwist von** $C_{f,n}$ genannt. Der generische Eigentwist ist also das projektive, glatte Modell der affinen Kurve
$$f(T)Y^n = f(X)$$
über $K = k(T)$.

2. Manchmal gelingt es g so zu wählen, dass
$$\mathrm{rg}(J_{f,n}^{f\circ g(T)}(K)) > \mathrm{rg}(J_{f,n}^{f(T)}(K))$$
gilt. Im folgenden Abschnitt beweisen wir eine obere Schranke für den Rang des generischen Eigentwists, die nahelegt, die Untersuchungen nicht auf den Fall $g(T) = T$ zu beschränken.

4.6 Kurven mit generischem Eigentwist von hohem Rang

Sei k ein endlich erzeugter Hilbert-Körper und n zu $\mathrm{char}(k)$ teilerfremd. Wir konstruieren in diesem Abschnitt für jedes r ein $f \in \mathrm{Zul}(k, n)$ derart, dass der generische Eigentwist von $C_{f,n}$ Rang $\geq r$ hat. Als Folgerung erhalten wir dann in Kombination mit 4.5.6, dass $\mathrm{rg}(J_{f,n}^{f(t)}(k)) \geq r$ für viele $t \in k$ gilt.

Wir erinnern an die folgenden wohlbekannten Tatsachen über Jacobi-Varietäten. Seien X und Y projektive, glatte Kurven über k und $f : X \to Y$ ein dominanter k-Morphismus. Dann haben wir einen Homomorphismus $f_* : J_X \to J_Y$ mit
$$f_*([P] - [Q]) = [f(P)] - [f(Q)] \quad \forall [P] - [Q] \in CH_0^1(X_{\overline{k}}) = J_X(\overline{k})$$
und einen Homomorphismus $f^* : J_Y \to J_X$ mit
$$f^*([P] - [Q]) = \sum_{P'|P} e_{P'|P}[P'] - \sum_{Q'|Q} e_{Q'|Q}[Q']$$
für alle $[P] - [Q] \in CH_0^1(Y_{\overline{k}}) = J_Y(\overline{k})$.

Bemerkung 4.6.1 *1. Sind $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ dominante Morphismen von projektiven, glatten Kurven über k, so gilt $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ und $g^* \circ f^* = (f \circ g)^*$.*

2. *$f_* \circ f^*$ ist Multiplikation mit $\deg(f)$. Wenn $f : X \to Y$ eine Galois-Überlagerung mit Gruppe Γ ist, dann gilt*

$$f^* \circ f_* = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma_*.$$

Wenn f ein Isomorphismus ist, dann gilt $f_* \circ f^* = Id$ und $f^* \circ f_* = Id$.

3. *Das Bild von f^* ist eine abelsche Untervarietät A von J_X, die isogen zu J_Y ist. Es gibt eine abelsche Untervarietät B von J_X derart, dass J_X isogen zu $A \times B$ ist.*

Wir wollen in diesem Abschnitt Folgen $(f_r)_{r\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Zul}^+(k,n)$ derart konstruieren, dass mit $K = k(T)$ für die Ränge der entsprechenden generischen Eigentwists

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{rg}(J_{f_r,n,K}^{f_r(T)}(K)) = \infty$$

gilt. Zunächst beweisen wir eine obere Schranke für den Rang des generischen Eigentwists, die zeigt, dass für eine solche Folge notwendigerweise

$$\lim_{r\to\infty} g(C_{f_r,n}) = \infty$$

gelten muss.

Lemma 4.6.2 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$. Dann ist*

$$\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n}) \cap J_{f,n}(k)$$

n-Torsion.

Beweis: Ist P ein Element dieses Durchschnittes, so gilt $\rho_{f,n}(\zeta)_*P = P$ für alle $\zeta \in \mu_n$, und wegen $J_{\mathbb{P}_1} = 0$ folgt

$$0 = p_{f,n}^* p_{f,n,*}(P) = \sum_{\zeta\in\mu_n} \rho_{f,n}(\zeta)_* P = nP.$$

□

Proposition 4.6.3 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$, $g \in \mathrm{Zul}_f(k,n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Dann gilt*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n})) & \leq & \mathrm{rg}\left(\frac{\mathrm{Mor}_k(C_{f,n},J_{f,n})}{J_{f,n}(k)}\right) = \\ & = & \mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,n})) \leq 4g(C_{f,n})^2. \end{array}}$$

Beweis: Die erste Ungleichung folgt unmittelbar aus dem Lemma. Die folgende Gleichung gilt aufgrund der universellen Eigenschaft der Jacobischen $J_{f,n}$ als Albanese-Varietät von $C_{f,n}$. Nach [Mi86a] ist $4g(C_{f,n})^2$ obere Schranke für $\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,n}))$. □

Bemerkung: In Kombination mit 4.5.5 ergibt sich in der Situation obiger Proposition

$$\boxed{\mathrm{rg}(C_{f,n,K}^{f(T)}(K)) \le 4g(C_{f,n})^2.}$$

Seien $f, g \in \mathrm{Zul}(k,n)$. Wir setzen

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Mor}_k^+(J_{f,n}, J_{g,n}) := \\ \{h \in \mathrm{Mor}_k(J_{f,n}, J_{g,n}) \,|\, \rho_{g,n}(\zeta)_* \circ h_{k^s} = h_{k^s} \circ \rho_{f,n}(\zeta)_* \;\forall \zeta \in \mu_n\}.\end{array}}$$

Lemma 4.6.4 *Sei $h \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, C_{g,n})$. Dann gilt $h_* \in \mathrm{Mor}_k^+(J_{f,n}, J_{g,n})$ und $h^* \in \mathrm{Mor}_k^+(J_{g,n}, J_{f,n})$.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$\rho_{g,n}(\zeta) \circ h_{k^s} = h_{k^s} \circ \rho_{f,n}(\zeta) \;\forall \zeta \in \mu_n$$

und dies impliziert

$$\rho_{g,n}(\zeta)_* \circ h_{k^s,*} = h_{k^s,*} \circ \rho_{f,n}(\zeta)_* \;\forall \zeta \in \mu_n.$$

Daher gilt $h_* \in \mathrm{Mor}_k^+(J_{g,n}, J_{f,n})$. Des weiteren gilt

$$\rho_{f,n}(\zeta)^* \circ h_{k^s}^* = h_{k^s}^* \circ \rho_{g,n}(\zeta)^* \;\forall \zeta \in \mu_n$$

nach der Funktorialität von $-^*$ und dies impliziert zunächst

$$\rho_{f,n}(\zeta^{-1})_* \circ h_{k^s}^* = h_{k^s}^* \circ \rho_{g,n}(\zeta^{-1})_* \;\forall \zeta \in \mu_n$$

und dann auch

$$\rho_{f,n}(\zeta)_* \circ h_{k^s}^* = h_{k^s}^* \circ \rho_{g,n}(\zeta)_* \;\forall \zeta \in \mu_n.$$

Daher gilt $h^* \in \mathrm{Mor}_k^+(J_{g,n}, J_{f,n})$. □

Sei nun für $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$

$$\boxed{\mathrm{Zul}_f^*(k,n) := \{g \in \mathrm{Zul}_f^+(k,n) \,|\, g(C_{f\circ g,n}) > g(C_{f,n})\}.}$$

Proposition 4.6.5 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$. Sei $g \in \mathrm{Zul}_f^*(k,n)$. Dann gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f\circ g,n})) > \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n})).}$$

Beweis: Wir fassen g gleichzeitig als Morphismus $g : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ auf. Sei $c := c_{f,g,n}$ der im vorigen Abschnitt konstruierte Morphismus $C_{f\circ g,n} \to C_{f,n}$, der $c(x,y) = (g(x), y)$ für $(x,y) \in U_{f\circ g,n}(k^s) \subset C_{f\circ g,n}(k^s)$ erfüllt. Wir zeigen die Behauptung in mehreren Schritten.

1. Sei $h \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n})$. Dann gilt $c^* \circ h \circ c \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g}, J_{f\circ g})$. In der Tat, es gilt $c \in \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, C_{f,n})$ nach 4.5.2. Das Lemma 4.6.4 liefert, dass dann c^* in $\mathrm{Mor}_k^+(J_{f,n}, J_{f\circ g,n})$ liegt. Daher muss $c^* \circ h \circ c$ in $\mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f\circ g,n})$ liegen.

2. Nach 1. hat man einen Homomorphismus

$$\varphi : \mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n}) \to \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f\circ g}, n),\ h \mapsto c^* \circ h \circ c.$$

Wir behaupten, dass $\ker(\varphi)$ Torsion ist. Sei $h \in \ker(\varphi)$. Dann gilt $c^* \circ h \circ c = 0$ und wegen der Surjektivität von c muss $c^* \circ h = 0$ gelten. Daraus folgt $c_* \circ c^* \circ h = 0$. Da $c_* \circ c^*$ nach 4.6.1 einfach Multiplikation mit $\deg(c)$ ist, folgt $\deg(c)h = 0$. Daher ist h Torsion.

3. Sei $r := \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n}))$ und $(h_1, \cdots, h_r) \subset \mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n})$ eine $\mathbb{Z}$-linear unabhängige Familie. Dann ist $(\varphi(h_1), \cdots, \varphi(h_r))$ eine $\mathbb{Z}$-linear unabhängige Familie in $\mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f\circ g,n})$. Sei $P \in C_{f\circ g,n}(k)$ ein für die Überlagerung $C_{f\circ g,n} \to \mathbb{P}_1$ rein-verzweigter, k-rationaler Punkt. Dann ist der Albanese-Morphismus $\lambda^P : C_{f\circ g} \to J_{f\circ g}$ wegen $g(C_{f\circ g,n}) \geq 1$ Nicht-Torsion. Nach 4.5.1 liegt λ^P in $\mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f\circ g,n})$. Wir behaupten nun, dass $(\lambda^P, \varphi(h_1), \cdots, \varphi(h_r))$ eine $\mathbb{Z}$-linear unabhängige Familie ist. Seien $a_0, \cdots, a_r \in \mathbb{Z}$ mit

$$a_0\lambda^P + a_1\varphi(h_1) + \cdots + a_r\varphi(h_r) = 0$$

Angenommen ein a_i wäre von Null verschieden. Dann müsste $a_0 \neq 0$ gelten, denn $(\varphi(h_1), \cdots, \varphi(h_r))$ ist ja $\mathbb{Z}$-linear unabhängig. Nach 4.6.1 ist das Bild von $\varphi(h_i) = c^* \circ h_i \circ c$ in einer zu $J_{f,n}$ isogenen, abelschen Untervarietät B von $J_{f\circ g,n}$ enthalten. Nach Voraussetzung gilt

$$\dim(B) = \dim(J_{f,n}) = g(C_{f,n}) < g(C_{f\circ g,n}) = \dim(J_{f\circ g}),$$

d.h. es gilt $B \neq J_{f\circ g,n}$. Es folgte, dass $a_0\lambda^P(x) \in B(\overline{k})$ für alle $x \in C_{f\circ g,n}(\overline{k})$ gilt. Da das Bild von $C_{f\circ g,n}(\overline{k})$ unter λ^P ganz $J_{f\circ g,n}(\overline{k})$ erzeugt, müsste

$$a_0 x \in B(\overline{k}) \quad \forall x \in J_{f\circ g,n}(\overline{k})$$

gelten. Dies ist ein Widerspruch, weil $J_{f\circ g,n}(\overline{k})$ eine teilbare Gruppe ist und $B(\overline{k}) \neq J_{f\circ g,n}(\overline{k})$ gilt. Somit muss

$$(\lambda^P, \varphi(h_1), \cdots, \varphi(h_r))$$

$\mathbb{Z}$-linear unabhängig sein.

□

Bemerkung: Mit 4.5.5 folgt in der Situation der Proposition, dass

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f\circ g,n,K}^{f\circ g(T)}(K)) > \mathrm{rg}(J_{f,n,K}^{f(T)}(K))}$$

gilt, wenn T eine Unbestimmte und $K = k(T)$ ist.

Wir wollen nun iterativ Kurven $C_{f,n}$ konstruieren, deren generischer Eigentwist hohen Rang hat.

Satz 4.6.6 *Sei k ein endlich erzeugter Hilbert-Körper, $n \geq 2$ und $\operatorname{char}(k)$ zu $2n$ teilerfremd. Sei $K = k(T)$. Sei $f(X) \in k[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $d \geq 2$, das über $\overline{k}$ in ein Produkt*

$$f(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_d)$$

paarweise verschiedener Linearfaktoren zerfällt, wobei alle a_i in $\overline{k}^{\times}$ liegen. Sei $f_r(X) := f(X^{2^r})$.

1. *Wenn n ungerade und zu d teilerfremd ist, dann gilt $f_r(X) \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ für alle r, und für den Rang des generischen Eigentwists von $C_{f_r,n}$ gilt die Ungleichung*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f_r,n,K}^{f_r(T)}(K)) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,n}, J_{f_r,n})) \geq r.}$$

2. *Wenn $a_1 \in k^{\times 2^R}$ für ein $R \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt $f_r(X) \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ für alle $r \leq R$ und*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f_r,n,K}^{f_r(T)}(K)) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,n}, J_{f_r,n})) \geq r.}$$

   für alle $r \leq R$.

Beweis: Wir bemerken vorab, dass

$$f_r(X) = \prod_{i=1}^{d} \prod_{\zeta \in \mu_{2^r}} (X - \zeta \sqrt[2^r]{a_i})$$

ein Polynom vom Grad $2^r d$ ist, das über $\overline{k}$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt und somit in $\mathrm{Zul}(k,n)$ liegt.

1. Sei nun n ungerade und d zu n teilerfremd. Dann ist n zu $\deg(f_r) = 2^r d$ teilerfremd für jedes r, und somit liegt über $\infty \in \mathbb{P}_1(k)$ ein für $C_{f_r,n} \to \mathbb{P}_1$ rein-verzweigter, k-rationaler Punkt nach 4.1.3. Daher gilt $f_r \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ für alle r. Des weiteren gilt $g(C_{f_r,n}) = \frac{1}{2}(n-1)(2^r d - 1)$ nach 4.1.4 und insbesondere $g(C_{f_{r+1},n}) > g(C_{f_r,n})$ für alle r. Da offensichtlich $f_{r+1}(X) = f_r(X^2)$ gilt, muss $X^2 \in \mathrm{Zul}^*_{f_r}(k,n)$ liegen und nach 4.6.5 folgt, dass

$$\mathrm{Mor}_k^+(C_{f_{r+1},n}, J_{f_{r+1},n}) > \mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,n}, J_{f_r,n})$$

   für alle r gilt. Daraus folgt iterativ die Behauptung.

2. Sei nun $a_1 \in k^{\times 2^R}$ vorausgesetzt. Dann hat für $r \leq R$ das Polynom $f_r(X)$ eine k-rationale, 1-fache Nullstelle und 4.1.3 impliziert $f_r \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ für alle $r \leq R$. Nach 4.1.4 gilt

$$g(C_{f_r,n}) = \frac{1}{2}(n-1)(2^r d - 1) + \frac{1}{2}(n - \mathrm{ggT}(n, 2^r d)).$$

   Auch dies impliziert $g(C_{f_{r+1},n}) > g(C_{f_r,n})$ für alle r. Somit gilt $X^2 \in \mathrm{Zul}^*_{f_r}(k,n)$ für alle $r \leq R-1$ und nach 4.6.5 folgt, dass

$$\mathrm{Mor}_k^+(C_{f_{r+1},n}, J_{f_{r+1},n}) > \mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,n}, J_{f_r,n})$$

   für alle $r \leq R-1$ gilt. Daraus folgt iterativ die Behauptung.

□

Folgerung: *Sei die Situation des Satzes zugrunde gelegt. Sei entweder* n *zu* $2d$ *teilerfremd und* r *beliebig, oder* $a_1 \in k^{\times 2^R}$ *und* $r \leq R$. *Sei* $H_r := S(C_{f_r,n}, J_{f_r,n}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,n}, J_{f_r,n}))$. *Dann gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f_r,n}^{f_r(t)}(k)) \geq r \quad \forall t \in H_r.}$$

$B_{f_r,n}(H_r) \subset X_{f_r,n}^r$ *sind unendliche Mengen.*

Beweis: Man kombiniere den vorigen Satz mit 4.5.6. □

Bemerkung: Sei die Situation des Satzes zugrunde gelegt. Sei entweder n zu $2d$ teilerfremd und r beliebig, oder $a_1 \in k^{\times 2^R}$ und $r \leq R$.

1. Der Beweis des Satzes zeigt, dass $\lim\limits_{r \to \infty} g(C_{f_r,n}) = \infty$ gilt.

2. Es ist nach 4.6.3 klar, dass *keine* Folge $(f_r)_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{Zul}^+(k,n)$ mit

$$\lim_{r \to \infty} \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,n}, J_{f_r,n})) = \infty$$

derart existiert, dass $(g(C_{f_r,n}))_{r \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.

3. Wesentlich schwieriger ist die Frage, ob eine Folge $(f_r)_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{Zul}^+(k,n)$ und für jedes r ein $g_r \in \mathrm{Zul}_{f_r}(k,n)$ derart existieren, dass

$$\lim_{r \to \infty} \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r \circ g_r,n}, J_{f_r,n})) = \infty$$

gilt und $(g(C_{f_r,n}))_{r \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wer solche g_r, f_r mit $n = 2$ und $g(C_{f_r,2}) = 1 \ \forall r$ konstruiert, beweist die Rang-Vermutung 4.3.3. Wer es zusätzlich schafft, die Folge $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$ konstant zu wählen, würde sogar die Vermutung 4.3.2 von Honda widerlegen!

Wir beweisen eine Variante des obigen Satzes, die den hyperelliptischen Spezialfall $n = 2$ betrifft.

Satz 4.6.7 *Sei* k *ein endlich erzeugter Hilbert-Körper und* $\mathrm{char}(k) \neq 2$. *Sei* $K = k(T)$. *Sei* $f(X) \in k[X]$ *ein normiertes Polynom von ungeradem Grad* $d \geq 2$, *das über* $\overline{k}$ *in ein Produkt*

$$f(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_d)$$

paarweise verschiedener Linearfaktoren zerfällt, wobei alle a_i *in* $\overline{k}^\times$ *liegen. Sei* $f_r(X) := f(X^{3^r})$. *Dann gilt* $f_r(X) \in \mathrm{Zul}^+(k,2)$ *für alle* r *und für den Rang des generischen Eigentwists von* $C_{f_r,2}$ *gilt die Ungleichung*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f_r,2,K}^{f_r(T)}(K)) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,2}, J_{f_r,2})) \geq r.}$$

Beweis: Wir bemerken vorab, dass

$$f_r(X) = \prod_{i=1}^{d} \prod_{\zeta \in \mu_{3^r}} (X - \zeta \sqrt[3^r]{a_i})$$

ein Polynom vom Grad $3^r d$ ist, das über $\overline{k}$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt, und somit in $\mathrm{Zul}(k,2)$ liegt. Weil $3^r d$ ungerade ist, muss sogar $f_r \in \mathrm{Zul}^+(k,2)$ gelten nach 4.1.3. Des weiteren gilt $g(C_{f_r,2}) = \frac{1}{2}(3^r d - 1)$ nach 4.1.4 und insbesondere $g(C_{f_{r+1},2}) > g(C_{f_r,2})$ für alle r. Da offensichtlich $f_{r+1}(X) = f_r(X^3)$ gilt, muss X^3 in $\mathrm{Zul}^*_{f_r}(k,2)$ liegen, und nach 4.6.5 folgt, dass

$$\mathrm{Mor}_k^+(C_{f_{r+1},2}, J_{f_{r+1},2}) > \mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,2}, J_{f_r,2})$$

für alle r gilt. Daraus folgt iterativ die Behauptung. □

Folgerung: *Sei die Situation des Satzes zugrunde gelegt. Sei*

$$H_r := S(C_{f_r,2}, J_{f_r,2}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f_r,2}, J_{f_r,2})).$$

Dann gilt

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f_r,2}^{f_r(t)}(k)) \geq r \quad \forall t \in H_r.}$$

$B_{f_r,n}(H_r) \subset X^r_{f_r,n}$ *sind unendliche Mengen.*

Beweis: Man kombiniere den Satz mit 4.5.6. □

4.7 Bemerkungen zum primzyklischen Fall

Sei k ein endlich erzeugter Hilbert-Körper. Für den ganzen Abschnitt sei n **prim** und von $\mathrm{char}(k)$ verschieden. k **enthalte die n-ten Einheitswurzeln**. Man beachte, dass dann für $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$ die Überlagerung $C_{f,n} \to \mathbb{P}_1$ galoissch ist, und ein Isomorphismus

$$\rho_{f,n} : \mu_n \to \mathrm{Aut}(C_{f,n}|\mathbb{P}_1)$$

besteht.

Wir diskutieren in diesem Abschnitt einige Bemerkungen, die diesen Spezialfall betreffen. Zunächst beobachten wir, dass für $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$ der Endomorphismenring von $J_{f,n}$ eine Kopie des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ enthält, und folgern, dass alle Ränge durch $n-1$ teilbar sind. Insbesondere hat $C_{f,n}$ im Fall $g(C_{f,n}) \geq 1$ unendlich viele Twists vom Rang $\geq n-1$. Dann beweisen wir eine Formel, die $\mathrm{rg}(J_{f,n})(E)$ als Summe von Rängen gewisser Twists ausdrückt, wenn $E|k$ eine Kummererweiterung vom Exponent n ist. Dies stellt eine unmittelbare Verbindung zu den Ergebnissen in Kapitel 3 zur Frage von Frey und Jarden her.

Satz 4.7.1 *Sei $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$. Es gelte $g_{C_{f,n}} \geq 1$. Sei $\zeta_n := \exp(\frac{2\pi i}{n}) \in \mathbb{C}^\times$. Sei $z_n \in k^\times$ eine primitive, n-te Einheitswurzel. Der kanonische Homomorphismus*

$$i : \mathbb{Z}[\zeta_n] = \frac{\mathbb{Z}[u]}{1+u+\cdots+u^{n-1}} \to \mathrm{End}_k(J_{f,n}),\ u \mapsto \rho_{f,n}(z_n)_*$$

ist ein Monomorphismus. Wir identifizieren im Folgenden manchmal $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ mit dem entsprechenden Unterring von $\mathrm{End}_k(J_{f,n})$.

Beweis: Wir betrachten den Homomorphismus

$$i_0 : \mathbb{Z}[u] \to \mathrm{End}_k(J_{f,n}), u \mapsto \rho_{f,n}(z_n)_*.$$

Sei $p := p_{f,n} : C_{f,n} \to \mathbb{P}_1$ die Projektion. Dann ist

$$p^* \circ p_* = \sum_{z \in \mu_n} \rho_{f,n}(z)_*$$

die Multiplikation mit dem Spurelement nach 4.6.1, und wegen $J_{\mathbb{P}_1} = 0$ muss $p^* \circ p_* = 0$ gelten. Daher gilt $1 + u + \cdots + u^{n-1} \in \ker(i_0)$. Wäre $\ker(i_0) \neq (1+u+\cdots+u^{n-1})$, so wäre $\frac{\mathbb{Z}[u]}{\ker(i_0)}$ ein endlicher Ring, im Widerspruch zu der wohlbekannten Injektivität von $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}_k(J_{f,n})$. Daher gilt $\ker(i_0) = (1 + u + \cdots + u^{n-1})$ und die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung: Sei $D \in k^\times$. Dann gilt $J^D_{f,n} = J_{D^{-1}f,n}$ und somit enthält auch $\mathrm{End}_k(J^D_{f,n})$ eine Kopie von $\mathbb{Z}[\zeta_n]$.

Folgerung:

1. *Wenn in obiger Situation $D \in k^\times$ gilt, dann ist $J^D_{f,n}(k)$ ein $\mathbb{Z}[\zeta_n]$-Modul und $J^D_{f,n}(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ein $\mathbb{Q}[\zeta_n]$-Vektorraum. Daher ist der Rang von $J^D_{f,n}(k)$ durch $n-1$ teilbar.*

2. *Sei $K := k(T)$ mit einer Unbestimmten T. Wendet man obige Aussagen mit K statt k an, so erhält man, dass für $D(T) \in \mathrm{Zul}(k,n)$ der Rang $\mathrm{rg}(J^{D(T)}_{f,n,K}(K))$ des entsprechenden generischen Twists durch $n-1$ teilbar ist.*

3. *Wenn $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$ gilt, dann muss für den Rang des generischen Eigentwists*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J^{f(T)}_{f,n,K}(K)) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}^+_k(C_{f,n}, J_{f,n})) \geq n-1}$$

gelten.

Folgerung: *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Dann gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(C^{f(t)}_{f,n}(k)) \geq n-1}$$

für alle $t \in S(C_{f,n}, J_{f,n}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f,n}, J_{f,n}))$.

Wir werden nun zeigen, dass sich $\mathrm{rg}(J_{f,n}(E))$ als Summe von Rängen von geeigneten Twists ausdrücken läßt, wenn $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$ gilt, und $E|k$ eine endliche Kummererweiterung vom Exponent n ist. Dies deckt zum einen Berührpunkte mit der Frage von Frey und Jarden auf, und wird zum anderen im nächsten Abschnitt bei der Konstruktion geeigneter generischer Twists hyperelliptischer Kurven eine zentrale Rolle spielen. Wir werden den folgenden, wohlbekannten Sachverhalt verwenden.

Proposition 4.7.2 *Sei G eine endliche, abelsche Gruppe vom Exponent n und R ein Integritätsring mit Quotientenkörper K der Charakteristik Null. $R^\times$ enthalte eine zyklische Untergruppe der Ordnung n. Sei M ein $R[G]$-Modul. Sei $X := \mathrm{Hom}(G, R^\times[n])$. Dann sind Kern und Kokern des kanonischen Morphismus*

$$i : \bigoplus_{\chi \in X} M^\chi \to M$$

n-Torsion, wenn M^χ den zu χ gehörenden Eigenraum bedeutet.

Satz 4.7.3 *Sei $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Sei $E|k$ eine endliche, abelsche Galois-Erweiterung vom Exponent n und*

$$\hat{G}_{E|k} := H^1(G_{E|k}, \mu_n) = \mathrm{Hom}(G_{E|k}, \mu_n).$$

Dann sind der Kern und Kokern *des kanonischen Homomorphismus*

$$\boxed{\bigoplus_{\xi \in \hat{G}_{E|k}} J_{f,n}(E)^\xi \to J_{f,n}(E)}$$

n-Torsion.

Beweis: Sei $R = \mathbb{Z}[\zeta_n]$. Dann ist $J_{f,n}(E)$ ein $R[G_{E|k}]$-Modul (vgl. 4.7.1) und die Behauptung folgt mit 4.7.2. $\square$

Folgerung: *Sei die Situation des obigen Satzes zugrunde gelegt und $\Delta = \frac{k^\times \cap E^{\times n}}{k^{\times n}}$. Dann besteht ein Isomorphismus*

$$\boxed{\bigoplus_{D \in \Delta} J_{f,n}^D(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong J_{f,n}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.}$$

Insbesondere gilt die Rangformel

$$\boxed{\sum_{D \in \Delta} \mathrm{rg}(J_{f,n}^D(k)) = \mathrm{rg}(J_{f,n}(E)).}$$

Beweis: Sei $\xi_D(\sigma) := \sqrt[n]{D}^{\sigma - 1}$ für $\sigma \in G_k$. Dann ist nach der Kummertheorie

$$\Delta \to H^1(G_k, \mu_n),\ D \mapsto \xi_D$$

ein Isomorphismus. Des weiteren gilt $J_{f,n}(E)^{\xi_D} \cong J_{f,n}^D(k)$ für alle $D \in \Delta$ nach 4.2.3. Daher gilt

$$\bigoplus_{D\in\Delta} J_{f,n}^D(k) \cong \bigoplus_{\xi\in\hat{G}_{E|K}} J_{f,n}(E)^{\xi}.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus obigem Satz 4.7.3. □

An dieser Stelle zeigen sich deutliche **Berührpunkte mit der Frage von Frey und Jarden.** Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$, $g(C_{f,n}) \geq 1$ und $\Omega|k$ die maximale Kummererweiterung vom Exponent n. Dann ist nach obiger Folgerung die Aussage, dass $J_{f,n}(\Omega)$ von unendlichem Rang ist, äquivalent zu der Aussage 4.4.2, dass es unendlich viele Twists vom Rang ≥ 1 gibt.

4.8 Hyperelliptische Kurven

Sei k ein endlich erzeugter Hilbert-Körper und $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Sei T eine Unbestimmte und $K := k(T)$. Wir werden in diesem Abschnitt den Spezialfall hyperelliptischer Kurven genauer untersuchen.

Proposition 4.8.1 *Sei $f \in \mathrm{Zul}(k,2)$, $g(C_{f,2}) \geq 1$ und $D \in k^\times \setminus k^{\times 2}$. Dann gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,2}^D(k)) + \mathrm{rg}(J_{f,2}(k)) = \mathrm{rg}(J_{f,2}(k(\sqrt{D}))).}$$

Beweis: $\frac{k(\sqrt{D})^{\times 2}\cap k^\times}{k^{\times 2}}$ ist nun eine 2-elementige, von D erzeugte Gruppe. Die Behauptung folgt mit der Folgerung zu 4.7.3. □

Folgerung: *Sei die Situation obiger Proposition zugrunde gelegt und $D(T) \in \mathrm{Zul}(k,2)$. Dann gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{D(T)}(K)) + \mathrm{rg}(J_{f,2}(K)) = \mathrm{rg}(J_{f,2}(K(\sqrt{D(T)}))).}$$

Beweis: Dafür hat man nur die Proposition mit K statt k anzuwenden. □

Proposition 4.8.2 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k,2)$ und $g \in \mathrm{Zul}_f(k,2)$.*

1. *Für den Rang des entsprechenden generischen Twists gilt*

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,2}, J_{f,2})) = \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f\circ g(T)}(K)) = \mathrm{rg}\left(\frac{\mathrm{Mor}_k(C_{f\circ g,2}, J_{f,2})}{J_{f,2}(k)}\right).$$

2. *Wenn g in $\mathrm{Zul}_f^+(k,2)$ liegt, dann gilt*

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\mathrm{Mor}_k(C_{f\circ g,2}, J_{f,2})}{J_{f,2}(k)}\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{Hom}_k(J_{f\circ g,2}, J_{f,2})).$$

3. *Für den Rang des generischen Eigentwists gilt*

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f,2}, J_{f,2})) = \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K)) = \mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})).$$

4. *Es gilt* $\mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f\circ g(T)}(K)) \geq \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K))$.

Beweis:

1. Die Gleichung $\mathrm{rg}(\mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,2}, J_{f,2})) = \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f\circ g(T)}(K))$ folgt mit 4.5.5. Die obige Folgerung zu 4.8.1 liefert

$$\mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f\circ g(T)}(K)) = \mathrm{rg}\left(\frac{J_{f,2}(R(C_{f\circ g,2}))}{J_{f,2}(K)}\right).$$

   Des weiteren gilt

$$J_{f,2}(R(C_{f\circ g,2})) \cong \mathrm{Mor}_k(C_{f\circ g,2}, J_{f,2}),$$

   denn jede rationale Abbildung von einer projektiven, glatten Kurve in eine abelsche Varietät ist überall definiert. Schließlich gilt

$$J_{f,2}(K) \cong \mathrm{Mor}_k(\mathbb{P}_1, J_{f,2}) = J_{f,2}(k),$$

   denn jeder Morphismus von $\mathbb{P}_1$ in eine abelsche Varietät ist konstant. (Die Albanese-Varietät $J_{\mathbb{P}_1}$ ist ja Null.) Daraus folgt die Behauptung.

2. Dies ist nur die universelle Eigenschaft von $J_{f\circ g,n}$ als Albanese-Varietät von $C_{f\circ g,n}$. Man beachte, dass nach Voraussetzung $C_{f\circ g,n}(k) \neq \emptyset$ gilt.

3. Man wende 1. und 2. im Sonderfall $g(T) = T$ an.

4. Siehe 4.5.6.

□

Folgerung: *Sei* $f \in \mathrm{Zul}^+(k,2)$ *mit* $g(C_{f,2}) \geq 1$. *Dann gilt für alle* $t \in H := S(C_{f,2}, J_{f,2}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f,2}, J_{f,2}))$

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,2}^{f(t)}(k)) \geq \mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})).}$$

Sei $r := \mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$. *Dann sind* $B_{f,2}(H) \subset X_{f,2}^r$ *unendliche Mengen.*

Beweis: Man kombiniere obige Proposition mit 4.5.6. □

Wir wissen also, dass der Rang des generische Eigentwist einer jeden hyperelliptischen Kurve positiven Geschlechtes mit dem Rang ihres Endomorphismenringes übereinstimmt. **Ziel dieses Abschnittes** ist die Konstruktion hyperelliptischer Kurven $C_{f,2}$ ($f \in \mathrm{Zul}^+(k,2)$) derart, dass für ein geeignetes $g \in \mathrm{Zul}_f(k,2)$ sogar

$$\mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f\circ g(T)}(K)) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$$

gilt. Dies ist wesentlich schwieriger.

Proposition 4.8.3 *Sei* $f \in \mathrm{Zul}^+(k,2)$ *mit* $g(C_{f,2}) \geq 1$ *und* $g \in \mathrm{Zul}_f(k,2)$. *Sei* $h(T) \in \mathrm{Zul}(k,2)$. *Es möge*

$$f \circ g(T) = h(T)f(T) \mod K^{\times 2}$$

gelten. Dann gilt

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K(\sqrt{h(T)}))) = \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K)) + \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f\circ g(T)}(K)) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})).}$$

Beweis: Nach 4.8.1 gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K(\sqrt{h(T)})) &= \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K)) + \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)h(T)}(K)) \\ &= \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K)) + \mathrm{rg}(J_{f,2}^{f\circ g(T)}(K))\end{aligned}.$$

4.8.2 liefert

$$\mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K)) + \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f\circ g(T)}(K)) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})).$$

□

Satz 4.8.4 *Wenn in der Situation obiger Proposition* $h(T) = aT+b$ *ein lineares Polynom ist, dann gilt*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(a^{-1}(T^2-b))}(K)) &= \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f(T)}(K)) + \mathrm{rg}(J_{f,2,K}^{f\circ g(T)}(K)) \\ &\geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})).\end{aligned}}$$

Beweis: Sei u eine Unbestimmte. Weil $\sqrt{aT+b}$ transzendent über k ist, existiert ein k-Monomorphismus

$$\alpha : k(u) \to k(T, \sqrt{aT+b}) \text{ mit } \alpha(u) = \sqrt{aT+b}.$$

Da $\alpha(a^{-1}(u^2-b)) = T$ gilt, muss α ein Isomorphismus sein. Wegen

$$\alpha(f(a^{-1}(u^2-b))) = f(T)$$

gilt

$$J_{f,2,K}^{f(T)}(K(\sqrt{h(T)})) \cong J_{f,2,k(u)}^{f(a^{-1}(u^2-b))}(k(u)).$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus obiger Proposition 4.8.3. □

Der folgende Satz dient dazu, Polynome $f(T)$ zu konstruieren, für welche ein $g(T) \in K$ und ein *lineares Polynom* $h(T)$ mit $f \circ g(T) = h(T)f(T) \mod K^{\times 2}$ existieren.

Satz 4.8.5 *Sei* $0 \neq f(T) \in k[T]$ *ein normiertes Polynom, das über* $\overline{k}$ *in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Seien* $a_1, \cdots, a_m \in \overline{k}$ *paarweise verschieden mit*

$$f(T) = (T-a_1)\cdots(T-a_m).$$

Sei $N := \{a_1, \cdots, a_m\} \subset \mathbb{P}_1(\overline{k})$. Seien $a, b, c, d \in k$ mit $ad - bc \neq 0$ und $c \neq 0$. Sei

$$g(T) := \frac{aT + b}{cT + d}.$$

$g(T)$ permutiere die Nullstellen von f, d.h. die von $g(T)$ induzierte Abbildung $g : \mathbb{P}_1(\overline{k}) \to \mathbb{P}_1(\overline{k})$ möge $g(x) \in N$ für alle $x \in N$ erfüllen. Dann gilt

$$\boxed{f \circ g(T)) = f\left(\tfrac{a}{c}\right)\left(T + \tfrac{d}{c}\right)^{-m} f(T).}$$

Beweis: Wir dürfen o.E. $k = \overline{k}$ annehmen. Wir fassen g als Automorphismus $\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ auf. Wir berechnen den Hauptdivisor von $f \circ g(T)$.

$$\begin{aligned} div(f \circ g(T)) &= g^*(div(f)) = g^*(\textstyle\sum_i a_i - m\infty) = \\ &= \textstyle\sum_i g^{-1}(a_i) - mg^{-1}(\infty) = \sum_i a_i - m\frac{-d}{c}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$f \circ g(T) = \left(T + \frac{d}{c}\right)^{-m} f(T) \mod k^\times.$$

Des weiteren gilt $f(g(\infty)) = f(\frac{a}{c})$ und $\left(T + \frac{d}{c}\right)^{-m} f(T)$ nimmt bei ∞ wegen der Normiertheit von $f(T)$ den Wert 1 an. Daher haben beide Seiten der zu beweisenden Gleichung den selben Hauptdivisor und den selben Wert in ∞. $\square$

Bemerkung: Wenn in der Situation des obigen Satzes $\deg(f) = m$ ungerade und ≥ 3 ist, so gilt

$$\boxed{f \circ g(T) = f\left(\tfrac{a}{c}\right)\left(T + \tfrac{d}{c}\right) f(T) \mod K^{\times 2}.}$$

Sei ab jetzt überdies $a_1 \in k$ vorausgesetzt. Dann liegt $f(T)$ in $\mathrm{Zul}^+(k, 2)$, $g(T)$ in $\mathrm{Zul}^+_f(k, 2)$ und es gilt $g(C_{f,2}) \geq 1$. Sei $\alpha := f(\frac{a}{c})$ und $\beta := f(\frac{a}{c})\frac{d}{c}$. Dann liefert 4.8.4

$$\boxed{\mathrm{rg}(J^{f(\alpha^{-1}(T^2-\beta))}_{f,2,K}(K)) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})).}$$

Satz 4.8.6 *Sei $g : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ ein k-Automorphismus der Ordnung 2 (in der Automorphismengruppe von $\mathbb{P}_1$). g habe in ∞ keinen Pol. $a \in k$ sei ein Fixpunkt von g. Sei $t \geq 2$. Seien $a_1, \cdots, a_t \in k$ mit*

$$g(a_i) \notin \{a_i, \infty\} \cup \{g(a_j) | j \neq i\}.$$

Sei

$$\boxed{f(T) := (T - a)(T - a_1)(T - g(a_1)) \cdots (T - a_t)(T - g(a_t)).}$$

Sei $\alpha := f \circ g(\infty)$ und $-\beta := f \circ g(\infty) g^{-1}(\infty)$ Dann gilt:

$$\boxed{\mathrm{rg}(J^{f(\alpha^{-1}(T^2-\beta))}_{f,2,K}(K) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})).}$$

Beweis: g ist als Automorphismus von $\mathbb{P}_1$ von der Form $g(T) = \frac{aT+b}{cT+d}$ mit $ad - bc \neq 0$. Wegen $g(\infty) \neq \infty$ muss $c \neq 0$ gelten. g permutiert offenbar die Nullstellen von f und $\deg(f) \geq 3$ ist ungerade. Ferner gilt $\alpha = f \circ g(\infty) = f\left(\frac{a}{c}\right)$ und $\beta = -f \circ g(\infty) g^{-1}(\infty) = f\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{d}{c}\right)$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Bemerkung zu 4.8.5. □

Folgerung: *Sei die Situation des Satzes zugrunde gelegt. Sei* $h(t) := \alpha^{-1}(T^2 - \beta))$. *Dann gilt für alle* $t \in H := S(J_{f\circ h,2}, J_{f,2}, \mathrm{Mor}_k^+(J_{f\circ h,2}, J_{f,2}))$

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,2}^{f\circ h(t)}(k)) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})) =: r.}$$

$B_{f\circ h,2}(H) \subset X_{f,2}^r$ *sind unendliche Mengen.*

Wir wenden den Satz im Spezialfall $g(T) = T^{-1}$ an, um ein völlig explizites Beispiel zu bekommen.

Satz 4.8.7 *Sei* $t \geq 1$. *Seien* $a_1, \cdots a_t \in k \setminus \{0, 1, -1\}$ *paarweise verschieden. Es gelte* $a_i^{-1} \neq a_j$ *für alle* $1 \leq i, j \leq t$. *Sei*

$$\boxed{f(T) := (T-1)(T-a_1)(T-a_1^{-1}) \cdots (T-a_t)(T-a_t^{-1}).}$$

Dann gilt $f(T^{-1}) = -Tf(T) \mod k(T)^{\times 2}$. *Ferner gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_f^{f(-T^2)}(K) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_f)).}$$

Beweis: Dies ist eine unmittelbare Konsequenz von 4.8.6. □

Folgerung: *Sei die Situation des Satzes zugrunde gelegt. Dann gilt für alle* $t \in H := S(J_{f\circ(-T^2),2}, J_{f,2}, \mathrm{Mor}_k^+(J_{f\circ(-T^2),2}, J_{f,2}))$

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,2}^{f(-t^2)}(k)) \geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2})) =: r.}$$

$B_{f\circ(-T^2),2}(H) \subset X_{f,2}^r$ *sind unendliche Mengen.*

4.9 Asymptotische Formeln

Ab jetzt sei k ein globaler Körper, d.h. eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ oder von $\mathbb{F}_q(t)$. Wir kommen mit der schwächeren Voraussetzung, dass k ein endlich erzeugter Hilbert-Körper sein soll, im Folgenden nicht mehr aus. Sei $n \geq 2$ zu $\mathrm{char}(k)$ teilerfremd. Sei T eine Unbestimmte und $K := k(T)$. Wir wollen nun asyptotische Aussagen analog zu den Aussagen in 4.3.1 beweisen. Für $f \in \mathrm{Zul}^+(k, n)$ mit $g(C_{f,n}) \geq 1$ und $g \in \mathrm{Zul}_f(k, n)$ haben wir in 4.5.6 gezeigt, dass

$$\mathrm{rg}(J_{f,n}^{f\circ g(t)}(k)) \geq \mathrm{rg}(J_{f,n,K}^{f\circ g(T)}(K))$$

für alle $t \in H := S(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}))$ gilt. Wir wissen des weiteren, dass $H \subset \mathbb{P}_1(k)$ eine Hilbert-Menge ist. In diesem Abschnitt werden wir (unter Verwendung unserer Voraussetzung an k) zeigen, dass $\mathbb{P}_1(k) \setminus H$ sogar eine endliche Menge ist. Dies wird im Beweis der asymptotischen Aussagen eine zentrale Rolle spielen. Unser Beweis stützt sich massiv auf den Spezialisierungssatz von Silverman, den wir in einer durch B. Conrad verallgemeinerten Form angeben.

Satz 4.9.1 (Silverman, Conrad) *Sei X eine projektive, glatte k-Kurve und A eine abelsche Varietät über k. Sei $\Lambda \subset \mathrm{Mor}_k(X, A)$ eine Untergruppe, für die $\Lambda \cap A(k)$ Torsion ist. Sei für $u \in X(\overline{k})$*

$$\eta_u : \mathrm{Mor}_k(X, A) \to A(\overline{k}),\ f \mapsto f(u)$$

die Spezialisierungsabbildung. Dann ist

$$\Sigma = \{u \in X(\overline{k}) \,|\, \ker(\eta_u) \cap \Lambda \neq 0\}$$

eine Menge von Punkten beschränkter Höhe.

Beweis: Siehe [La] und [S83] für uns hauptsächlich interessierenden Fall, in dem k ein Zahlkörper ist. Der allgemeine Fall wird in [C04] behandelt. □

Folgerung: *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(n, k)$ und $g \in \mathrm{Zul}_f(n, k)$. Dann ist*

$$|\mathbb{P}_1(k) \setminus S(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}))| < \infty.$$

.

Beweis: Sei $S := S(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f,n}))$, $p : C_{f\circ g,n} \to \mathbb{P}_1$ die Projektion und $\Lambda := \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J_{f,n})$. Per Definition gilt dann

$$\begin{aligned} S = \quad & \{t \in D_{f\circ g}(k) | \\ & \forall Q \in C_{f\circ g,n}(k^s) : p(Q) = t \implies \ker(\eta_Q) \cap \Lambda = \{0\}\}. \end{aligned}$$

Nach 4.6.2 ist $\Lambda \cap J_{f,n}(k)$ n-Torsion. Nach dem Satz von Silverman und Conrad gibt es eine Menge $M \subset C_{f\circ g,n}(k^s)$ beschränkter Höhe derart, dass $\ker(\eta_Q) \cap \Lambda = 0$ für $Q \in C_{f\circ g,n}(k^s) \setminus M$ gilt. Wäre $\mathbb{P}_1(k) \setminus S$ unendlich, so gäbe es eine Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{P}_1(k)$ derart, dass $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ gilt und für jedes i ein $c_i \in C_{f\circ g,n}(k^s)$ existiert, mit $p(c_i) = t_i$ und $c_i \in M$. Dann würde $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$ und $[k(c_i) : k] = m$ für alle i gelten. $\{c_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ wäre dann eine Menge beschränkter Höhe und beschränkten Grades und somit endlich. Widerspruch. □

Wir setzen im Folgenden

$$\boxed{S^c(f, g, n) := \mathbb{P}_1(k) \setminus S(C_{f\circ g,n}, J^k_{f,n}, \mathrm{Mor}_k^+(C_{f\circ g,n}, J^k_{f,n}))}.$$

Dies ist eine *endliche* Menge, welche *die Null- und Polstellen von $f \circ g$ enthält.*

Satz 4.9.2 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(k, n)$, $g \in \mathrm{Zul}_f(k, n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Dann gilt*

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_{f,n}^{f\circ g(t)}(k)) \geq \mathrm{rg}(J_{f,n,K}^{f\circ g(T)}(K)) \quad \forall t \in \mathbb{P}_1(k) \setminus S^c(f, g, n).}$$

Beweis: Man kombiniere obige Folgerung mit 4.5.6. $\square$

Sei nun $k = \mathbb{Q}$. Wir nennen eine Zahl $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ **n-frei** genau dann, wenn $v_p(x) \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ für alle Primzahlen p gilt. Sei für $z \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{Zul}^+(\mathbb{Q}, n)$

$$\boxed{M^r_{f,n}(z) := |\{d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : d\ n\text{-frei}, |d| \leq z, \mathrm{rg}(J^d_{f,n}(\mathbb{Q})) \geq r\}.}$$

Wir wollen das asymptotische Verhalten von $M^r_{f,n}(z)$ untersuchen.

Sei des weiteren

$$\boxed{\pi_n : \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Q}^\times / n}$$

die Projektion und

$$\boxed{B_{f,n} := B_{f,n}(D_f(\mathbb{Q})) = \{\pi_n(f(x)) \,|\, x \in D_f(k)\}}$$

das Bild von f modulo $\mathbb{Q}^{\times n}$. Sei

$$\boxed{M'_{f,n}(z) := |\{d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \,|\, d\ n\text{-frei}, |d| \leq z, \pi_n(d) \in B_{f,n}\}|}$$

Man beachte, dass $M'_{f,n}(z)$ überhaupt nichts mehr mit Rängen von Jacobi-Varietäten zu tun hat.

Satz 4.9.3 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(\mathbb{Q}, n)$, $g \in \mathrm{Zul}_f(\mathbb{Q}, n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Sei*

$$r := \mathrm{rg}(J^{f \circ g(T)}_{f,n,\mathbb{Q}(T)}(\mathbb{Q}(T))).$$

Dann gilt

$$\boxed{M^r_{f,n}(z) \gg M'_{f \circ g}(z) \ \text{ für } z \to \infty.}$$

Beweis: Nach 4.9.2 gilt

$$M^r_{f,n}(z) \geq M'_{f \circ g, n}(z) - |S^c(f, g, n)|$$

und dies impliziert die Behauptung, da $|S^c(f, g, n)|$ endlich und unabhängig von z ist. $\square$

Über das asymptotische Verhalten von $M'_{f,n}$ gibt es nun Ergebnisse von Stewart und Top, die wir im Folgenden zitieren.

Ist $f \in \mathrm{Zul}(\mathbb{Q}, n)$ ein *n-freies Polynom vom Grad ≥ 2* so setzen wir im Folgenden

$$\boxed{\varepsilon_{f,n} = 2 \min(\{m \in \mathbb{N} | n \text{ teilt } m,\ \deg(f) \leq m\})^{-1}.}$$

Ferner sei

$$\boxed{\mathrm{st}_{f,n}(z) := \begin{cases} z^{\epsilon_{f,n}} & f \text{ zerfällt über } k \text{ in paarweise verschiedene Linearfaktoren und } n = 2, \\ z^{\epsilon_{f,n}} & f \text{ zerfällt über } k \text{ in paarweise verschiedene Linearfaktoren und } \deg(f) \text{ teilt } n, \\ z^{\epsilon_{f,n}} \log(z)^{-2} & \text{sonst.} \end{cases}}$$

Satz 4.9.4 (Stewart und Top) *In obiger Situation gilt*

$$\boxed{M'_{f,n}(z) \gg \mathrm{st}_{f,n}(z) \quad \text{für } z \to \infty.}$$

Beweis: Siehe [ST95]. □

Der Einfachheit halber haben wir das Ergebnis von Stewart und Top nicht in größtmöglicher Schärfe formuliert. Für $f \in \mathrm{Zul}(\mathbb{Q}|\mathbb{P}_1, n)$ mit $g(C_{f,n}) \geq 1$ existiert ein n-freies Polynom h derart, dass $f = h \mod \mathbb{Q}(T)^{\times n}$ gilt. Dann ist $C_{f,n} \cong C_{h,n}$ und wegen $g(C_{f,n}) \geq 1$ muss h mindestens Grad 2 haben nach A.5. Wir setzen dann $\varepsilon_{f,n} := \varepsilon_{h,n}$ und $\mathrm{st}_{f,n}(z) := \mathrm{st}_{h,n}(z)$. Wir können nun den zentralen Satz über das asymptotische Verhalten von $M^r_{f,n}$ aussprechen.

Satz 4.9.5 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(\mathbb{Q}, n)$, $g \in \mathrm{Zul}_f(\mathbb{Q}, n)$ und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Sei*

$$r := \mathrm{rg}(J^{f\circ g(T)}_{f,n,\mathbb{Q}(T)}(\mathbb{Q}(T))).$$

Dann gilt

$$\boxed{M^r_{f,n}(z) \gg \mathrm{st}_{f\circ g}(z) \gg z^{\epsilon_{f\circ g,n}} \log(z)^{-2} \ \text{ für } z \to \infty.}$$

Beweis: Man kombiniere das Ergebnis 4.9.4 von Stewart und Top mit 4.9.3. □

In den vorigen Abschnitten haben wir diverse Konstruktionen von geeigneten generischen Twists durchgeführt. Wir kombinieren nun obigen Satz mit diesen Ergebnissen. Den entstehenden Satz kann man gleichzeitig als eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieses Kapitels ansehen.

Satz 4.9.6

1. *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(\mathbb{Q}, n)$ beliebig und $g(C_{f,n}) \geq 1$. Dann gilt*

   $$r := \mathrm{rg}(J^{f(T)}_{f,n,\mathbb{Q}(T)}(\mathbb{Q}(T))) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mor}^+_{\mathbb{Q}}(C_{f,n}, J_{f,n})) \geq 1.$$

   Ferner gilt

   $$M^r_{f,n}(z) \gg st_{f,n}(z) \gg z^{\epsilon_{f,n}} \log(z)^{-2}.$$

2. *Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $d \geq 2$, das über $\overline{\mathbb{Q}}$ in ein Produkt*

   $$f(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_d)$$

   paarweise verschiedener Linearfaktoren zerfällt, wobei alle a_i in $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ liegen. Sei $f_r(X) := f(X^{2^r})$. Wenn n zu $2d$ teilerfremd und r beliebig ist, oder wenn $a_1 \in \mathbb{Q}^{\times 2^R}$ und $r \leq R$ gilt, dann gilt

   $$M^r_{f_r,n}(z) \gg \mathrm{st}_{f_r,n}(z) \gg z^{\epsilon_{f_r,n}} \log(z)^{-2}.$$

3. *Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein normiertes Polynom von ungeradem Grad $d \geq 2$, das über $\overline{\mathbb{Q}}$ in ein Produkt*

   $$f(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_d)$$

   paarweise verschiedener Linearfaktoren zerfällt, wobei alle a_i in $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ liegen. Sei $f_r(X) := f(X^{3^r})$. Dann gilt

   $$M^r_{f_r,2}(z) \gg \mathrm{st}_{f_r,2}(z) \gg z^{\epsilon_{f_r,2}} \log(z)^{-2}.$$

4. *Sei $f \in \mathrm{Zul}^+(\mathbb{Q},2)$ mit $g(C_{f,2}) \geq 1$. Sei $r := \mathrm{rg}(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(J_{f,2}))$. Dann gilt*

$$M^r_{f,2}(z) \gg \mathrm{st}_{f,2}(z) \gg z^{\epsilon_{f,2}} \log(z)^{-2}.$$

Wenn f ein Polynom von ungeradem Grad d ist, das über $\mathbb{Q}$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt, dann gilt

$$M^r_{f,2}(z) \gg z^{\frac{2}{d+1}}.$$

5. *Sei*

$$f(T) = (T-1)(T-2)(T-\frac{1}{2})(T-3)(T-\frac{1}{3}) \cdots (T-s)(T-\frac{1}{s})$$

mit $s \geq 1$. Sei $r := \mathrm{rg}(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(J_{f,2}))$. Dann gilt

$$M^{2r}_{f,2}(z) \gg z^{\frac{1}{2s+1}} \log(z)^{-2}.$$

Beweis:

1. Man wende obigen Satz 4.9.5 mit $g(T) = T$ an.

2. Man kombiniere obigen Satz 4.9.5 mit 4.6.6.

3. Man kombiniere 4.9.5 mit 4.6.7.

4. Die asymptotische Formel

$$M^r_{f,2}(z) \gg \mathrm{st}_{f,2}(z) \gg z^{\epsilon_{f,2}} \log(z)^{-2}$$

entsteht, wenn man 4.9.5 mit 4.8.2 verbindet. Wenn f ein Polynom ungeraden Grades ist, dann gilt per Definition $\epsilon_{f,2} = \frac{2}{d+1}$. Wenn überdies f über $\mathbb{Q}$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt, dann gilt sogar

$$\mathrm{st}_{f,2}(z) \gg z^{\frac{2}{d+1}}$$

nach 4.9.4.

5. Dies folgt aus 4.9.5 und 4.8.6.

□

Es ist interessant, unsere Ergebnisse mit den Ergebnissen 4.3.1 von Gouvêa, Mazur, Stewart, Top, Rubin und Silverberg zu vergleichen, die den elliptischen Spezialfall betreffen, in dem f ein quadratfreies Polynom vom Grad 3 und $n = 2$ ist. Nach 4.3.1 hat jede elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ unendlich viele quadratische Twists vom Rang ≥ 1, und es gibt elliptische Kurven, von denen man weiß, dass sie unendlich viele quadratische Twists vom Rang $\geq 2, 3$, bzw. 4 besitzen. Wenn wir nun superelliptische Kurven höheren Geschlechtes über einem Zahlkörper k betrachten, so beobachten wir für jedes r Familien von Twists, in denen Rang $\geq r$ unendlich oft vorkommt. Dieses Phänomen tritt auf, weil zwar

$$\mathrm{Mor}^+_k(C_{f,n}, J_{f,n}) \subset \mathrm{End}_k(J_{f,n})$$

($f \in \mathrm{Zul}^+(k,n)$) durch $4g(C_{f,n})^2$ nach oben beschränkt ist, aber doch beliebig groß werden kann, solange man nicht versucht, gleichzeitig das Geschlecht beschränkt zu halten. Im Spezialfall hyperelliptischer Kurven $f \in \mathrm{Zul}^+(2,k)$, $g(C_{f,2}) \geq 1$ beobachtet man unendlich viele quadratische Twists vom Rang $\geq \mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$ und $\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$ ist durch $4g(C_{f,2})^2$ nach oben beschränkt, kann aber wieder beliebig groß werden, solange nicht gleichzeitig das Geschlecht beschränkt wird. Von dem Spezialeffekt, dass hyperelliptische Kurven, deren Endomorphismenring groß ist, viele quadratische Twists hohen Ranges haben, können Gouvêa, Mazur et al. im Fall elliptischer Kurven *über* $\mathbb{Q}$ nicht profitieren, denn für jede elliptische Kurve $E|\mathbb{Q}$ gilt $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Z}$, *selbst wenn* E *komplexe Multiplikation hat.* Man könnte sagen: Gouvêa, Mazur et al. konzentrieren sich von vorne herein auf den schwierigsten Fall, in dem das Geschlecht Eins ist, und $k = \mathbb{Q}$ gilt. Dem Wissen des Autors nach ist nicht bekannt, ob jede elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ unendlich viele quadratische Twists vom Rang ≥ 2 hat. Wenn wir hyperelliptische Kurven höheren Geschlechtes betrachten, dann stehen wir vor der analogen Situation, dass wir derzeit *bei weitem* nicht entscheiden können, ob jede hyperelliptische Kurve $C_{f,2}$ ($f \in \mathrm{Zul}^+(k,2)$) positiven Geschlechtes unendlich viele quadratische Twists vom Rang $\geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$ hat. Dennoch ist es uns gelungen, für manche $f \in \mathrm{Zul}^+(k,2)$ zu zeigen, dass $C_{f,2}$ sogar einen generische Twist vom Rang $\geq 2\mathrm{rg}(\mathrm{End}_k(J_{f,2}))$, und somit auch unendlich viele Twists von mindestens diesem Rang, besitzt.

Anhang A

Superelliptische Kurven

Sei k ein Körper, $S|k$ eine glatte Kurve und n nicht durch die Charakteristik von k teilbar. Dann ist $R(S)|k$ eine reguläre Körpererweiterung und $R(S) \otimes_k \overline{k} = R(S)\overline{k}$ ist ein Körper, der mit $R(S_{\overline{k}})$ identifiziert werden kann. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$ die Menge der $f \in R(S)^\times$, die so beschaffen sind, dass das Polynom $Y^n - f \in R(S_{\overline{k}})[Y]$ ein Primelement des Hauptidealringes $R(S_{\overline{k}})[Y]$ ist.

Sei $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$. Dann ist

$$R(S)[\sqrt[n]{f}] := \frac{R(S)[Y]}{Y^n - f}$$

ein regulärer Erweiterungskörper von k, denn

$$R(S)[\sqrt[n]{f}] \otimes_k \overline{k} = \frac{R(S_{\overline{k}})[Y]}{Y^n - f}$$

ist nach Voraussetzung ein Körper. Wegen unserer Voraussetzung, dass $\mathrm{char}(k)$ kein Teiler von n sein soll, ist $R(S)[\sqrt[n]{f}]|R(S)$ separabel. Sei $S[\sqrt[n]{f}]$ die Normalisierung von S in $R(S)[\sqrt[n]{f}]$ und $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ die Projektion. Dann ist p endlich. Für jede offene, affine Teilmenge $U = \mathrm{Spec}(A) \subset S$ gilt $p^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(B)$, wenn B die Normalisierung von A in $R(S)[\sqrt[n]{f}]$ bedeutet, und B ist A-flach als torsionsfreier Modul über dem Dedekindring A. Somit ist p flach.

$S[\sqrt[n]{f}]$ ist ein separiertes, algebraisches k-Schema. Ferner ist $S[\sqrt[n]{f}]$ integer, 1-dimensional und normal, d.h. insbesondere regulär. $R(S[\sqrt[n]{f}])$ identifiziert sich mit $R(S)[\sqrt[n]{f}]$. Da dies ein regulärer Erweiterungskörper von k ist, muss $S[\sqrt[n]{f}]$ sogar geometrisch integer sein. Wir fassen zusammen:

Bemerkung: $S[\sqrt[n]{f}]$ ist eine reguläre Kurve. $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ ist endlich und flach. Ist $U \subset S$ offen, so gilt $p^{-1}(U) = U[\sqrt[n]{f}]$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass $S[\sqrt[n]{f}]$ i.a. nicht geometrisch regulär zu sein braucht.

Beispiel: Sei k ein *nicht* perfekter Körper von ungerader Charakteristik p. Dann existiert ein $a \in k^\times$ mit $a \notin (k^\times)^p$. Sei $S := \mathbb{A}_1 = \mathrm{Spec}(k[X])$. Dann gilt $f(X) := X^p - a \in \mathrm{Zul}^{gi}(\mathbb{A}_1|k,2)$, denn $Y^2 - f(X)$ ist ein Primelement in

$\overline{k}(X)[Y]$. Sei $A := k[X]$, $B := \frac{A[Y]}{Y^2-f(X)}$ und y das Bild von Y in B. B ist eine integre, freie A-Algebra mit A-Basis $(1, y)$ und der Quotientenkörper von B ist $F := R(S)[\sqrt{f}]$. $(1, y)$ ist $R(S)$-Basis von F. Sei σ der Erzeuger von $G(F|R(S))$. Dann gilt $y^\sigma = -y$.

Sei $b \in F$ ganz über A. Dann gibt es $a_1, a_2 \in R(S)$ mit $b = a_1 + a_2 y$ und das Minimalpolynom $(X - b)(X - b^\sigma) = X^2 - (b + b^\sigma)X + bb^\sigma$ von $b|R(S)$ hat Koeffizienten in A. Daher gilt $2a_1 \in A$ und $a_1^2 - a_2^2 y^2 \in A$. Wegen $2 \in k^\times \subset A^\times$ folgt $a_1 \in A$ und $a_2^2 f(X) \in A$. Da f ein Primelement des Hauptidealringes A ist, muss $a_2 \in A$ gelten. Dies impliziert $b \in B$. Somit ist B gerade die Normalisierung von A in F und $S[\sqrt{f}] = \mathrm{Spec}(B)$.

Wir zeigen, dass $\mathrm{Spec}(B) \otimes_k \overline{k}$ nicht regulär ist. Es gibt ein $\omega \in \overline{k}^\times$ mit $a = \omega^p$. Offenbar gilt

$$B \otimes_k \overline{k} = \frac{\overline{k}[X]}{Y^2 - f(X)} = \frac{\overline{k}[X, Y]}{Y^2 - (X - \omega)^p}.$$

Sei $a_2 := (X - \omega)^{-\frac{p-1}{2}} \in \overline{k}(X)$ und $b := a_2 y$. Dann gilt $b^2 = (X - \omega) \in \overline{k}[X] \subset B \otimes_k \overline{k}$, d.h. b ist ganz über $B \otimes_k \overline{k}$. Des weiteren liegt b im Quotientenkörper von $B \otimes_k \overline{k}$, aber wegen $a_2 \notin \overline{k}[X]$ nicht in $B \otimes_k \overline{k}$. Daher ist $B \otimes_k \overline{k}$ nicht normal.

Wir sehen daher, dass $S[\sqrt{f}]$ eine reguläre Kurve über k ist, die nicht geometrisch regulär ist. Des weiteren sehen wir, dass $S_{\overline{k}}[\sqrt{f}]$ nicht isomorph zu $S[\sqrt{f}] \otimes_k \overline{k}$ ist. (Die eine $\overline{k}$-Kurve ist regulär und die andere nicht.) $\square$

Wir wollen derartige Situationen im Folgenden ausschließen. Sei wieder k ein Körper und n nicht durch $\mathrm{char}(k)$ teilbar. Sei $S|k$ eine glatte Kurve. Wir setzen

$$\mathrm{Zul}(S|k, n) := \{f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k, n) \mid S[\sqrt[n]{f}] \text{ ist geometrisch regulär}\}.$$

Wir nennen die Elemente von $\mathrm{Zul}(S|k, n)$ die **n-zulässigen (meromorphen) Funktionen auf** S. Sei $f \in \mathrm{Zul}(S|k, n)$. Dann ist $S[\sqrt[n]{f}]$ eine geometrisch reguläre Kurve über k. Somit ist $S[\sqrt[n]{f}] \otimes_k E$ eine geometrisch reguläre Kurve über E für jeden Erweiterungskörper $E|k$ nach [EGA, Ch. IV]. A posteriori folgt daraus, dass $f \in \mathrm{Zul}(S_E|E, n)$ und $S_E[\sqrt[n]{f}] \cong S[\sqrt[n]{f}] \otimes_k E$ für jeden Erweiterungskörper $E|k$ gilt.

Da uns hauptsächlich der Sonderfall $S = \mathbb{P}_1$ interessieren wird, setzen wir $\mathrm{Zul}(k, n) := \mathrm{Zul}(\mathbb{P}_1|k, n)$ und $\mathrm{Zul}^{gi}(k, n) := \mathrm{Zul}^{gi}(\mathbb{P}_1|k, n)$. Ist $f \in \mathrm{Zul}(k, n)$ so nennen wir $\mathbb{P}_1[\sqrt[n]{f}]$ eine **superelliptische Kurve.**

Wir wollen im Folgenden $\mathrm{Zul}(S|k, n)$ genauer untersuchen. Wichtig dafür ist der folgende wohlbekannte Satz (siehe [EGA, IV.6.5.1ff]).

Satz A.1 *Seien X und Y noethersche Schemata und $f : X \to Y$ ein flacher Morphismus. Sei $y \in Y$ ein regulärer Punkt (d.h. $\mathcal{O}_{Y,y}$ ist ein regulärer Ring) und $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wenn $f^{-1}(y)$ ein reguläres Schema ist, dann ist x ein regulärer Punkt.*

Folgerung:

1. *Ist $f : X \to Y$ ein étaler Morphismus von noetherschen Schemata und Y regulär, so ist auch X regulär. (Für $x \in X$ ist dann $f^{-1}f(x)$ ein Produkt von Körpern (die sogar endlich und separabel über $k(f(x))$ sind)).*

2. *Sei k ein Körper und $X|k$ eine reguläre Kurve. Sei $E|k$ eine algebraische Körpererweiterung. Wir betrachten die Projektion $f : X_E \to X$. Sei $x' \in X_E$ ein abgeschlossener Punkt. Wenn $k(f(x')) \otimes_k E$ reduziert (z.B. $E|k$ separabel oder $k(f(x'))|k$ separabel) ist, dann muss x' ein regulärer Punkt von X_E sein.*

3. *Sei k ein Körper und $X|k$ eine reguläre Kurve. Dann ist X_{k^s} regulär. Falls k perfekt ist, so ist $X|k$ geometrisch regulär.*

Folgerung: *Sei k ein Körper und n nicht durch $\mathrm{char}(k)$ teilbar. Sei $S|k$ eine glatte Kurve.*

1. *Für $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$ ist $S[\sqrt[n]{f}] \otimes_k k^s$ regulär.*

2. *Ist k perfekt, so ist $\mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n) = \mathrm{Zul}(S|k,n)$.*

Lemma A.2 *Sei $S = \mathrm{Spec}(A)$ eine affine, glatte Kurve "uber k und $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$. Sei $B := \frac{A[Y]}{Y^n - f}$.*

1. *Ist $f \in A^\times$, so ist die kanonische Abbildung $q : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ étale. Insbesondere ist dann $\mathrm{Spec}(B)$ geometrisch regulär.*

2. *Gilt $f \in A^\times$, so ist $\mathrm{Spec}(B)$ A-isomorph zu $S[\sqrt[n]{f}]$.*

Beweis: Wegen $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(s|k,n)$ ist

$$B \otimes_A R(S) = \frac{R(S)[Y]}{Y^n - f}$$

ein Körper. Insbesondere ist B integer mit Quotientenkörper $\frac{R(S)[Y]}{Y^n - f}$. Des weiteren ist B A-frei, denn $Y^n - f$ ist normiert. Somit ist q flach.

Wir zeigen, dass q auch unverzweigt ist, indem wir $\Omega_{B|A} = 0$ nachweisen. Sei $d : B \to \Omega_{B|A}$ die universelle Derivation. Dann ist $d(Y^n - f) = nY^{n-1}dY$. Man hat also B-Modulisomorphismen

$$\Omega_{B|A} \cong \frac{BdY}{nY^{n-1}dY} \cong \frac{A[Y]}{(Y^n - f, nY^{n-1})}.$$

Mit $n \in k^\times$ und $f \in A^\times$ folgt

$$(Y^n - f, nY^{n-1}) \supset (Y^n - f, Y^{n-1}) \supset (f) = A[Y],$$

d.h. $\Omega_{B|A} = 0$. Daher ist q étale. Mit A muss dann auch B geometrisch regulär sein. Insbesondere ist B normal und stimmt mit der Normalisierung von A in $R(S)[\sqrt[n]{f}]$ überein. □

Folgerung: *Sei k ein Körper, n nicht durch* $\mathrm{char}(k)$ *teilbar und $S|k$ eine glatte Kurve. Sei $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$ und $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ die kanonische Projektion. Sei*

$$T := \{P \in S^{cl} \,|\, v_P(f) \neq 0\}$$

und $U := S \setminus T$. Dann ist U offen und $p|p^{-1}U \to U$ ist étale. $p^{-1}U$ ist geometrisch regulär.

Bemerkung: Sei $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$ und $C := S[\sqrt[n]{f}]$. Sei $E|k$ ein Erweiterungskörper, der so beschaffen ist, dass C_E regulär ist (z.B. $E|k$ separabel oder $f \in \mathrm{Zul}(S|k,n)$).

1. Dann ist C_E S_E-isomorph zu $S_E[\sqrt[n]{f}]$.

2. Es gilt $R(C_E) = R(S_E)[\sqrt[n]{f}]$. Die Automorphismengruppe dieser Körpererweiterung $G(R(C_E)|R(S_E))$ ist kanonisch isomorph zu n-Torsionsuntergruppe $E_n^\times$ von $E^\times$. Genau dann ist $R(C_E)|R(S_E)$ galoissch, wenn E die n-ten Einheitswurzeln enthält.

3. Nach 1.2.10 hat man einen Isomorphismus

   $$\mathrm{Aut}(C_E|S_E) \cong G(R(C_E)|R(S_E)).$$

   Daraus ergibt sich eine Operation von $E_n^\times$ auf C_E. Genau dann ist $p_E : C_E \to S_E$ eine Galois-Überlagerung mit Gruppe μ_n, wenn E die n-ten Einheitswurzeln enthält.

4. Demnach ist $p_{k^s} : C_{k^s} \to S_{k^s}$ eine Galois-Überlagerung mit Gruppe $\mu_n = k_n^{s\times}$. Man sieht leicht, dass die Isomorphismen

   $$\mathrm{Aut}(C_{k^s}, S_{k^s}) \cong G(R(C_{k^s})|R(S_{k^s})) \cong \mu_n$$

   G_k-linear sind.

Satz A.3 *Sei $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(S|k,n)$. Sei*

$$T := \{P \in S^{cl} \,|\, n \text{ teilt nicht } v_P(f)\} \subset \{P \in S^{cl} \,|\, v_P(f) \neq 0\}.$$

1. *Sei $U := S \setminus T$. Dann ist $p|p^{-1}U \to U$ étale und $p^{-1}U$ ist geometrisch regulär.*

2. *Wenn für alle $P \in T$ die Körpererweiterung $k(P)|k$ separabel ist, so ist $f \in \mathrm{Zul}(S|k,n)$.*

Beweis: Sei $T' := \{P \in S^{cl} \,|\, v_P(f) \neq 0\}$ und $U' := S \setminus T'$. Dann gilt $U' \subset U$.

1. $p|p^{-1}U' \to U'$ ist étale nach obiger Folgerung. Sei $P \in U \setminus U'$. Dann ist n ein Teiler von $v_P(f)$ und $v_P(f) \neq 0$. Sei t ein lokaler Parameter in P. Sei V eine offene, affine Umgebung von P, welche so klein ist, dass $v_Q(f) = 0 = v_Q(t)$ für alle $Q \in V^{cl} \setminus \{P\}$ gilt. Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $v_P(f) = kn$. Dann gilt

$$v_P(ft^{-nk}) = v_P(f) - nkv_P(t) = 0$$

und letztendlich sogar $v_Q(ft^{-nk}) = 0$ für alle $Q \in V^{cl}$. Daher gilt

$$f(t^{-k})^n \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)^\times.$$

Ferner gilt $V[\sqrt[n]{f}] = V[\sqrt[n]{f(t^{-k})^n}]$ und das Lemma liefert, dass $p|p^{-1}V \to V$ étale ist. Insgesamt ergibt sich, dass $p|p^{-1}U \to U$ étale und $p^{-1}U$ geometrisch regulär ist.

2. Sei $C := S[\sqrt[n]{f}]$. Wir wissen aus der Folgerung zu A.1, dass C_{k^s} regulär ist und haben zu zeigen, dass $C_{k^s}|k^s$ sogar geometrisch regulär ist. Sei $q : S_{k^s} \to S$ die Projektion. Wir identifizieren f mit seinem Bild in $R(S_{k^s})$. Sei

$$\hat{T} := \{\hat{P} \in S_{k^s}^{cl} \,|\, n \text{ teilt nicht } v_{\hat{P}}(f)\}.$$

Dann gilt

$$\hat{T} = \{\hat{P} \in S_{k^s}^{cl} \,|\, q(\hat{P}) \in T\}.$$

Wegen unserer Voraussetzung, dass für $P \in T$ der Restklassenkörper $k(P)$ separabel über k sein soll, besteht $\hat{T}$ aus k_s-rationalen Punkten von S_{k^s}.

Wir dürfen demnach annehmen, dass $k = k^s$ gilt, und T aus k-rationalen Punkten von S besteht. Wir wissen, dass $p^{-1}(S \setminus T)$ geometrisch regulär ist. Sei $Q \in C$ ein beliebiger, abgeschlossener Punkt mit $p(Q) \in T$ und $Q' \in C_{\overline{k}}$ ein Punkt über Q. Es genügt zu zeigen, dass $C_{\overline{k}}$ regulär in Q' ist. Wegen $k = k^s$ gilt $\mu_n \subset k$ und $p : C \to S$ ist eine Galois-Überlagerung mit Gruppe μ_n. Nach der fundamentalen Gleichung (siehe die Bemerkung zu 1.3.3) ist $[k(Q) : k]$ ein Teiler von n. Somit ist $[k(Q) : k]$ nicht durch $\mathrm{char}(k)$ teilbar und $k(Q)|k$ muss separabel sein. Mit $k = k^s$ folgt $k(Q) = k$. Somit ist $k(Q) \otimes_k \overline{k}$ reduziert und die Folgerung zu A.1 impliziert, dass $C_{\overline{k}}$ regulär in Q' ist.

$\square$

Wir wollen mit Hilfe der Hurwitz-Formel für $f \in \mathrm{Zul}(S|k, n)$ das Geschlecht von $S[\sqrt[n]{f}]$ bestimmen. Da das Geschlecht einer geometrisch regulären Kurve eine geometrische Invariante ist, werden wir uns im Folgenden auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers beschränken.

Satz A.4 *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $S|k$ eine glatte Kurve und $f \in \mathrm{Zul}(S|k, n)$. Sei $Q \in S[\sqrt[n]{f}]^{cl}$, $p : S[\sqrt[n]{f}] \to S$ die Projektion und $P := p(Q)$. Dann gilt für den Verzweigungsindex e_Q von Q entlang p*

$$e_Q = \frac{n}{ggT(n, v_P(f))}.$$

Ist Q ein Verzweigungspunkt, so ist $\mathrm{char}(k)$ *kein Teiler von e_Q, d.h. die Verzweigung ist zahm.*

Bemerkung: Der Sonderfall, dass n ein Teiler von $v_P(f)$ ist, wurde bereits in A.3 bewiesen.

Beweis: Sei $C := S[\sqrt[n]{f}]$ und $s := |\{Q' \in C \,|\, p(Q') = P\}|$. p ist eine Galois-Überlagerung mit Gruppe μ_n, denn $\mu_n \subset k^\times$. In der fundamentalen Gleichung (siehe die Bemerkung zu 1.3.3) treten nun keine Trägheitsindizes mehr auf, da k algebraisch abgeschlossen ist. Daher gilt $e_Q s = n$. Es genügt also $s = \mathrm{ggT}(n, v_P(f))$ zu zeigen.

Wir dürfen ohne weiteres annehmen, dass $S = \mathrm{Spec}(A)$ affin ist. Sei $K := R(S)$. Dann ist $C = \mathrm{Spec}(B)$, wenn B die Normalisierung von A in $F := K[\sqrt[n]{f}]$ bedeutet. Sei $\hat{K}$ die Komplettierung von K an v_P. Ein wohlbekannter Satz aus der Verzweigungstheorie von Dedekindringen besagt, dass s gerade die Anzahl der Körper ist, in die $F \otimes_K \hat{K}$ zerfällt. Offenbar gilt

$$F \otimes_K \hat{K} = \frac{\hat{K}[Y]}{Y^n - f}$$

und $\hat{K}$ ist ein streng henselscher Ring. Der Bewertungsring von K wird mit $\hat{\mathcal{O}_{X,P}}$ bezeichnet. Jede Einheit in $\hat{\mathcal{O}_{X,P}}^\times$ ist eine n-te Potenz, denn der Restklassenkörper von $\hat{\mathcal{O}_{X,P}}$ ist algebraisch abgeschlossen. Es gibt ein $v \in \{0, \cdots, n-1\}$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $v_P(f) = v + nk$. Sei t ein lokaler Parameter in P. Dann existiert ein $u \in \hat{\mathcal{O}_{X,P}}^\times$ mit $f = t^{v_P(f)} u$. Des weiteren existiert ein $a \in \hat{K}^\times$ mit $a^n = u$, denn $\hat{K}$ hat einen algebraisch abgeschlossenen Restklassenkörper. Daher gilt $f = t^v (t^k a)^n$ und dies impliziert, dass

$$\frac{\hat{K}[Y]}{Y^n - f} \cong \frac{\hat{K}[Y]}{Y^n - t^v}$$

gilt. Sei $g := \mathrm{ggT}(n, v_P(f)) = \mathrm{ggT}(n, v)$. Es genügt nun zu zeigen, dass $Y^n - t^v$ in ein Produkt aus g (paarweise verschiedenen) irreduziblen Polynomen zerfällt.

Es gibt teilerfremde Zahlen n', v' mit $n = n'g$ und $v = v'g$. Dann gilt

$$Y^n - t^v = Y^{n'g} - t^{v'g} = \prod_{\zeta \in \mu_g} (Y^{n'} - \zeta t^{v'}),$$

und die Behauptung folgt daraus, dass für $\zeta \in \mu_g$ das Polynom $Y^{n'} - \zeta t^{v'}$ wegen $\mathrm{ggT}(v', n') = 1$ irreduzibel ist. $\square$

Satz A.5 *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und n nicht durch die Charakteristik von k teilbar. Sei $S|k$ eine glatte, projektive Kurve und $f \in$* $\mathrm{Zul}(S|k, n)$. *Sei $C := S[\sqrt[n]{f}]$ und*

$$T := \{P \in S^{cl} | n \text{ teilt nicht } v_P(f)\}.$$

Dann gilt für die Geschlechter die Formel

$$2g_C - 2 = n(2g_S - 2) + \sum_{P \in T} (n - \mathrm{ggT}(n, v_P(f)))\,.$$

Beweis: Für $Q \in C(k)$ ist der Verzweigungsindex von Q entlang p durch

$$e_Q = \frac{n}{\mathrm{ggT}(n, v_{p(Q)}(f))}$$

gegeben. Nach der fundamentalen Gleichung gibt es genau

$$n/e_Q = \mathrm{ggT}(n, v_{p(Q)}(f))$$

Punkte $Q' \in C(k)$ mit $p(Q') = p(Q)$. Daher gilt für den Verzweigungsdivisor $R := \sum_{Q \in C(k)}(e_Q - 1)Q$ von p die Formel

$$\begin{array}{rcl} \deg(R) & = & \sum_{Q \in C(k)}(e_Q - 1) = \sum_{P \in S(k)} \mathrm{ggT}(n, v_P(f))(\frac{n}{\mathrm{ggT}(n, v_P(f))} - 1) = \\ & = & \sum_{P \in S(k)}(n - \mathrm{ggT}(n, v_P(f))), \end{array}$$

und es genügt, die Summe nur über T zu erstrecken. Mit Hilfe der Hurwitz-Formel

$$2g_C - 2 = n(2g_S - 2) + \deg(R)$$

folgt die Behauptung. □

Folgerung: *Wenn in obiger Situation* $\mathrm{ggT}(n, v_P(f)) = 1$ *für alle* $P \in T$ *(z.B. n Primzahl) gilt, dann hat man die Formel*

$$g_C = ng_S + \frac{1}{2}(n-1)(|T| - 2)$$

für das Geschlecht.

Beweis: Die Formel aus dem Satz liefert in diesem Spezialfall

$$2g_C - 2 = n(2g_S - 2) + (n-1)|T|,$$

woraus sofort $2g_C = 2ng_S - 2n + 2 + (n-1)|T| = 2ng_S + (n-1)(|T| - 2)$ folgt. □

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse in dem für uns wichtigen Sonderfall $S = \mathbb{P}_1$ zusammen.

Satz A.6 *Sei k ein Körper und n nicht durch* $\mathrm{char}(k)$ *teilbar. Seien*

$$P_1(t), \cdots, P_s(t) \in k[t]$$

paarweise verschiedene, separable, *irreduzible Polynome. Seien $v_i \in \mathbb{Z}$ und*

$$f := P_1^{v_1} \cdots P_s^{v_s} \in k(t) = R(\mathbb{P}_1).$$

Für $i = 1, \cdots, s$ möge v_i nicht durch n teilbar sein. Sei U die von $(v_1, \cdots, v_s)$ erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Z}/n)^s$. Sei $v_\infty := -\sum_{i=1}^{s} v_i \deg(P_i)$. (Wenn f ein Polynom ist, dann ist $v_\infty = -\deg(f)$.)

1. *Gilt $|U| = n$, so ist $f \in \mathrm{Zul}(n,k)$. (Wenn z.B. ein v_i zu n teilerfremd, dann gilt $f \in \mathrm{Zul}(n,k)$.)*

2. Gelte $|U| = n$. Sei $C := \mathbb{P}_1[\sqrt[n]{f}]$. Dann gilt

$$2g_C - 2 = -2n + (n - \mathrm{ggT}(n, v_\infty)) + \sum_{i=1}^{s} \deg(P_i)\,(n - \mathrm{ggT}(v_i, n))\,.$$

3. Wenn $v_i = 1$ für alle $i \in \{1, \cdots, s\}$ gilt, so gilt

$$g_C = \frac{1}{2}(n-1)(\deg(f) - 2) + \frac{1}{2}(n - \mathrm{ggT}(n, \deg(f)).$$

Beweis: Der Homomorphismus

$$div : \overline{k}(t)^\times \to Z_0^1(\mathbb{P}_{1,\overline{k}})$$

in die Gruppe der Weil-Divisoren vom Grad 0 ist ein Epimorphismus mit Kern $\overline{k}^\times$, denn $J_{\mathbb{P}_1} = 0$. Offenbar ist

$$Z_0^1(\mathbb{P}_{1,\overline{k}}) \to \coprod_{P \in \mathbb{A}_1(\overline{k})} \mathbb{Z}, \quad \sum_{P \in \mathbb{P}_1(\overline{k})} n_P P \mapsto \sum_{P \in \mathbb{A}_1(\overline{k})} n_P P$$

ein Isomorphismus. Daher ist die von *div* induzierte Abbildung

$$\frac{\overline{k}(t)^\times}{\overline{k}^\times} \to \coprod_{P \in \mathbb{A}_1(\overline{k})} \mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus. Da $\overline{k}^\times$ n-teilbar ist, gilt $\frac{\overline{k}(t)^\times}{\overline{k}^\times} \otimes (\mathbb{Z}/n) \cong \overline{k}(t)^\times/n$. Daher ist die von *div* induzierte Abbildung

$$d : \frac{\overline{k}(t)^\times}{n} \to \coprod_{P \in \mathbb{A}_1(\overline{k})} \mathbb{Z}/n$$

ein Isomorphismus. Sind $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{A}_1(\overline{k})$ paarweise verschieden, $u \in \overline{k}^\times$ und $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$d(u(t-a_1)^{m_1} \cdots (t-a_r)^{m_r}) = \sum_{i=1}^{r} \overline{m_i} a_i.$$

P_i zerfällt über $\overline{k}$ in ein Produkt

$$P_i = u_i(t - a_{1,i}) \cdots (t - a_{\deg(P_i),i})$$

von Linearfaktoren, wobei $u_i \in \overline{k}^\times$ und die a_{ji} paarweise verschieden sind. Man beachte, dass die P_i nach Voraussetzung separabel sind. Es folgt

$$d(f) = \sum_i \sum_j \overline{v_i} a_{ji}.$$

Wegen $|U| = n$ ist nun die von f erzeugte Untergruppe von $\overline{k}(t)^\times/n$ von der Ordnung n. Mit Kummertheorie folgt, dass $[\overline{k}(t, \sqrt[n]{f}) : \overline{k}(t)] = n$ gilt, d.h.

dass $Y^n - f(t)$ irreduzibel in $\overline{k}(t)[Y]$ ist. Daher gilt $f \in \mathrm{Zul}^{gi}(k,n)$. Da alle P_i separabel sind, muss nach A.3 sogar $f \in \mathrm{Zul}(k,n)$ gelten.

Die Formeln für das Geschlecht von $\mathbb{P}_1[\sqrt[n]{f}]$ folgen dann unmittelbar aus dem Satz A.5. $\square$

Folgerung: *Sei l prim. Sei k ein Körper mit* $\mathrm{char}(k) \neq l$ *und* $s \geq 1$. *Seien* $P_1, \cdots, P_s \in k[t]$ *paarweise verschiedene,* separable, *irreduzible Polynome. Sei*

$$f := P_1 \cdots P_s \in k[t] \subset R(\mathbb{P}_1).$$

Dann gilt $f \in \mathrm{Zul}(k,l)$ *und für das Geschlecht der Kurve* $C := \mathbb{P}_1[\sqrt[l]{f}]$ *gilt*

$$g_C = \begin{cases} \frac{1}{2}(l-1)(\deg(f)-2) & \textit{falls } l \textit{ Teiler von } \deg(f) \\ \frac{1}{2}(l-1)(\deg(f)-1) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Satz A.7 *Sei k ein Körper und n nicht durch* $\mathrm{char}(k)$ *teilbar. Sei* $f(X) \in \mathrm{Zul}(k,n) \cap k[X]$,

$$C := \mathrm{Spec}\left(\frac{k[X,Y]}{Y^n - f(X)}\right)$$

und $p : C \to \mathbb{A}_1$ *die kanonische Projektion* $(X,Y) \mapsto X$. *Sei*

$$T := \{P \in \mathbb{A}_1 \mid v_P(f) \geq 2\}$$

und $U := \mathbb{A}_1 \setminus T$. *Dann ist* $p^{-1}(U)$ *eine geometrisch reguläre Kurve über k.*

Beweis: Wir dürfen k algebraisch abgeschlossen annehmen. Es gilt $U(k) = \{a \in \mathbb{A}_1(k) \mid f(a) \neq 0\}$. Sei $B := \left(\frac{k[X,Y]}{Y^n - f(X)}\right)$ und $d : B \to \Omega_{B|k}$ die universelle Derivation. Dann gilt

$$\Omega_{B|k} = \frac{BdX \oplus BdY}{d(f)} = \frac{BdX \oplus BdY}{f'(X)dX + nY^{n-1}dY}.$$

Nun ist $(x,y) \in C(k)$ regulärer Punkt genau dann, wenn $f'(x) = 0$ und $ny^{n-1} = 0$ gilt. Wegen $n \in k^\times$ und $f(x) = y^n$ läuft dies auf $f(x) = f'(x) = 0$ hinaus. D.h. $(x,y) \in C(k)$ ist genau dann regulärer Punkt von C, wenn x eine höchstens 1-fache Nullstelle von f ist, d.h. genau dann, wenn $p(x,y) = x \in U(k)$ gilt. $\square$

Bemerkung: Sei die Situation des Satzes zugrunde gelegt. Sei $\overline{C} := \mathbb{P}_1[\sqrt[n]{f}]$ und $q : \overline{C} \to \mathbb{P}_1$ die kanonische Projektion.

1. Offenbar gilt $R(C) = R(\overline{C})$, d.h. die Kurven C und $\overline{C}$ sind birational äquivalent. Man hat einen kanonischen U-Isomorphismus $p^{-1}(U) \cong q^{-1}(U)$. Ist $g \in k[X] \setminus \{0\}$ mit $V := \mathrm{Spec}(k[X, g^{-1}]) \subset U$, so identifiziert man $q^{-1}(V)$ mit $\mathrm{Spec}\left(\frac{k[X,g^{-1}][Y]}{Y^n - f(X)}\right)$.

2. Ist in dieser Situation $f(X)$ ein Produkt aus paarweise verschiedenen, separablen, irreduziblen Polynomen, so gilt $U = \mathbb{A}_1$ und C kann mit $q^{-1}(\mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\})$ identifiziert werden. Ferner gilt $|\{P \in \overline{C}(\overline{k}) \mid q(P) = \infty\}| = \mathrm{ggT}(n, \deg(f))$.

Literaturverzeichnis

[AMac] M. Atiyah, I. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley (1996)

[B] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Hermann (1972)

[B02] L. Brünjes, Über die Zetafunktion von Formen von Fermatgleichungen, Doktorarbeit, Regensburg (2002)

[C04] B. Conrad, *Silverman's specialization theorem revisited*, Preprint (2004)

[FJ] M. Fried und M. Jarden, *Field Arithmetic*, Springer (1986)

[FJ74] G. Frey und M. Jarden, *Approximation theory and the rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Proc. London Math. Soc. **28** (1974), S. 112-128

[EGA] A. Grothendieck et al., *Eléments de Géometrie Algébrique*, Publ. Math. IHES, **4, 8, 17, 20, 24, 28, 32**

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements Etales et Groupe Fondamental*, Springer **LNM 224** (1971)

[GM91] F. Gouvêa, B. Mazur, *The squarefree sieve and the rank of elliptic curves*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991)

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer **GTM 52** (1977)

[H60] T. Honda, *Isogenies, rational points and sections of group varieties*, Japan J. Math. **30** (1960)

[I80] H. Imai, *On the rational points of some Jacobian varieties over large algebraic number fields*, Kodai Math. J. **3** (1980), S. 56-58

[La] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer (1983)

[La2] S. Lang, *Number Theory III*, Springer (1990)

[Mi] J. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press (1980)

[Mi86a] J. Milne, *Abelian Varieties*, in Arithmetic Geometry, edited by G. Cornell and J. Silverman, Springer (1986)

[Mi86b] J. Milne, *Jacobian Varieties*, in Arithmetic Geometry, edited by G. Cornell and J. Silverman, Springer (1986)

[Mu93] N. Murabayashi, *Mordell-Weil rank of the jacobians of the curves defined by $y^p = f(x)$*, Acta Arithmetica **LXIV.4** (1993), 297-302

[M] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press (1970)

[N52] A. Néron, *Problèmes arithmétiques et géometriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps*, Bull. Soc. Math. France **83** (1952), S. 101-166

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Springer (1991)

[RS01] K. Rubin und A. Silverberg, *Rank Frequencies for Quadratic Twists of Elliptic Curves*, Experimental Mathematics **10**, no. 4 (2001), S. 559-569

[RS02] K. Rubin und A. Silverberg, *Ranks of Elliptic Curves*, Bulletin of the AMS **39** (2002), S. 445-474

[RS04] K. Rubin und A. Silverberg, *Twists of elliptic curves of rank at least four*, Preprint (2004)

[RW02] M. Rosen und S. Wong, *The Rank of Abelian Varieties over Infinite Galois Extensions*, Journal of Number Theory **92** (2002), S. 182-196

[Se] J.P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, Vieweg (1997)

[S04] A. Silverberg, *The distribution of ranks in families of quadratic twists of elliptic curves*, Preprint (2004)

[S83] J. Silverman, *Heights and the specialization map for families of abelian varieties*, J. Reine Angew. Mathematik **342** (1983), S. 197-211

[S] J. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer **GTM 106** (1992)

[ST95] C.L. Stewart, J. Top, *On ranks of twists of elliptic curves and power-free values of binary forms*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), S. 943-973

[To88] J. Top, *A remark on the rank of jacobians of hyperelliptic curves over $\mathbb{Q}$ over certain elementary abelian 2-extensions*, Tôhoku Math. J. **40** (1988), S. 613-616

[Z87] Y. Zarhin, *Endomorphisms and Torsion of Abelian Varieties*, Duke Math. J. **54** (1987), S. 131-145