

**UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN**  
**FAKULTÄT FÜR ELEKTROTECHNIK**  
**INSTITUT FÜR MEß- UND AUTOMATISIERUNGSTECHNIK**



**ERWEITERUNG DER HARMONISCHEN BALANCE FÜR DIE NUMERISCHE  
BERECHNUNG STATIONÄRER DETERMINISTISCHER UND  
CHAOTISCHER EIGENSCHWINGUNGEN  
IN NICHTLINEAREN SYSTEMEN**

**von**  
**Christoph Stark**



Universität der Bundeswehr München  
Fakultät für Elektrotechnik  
Institut für Meß- und Automatisierungstechnik

**Erweiterung der Harmonischen Balance für die numerische  
Berechnung stationärer deterministischer und  
chaotischer Eigenschwingungen  
in nichtlinearen Systemen**

von  
**Dipl.-Ing. Christoph Stark**

Vollständiger Abdruck der von der  
Fakultät für Elektrotechnik der Universität der Bundeswehr München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor – Ingenieurs  
(Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation

Vorsitzender:	Prof. Dr. K. Pilzwegger
1. Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. A. Böttiger
2. Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. habil. T. Kaczorek

Die Dissertation wurde am 24.10.2000 bei der Universität der Bundeswehr  
München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik am 20.02.2001  
angenommen.

Tag der Promotion: 23.03.2001



## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand parallel zu meiner beruflichen Tätigkeit mit der Vorstellung für die Aufgabenstellungen eines Ingenieurs ein Werkzeug zu entwickeln, welches ein tieferes Verständnis für die Schwingungsprobleme in nichtlinearen Systemen ermöglicht.

Aus diesem Grund gilt mein besonderer Dank Frau Prof. Dr.-Ing. A. Böttiger für die Betreuung und Unterstützung dieses Vorhabens, vor allem für die vielen guten Hinweise und ihren Beistand.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. T. Kaczorek für das Interesse, das er meiner Dissertation entgegenbrachte, und für die Übernahme des Korreferats.

Gleichermaßen danke ich meiner Familie, die diese Arbeit durch ihr Verständnis beachtlich gefördert hat.

Landau an der Isar, im April 2001

Christoph Stark



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. EINLEITUNG</b> .....	<b>9</b>
1.1    MOTIVATION UND ZIELE DER ARBEIT .....	11
1.2    AUFBAU DER ARBEIT .....	22
<b>2. NICHTLINEARE DYNAMISCHE SYSTEME</b> .....	<b>25</b>
2.1    GEEIGNETE STRUKTUR NICHTLINEARER MODELLE .....	26
2.2    AUFSTELLUNG DER SYSTEMGLEICHUNGEN .....	29
<b>3. DAS SYSTEMVERHALTEN UND DIE ENTSTEHUNG VON     SCHWINGUNGEN</b> .....	<b>33</b>
3.1    LINEARE BETRACHTUNG NICHTLINEARER DIFFERENTIAL- GLEICHUNGEN MIT KENNLINIENGLIEDERN .....	34
3.2    HARMONISCHE BETRACHTUNG TRANSIENTER ZEITVORGÄNGE .....	47
<b>4. BESCHREIBUNGSFUNKTION</b> .....	<b>55</b>
4.1    DEFINITION DER BESCHREIBUNGSFUNKTION .....	56
4.2    BERECHNUNG DER BESCHREIBUNGSFUNKTION UND FEHLERABSCHÄTZUNG .....	62
<b>5. HARMONISCHE BALANCE</b> .....	<b>67</b>
5.1    EINFÜHRUNG .....	67
5.2    ZUSTAND DER HARMONISCHEN BALANCE IN NICHTLINEAREN SYSTEMEN .....	69
5.2.1 <i>Nichtlinearitäten mit einer Eingangsvariablen</i> .....	74
5.2.2 <i>Nichtlinearitäten mit mehreren Eingangsvariablen</i> .....	76
5.3    LÖSUNG DER GLEICHUNG DER HARMONISCHEN BALANCE .....	79
5.4    VERGLEICH MIT DEN WERTEN DER BESCHREIBUNGSFUNKTION .....	82

<b>6. STABILITÄTSANALYSE.....</b>	<b>85</b>
6.1 DEFINITIONEN DER STABILITÄT.....	85
6.2 STABILITÄTSKRITERIEN.....	90
6.2.1 <i>Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance.</i> .....	92
6.2.2 <i>Ruhezustände</i> .....	100
6.2.3 <i>Stabilitätskriterien für das Gesamtsystem</i> .....	101
<b>7. BEISPIELE .....</b>	<b>105</b>
7.1 SCHWINGKREIS MIT EINER FEDERSCHALTVORRICHTUNG .....	105
7.2 DREHZAHLGEREGELTES ELASTISCHES ZWEIMASSENSYSTEM MIT TOTE ZONE UND REIBUNG .....	119
7.2.1 <i>Aufbau und Überprüfung der Simulation der Regelstrecke</i> ... ..	122
7.2.2 <i>Auswahl der Regelparameter</i> .....	125
7.2.3 <i>Prüfung des transienten und stationären Systemverhaltens</i> <i>(<math>\omega \rightarrow \infty</math> und <math>\omega = 0</math>)</i> .....	126
7.2.4 <i>Prüfung des Systemverhaltens auf das Vorhandensein von</i> <i>Grenzyklen oder chaotischen Bewegungen</i> .....	128
7.2.5 <i>Beispiel für chaotisches Systemverhalten bei falschen</i> <i>Reglereinstellungen</i> .....	138
7.3 BEISPIEL MIT BIFURKATION DES SYSTEMVERHALTENS .....	140
<b>8. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK.....</b>	<b>163</b>
<b>VERZEICHNIS WICHTIGER FORMELZEICHEN UND ABKÜRZUNGEN.....</b>	<b>167</b>
<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>169</b>

## 1. Einleitung

Die Anforderungen an die dynamischen Eigenschaften der Maschinen und Antriebe sind in den letzten Jahren ständig gewachsen. Gleichzeitig werden immer höhere Erwartungen an die Möglichkeiten der Materialreduzierung gestellt. Diese Umstände führen dazu, daß immer öfter bei den Projektierungsaufgaben die nichtlinearen Arbeitsbereiche der Maschinen und Anlagen berücksichtigt werden müssen.

Der Zwang, einen starken Einfluß der Nichtlinearitäten in einem dynamischen System zulassen zu müssen, verlangt, daß die unerwünschte Entstehung von nichtlinearen Phänomenen wie die sog. Grenzzyklen (Dauerschwingungen) oder chaotisch schwingenden Bewegungen verhindert werden muß. Diese schwierige Aufgabe kann abhängig von der Problemstellung und der Beschaffenheit des nichtlinearen Systems mit unterschiedlichen Methoden gelöst werden. Alle diese Methoden unterliegen jedoch größeren oder kleineren Einschränkungen hinsichtlich der Möglichkeiten ihre Anwendung auf unterschiedliche Klassen der nichtlinearen Systeme. Deshalb wird für die Auslegung der Systemparameter ein leicht zu handhabendes und dabei wirkungsvolles Werkzeug für möglichst viele Klassen der nichtlinearen dynamischen Systeme benötigt, mit dem die nichtlinearen Phänomene eines Systems entdeckt und unterdrückt werden können. Den Vorstellungen des Ingenieurs kommt für solche Aufgabenstellungen die Methode der Harmonischen Balance in einer besonderen Weise entgegen. Der Grund dafür liegt in ihrer physikalischen Nähe zu den Schwingungsphänomenen und in einer verhältnismäßig leichten mathematischen Handhabung.

Weiterhin zeigt diese Methode eine sehr hohe Effizienz bei Systemen mit nicht veränderbaren Strukturen, die z.B. mit der leistungstarken Hyperstabilitätstheorie (vgl. [23], [3] Teil II und [14] ) nicht analysiert werden können, da eine entsprechende Anpassung an die Voraussetzungen für die Anwendung dieser Methode nicht durchgeführt werden kann. Bei der Berücksichtigung von einigen wenigen Harmonischen läßt sich die Harmonische Balance als ein zuverlässiges und handliches Werkzeug anwenden.

Ein weiterer Grund für die Notwendigkeit der erneuten Auseinandersetzung mit den Möglichkeiten dieser Jahrzehnte alten Methode liegt in der rasanten Entwicklung der Standardsoftware-Paketen für mathematische Berechnungen (z.B. Mathematica, MAPLE V u.a.). Durch diese Standardprogramme kann der Umgang mit komplexen nichtlinearen Systemen mit mehreren Nichtlinearitäten enorm vereinfacht und die Entwicklungszeiten wesentlich verkürzt werden.

Diesen Schwerpunkten versucht die vorliegende Arbeit Rechnung zu tragen. Sie stellt Algorithmen für eine verhältnismäßig leichte Implementierung der oben genannten Aufgaben vor.

Für die Durchführung der notwendigen Berechnungen wurden in dieser Arbeit unterschiedliche Programme verwendet. Für die symbolischen Aufgaben und numerische Berechnung der Nullstellen in Polynomen wurde die Software MAPLE V eingesetzt. Für die Simulation des Systemverhaltens und die numerische Ermittlung der Beschreibungsfunktion ist MATLAB bzw. SIMULINK genutzt worden.

## 1.1 Motivation und Ziele der Arbeit

Die Methode der Harmonischen Balance ist ein wirkungsvolles Ingenieurwerkzeug vor allem zur Unterdrückung von Grenzyklen in nichtlinearen Systemen. Seit Jahrzehnten wird sie bei Problemstellungen mit unterschiedlichen Schwerpunkten angewendet. Auch in den letzten Jahren wurden Beiträge veröffentlicht, die weitere Anwendungsmöglichkeiten aufzeigen, z.B.:

- 1995 stellen L.J. Heyns und J.J. Krüger in [7] eine Erweiterung des Verfahrens für die Stabilitätsuntersuchung von Grenzyklen vor. Die vorgestellte Methode soll für die Feststellung der chaotischen Bewegungen in Systemen geeignet sein, in welchen von sinusförmigen Eingangssignalen an den nichtlinearen Gliedern ausgegangen werden kann.
- 1996 beschrieben A. Tesi, E.A. Abed, R. Genesio und H.O. Wang in [28] die Anwendung der Harmonischen Balance für die Analyse der „period-doubling“-Bifurkationen .

Im Hintergrund der klassischen Anwendung der Methode stellen sich jedoch viele Fragen, auf die in diesem Abschnitt eingegangen werden soll.

Die übliche Betrachtungsweise bei der Anwendung der Harmonischen Balance stellt in den Mittelpunkt das Phänomen der sog. Dauerschwingung. Ein solcher Zustand des Schwingungsgleichgewichts wird als *gegeben angenommen* (vgl. u.a.[3], Abs.4.1, [5], Abs.1.4 u.a.). Von dieser dem System unterstellten Tatsache ausgehend, wird versucht, die Amplitude und Frequenz der Schwingung näherungsweise zu ermitteln.

*Wie ein Zustand der Dauerschwingung im System entstehen kann, wird bei dieser klassischen Betrachtungsweise jedoch nicht untersucht.*

Die grundlegende Frage, die bei der üblichen Anwendung der Harmonischen Balance gestellt wird, lautet:

*Kann in einem nichtlinearen System eine sogenannte Grenzschwingung auftreten, und wenn ja, wird sie sich für  $t \rightarrow \infty$  im System erhalten können.*

Bei der Durchführung einer solchen Aufgabe führt die eigentliche Berechnung in ihrer einfachsten Form, bei Vorhandensein einer nichtlinearen Funktion  $f_{\text{NL}}(e)$ , zu der Anwendung der Beschreibungsfunktion  $N(A)$  (vgl. [3], [5] u.a.), die aus

$$f_{\text{NL}}(e = A \sin(\omega t)) \text{ oder } f_{\text{NL}}(e = A e^{j\omega t}) \quad (1.1)$$

gewonnen wird. Bei der Betrachtung beispielsweise eines Standardregelkreises wie im Beispiel 1.1 dargestellt, wird verlangt, daß die lineare Übertragungsfunktion  $G(s)$  die sog. Tiefpaß-Eigenschaften erfüllt.

Auch die Nichtlinearität  $f_{\text{NL}}(e)$  muß bestimmten Anforderungen genügen. Erst dann darf die Funktion  $f_{\text{NL}}(e = A \sin(\omega t))$  aus (1.1) genutzt werden. Diese Eigenschaften können z.B. gemäß [3], Abs.4.1 oder [5] geprüft werden. Sind sie erfüllt, dann darf bei der Analyse des Standardregelkreises die Anwendung der Gleichung der harmonischen Balance der Form

$$G(j\omega) = -1/N(A) \quad (1.2)$$

erfolgen.

### Beispiel 1.1

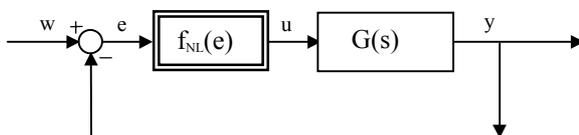


Bild 1/1 Nichtlinearer Standardregelkreis

$f_{NL}(e)$  aus Beispiel 1.1 ist eine symmetrische Begrenzungskennlinie mit toter Zone. Für sie gelten die Gleichungen (1.3) mit  $b = 6$  und  $z_T = 3$ .

$$\begin{aligned} f_{NL}(e) &= 0 && \text{für} && -z_T < e < z_T \\ f_{NL}(e) &= e - z_T \operatorname{sgn}(e) && \text{für} && z_T \leq |e| \leq z_T + b \\ f_{NL}(e) &= b \operatorname{sgn}(e) && \text{für} && |e| > z_T + b \end{aligned} \quad (1.3)$$

Für  $G(s)$  gilt im Beispiel 1.1 die Gleichung (1.4).

$$G(s) = \frac{(10,5 - s)}{(1 + s)^3} \quad (1.4)$$

Laut [3], Abs.4.1 muß  $f_{NL}(e)$  folgende Bedingung erfüllen:

- $f_{NL}(e)$  ist symmetrisch zum Ursprung, d.h.  $f_{NL}(-e) = -f_{NL}(e)$ , und monoton steigend.

Die Funktion (1.3) erfüllt die gestellten Anforderungen. Für ihre Beschreibungsfunktion gemäß (1.1) gelten die Gleichungen (1.5). Sie können [8] entnommen werden.

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \left( \frac{b + z_T}{A} \right) - \arcsin \left( \frac{z_T}{A} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b + z_T}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{b + z_T}{A} \right)^2} - \frac{z_T}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{z_T}{A} \right)^2} \right], \quad \text{für } A > b + z_T \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$N(A) = 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \left( \frac{z_T}{A} \right) + \frac{z_T}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{z_T}{A} \right)^2} \right], \quad \text{für } z_T \leq A \leq z_T + b.$$

Ebenso muß gemäß [3], Abs.4.1 von dem linearen Teilsystem  $G(s)$  die Erfüllung folgende Bedingungen gefordert werden:

- $G(s) = R(s) e^{-T_1 s}$  mit einer rationalen Funktion  $R(s) = Z(s)/N(s)$ ,  $T_1 \geq 0$  und speziell bei einem Standardregelkreis  $G(0) > 0$ .

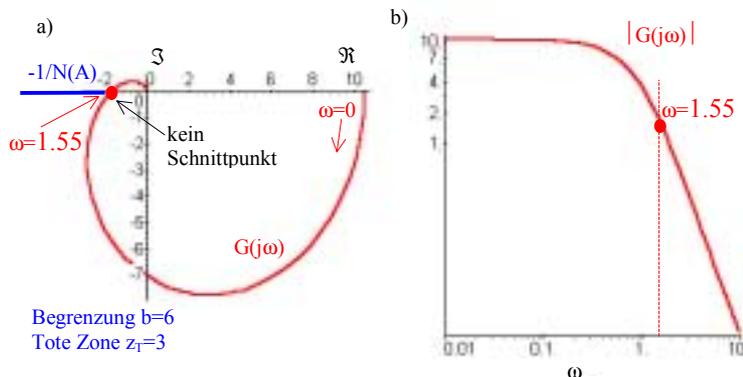
Die Funktion (1.4) erfüllt offensichtlich diese Anforderung.

- Pole von  $R(s)$  liegen links der  $j$ -Achse der komplexen Ebene mit der Ausnahme eines einfachen Pols in  $s = 0$ .

Die Funktion (1.4) von Beispiel 1.1 erfüllt diese Bedingung, da sie den dreifachen Pol in  $-1$  besitzt.

- Der Frequenzgang  $G(j\omega)$  besitzt einen genügend starken Tiefpaßcharakter, d.h.  $G(j\omega)$  fällt mit wachsendem  $\omega$  genügend stark ab. Diese Forderung ist sicher erfüllt, wenn  $\text{Grad } Z(s) \leq \text{Grad } N(s) - 2$  ist. Ist  $\omega_G$  die Frequenz der Grenzwinkelung gemäß (1.2), so wird verlangt, daß sie im Bereich der „Knickfrequenz“ von  $G(j\omega)$  liegt, d.h. für alle  $\omega > \omega_G$  muß der Frequenzgang  $G(j\omega)$  fallen.

$G(j\omega)$  und  $-1/N(A)$  sind für  $b=6$  und  $z_1=3$  in Bild 1/2 graphisch dargestellt. Das untersuchte System von Beispiel 1.1 erfüllt somit die Voraussetzungen für die Anwendung der Gleichung (1.2). Gemäß Bild 1/2 a) existiert kein Schnittpunkt von  $-1/N(A)$  und  $G(j\omega)$ . Damit kann erwartet werden, daß im System keine Grenzwinkelungen entstehen können.



a) Ortskurven von  $G(j\omega)$

b) Frequenzkennlinie  $|G(j\omega)|$

Bild 1/2 Untersuchung des Regelkreises Beispiel 1.1 gemäß der Gleichung (1.2)

Die in Bild 1/3 dargestellten Simulationsergebnisse widerlegen diese Aussage.

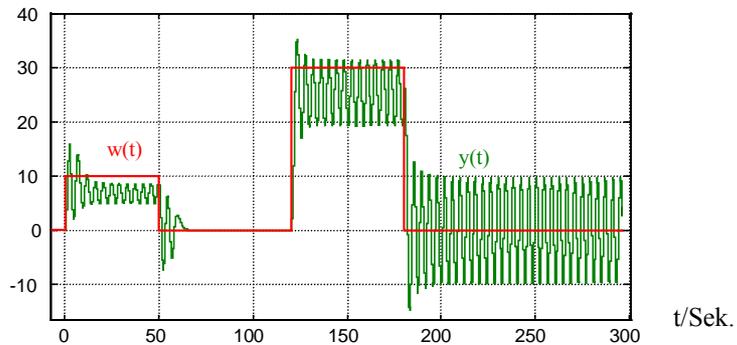


Bild 1/3 Simulationsergebnisse des Regelkreises von Beispiel 1.1 für  $b=6$  und  $z_T=3$

Durch die Änderung der Begrenzung von  $b=6$  auf  $b=5,9$  wird die  $-1/N(A)$ -Kennlinie nach links verschoben. Der Abstand zwischen  $G(j\omega)$  und der Funktion  $-1/N(A)$  wird größer und die Untersuchungsergebnisse von Bild 1/2 stellen sich ein. Die Simulationsverläufe für  $b=5,9$  sind in Bild 1/4 dargestellt.

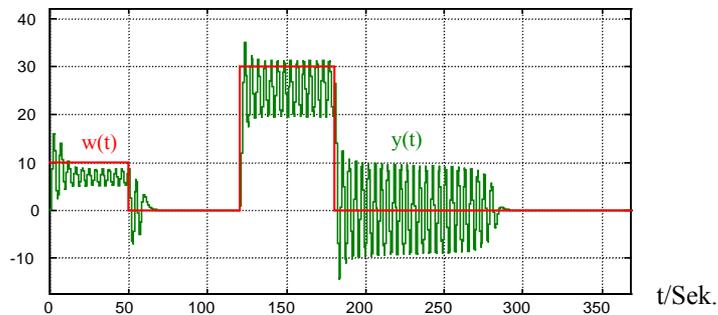


Bild 1/4 Simulationsergebnisse des Regelkreises von Beispiel 1.1 für  $b=5,9$  und  $z_T=3$

Die folgenden Beispiele verdeutlichen die angesprochenen Probleme.

**Beispiel 1.2 (vgl. auch Abschnitt 7.1)**

Mit der klassischen Methode der Harmonischen Balance soll eine Federkonstante  $K_F$  in einem Schwingkreis mit der Struktur von Bild 1/1 ausgelegt werden. Für das lineare Teilsystem  $G(s)$  soll die Übertragungsfunktion (1.6) verwendet werden.

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3} \quad (1.6)$$

Die nichtlineare Funktion stellt eine in Bild 1/5 dargestellte Federschaltvorrichtung mit Begrenzung  $b$  und einer Hysterese dar, welche durch eine mitgekoppelte Stellvorrichtung  $V_S/(1+sT_S)$  erzeugt wird. Wegen der Messung der Federauslenkung  $u$  muß eine Verzögerungszeitkonstante  $T_M$  berücksichtigt werden. Es muß geprüft werden für welche Werte der Federkonstante  $K_F$  der Regelkreis nach einer beliebigen Anregung und Umschaltung auf  $w = 0$  eine Schwingung ausführt.

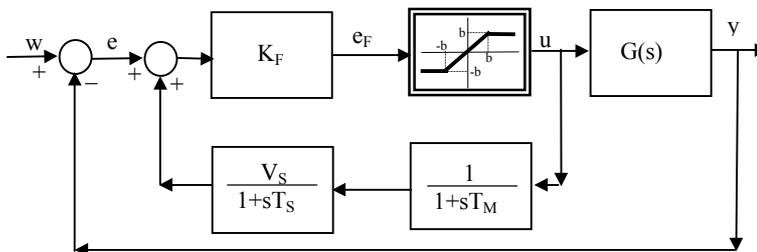


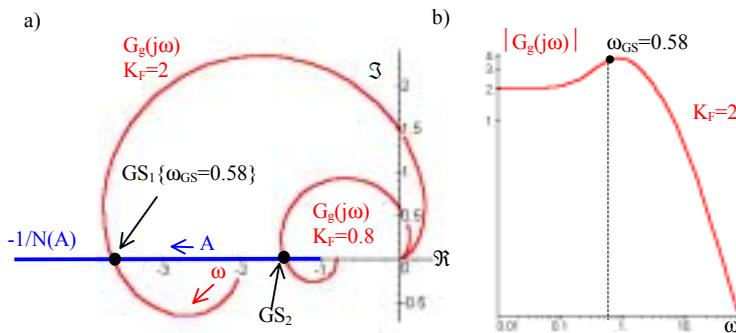
Bild 1/5 Nichtlineare Federschaltvorrichtung mit Begrenzung und Ausgangsmitkopplung

Die linearen Teile der Federschaltvorrichtung können  $G(s)$  zugeschlagen werden. Damit kann im Standardregelkreis  $G(s)$  durch  $G_g(s)$  aus (1.7) und  $u = f_{NL}(e)$  durch die Begrenzungskennlinie  $u = f_{NL}(e_F)$  von Bild 1/5 ersetzt werden.

$$G_g(s) = K_F \left( \frac{1}{(1+s)^3} - \frac{V_S}{(1+sT_S)(1+sT_M)} \right) \quad (1.7)$$

Der Regelkreis soll für  $b=9$ ,  $K_F=2$ ,  $V_S=2$ ,  $T_S=0.5$  und  $T_M=0.1$  untersucht werden.

Das durch (1.6) und (1.7) beschriebenes System erfüllt damit fast vollständig alle Bedingungen für die Anwendung der klassischen Methode der Harmonischen Balance. Lediglich die in [3], Abs.4.1 geforderte Eigenschaft  $G_g(0) > 0$  ist nicht erfüllt. Es gilt  $G_g(0) < 0$ . Die Untersuchung des Systems gemäß (1.2) ist in Bild 1/6 dargestellt.



a) Ortskurven  $G_g(j\omega)$  Beispiel 1.2

b) Frequenzkennlinie  $|G_g(j\omega)|$

Bild 1/6 Untersuchung des Regelkreises gemäß der Gleichung (1.2)

Die Beschreibungsfunktion der Begrenzungskennlinie (1.8) kann beispielsweise [3] entnommen werden.

$$\begin{aligned}
 N(A) &= 1, && \text{für } |A| \leq b \\
 N(A) &= \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \left( \frac{b}{A} \right) + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{b}{A} \right)^2} \right], && \text{für } |A| > b.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Jetzt muß noch geprüft werden, ob die gefundene Grenzwinkel (Pkt. GS) stabil oder instabil ist. Die Prüfung kann gemäß [3] oder [5] erfolgen.

Demnach soll das System einen stabilen Grenzyklus  $GS_1$  erzeugen. Tatsächlich jedoch entsteht im System keine Schwingung. Die entsprechende Simulation des Systemverhaltens ist im Bild 1/7 dargestellt.

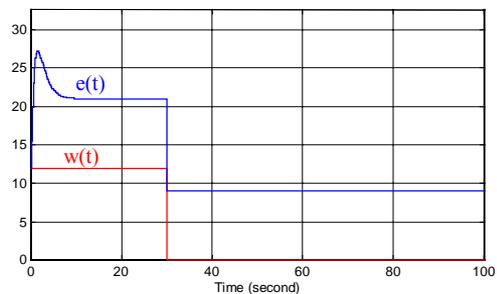


Bild 1/7 Simulationsergebnisse zu Beispiel 1.2 mit  $K_F = 2$

Bei einer Veränderung des Parameters  $K_F$  von 2.0 auf 0.8 (vgl. auch Bild 1/6 a) weist die klassische Anwendung der Harmonischen Balance eine tatsächlich vorhandene Grenzschiwingung  $GS_2$  aus. Sie ist in Bild 1/8 dargestellt

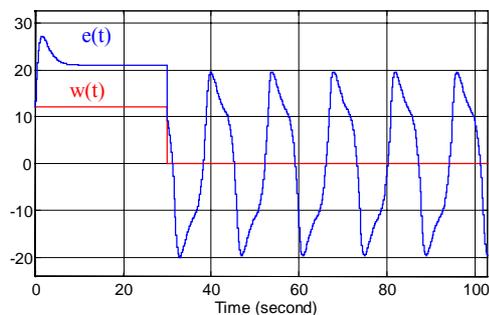


Bild 1/8 Simulationsergebnisse zu Beispiel 1.2 mit  $K_F = 0.8$

Die Beispiele 1.1 und 1.2 verdeutlichen, daß die zulässigen Bedingungen für die klassische Anwendung der Methode noch nicht ausreichend untersucht wurden. Es ist nicht möglich, Aussagen hinsichtlich der tatsächlichen Tiefpaßeigenschaften der Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$  über die zu ermittelnde

Frequenz  $\omega_{GS}$  vorab zu treffen. Weiterhin liefert eine solche Anwendung der Methode *unzuverlässige* Hinweise zum Vorhandensein der Grenzwahlungen im System.

*Es ist davon auszugehen, daß das Eigentliche dieser Methode mit anderen Gesetzmäßigkeiten zusammenhängt und das Vorhandensein der Tiefpaßeigenschaften nicht entscheidend für ihre Anwendung ist.*

Ähnliche Phänomene treten auch bei Untersuchungen von Regelkreisen mit irregulären Übertragungsfunktionen, die wie im Beispiel 1.3 keine Tiefpaßeigenschaften aufweisen.

### Beispiel 1.3

Die Schwingungseigenschaften des Standardregelkreises von Bild 1/1 mit  $G(s)$  gemäß (1.9) und  $f_{NL}(e)$  gemäß (1.10) sollen analysiert werden. Die Untersuchung wird mit Hilfe von (1.2) durchgeführt und ist in Bild 1/9 dargestellt.

$$G(s) = \frac{(4 + s)(1 - s)}{(2 + s)^2} \quad (1.9)$$

$$u = f_{NL}(e) = 2 \operatorname{sgn}(e) \quad (1.10)$$

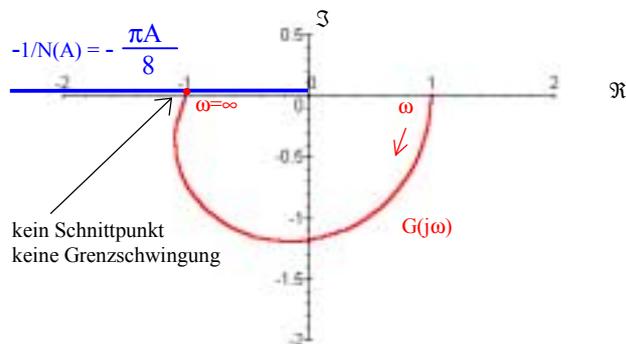


Bild 1/9 Untersuchung des Regelkreises Beispiel 1.3 gemäß der Gleichung (1.2).

Aus Bild 1/9 geht hervor, daß im System keine Schwingungen entstehen dürfen. Die Simulationsergebnisse von Bild 1/10 beweisen das Gegenteil.

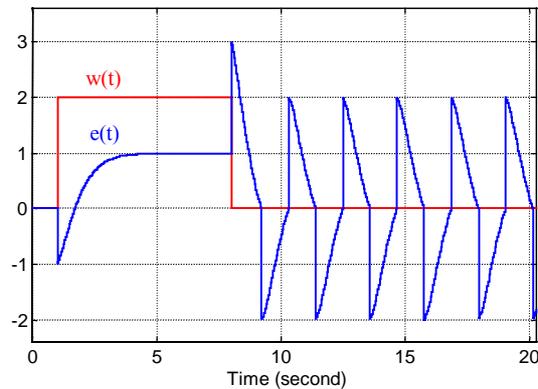


Bild 1/10 Simulationsergebnisse des Regelkreises von Beispiel 1.3.

Bei der Betrachtung der aufgeführten Beispiele drängen sich viele Fragen auf:

- Wie entsteht ein Zustand der Dauerschwingung in solchen Systemen?
- Warum liefert die Methode der harmonischen Balance mit  $N(A)$  gemäß (1.1) in vielen anderen Fällen bei Nichterfüllung der Tiefpaßeigenschaften korrekte Ergebnisse?
- Welche Klassen von nichtlinearen Systemen können mit der Methode der Harmonischen Balance analytisch und welche numerisch untersucht werden?
- Welche Harmonischen müssen bei der Untersuchung berücksichtigt werden, wenn die Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$  Resonanzstellen aufweist?
- Wann können chaotische Bewegungen mit Hilfe der Harmonischen Balance zuverlässig aufgedeckt werden?

**Das Ziel der Arbeit** ist es, eine zufriedenstellende Antwort auf die oben aufgeführten Fragen zu geben. Weiterhin soll sie die Lücke zwischen den vielen vorhandenen „Berechnungswerkzeugen“ und ihre Anwendung auf Systeme mit mehreren Nichtlinearitäten schließen. Die Arbeit soll zeigen, daß es möglich ist, für sehr viele Typen der nichtlinearen Systeme mit Kennliniengliedern  $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{e})$  zuverlässige Ergebnisse zu erhalten. Die Tiefpaßeigenschaften des Systems brauchen dabei nicht berücksichtigt zu werden. Die Berechnung der Beschreibungsfunktion soll anders als bei ihrer klassischen Anwendung nicht mit  $\mathbf{e} = \mathbf{A}_1 \sin(\omega t)$  bzw. wie in [6] Abschnitt 5 „Two-sinusoid-input describing function“ mit  $\mathbf{e} = \mathbf{A} \sin(\omega_A t + \phi_A) + \mathbf{B} \sin(\omega_B t + \phi_B)$  sondern mit dem Eingangssignal (1.11) durchgeführt werden.

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \sin(\omega t) + \sum \mathbf{f}(\mathbf{A}_n, \omega_n, t) \quad (1.11)$$

Durch die geeignete Wahl der zu berücksichtigenden höheren Harmonischen  $\sum \mathbf{f}(\mathbf{A}_n, \omega_n, t)$  in (1.11) soll erreicht werden, daß die Ergebnisse der Anwendung der Harmonischen Balance zuverlässig sind. Damit können eindeutige Aussagen erwartet werden. Nicht zuletzt soll in dieser Studie geklärt werden, wann *das dynamische System keine Tiefpaßeigenschaften zu erfüllen braucht*.

Darüber hinaus soll der Entstehungsvorgang einer Dauerschwingung oder einer chaotischen Bewegung (d.h. einer Dauerschwingung, die für  $t \rightarrow \infty$  eine veränderliche Frequenz und Amplitude aufweist) durch die Erweiterung der Erkenntnisse bei der Anwendung der Harmonischen Balance erläutert und analysiert werden.

Ferner sollen daraus resultierende Aspekte der Anwendung der Harmonischen Balance bei Systemen mit mehreren nichtlinearen Gliedern umfassend dargestellt werden.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Hauptmerkmal dieser Studie ist die Ausarbeitung eines möglichst einfachen Verfahrens im Frequenzbereich für die praktischen Untersuchungen der Eigenschwingungsphänomene in verkoppelten nichtlinearen Systemen. Die Methode der Harmonischen Balance schließt eine wichtige Lücke in der Reihe der Berechnungswerkzeuge des Ingenieurs für die Untersuchung solcher Systeme.

Im **Kapitel 2** dieser Arbeit wird aus der allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichung mit zeitinvarianten Parametern eine geeignete Struktur für die Untersuchung des Systems im Frequenzbereich abgeleitet.

**Kapitel 3** stellt eine erweiterte harmonische Betrachtung der transienten Vorgänge in nichtlinearen Systemen vor. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird der Umgang mit einem linearisierten System erläutert. Aus dieser Perspektive, die das Verhalten des Systems für die Frequenz  $\omega \rightarrow \infty$  wiedergibt, werden in dem darauf folgenden Abschnitt das transiente Verhalten des Systems im Frequenzbereich analysiert. Damit läßt sich das für die Schwingungsphänomene relevante Übertragungsverhalten der nichtlinearen Glieder so formulieren, daß sich daraus die Beziehungen für die Übertragung jeder einzelnen Harmonischen im Frequenzbereich zu einem beliebigen Zeitpunkt angeben lassen.

Mit den im Kapitel 3 abgeleiteten Zusammenhängen lassen sich im **Kapitel 4** die Anforderungen an die Beschreibungsfunktion formulieren, die eine zuverlässige Aussage über ihr harmonisches Übertragungsverhalten ermöglicht. Damit wurden die Voraussetzungen für die von den sog. Tiefpaßeigenschaften des Systems unabhängige Untersuchung des Systems geschaffen.

In **Kapitel 5** wird der Zusammenhang zwischen der Harmonischen Balance und dem Verhalten der Trajektorien im Zustandsraum erläutert. Nach der Herleitung der Gleichung der Harmonischen Balance im Abschnitt 5.2 und ihrer Lösung in 5.3 wird der Vergleich dieser Lösung mit den Werten der Beschreibungsfunktion im Abschnitt 5.4 durchgeführt. Damit lassen sich diese Zustände in einem nichtlinearen System definieren, die eine geschlossene Trajektorie hervorbringen können.

Im **Kapitel 6** wird schließlich die Vorgehensweise bei der Untersuchung der Stabilität der im **Kapitel 5** gefundenen Zustände vorgestellt. Weiterhin wird kurz auf die sogenannten Bifurkationen, Änderungen des Systemverhaltens, eingegangen sowie auf die Möglichkeiten der Entstehung von chaotischen Schwingungen in nichtlinearen Systemen.

**Kapitel 7** enthält einige ausgewählte praktische Anwendungsbeispiele, die eine Umsetzung der vorgestellten Algorithmen in der Praxis erleichtern sollen.

Im **Kapitel 8** werden die wesentlichen Merkmale und Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefaßt, und es erfolgt ein Ausblick auf mögliche Weiterführungen der dargestellten Gedanken.

Der **Anhang** enthält eine Übersicht der verwendeten Syntax für die Gleichungen und Symbole. Ein **Literaturverzeichnis** beschließt die vorliegende Arbeit.



## 2. Nichtlineare dynamische Systeme

Alle reellen Systeme sind global gesehen nichtlinear. Die mathematische Darstellung ihrer funktionellen Zusammenhänge führt in der Regel auf Systeme von nichtlinearen Differentialgleichungen mit überwiegend zeitinvarianten Parametern (vgl. Bild 2/1 ). Die letzteren sollen genauer in dieser Arbeit analysiert werden.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{w}(t) & \longrightarrow & \boxed{\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{y}^{(n-1)}, \dots, \mathbf{y}, \mathbf{w}^{(m)}, \mathbf{w}^{(m-1)}, \dots, \mathbf{w}) = \mathbf{0}} \longrightarrow & \mathbf{y}(t) \\ & & & (2.1) \end{array}$$

Bild 2/1 Allgemeine Darstellung eines zeitinvarianten nicht- linearen Systems

Für die Variablen der nichtlinearen Funktion  $\mathbf{F}$  aus (2.1) gelten folgende Gleichungen:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \frac{\mathbf{d}^k \mathbf{y}(t)}{\mathbf{d}t^k}, \quad \mathbf{w}^{(k)} = \frac{\mathbf{d}^k \mathbf{w}(t)}{\mathbf{d}t^k}. \quad (2.2)$$

Abhängig von der Zweckmäßigkeit für die gesetzten Ziele der Analyse kann eine von vielen möglichen Ersatzstrukturen für die Untersuchung des nichtlinearen Systems (2.1) gewählt werden. Im Hinblick auf die leichte mathematische Handhabung der in der Gleichung (2.1) tatsächlich

vorhandenen nichtlinearen Beziehungen sollen für die Ersatzstruktur nur *eindeutige* nichtlineare Funktionen der Form

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{e}) \quad (2.3)$$

angestrebt werden. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß die Herleitung der Beziehung (2.3) für die nichtlinearen Systeme gemäß (2.1) immer dann möglich ist, wenn alle Funktionen (2.3), die nicht eindeutig sind und Hystereseverhalten aufweisen, eindimensional sind. D.h.  $\mathbf{u}$  in (2.3) ist nur von einer Variablen  $e$  abhängig.

## 2.1 Geeignete Struktur nichtlinearer Modelle

Bei der Aufstellung von Ersatzgleichungen für (2.1) und Herleitung der nichtlinearen Funktionen (2.3) können alternativ drei Möglichkeiten der Umwandlung der Gleichung (2.1) genutzt werden:

- Erstens können die vorhandenen Mehrdeutigkeiten in den nichtlinearen Beziehungen herausberechnet werden (vgl. Bild 2/2).
- Zum zweiten werden lineare Subsysteme aus der Gleichung (2.1) substituiert.
- Im dritten Schritt müssen die impliziten Zeitableitungen der Variablen in den nichtlinearen Funktionen substituiert werden

Weitere Hinweise und Erläuterungen für die Möglichkeiten der Vereinfachung der Gleichung (2.1) können [5], [8] und [9] entnommen werden.

Beim Vorhandensein von mehrdeutigen nichtlinearen Funktionen (2.3) kann nach [9] oder [8] ein allgemeingültiges Ersatzschaltbild mit eindeutigen Beziehungen gemäß Bild 2/2 und Bild 2/3 angegeben werden.

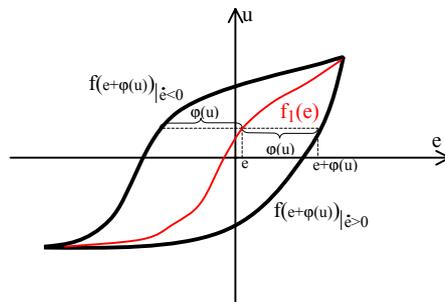


Bild 2/2 Mehrdeutige und asymmetrische Kennlinie einer nichtlinearen Funktion.

Eine mehrdeutige Kennlinie wie in Bild 2/2 dargestellt kann demnach immer in eine Ersatzbeziehung siehe Bild 2/3 umgerechnet werden.

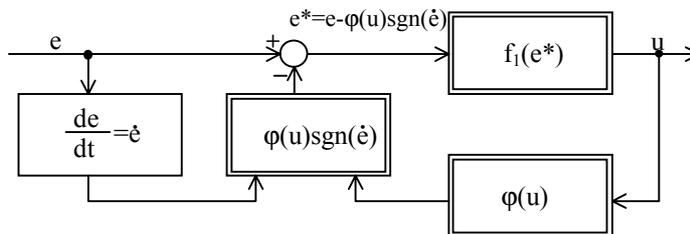


Bild 2/3 Ersatzschaltbild für die in Bild 2/2 dargestellte Kennlinie

In [8] wird gezeigt, daß durch eine geschickte Einführung von neuen Variablen die Differentialgleichung (2.1) in eine algebraische Gleichung umgeformt werden kann. Damit wird erreicht, daß die impliziten Zeitableitungen in den nichtlinearen Funktionen substituiert werden.

Um diese Umrechnung vorzunehmen, werden zuerst für die Zeitableitungen der Variablen  $w$  und  $y$  neue Variablen gemäß (2.4) eingeführt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 y_n &= y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n} \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_1 &= \dot{y} = \frac{dy}{dt} \\
 &\dots\dots\dots \\
 w_n &= w^{(m)} = \frac{d^m w}{dt^m} \\
 &\dots\dots\dots \\
 w_1 &= \dot{w} = \frac{dw}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mit (2.4) ergibt sich für (2.1) die Gleichung (2.5).

$$\mathbf{F}(y_n, \dots, y_1, y, w_m, \dots, w_1, w) = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

Aus (2.4) folgt weiter das Gleichungssystem (2.6).

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \dot{y}_1 \quad \dots\dots\dots \quad y_n = \dot{y}_{n-1} \\
 &\tag{2.6} \\
 w_2 &= \dot{w}_1 \quad \dots\dots\dots \quad w_n = \dot{w}_{n-1}
 \end{aligned}$$

Aus (2.4) bis (2.6) geht hervor, daß eine nichtlineare Funktion gemäß (2.1) durch ein in Bild 2/4 dargestelltes System eindeutig wiedergegeben ist.

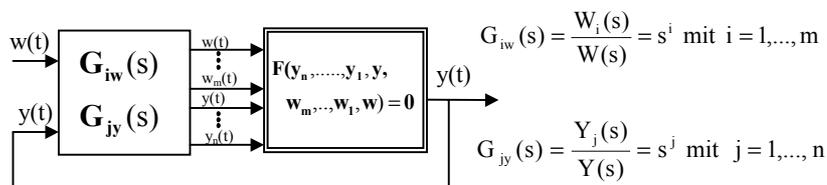


Bild 2/4 Ersatzsystem mit stationären nichtlinearen Kennlinien.

In der Beschreibung (2.1) eines Systems können jetzt die nichtlinearen Beziehungen (2.5) gesondert berücksichtigt werden. Somit läßt sich für jedes dynamische nichtlineare System mit zeitinvarianten Parametern eine in Bild 2/5 dargestellte Ersatzstruktur angeben.

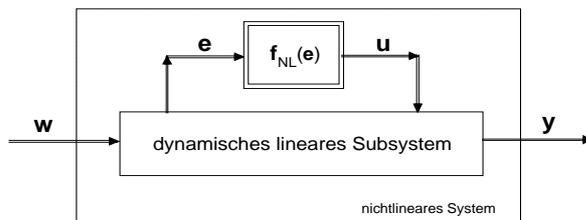


Bild 2/5 Ersatzstruktur für ein dynamisches nichtlineares System.

Die Funktionen  $f_{NL}(e)$  stellen eindeutige nichtlineare Kennlinienglieder dar.

## 2.2 Aufstellung der Systemgleichungen

Das in Bild 2/5 dargestellte System läßt sich weiter umformen. Eine vollständige Struktur, die sich für die Analyse des Systems im Frequenzbereich hervorragend eignet, zeigt Bild 2/6 .

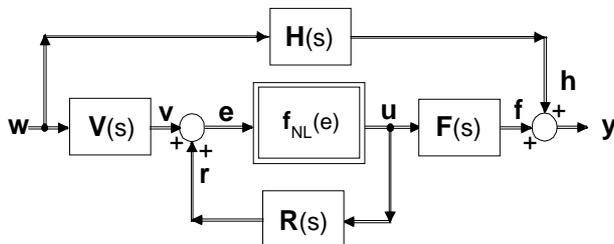


Bild 2/6 Allgemeine Struktur des nichtlinearen Systems

Für die Beschreibung des Systems wird angenommen, daß die Laplace-Transformierten der einzelnen Vektoren  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{e}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  existieren. Diese Festlegung ist nur formell erforderlich, um die Elemente der linearen Matrizen  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{R}$  zu definieren. Dadurch ist eine einfache Beschreibung des Systems möglich.

Um eine übersichtliche Schreibweise zu erreichen, wird auf die übliche Schreibart der transformierten Größen in Großbuchstaben sowie auf den Operator „s“ verzichtet. Jedes Element der Matrix  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{R}$  stellt eine lineare Differentialgleichung dar.

Damit gelten für das in Bild 2/6 dargestellte System folgende Gleichungen:

$$\mathbf{e}_{(n,1)} = \mathbf{V}_{(n,q)}\mathbf{w}_{(q,1)} + \mathbf{R}_{(n,m)}\mathbf{u}_{(m,1)} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{y}_{(k,1)} = \mathbf{H}_{(k,q)}\mathbf{w}_{(q,1)} + \mathbf{F}_{(k,m)}\mathbf{u}_{(m,1)} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_{(m,1)} = \mathbf{f}_{\text{NL}(m,1)}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n). \quad (2.9)$$

Für die einzelnen Größen gilt:

- $n$  = Anzahl der Eingänge der nichtlinearen Glieder  $\mathbf{e}$ ,
- $m$  = Anzahl der Ausgänge der nichtlinearen Glieder  $\mathbf{u}$ ,
- $q$  = Anzahl der Systemeingänge  $\mathbf{w}$ ,
- $k$  = Anzahl der Systemausgänge  $\mathbf{y}$ ,
- Vektoren :  $\mathbf{w}_{(q,1)}$ ,  $\mathbf{e}_{(n,1)}$ ,  $\mathbf{u}_{(m,1)}$ ,  $\mathbf{y}_{(k,1)}$ ,
- Matrizen :  $\mathbf{V}_{(n,q)}$ ,  $\mathbf{H}_{(k,q)}$ ,  $\mathbf{R}_{(n,m)}$ ,  $\mathbf{F}_{(k,m)}$ ,  $\mathbf{f}_{\text{NL}(m,1)}$ .

Die Elemente von  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{F}$  sind bei reellen Systemen rationale Funktionen, die im Weiteren vorausgesetzt werden. Es ist offensichtlich, daß die *nichtlinearen dynamischen* Eigenschaften des Systemverhaltens im Zustandsraum vor allem auf die in Bild 2/7 dargestellte Struktur beschränkt werden können (vgl. hierzu auch die Ausführungen in Kapitel 5 und 6).

Der Einfluß von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{R}$  auf das Systemverhalten kann mit den bekannten Methoden für lineare Systeme untersucht werden (vgl. [5] u.a.).

In einem allgemeinen Fall wird für  $\mathbf{w} = \mathbf{const.}$  die Gleichung (2.10) vorausgesetzt.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbf{V}(s) \frac{\mathbf{w}}{s} \right\} \right) \neq \mathbf{const.} \quad (2.10)$$

Wegen (2.10) wird  $\mathbf{V}(s)$  in der weiteren Analyse der nichtlinearen Systeme berücksichtigt. Gilt jedoch für  $\mathbf{w} = \mathbf{const.}$  und  $t \rightarrow \infty \mathbf{v} = \mathbf{const.}$ , dann kann  $\mathbf{V}(s)$  bei der Analyse weggelassen werden.

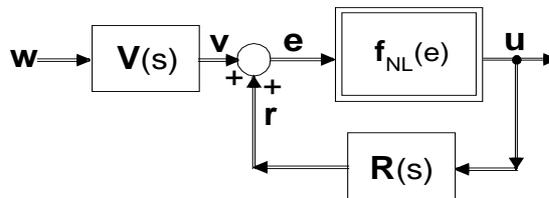


Bild 2/7 Wesentliche Teilstruktur eines nichtlinearen Systems

Das in Bild 2/7 dargestellte System bildet die Grundlage für die weiteren Untersuchungen des Systems im Frequenzbereich. Daraus lassen sich die Beziehungen der Harmonischen Balance (vgl. Kapitel 4) herleiten. Zuerst soll jedoch prinzipiell auf das Verhalten der in diesem Kapitel beschriebenen nichtlinearen Systeme eingegangen werden. Anschließend soll im Abschnitt 3.2 aus der Sicht der Frequenzanalyse auf die Eigenschaften der transienten Vorgänge und somit indirekt auf das Verhalten im Zustandsraum eingegangen werden.



### 3. Das Systemverhalten und die Entstehung von Schwingungen

In ihrer klassischen Darstellung, wie in [3] oder [2] vorgestellt, liefert die Methode der Harmonischen Balance immer wieder brauchbare Ergebnisse auch dann, wenn die Tiefpaßbedingungen nicht erfüllt sind. Warum diese Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Systemverhalten in diesen Fällen so gut ist muß erst untersucht werden.

Die Kapitel 3, 4 und 5 stellen eine erweiterte Betrachtungsweise für die Analyse der Phänomene der Harmonischen Balance in nichtlinearen Systemen vor.

Um mehr Verständnis für das Systemverhalten zu erlangen, muß vordergründig die Frage gestellt werden, wie ein Zustand einer Dauerschwingung überhaupt entstehen kann. Mit den so gewonnenen Erkenntnissen kann dann der bewährte Einsatz der Harmonischen Balance und der Beschreibungsfunktion für eine erweiterte Analyse des Systemverhaltens erfolgen.

Der erste Einblick in das Verhalten eines in Bild 2/7 dargestellten nichtlinearen Systems ist möglich, wenn folgende Untersuchungen des Systems durchgeführt werden:

- Bestimmung der stabilen und instabilen Bereiche des Systems,

- Berechnung der singulären Punkte des Systems d.h. dieser Zustände, für die  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  gilt, wobei  $\mathbf{x}$  für den Vektor der Zustandsvariablen steht.

Die Bestimmung dieser Zustände eines nichtlinearen Systems ist ausführlich in der Literatur beschrieben. Beispielsweise können die notwendigen Untersuchungen gemäß [3] Abs. 1.4 oder 2.2.4 bzw. anderen Literaturquellen entnommen werden. In diesem Zusammenhang soll darauf hingewiesen werden, daß diese Berechnungen nicht mit der Berechnung der Stabilität gleichzusetzen sind. Jene wird separat im Kapitel 6 durchgeführt.

Die erste Einsicht in die stabilen und instabilen Bereiche des nichtlinearen Systems kann mit Hilfe der Theorie für lineare Systeme erfolgen. Im Abschnitt 3.1 soll auf entscheidende Aspekte ihrer Anwendung näher eingegangen werden.

### 3.1 Lineare Betrachtung nichtlinearer Differentialgleichungen mit Kennliniengliedern

Üblicherweise wird bei der linearen Betrachtung nichtlinearer Differentialgleichungen an die Linearisierung der nichtlinearen Kennlinie  $u = f_{NL}(\mathbf{e})$  im Arbeitspunkt (einem stationären Zustand) gedacht. Dabei werden die für  $t \rightarrow \infty$  gültigen Werte  $\mathbf{e}_\infty$  berücksichtigt, um die für die Linearisierung notwendigen Differentialquotienten zu bilden. Damit läßt sich die nichtlineare Kennlinie für die Änderungen  $\Delta \mathbf{e}$  um den Arbeitspunkt als eine lineare Funktion (3.1) darstellen. Einzelheiten hierzu können z.B. [5], Abschnitt 2.7 entnommen werden.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f_{NL}}{\partial e_i} \right]_{\infty} \Delta e_i. \quad (3.1)$$

Um jedoch zu beurteilen, wie sich ein nichtlineares System in einem Zeitintervall  $t_x$  bis  $t_x + \Delta t$ , mit  $\Delta t \rightarrow 0$  verhalten wird, muß anders vorgegangen werden. Diese Sichtweise des Systemverhalten, *die wegen  $\Delta t \rightarrow 0$  zugleich das Verhalten für  $\omega \rightarrow \infty$  darstellt*, ermöglicht eine andere lineare Betrachtung der

nichtlinearen Differentialgleichungen, welche einen wichtigen Einblick in die Systemeigenschaften eröffnet.

In jedem beliebigen Zustand des nichtlinearen Systems und zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t_x$  (Wegen der Integrationsvariablen  $t$  wird hier die Variable  $t_x$  verwendet.) gilt für eine eindeutige Kennlinie  $u = f_{NL}(e)$  mit einer Eingangsvariablen  $e$  die Beziehung (3.2).

$$u = f_{NL}(e) = e K_{NL}(e) \quad (3.2)$$

Damit kann in  $t_x$  der Zustand einer nichtlinearen Differentialgleichung für  $t_x + \Delta t$ , mit  $\Delta t \rightarrow 0$  durch eine lineare Differentialgleichung beschrieben werden. Ebenso gelten für nichtlineare Glieder mit mehreren Eingangsvariablen  $e_1, e_2, \dots, e_n$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_x$  einer eindeutigen Funktion  $u = f_{NL}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  die Gleichungen (3.3). Jede der Gleichungen in (3.3) definiert den gleichen Wert von  $u$ , weil  $u$  in  $t_x$  für alle Eingangsvariablen gleich ist. Mit

$$\begin{aligned} u &= \frac{f_{NL}(e_1, e_{2tx}, \dots, e_{ntx})}{e_1} e_1 = K_{NL11}(e_1) e_1, \\ u &= \frac{f_{NL}(e_{1tx}, e_2, \dots, e_{ntx})}{e_2} e_2 = K_{NL12}(e_2) e_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ u &= \frac{f_{NL}(e_{1tx}, e_{2tx}, \dots, e_n)}{e_n} e_n = K_{NL1n}(e_n) e_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

ist das Übertragungsverhalten zwischen dem Ausgang  $u$  und den einzelnen Eingängen  $e_1, e_2, \dots, e_n$  definiert. Das gemeinsame Wirken der Eingänge auf den Ausgang wird durch die Addition der linken und rechten Seiten von (3.3) ermittelt. Damit ist es möglich für nichtlineare Funktionen mit mehreren Variablen in  $t_x$  eine lineare Ersatzfunktion abzuleiten. Für  $u$  gilt damit die Gleichung (3.4).

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} (\mathbf{K}_{NL11}(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}_{NL11}(\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{K}_{NL1n}(\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n) \quad (3.4)$$

In  $t_x$  ist das Systemverhalten eindeutig durch (3.2) bis (3.4) bestimmt. Es kann erwartet werden, daß das System, in der Zeit von  $t_x$  bis  $t_x + \Delta t$ , mit  $\Delta t \rightarrow 0$  d.h für  $\omega \rightarrow \infty$  sich als ein lineares System mit bestimmten Anfangsbedingungen und linearen Ersatzverstärkungsfaktoren  $K_{NLki}$  aus (3.2) bzw. (3.3) verhalten wird. Für die nichtlinearen Glieder mit  $i=1,2,\dots,n$  Eingänge und  $k=1,2,\dots,m$  Ausgänge gilt damit die in Bild 3/1 dargestellte Struktur und die daraus resultierende Gleichung (3.5).

$$u_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{NLki}(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n K_{NLki}^* \mathbf{e}_i \quad (3.5)$$

mit  $K_{NLki}^* = K_{NLki}(\mathbf{e}_i)/n$  und  $K_{NLki}(\mathbf{e}_i)$  gemäß (3.3).

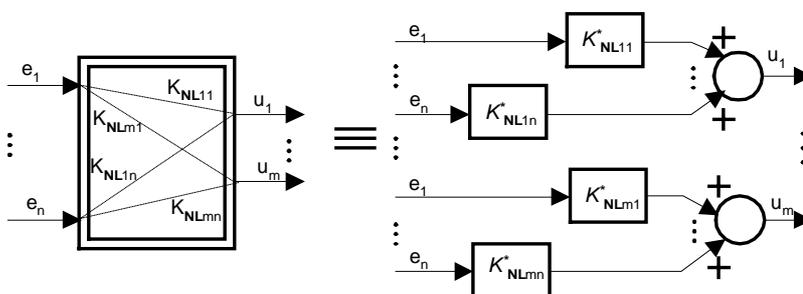


Bild 3/1 Ersatzstruktur eines Kennliniengliedes mit mehreren Eingangs- und Ausgangsvariablen

Diese Zusammenhänge lassen sich noch weiter im Zeitbereich darstellen. Zu diesem Zweck werden die Gleichungen des nichtlinearen Systems in eine zustandsraumrelevante Beschreibung überführt.

Bezogen auf die Vektoren  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{r}$  stellt das nichtlineare System (vgl. Bild 2/7) eine Serienschaltung von zwei linearen Subsystemen dar. Das nachfolgende Subsystem kann als eine Reihenschaltung eines „Verstärkungsfaktors“  $\mathbf{K}_{\text{NL}}(\mathbf{e})$  gemäß (3.5) mit einer linearen Zustandsstruktur, welche durch die Rückführung der Größe  $\mathbf{r}$  gekoppelt ist, angesehen werden. Wegen (3.2) bis (3.5) können die nichtlinearen Beziehungen in der Form (3.6) dargestellt werden.

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{e}) = \mathbf{K}_{\text{NL}}(\mathbf{e}) \mathbf{e} \quad (3.6)$$

$\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{e})$  ist dabei eine Matrix der nichtlinearen Funktionen. Für sie gilt gemäß (3.3) und (3.4) die Gleichung (3.7).

$$\mathbf{K}_{\text{NL}}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{K}_{\text{NL1}}(\mathbf{e})}{n_1}, & \dots, & \frac{\mathbf{K}_{\text{NL}n_1}(\mathbf{e})}{n_1}, & 0, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & 0 \\ 0, & \dots, & 0, & \frac{\mathbf{K}_{\text{NL2}(n_1+1)}(\mathbf{e})}{n_2}, & \dots, & \frac{\mathbf{K}_{\text{NL2}(n_1+n_2)}(\mathbf{e})}{n_2}, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots, & \dots \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Bei der Durchführung der Berechnungen ist an dieser Stelle die Einführung von fiktiven nichtlinearen Funktionen, die einen 0-Wert liefern, empfehlenswert (vgl. hierzu [17] und [14] Abschnitt 2.1.2). Damit wird die Dimensionsgleichheit der nichtlinearen Ein- und Ausgänge und in der Folge die gewünschten quadratischen Matrizen der Systembeschreibung erreicht. Für  $\mathbf{e}$  in (3.6) gilt weiter die Gleichung (3.8).

$$\mathbf{e} = \mathbf{v} + \mathbf{r} \quad (3.8)$$

Für  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{r}$  können in Abhängigkeit von  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{u}$  sowie der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_V$  von  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{x}_R$  von  $\mathbf{R}$  die Gleichungen (3.9) und (3.10) angegeben werden (vgl. hierzu auch [12], Abschnitt 2).

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \mathbf{w} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_v &= \mathbf{A}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{B}_v \mathbf{w} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{D}_v \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{u} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_R &= \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R + \mathbf{B}_R \mathbf{u} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{C}_R \mathbf{x}_R + \mathbf{D}_R \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\mathbf{A}_v$ ,  $\mathbf{B}_v$ ,  $\mathbf{C}_v$ ,  $\mathbf{D}_v$  sowie  $\mathbf{A}_R$ ,  $\mathbf{B}_R$ ,  $\mathbf{C}_R$  und  $\mathbf{D}_R$  stellen die bekannten Matrizen der Zustandsraumdarstellung eines linearen Systems dar.

In (3.6) kann für  $\mathbf{e}$  (3.8), für  $\mathbf{v}$  aus (3.8) die Gleichung (3.9) und schließlich für  $\mathbf{r}$  aus (3.8) die Gleichung (3.10) eingesetzt werden. Daraus entsteht (3.11).

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_{NL} \mathbf{C}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{K}_{NL} \mathbf{D}_v \mathbf{w} + \mathbf{K}_{NL} \mathbf{C}_R \mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{NL} \mathbf{D}_R \mathbf{u} \quad (3.11)$$

Mit (3.12)

$$\mathbf{H}_{NL} = (\mathbf{1} - \mathbf{K}_{NL} \mathbf{D}_R)^{-1} \mathbf{K}_{NL} \quad (3.12)$$

gilt für (3.11) die Gleichung (3.13).

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_{NL} \mathbf{C}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{H}_{NL} \mathbf{C}_R \mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{NL} \mathbf{D}_v \mathbf{w} \quad (3.13)$$

Die Darstellung (3.13) ist nur dann möglich, wenn  $\mathbf{H}_{NL}$  existiert. D.h. die Determinante  $\det(\mathbf{1} - \mathbf{K}_{NL} \mathbf{D}_R) \neq 0$  ist. Dieser Fall kann bei einem realen System vorausgesetzt werden, weil sonst gar kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen bestehen würde. Weitere Ausführungen hierzu können beispielsweise [5], Abschnitt 9.1 und 9.3 entnommen werden. Eine zu (3.13) äquivalente Ausgangsgleichung des nichtlinearen Systems ist in Blockschreibweise in (3.14) angegeben.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{NL} \mathbf{C}_v & \mathbf{H}_{NL} \mathbf{C}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_R \end{pmatrix} + (\mathbf{H}_{NL} \mathbf{D}_v)(\mathbf{w}) \quad (3.14)$$

Analog kann aus (3.6) bis (3.10) mit  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_R + \mathbf{B}_R \mathbf{H}_{NL} \mathbf{C}_R$  die Gleichung (3.15) hergeleitet werden.

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_v \\ \dot{\mathbf{x}}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_R \mathbf{H}_{NL} \mathbf{C}_v & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_R \mathbf{H}_{NL} \mathbf{D}_v \end{pmatrix} (\mathbf{w}) \quad (3.15)$$

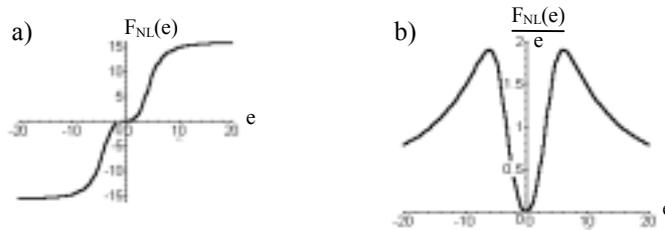
Enthält das System nur nichtlineare Glieder mit einem Eingang, dann ist der Einsatz der Ersatzverstärkungsfaktoren gemäß (3.2) plausibel. In diesem Fall werden die Stabilitätsbereiche des nichtlinearen Systems durch die Untersuchung des linearen Systems mit  $\mathbf{K}_{NL}$  als Parameter durchgeführt. Die Ersatzverstärkungsfaktoren  $\mathbf{K}_{NL}$  ersetzen dabei die nichtlinearen Funktionen. Die bei dieser Untersuchung gewonnenen Informationen ermöglichen zusammen mit der Untersuchung der Ruhelagen des Systems die erste Beurteilung der Systemeigenschaften. Die Vorgehensweise läßt sich an einem Beispiel verdeutlichen.

### Beispiel 3.1

Es soll ein Standardregelkreis von Bild 1/1 untersucht werden, welcher eine in Bild 3/2 dargestellte nichtlineare Funktion enthält. Für  $G(s)$  gilt (3.16).

$$G(s) = \frac{-150(s+3)(s+0.1)}{(s+1)(s+100)(s+2)^2} \quad (3.16)$$

Die stabilen und instabilen Bereiche des Regelkreises können z.B. durch die Anwendung des Nyquist-Kriteriums auf den Frequenzgang des offenen Kreises festgelegt werden.



- a) nichtlineare Kennlinie  $F_{NL}(e) = 10 \arctan(e^3/100)$   
 b) Ersatzverstärkungsfaktor  $K_{NL}(e) = (10/e) \arctan(e^3/100)$

Bild 3/2 Nichtlineare Funktion zu Beispiel 3.1

Die Untersuchung muß für  $0 < K_{NL} < 1,9$  gemäß Bild 3/2 b) durchgeführt werden. Sie ist in Bild 3/3 dargestellt.

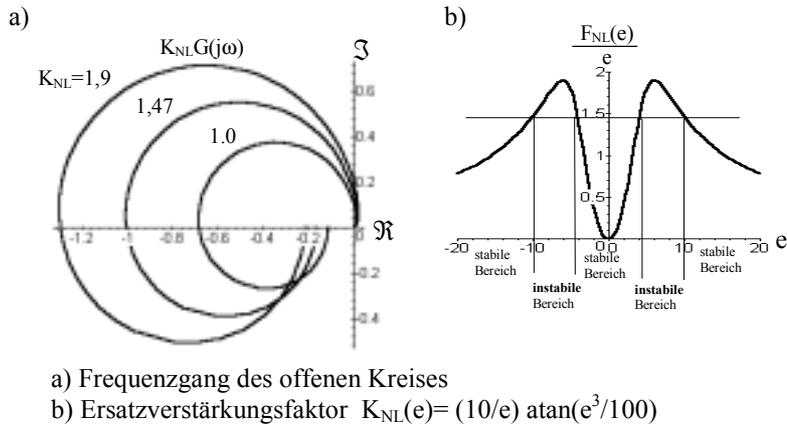


Bild 3/3 Ermittlung der stabilen und instabilen Bereiche des Regelkreises Beispiel 3.1

Für  $K_{NL} > 1,47$  weist der Verlauf von  $G(j\omega, K_{NL})$  um den Punkt  $(-1,0)$  auf ein instabiles Systemverhalten hin. Die stabilen und instabilen Bereiche sind in Bild 3/2 b) gekennzeichnet. Die singulären Punkte des Systems können Bild 3/4 entnommen werden. Sie sind für alle Schnittpunkte von  $u = (w_0 - e)/G_0$  mit  $u = F_{NL}(e) = 10 \operatorname{atan}(e^3/100)$  gegeben wobei  $G_0 = G(s=0)$  ist.

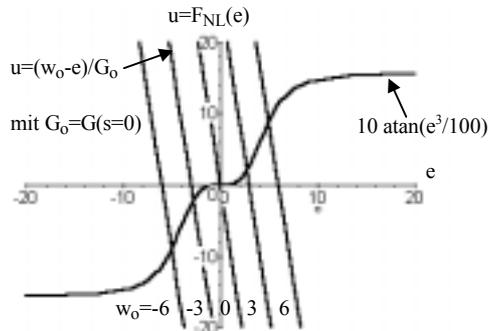


Bild 3/4 Graphische Darstellung der e- und u-Werte der singulären Punkte des Regelkreises von Beispiel 3.1

Aus Bild 3/4 , Bild 3/3 und Bild 3/2 kann die grundlegende Beurteilung des Systemverhaltens erfolgen:

1. Für kleine  $e$  und  $w_0$  könnten im System *stationäre Zustände ohne Schwingungen* auftreten, weil es solche  $K_{NL} \in (0 \dots 1,47)$  gibt, die auf ein stabiles Systemverhalten für  $\omega \rightarrow \infty$  deuten. Gleichzeitig sind diese  $K_{NL}$  für kleine  $e$  möglich. Das heißt, daß es um *die Ruhelage  $\equiv 0$*  (alle Zustandsvariablen sind gleich 0) einen stabilen Bereich gibt, wo solche  $w_0 = \text{const.}$  existieren, daß das System die in Bild 3/4 angezeigten Zustände annehmen könnte. *Möglicherweise* führt das System in diesem Bereich eine Schwingung mit einer festen Frequenz  $\omega$  aus.
2. Für größere Werte von  $e$  und  $w_0$  existieren bezogen auf  $\omega \rightarrow \infty$  sowohl stabile als auch instabile Bereiche im Systemverhalten. Somit können *Grenzschwingungen nicht ausgeschlossen* werden. *Möglicherweise* können *auch stabile Ruhelagen ohne Grenzschwingungen* für große Werte von  $e$  erreicht werden.

In Bild 3/5 sind die entsprechenden Simulationsergebnisse dargestellt. Sie bestätigen die Aussagen vom Punkt 1 und 2.

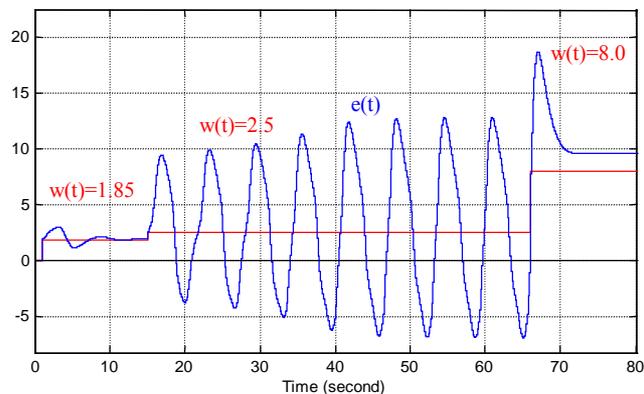


Bild 3/5 Die Simulationsergebnisse des Regelkreises von Beispiel 3.1

Bei Systemen, die nichtlineare Funktionen mit mehreren Variablen enthalten, muß die lineare Untersuchung der stabilen und instabilen Bereiche die Ersatzstruktur von Bild 3/1 berücksichtigen. Die Zusammenhänge lassen sich am Beispiel eines in Bild 3/6 dargestellten Regelkreises nachvollziehen.

### Beispiel 3.2

Im Regelkreis von Bild 3/6 stellt die nichtlineare Funktion ein Produkt  $e$  der Variablen  $e_1$  und  $e_2$  mit einer Begrenzung  $B=9$  der Ausgangsgröße  $u$  für  $|e_1 e_2| \geq 9$ .

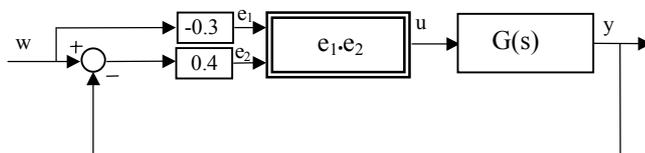


Bild 3/6 Regelkreis mit einem Kennlinienglied mit zwei Eingangsvariablen.

Für  $G(s)$  gilt die Gleichung (3.17).

$$G(s) = \frac{600(s+48)(s+1.5)(s+0.1)}{(s+1)(s+20)(s+100)(s+2)^2} \quad (3.17)$$

Die einzelnen Verstärkungsfaktoren gemäß (3.3) können (3.18) und (3.19) entnommen werden. Der Index  $t_x$  wird dafür verwendet, diese Variablen zu kennzeichnen, welche als Parameter mit dem Wert in  $t_x$  in die Gleichung des Verstärkungsfaktors eingehen. Es gilt:

$$K_{NL11}(e_1) = \frac{u_1}{e_1} = \frac{e_1 e_{2t_x}}{e_1} = e_{2t_x}, \quad \text{für den linearen Bereich } |e_1 e_{2t_x}| < 9$$

$$K_{NL11}(e_1) = \frac{B \operatorname{sgn}(e_1 e_2)}{e_1} = \frac{9 \operatorname{sgn}(e_1 e_2)}{e_1}, \quad \text{für die Sättigung } |e_1 e_{2t_x}| \geq 9 \quad (3.18)$$

$$K_{NL12}(e_2) = \frac{u_1}{e_2} = \frac{e_{1tx} e_2}{e_2} = e_{1tx}, \quad \text{für den linearen Bereich } |e_{1tx} e_2| < 9$$

$$K_{NL12}(e_2) = \frac{B \operatorname{sgn}(e_1 e_2)}{e_2} = \frac{9 \operatorname{sgn}(e_1 e_2)}{e_2}, \quad \text{für die Sättigung } |e_{1tx} e_2| \geq 9 \quad (3.19)$$

Aus den oben aufgeführten Gleichungen für die Verstärkungsfaktoren geht hervor, daß sich  $K_{NL11}$  und  $K_{NL12}$  für  $-\infty < e_1, e_2 < +\infty$  insgesamt in folgendem Bereich verändern können:

$$K_{NL11}(e_1) \in (-\infty, +\infty) \quad \text{und} \quad K_{NL12}(e_2) \in (-\infty, +\infty). \quad (3.20)$$

Nach der Berücksichtigung der Beziehung (3.5) für  $n=2$  ist der Regelkreis für folgende Verstärkungsfaktoren zu prüfen:

$$K_{NL11}^* \in (-\infty, +\infty) \quad \text{und} \quad K_{NL12}^* \in (-\infty, +\infty). \quad (3.21)$$

Die Untersuchung der Stabilitätsbereiche kann jetzt beispielsweise durch die numerische Berechnung der Pole des geschlossenen Regelkreises erfolgen. Für die Berechnung gilt die in Bild 3/7 dargestellte Ersatzstruktur.

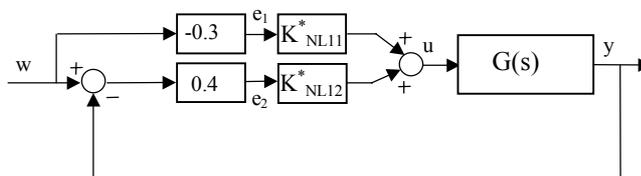


Bild 3/7 Ersatzstruktur für die Untersuchung der Stabilitätsbereiche

Die Gleichung (3.22) enthält die Übertragungsfunktion  $G_g(s) = y/w$  des geschlossenen Regelkreises von Bild 3/7.

$$G_g(s) = \frac{Z_g(s)}{N_g(s)} = \frac{60(4K_{NL12}^* - 3K_{NL11}^*)(s+48)(s+1.5)(s+0.1)}{(s+1)(s+20)(s+100)(s+2)^2 + 240K_{NL12}^*(s+48)(s+1.5)(s+0.1)} \quad (3.22)$$

Jetzt kann die charakteristische Gleichung von  $G_g(s)$  d.h.  $N_g(s)=0$  untersucht werden. Dadurch werden die stabilen und instabilen Bereiche des Systems d.h. die Polverschiebung in Abhängigkeit von  $K_{NL12}^*$  sichtbar gemacht. Der Wert  $K_{NL11}^*$  wirkt sich nicht auf die Stabilitätsbereiche aus, da er die charakteristische Gleichung von  $G_g(s)$  weder über die Pole noch über die Nullstellen des Systems beeinflusst.

In Bild 3/8 ist die für die Untersuchung relevante Verteilung der Realteile der Pole  $\Re(s_i)$  des Systems von Beispiel 3.2 enthalten. Positive Realteile können für alle  $K_{NL12}^* < -1.165$  ausgewiesen werden. Daraus geht hervor, daß das System für all  $e_1$  und  $e_2$ , welche  $K_{NL12}^* < -1.165$  erzeugen, einen instabilen Charakter für  $\omega \rightarrow \infty$  d.h. für  $t_x$  bis  $t_x + \Delta t$ , mit  $\Delta t \rightarrow 0$  aufweisen wird.

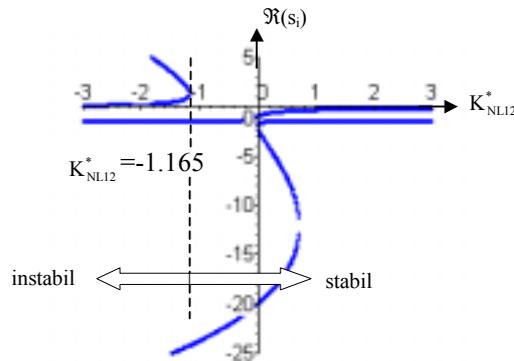


Bild 3/8 Realteile der Pole  $\Re(s_i)$  des Systems von Beispiel 3.2 in Abhängigkeit von  $K_{NL12}^*$

Die möglichen stationären Werte  $e_{1\infty}$ ,  $e_{2\infty}$ ,  $y_\infty$  von  $e_1$ ,  $e_2$  und  $y$  der singulären Punkte können unter Berücksichtigung von (3.5), (3.18) und (3.19) berechnet werden.

Damit gilt für den linearen Bereich d.h. für  $|e_{1\infty}e_{2\infty}| < 9$  mit  $K_{NL12}^* = e_{1\infty}/2$ ,  $K_{NL11}^* = e_{2\infty}/2$  und  $G_g(s=0) = \lim_{s \rightarrow 0} (G_g(s))$  die Gleichung (3.23).

$$y_{\infty} = \frac{1728 \frac{e_{1\infty}}{2} - 1296 \frac{e_{2\infty}}{2}}{8000 + 1728 \frac{e_{1\infty}}{2}} w_{\infty} \quad (3.23)$$

Für die Begrenzung d.h. für  $|e_{1\infty}e_{2\infty}| \geq 9$  gilt (3.24)

$$y_{\infty} = \frac{1728 \frac{9 \operatorname{sgn}(e_{1\infty}e_{2\infty})}{2e_{2\infty}} - 1296 \frac{9 \operatorname{sgn}(e_{1\infty}e_{2\infty})}{2e_{1\infty}}}{8000 + 1728 \frac{9 \operatorname{sgn}(e_{1\infty}e_{2\infty})}{2e_{2\infty}}} w_{\infty} \quad (3.24)$$

Für  $w_{\infty}$  gilt :  $w_{\infty} = w(t \rightarrow \infty) = \text{const.}$

Die in Bild 3/9 dargestellte Simulation bestätigt die Richtigkeit von (3.23) und (3.24). Wegen  $|e_{1\infty}e_{2\infty}| = |(-0.6)(0.919)| < 9$  (vgl. Bild 3/9 a) gilt für  $y_{\infty}$  die Gleichung (3.23). Mit  $w_{\infty}=2.0$  ergibt sich für  $y_{\infty}$  der Wert  $-0.149$ . Ebenso gilt für (3.24) der Wert  $y_{\infty}=-4.86$  wobei  $w_{\infty}=10.0$ ,  $e_{1\infty}=-3.0$  und  $e_{2\infty}=5.94$  ist (vgl. Bild 3/9 b).

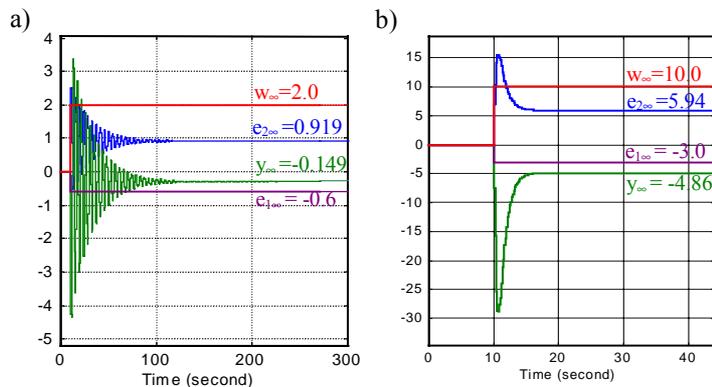


Bild 3/9 Stationäre Zustände des Systems von Beispiel 3.2

Mit der weiteren Analyse der Gleichungen (3.18) und (3.19) und der Berücksichtigung der Ergebnisse für die Untersuchung der singulären Punkte und des Verhaltens des Systems für  $\omega \rightarrow \infty$  lassen sich weitere Schlüsse ziehen:

1. Für  $w=0$  existiert, wegen  $e_1=0$  und damit  $u=0$ , eine Ruhelage des Systems im Nullpunkt. Weiterhin kann das System für kleine  $e_1$  auch kleine  $e_2$  erzeugen, welche  $K_{NL12}^* > -1.165$  ergeben. Damit kann erwartet werden, daß sich für genügend kleine Ansteuerung des Systems ein stationärer Zustand ohne Grenzwahlungen einstellen kann. Die in Bild 3/9 a) dargestellte Simulation bestätigt diese Aussagen.
2. Für größere Werte von  $w$  zeigt das System zuerst einen instabilen Charakter, weil  $K_{NL12}^* < -1.165$  wird. Mit dem wachsenden Werten von  $e_2$  oder  $e_1$  bzw.  $w$  bewegt sich  $K_{NL12}^*$  auf den Wert 0 zu und das System wird wieder stabil. Damit entstehen *möglicherweise* Schwingungen im System. Für genügend große Werte von  $w$  könnten deswegen auch stationäre Zustände ohne Grenzwahlungen entstehen.

Die Simulationsverläufe von Bild 3/10 zeigen die möglichen Grenzwahlungen und die Auswirkung von  $w(t)$  auf den stationären Zustand bei größeren Werten von  $w$ .

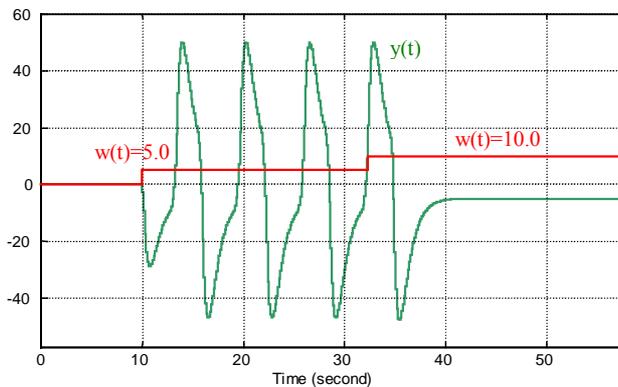


Bild 3/10 Simulationsverläufe zu Beispiel 3.2

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Betrachtung eines nichtlinearen Systems ermöglicht die Analyse des Entstehungsvorganges *einer potentiellen Schwingung*, wenn *stabile und instabile Bereiche im System* für  $\omega \rightarrow \infty$  vorkommen.

Allerdings ist es möglich, sich bei Systemen mit vollständig stabilem Bereich für  $\omega \rightarrow \infty$  die Schwingungsphänomene für andere Frequenzen vorzustellen.

Deswegen muß bei der Schwingungsanalyse mit Hilfe der Harmonischen Balance, eine solche Beschreibung der einzelnen Größe im System angestrebt werden, die für einen transienten Vorgang eine Untersuchung des Systemverhaltens im Frequenzbereich ermöglicht. Gleichzeitig muß gewährleistet werden, daß das Übertragungsverhalten der linearen und nichtlinearen Glieder in einem beliebigen Zeitaugenblick  $t_x$  für alle Frequenzen  $0 < \omega < \infty$  genau wie bei  $\omega \rightarrow \infty$  eindeutig analysiert werden kann. Die grundlegenden Zusammenhänge hierzu sind im Abschnitt 3.2 beschrieben.

## 3.2 Harmonische Betrachtung transienter Zeitvorgänge

Nach der Auslenkung aus einer Ruhelage soll das Systemverhalten untersucht werden. Für  $t < 0$  gilt in einer Ruhelage:

$$\text{alle } f(t < 0) = f_0 = \text{const.} \quad (3.25)$$

Wenn der momentane Zustand des nichtlinearen Systems für ein beliebiges  $t = t_x$  untersucht werden soll, dann ist für  $t \in (0 \dots t_x)$  nur ein Ausschnitt aus einem Verlauf  $f(t)$  für  $t \in (0 \dots \infty)$  zu betrachten.

Der transiente Vorgang kann unter diesen Voraussetzungen in dem Zeitintervall  $t \in (0 \dots t_x)$  als Fourierreihe dargestellt werden. Die physikalische Bedeutung der Fourierreihe ist z.B. in [4] ausführlich beschrieben. Es soll darauf nicht näher eingegangen werden. Für diese Arbeit stellt sich nur die Frage, welche Besonderheiten für die Analyse der Übertragungseigenschaften der linearen und nichtlinearen Glieder im Frequenzbereich berücksichtigt werden müssen. Im Folgenden wird die Verwendung der Fourierreihe für die Analyse des transienten Vorganges sowie ihre daraus resultierende physikalische Deutung kurz vorgetragen.

Genügt die Zeitfunktion  $f(t)$  im Intervall  $t=t_0$  bis  $t_x$  mit  $t_0 \in (0 \dots t_x)$  den Dirichletschen Bedingungen, dann ist sie in diesem Zeitintervall durch eine Fourierreihe (3.26) beschrieben. Da die Fourierreihe für die Sprungstellen in  $t=t_s$  den Wert  $\{(f(t_s+0) + f(t_s-0))/2\}$  liefert, muß in der hier stattfindenden Betrachtung dieser Umstand in  $t=t_0$  und  $t=t_x$  berücksichtigt werden. In  $t_0$  und  $t_x$  besitzt die Reihe (3.26) Sprungstellen, die dem tatsächlichen Verlauf von  $f(t)$  nicht entsprechen. Sonst ist  $f(t)$  für  $t=t_0+0$  bis  $t_x-0$  eindeutig durch (3.26) abgebildet. Ein so abgebildeter Abschnitt der Funktion  $f(t)$  wird weiter als  $f_{0-x}(t)$  bezeichnet.

$$f_{0-x}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( A_{C\eta} \cos(\eta 2\pi t / (t_x - t_0)) + A_{S\eta} \sin(\eta 2\pi t / (t_x - t_0)) \right)$$

$$A_{C\eta} = \frac{2}{t_x - t_0} \int_{t_0}^{t_x} f(t) \cos(\eta 2\pi t / (t_x - t_0)) dt \quad \eta = 0, 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

$$A_{S\eta} = \frac{2}{t_x - t_0} \int_{t_0}^{t_x} f(t) \sin(\eta 2\pi t / (t_x - t_0)) dt \quad \eta = 1, 2, \dots$$

Für die Periodendauer  $T_x$  gilt:  $T_x = t_x - t_0$ .

Es ist offensichtlich, daß diese Fourierreihe die Zeitfunktion  $f(t)$  *nur in einem einzigen Augenblick nämlich in  $t_x$  und nur für  $t \in (t_0 \dots t_x)$*  korrekt beschreibt. Mit der wachsenden Zeit  $t$  verlängert sich die Periodendauer  $T_x$  von (3.26) und die Amplituden und Phasenverschiebungen der einzelnen Harmonischen verändern sich.

Bei den linearen Gliedern wird die Auswirkung des Frequenzganges  $G(j\omega)$  und des Eingangssignals  $u$  der Übertragungsfunktion  $G(s)=r(s)/u(s)$  auf ihr Ausgangssignal  $r$  betrachtet.  $G(j\omega)$  bietet eine wichtige Möglichkeit, den Gehalt der Harmonischen in  $r$  darzustellen.

Unter der Voraussetzung, daß  $u(t)$  als Fourierreihe (3.26) gegeben ist, existiert für  $u(t)$  die Laplacetransformierte  $u(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ .

Die Anwendung der Laplacetransformation liefert folgende Beziehung:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{r(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)u(s) + F_{AN}(s)\}, \quad (3.27)$$

wobei die Funktion  $F_{AN}(s)$  die Anfangsbedingungen einbezieht. Im weiteren muß die Verschiebung der Zeit um  $t_0$  in (3.27) berücksichtigt werden.

Mit  $s=j\omega$  gilt für  $t \in (t_0 \dots t_x)$  folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} r_{0-x}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \Re\{(U_{sn} + jU_{cn})G(jn\omega_{x0})\} \sin(n\omega_{x0}(t-t_0)) \right. \\ &\quad \left. + \Im\{(U_{sn} + jU_{cn})G(jn\omega_{x0})\} \cos(n\omega_{x0}(t-t_0)) \right) + r_r(t-t_0) = \quad (3.28) \\ &= r_h(t-t_0) + r_r(t-t_0) \end{aligned}$$

wobei  $r_h(t-t_0)$  der harmonische Anteil ist,  $r_r(t-t_0)$  als eine Restfunktion bezeichnet werden kann und  $U_{sn}$ ,  $U_{cn}$  die Fourierintegrale aus (3.26) für  $u$  darstellen.  $r_r(t-t_0)$  soll bei stabilen Systemen für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen konstanten Wert streben und kann gemäß (3.29) berechnet werden.

$$r_r(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)G(s) + F_{AN}(s)\} - r_h(t-t_0) \quad (3.29)$$

Beispiel 3.3 veranschaulicht den Umgang mit den einzelnen Zeitintervallen und harmonischen Funktionen.

**Beispiel 3.3.**

Ein Integrator  $G(s)=R(s)/U(s)=1/s$  befindet sich in der Ruhelage  $\equiv 0$  und wird zum Zeitpunkt  $t=0$  durch das Eingangssignal  $u(t)=1+\sin(t)$  angesteuert. In  $t_x=10$  sek sollen die Amplituden und Phasenverschiebungen der ersten Harmonischen des Ausgangssignals  $r(t)$  und  $r_{0-x}(t)$  für die Frequenz  $\omega_{x0}=2\pi/5 \text{ sek}^{-1}$  berechnet werden.

Das Ausgangssignal  $r(t)$  kann durch die Anwendung der Laplacetransformation berechnet werden. Es gilt  $r(t)=t+1-\cos(t)$ . Mit (3.28) und der Anwendung des Frequenzganges  $G(j\omega)$  gilt:

$$r_{0-x}(t) = r_h(t-t_0) + r(t=5) + (t-t_0) \cdot U_0/2 + \sum_{\eta=1}^{\infty} \{U_{\eta s} / \eta \omega_{x0}\}. \quad (3.30)$$

$r_h(t-t_0)$  stellt den harmonischen Anteil des Signals  $r_{0-x}(t)$  dar.

Die obigen Funktionen sind in Bild 3/11 dargestellt.

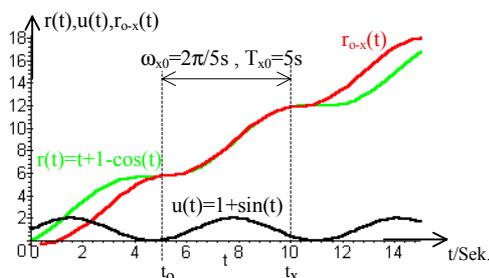


Bild 3/11 Funktionen  $u(t)$ ,  $r(t)$  und  $r_{0-x}(t)$  vom Beispiel 3.3

Aus der Perspektive der Entwicklung eines transienten Vorgangs in die Fourierreihe kann gesagt werden, daß der Vorgang für  $T_x=t_x=0$  mit der Frequenz  $\omega_x=\infty$  beginnt. Mit der wachsenden Zeit  $t_x$  wird  $\omega_x=2\pi/t_x$  kleiner. Für  $t_x \rightarrow \infty$  gilt schließlich  $\omega_x=0$ .

Die oben vorgeführte Betrachtungsweise gilt auch bei *nichtlinearen Kennliniengliedern*. Da sie nicht von der Frequenz  $\omega$  abhängig sind, entstehen an ihren Ausgängen nur harmonische Anteile.

Für die nichtlinearen Glieder kann jetzt eine sehr wichtige Aussage formuliert werden.

*Das Ein- bzw. Ausgangssignal des nichtlinearen Gliedes kann für  $t=t_x$  und  $\omega_{x0}=2\pi/(t_x-t_0)$  in die Fourierreihe (3.26) entwickelt werden. Diese Fourierreihe stellt im Allgemeinen eine „Fenster“-Funktion dar, welche die Aussagen **über das Übertragungsverhalten des Signals der untersuchten Frequenz  $\omega_{x0}$**  liefert.*

(3.31)

In einem Zeitaugenblick  $t=t_x$  läßt sich die Übertragungsfunktion  $G_{NL(\omega_{x0})}(s)$  der Harmonischen  $\omega_{x0}$  zwischen dem Eingang  $e$  und dem Ausgang  $u$  eines nichtlinearen Kennliniengliedes gemäß (3.32) angeben.

$$G_{NL(\omega_{x0})}(s) = \frac{\mathcal{L}\{u_{\omega_{x0}}\}}{\mathcal{L}\{e_{\omega_{x0}}\}} = \frac{\mathcal{L}\{E_{\omega_{x0}} K_{NL(t_x)} \sin(\omega_{x0}t + \gamma_{t_x} + \varphi_{t_x})\}}{\mathcal{L}\{E_{\omega_{x0}} \sin(\omega_{x0}t + \gamma_{t_x})\}}$$

$$= \frac{sK_{NL(t_x)} \sin(\gamma_{t_x} + \varphi_{t_x}) + \omega_{x0}K_{NL(t_x)} \cos(\gamma_{t_x} + \varphi_{t_x})}{s \sin(\gamma_{t_x}) + \omega_{x0} \cos(\gamma_{t_x})} \quad (3.32)$$

In (3.32) haben die einzelnen Größen folgende Bedeutung:

$E_{\omega_{x0}}$ : Amplitude der Harmonischen  $\omega_{x0}$  des Eingangssignals  $e(t)$  in  $t_x$ .

$K_{NL(t_x)}$ : Verstärkungsfaktor der Harmonischen  $\omega_{x0}$  des Eingangssignals  $e(t)$  in  $t_x$ .

$\gamma_{t_x} + \varphi_{t_x}$ : Phasenverschiebung der Harmonischen  $\omega_{x0}$  im Ausgangssignal  $u(t)$  in  $t_x$ , bezogen auf  $t_0$ .

$\gamma_{t_x}$ : Phasenverschiebung der Harmonischen  $\omega_{x0}$  des Eingangssignals  $e(t)$  in  $t_x$ , bezogen auf  $t_0$ .

Diese Beschreibung *des transienten Vorganges* für ein nichtlineares System hat den Vorteil, daß sie in einem beliebigen Zeitaugenblick  $t_x$  dem System für die Zeit von  $t_x$  bis  $(t_x+t_0)$  eine Wiederholung des Signalverlaufs vom Intervall  $t_0$  bis  $t_x$  unterstellt. D.h. vom System wird erwartet, daß es eine Schwingung mit der Periodendauer  $T_{0x}=t_x-t_0$  ausführen wird. Ob das System tatsächlich dem ihm unterstellten Verlauf folgen wird, muß noch später untersucht werden.

Aus (3.32) geht hervor, daß die Analyse der Eigenschwingungen im System nur dann erfolgreich durchgeführt werden kann, wenn **alle Verstärkungsfaktoren  $K_{NL(t_x)}$  und Phasenverschiebungen  $\varphi_x$**  für eine beliebige Harmonische  $\omega_{x0}=2\pi/(t_x-t_0)$  in die Untersuchung einbezogen werden.

Weiterhin gilt für (2.7) gemäß (3.28) die Gleichung (3.33).

$$\mathbf{e}_{(n,1)} = \mathbf{e}_{(n,1)h}(t-t_0) + \mathbf{e}_{(n,1)r}(t-t_0) \quad (3.33)$$

$\mathbf{e}_{(n,1)h}(t-t_0)$  stellt den Vektor der harmonischen Anteile und  $\mathbf{e}_{(n,1)r}(t-t_0)$  die Restfunktionen des Vektors  $\mathbf{e}_{(n,1)}$  äquivalent zu (3.28).

Mit den Gleichungen (3.32) und (3.33) läßt sich ein wichtiger Satz (3.34) für die Analyse des Systemverhalten formulieren.

*Streben in einem durch (2.7), (2.8) und (2.9) beschriebenen nichtlinearen System für  $t_x \rightarrow \infty$  alle gemäß (3.33) definierten Signale  $\mathbf{e}_{(n,1)r}(t-t_0)$  gegen einen konstanten Wert, dann läßt sich die Aussage über das Systemverhaltens für eine **beliebige** Harmonische  $\omega_x=2\pi/(t_x-t_0)$  und  $t_x \in (t_0, \infty)$  nur dann treffen, wenn **alle** gemäß (3.32) definierten Verstärkungsfaktoren  $K_{NL(t_x)}$  und die dazugehörige Phasenverschiebungen  $\varphi_{t_x}$  für einen **beliebigen Verlauf von  $\mathbf{e}_{(n,1)}$  an den nichtlinearen Kennlinien angeben werden können.***

(3.34)

Gleichzeitig ergibt sich aus (3.34) eine weitere Schlußfolgerung, die in (3.35) zusammengefaßt ist.

*Die linearen Übertragungsfunktionen in den Gleichungen (2.7) und (2.8) müssen entweder stabil sein, oder bei Vorhandensein von Polen der einzelnen Übertragungsfunktionen der Matrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{V}$  auf oder rechts der  $\mathcal{S}$ -Achse der komplexen Ebene, müssen die Gleichanteile der in (3.33) genannten Signale  $\mathbf{e}_{(n,1)r}(t-t_0)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen konstanten Wert streben.*

(3.35)

Im nächsten Kapitel soll geprüft werden, unter welchen Bedingungen und für welche Klassen von nichtlinearen Kennliniengliedern die Berechnung aller  $K_{NL(t_x)}$  und  $\varphi_{t_x}$  gemäß (3.32) möglich ist. In den nachfolgenden Kapiteln wird dann das Zusammenwirken zwischen den einzelnen Kennlinien-gliedern und den Elementen der Matrix  $\mathbf{R}$  untersucht.



## 4. Beschreibungsfunktion

Bei der klassischen Anwendung der Beschreibungsfunktion wird *zuerst* das Eingangssignal eines nichtlinearen Gliedes definiert. Aus der Festlegung des Eingangssignals werden dann die Bedingungen für das zu untersuchende System abgeleitet.

In dieser Arbeit wird dagegen ein anderer Weg begangen. Für das im Kapitel 2 definierte System werden folgende Fragen gestellt:

*Wie muß die Beschreibungsfunktion definiert sein, um alle für die Grenzwahlungen und chaotischen Bewegungen relevanten  $K_{NL(tx)}$  und  $\varphi_{tx}$  gemäß (3.32) zu erschließen?*

bzw. für praktische Anwendungen heißt es:

*Welche Klassen von nichtlinearen Systemen mit Kennliniengliedern können ohne Rücksicht auf die Tiefpaßbedingungen untersucht werden?*

Eine solche Analyse wird nur dann möglich sein, wenn es gelingt, für ein nichtlineares Kennlinienglied *alle relevanten* Verstärkungsfaktoren und Phasenverschiebungen gemäß (3.32) für eine beliebige Harmonische  $\omega_{x0}$  zu berechnen.

## 4.1 Definition der Beschreibungsfunktion

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang der Harmonischen zwischen dem Ein- und Ausgangssignal  $\mathbf{e}$  bzw.  $\mathbf{u}$  der nichtlinearen Glieder dargestellt werden. Die vollständige Analyse des Systems muß deshalb für alle  $\omega \equiv \omega_{x0}$  von 0 bis  $\infty$  durchgeführt werden. In Kapitel 3.1 ist die Analyse des Übertragungsverhaltens der nichtlinearen Glieder für  $\omega_{x0} \rightarrow \infty$  vorgestellt. In diesem Abschnitt soll das Verhalten der nichtlinearen Glieder für  $0 \leq \omega_{x0} < \infty$  analysiert werden.

Die Beziehung zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{e}$  beschreibt der gebräuchliche bekannte Begriff „Die Beschreibungsfunktion“. Diese Definition wird jetzt erweitert. Dazu sollen die Gleichanteile  $\mathbf{E}_0/2$  und  $\mathbf{U}_0/2$  sowie jede  $\eta$ -te Harmonische von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{e}$  berücksichtigt werden. Für die weiteren Überlegungen wird festgelegt, daß die Funktionen ihre Gültigkeit nur für  $t_0 < t < t_x$  besitzen. In  $t_x$  kann somit für  $\omega_{x0} = 2\pi/(t_x - t_0)$  folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\mathbf{e}_\infty(t) = \frac{\mathbf{E}_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \mathbf{E}_{S\eta} \sin(\eta \omega_{x0} t) + \mathbf{E}_{C\eta} \cos(\eta \omega_{x0} t) \right) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}_\infty(t) = \frac{\mathbf{U}_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \mathbf{U}_{S\eta} \sin(\eta \omega_{x0} t) + \mathbf{U}_{C\eta} \cos(\eta \omega_{x0} t) \right) \quad (4.2)$$

Für die einzelnen Koeffizienten  $\mathbf{U}_{C\eta}$ ,  $\mathbf{U}_{S\eta}$ ,  $\mathbf{E}_{C\eta}$ ,  $\mathbf{E}_{S\eta}$ ,  $\mathbf{U}_0$  und  $\mathbf{E}_0$  gelten die bekannten Fourierintegrale (vgl. z.B. [18] 4.4.1.1).

$\mathbf{e}_\infty(t)$  aus (4.1) läßt sich in der Form (4.3) darstellen.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\infty(t - t_x) = & \frac{\mathbf{E}_0}{2} + \mathbf{E}_{S1x} \sin(\omega_{x0}(t - t_x)) + \mathbf{E}_{C1x} \cos(\omega_{x0}(t - t_x)) \\ & + \sum_{\eta=2}^{\infty} \left( \mathbf{E}_{S\eta x} \sin(\eta \omega_{x0}(t - t_x)) + \mathbf{E}_{C\eta x} \cos(\eta \omega_{x0}(t - t_x)) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da  $\mathbf{U}_{C\eta}$ ,  $\mathbf{U}_{S\eta}$ , und  $\mathbf{U}_0$  in (4.2) nur von  $\mathbf{E}_{C\eta}$ ,  $\mathbf{E}_{S\eta}$ ,  $\mathbf{E}_0$  und nicht von der Frequenz  $\omega_{x0}$  abhängen, gelten für (4.1) und (4.2) entsprechend (4.4) und (4.5). Mit diesen Gleichungen lassen sich die harmonischen Auswirkungen

von allen Eingängen  $\nu=1\dots n$  auf einen Ausgang  $\xi=1\dots m$  darstellen.

$$e_{\infty(\nu)}(x) = \frac{E_{0(\nu)}}{2} + E_{S1x(\nu)} \sin(x) + \sum_{\eta=2}^{\infty} (E_{S\eta x(\nu)} \sin(\eta x) + E_{C\eta x(\nu)} \cos(\eta x)) \quad (4.4)$$

$$u_{\infty(\xi)}(x) = \frac{U_{0(\xi)}}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} (U_{S\eta x(\xi)} \sin(\eta x) + U_{C\eta x(\xi)} \cos(\eta x)) \quad (4.5)$$

Die Einbeziehung unendlich vieler Harmonischer für die Definition der Beschreibungsfunktion ist zwar für die praktische Anwendung ohne Bedeutung, sie ermöglicht jedoch eine vollständige Beschreibung und Analyse der entsprechenden Zustände im System.

Mit (4.1) und (4.2) bzw. (4.4) und (4.5) läßt sich die Definition 4.1 formulieren. Sie besitzt ihre Gültigkeit für nichtlineare Kennlinienglieder mit mehreren Ein- und Ausgangsvariablen.

In (4.6) und (4.7) werden die Indizes  $\nu$  und  $\xi$  wegen der Übersichtlichkeit der Schreibweise weggelassen.

#### Definition 4.1

**Ideale Beschreibungsfunktionen**  $N_{\infty(\xi-\nu)}$  **der ersten Harmonischen** eines Kennliniengliedes ist definiert als Verhältnis des komplexen Wertes der ersten Harmonischen des Ausgangssignals  $u_{\infty(\xi)}$  zu der ersten Harmonischen des zugehörigen Eingangssignals  $e_{\infty(\nu)}$ .

$$N_{\infty(\xi-\nu)}(e_{\infty}) = \frac{U_{C1} + jU_{S1}}{E_{C1} + jE_{S1}} = \frac{U_{S1x} + jU_{C1x}}{E_{S1x}} = N_{\infty r} + jN_{\infty i} \quad (4.6)$$

Die Definition der idealen Beschreibungsfunktion in (4.6) gibt die Verhältnisse einer Harmonischen aus der komplexen Ebene und im Zeitbereich nach (3.32) wieder.

Die Gleichung (4.6) beschreibt die Zusammenhänge im System für  $0 < \omega_{x0} < \infty$ . Weiterhin müssen noch die Verhältnisse für  $\omega_{x0} = 0$ , d.h. für die Gleichanteile, formuliert werden. Sie sind in der Definition 4.2 festgehalten.

#### Definition 4.2

**Ideale Beschreibungsfunktionen  $N_{0\infty(\xi-v)}$  des Gleichanteils** eines Kennliniengliedes sind definiert als Verhältnisse des Gleichanteils  $U_0$  eines Ausgangssignals  $u_{\infty(\xi)}$  zu dem Gleichanteil  $E_0$  des zugehörigen Eingangssignals  $e_{\infty(v)}$ .

$$N_{0\infty(\xi-v)}(e_{\infty}) = \frac{U_0}{E_0} \quad (4.7)$$

Bei Kennliniengliedern mit mehreren Eingangsvariablen werden für die Berechnung eines Ausgangssignals  $u_{(\xi)}$  gemäß der Fourierintegrale (3.26) alle Eingangsvariablen  $\mathbf{e}$  der nichtlinearen Funktion einbezogen und somit in (4.6) und (4.7) berücksichtigt.

Mit (4.6) und (4.7) kann bei einem System, bei dem die Tiefpaßbedingungen nicht erfüllt sind, die entscheidende und wichtigste Frage gestellt werden:

*Welche Harmonischen müssen unbedingt berücksichtigt werden, damit gewährleistet ist, daß **alle**  $N_{0\infty}$  und alle komplexen Zahlen  $N_{\text{opt}+jN_{\text{oi}}}$  gefunden werden können?*

Wie die weiteren Untersuchungen im Kapitel 5 und Kapitel 6 zeigen, lassen sich die für die Untersuchung relevanten Werte sicher finden. Gegebenenfalls kann eine Aussage getroffen werden, ob die vorgenommenen Berechnungen sichere Ergebnisse geliefert haben.

Bei einer nichtlinearen eindeutigen Kennlinie mit einem Eingang und einem Ausgang gelten für die Koeffizienten  $U_0$ ,  $U_{C\eta x}$  und  $U_{S\eta x}$  von  $u_\infty$  aus (4.5) die Gleichungen (4.8) bis (4.10).

$$U_{C\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{NL}(e_\infty(x)) \cos(\eta x) dx, \quad \eta = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

und 
$$U_{S\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{NL}(e_\infty(x)) \sin(\eta x) dx, \quad \eta = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

sowie 
$$U_0 = \frac{U_{C(\eta=0)}}{2} \quad (4.10)$$

Die Funktion  $f_{NL}(e)$  kann in einer ausreichend großen Umgebung  $e_T$  eines beliebigen Punktes  $e_0$ , d.h. für  $e_\infty \in (e_0 - e_T/2, e_0 + e_T/2)$ , in einer Fourierreihe entwickelt und mit einer endlichen Zahl der Harmonischen ausreichend gut angenähert werden.  $f_{NL}(e)$  sowie darüber hinaus  $e_\infty(t)$  für  $t \in (t_0 \dots t_x)$  genügen den Dirichletschen Bedingungen. Damit gilt für die Größe  $e_\infty$  in den Integralen (4.8), (4.9) unter Berücksichtigung endlich vieler Harmonischer die Gleichung (4.11).

$$e_\infty(t) \approx e_m(t) \quad (4.11)$$

wobei  $m$  für eine endliche Anzahl der Harmonischen von  $e_\infty$  steht. Jetzt können die zu integrierenden Funktionen in (4.8) und (4.9) im Bereich von 0 bis  $2\pi$  als *stetige* Funktionen angesehen werden. Gemäß dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung gelten für (4.8) und (4.9) die Gleichungen (4.12) und (4.13).

$$U_{C\eta} \approx 2f_{NL}(e_m(x_\alpha)) \cos(\eta x_\alpha), \quad \eta = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

$$U_{S\eta} \approx 2f_{NL}(e_m(x_\beta)) \sin(\eta x_\beta), \quad \eta = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

wobei  $x_\alpha$  und  $x_\beta$  im Intervall von 0 bis  $2\pi$  liegen.

Nun muß noch folgende Frage beantwortet werden:

Welche Funktion

$$e(x) = E_0 + E_{S1}\sin(x) + E_{S2}\sin(2x) + E_{C2}\cos(2x) + E_{S3}\sin(3x) + \dots$$

kann statt  $e_m(x)$  eingesetzt werden, um die gleichen Werte von  $U_{S1}$ ,  $U_{C1}$  und  $U_0$  der ersten Harmonischen und des Gleichanteils zu erhalten?

Dabei muß für die im allgemeinen unterschiedlichen Werte  $x_\alpha$  und  $x_\beta$  die rechte Seite von (4.12) und (4.13) den gleichen Wert wie bei  $e_m(x_\alpha)$  und  $e_m(x_\beta)$  liefern. Die Werte  $E_0$ ,  $E_{S1}$  müssen wegen (4.6) und (4.7) als feste unveränderliche Werte angesehen werden. Die Abstimmung auf die Werte  $e_m(x_\alpha)$  und  $e_m(x_\beta)$  kann somit mit Hilfe von  $E_{S2}$ ,  $E_{C2}$ ,  $E_{S3}$ , ... erfolgen.

Die Berechnung von  $U_{C\eta}$  und  $U_{S\eta}$  aus (4.8) und (4.9) bzw. (4.12) und (4.13) wird nur dann möglich sein, wenn *mindestens noch zwei weitere Variable* aus der Menge  $\{E_{S2}, E_{C2}, E_{S3}, \dots\}$ , neben  $E_0$  und  $E_{S1}$ , berücksichtigt werden. Somit können die Beschreibungsfunktionen (4.6) und (4.7) *nur dann gefunden werden*, wenn  $e_m(x)$  gemäß einer der Gleichungen (4.14) zusammen gesetzt wird.

<p>a) <math>e(x) = E_0 + E_{S1}\sin(x) + E_{S\eta}\sin(\eta x) + E_{S\nu}\sin(\nu x)</math></p> <p>b) <math>e(x) = E_0 + E_{S1}\sin(x) + E_{S\eta}\sin(\eta x) + E_{C\nu}\cos(\nu x)</math></p> <p>c) <math>e(x) = E_0 + E_{S1}\sin(x) + E_{C\eta}\cos(\eta x) + E_{C\nu}\cos(\nu x)</math></p>	(4.14)
---	--------

Die Gleichungen (4.12) und (4.13) liefern damit *die notwendige Voraussetzung für das Eingangssignal*  $e(x)$ .

Die Verwendung eines beliebigen Signals gemäß (4.14) für die Berechnung der Integrale (4.8) und (4.9) garantiert nicht, daß alle im System relevanten

$K_{NL(x)}$  und  $\varphi_{tx}$  angezeigt werden. Der Grund dafür liegt darin, daß sich mit (4.14), (4.12) und (4.13) zwar alle Integralwerte (4.8) und (4.9) angeben lassen, die Berechnung von (4.8) und (4.9) mit (4.14) kann aber trotzdem diese Werte nicht liefern. Aus diesem Grund muß die Wahl des für die Berechnung der Beschreibungsfunktion geeigneten Eingangssignals gemäß (4.14), individuell für eine Nichtlinearität durchgeführt werden.

In jedem Fall liefern die Gleichungen (4.12) und (4.13) alle möglichen Werte der Integrale (4.8) und (4.9). Damit geben sie einen Anhaltspunkt für die weitere Analyse einer nichtlinearen eindeutigen Kennlinie (vgl. Abschnitt 4.2).

Zusätzlich muß ein weiterer wichtiger Fall in der Überlegung berücksichtigt werden. Zwar können alle möglichen  $K_{NL(x)}$  und  $\varphi_{tx}$  durch die Berechnung von (4.6) und (4.7) angezeigt werden, die Integrale (4.8) und (4.9) liefern jedoch mit (4.14) nicht alle möglichen Werte, die am Ausgang eines nichtlinearen Gliedes entstehen können. Wie dieser Umstand behandelt werden muß, wird in Kapitel 5 und Kapitel 6 erläutert.

*Aus diesem Grund soll vor der Auswahl des geeigneten Eingangsvektors das Zusammenwirken einer Nichtlinearität mit den linearen Übertragungsgliedern des nichtlinearen Systems analysiert werden.*

Deswegen wird für die Berechnung der Beschreibungsfunktion prinzipiell die Gleichung (4.14) b) mit  $\eta=v=2,3,4,\dots$  verwendet. Die Herleitung dieser Zusammenhänge wird in Kapitel 5 vorgetragen.

Die in diesem Abschnitt angesprochenen Probleme werden im folgenden Abschnitt am Beispiel einer Nichtlinearität erläutert. Weitere Auseinandersetzung mit der Wahl des geeigneten Eingangssignals wird im Abschnitt 5.4 durchgeführt.

## 4.2 Berechnung der Beschreibungsfunktion und Fehlerabschätzung

In diesem Abschnitt soll am Beispiel einer in Bild 4/1 dargestellten Begrenzungskennlinie der Umgang mit der Berechnung der in den Gleichungen (4.6) und (4.7) definierten Beschreibungsfunktion erläutert werden.

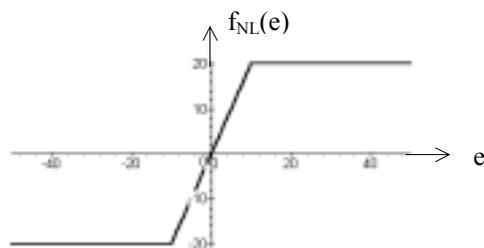


Bild 4/1 Begrenzungskennlinie

Mit Hilfe des in Bild 4/2 dargestellten Eingangssignals soll die praktische Auswirkung auf die Werte der Integrale (4.8) und (4.9) bzw. *vor allem* auf die Beschreibungsfunktionen (4.6) und (4.7) gezeigt werden.

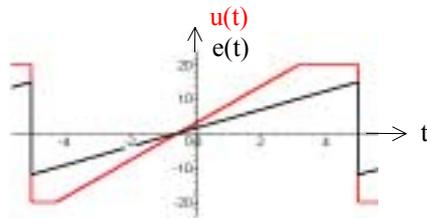


Bild 4/2 Beispiel eines Eingangssignals  $e(t)$  und des entsprechenden Ausgangssignals  $u(t)$  der Kennlinie von Bild 4/1

Das in Bild 4/2 dargestellte Signal läßt sich mit  $x=\pi t/5$  in die Fourierreihe (4.15) zerlegen.

$$e(x) = \frac{3}{2} + \frac{27}{\pi} \sin(x) - \frac{27}{2\pi} \sin(2x) + \frac{9}{\pi} \sin(3x) + \dots \quad (4.15)$$

Das dazugehörige Ausgangssignal liefert nach der Zerlegung in die Fourierreihe die Beziehung (4.16).

$$u(x) = \frac{20}{9} + 16.47 \sin(x) + 1.36 \cos(x) - 7.41 \sin(2x) - 0.88 \cos(2x) + \dots \quad (4.16)$$

Mit (4.15) und (4.16) gelten für die ideale Beschreibungsfunktion (4.6) und (4.7) die Werte (4.17).

$$N_{\infty}(e(x)) \approx \frac{\pi(16,47 + j1,36)}{27} \approx 1,92 + j0,16 \quad (4.17)$$

$$N_{0\infty}(e(x)) = \frac{20}{9} \cdot \frac{2}{3} \approx 1,48$$

Im Vorfeld der Anwendung von (4.14) in der Berechnung von (4.6) und (4.7) muß eine Überlegung erfolgen, die den Einsatz der *richtigen* Harmonischen  $\eta$  und  $\upsilon$  liefert.

In dem vorliegenden Fall müssen die Integrale (4.8) und (4.9) für die Begrenzungskennlinie von Bild 4/1 analysiert werden. In dieser Untersuchung sollen die möglichen Minimal- und Maximalwerte der Integrale (4.8) und (4.9) für die erste Harmonische d.h. für  $\eta=1$  geschätzt werden. Daraus soll der Aufbau des Ersatzeingangssignals abgeleitet werden.

Liegt das Eingangssignal der Kennlinie im Bereich von  $-10$  bis  $10$ , dann weist sie einen linearen Charakter auf. Der Wert des Integrals (4.9) beträgt für  $\eta=1$  in diesem Fall  $2E_{S1}$  und (4.8) wird  $0$ .

Die größten Integralwerte (4.8) und (4.9) für  $\eta=1$  können bei einer Begrenzungskennlinie dann erreicht werden, wenn das Ausgangssignal der Kennlinie einen rechteckigen Verlauf aufweist. Die Fourierzerlegung eines solchen Verlaufs würde für die erste Harmonische einen Wert von  $20(4/\pi)$  liefern.

Ein solches Signal kann aber nur mit einem Rechtecksignal mit der Amplitude von Minimum 10 am Eingang der Kennlinie entstehen. Damit würde für die Amplitude der ersten Harmonischen des Eingangssignals der Wert  $10(4/\pi)$  gelten. Die Beschreibungsfunktion würde dann einen reellen Betrag von höchstens 2 liefern. Dieser Wert ist mit dem Wert der Verstärkung im linearen Bereich der Kennlinie gleich.

Komplexe Werte der Beschreibungsfunktion können nur dann erwartet werden, wenn im Eingangssignal eine Erhöhung der ersten Harmonischen und eine entsprechende Verschiebung der höheren Harmonischen erfolgt. Damit würde sich auch gleichzeitig der Betrag der Beschreibungsfunktion reduzieren. Aus den oben genannten Gründen und wegen der Möglichkeit einer gezielten Signalbeeinflussung von  $e(x)$  links und rechts des Maximums der ersten Harmonischen empfiehlt sich für die Berechnung der Beschreibungsfunktion der Begrenzungskennlinie das Signal a) aus (4.14) mit  $\eta=2$  und  $\nu=3$ . Für  $e(x)$  gilt damit die Gleichung (4.18).

$$e(x) = E_0 + E_{S1}\sin(x) + E_{S2}\sin(2x) + E_{S3}\sin(3x) \quad (4.18)$$

Die Berechnung der Werte  $U_0$ ,  $U_{S1}$ , und  $U_{C1}$  des Ausgangssignals (4.19)

$$u(x) = U_0 + U_{S1}\sin(x) + U_{C1}\cos(x) + \dots \quad (4.19)$$

liefert für  $E_0 = 3/2$  und  $E_{S1} = 27/\pi$  gemäß (4.15) mit  $E_{S2} \in (-10..10)$  und  $E_{S3} \in (-10..10)$  die in Bild 4/3 ,Bild 4/4 und Bild 4/5 enthaltenen Werte.

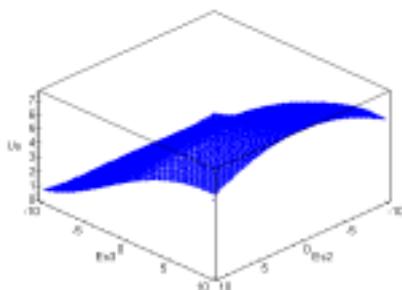
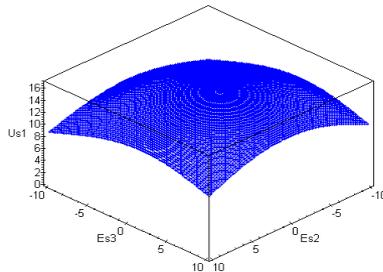
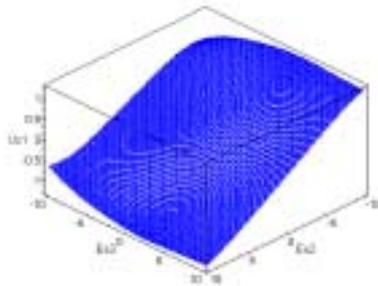


Bild 4/3  $U_0$  in Abhängigkeit der Eingangsamplituden

Bild 4/4  $U_{S1}$  in Abhängigkeit der EingangsamplitudenBild 4/5  $U_{C1}$  in Abhängigkeit der Eingangsamplituden

Diese Werte  $E_{S2}$  und  $E_{C2}$  in Bild 4/3 , Bild 4/4 und Bild 4/5 , welche zugleich  $U_0=20/9$ ,  $U_{S1}=16.47$  und  $U_{C1}=1.36$  aus (4.16) liefern, können numerisch herausgefiltert werden. Sie genügen der Gleichung (4.17). Für  $e(x)$  gilt damit:

$$e(x) = 1.5 + 8,59\sin(x) - 6,02\sin(2x) + 2,58\sin(3x).$$



## 5. Harmonische Balance

### 5.1 Einführung

Schon 1937 verwendeten N.M. Krylow und N.N. Bogoljubow (vgl. [3], Abschnitt 4.1) den Begriff „Harmonische Balance“, um das von ihnen entwickelte Verfahren zu beschreiben. Darin wurde die Dauerschwingung als gegeben angenommen und durch eine harmonische Schwingung angenähert. Diese Betrachtungsweise hat sich in der Literatur durchgesetzt, vgl. hierzu, [3] oder [6].

In den drei nachfolgenden Kapiteln soll diese Sichtweise ergänzt werden. Von Interesse ist in diesem Zusammenhang die Einbindung der transienten Vorgänge in die Betrachtung der Zustände der Harmonischen Balance eines nicht-linearen Systems. Für den Trajektorienverlauf im Zustandsraum muß eine Verbindung mit der Harmonischen Balance hergestellt werden, die sich durch folgende Frage ausdrücken läßt:

*Welche Trajektorien des Systems werden durch die Harmonische Balance aufgedeckt und welche Eigenschaften im Zustandsraum lassen sich daraus ableiten?*

Bevor jedoch der Kern dieser Frage beantwortet wird, sollen die Ergebnisse von Kapitel 3 und Kapitel 4 kurz zusammengefaßt werden.

Im Abschnitt 3.1 beschreiben die Gleichungen (3.14) und (3.15) das System von Bild 2/7 im Zustandsraum. Die Dynamikmatrix dieses Systems drückt die nichtlineare Abhängigkeit der Ableitungen der Zustandsvariablen von dem Vektor der Eingangsgrößen  $\mathbf{w}$  und den Zustandsvariablen selbst aus.

Weiterhin wurde im Abschnitt 3.2 bewiesen, daß jedes Stück einer beliebigen Trajektorie zwischen der Zeit  $t_0$  bis  $t_x$ , vorausgesetzt die ihr im Zeitbereich entsprechende Funktion genügt den Dirichletschen Bedingungen, durch die in (3.28) angegebene Fourierreihe und die Restfunktion  $r_r(t_x-t_0)$  beschrieben ist. Durch diese Betrachtung der Trajektorie in einem „Zeitfenster“ von  $t_0$  bis  $t_x$  und die Prüfung, ob für  $t \rightarrow \infty$  die Funktion  $r_r(t_x-t_0)$  gegen einen konstanten Wert strebt, kann die Analyse der Voraussetzungen für eine geschlossene Trajektorie des Systems mit einer beliebigen Frequenz  $\omega_{x0} = 2\pi/(t_x-t_0)$  durchgeführt werden.

Darüber hinaus wurde für  $\omega_{x0}$  die Gleichung (3.32) hergeleitet, welche in jedem beliebigen Augenblick  $t_x$  und für jede Frequenz  $2\pi/t_x < \omega_{x0} < \infty$  die Übertragung dieser Frequenz durch ein nichtlineares Glied eindeutig beschreibt. Mit den weiteren Ausführungen zu der Berechnung der Beschreibungsfunktion im Kapitel 4 wurden die Voraussetzungen für die *getrennte Betrachtung der einzelnen Harmonischen der Trajektorienabschnitte* des Systems geschaffen.

## 5.2 Zustand der Harmonischen Balance in nichtlinearen Systemen

Aus den Gleichungen (3.8) bis (3.10) kann eine lineare Abhängigkeit des Vektors  $\mathbf{e}$  von dem Vektor der Zustandsvariablen abgeleitet werden. Die Beziehung ist in (5.1) dargestellt.

$$\mathbf{e} = (\mathbf{C}_v \mathbf{C}_R) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_R \end{pmatrix} + \mathbf{D}_v \mathbf{w} + \mathbf{D}_R \mathbf{u} \quad (5.1)$$

Damit kann durch die Untersuchung von  $\mathbf{e}$  aufgedeckt werden, ob die Trajektorien des Systems im Zustandsraum geschlossene Kurven bilden. Daraus können die notwendigen Bedingungen für ihre Existenz formuliert werden. Die Untersuchung erfolgt im System von Bild 5/1

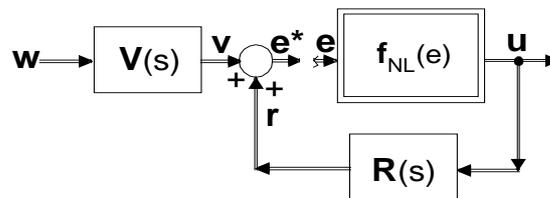


Bild 5/1 Ein nichtlineares System zur Untersuchung der Harmonischen Balance

Das durch (2.7) bis (2.9) beschriebene und im Bild 5/1 dargestellte System besitzt geschlossene Trajektorien, wenn es zum Zeitpunkt  $t_0$  solche Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_{g0}$  des Vektors der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_g = (\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_R)^T$  gibt, daß für  $\mathbf{w} = \text{const.}$  das System in der Zeit  $t$  von  $t_0$  bis  $t_x$  den Zustand  $\mathbf{x}_{g0}$  erneut erreicht. Damit gilt für  $\mathbf{x}_g$  und  $t \in (t_0 \dots t_x)$  die Gleichung (5.2).

$$\mathbf{x}_g(t \in (t_0, t_x)) = \frac{\mathbf{X}_{g0}}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} (\mathbf{X}_{gC\eta} \cos(\eta 2\pi t / (t_x - t_0)) + \mathbf{X}_{gS\eta} \sin(\eta 2\pi t / (t_x - t_0))) \quad (5.2)$$

$\mathbf{X}_{g0}$ ,  $\mathbf{X}_{gC\eta}$  und  $\mathbf{X}_{gS\eta}$  sind Koeffizienten der Fourierreihe, welche durch die bekannten Fourierintegrale definiert sind.

Während der Zustandspunkt die geschlossene Trajektorie durchläuft, gilt für den Vektor  $\mathbf{e}$  wegen (3.6), 0 und (5.2) die Gleichung (5.3).

$$\mathbf{e}(t \in (t_0, t_x)) = \frac{\mathbf{E}_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} (\mathbf{E}_{C\eta} \cos(\eta 2\pi t / (t_x - t_0)) + \mathbf{E}_{S\eta} \sin(\eta 2\pi t / (t_x - t_0))) \quad (5.3)$$

Die Vektoren  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{E}_{C\eta}$  und  $\mathbf{E}_{S\eta}$  sind Koeffizienten der Fourierreihe, die gemäß (3.26) definiert sind.

**Definition 5.1:**

**Harmonische Balance** in einem nichtlinearen System und in einem Zeitaugenblick  $t_x$  ist ein solcher Zustand des Systems, welcher eine geschlossene Trajektorie für die Zeit  $t_0 < t < t_x$  im Zustandsraum beschreibt.

Bei dem praktischen Umgang mit dem Zustand der Harmonischen Balance ist es *nicht erforderlich*, alle seine Harmonischen in (5.3) zu analysieren, da *die 1. Harmonischen der Trajektorienabschnitte* und ihre Stabilität (vgl. auch Kapitel 6) von Bedeutung sind.

Weiterhin ist vordergründig bei der Anwendung der Harmonischen Balance nur das Verhalten des Systems für  $t \rightarrow \infty$  von Interesse. D.h. es werden nur diese „transienten“ Zustände gesucht, welche für  $t \rightarrow \infty$  *erhalten bleiben*. Diese Sichtweise erleichtert den praktischen Umgang mit den Zuständen der Harmonischen Balance und beeinträchtigt die Leistungsfähigkeit dieser Methode in keiner Weise. Damit kann eine weitere weniger allgemeine Definition 5.2 der Harmonischen Balance aufgestellt werden. Dabei wird für die einzelnen Größen die Index „<sub>HB</sub>“ verwendet, um die Gültigkeit der Gleichungen für  $t_0 < t < t_x$  zu kennzeichnen.

**Definition 5.2:**

**Harmonische Balance** in einem nichtlinearen System ist ein Zustand des Systems, in dem für  $t \rightarrow \infty$  und für alle  $\mathbf{w} = \text{const}$  bei den eingepägten Größen  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_{\text{HB}}(t)$  in der Form

$$\mathbf{e}_{\text{HB}}(t) = \frac{\mathbf{E}_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \Re\{\mathbf{E}_{s\eta} + j\mathbf{E}_{c\eta}\} \sin(\eta\omega_x t) + \Im\{\mathbf{E}_{s\eta} + j\mathbf{E}_{c\eta}\} \cos(\eta\omega_x t) \right) \quad (5.4)$$

für  $\mathbf{e}^*(t)$  aus Bild 5/1 die Beziehung

$$\mathbf{e}^*(t) = \mathbf{e}_{\text{HB}}^*(t) = \mathbf{e}_{\text{HB}}(t) \quad (5.5)$$

erfüllt ist.

Für die Ausgangssignale der Kennlinienglieder ergeben sich im Zustand der Harmonischen Balance ebenso Fourierreihen (5.6).

$$\mathbf{u}_{\text{HB}}(t) = \frac{\mathbf{U}_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \mathbf{U}_{c\eta} \cos(\eta\omega_x t) + \mathbf{U}_{s\eta} \sin(\eta\omega_x t) \right) \quad (5.6)$$

Weiterhin gilt für  $\mathbf{e}_{\text{HB}}(t)$  die Gleichung (5.7).

$$\mathbf{e}_{\text{HB}}(t) = \mathbf{v}_{\text{HB}}(t) + \mathbf{r}_{\text{HB}}(t) \quad (5.7)$$

Um alle Zustände der Harmonischen Balance für  $t \rightarrow \infty$  zu ermitteln, müssen alle möglichen Verläufe von  $\mathbf{r}_{\text{HB}}(t)$  und  $\mathbf{v}_{\text{HB}}(t)$ , die einen solchen Zustand erzeugen können, gefunden werden. D.h. es müssen alle stationären Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems, unter der Berücksichtigung diverser Anfangsbedingungen, gefunden werden. Das zu lösende Gleichungssystem enthält zwei Eingangsgrößen: einen konstanten Vektor  $\mathbf{w}$  und den Vektor der harmonischen Schwingung (5.6)  $\mathbf{u}$ . Die Ausgangsgröße ist durch den Vektor  $\mathbf{e}$ , der in (5.3) beschrieben ist, gegeben. Damit läßt sich eine allgemeine Form des zu erwartenden Verlaufs der Größen  $\mathbf{r}_{\text{HB}}(t)$  und  $\mathbf{v}_{\text{HB}}(t)$  angeben. Sie ist (5.8) und (5.9) zu entnehmen.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{HB}}(t) = \mathbf{r}_0 + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \Re\{\mathbf{R}(j\eta\omega_x)(\mathbf{U}_{s\eta} + j\mathbf{U}_{c\eta})\} \sin(\eta\omega_x t) + \right. \\ \left. + \Im\{\mathbf{R}(j\eta\omega_x)(\mathbf{U}_{s\eta} + j\mathbf{U}_{c\eta})\} \cos(\eta\omega_x t) \right) + \mathbf{r}_{\text{rest}}(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{HB}}(t) = \mathbf{v}_0 + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \Re\{(\mathbf{V}_{s\eta} + j\mathbf{V}_{c\eta})\} \sin(\eta\omega_x t) + \right. \\ \left. + \Im\{(\mathbf{V}_{s\eta} + j\mathbf{V}_{c\eta})\} \cos(\eta\omega_x t) \right) + \mathbf{v}_{\text{transient}}(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\text{rest}}(t)$$

Wobei  $\mathbf{v}_{\text{transient}}(t)$  gemäß (3.27) bis (3.29) ermittelt werden kann.

Im Prinzip ist es ohne Bedeutung für den Zustand der Harmonischen Balance, ob die einzelnen Elemente von  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{V}$  stabil oder instabil sind und ob  $\mathbf{r}_{\text{rest}}(t \rightarrow \infty) = \mathbf{v}_{\text{rest}}(t \rightarrow \infty) = \text{konstant}$  gilt. Entscheidend ist *nur*, ob der Verlauf von  $\mathbf{r}_{\text{rest}}(t \rightarrow \infty)$  und  $\mathbf{v}_{\text{rest}}(t \rightarrow \infty)$  solche Bedingungen im System entstehen lassen kann, daß sich die in (5.10) enthaltene Beziehung einstellt.

$$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\text{rest}}(t) + \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{\text{rest}}(t) = \mathbf{f}_{\text{e-rest}}(t) = \text{const.} \quad (5.10)$$

Um den Ausdruck für  $\mathbf{f}_{\text{e-rest}}$  zu erhalten, ist es notwendig davon auszugehen, daß das System vor dem Übergang in den Zustand der Harmonischen Balance zum Zeitpunkt  $t_0$  bestimmte Anfangsbedingungen besaß. In einem allgemeinen Fall hängt dadurch der Vektor  $\mathbf{f}_{\text{e-rest}}$  von den Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}(-t_0)=\mathbf{u}_{-t_0}$ ,  $\mathbf{r}(-t_0)=\mathbf{r}_{-t_0}$ ,  $\mathbf{w}(-t_0)=\mathbf{w}_{-t_0}$  und  $\mathbf{v}(-t_0)=\mathbf{v}_{-t_0}$  sowie von der Frequenz  $\omega_x = 2\pi/(t_x - t_0)$  ab. Für  $\mathbf{f}_{\text{e-rest}}$  gilt damit (5.11).

$$\mathbf{f}_{\text{e-rest}}(t, \dots) = \mathbf{f}_{\text{e-rest}}(t, \omega_x, \mathbf{u}_{-t_0}^T, \mathbf{r}_{-t_0}^T, \mathbf{w}_{-t_0}^T, \mathbf{v}_{-t_0}^T) \quad (5.11)$$

Mit (5.11) gilt schließlich für (5.7) die Gleichung (5.12).

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\text{HB}}(t) = \mathbf{f}_{\text{e-rest}}(t, \dots) + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \Re \{ \mathbf{R}(j\eta\omega_x)(\mathbf{U}_{s\eta} + j\mathbf{U}_{c\eta}) \} \sin(\eta\omega_x t) + \right. \\ \left. + \Im \{ \mathbf{R}(j\eta\omega_x)(\mathbf{U}_{s\eta} + j\mathbf{U}_{c\eta}) \} \cos(\eta\omega_x t) \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Der harmonische Anteil von (5.9) muß in der Analyse nicht explizit berücksichtigt werden, da nur die Gültigkeit von (5.10) gefordert wird und nur der in (5.12) dargestellte Signalverlauf von Interesse ist. Darüber hinaus muß ggf. bei der Aufstellung der Gleichungen (5.9) bis (5.12) berücksichtigt werden, daß die einzelnen Elemente von  $\mathbf{V}$  einfaches imaginäres Wurzelnpaar aufweisen können. In diesem Fall entstehen im System Schwingungen, die durch  $\mathbf{V}$  verursacht werden. Solche Systeme müssen prinzipiell wie fremderregte Systeme behandelt werden. Aus diesem Grund werden sie in dieser Arbeit nicht explizit behandelt.

Die Gleichungen (5.6) bis (5.9) beschreiben den Einfluß von linearen Übertragungsfunktionen auf den Zustand der Harmonischen Balance. Für die vollständige Darstellung des Zustandes müssen noch die Beziehungen zwischen den Eingangs- und Ausgangssignalen der nichtlinearen Glieder formuliert werden.

Die Abhängigkeit des Ausgangssignals eines nichtlinearen Gliedes von seinem Eingangssignal wird im Zustand der Harmonischen Balance durch die in der Definition 5.3 festgelegten *Harmonischen Verstärkungsfaktoren* ausgedrückt.

**Definition 5.3 :**

Komplexe Zahlen  $Z_{(\xi,v)0}, Z_{(\xi,v)1}, Z_{(\xi,v)2}, \dots, Z_{(\xi,v)\eta}, \dots, Z_{(\xi,v)\infty}$ , die im Zustand der Harmonischen Balance die Gleichung (5.13) erfüllen, werden *Harmonische Verstärkungsfaktoren* eines nichtlinearen Kennliniengliedes genannt.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{HB}(\xi)}(\mathbf{t}) = & \frac{E_{(v)0}}{2} Z_{(\xi,v)0} + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \Re \{ Z_{(\xi,v)\eta} (E_{(v)s\eta} + jE_{(v)c\eta}) \} \sin(\eta\omega_x t) + \right. \\ & \left. + \Im \{ Z_{(\xi,v)\eta} (E_{(v)s\eta} + jE_{(v)c\eta}) \} \cos(\eta\omega_x t) \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Mit  $\xi=1,2,\dots,m$  und  $m$  Anzahl der Ausgänge sowie  $v=1,2,\dots,n$  und  $n$ =Anzahl der Eingänge des nichtlinearen Übertragungsgliedes stellt die Gleichung (5.13) die Auswirkung eines  $v$ -ten Eingangs auf den  $\xi$ -ten Ausgang dar.

In den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 werden die entsprechenden Zusammenhänge für die Kennlinienglieder mit einer und mehreren Eingangsvariablen hergeleitet. Damit wird es möglich sein, im Abschnitt 5.3 die Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance zu berechnen.

### 5.2.1 Nichtlinearitäten mit einer Eingangsvariablen

Enthält das nichtlineare System nur Kennlinienglieder mit einer Eingangsvariablen, dann kann in (5.13)  $v=\xi$  und  $\xi=1,2,\dots,m=n$  gesetzt werden.

Durch den Vergleich von (5.4) mit (5.12) ergeben sich für die einzelnen Harmonischen Verstärkungsfaktoren folgende Gleichungen:

$$Z_{(\xi)0} = \frac{U_{0(\xi)}}{E_{0(\xi)}} \quad (5.14)$$

$$Z_{(\xi)\eta} = \frac{U_{(\xi)s\eta} + jU_{(\xi)c\eta}}{E_{(\xi)s\eta} + jE_{(\xi)c\eta}} \quad (5.15)$$

Mit Hilfe der Harmonischen Verstärkungsfaktoren (5.14) und (5.15) kann die vollständige Gleichung der Harmonischen Balance aufgestellt werden. In (5.12) wird (5.15) eingesetzt, um den Vektor  $\mathbf{U}_{s\eta} + j\mathbf{U}_{c\eta}$  verschwinden zu lassen. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{E}_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \Re \{ \mathbf{E}_{s\eta} + j\mathbf{E}_{c\eta} \} \sin(\eta\omega_x t) + \Im \{ \mathbf{E}_{s\eta} + j\mathbf{E}_{c\eta} \} \cos(\eta\omega_x t) \right) = \\ & = \mathbf{f}_{e\text{-rest}} + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left( \Re \{ \mathbf{R}(j\eta\omega_x) \mathbf{Z}_{\eta} (\mathbf{E}_{s\eta} + j\mathbf{E}_{c\eta}) \} \sin(\eta\omega_x t) + \right. \\ & \quad \left. + \Im \{ \mathbf{R}(j\eta\omega_x) \mathbf{Z}_{\eta} (\mathbf{E}_{s\eta} + j\mathbf{E}_{c\eta}) \} \cos(\eta\omega_x t) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

wobei  $\mathbf{1}$  die Einheitsmatrix und  $\mathbf{Z}_{\eta} = \text{diag}(Z_{(1)\eta}, Z_{(2)\eta}, \dots, Z_{(n)\eta})$  ist. Durch den Vergleich der rechten und der linken Seite von (5.16) ergeben sich mit  $\mathbf{E}_{\eta} = \mathbf{E}_{s\eta} + j\mathbf{E}_{c\eta}$  folgende Gleichungen:

$$\mathbf{f}_{e\text{-rest}} - \frac{\mathbf{E}_0}{2} = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

$$(\mathbf{R}(j\eta\omega_x) \mathbf{Z}_{\eta} - \mathbf{1}) \mathbf{E}_{\eta} = \mathbf{0} \quad \text{mit } \eta = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.18)$$

Die Beziehungen (5.17) und (5.18) stellen die eigentlichen *Gleichungen der Harmonischen Balance* dar.

Liegen alle Pole von  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{V}$  links der  $\mathfrak{S}$ -Achse, dann ergibt sich für diese Matrizen die Gleichung (5.19).

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(s=0), \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(s=0) \quad (5.19)$$

Durch die Berücksichtigung von (5.19) und  $\mathbf{Z}_0 = \text{diag}(Z_{(1)0}, Z_{(2)0}, \dots, Z_{(n)0})$  in (5.11) und (5.12) kann die Gleichung (5.17) in (5.20) umgewandelt werden.

$$\mathbf{V}_0 + (\mathbf{R}_0 \mathbf{Z}_0 - \mathbf{1}) \frac{\mathbf{E}_0}{2} = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

## 5.2.2 Nichtlinearitäten mit mehreren Eingangsvariablen

In diesem Abschnitt soll die Gleichung der Harmonischen Balance für nichtlineare Systeme mit  $k$  nichtlinearen Gliedern aufgestellt werden. Jedes nichtlineare Glied kann  $n_k$  Eingänge aufweisen. Äquivalent zu (5.14) und (5.15) lassen sich die Beziehungen (5.21) und (5.22) herleiten. Sie beschreiben die Harmonischen Verstärkungsfaktoren zwischen dem  $\xi$ -ten Ausgang und dem  $\kappa_v$ -ten Eingang. Mit  $\xi=1,2,\dots,k$  und  $\kappa_v=1,2,\dots,n_k$  gilt:

$$Z_{(\xi, \kappa_v)0} = \frac{U_{0(\xi)}}{E_{0(\kappa_v)}} \quad (5.21)$$

$$Z_{(\xi, \kappa_v)\eta} = \frac{U_{(\xi)s\eta} + jU_{(\xi)e\eta}}{E_{(\kappa_v)s\eta} + jE_{(\kappa_v)e\eta}} = \frac{U_{(\xi)\eta}}{E_{(\kappa_v)\eta}} \quad (5.22)$$

Für einen Ausgang  $\xi$  eines  $k$ -ten nichtlinearen Gliedes mit  $n_k$  Eingängen lassen sich weiter die Beziehungen (5.23) aufstellen.

$$U_{(\xi)\eta} = Z_{(\xi,1)\eta} E_{(1)\eta}, \quad U_{(\xi)\eta} = Z_{(\xi,2)\eta} E_{(2)\eta}, \dots, \quad U_{(\xi)\eta} = Z_{(\xi,n_k)\eta} E_{(n_k)\eta} \quad (5.23)$$

Durch die Addition der rechten und linken Seiten von (5.23) und Division durch  $n_k$  entsteht die Gleichung (5.24).

$$U_{(\xi)\eta} = \frac{1}{n_k} Z_{(\xi,1)\eta} E_{(1)\eta} + \frac{1}{n_k} Z_{(\xi,2)\eta} E_{(2)\eta} + \dots + \frac{1}{n_k} Z_{(\xi,n_k)\eta} E_{(n_k)\eta} \quad (5.24)$$

Nach der Aufstellung von (5.24) für alle  $\xi=1,2,\dots,m$  können diese Beziehungen in der Gleichung (5.25) zusammengefaßt werden.

$$\mathbf{U}_\eta = \mathbf{M}_n \mathbf{Z}_\eta \mathbf{E}_\eta \quad \text{mit } \eta = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.25)$$

$\mathbf{M}_n$  ist eine Diagonalmatrix. Jedes Element dieser Matrix enthält die Anzahl der Eingänge  $n_\xi$ , die auf einen Ausgang  $\xi$  ( $\xi=1,2,\dots,m$ ) wirken. Für  $\mathbf{M}_n$  gilt die Gleichung (5.26).

$$\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} 1/n_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/n_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/n_\xi & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1/n_m \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Die Matrix  $\mathbf{Z}_\eta$  ist jetzt keine Diagonalmatrix mehr. Die Strukturveränderung von  $\mathbf{Z}_\eta$  kann (5.27) entnommen werden.

$$\mathbf{Z}_\eta = \begin{pmatrix} Z_{(1,1)\eta} & \dots & Z_{(1,n_1)\eta} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Z_{(2,n_1+1)\eta} & \dots & Z_{(2,n_1+n_2)\eta} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & Z_{(m,n-n_m)\eta} & \dots & Z_{(m,n)\eta} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Äquivalent zu (5.17) und (5.18) lassen sich jetzt die Beziehungen (5.28) und (5.29) herleiten.

$$\mathbf{f}_{e\text{-rest}} - \frac{\mathbf{E}_0}{2} = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

$$(\mathbf{R}(j\eta\omega_x)\mathbf{M}_n\mathbf{Z}_\eta - \mathbf{1})\mathbf{E}_\eta = \mathbf{0} \quad \text{mit } \eta = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.29)$$

Liegen alle Pole von  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{V}$  links der  $\Im$ -Achse, dann ergibt sich für diese Matrizen die Gleichung (5.19). Damit kann (5.28) zu (5.30) umgerechnet werden.

$$\mathbf{V}_0 + (\mathbf{R}_0\mathbf{M}_n\mathbf{Z}_0 - \mathbf{1})\frac{\mathbf{E}_0}{2} = \mathbf{0} \quad (5.30)$$

(5.28) und (5.29) bilden die allgemeine Form der Gleichung der Harmonischen Balance für nichtlineare Systeme.

### 5.3 Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance

In den Gleichungen (5.28) und (5.29) sind diese Anforderungen des Systems an das Vorhandensein von geschlossenen Trajektorien im Zustandsraum enthalten, die sich aus der linearen Systemstruktur ergeben. Weiterhin muß beachtet werden, daß am Anfang der Untersuchung die Harmonischen  $\eta > 1$  nicht interessant sind. Der Grund dafür liegt darin, daß die notwendigen Voraussetzungen für die Existenz der geschlossenen Trajektorien zuerst für  $\eta=1$  vorliegen müssen, bevor sie für die höheren Harmonische zutreffen. Deswegen soll die Gleichung (5.29) für  $\eta=1$  analysiert werden.

In (5.29) sind die Harmonischen Verstärkungsfaktoren  $\mathbf{Z}_1$ , die Frequenz  $\omega_x$  sowie die Eingangssignale  $\mathbf{E}_1$  unbekannte Größen. Sie müssen ermittelt und später ihre Werte mit den tatsächlich auftretenden Werten an den nichtlinearen Gliedern (den Werten der Beschreibungsfunktion) verglichen werden. (5.31) enthält das zu untersuchende Gleichungssystem.

$$(\mathbf{R}(j\omega_x)\mathbf{M}_n\mathbf{Z}_1 - \mathbf{1})\mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

Unter der Annahme, daß  $\mathbf{Z}_1$  und  $\omega_x$  bekannt sind, läßt sich (5.31) wie ein System von  $n$  linearen Gleichungen mit  $n$  Variablen  $E_1, E_2, \dots, E_n$  betrachten. Ein solches Gleichungssystem kann nur dann eine nichttriviale Lösung besitzen, wenn (5.32) erfüllt ist.

$$\det(\mathbf{R}(j\omega_x)\mathbf{M}_n\mathbf{Z}_1 - \mathbf{1}) = f_1(\omega_x, Z_{(1,1)}, \dots, Z_{(n,k)}) = 0 \quad (5.32)$$

Aus (5.32) läßt sich ein beliebiger Harmonischer Verstärkungsfaktor  $Z_{(i,j)1}$  als Funktion der Frequenz  $\omega_x$  und restlichen Verstärkungsfaktoren ausrechnen.

Mit  $i=1,2,\dots,n$  als Anzahl der Eingänge und  $j=1,2,\dots,k$  Anzahl der Ausgänge der nichtlinearen Glieder gilt für  $Z_{(i,j)1}$  die Gleichung (5.33).

$$Z_{(i,j)_1} = f_2(\omega_x, Z_{(1,1)_1}, \dots, Z_{(i,j-1)_1}, Z_{(i,j+1)_1}, \dots, Z_{(n,k)_1}) \quad (5.33)$$

Gleichung (5.33) kann in (5.31) eingesetzt werden. Damit wird der Rang der Matrix  $\mathbf{R}(j\omega_x)\mathbf{M}_n\mathbf{Z}_1^{-1}$  kleiner  $n$  und das Gleichungssystem (5.31) besitzt eine nichttriviale Lösung. In einem allgemeinen Fall ist eine der Variablen  $E_1, E_2, \dots, E_n$  frei wählbar und die Gleichung (5.31) läßt sich nach  $E_1$  auflösen (vgl auch Gaußalgorithmus in [18] Abschnitt 2.4.4.3).

Wird die Variable  $E_\xi$  zu der frei wählbaren Variablen bestimmt, dann gilt für die Lösungsmenge der Eingangsgrößen  $E_1, E_2, \dots, E_n$  die Gleichung (5.34).

$$\begin{aligned} E_1 &= E_\xi \cdot f_{E1}(\omega_x, Z_{(1,1)_1}, \dots, Z_{(i,j-1)_1}, Z_{(i,j+1)_1}, \dots, Z_{(n,k)_1}) \\ E_2 &= E_\xi \cdot f_{E2}(\omega_x, Z_{(1,1)_1}, \dots, Z_{(i,j-1)_1}, Z_{(i,j+1)_1}, \dots, Z_{(n,k)_1}) \\ &\vdots \\ E_\xi &= E_\xi \text{ frei wählbar} \\ E_{\xi+1} &= E_\xi \cdot f_{E_{\xi+1}}(\omega_x, Z_{(1,1)_1}, \dots, Z_{(i,j-1)_1}, Z_{(i,j+1)_1}, \dots, Z_{(n,k)_1}) \\ &\vdots \\ E_n &= E_\xi \cdot f_{En}(\omega_x, Z_{(1,1)_1}, \dots, Z_{(i,j-1)_1}, Z_{(i,j+1)_1}, \dots, Z_{(n,k)_1}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Um die durch (5.33) und (5.34) beschriebenen Zusammenhänge zu illustrieren, wird im folgenden eine allgemeine Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance für ein System mit zwei nichtlinearen Gliedern mit je einem Eingang und einem Ausgang behandelt. Das nichtlineare System besitzt gemäß (5.18) eine in (5.35) dargestellte Gleichung der Harmonischen Balance.

$$\begin{pmatrix} R_{11}(j\omega_x) & R_{12}(j\omega_x) \\ R_{21}(j\omega_x) & R_{22}(j\omega_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Z_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Mit (5.32) kann aus (5.35) der Harmonische Verstärkungsfaktor  $Z_{22}$  als Funktion von  $\omega_x$  und  $Z_{11}$  berechnet werden.  $Z_{22}$  ist in (5.36) dargestellt.

$$Z_{22} = \frac{R_{11}(j\omega_x)Z_{11} - 1}{R_{11}(j\omega_x)R_{22}(j\omega_x)Z_{11} - R_{21}(j\omega_x)R_{12}(j\omega_x)Z_{11} - R_{22}(j\omega_x)} \quad (5.36)$$

Jetzt kann  $Z_{22}$  aus (5.36) in (5.35) eingesetzt werden, woraus sich die Beziehung (5.37) für  $E_2$  ergibt.

$$E_2 = E_1 \frac{R_{22}(j\omega_x) + (R_{21}(j\omega_x)R_{12}(j\omega_x) - R_{11}(j\omega_x)R_{22}(j\omega_x))Z_{11}}{R_{12}(j\omega_x)} \quad (5.37)$$

Das Resümee aus den Gleichungen (5.12), (5.33) und (5.34) läßt sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Ein nichtlineares System kann nur dann geschlossene Trajektorien für  $t \rightarrow \infty$  im Zustandsraum aufweisen, wenn gewährleistet ist, daß für den Vektor  $\mathbf{f}_{e\text{-rest}}(t, \dots)$  aus (5.11) für  $\mathbf{w} = \text{const.}$  die Gleichung (5.38) gilt.

$$\mathbf{f}_{e\text{-rest}}(t, \dots) = \text{const.} \quad (5.38)$$

Damit kann für die Gleichanteile der Zustandsvariablen  $\mathbf{X}_{g0}/2$  aus (5.2), (3.6) und (3.14) die Gleichung (5.39) hergeleitet werden.

$$\frac{\mathbf{X}_{g0}}{2} = \text{const.} \quad (5.39)$$

Für die harmonischen Anteile der Eingangssignale der nichtlinearen Glieder gilt folgende Aussage:

Ein nichtlineares System kann nur dann geschlossene Trajektorien mit der Umlaufzeit  $T_x=2\pi/\omega_x$  im Zustandsraum aufweisen, wenn:

1. die nichtlinearen Glieder des Systems die durch (5.33) vorgegebenen Faktoren  $\mathbf{Z}_1$  liefern,
2. die Faktoren  $\mathbf{Z}_1$  bei den durch (5.34) vorgegebenen Eingangssignalen  $\mathbf{E}_1$  und für eine *beliebige Frequenz*  $\omega_x$  entstehen können.

(5.40)

d.h. die Beschreibungsfunktion die  $\mathbf{Z}_1$ -Werte für die Eingangssignalen  $\mathbf{E}_1$  aus (5.34) liefern kann.

#### 5.4 Vergleich mit den Werten der Beschreibungsfunktion

Die weitere Vorgehensweise bei der Überprüfung der Bedingungen für die Entstehung von geschlossenen Trajektorien im Zustandsraum resultiert aus den Gleichungen (5.33) und (5.34), die mit (5.38) die Anforderungen des linearen Teils des Systems an die nichtlinearen Glieder beschreiben.

Diese Bedingungen müssen bei der Untersuchung der Zustände der Harmonischen Balance mit den entsprechenden Werten der Beschreibungsfunktion (4.6) verglichen werden.

Gemäß Kapitel 4 wird davon ausgegangen, daß sich bei der Berechnung der Beschreibungsfunktionen  $N_{(1,1)}$  bis  $N_{(n,k)}$  mit Hilfe der in (4.14) festgelegten Eingangssignale alle Werte, die das nichtlineare Glied liefern kann, berechnen lassen. Damit lassen sich alle  $Z$  - Variablen aus (5.33) durch die dazugehörigen Beschreibungsfunktionen ersetzen. Für die Gleichung (5.33) gilt damit die Gleichung (5.41).

$$Z_{(i,j)} = f(\omega_x, N_{(1,1)}, \dots, N_{(i,j-1)}, N_{(i,j+1)}, \dots, N_{(n,k)}) \quad (5.41)$$

Gleichzeitig kann für die Berechnung von (5.41) die Gleichung (5.34) berücksichtigt werden. Dabei wird als  $E_\xi$  ein beliebiges Eingangssignal z.B.  $E_j$  genommen. Für diesen Fall gilt folgende Aussage:

In einem nichtlinearen System kann nur dann ein Zustand der Harmonischen Balance entstehen, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:

- Die Berechnung der Beschreibungsfunktion liefert einen Wert  $N_{(i,j)}$ , der mit dem Wert  $Z_{(i,j)}$  gemäß (5.41) identisch ist. (5.42)
- Der Wert  $N_{(i,j)}$ , ist mit (5.43) und (5.34) berechnet worden.

$$E_j = E_\xi f_{E_j}(\omega_x, N_{(1,1)}, \dots, N_{(i,j-1)}, N_{(i,j+1)}, \dots, N_{(n,k)}) \quad (5.43)$$

Eine weitere Einschränkung der Werte  $Z_{(i,j)}$  aus (5.41), für die ein Zustand der Harmonischen Balance möglich ist, liefert der Betragsvergleich der einzelnen Elemente der Matrix  $\mathbf{R}$  für die erste Harmonische  $\omega$  und die nächste Harmonische  $n\omega$ . Dabei entspricht  $n$  der Harmonischen  $\eta$  und  $\nu$  aus (4.14). *Bei der Berechnung der Beschreibungsfunktion muß der höchste Wert aus dem Betragsvergleich berücksichtigt werden.*

Für die Berechnung einer Beschreibungsfunktion  $N_{(i,j)}$  muß damit der Betragsvergleich für folgende Übertragungsfunktionen berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} K_{V(j,1)} &= \left| R_{j,1}(jn\omega) \right| / \left| R_{j,1}(j\omega) \right|, \\ K_{V(j,2)} &= \left| R_{j,2}(jn\omega) \right| / \left| R_{j,2}(j\omega) \right|, \\ &\dots \\ K_{V(j,n)} &= \left| R_{j,n}(jn\omega) \right| / \left| R_{j,n}(j\omega) \right|. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Für das Signal am Eingang  $j$  gilt mit (5.44) die Gleichung (5.45).

$$E_{j(n)} < \text{Maximum}(K_{V(j,1)}, \dots, K_{V(j,n)}) E_{j(1)} \quad (5.45)$$

Eine weitere Möglichkeit, den zu untersuchenden Bereich der Zustände der Harmonischen Balance zu begrenzen, ergibt sich aus dem Vergleich entsprechend (5.42). Daraus läßt sich die größte Frequenz  $\omega_{x(\max)}$  ermitteln, die bei dem Betragsvergleich berücksichtigt werden muß. Damit kann unter Umständen der Wert  $\text{Maximum}(K_{V(j,1)}, \dots, K_{V(j,n)})$  reduziert und damit ein kleinerer Amplitudenbereich bei der Berechnung der Beschreibungsfunktion berücksichtigt werden.

In Beispiel 7.2 wird diese Vorgehensweise angewendet.

## 6. Stabilitätsanalyse

Auf den ersten Blick stellt sich die Methode der Harmonischen Balance als ein Verfahren dar, das primär auf die Ermittlung von Grenzschwingungen, also geschlossenen Trajektorien im Zustandsraum, hinzielt. Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens aller im System möglichen *Grenzschwingungen* soll die Rückschlüsse auf das Verhalten der Ruhelagen des Systems ermöglichen vgl. z.B. [3],[6]). Dieser Blickwinkel kann jetzt erweitert werden.

### 6.1 Definitionen der Stabilität

In den vorangegangenen fünf Kapiteln wurde gezeigt, wie das Übertragungsverhalten des Spektrums der Frequenzen  $\omega$  von den Eigenschaften der linearen und nichtlinearen Glieder abhängt. Damit konnte die Bedeutung des Zustandes der Harmonischen Balance für das Systemverhalten insgesamt dargestellt werden. In diesem Kapitel kann jetzt die Beurteilung der Stabilität dieser Zustände sowie ihre Tragweite für die verschiedenen Verhaltensmuster der nichtlinearen Systeme vorgestellt werden.

Bevor jedoch die eigentliche Aufstellung der für die Beurteilung der Stabilität notwendigen Kriterien erfolgt, soll eine diesen Kriterien zugrunde liegende Definition der Stabilität formuliert werden.

Prinzipiell erscheint es möglich, die Stabilitätsdefinition für die Anwendung der Harmonischen Balance sowohl im Sinne der Ljapunowstabilität als auch der Übertragungsstabilität (BIBO-Stabilität vgl. z.B. [5]) oder der absoluten Stabilität nach V.M. Popow (vgl. z.B. [3]. Band II, Abschnitt 5) zu formulieren. Alle diese Definitionen bringen jedoch gewisse Nachteile mit

sich, wenn sie aus dem Blickwinkel der Harmonischen Balance betrachtet werden.

Die Definition der BIBO-Stabilität läßt die unterschiedlichen stationären Zustände außer Acht und beschränkt sich auf die Aussage bezüglich des begrenzten Ausgangssignals bei einem begrenzten Eingangssignal. Diese Betrachtung führt dazu, daß eine genauere Unterscheidung zwischen den diversen Verhaltensmustern der stabilen nichtlinearen Systeme nicht möglich ist. Der Grund dafür liegt darin, daß alleine die BIBO-Stabilitätsdefinition bei den linearen Systemen zu der Bedingung führt, daß alle Nullstellen der charakteristischen Gleichung der Übertragungsfunktion des Systems negative Realteile haben müssen.

Ähnlich verhält es sich mit der Definition der absoluten Stabilität nach V.M. Popow. Sie beschränkt sich auf die global asymptotische stabile Ruhelagen des nichtlinearen Systems. Eine solche Betrachtung der Zustände der Harmonischen Balance würde die Möglichkeiten dieser Methode unnötig einengen.

Die Stabilitätsdefinition nach Ljapunow bezieht sich dagegen auf die Stabilität der Ruhelagen im Zustandsraum des Systems. Damit sind bei dieser Betrachtung die Gleichungen (3.14) und (3.15) zu berücksichtigen. Sie stellen eine nichtlineare Abhängigkeit der einzelnen Vektoren des Systems dar. Um diese Abhängigkeit genauer zu betrachten, ist eine zusätzliche Untersuchung des Zustandsraumes einzuführen, welche aber aus der praktischen Sicht bei der Anwendung der Harmonischen Balance nicht erforderlich ist.

Vor allem ist es bei der Anwendung der Harmonischen Balance wünschenswert, zwischen unterschiedlichen Verhaltensklassen der stabilen Systeme differenzieren zu können.

Zusätzlich müssen, auf Grund der „harmonischen Eigenschaften“ des Systems, für die Stabilitätsanalyse die vorhandenen Stabilitätskriterien für die linearen Systeme herangezogen werden. Aus diesen Gründen ergeben sich für den praktischen Einsatz der Harmonischen Balance die Stabilitätsdefinitionen 6.3 bis 6.6 sowie die Definitionen des Ruhezustandes und des stationären Zustandes 6.1 und 6.2.

Ein anderes wichtiges Anliegen bei der Anwendung der Harmonischen Balance ist die Einbeziehung der Eingangssignale  $\mathbf{e}$  an den nichtlinearen Gliedern in die Stabilitätsbetrachtung. Aus den Gleichungen (3.6) und (5.1) läßt sich die Gleichung (6.1) ableiten.

$$(\mathbf{1} - \mathbf{D}_R \mathbf{K}_{NL}) \mathbf{e} - \mathbf{D}_V \mathbf{w} = (\mathbf{C}_V \mathbf{C}_R) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_V \\ \mathbf{x}_R \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Ist der Vektor  $\mathbf{w} = \text{const.}$ , dann gilt für (6.1) nach der Differentiation der linken und rechten Seite nach der Zeit die Gleichung (6.2).

$$\frac{d}{dt} ((\mathbf{1} - \mathbf{D}_R \mathbf{K}_{NL}) \mathbf{e}) = (\mathbf{C}_V \mathbf{C}_R) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_V \\ \dot{\mathbf{x}}_R \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Mit (6.2) ist es ersichtlich, daß für  $\mathbf{e} = \text{const.}$  die linke Seite von (6.2) gleich  $\mathbf{0}$  wird. In diesem Fall kann aus (6.2) unter der Voraussetzung, daß  $\ker [\mathbf{C}_V \mathbf{C}_R] = \mathbf{0}$  ist, die Gleichung (6.3) hergeleitet werden.

$$\dot{\mathbf{e}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_V \\ \dot{\mathbf{x}}_R \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_g = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

Damit kann in den Stabilitätsdefinitionen und bei der Formulierung der Stabilitätskriterien der Vektor  $\mathbf{e}$  statt  $\mathbf{x}_g$  verwendet werden.

**Definition 6.1:** Ein Ruhezustand  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{w0})$  eines nichtlinearen Systems ist ein solcher Zustand des Systems, bei dem für alle  $t > t_0$  und einem Vektor der Systemeingänge  $\mathbf{w} = \text{const} = \mathbf{w}_0$  die Systemausgänge konstant bleiben (es gilt also  $\mathbf{y} = \text{const} = \mathbf{y}_{w0}$ ). Außerdem muß für alle Eingangssignale der nichtlinearen Glieder die Gleichung (6.4) erfüllt sein.

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e} = \text{const.} \quad (6.4)$$

**Definition 6.2:** Ein stationärer Zustand  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{\mathbf{w}_0}(t))$  eines nichtlinearen System ist ein solcher Zustand des Systems, bei dem es für  $t \rightarrow \infty$  und einem Vektor der Systemeingänge  $\mathbf{w} = \mathbf{cons} = \mathbf{w}_0$  einen solchen beliebigen reellen Vektor  $\mathbf{K}$  gibt, daß für die Systemausgänge  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\mathbf{w}_0}(t)$  die Gleichung (6.5) und für die nichtlinearen Eingänge  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{\mathbf{w}_0}(t)$  (6.6) erfüllt ist.

$$\mathbf{y}_{\mathbf{w}_0}(t) < \mathbf{K} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{w}_0}(t) < \mathbf{K} \quad (6.6)$$

Mit den Definitionen 6.1 und 6.2 ist beispielsweise eine Grenzschwingung zwar ein stationärer Zustand, nicht aber ein Ruhezustand des Systems. Jeder Ruhezustand ist damit auch ein stationärer Zustand, aber nicht umgekehrt. Diese Unterscheidung wird oft bei der Betrachtung des Stabilitätsverhaltens der nichtlinearen Systeme (vgl. z.B. [3], Abs. 1.4) unterlassen, ist aber bei der Analyse eines Systems mit der Methode der Harmonischen Balance von Bedeutung.

Mit der Berücksichtigung dieser Besonderheiten des Systemverhaltens im Zustandsraum lassen sich folgende Stabilitätsdefinitionen formulieren.

**Definition 6.3:** Ein nichtlineares System heißt *global asymptotisch stabil*, wenn es für das System für *einen beliebigen* Vektor  $\mathbf{w}_0$  im System nur *einen einzigen Ruhezustand*  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{\mathbf{w}_0})$  gemäß Definition 6.1 gibt und das System für  $t > t_0$  und  $t \rightarrow \infty$  aus jedem beliebigen Anfangszustand der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_g(t_0)$  gegen den *Ruhezustand*  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{\mathbf{w}_0})$  strebt.

**Definition 6.4:** Ein nichtlineares System heißt *asymptotisch stabil*, wenn es für das System für *mindestens einen* beliebigen Vektor  $\mathbf{w}_0$  im System *mehrere Ruhezustände*  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{\mathbf{I}(\mathbf{w}_0)}), \dots, (\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{\mathbf{n}(\mathbf{w}_0)})$  mit  $n > 1$  gemäß Definition 6.1 geben kann und im übrigen für jeden Vektor  $\mathbf{w}_0$  *ein Ruhezustand*  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{\mathbf{I}(\mathbf{w}_0)})$  entsteht. Weiterhin strebt das System für  $t > t_0$  und  $t \rightarrow \infty$  aus jedem beliebigen Anfangszustand der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_g(t_0)$  gegen einen dieser Ruhezustände.

**Definition 6.5:** Ein nichtlineares System heißt *stabil (aber nicht asymptotisch)*, wenn das System nicht (global) asymptotisch stabil ist und für *einen beliebigen* Vektor  $\mathbf{w}_0$  *zumindest* aber für den Vektor  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$  für  $t > t_0$  und  $t \rightarrow \infty$  aus jedem beliebigen Anfangszustand der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_g(t_0)$  das System *einen stationären Zustand*  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{w_0}(t))$  gemäß Definition 6.2 annimmt.

Für stabile Systeme gemäß Definition 6.5 gibt es bekanntlich unterschiedliche stationäre Zustände. Damit ist es erforderlich die Definition 6.6 einzuführen.

**Definition 6.6:** Ein gemäß der Definition 6.5 stabiles System weist *ein chaotisches oder ein Grenzwahlungsverhalten* auf, wenn für  $t > t_0$  und  $t \rightarrow \infty$  für den *stationären Zustand*  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{y}_{w_0}(t))$  die Gleichung (6.7) oder (6.8) zutrifft.

Für das Grenzwahlungsverhalten gilt:

$$\mathbf{y}_{w_0}(t) = \frac{\mathbf{Y}_0}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} (\mathbf{Y}_{C\eta} \cos(\eta\omega_x t) + \mathbf{Y}_{S\eta} \sin(\eta\omega_x t)) \quad (6.7)$$

mit der Frequenz  $\omega_x = 2\pi/(t_x - t_0)$ .

Für das chaotische Verhalten gilt:

$$\mathbf{y}_{w_0}(t) = \frac{\mathbf{Y}_0(t)}{2} + \sum_{\eta=1}^{\infty} (\mathbf{Y}_{C\eta}(t) \cos(\eta\omega_x(t)t) + \mathbf{Y}_{S\eta}(t) \sin(\eta\omega_x(t)t)) < \mathbf{K} < \infty \quad (6.8)$$

wobei  $\mathbf{K}$  ein beliebiger reeller Vektor ist.

Die Gleichung (6.8) enthält die Beschreibung aller möglichen Ursachen für die Entstehung chaotischer Bewegungen im System. Einerseits kann das System z.B. keinen konstanten Gleichanteil  $\mathbf{Y}_0(t) = \text{const.}$  erzeugen, weil es für  $\omega \rightarrow \infty$  und für kleinere Signalwerte instabil ist und bei steigenden Amplituden stabil wird.

Zugleich ist das System nicht in der Lage einen stabilen Zustand der Harmonischen Balance herstellen. Vielmehr „wandert“ das System von einem Zustand in den anderen und erzeugt damit den harmonischen Anteil von (6.8). Solche Verhalten der nichtlinearen Systeme können den Beispielen 7.2 und 7.3 entnommen werden.

Wenn jetzt mit der Hilfe der Harmonischen Balance die Stabilität des nichtlinearen Systems gemäß einer der Definitionen 6.3 bis 6.6 nachgewiesen werden soll, dann muß gewährleistet sein, daß die Harmonische Balance alle in den Stabilitätsdefinitionen möglichen Zustände berücksichtigt. Das ist in der Tat der Fall, denn mit (6.1) bis (6.3) wurde gezeigt, daß für  $\ker[\mathbf{C}_V \mathbf{C}_R] = 0$  aus (6.2) die Betrachtung des Vektors der Eingangssignale der nichtlinearen Glieder  $\mathbf{e}$  zu den gleichen Aussagen führen muß wie beim der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_g$ .

## 6.2 Stabilitätskriterien

Für die Durchführung der Stabilitätsanalyse eines nichtlinearen Systems lassen sich die bekannten Stabilitätskriterien für die linearen Systeme heranziehen. Dabei werden die Kriterien im Sinne von Ljapunow zugrunde gelegt. Die Einzelheiten hierzu können z.B. [3], [5], [12] oder anderen Literaturquellen entnommen werden.

Wie im Kapitel 3 gezeigt wurde, kann das Übertragungsverhalten des Systems für jede Frequenz  $0 < \omega < \infty$  durch die Berücksichtigung von (3.32) anstelle der nichtlinearen Funktionen untersucht werden. Mit (3.32) gilt somit für das nichtlineare System die Struktur von Bild 6/1 .

Die Übertragungsfunktion  $\mathbf{G}_{NL}$  von Bild 6/1 gilt nur für das Verhalten eines spektralen Signals der „Fenster“-Funktion mit der Frequenz  $\omega \equiv \omega_x \equiv \omega_{x0}$  gemäß Gleichung (3.32).

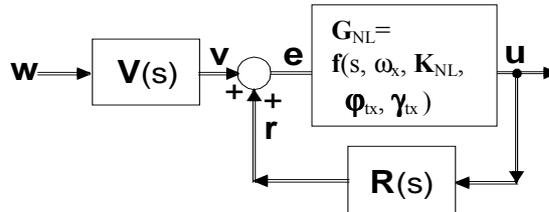


Bild 6/1 Eine zum nichtlinearen System äquivalente Darstellung für die spektralen Signale  $0 < \omega_x < \infty$

Mit (4.4) bis (4.6) gilt für  $G_{NL}$  von Bild 6/1 weiter die Gleichung (6.9).

$$G_{NL} = G_{NL}(s, \omega_x, N(e), \gamma_{tx}) = G_{NL}(s, \omega_x, K_{BF}(e), \phi_{BF}(e), \gamma_{tx}) \quad (6.9)$$

Dabei steht  $K_{BF}(e)$  für die Beträge der Beschreibungsfunktionen  $|N(e)|$  und  $\phi_{BF}(e)$  für den Winkel zwischen ihren reellen und imaginären Teilen  $\langle N_r, N_i \rangle$ ,  $\gamma_{tx}$  entspricht der Gleichung (3.32). Mit (6.9) läßt sich gemäß Bild 6/1 die Gleichung (6.10) bzw. (6.11) herleiten. Sie gilt nur für das Verhalten des spektralen Signals der „Fenster“-Funktion aus Abschnitt 3.2 mit der Frequenz  $0 < \omega_x < \infty$ .

$$u = G_{NL} (1 - R G_{NL})^{-1} V w \quad (6.10)$$

$$u = G_g w \quad (6.11)$$

Die Gleichung (6.10) und (6.11) ist nur dann gültig, wenn  $(1 - R G_{NL})^{-1}$  existiert, die Determinante  $\det(1 - R G_{NL}) \neq 0$ . Bei einem realen System kann angenommen werden, daß diese Bedingung erfüllt ist, weil sonst kein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen vorhanden wäre. Weitere Bemerkungen hierzu lassen sich in [5], Abschnitt 9.1 und 9.3 finden.

Bei der Gleichung (6.11) handelt es sich um eine allgemeine gekoppelte Struktur eines „linearen“ Mehrgrößensystems. Solche Systeme werden in der Literatur ausführlich behandelt (vgl. z.B. [5], [27]). In einem allgemeinen

Mehrgrößenfall müssen alle Elemente der Matrix  $\mathbf{G}_g$  auf ihre Eigenschaften untersucht werden. Die Untersuchungsergebnisse der einzelnen Übertragungsfunktionen liefern das Gesamtbild des Systemverhaltens. Damit brauchen für die vollständige Betrachtung des Gesamtsystems nur die Kriterien für ein Element der Matrix  $\mathbf{G}_g$  aufgestellt werden.

Für  $\omega_x \rightarrow \infty$  gilt für die nichtlinearen Glieder nicht mehr die Gleichung (6.9), sondern (3.2) oder (3.3). Für Gleichanteile, d.h. für  $\omega_x = 0$ , müssen statt (6.9) die Gleichungen (4.7) und (4.14) berücksichtigt werden.

Um die Stabilitätskriterien für das gesamte System formulieren zu können, muß vorher die Stabilität der einzelnen Zustände der Harmonischen Balance definiert werden. Die Vorgehensweise bei der Analyse eines einzelnen Zustandes wird im Abschnitt 6.2.1 vorgestellt.

### 6.2.1 Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance.

Wurde bei der Untersuchung der ersten Harmonischen gemäß Abschnitt 5.3 und 5.4 nachgewiesen, daß ein Zustand der Harmonischen Balance im System entstehen könnte, so muß, durch den Vergleich mit der Beschreibungsfunktion, seine Existenz geprüft und anschließend seine Stabilitätsuntersuchung durchgeführt werden. Sie soll feststellen, ob dieser Zustand zu einer Dauerschwingung führen oder in einen anderen Zustand wechseln wird. D.h. es muß untersucht werden, ob es eine solche Frequenz  $\omega_x$  geben kann, daß die erste Harmonischen der „Fenster“-Funktion gemäß (3.31) für diese Frequenz und für  $t \rightarrow \infty$  erhalten bleibt.

Für ein nichtlineares System von Bild 6/1 kann dementsprechend ein Zustand der Harmonischen Balance als Punkt  $X_{HB}$  von Bild 6/2 dargestellt werden. Dieser Punkt entsteht als ein Schnittpunkt von  $N_{(i,j)}$  aus (6.12) und  $Z_{(i,j)}$  aus (5.33) und erfüllt zu einem Zeitpunkt  $t_x$  und für ein Zeitintervall  $t_x - T_x$  (d.h. für  $\omega_x = 2\pi/T_x$ ) die Beziehung (6.12) und (6.13). Diese Gleichungen (6.12) und (6.13) können entsprechend der Ausführungen im Abschnitt 5.4 aus (5.41) bis (5.43) abgeleitet werden.

Zuerst werden für den gesamten Bereich der Eingangsvariablen  $\mathbf{E}$  alle Werte der Beschreibungsfunktionen  $N_{(1,1)}$  bis  $N_{(i,j-1)}$  und  $N_{(i,j+1)}$  bis  $N_{(m,n)}$  berechnet. Damit können die Schnittpunkte von  $N_{(i,j)}$  entsprechend (6.12) und  $Z_{(i,j)}$  nach (5.33) ermittelt werden. Dann wird  $E_{S1(j)}$  zu der frei wählbaren Variablen bestimmt, womit  $N_{(i,j)}$  mit einem Vektor  $\mathbf{E}_{(j)}$  entsprechend (4.14) berechnet werden kann.

Für die Überprüfung des Schnittpunktes  $Z_{(i,j)} = N_{(i,j)}$  muß ein Vergleich der Werte  $\mathbf{E}_{S1(\xi=1)}$  bis  $\mathbf{E}_{S1(\xi=n)}$  von (6.13) mit den Werten in den Vektoren  $\mathbf{E}_{(1)}$  bis  $\mathbf{E}_{(n)}$  erfolgen, welche für die Berechnung von  $N_{(1,1)}$  bis  $N_{(i,j-1)}$  und  $N_{(i,j+1)}$  bis  $N_{(m,n)}$  im Punkt  $Z_{(i,j)} = N_{(i,j)}$  verwendet wurden. D.h. ein Schnittpunkt  $Z_{(i,j)} = N_{(i,j)}$  stellt nur dann einen Zustand der Harmonischen Balance dar, wenn (6.13) erfüllt ist.

$$N_{(i,j)} = f(\mathbf{E}_{(j)}) = Z_{(i,j)} = f(\omega = \omega_x, N_{(1,1)}, \dots, N_{(i,j-1)}, N_{(i,j+1)}, \dots, N_{(m,n)}) \quad (6.12)$$

$$E_{S1_\zeta} = E_{S1(j)} f_{E_\zeta}(\omega = \omega_x, N_{(1,1)}, \dots, N_{(i,j-1)}, N_{(i,j+1)}, \dots, N_{(m,n)}) \quad (6.13)$$

In (6.12) und (6.13) gilt  $(m,n)$  aus (2.7) und  $\zeta=1,2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ .  $E_{S1(j)}$  entspricht der Amplitude der ersten Harmonischen des  $j$ -ten Eingangssignals.

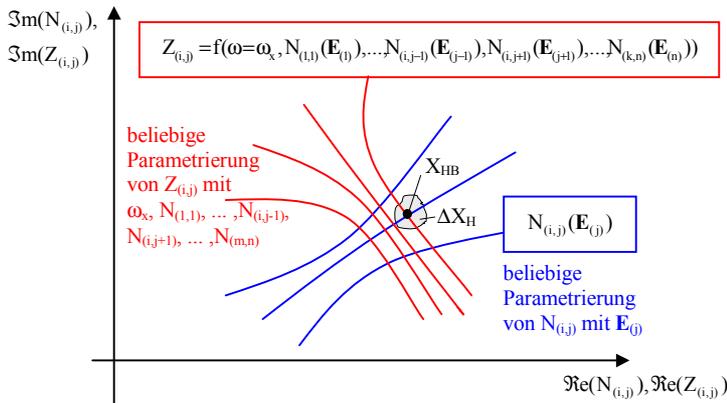


Bild 6/2 Zustand der Harmonischen Balance  $X_{HB}$  mit den Parametern  $\omega_x, N_{(1,1)}$  bis  $N_{(m,n)}$  und  $\mathbf{E}_{(j)}$

Für den Vektor  $\gamma_{tx}$  aus (6.9) und für  $\omega = \omega_x$  existiert für den Zustand  $X_{HB}$  eine Verteilung der Pole  $s_1, s_2, \dots$  einer Übertragungsfunktion  $G_{g(i,j)}$  der Matrix  $G_g$  aus (6.11). Pole des Systems, die auf der imaginären Achse liegen, werden mit  $s_{G1}, s_{G2}, \dots$  gekennzeichnet. Die Stabilitätsuntersuchung des Zustandes der Harmonischen Balance  $X_{HB}$  führt zur Untersuchung der Polverschiebung bei Veränderung der einzelnen Parametern  $\omega_x$ ,  $\mathbf{K}_{BF}(\mathbf{e})$ , und  $\gamma_{tx}$  des in Bild 6/1 dargestellten Systems.

Ein lineares System von Bild 6/1 ist *instabil*, wenn die einzelnen Übertragungsfunktionen von  $G_g$  aus (6.11) Pole rechts der imaginären Achse oder reine imaginäre mehrfache Pole aufweisen. Sonst ist das System *stabil* (vgl. [3], Abschnitt 1.7).

Im Zustand der Harmonischen Balance erfüllt das System die Gleichung (6.12). Damit ist gewährleistet, daß vom System in diesem Zustand eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $\omega_x$  erzeugt wird. Dadurch werden unabhängig von  $\gamma_{tx}$  immer zwei Pole auf der  $\mathfrak{S}$ -Achse der komplexen Ebene existieren. Der Vektor  $\gamma_{tx}$  beeinflußt jedoch die anderen Pole des Systems und auch das Verhalten der einzelnen Eingangssignale  $E_{0(j)}(t)$ ,  $E_{S1(j)}(t)$ ,  $E_{S\eta(j)}(t)$ ,  $E_{C\eta(j)}(t)$  aus (4.14) mit  $j=1, 2, \dots, n$ . Damit muß für einen stabilen Zustand der Harmonischen Balance die Bedingung (6.14) gelten, welche entsprechend der Stabilitätsbedingungen der linearen Systeme formuliert werden kann (vgl. [3], Abschnitt 1.7).

*Ein stabiler Zustand der Harmonischen Balance kann nur dann entstehen, wenn:*

1. *ein solcher Vektor der Phasenverschiebung  $\gamma_{tx}$  aus (3.32) existiert, daß die Pole der Übertragungsfunktion  $G_g$  aus (6.11) links und auf der  $\mathfrak{S}$ -Achse der komplexen Ebene liegen,*
2. *die auf der  $\mathfrak{S}$ -Achse liegenden Pole höchstens 1. Ordnung sind,*
3. *bei einem Pol  $s=0$  der Systemeingang  $w=0$  ist.*

(6.14)

Existieren solche Vektoren der Phasenverschiebung  $\gamma_{tx}$ , für die sich eine stabile Polverteilung ergibt, dann kann mit der Untersuchung fortgefahren werden. Andernfalls kann von einem instabilen Zustand der harmonischen Balance gesprochen werden.

Weiter muß geklärt werden, was in dem nächsten Augenblick, d.h. für  $t_x+dt$ , mit dem Zustand der Harmonischen Balance geschehen wird.

Für  $t \ll \infty$  kann davon ausgegangen werden, daß auf Grund der transienten Vorgänge im System für die Beschreibungsfunktionen Änderungen  $N \pm dN$  vorliegen, die durch die Veränderung der einzelnen Harmonischen in den Eingangssignalen an den nichtlinearen Gliedern  $\mathbf{E}$  (z.B.  $E_0, E_{S1}, E_{S\eta}$  und  $E_{C\eta}$ ; vgl. (4.14)) hervorgerufen wurden. Deswegen muß die Bewegung der Polverteilung in Abhängigkeit von  $\mathbf{E}$  untersucht werden.

Der Schwerpunkt der Untersuchung gilt dabei dem Verhalten des an der  $\Im$ -Achse liegenden Polpaars  $\pm s_G$  mit  $\omega = \omega_x$ . Für solch einen Pol gilt die Gleichung (6.15).

$$\pm s_G = f_{s_G(\Re)}(\omega = \omega_x, \mathbf{N}(\mathbf{E}), \gamma_{tx}) \pm j f_{s_G(\Im)}(\omega = \omega_x, \mathbf{N}(\mathbf{E}), \gamma_{tx}) \quad (6.15)$$

In (6.15) ist  $\mathbf{N}(\mathbf{E}) =$  z.B.  $[N_{(1,1)}(E_{0(1)}, E_{S1(1)}, E_{S\eta(1)}, E_{C\eta(1)}), \dots, N_{(i,j)}(E_{0(j)}, E_{S1(j)}, E_{S\eta(j)}, E_{C\eta(j)}), \dots]$  gemäß (4.14) mit  $i=1,2,\dots,m$  und  $j=1,2,\dots,n$  entsprechend (2.7).

In einem während des transienten Vorgangs entstandenen Zustand der Harmonischen Balance werden die einzelnen Eingangssignale an den nichtlinearen Gliedern  $\mathbf{E}_{HB}$  unterschiedlich beeinflusst. Das hängt von dem Verlauf des Vektors  $\mathbf{w}$  (vgl. Bild 6/1) sowie von den Zustandsvariablen zum Zeitpunkt  $t=0$  ab. Aus diesem Grund kann im Allgemeinen für einen Zustand der Harmonischen Balance auch ein unterschiedliches Verhalten erwartet werden, nicht zuletzt auch immer dann, wenn dieser Zustand für unterschiedliche Vektoren  $\mathbf{E}_{HB}$  möglich ist.

Die oben beschriebenen Zusammenhänge ermöglichen die Durchführung der Analyse des Systemverhaltens im Zustand der Harmonischen Balance.

Zuerst beeinflusst das System entsprechend dem Verlauf des transienten Vorgangs eine oder mehrere Größen des Vektors  $\mathbf{E} = [E_{0(1)}, E_{S1(1)}, E_{S\eta(1)}, \dots, E_{0(n)}, E_{S1(n)}, E_{S\eta(n)}, E_{C\eta(n)}]$ . Dieser Einfluß hat zur Folge, daß eine Änderung der Funktion  $f_{SG} = f_{SG(\Re)} + jf_{SG(\Im)}$  aus (6.15) um  $\Delta f_{SG} = \Delta f_{SG(\Re)} + j\Delta f_{SG(\Im)}$  (für die im Zustand der Harmonischen Balance gilt:  $f_{SG(\Re)}=0$ ) vom System angestrebt wird.

Wenn  $\Delta f_{SG(\Re)}$  *positiv* wird, dann wird sich der Pol  $s_G$  in die rechte komplexe Halbebene verschieben und damit erreichen, daß alle Größen  $E_{S1(i)}$   $i=1,2,\dots,n$  aus  $\mathbf{E}$  um  $\Delta E$  wachsen möchten. Wird  $\Delta f_{SG(\Re)}$  *negativ*, dann muß  $\mathbf{E}$  um  $\Delta E$  kleiner werden. Dieser Einfluß auf alle  $E_{S1(i)}$  hätte dann eine erneute Veränderung von  $f_{SG}$  um  $\Delta f_{SG}$  zur Folge, die entweder entgegengesetzt zu den durch den transienten Vorgang hervorgerufenen Änderungen ausgerichtet wäre oder die eingeleitete Bewegung, weg vom Zustand der Harmonischen Balance, unterstützt hätte.

Die so entstandenen Änderungen  $\Delta E$  beeinflussen gleichzeitig auch die Pole des Systems für andere Frequenzen  $\omega_x$  (in  $t_x$  entsprechen der „Fenster“-Funktion die Frequenzen  $2\pi/t_x < \omega_x < \infty$ ), was zur Folge hat, daß sich die Amplituden der höheren Harmonischen um den Betrag  $\pm\Delta E_H$  verändern können. Ebenso bleibt der imaginäre Anteil  $\Delta f_{SG(\Im)}$  von  $\pm s_G$  nicht gleich, womit sich die Frequenz des untersuchten Zustandes verändert. Dadurch kann ein neuer Zustand der Harmonischen Balance mit einer anderen Frequenz entstehen. Der Einfluß von  $\Delta f_{SG(\Im)}$  kann analog zu den Auswirkungen von  $\Delta f_{SG(\Re)}$  analysiert werden.

Diese oben beschriebenen Vorgänge geschehen gleichzeitig. Der Vektor  $d\mathbf{E}/dt$  kann deswegen während des transienten Vorgangs unterschiedliche Werte annehmen (auch abhängig vom Verlauf des Vektors  $\mathbf{w}$ ). Für die Untersuchung der Stabilität hat dieser Umstand jedoch keine Bedeutung, da im Prinzip nur eine stabile Umgebung eines Zustandes gesucht wird. D.h. für den Nachweis der Stabilität von  $\mathbf{X}_{HB}$  reicht aus, daß ein Bereich  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  existiert, in welchem das System für beliebige  $\Delta E$  und  $\Delta\omega$  gegen  $\mathbf{X}_{HB}$  strebt.

Aus diesen Überlegungen folgt die Definition der Stabilität des Zustandes der Harmonischen Balance:

**Definition 6.7:**

Besitzt ein nichtlineares System einen durch den Punkt  $\mathbf{X}_{HB}$

$$\mathbf{X}_{HB} = [\omega_{x\_HB}, E_{0(1)\_HB}, E_{S1(1)\_HB}, \dots, E_{Cn(n)}, \gamma_{tx(1)}, \dots, \gamma_{tx(n)}] \quad (6.16)$$

beschriebenen und durch (6.12) und (6.14) definierten Zustand der Harmonischen Balance, dann heißt dieser Zustand *stabil*, wenn eine solche Umgebung  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$

$$\Delta\mathbf{X}_{HB} = [\omega_{x\_HB} \pm \Delta E, E_{0(1)\_HB} \pm \Delta E, E_{S1(1)\_HB} \pm \Delta E, \dots, E_{Cn(n)} \pm \Delta E, \gamma_{tx(1)}, \dots, \gamma_{tx(n)}] \quad (6.17)$$

existiert, daß bei einer Verschiebung des Punktes  $\mathbf{X}_{HB}$  innerhalb eines beliebig kleinen Bereiches  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  das System für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\mathbf{X}_{HB}$  strebt.

Es ist verständlich, daß bei einem stabilen Zustand der Harmonischen Balance seine Veränderung um  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  eine entgegengesetzte Reaktion des Systems erzeugen muß. Daraus folgt, daß die Polverschiebung nach der Änderung um  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  einen stabilen Charakter aufweisen soll. D.h. die Reaktion des Systems muß solche Auswirkung auf die Pole des Systems aufweisen, daß sich der reelle Teil  $f_{SG(\Re)} = f_{\Re}$  von  $s_G$  auf die  $\Im$ -Achse der komplexen Ebene bewegt und der imaginäre Teil  $f_{SG(\Im)} = f_{\Im}$  dem Wert  $\omega_x = \omega_{SG}$  zustrebt.

Die Änderung des Zustandes des Systems um  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  führt zu einer Verschiebung von  $f_{\Re} = 0$  um  $\Delta f_{\Re} = f_{\Re}(\Delta\mathbf{X}_{HB})$ . Diese Änderung hat zur Folge, daß sich die Amplituden des Vektors der ersten Harmonischen  $E_{S1}$  um  $\Delta E_{S1} = +\Delta E$  für  $\Delta f_{\Re} > 0$  und um  $\Delta E_{S1} = -\Delta E$  für  $\Delta f_{\Re} < 0$  verändern. Weiterhin können sich (müssen aber nicht) die Amplituden der höheren Harmonischen verändern. Für diese Änderungen wird deswegen ein Betrag  $\Delta E_H = \pm \Delta E$  berücksichtigt. Ebenso wirkt sich die durch  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  verursachte Veränderung der Frequenz  $\omega = \omega_x = f_{\Im}(\Delta\mathbf{X}_{HB})$  auf die Polverschiebung und damit zugleich auf die Änderungen  $\Delta E_{S1}$  und  $\Delta E_H$ . Diese Zusammenhänge müssen bei der Formulierung des

Stabilitätskriteriums berücksichtigt werden, damit die Umgebung von  $\mathbf{X}_{HB}$  vollständig geprüft werden kann.

In Bild 6/3 sind an einem Beispiel, d.h für  $f_{\Re}(\Delta\mathbf{X}_{HB}) > 0$  und  $f_{\Im}(\Delta\mathbf{X}_{HB}) < f_{\Im}(\mathbf{X}_{HB})$ , die Einzelheiten für ein stabiles Verhalten des Polpaars  $\pm s_G$  dargestellt ( $s = f_{\Re} + j f_{\Im}$ ). Die praktische Anwendung dieses Falles wird in Beispiel 7.1 erläutert. Durch die Einwirkung von  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  wandert in Bild 6/3 der Pol  $s_{G(\mathbf{X}_{HB})}$  nach  $s_{G(\Delta\mathbf{X}_{HB})}$ . Die Koordinaten von  $s_{G(\mathbf{X}_{HB})}$  und  $s_{G(\Delta\mathbf{X}_{HB})}$  weisen einen Bereich  $\Delta P_{SG}$  aus, welcher die stabilen Eigenschaften des Systems charakterisiert. Nur wenn das System auf  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  entgegengesetzt der durch  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  verursachten Verschiebung von  $s_{G(\mathbf{X}_{HB})}$  reagiert d.h. die Reaktion des Systems auf die Verschiebung von  $s_{G(\mathbf{X}_{HB})}$  nach  $s_{G(\Delta\mathbf{X}_{HB})}$  innerhalb des in Bild 6/3 als stabil gekennzeichneten Bereiches  $\Delta P_{SG}$  liegt, kann das Verhalten als stabil angesehen werden.

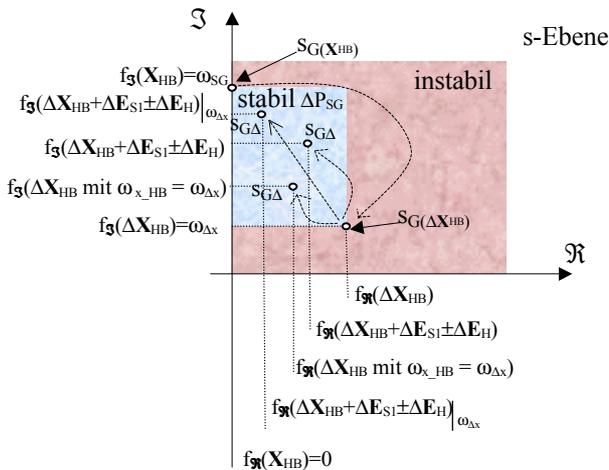


Bild 6/3 Ermittlung der Bedingungen für die Stabilität des Zustandes der Harmonischen Balance

In Bild 6/3 sind die einzelnen Untersuchungsschritte gezeigt. Zuerst wird die Verschiebung von  $s_{G(\mathbf{X}_{HB})}$  nach  $s_{G(\Delta\mathbf{X}_{HB})}$  durch die Einwirkung von  $\Delta\mathbf{X}_{HB}$  berechnet. Damit kann die Verschiebung von  $s_{G(\Delta\mathbf{X}_{HB})}$  nach  $s_{G\Delta}$ , welche durch die Veränderung von  $\Delta\mathbf{E}_{S1} = \Delta\mathbf{E}$ ,  $\Delta\mathbf{E}_H \in \{-\Delta\mathbf{E}, 0, +\Delta\mathbf{E}\}$  und  $\omega_{\Delta x} = f_{\Im}(\Delta\mathbf{X}_{HB})$  entstehen

kann, ermittelt werden. Die verursachten Änderungen  $\Delta \mathbf{E}_{S1}$ ,  $\Delta \mathbf{E}_H$  und  $\omega_{\Delta x}$  können zu einem Vektor  $\Delta \mathbf{X}_{HB}$  zusammen gefaßt werden.

Aus den obigen Ausführungen, der Definition 6.7 und den bekannten Eigenschaften von linearen Systeme läßt sich ein Kriterium für die Stabilität des Zustandes der Harmonischen Balance formulieren.

<p><i>Ein durch (6.12) und (6.14) beschriebener Zustand der Harmonischen Balance <math>\mathbf{X}_{HB}</math> mit einem auf der <math>\mathfrak{J}</math>-Achse liegenden einfach konjugiert - komplexen Pol <math>s_G</math> gemäß (6.15) ist stabil im Sinne der Definition 6.7, wenn eine solche beliebig kleine Umgebung <math>\Delta \mathbf{X}_{HB}</math> gemäß (6.17) existiert, daß für jeden beliebigen Punkt aus <math>\Delta \mathbf{X}_{HB}</math> folgende Bedingungen gelten:</i></p>				
<p><i>Für <math>f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB}) &gt; 0</math> liegt</i></p>	<table style="border: none;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math>s_G</math> für <math>\Delta \mathbf{X}_{HB}</math> und <math>\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})</math>  <math>s_G</math> für <math>\Delta \mathbf{X}_{HB} + \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H</math>  <math>s_G</math> für <math>\Delta \mathbf{X}_{HB} + \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H</math> und <math>\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})</math> </td> <td style="font-size: 3em; padding: 0 10px;">}</td> <td style="padding: 0 10px; vertical-align: middle;">innerhalb <math>\Delta \mathbf{P}_{SG}</math></td> </tr> </table>	$s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB}$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$ $s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB} + \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H$ $s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB} + \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$	}	innerhalb $\Delta \mathbf{P}_{SG}$
$s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB}$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$ $s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB} + \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H$ $s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB} + \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$	}	innerhalb $\Delta \mathbf{P}_{SG}$		
<p><i>Für <math>f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB}) &lt; 0</math> liegt</i></p>	<table style="border: none;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math>s_G</math> für <math>\Delta \mathbf{X}_{HB}</math> und <math>\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})</math>  <math>s_G</math> für <math>\Delta \mathbf{X}_{HB} - \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H</math>  <math>s_G</math> für <math>\Delta \mathbf{X}_{HB} - \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H</math> und <math>\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})</math> </td> <td style="font-size: 3em; padding: 0 10px;">}</td> <td style="padding: 0 10px; vertical-align: middle;">innerhalb <math>\Delta \mathbf{P}_{SG}</math></td> </tr> </table>	$s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB}$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$ $s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB} - \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H$ $s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB} - \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$	}	innerhalb $\Delta \mathbf{P}_{SG}$
$s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB}$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$ $s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB} - \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H$ $s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB} - \Delta \mathbf{E}_{S1} + \Delta \mathbf{E}_H$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$	}	innerhalb $\Delta \mathbf{P}_{SG}$		
<p><i>Für <math>f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB}) = 0</math></i></p>	<table style="border: none;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math>s_G</math> für <math>\Delta \mathbf{X}_{HB}</math> und <math>\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})</math>                      (Für <math>f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB}) = 0</math> wird <math>\Delta \mathbf{P}_{SG}</math> zu einer Geraden)                 </td> <td style="font-size: 3em; padding: 0 10px;">}</td> <td style="padding: 0 10px; vertical-align: middle;">innerhalb <math>\Delta \mathbf{P}_{SG}</math></td> </tr> </table>	$s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB}$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$ (Für $f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB}) = 0$ wird $\Delta \mathbf{P}_{SG}$ zu einer Geraden)	}	innerhalb $\Delta \mathbf{P}_{SG}$
$s_G$ für $\Delta \mathbf{X}_{HB}$ und $\omega = f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB})$ (Für $f_{\mathfrak{J}}(\Delta \mathbf{X}_{HB}) = 0$ wird $\Delta \mathbf{P}_{SG}$ zu einer Geraden)	}	innerhalb $\Delta \mathbf{P}_{SG}$		
<p><i>Innerhalb <math>\Delta \mathbf{P}_{SG}</math> existieren keine weiteren Zustände der Harmonischen Balance mit <math>\omega_{SG} &lt; \omega &lt; \omega_{\Delta x}</math>, welche für die Amplituden <math>\mathbf{E}_S \pm \Delta \mathbf{E}_{S1}</math> die Bedingung (5.34) erfüllen.</i></p>				

(6.18)

Die letzte Bedingung aus (6.18) ist vor allem für Systeme mit nur einer nicht-linearen Kennlinie wichtig. In solchen Systemen können die Zustände der Harmonischen Balance für beliebige Amplituden entstehen. Bei der Stabili-

tätsanalyse muß außerdem darauf geachtet werden, daß auf der  $\Im$ -Achse der  $s$ -Ebene bei der Berechnung von *stabilen* Grenzzyklen nur *ein einfaches Polpaar* gemäß (6.15) vorhanden sein sollte. Wenn das nicht der Fall ist, muß noch geprüft werden, ob die höheren Harmonischen für die Berechnung der Beschreibungsfunktion angepaßt werden müssen. In der Regel ist diese Frequenz für die höheren Harmonischen des Vektors  $\mathbf{E}$  entsprechend (4.14) zu wählen, für die eine bessere Übertragung durch die Glieder der Matrix  $\mathbf{R}$  gewährleistet ist, d.h. diese Frequenz, welche größere Faktoren  $K_{V(i,i)}$  aus (5.44) mit  $i=1,\dots,n$  aufweisen kann.

### 6.2.2 Ruhezustände

Aus den Überlegungen im Abschnitt 6.2.1 läßt sich eine für die praktischen Anwendungen wichtige Schlußfolgerung ableiten. Auf sie soll kurz eingegangen werden. Die Zustände der harmonischen Balance werden entlang der Kurven der Harmonischen Balance untersucht und zwar für  $t \rightarrow \infty$  d.h. für  $\omega \rightarrow 0$ . Sind diese Kurven hinsichtlich  $\omega$  eindeutig (sie enthalten keine gleichen Parameter  $\mathbf{N}(\mathbf{E})$  gemäß (6.12) für unterschiedliche  $\omega$ ), dann wird im System ein Ruhezustand (6.19)

$$\mathbf{u}(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \mathbf{G}_{\text{NL}} (\mathbf{I} - \mathbf{R} \mathbf{G}_{\text{NL}})^{-1} \mathbf{V} \mathbf{W}_0 \right) \quad (6.19)$$

mit  $\mathbf{G}_{\text{NL}}$  gemäß (3.2) bzw. (3.3) entstehen, wenn die Bedingungen (6.20) erfüllt sind.

1. Alle Zustände der Harmonischen Balance sind zumindest in Bezug auf  $\omega$  für  $0 < \omega < \infty$  instabil und gehen jeweils in die niedrigere Frequenz über.
2. Das für  $\omega \rightarrow \infty$  linearisierte System (d.h. im transienten Bereich für  $\mathbf{G}_{\text{NL}}$  gemäß (3.2) bzw. (3.3)) ist stabil, wenn  $\mathbf{e}(t) > \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K} < \infty$  und beliebig reell ist.

(6.20)

Die praktische Nutzung dieser Eigenschaften der nichtlinearen Systeme mit Kennliniengliedern erfolgt in Kapitel 7.

Mit (6.19) und (6.20) läßt sich der Aufwand der Berechnung von (5.11) umgehen, der für Systeme mit Grenzyklen oder chaotischen Bewegungen gegebenenfalls notwendig wird.

### 6.2.3 Stabilitätskriterien für das Gesamtsystem

Die für eine vollständige Beurteilung der Systemeigenschaften erforderlichen Gleichungen lassen sich zu folgender Kurzübersicht zusammenfassen:

- Gleichungen (5.41) und (5.43) für das Berechnen der im Zustand der Harmonischen Balance erforderlichen Werte der Beschreibungsfunktion.
- Die Beschreibungsfunktionen (4.6) und (4.7), die sowohl in (5.41) und (5.43) eingesetzt als auch für die Stabilitätsuntersuchung der einzelnen Zustände herangezogen werden müssen.
- Gleichungen (5.10) und (5.11) zur Sicherstellung, daß das System einen stationären Zustand erreichen kann.
- Gleichung (6.11), die im Allgemeinen ein lineares Mehrgrößensystem darstellt und die parameterorientierte Stabilitätsuntersuchung der Zustände der Harmonischen Balance mit der Frequenz  $\omega = \omega_x$ , dem Betrag  $K_{BF}(\mathbf{e})$  und dem Winkel  $\phi_{BF}(\mathbf{e})$  zwischen dem reellen und imaginären Teil der Beschreibungsfunktion sowie der Phasenverschiebung aus (3.37) als Parameter ermöglicht.

Bei der Stabilitätsuntersuchung des gesamten Systems werden stabile und instabile Zustände des Systems gemäß Definition 6.1 oder 6.2 ausgewiesen. Dabei wird geprüft, ob die Entstehung einer Dauerschwingung, eines chaotischen Verhaltens oder eines Gleichgewichtszustandes gemäß (6.4) im System möglich ist.

Mit den obigen Überlegungen können die weiteren Stabilitätskriterien formuliert werden. Sie beziehen sich auf nichtlineare Systeme mit der Struktur von Bild 2/7 .

Das nichtlineare System ist *asymptotisch stabil*, wenn folgende Verhältnisse im System eintreten:

- das für  $\omega \rightarrow \infty$  linearisierte System (d.h. für  $\mathbf{G}_{NL}$  gemäß (3.2) bzw.(3.3)) ist für  $\mathbf{e}(t) < \mathbf{K} < \infty$  stabil, (6.21)

- das System besitzt für  $0 < \omega < \infty$  nur instabile Zustände der Harmonischen Balance und zwar in Bezug auf die Größen  $\mathbf{E}$  aus (6.12). D.h. im System ist keine Grenzschwingung möglich. (6.22)

- das System erfüllt gemäß (5.11) für  $t \rightarrow \infty$  die Gleichung (6.23),

$$\mathbf{f}_{e\text{-rest}}(t, \omega_x, \mathbf{u}_{-t_0}^T, \mathbf{r}_{-t_0}^T, \mathbf{w}_{-t_0}^T, \mathbf{v}_{-t_0}^T) = \mathbf{const}. \quad (6.23)$$

- Die Bedingung (6.20) Pkt. 1 ist mit den entsprechenden Voraussetzungen erfüllt.

Wenn ein System asymptotisch stabil ist, kann seine globale Stabilität gemäß Definition 6.3 durch die Untersuchung der Ruhezustände nach (6.19) gegebenenfalls nachgewiesen werden.

Das nichtlineare System ist *stabil*, wenn folgendes gilt:

➤ das für  $\omega \rightarrow \infty$  linearisierte System (d.h. für  $\mathbf{G}_{NL}$  gemäß (3.2) bzw. (3.3)) ist für  $\mathbf{e}(t) < \mathbf{K} < \infty$  stabil, (6.24)

➤ eine der zwei folgenden Bedingungen erfüllt ist: (6.25)

1. das System besitzt *stabile* Zustände der Harmonischen Balance für  $0 < \omega < \infty$  oder
2. das System besitzt *keine stabilen* Zustände der Harmonischen Balance für  $0 < \omega < \infty$ , aber es *erfüllt* die Ungleichung (6.26) gemäß (5.11) für  $t \rightarrow \infty$ .

$$\mathbf{f}_{e\text{-rest}}(t, \omega, \mathbf{u}_{-t_0}^T, \mathbf{r}_{-t_0}^T, \mathbf{w}_{-t_0}^T, \mathbf{v}_{-t_0}^T) \neq \text{const.} < \mathbf{K} \quad (6.26)$$

$\mathbf{K} < \infty$  und beliebig reell

Die Bedingungen (6.24) bis (6.26) liefern zugleich die Stabilitätskriterien für die stabilen Systeme mit Grenzyklusverhalten gemäß (6.7) und mit chaotischem Verhalten gemäß (6.8). Diese Kriterien können getrennt formuliert werden.

Das nichtlineare System ist *stabil* und weist ein Grenzschwingungsverhalten auf, wenn

➤ das für  $\omega \rightarrow \infty$  linearisierte System (d.h. für  $\mathbf{G}_{NL}$  gemäß (3.2) bzw. (3.3)) für  $\mathbf{e}(t) < \mathbf{K} < \infty$  stabil ist, (6.27)

➤ das System *stabile* Zustände der Harmonischen Balance für  $0 < \omega < \infty$  besitzt *und* (6.28)

➤ das System die Gleichung (6.23) gemäß (5.11) für  $t \rightarrow \infty$  *erfüllt*. (6.29)

Das nichtlineare System ist *stabil* und weist ein chaotisches Verhalten auf, wenn

➤ das für  $\omega \rightarrow \infty$  linearisierte System (d.h. für  $\mathbf{G}_{\text{NL}}$  gemäß (3.2) bzw. (3.3)) ist für  $\mathbf{e}(t) < \mathbf{K} < \infty$  stabil ist, (6.30)

➤ *eine* der *zwei* folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. das System besitzt *keine stabilen* Zustände der Harmonischen Balance für  $0 < \omega < \infty$ , die Bedingung (6.20) Pkt. 1 ist bezüglich des Frequenzverhaltens *nicht erfüllt* oder (6.31)

2. das System besitzt *keine stabilen* Zustände der Harmonischen Balance für  $0 < \omega < \infty$  und *erfüllt* die Ungleichung (6.26) gemäß (5.11) für  $t \rightarrow \infty$ . (6.32)

## 7. Beispiele

### 7.1 Schwingkreis mit einer Federschaltvorrichtung

Das zu untersuchende System ist in Beispiel 1.2 dargestellt. Die dort mit  $N(E_1)$  durchgeführte Analyse liefert falsche Ergebnisse. Die Eigenschwingungseigenschaften des Systems sollen jetzt genauer untersucht und die Auswirkung der Federkonstante  $K_F$  auf das Systemverhalten geprüft werden.

Zuerst wird das System von Beispiel 1.2 in ein äquivalentes System entsprechend der Gleichungen (2.7), (2.8) und (2.9) umgewandelt. Das Ergebnis dieser Umrechnung ist in Bild 7/1 dargestellt. Für die Übertragungsfunktionen  $R_{11}=-G_g(s,K_F)$ ,  $F_{11}=G(s)$  und  $V_{11}=K_F$  gelten die Gleichungen (1.7) und (1.6).

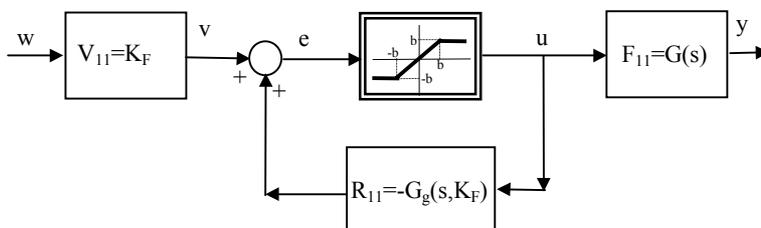


Bild 7/1 Schwingkreis von Beispiel 1.2 nach der Umwandlung in ein äquivalentes System

Zuerst soll das transiente Verhalten des Systems für  $\omega \rightarrow \infty$  analysiert werden. Zu diesem Zweck wird die nichtlineare Kennlinie  $u = f_{\text{NL}}(e)$  entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 3.1 durch die Beziehung  $u = e K_{\text{NL}}(e)$  ersetzt. Für  $K_{\text{NL}}(e)$  der Begrenzungskennlinie von Bild 7/1 gilt (7.1).

$$\begin{aligned} K_{\text{NL}}(e) &= 1 & \text{für} & \quad e \leq 9 \\ K_{\text{NL}}(e) &= 9/e & \text{für} & \quad e > 9 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Damit verändert sich  $K_{\text{NL}}(e)$  im Bereich von 0 bis 1. Die Stabilitätsuntersuchung des mit  $K_{\text{NL}}(e)$  linearisierten Systems ist in Bild 7/2 dargestellt

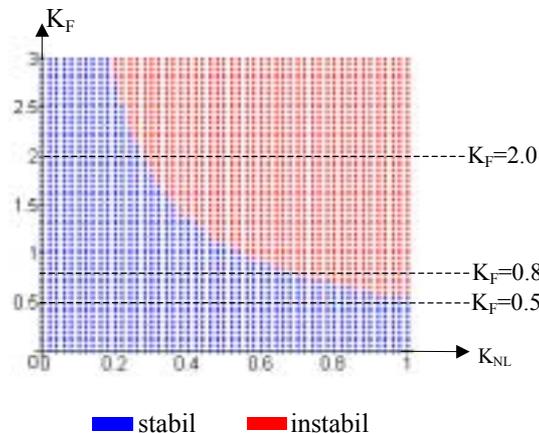


Bild 7/2 Stabilitätsuntersuchung für  $\omega \rightarrow \infty$

Das Bild 7/2 liefert für  $\omega \rightarrow \infty$  folgende Aussagen über das Systemverhalten:

- Für  $K_F < 0.55$  bleibt das System für alle  $K_{\text{NL}}$ -Werte stabil.
- Für  $K_F > 0.55$  weist das System unterschiedliches Verhalten auf. Für  $e$  kleiner 9 ist es instabil. Mit dem wachsenden Signal  $e$  nähert es sich zunehmend dem stabilen Bereich bis es schließlich für genügend große  $e$ -Werte für beliebige  $K_F$  stabil ist.

- Wegen des Übergangs vom instabilen Bereich für kleine Amplituden in einen stabilen Bereich für größere Amplituden könnten für  $K_F > 0.55$  *Dauerschwingungen* auftreten.
- Im System könnte für große Werte des Eingangssignals  $w$  ein stationärer Zustand ohne Schwingung entstehen, weil das System für große  $e$ -Werte stabil ist und das Eingangssignal  $w$  nur über den Verstärkungsfaktor  $K_F$  auf  $e$  wirkt.

Wie sich das System in Wirklichkeit verhalten wird, muß noch durch die Untersuchung der Zustände der Harmonischen Balance und der Beschreibungsfunktion geprüft werden

Die Beschreibungsfunktion der Begrenzungskennlinie kann gemäß (4.6) (4.7) und (4.14) b) mit z.B.  $\eta=\nu=2$ , entsprechend dem in Kapitel 4 vorgestellten Verfahren, ermittelt werden. Die zu untersuchenden Bereiche der Eingangsvariablen  $E_1$  und  $E_2$  werden durch die Analyse von  $R_{11}$  festgelegt. Zu diesem Zweck wird die Kennlinie  $|R_{11}(jn\omega)|/|R_{11}(j\omega)|$  mit  $n=2,3,\dots$  von Bild 7/3 berechnet.

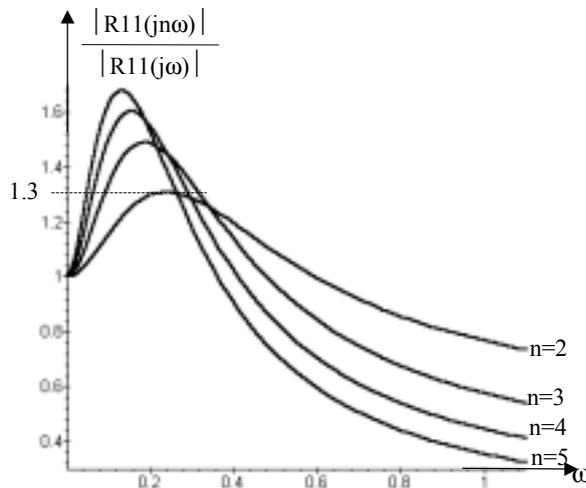


Bild 7/3 Betragskennlinie  $|R_{11}(jn\omega)|/|R_{11}(j\omega)|$

Aus Bild 7/3 kann abgelesen werden, daß die zweite Harmonische eines möglichen Zustandes der Harmonischen Balance nicht mehr als 1.3 des Betrages der ersten Harmonischen ergeben kann (Maximum der Kennlinie  $|R_{11}(jn\omega)|/|R_{11}(j\omega)|$  für  $n=2$ ).

Wenn die höheren Harmonischen bei der Berechnung der Beschreibungsfunktion weggelassen werden, ist es erforderlich, die Abweichung der Werte  $E_2$  von den idealen Werten im Zustand der Harmonischen Balance zu berücksichtigen. Aus diesem Grund muß der Wertebereich von  $E_2$  erweitert werden. Für die Berechnung der Beschreibungsfunktion wird daher die Beziehung  $E_1 > E_2/1.3$  z.B.  $E_1 = 0.5E_2$  festgelegt. Sollte sich bei der weiteren Analyse herausstellen, daß die Zustände der Harmonischen Balance mit  $E_1 \approx 0.5E_2$  entstehen können, dann muß der Bereich der Eingangsvariablen  $E_1$  und  $E_2$  entsprechend vergrößert werden.

Für die Berechnung der Fourierintegrale der Beschreibungsfunktion wurden numerische Algorithmen verwendet. Die Ergebnisse sind in Bild 7/4 dargestellt. Dieses Bild enthält ca. 60000 komplexe Zahlen. Jeder Punkt stellt einen Wert  $N_r(E_0, E_1, E_2, \varphi_2) + jN_i(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  der Beschreibungsfunktion dar. Die numerische Untersuchung mit  $0 < E_0 < 12$ ,  $0.01 < E_1 < 80$ ,  $0.1 < E_2 < 40$  und  $0 < \varphi_2 < 2\pi$  liefert weiterhin eine Hüllkurve  $H_z$  um die Punktmenge der Beschreibungsfunktion.  $H_z$  wird bei diversen anderen Zeichnungen angezeigt, um den Gültigkeitsbereich der gesamten Beschreibungsfunktion zu kennzeichnen.

Die Menge der möglichen Zustände der Harmonischen Balance  $Z_r(\omega) + jZ_i(\omega)$  kann gemäß (5.32) und (5.18) berechnet werden. Für sie gilt die Gleichung (7.2).

$$Z_{11} = Z_r(\omega) + jZ_i(\omega) = \frac{1}{R_{11}} \quad (7.2)$$

Mit dem Verstärkungsfaktor  $V_S=2$ , den Zeitkonstanten  $T_S=0.5$  Sek. und  $T_M=0.1$  Sek. von Beispiel 1.2 stellt  $Z_{11}$  eine  $K_F$ - und  $\omega$ -abhängige Kurvenschar dar (vgl. Bild 7/4).

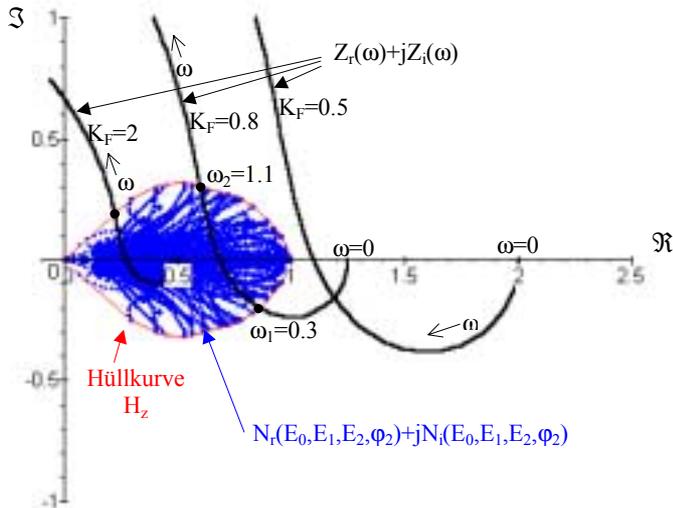


Bild 7/4 Beschreibungsfunktion der Begrenzungskennlinie mit der Kurve der Harmonischen Balance

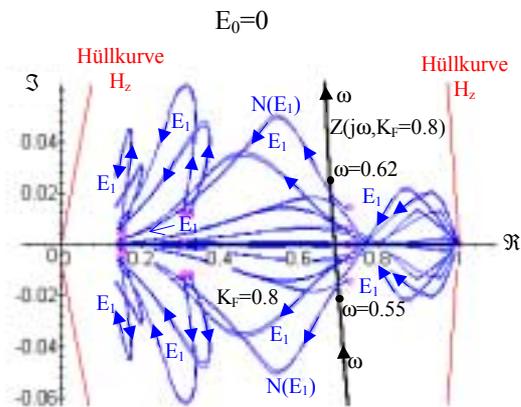
Das Systemverhalten weist für  $K_F=0.5$  keine Zustände der Harmonischen Balance auf. Darüber hinaus ist es für  $\omega \rightarrow \infty$  und für alle  $e$  stabil. Damit ist das System für  $K_F=0.5$  asymptotisch stabil und wird keine Schwingungen ausführen. Für  $K_F=0.8$  und  $K_F=2.0$  existieren gemeinsame Punkte von  $N(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  und  $Z_{11}(j\omega)$ , welche weiter untersucht werden müssen.

Die Punkte  $N_r(E_0, E_1, E_2, \varphi_2) + jN_i(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  der Beschreibungsfunktion sollen zur besseren Übersicht in Gruppen sortiert werden. Zuerst werden sie nach  $E_0$  getrennt. Die einzelnen Kurven  $N=N_r + jN_i$  werden mit  $E_1$  als Variable und  $E_2, \varphi_2$  als Parameter gezeichnet. Für alle Kurven der Beschreibungsfunktion gilt somit:

$$N = N_r(E_1) |_{(E_0, E_2, \varphi_2)} + jN_i(E_1) |_{(E_0, E_2, \varphi_2)} \quad (7.3)$$

Das Bild 7/5 zeigt den Verlauf von  $N(E_1)$  für  $E_0=0$  unter der Berücksichtigung der aus dem Bild 7/3 ermittelten Bedingung  $E_1 > 0.5E_2$ . In jeder dieser  $N(E_1)$ -Kurven ist für  $E_1=E_{1(\min)}$  ein Kreis eingetragen. Damit ist es möglich, den

Verlauf von  $N$  in Abhängigkeit von  $E_1$  zu analysieren. Die Auswirkung von  $E_2$  und  $\varphi_2$  auf  $N(E_1)$  wird quantitativ in Bild 7/5 nicht gezeigt, weil sie im Moment für die Untersuchung noch nicht relevant ist.



Bemerkung :  $\circ = N(E_{1(\min)})$

Bild 7/5 Beschreibungsfunktion  $N$  für  $E_0 = 0$  und Kurve der Harmonischen Balance  $Z$

Die einzelnen Gruppen der Beschreibungsfunktionen von Bild 7/5 wurden für  $\varphi_2 \in (0 \text{ bis } 2\pi)$  und folgende Werte  $E_2$  und  $E_1$  berechnet:

$E_2$	$E_1$
0.1	0.05 bis 80
0.5	0.25 bis 80
1.0	0.5 bis 80
3.0	1.5 bis 80
5.0	2.5 bis 80
10.0	5.0 bis 80
20.0	10.0 bis 80
40.0	20.0 bis 80

Aus Bild 7/5 geht hervor, daß im Zustand der Harmonischen Balance eine Erhöhung der Amplitude  $E_1$  um  $\Delta E$  zu Verkleinerung des Betrages  $K_{NL}$  der Beschreibungsfunktion und zu Vergrößerung ihres Winkelbetrages  $|\varphi|$  mit der reellen Achse führt.

Die Auswirkung dieser Änderungen von  $K_{NL}$  und  $\varphi$  auf die Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance soll jetzt geprüft werden. D.h. das 4-dimensionale Problem der Stabilitätsanalyse (nämlich die Stabilitätsabhängigkeit der Zustände der Harmonischen Balance von  $\omega$ ,  $N_r$ ,  $N_i$  und  $\gamma_1$  bzw. von  $\omega$ ,  $K_{NL}$ ,  $\varphi$  und  $\gamma_1$ ) muß erörtert werden. Zuerst wird die nichtlineare Funktion entsprechend (3.32) durch die Gleichung (7.4) ersetzt. Es gilt:

$$\frac{u(s)}{e(s)} \equiv \frac{sK_{NL} \sin(\gamma_1 + \varphi) + \omega K_{NL} \cos(\gamma_1 + \varphi)}{s \sin(\gamma_1) + \omega \cos(\gamma_1)}. \quad (7.4)$$

Mit  $K_{NL} = \sqrt{N_r^2 + N_i^2}$  und  $\varphi = \sphericalangle (N_r, N_i)$

bzw. für die Harmonische Balance mit

$$K_{NL} = \sqrt{Z_r^2 + Z_i^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \sphericalangle (Z_r, Z_i)$$

ergibt sich für die charakteristische Gleichung des Systems die Beziehung (7.5).

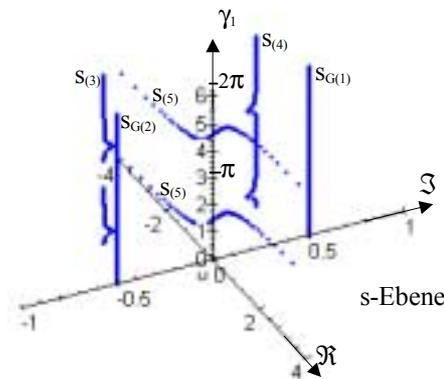
$$f(K_F, K_{NL}, \varphi, \gamma_1, \omega, s) = 0. \quad (7.5)$$

Die Gleichung (7.5) wird aus der Übertragungsfunktion zwischen dem Eingang  $w$  und dem Ausgang  $u$  des Systems ermittelt (vgl. Bild 7/1). Dabei wird die nichtlineare Kennlinie durch die Gleichung (7.4) ersetzt, wodurch das System linearisiert wird.

Jetzt kann die Polverteilung in Abhängigkeit vom Winkel  $\gamma_1$  für alle im Zustand der Harmonischen Balance relevanten Frequenzen  $\omega$  ermittelt werden.

Für  $K_F=0.8$  und alle  $E_0$  muß die Frequenz  $\omega$  aus dem Bereich  $\omega_2 < \omega < \omega_1$  gemäß Bild 7/4 und speziell für  $E_0=0$  aus dem Bereich  $0.55 < \omega < 0.62$  gemäß Bild 7/5 berücksichtigt werden. Für den Parameter  $K_{NL}$  gilt der Betrag  $|Z|$  und für den Winkel  $\varphi$  die Phasenverschiebung der Kurve der Harmonischen Balance  $Z=Z_r(\omega)+jZ_i(\omega)$ .

Ein Zustand der Harmonischen Balance mit der Frequenz  $\omega$  ist demnach für einen Winkel  $\gamma_1$  in einem stabilen Bereich, wenn für diese Frequenz die Kurve der Harmonischen Balance solche Werte für  $K_{NL}$  und  $\varphi$  liefert, daß die Polverteilung stabil ist. Diese Prüfung liefert die Voraussetzungen für die eigentliche Untersuchung der Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance (vgl. (6.14)).



Bemerkung: Der Pol  $s_{(6)}$  liegt in der linken Halbebene außerhalb des dargestellten Bereiches.

Bild 7/6 Polverteilung im Zustand der Harmonischen Balance für die Frequenz  $\omega=0.5$ , Verstärkung  $K_F=0.8$  und Winkel  $0 < \gamma_1 < 2\pi$

Das Bild 7/6 zeigt, daß der Pol  $s_{(5)}$  für bestimmte  $\gamma_1$ -Werte rechts der  $\Re$ -Achse der  $s$ -Ebene liegt. Für diese  $\gamma_1$ -Werte ist der Zustand der Harmonischen Balance instabil. Die vollständige Prüfung der Stabilität in Abhängigkeit von  $\gamma_1$  enthält Bild 7/7.

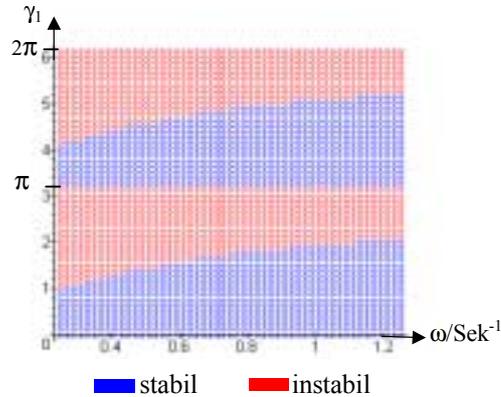


Bild 7/7 Prüfung der Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance in Abhängigkeit vom Winkel  $\gamma_1$  und Frequenz  $\omega$  für die Verstärkung  $K_F=0.8$

Aus Bild 7/7 ist ersichtlich, daß es für  $K_F=0.8$  solche Bereiche  $\gamma_1$  gibt, welche die Voraussetzungen für die Entstehung einer Schwingung liefern. Somit muß die Untersuchung weiter geführt werden.

Das Verhalten der möglichen Zustände der Harmonischen Balance (gemeinsames Stück von  $Z(j\omega)$  und der durch die Hüllkurve  $H_z(E_0=0)$  umschlossenen Fläche) soll für  $K_F=0.8$  und  $W_0=0$  entlang von  $Z(j\omega)$  untersucht werden. Gemäß (5.17) gilt im Zustand der Harmonischen Balance mit  $Z_0=N_0$  ( $N_0$  ist die Beschreibungsfunktion des Gleichanteils vgl. (4.7)) folgende Beziehung:

$$E_0 = K_F W_0 + E_0 N_0 R_{11}(0) = 0.8 W_0 + 0.8 E_0 N_0 \quad (7.6)$$

Aufgelöst nach  $E_0$  gilt:

$$E_0 = \frac{W_0}{1.25 - N_0} \quad (7.7)$$

Für  $W_0=0$  muß gemäß (7.7) auch  $E_0=0$  sein. Damit sind die Zustände der Harmonischen Balance von Bild 7/5 zu untersuchen. Für die Frequenz aus diesem Bereich gilt:  $0.55 < \omega < 0.62$  (vgl. Bild 7/5). Im ersten Schritt dieser Untersu-

chung muß das Verhalten der Pole in Abhängigkeit von der Amplitude  $E_1$  und des Winkels  $\gamma_1$  analysiert werden. Von Bild 7/5 kann abgelesen werden, daß für die Änderung  $E_1 \pm \Delta E$  folgende Abweichungen vom Betrag  $K_{NL} = |Z(j\omega)|$  und dem Argument  $\varphi = \angle Z(j\omega)$  entstehen können):

$$E_1 + \Delta E \Rightarrow \begin{cases} K_{NL} - \Delta K_{NL}, & \varphi + \Delta\varphi \\ K_{NL} - \Delta K_{NL}, & -\varphi - \Delta\varphi \end{cases} \quad (7.8)$$

$$E_1 - \Delta E \Rightarrow \begin{cases} K_{NL} + \Delta K_{NL}, & \varphi - \Delta\varphi \\ K_{NL} + \Delta K_{NL}, & -\varphi + \Delta\varphi \end{cases}$$

Im Zustand der Harmonischen Balance gelten für  $\omega = 0.62$  folgende Werte:  $K_{NL} = |Z(j\omega)| = 0.68$  und  $\varphi = \angle Z(j\omega) = 0.035$  Radiant. Eine beispielhafte Untersuchung der Polverschiebung der charakteristischen Gleichung (7.5) in Abhängigkeit von  $K_{NL}$  und  $\varphi$  zeigt das Bild 7/8. Von Interesse sind die Pole  $s_{G(1)}$  und  $s_{G(2)}$  des Systems von Bild 7/6. Die restlichen Pole liegen für  $\gamma_1 = 0.5$  in der linken Halbebene. Wegen der Symmetrie von  $s_{G(1)}$  und  $s_{G(2)}$  wird  $s_{G(2)}$  weggelassen.

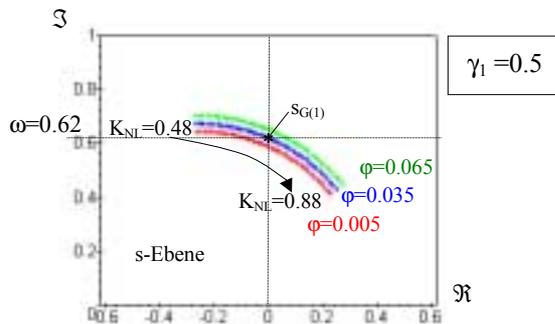


Bild 7/8 Verschiebung der Pole bei Änderung des Betrages  $K_{NL}$  und des Argumentes  $\varphi$  der Beschreibungsfunktion für  $\omega = 0.62$  und  $\gamma_1 = 0.5$

Unter der Berücksichtigung von (7.8) ergeben sich für den in Bild 7/8 dargestellten Zustand der Harmonischen Balance mit  $\omega = 0.62$  folgende Aussagen:

- Für eine steigende Amplitude  $E_1$  tendieren die Pole  $s_G$  in die linke Halbebene. Zugleich erhöht sich die Frequenz des Zustandes ( $\Im m(s_G)$  wird größer).
- Für eine fallende Amplitude  $E_1$  bewegen sich die Pole  $s_G$  in die rechte Halbebene. Zugleich wird die Frequenz des Zustandes kleiner.

Diese Abhängigkeit von der Frequenz  $\omega$  muß analysiert werden. Die Auswertung erfolgt gemäß (6.18) aus Abschnitt 6.2.1. Ein Beispiel für die Teilbeurteilung der Umgebung eines Punktes der Harmonischen Balance ist in Bild 7/9 dargestellt. Dort verschiebt sich der Pol  $s_G$  für  $N(E_0=0, E_1-\Delta E, E_2, \varphi_2)$ , d.h. in der Folge für  $K_{NL}+\Delta K_{NL}$  und  $\varphi-\Delta\varphi$ , in die rechte Halbebene (vgl. Bild 7/9  $s_{G(1.Schritt)}$ ). Das System wirkt entgegen der erfolgten Änderung. Dieser Zustand der Harmonischen Balance geht aber wegen  $\Im m(s_G) > \Im m(s_{G(1.Schritt)}) < \Im m(s_{G(2.Schritt)})$  in den nächsten Zustand mit einer niedrigeren Frequenz über, weil für  $\Im m(s_G) > \Im m(s_{G(1.Schritt)})$  im System andere Zustände der Harmonischen Balance für eine Frequenz  $\omega < \Im m(s_G)$  entstehen können.

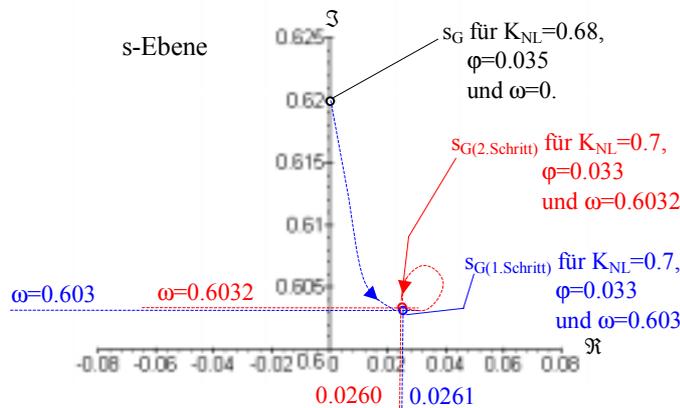


Bild 7/9 Prüfung der Umgebung eines Punktes der Harmonischen Balance für  $\omega=0.62 \text{ Sek}^{-1}$  und  $\varphi$  in Radiant

Die vollständige Prüfung der gesamten Umgebung des Zustandes der Harmonischen Balance erfolgt mit  $N(E_0=0, E_1\pm\Delta E, E_2\pm\Delta E, \varphi_2\pm\Delta\varphi)$  für unterschiedliche Winkel  $\gamma_1$ . Sie muß nur dann vollständig durchgeführt werden, wenn der

Punkt stabil ist. Für  $\omega > 0.62$  kann die Stabilitätsanalyse schon bei der Untersuchung  $E_1 \pm \Delta E$  abgebrochen werden, weil die Zustände der Harmonischen Balance jeweils in den Zustand mit der niedrigeren Frequenz übergehen und damit instabil sind. Für die Frequenz  $\omega = 0.55$  ist eine weitere Verschiebung entlang  $Z(j\omega)$  nicht mehr möglich, weil wegen  $W_0 = E_0 = 0$  der Bereich der gültigen Beschreibungsfunktion begrenzt ist. Hinsichtlich der Änderung der Amplituden  $E_1 \pm \Delta E$  und  $E_2 \pm \Delta E$  sowie des Winkels  $\varphi_2 \pm \Delta\varphi$  zeigt das System für  $\omega = 0.55$  ein stabiles Verhalten. D.h. die Pole der Charakteristischen Gleichung (7.5) streben nach der Änderung des jeweiligen Parameters und erneuten Berechnung der Polverteilung gemäß (6.18) gegen die imaginäre Achse der s-Ebene und auf die Frequenz  $\omega = 0.55$  zu. Diese Ergebnisse stimmen mit der in Beispiel 1.2 durchgeführten Simulation des Systemverhaltens (vgl. Bild 1/8) überein.

Wie zu erwarten war, stimmt die Frequenz  $\omega = 0.55$  von Bild 7/5 nicht mit der tatsächlichen Frequenz der Grenzwinkel überein. Der Grund dafür liegt darin, daß die Beschreibungsfunktion mit einer falschen Harmonischen berechnet wurde und damit die Ermittlung aller Werte der Übertragungsfunktion  $G_{NL}$  gemäß (3.32) nicht möglich war. Bessere Ergebnisse entstehen bei der Berechnung der Beschreibungsfunktion mit der 3. statt der 2. Harmonischen (vgl. Abschnitt 4.2 und Bild 7/10). Die Frequenz der tatsächlichen Schwingung von Bild 1/8 mit  $\omega = 0.44$  entspricht in etwa der Frequenz  $\omega_1 = 0.41$  von Bild 7/10.

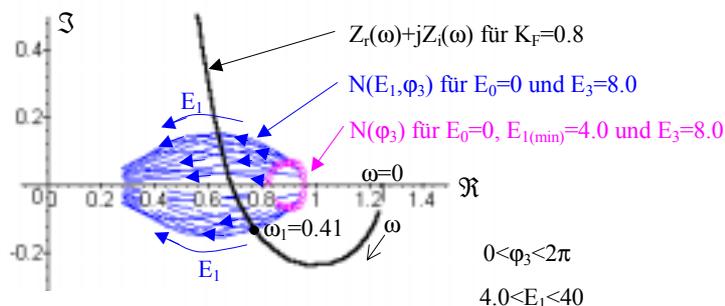


Bild 7/10 Beschreibungsfunktion  $N(E_1, E_3, \varphi_3)$  für  $E_0 = 0$  und Kurve der Harmonischen Balance  $Z(j\omega)$  für  $K_F = 0.8$

Bei der Beurteilung des Systems für  $W_0 > 0$  muß in der Beziehung (7.7) die Beschreibungsfunktion des Gleichanteils  $N_0$  berücksichtigt werden. Damit brauchen in der Stabilitätsanalyse nur diese Zustände der Harmonischen Balance berücksichtigt zu werden, welche mit  $[E_0, E_1, E_2, \varphi_2]$  bzw.  $[E_0, E_1, E_3, \varphi_3]$  zugleich (7.7) erfüllen. Eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise ist für solche Problemstellungen in Beispiel 7.3 enthalten.

Kurz soll noch auf das Systemverhalten für die Verstärkung  $K_F=2$  eingegangen werden. Die Kurve der Harmonischen Balance  $Z_{11}$  liegt für für die Frequenz  $\omega=0$  und  $K_F=2$  im Bereich der Beschreibungsfunktion. Damit gibt es für das System prinzipiell die Möglichkeit den stationären Zustand mit  $u=U_0=\text{const.}$  zu erreichen. In der Tat liefert die Stabilitätsuntersuchung den Nachweis, daß ein Zustand der Harmonischen Balance jeweils in einen anderen Zustand mit der niedrigeren Frequenz wechseln kann womit  $u=U_0=\text{const.}$  möglich wird.

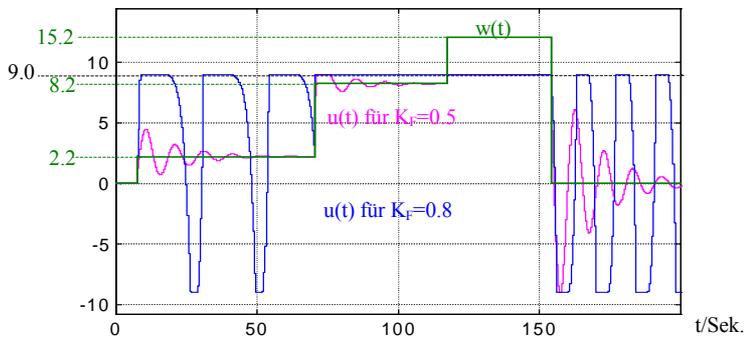


Bild 7/11 Simulation von  $u(t)$  für verschiedene Verstärkungsfaktoren  $K_F=0.5, 0.8$

Die Simulation des Verhaltens des Ausgangs  $u(t)$  der Begrenzungskennlinie ist für unterschiedliche  $K_F$ -Werte in Bild 7/11 und Bild 7/12 enthalten. Sie bestätigt die Ergebnisse der Systemanalyse.

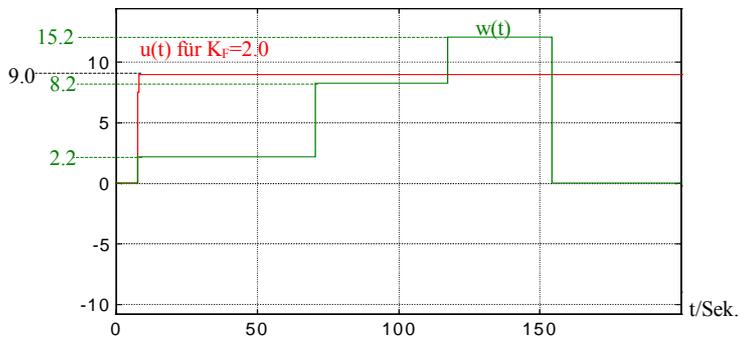


Bild 7/12 Simulation von  $u(t)$  für den Verstärkungsfaktor  $K_F=2.0$

Die obigen Untersuchungen zeigen, daß die Methode der Harmonischen Balance auf eine besondere Art das Systemverhalten erklärt und der nötige Aufwand für die Berechnung der Polverschiebung des mit der Beschreibungsfunktion „linearisierten“ Systems durchaus belohnt wird.

## 7.2 Drehzahlgeregeltes elastisches Zweimassensystem mit toter Zone und Reibung

Ein in [13] und [2] vorgestelltes elastisches Zweimassensystem soll untersucht werden. Es wurde in [13] unter Anwendung diverser Regelkonzepte mit Beobachtern ausführlich analysiert. In der hier durchgeführten Betrachtung wird geprüft, ob es möglich ist mit einer drehzahlüberlagerten Stromregelung die in einem solchen System üblicherweise auftretenden Eigenschwingungen erfolgreich zu bekämpfen.

Die Regelstrecke besteht aus zwei Massen 1 und 2, die über eine Welle und ein Getriebe miteinander gekoppelt sind. Die Masse 1 wird durch einen stromgeregelten Antriebsmotor angetrieben. Für die Regelung stehen nur der Motorstrom  $i_A$  und die Motordrehzahl  $n_1$  zur Verfügung. Damit soll die Drehzahl  $n_2$  der Masse 2 geregelt werden. Sie wird durch ein Columb'sches Reibmoment  $m_{R2}$  von Bild 7/13 b) beeinflusst.

Weiterhin enthält der Übertragungsweg eine tote Zone von Bild 7/13 a).

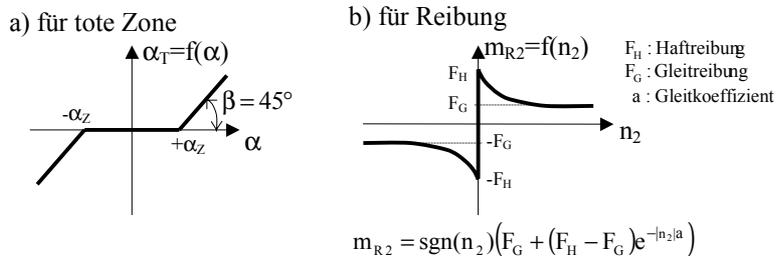


Bild 7/13 Nichtlineare Kennlinien des im Bild 7/14 dargestellten Systems

Die beiden Massen sind durch ihre Trägheitsmomente  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  und die dazugehörigen Zeitkonstanten  $T_{\Theta_1}$  und  $T_{\Theta_2}$  beschrieben. Die Kraftübertragung zwischen Masse 1 und Masse 2 erfolgt über eine elastische Welle mit der Federkonstante  $c_{12}$  und einem parallel dazu geschalteten Dämpfungselement mit der Materialdämpfungskonstante  $d_{12}$ .

Für die elastische Welle, die ein Antriebsmoment  $m_{12}$  für die Masse 2 erzeugt, gilt die Gleichung (7.9).

$$\frac{m_{12}}{\alpha_T} = c_{12} + s d_{12} \quad (7.9)$$

wobei  $\alpha_T$  die Ausgangsgröße der toten Zone ist. Der Antriebsmotor wird im System als ein  $PT_1$ -Glied mit der Verstärkung  $V_A$  und der Ankerzeitkonstante  $T_A$  berücksichtigt. Die Größen des Motors sind so normiert, daß der Ankerstrom  $i_A$  gleich dem Antriebsmoment  $m_1$  ist. Ebenso wird die Drehzahl  $n_1$  der im Motor induzierten Spannung  $e_M$  gleich. Damit wirkt sich im System die Motorspannung  $u_M$  entsprechend der Gleichung (7.10) aus.

$$\frac{i_A}{u_M - e_M} = \frac{m_1}{u_M - n_1} = \frac{V_A}{1 + sT_A} \quad (7.10)$$

$u_M$  wird durch ein Stellglied, das von einem PID-Stromregler über die Größe  $u_{ST}$  gesteuert wird, erzeugt. Es wird durch ein  $PT_1$ -Glied mit der Verstärkung  $V_T$  und der Zeitkonstante  $T_T$  gemäß (7.11) angenähert.

$$\frac{u_M}{u_{ST}} = \frac{V_T}{1 + sT_T} \quad (7.11)$$

Die Regelstrecke soll mit einem Drehzahlregler für  $n_1$  (z.B. PID-Regler) und einem überlagerten Stromregler für  $i_A$  versehen werden. Die Auswirkung der Istwertrückführung wird durch die  $PT_1$ -Glieder berücksichtigt. Die Beziehungen können (7.12) entnommen werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{➤ Für den Drehzahlregler:} & \quad \frac{i_w}{n_w - n_{1*}} = V_{Rn} + \frac{1}{sT_{Rn}} + sT_{Dn} \\ \text{➤ Für die Drehzahlrückführung:} & \quad \frac{n_{1*}}{n_1} = \frac{V_{xn}}{1 + sT_{xn}} \\ \text{➤ Für den Stromregler:} & \quad \frac{u_{st}}{i_w - i_{A*}} = V_{Ri} + \frac{1}{sT_{Ri}} + sT_{Di} \\ \text{➤ Für die Stromrückführung:} & \quad \frac{i_{A*}}{i_A} = \frac{V_{xi}}{1 + sT_{xi}} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Durch eine entsprechende Normierung des Drehwinkels  $\alpha_1$  der Masse 1 und  $\alpha_2$  der Masse 2 mit dem Drehwinkelennennwert  $\Omega_N$  wird eine Integration der Drehzahl  $n_1$  bzw.  $n_2$  mit der Zeitkonstante  $T_N=1$  Sek. erreicht. Für sie gelten die Gleichungen (7.13).

$$\frac{n_1}{m_1 - m_{12}} = \frac{1}{sT_{\Theta 1}} \quad , \quad \frac{\alpha_1}{n_1} = \frac{1}{sT_N}$$

$$\frac{n_2}{m_{12} - m_R} = \frac{1}{sT_{\Theta 2}} \quad , \quad \frac{\alpha_2}{n_2} = \frac{1}{sT_N}$$
(7.13)

Der Signalflußplan des gesamten Systems ist in Bild 7/14 dargestellt.

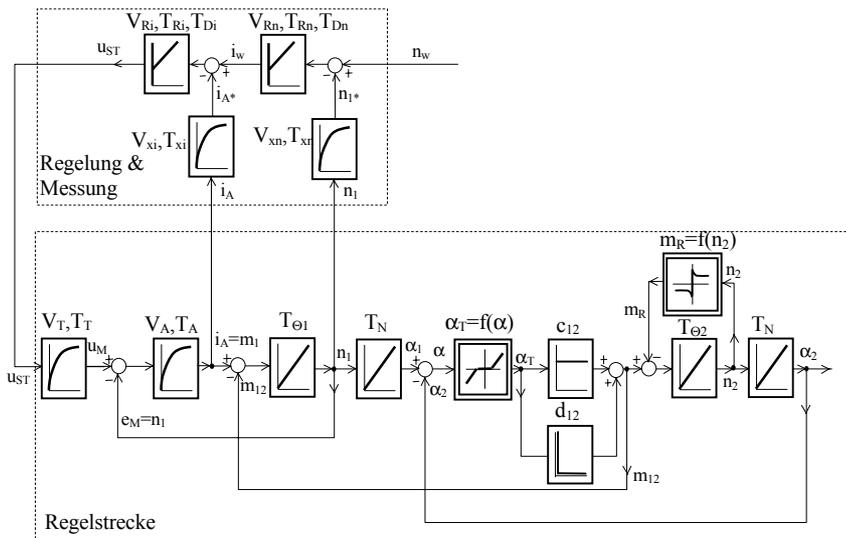


Bild 7/14 Signalflußplan eines drehzahlgeregeten elastischen Zweimassensystems mit toter Zone und Reibung

Die einzelnen in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte und die Normierung der Systemgrößen kann [20] und [30] entnommen werden.

Drehzahlintegrationskonstante	$T_N=1$ Sek.
Drehzahlrückführung	$V_{xii}=1.0$ $T_{xii}=0.0026$ Sek.
Stromrückführung	$V_{xi}=0.5$ $T_{xi}=0.0018$ Sek.
Stellglied	$V_T=2.227$ $T_T=0.001667$ Sek.
Antriebsmotor	$V_A=8.5$ $T_A=0.02$ s
Masse $m_1$	$T_{\Theta 1}=1/3,39$ Sek.
Masse $m_2$	$T_{\Theta 2}=1/1,13$ Sek.
Welle	$d_{12}=1,907$ $c_{12}=61658,234$
tote Zone	$\alpha_Z=0.05$ vgl. Bild 7.12 a)
Reibung	$F_H=0,1$ $F_G=0,09$ $a=10$ vgl. Bild 7.12 b)

Die Aufgabe wird in folgenden Schritten durchgeführt:

- Aufbau und Überprüfung der Simulation der Regelstrecke
- Auswahl der Parameter des Reglers
- Prüfung des Systemverhaltens für  $\omega \rightarrow \infty$  und der Ruhezustände
- Untersuchung des Systemverhaltens auf das Vorhandensein von Grenzyklen oder chaotischen Bewegungen.

### 7.2.1 Aufbau und Überprüfung der Simulation der Regelstrecke

Bei der Untersuchung der nichtlinearen Systeme muß große Sorgfalt bei der Auswahl des Modells und der Festlegung der geeigneten Integrationsmethode walten. Im weiteren werden die für die Simulation entscheidenden Überlegungen vorgestellt und erläutert.

Auf Grund des großen Wertes der Federkonstante der Welle  $c_{12}$  muß eine kleine Toleranz für die Integrationsmethode des Simulationsprogramms  $\Delta x_S$  gewählt werden. Sie sollte mindestens um den Faktor 10 kleiner als  $1/c_{12}$  (d.h. mindestens  $10^{-6}$  betragen).

Bei der gewählten Toleranz  $\Delta x_S$  muß weiterhin gewährleistet werden, daß für  $-\Delta x_S < n_2 < +\Delta x_S$  die Reibungskraft  $F_R = f(n_2)$  den Wert 0 liefert. Aus diesem Grund muß für die Simulation die Reibungskennlinie so verändert werden, daß für z.B.  $|n_2| < 10\Delta x_S$  die Reibungskraft  $F_R$  gleich 0 ist.

Zuerst soll die Richtigkeit der Simulation für die lineare Regelstrecke (die Funktion  $m_R = f(n_2)$  entfällt und  $\alpha_T = f(\alpha)$  wird durch  $\alpha_T = \alpha$  ersetzt) überprüft werden. Sie ist an zwei Kriterien gekoppelt:

- schwingungsfreier Zustand bei einer konstanten Ankerspannung  $u_M = u_{M0}$
- die Geschwindigkeit  $n_2$  erreicht nach einer Ansteuerung durch  $u_M \neq 0$  den Zustand  $n_2 = 0$  für  $u_M = 0$ .

Das muß zumindest für große Zeiten zutreffen. Für die Drehzahl  $n_2$  kann z.B. der Zustand  $|n_2| \leq 10\Delta x_S$  als  $n_2 = 0$  akzeptiert werden.

Um bei der Simulation sichere Ergebnisse zu erhalten wird die Toleranz  $\Delta x_S = 10^{-7}$  gesetzt und die Reibungskraft soll im Bereich  $-10^{-6} < n_2 < +10^{-6}$  den Wert 0 aufweisen. Die oben beschriebenen Bedingungen liefern eine zulässige Simulation mit der Software „Simulink“ für folgende Einstellungen der Simulationsparameter:

Minimum - Simulationsschritt: .....0,00001 Sek.  
 Maximum - Simulationsschritt: .....0,0001 Sek.  
 Integrationsmethode: .....Runge-Kutta 5  
 Sample time (Auto Scal Graph).....0.0001 Sek.

Die Simulation der linearen Regelstrecke zeigt Bild 7/15 . Es ist daraus ersichtlich, daß die Signale dem erwartenden stationären Zustand zustreben.

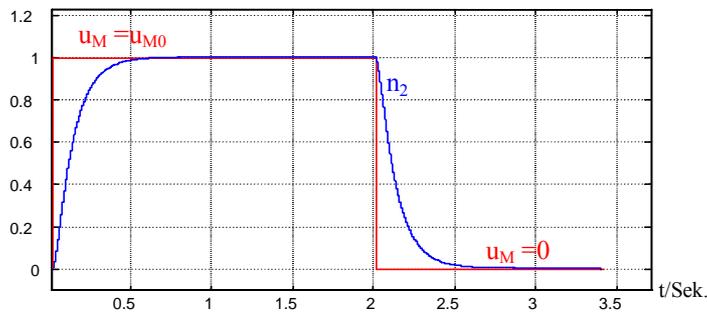


Bild 7/15 Sprungantwort der linearen Regelstrecke

Ebenso bestätigen die in Bild 7/16 dargestellten Verläufe, daß die nichtlineare Regelstrecke richtig dimensioniert und die Simulationsparameter korrekt gewählt sind. Es stellt sich das erwartete Verhalten der Regelstrecke ein. Nach dem Aufschalten von  $u_M = u_{M0}$  und Umschalten nach eine Zeit von 0.45 Sek. auf  $u_M = 0$  strebt  $n_2$  einem stationären Zustand  $n_2 = 0$  zu, welcher im Bereich  $-10^{-6} < n_2 < +10^{-6}$  liegt (vgl. Bild 7/16).

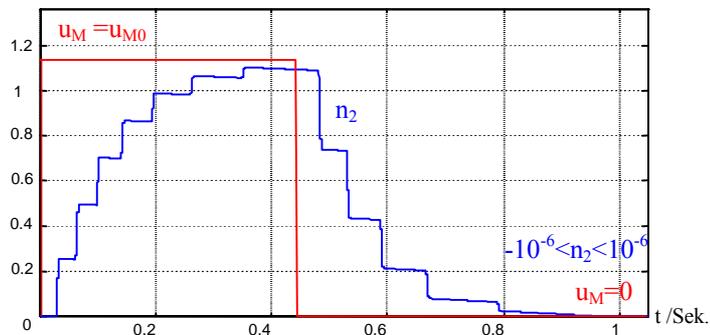


Bild 7/16 Sprungantwort der nichtlinearen Regelstrecke

## 7.2.2 Auswahl der Regelparameter

Für die Regelstrecke soll jetzt eine einfache Regelung entworfen werden. Die Berechnung der Regelparameter kann zuerst für das lineare System (d.h. für  $m_R=0$  und  $\alpha_T=\alpha$ ) durchgeführt werden, weil die Reibungskennlinie nur ein zusätzliches Belastungsmoment erzeugt und die tote Zone entweder den Wert 0 oder für  $\alpha>\alpha_Z$  den Wert  $\alpha-\alpha_Z$  liefert. Im ersten Schritt sollen die Parameter des Stromregelkreises berechnet werden. Für die Übertragungsfunktion  $G_{oi}(s)$  des offenen Stromregelkreises  $G_{oi}(s)=i_A^*/u_{St}$  (vgl. Bild 7/14 ) gilt nach der Berücksichtigung der Kompensation der Nullstellen des Zählers und des Nenners von  $G_{oi}(s)$  die Gleichung (7.14).

$$G_{oi}(s) \approx 1,31 \frac{s}{(1 + 0,0002s)(1 + 0,001s)(1 + 0,0243s)(1 + 0,114s)} \quad (7.14)$$

Um eine optimale Dämpfung des Stromregelkreises zu erhalten wird ein PID-Regler eingesetzt. Er wird gemäß dem Betragsoptimum eingestellt. Die Beziehungen für die einzelnen Reglerparameter können beispielsweise [5], Tabelle 7/3 entnommen werden. Für die Übertragungsfunktion des Reglers gilt folgende Gleichung:

$$G_{Ri} = K_{Ri} + \frac{1}{T_{Ri}s} + T_{Di}s = 60 + \frac{1}{0,0024s} + 1,2s \quad (7.15)$$

Die in der Industrie am meisten verbreitete Regelstruktur für drehzahlgeregelte quasi-lineare Systeme ist eine stromunterlagerte Drehzahlregelung (vgl. Bild 7/14 ). Um keine bleibende Regelabweichung zu erreichen, muß der Drehzahlregler mindestens als PI-Regler festgelegt werden. Die optimale Berechnung der endgültigen Werte entsteht durch die Untersuchung der Übertragungsfunktion  $G_{g(n1)}=n_1/n_w$  und der Anwendung des Betragsoptimums. Daraus ergibt sich für den Drehzahlregler die Übertragungsfunktion (7.16).

$$G_{Rn} = K_{Rn} + \frac{1}{T_{Rn}s} = 6,5 + \frac{1}{0,05s} \quad (7.16)$$

Die Sprungantwort des geregelten linearen und nichtlinearen Systems ist in Bild 7/17 dargestellt.

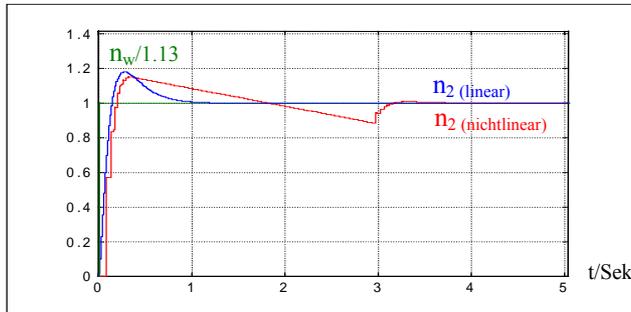


Bild 7/17 Sprungantwort des linearen und nichtlinearen Systems

### 7.2.3 Prüfung des transienten und stationären Systemverhaltens ( $\omega \rightarrow \infty$ und $\omega=0$ )

Die Aussagen über das Verhalten des Systems für  $\omega \rightarrow \infty$  erfolgen aus der linearen Betrachtung des nichtlinearen Systems gemäß Abschnitt 3.1.

Gesucht werden alle stabilen und instabilen Bereiche der Übertragungsfunktion  $G_{NL(n_2)} = n_2/n_w$  mit Ersatzverstärkungsfaktoren gemäß (3.2) für die in Bild 7/13 dargestellten Kennlinien. Aus (3.2) ergeben sich für diese nichtlinearen Funktionen folgende Werte:

$$\text{Ersatzkennlinie für die Reibung : } K_{NL1} \in (\infty..0) \text{ für } n_1 = e_1 \in (-\infty.. \infty) \quad (7.17)$$

$$\text{Ersatzkennlinie für die tote Zone : } K_{NL2} \in (0..1) \text{ für } \alpha = e_2 \in (-\infty.. \infty)$$

Für jeden Punkt der  $(K_{NL1}, K_{NL2})$ -Ebene gemäß (7.17) kann eine Stabilitätsaussage erfolgen. In diesem Fall werden in Abhängigkeit von  $K_{NL1}$  und  $K_{NL2}$  nu-

merisch die Pole der Übertragungsfunktion  $G_{g(n_2)}=n_2/n_w$  ermittelt. Daraus ergibt sich die in Bild 7/18 dargestellte Stabilitätskarte für  $K_{NL1}$  und  $K_{NL2}$ .

Aus Bild 7/18 können folgende Aussagen abgeleitet werden:

- Das System ist immer instabil, wenn  $K_{NL2}=0$  bzw.  $|\alpha| < \alpha_Z$  ist (vgl. Bild 7/13 a)). D.h. das System ist für  $\omega \rightarrow \infty$  für  $\alpha$  innerhalb der toten Zone instabil.
- Wegen der Instabilität des Systems für  $|\alpha| < \alpha_Z$  und seiner Stabilität für  $|\alpha| \geq \alpha_Z$  für  $\omega \rightarrow \infty$  können im System Schwingungen oder chaotische Bewegungen entstehen.
- Ein Ruhezustand im System kann nur dann erreicht werden, wenn  $\alpha \geq \alpha_Z$  ist.

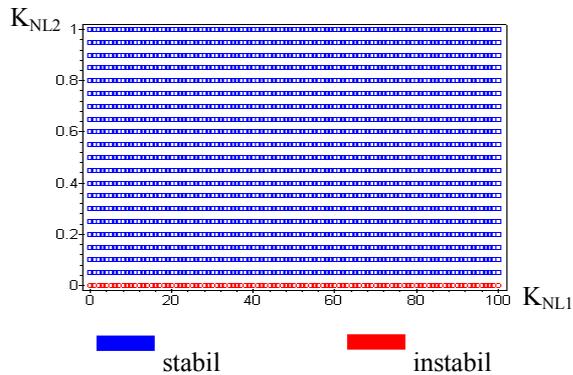


Bild 7/18 Stabilitätskarte des linearen Ersatzsystems für  $\omega \rightarrow \infty$

Unter der Annahme, daß im System ein Ruhezustand gemäß Definition 6.1 besteht, gilt für die Ausgangsgröße  $n_2$  entsprechend der Übertragungsfunktion  $G_{g(n_2)}(K_1, K_2, s)$  die Gleichung (7.18).

$$n_2(t \rightarrow \infty) \Big|_{n_w = \text{const.}} = \lim_{s \rightarrow 0} (sG_{g(n_2)} \frac{n_w}{s}) = 0,8826 n_w \quad (7.18)$$

Aus (7.18) geht hervor, daß der stationäre Zustand der Ausgangsgröße  $n_2$  von den nichtlinearen Gliedern unabhängig ist, wenn keine Grenzyklen oder keine chaotischen Bewegungen im System entstehen können. Diese Prüfung muß jetzt durchgeführt werden.

#### 7.2.4 Prüfung des Systemverhaltens auf das Vorhandensein von Grenzyklen oder chaotischen Bewegungen

Im ersten Schritt dieser Untersuchung müssen die Zustände der Harmonischen Balance für das System von Bild 7/14 gefunden werden. Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 5.2 werden die Gleichungen der Harmonischen Balance (5.17) und (5.18) für das System hergeleitet. Für die Aufstellung von (5.17) und (5.18) müssen die Übertragungsfunktionen  $V_{11}(s)$ ,  $V_{21}(s)$ ,  $R_{11}(s)$ ,  $R_{12}(s)$ ,  $R_{21}(s)$  und  $R_{22}(s)$  von Bild 5/1 aus Bild 7/14 ermittelt werden.

Mit (5.17) kann die Voraussetzung für das Vorhandensein der konstanten Gleichanteile geprüft werden. Diese Anteile werden mit Hilfe der Gleichungen (5.10) und (3.27) bis (3.29) unter der Berücksichtigung der Anfangsbedingungen berechnet und untersucht. Es zeigt sich, daß für  $t \rightarrow \infty$  die Gleichanteile  $\mathbf{E}_0 = [n_{20}, \alpha_0]^T = [E_{0(1)}, E_{0(2)}]^T$  gegen einen konstanten Wert streben.

Für (5.18) gilt für das in Bild 7/14 dargestellte System die Gleichung (7.19), welche wie (5.35) hergeleitet werden kann.

$$\begin{pmatrix} R_{11}Z_1 - 1 & R_{12}Z_2 \\ R_{21}Z_1 & R_{22}Z_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.19)$$

Entsprechend der Ausführungen im Abschnitt 5.3 ist für  $E_1$  und  $E_2$  gemäß (7.19) eine nicht triviale Lösung nur dann vorhanden, wenn solche  $Z_1$  und  $Z_2$  existieren, welche (7.20) genügen.

$$Z_2 = \frac{R_{11}Z_1 - 1}{Z_1(R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}) - R_{22}} \quad (7.20)$$

Dieser Zusammenhang muß untersucht werden. Zuerst wird ermittelt, ob eine solche Frequenz  $0 < \omega < \infty$  existiert, welche die Bedingungen für den Zustand der Harmonischen Balance der ersten Harmonischen erfüllt. Von Bedeutung sind nur solche  $Z_1$  und  $Z_2$ , die mit den Werten der jeweiligen Beschreibungsfunktion identisch sind.

Bevor jedoch die Berechnung der Beschreibungsfunktion durchgeführt wird, soll geprüft werden, welche Amplitudenverhältnisse und welche höheren Harmonischen für die Beschreibungsfunktion berücksichtigt werden müssen. Um den zu untersuchenden Amplitudenbereich der Eingangssignale der nicht-linearen Gliedern bei der Berechnung der Beschreibungsfunktion einzugrenzen, wird geprüft, welchen Einfluß die Elemente von  $\mathbf{R}$  auf die Amplituden eines eventuellen Grenzzykluses hätten. Relevant für die Berechnung von  $N_1$  sind die Funktionen  $|R_{11}(jn\omega)|/|R_{11}(j\omega)|$  und  $|R_{12}(jn\omega)|/|R_{12}(j\omega)|$  bzw. für der Berechnung von  $N_2$  die Funktionen  $|R_{21}(jn\omega)|/|R_{21}(j\omega)|$  und  $|R_{22}(jn\omega)|/|R_{22}(j\omega)|$  mit  $n=2,3,\dots$ . Sie sind in Bild 7/19 bis Bild 7/22 dargestellt.

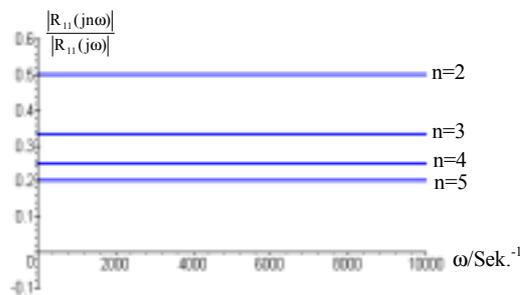
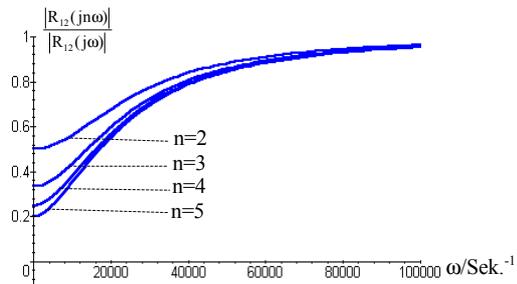
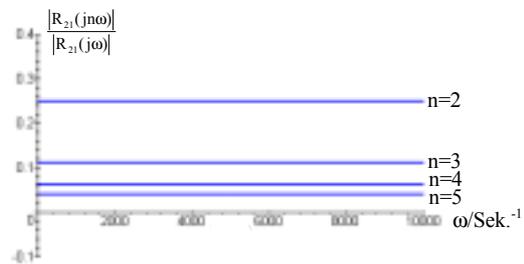
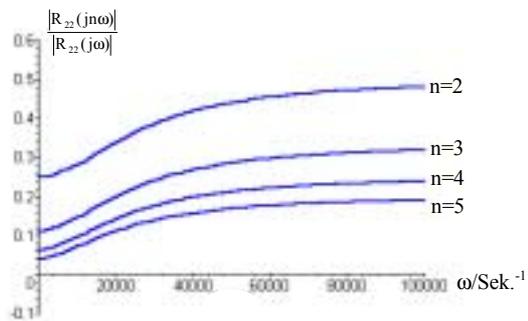


Bild 7/19 Frequenzkennlinien  $|R_{11}(jn\omega)|/|R_{11}(j\omega)|$

Bild 7/20 Frequenzkennlinien  $|R_{12}(jn\omega)| / |R_{12}(j\omega)|$ Bild 7/21 Frequenzkennlinien  $|R_{21}(jn\omega)| / |R_{21}(j\omega)|$ Bild 7/22 Frequenzkennlinien  $|R_{22}(jn\omega)| / |R_{22}(j\omega)|$

Aus den obigen Bildern läßt sich ablesen, daß das Amplitudenverhältnis zwischen der ersten und einer beliebigen höheren Harmonischen niedriger liegt als das Amplitudenverhältnis zwischen der ersten und der zweiten Harmonischen  $E_2/E_1$ . Für die Berechnung der Beschreibungsfunktion wird damit die erste und die zweite Harmonische genommen.

Weiterhin läßt sich den in Bild 7/19 bis Bild 7/22 dargestellten Kennlinien entnehmen, daß für die Berechnung von  $N_1(e_1=E_{(1)0}+E_{(1)1}\sin(\omega t)+E_{(1)2}\sin(2\omega t+\varphi_{(1)2}))$  die Bedingung (7.21) gelten muß (vgl. den maximalen Wert aus den Kennlinien  $|R_{11}(j2\omega)|/|R_{11}(j\omega)|$  und  $|R_{12}(j2\omega)|/|R_{12}(j\omega)|$ ).

$$E_{(1)2} \leq E_{(1)1} \quad (7.21)$$

Ebenso muß für die Berechnung der Beschreibungsfunktion der toten Zone  $N_2(e_2=E_{(2)0}+E_{(2)1}\sin(\omega t)+E_{(2)2}\sin(2\omega t+\varphi_{(2)2}))$  der maximale Wert aus den Kennlinien  $|R_{21}(j2\omega)|/|R_{21}(j\omega)|$  und  $|R_{22}(j2\omega)|/|R_{22}(j\omega)|$  in (7.22) berücksichtigt werden.

$$E_{(2)2} \leq 0,5 E_{(2)1} \quad (7.22)$$

Weiterhin muß der Wertebereich von  $E_{(1)2}$  und  $E_{(2)2}$  erweitert werden, weil die Abweichung dieser Werte von den idealen Werten im Zustand der Harmonischen Balance zu berücksichtigen ist (nur die 1. und 2. Harmonische wird verwendet). Mit der Bedingung  $E_{(2)2} < E_{(2)1}$  liefert die Berechnung der Beschreibungsfunktion der toten Zone  $N_2$  gemäß (4.6) die in Bild 7/23 dargestellten Ergebnisse.

Die Berechnung der Beschreibungsfunktion der Reibung  $N_1$  erfolgt mit der Bedingung  $E_{(1)2} < 1,5 E_{(1)1}$  und ist in Bild 7/24 dargestellt.

Sie liefert Werte, die in der rechten komplexen Halbebene und in einem kleinen Halbkreis um den Nullpunkt mit einem geschätzten Radius von ca. 10 der linken Halbebene liegen. Ob eine genauere und feinere Auflösung der Amplituden  $E_{(1)2}$  und  $E_{(1)1}$  für die Berechnung von  $N_1$  notwendig ist, wird sich im Verlauf der weiteren Untersuchungen ergeben. Eine entsprechende Nachberechnung der Funktion  $N_1$  muß ggf. durchgeführt werden.

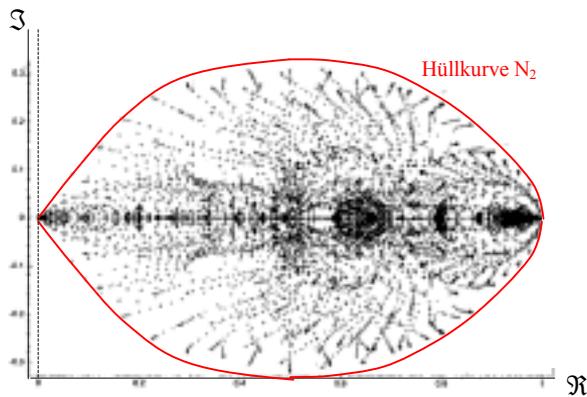


Bild 7/23 Beschreibungsfunktion  $N_2(e_2=E_{(2)0}+E_{(2)1}\sin(\omega t)+E_{(2)2}\sin(2\omega t+\varphi_{(2)2}))$  der toten Zone

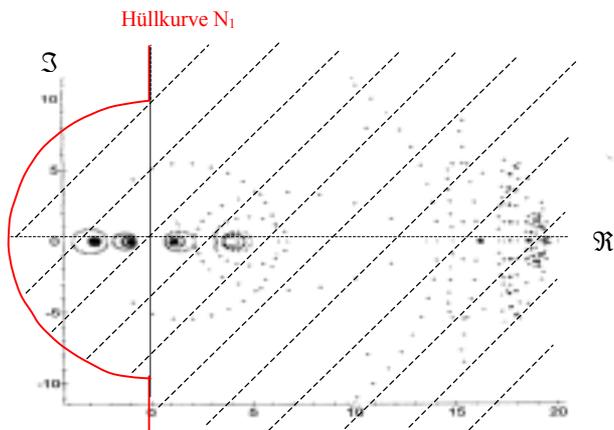


Bild 7/24 Beschreibungsfunktion  $N_1(e_1=E_{(1)0}+E_{(1)1}\sin(\omega t)+E_{(1)2}\sin(2\omega t+\varphi_{(1)2}))$  der Reibungskennlinie

Mit  $N_1$  ist es möglich diese komplexe Zahlen  $Z_2=N_2$  zu ermitteln, für die ein Zustand der Harmonischen Balance existieren kann. Zu diesem Zweck werden die  $N_1$ -Werte aus dem schraffierten Bereich von Bild 7/24 in die Gleichung (7.20) für  $Z_1$  eingesetzt. Anschließend kann das Bild 7/23 mit der Beschreibungsfunktion  $N_2$  um  $Z_2$  aus (7.20) ergänzt werden. Die Ergebnisse sind in Bild 7/25 dargestellt.

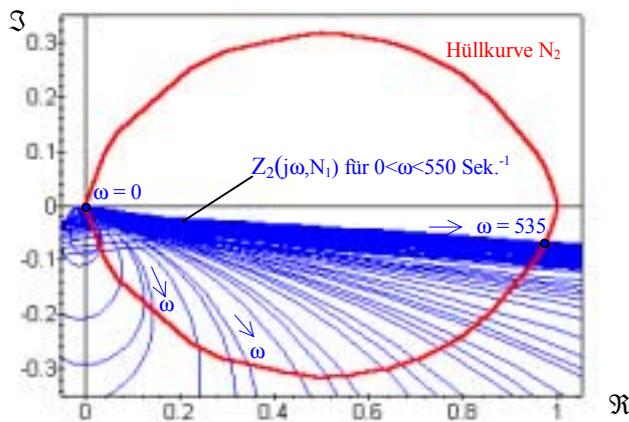


Bild 7/25 Vergleich der Werte von  $N_2$  und  $Z_2$

Aus dem Bild 7/25 ist ersichtlich, daß die Werte von  $Z_2$  nur für  $\omega < 550$  mit den Werten der Beschreibungsfunktion  $N_2$  übereinstimmen können. Damit kann für (7.21) die Bedingung (7.23) aus dem Bild 7/20 abgelesen werden.

$$E_{(1)2} \leq 0.5 E_{(1)1} \quad (7.23)$$

Mit (7.23) kann der auszuwertende Bereich der Beschreibungsfunktion  $N_1$  und damit auch  $N_2$  (wegen  $Z_2=f(N_1, \omega)$  und des Vergleiches mit  $N_2$ ) weiter eingeschränkt werden und der Umfang der Berechnung reduziert werden.

In Bild 7/26 ist der Teilbereich der Beschreibungsfunktion  $N_1$  dargestellt, welcher sich bei der Berechnung mit (7.23) und den Werten aus (7.24) ergibt.

$$\begin{aligned} 0.0001 < E_{(1)0} < 0.5 \\ 0.0004 < E_{(1)1} < 0.5 \\ 0.0004 < E_{(1)2} < 0.5 \\ 0 < \varphi_{(1)2} < 2\pi \end{aligned} \quad (7.24)$$

Jede in Bild 7/26 dargestellte Kennlinie stellt eine Funktion  $N_1(E_{(1)0}, E_{(1)1} \in (E_{1\min} \dots E_{1\max}), E_{(1)2}, \varphi_{(1)2})$  dar. Es gilt:

$$N_1(E_{(1)1}) \Big|_{E_{(1)0}, E_{(1)2}, \varphi_{(1)2}} = N_{1\Re}(E_{(1)1}) + jN_{1\Im}(E_{(1)1}) \quad (7.25)$$

mit  $E_{(1)1} \in (E_{1\min} \dots E_{1\max})$ . Der kleine Kreis in jeder Kennlinie erfolgt für  $N_{1\Re}(E_{1\min}) + jN_{1\Im}(E_{1\min})$ .

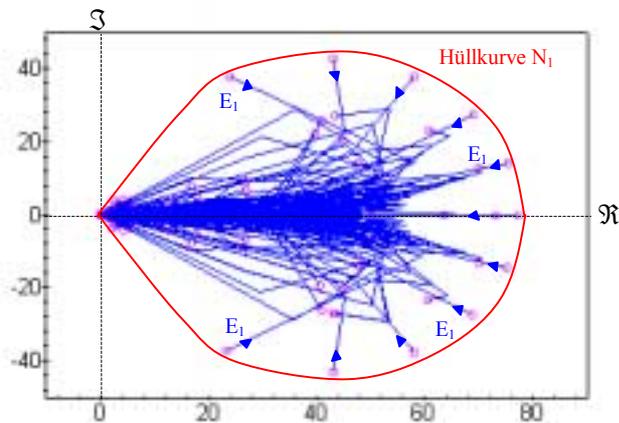


Bild 7/26 Teilbereich der Beschreibungsfunktion  $N_1(e_1 = E_{(1)0} + E_{(1)1} \sin(\omega t) + E_{(1)2} \sin(2\omega t + \varphi_{(1)2}))$  der Reibung

Die komplexen Zahlen  $N_1$  aus der Hüllkurve von Bild 7/26 können erneut für  $Z_1$  aus (7.20) eingesetzt werden. Anschließend erfolgt der Vergleich von  $N_2$  und  $Z_2$  in Bild 7/27 .

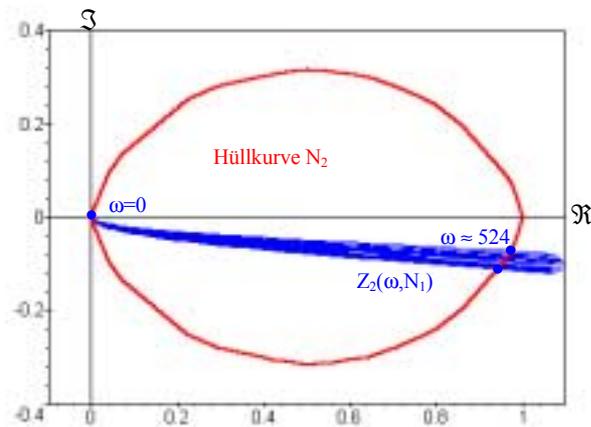


Bild 7/27 Vergleich der Werte von  $N_2$  und  $Z_2$  für  $E_{(1)2} > 0.5E_{(1)1}$

Die einzelnen Punkte der Kurven  $Z_2(\omega, N_1)$  aus Bild 7/27 zeigen auf die möglichen Zustände der Harmonischen Balance, sofern die durch (5.34) und (6.13) gegebenen Bedingungen für die Amplituden der ersten Harmonischen von der Reibung und der tote Zone erfüllt sind. Für sie ergibt sich nach (6.13) die Gleichung (7.26).

$$E_{(2)1} = E_{(1)1} f_E(\omega, Z_1 = N_1(E_{(1)1})) \quad (7.26)$$

Für  $Z_1$  aus (7.26) werden die Werte der Beschreibungsfunktion  $N_1$  der Reibung aus Bild 7/26 eingesetzt. Alle diese Werte liefern ähnliche Ergebnisse für die Funktion (7.26), die in Bild 7/28 dargestellt ist. Daraus geht hervor, daß für höhere Frequenzen die Voraussetzungen für einen Zustand der Harmonischen Balance erfüllt werden können. Für kleinere Frequenzen ist ein solcher Zustand nur für so große Amplituden  $E_{(1)2}$  möglich, welche physikalisch gar nicht

aufreten können. Damit muß die Stabilität der vorhandenen Zustände der Harmonischen Balance nur für ca.  $80 < \omega < 525$  geprüft werden.

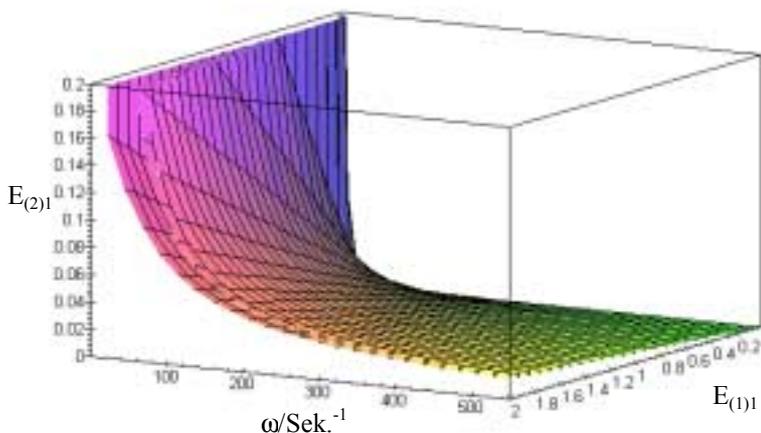


Bild 7/28 Funktion der Amplitude  $E_{(2)1}$  in Abhängigkeit von  $E_{(1)1}$  und  $\omega$  für  $Z_1=N_1$

Für die Prüfung der Stabilität muß der Verlauf der Funktionen  $N_1$  und  $N_2$  in Abhängigkeit der Änderung der einzelnen Variablen  $E_{(1)0}$ ,  $E_{(1)1}$ ,  $E_{(1)2}$ ,  $\varphi_{(1)2}$ ,  $E_{(2)0}$ ,  $E_{(2)1}$ ,  $E_{(2)2}$  und  $\varphi_{(2)2}$  aufbereitet und analysiert werden. In Bild 7/29 sind einige Beispiele dargestellt. Sie wurden aus der Schar der in Bild 7/23 dargestellten Punkte herausgenommen und zeigen das Verhalten von  $N_2$  in Abhängigkeit des Gleichanteils  $E_{(2)0}$ . Für jede Gruppe der Gleichanteile wird anschließend für alle gemeinsamen Punkte von  $Z_2$  und  $N_2$  die Stabilitätsprüfung vorgenommen. Zuerst wird geprüft, ob in dem Punkt die Amplituden der ersten Harmonischen die Gleichung (7.26) erfüllen. Danach wird die eigentliche Prüfung der Stabilität des gefundenen Punktes der Harmonischen Balance durchgeführt.

Die Untersuchungen erfolgen analog zu der in Beispiel 7.1 vorgestellten Vorgehensweise. Maßgeblich für die Analyse sind Bild 7/6 bis Bild 7/9 mit dem

Unterschied, daß in diesem Fall die Parameter von zwei nichtlinearen Gliedern berücksichtigt werden müssen.

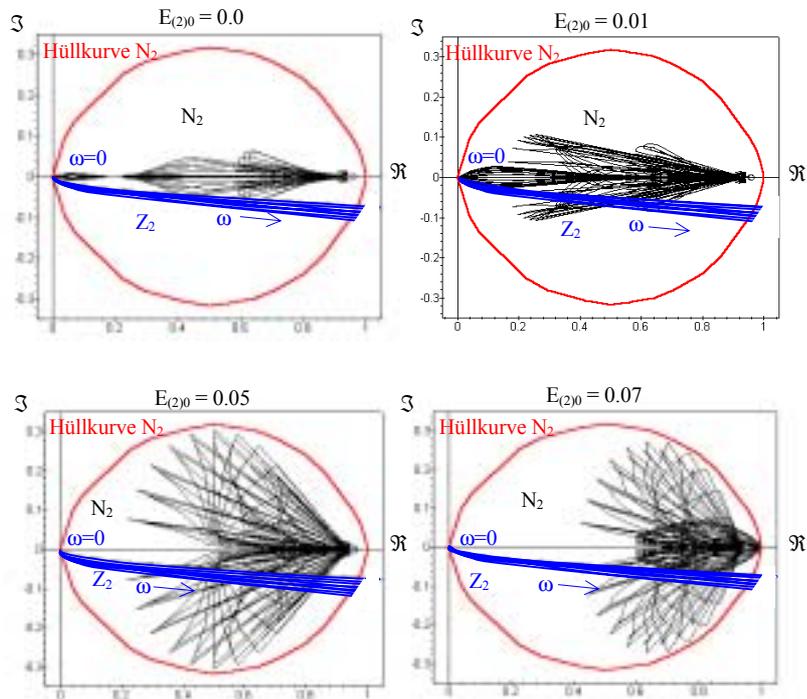


Bild 7/29 Prüfung des Verlaufs der Beschreibungsfunktion  $N_2(e_2=E_{(2)0}+E_{(2)1}\sin(\omega t)+E_{(2)2}\sin(2\omega t+\varphi_{(2)2}))$  in Abhängigkeit von  $E_{(2)0}$

Eine Stabilitätsprüfung nach Abschnitt 6.2 liefert die Aussage, daß keine stabilen Zustände oder chaotische Bewegungen im Bereich der möglichen Zustände der Harmonischen Balance entstehen können. Damit wird das System einen Ruhezustand gemäß (7.18) annehmen können.

### 7.2.5 Beispiel für chaotisches Systemverhalten bei falschen Reglereinstellungen

Das im Abschnitt 7.2.4 untersuchte Systemverhalten ist nicht für alle Parameter des Reglers gültig. In diesem Abschnitt wird eine solche Reglereinstellung gezeigt, welche zu chaotischen Schwingungen führt. Dabei wird der Drehzahlregler unverändert als PI-Regler wie Gleichung (7.16) beibehalten und der Stromregler, wie das oft in der Praxis gehandhabt wird, nur als P-Regler mit  $G_{Ri}=K_{Ri}=2,5$  eingestellt.

Mit dieser Einstellung verändert der Verlauf von  $Z_2$  im Bereich von  $N_2$  grundlegend seinen Charakter. Für die Frequenzen ca.  $260 < \omega < 265$  und  $575 < \omega < 580$   $\text{Sek.}^{-1}$  liefert die Funktion  $Z_2$  die gleichen Werte (vgl. Bild 7/30). Die Prüfung der Bedingungen für die Entstehung der Zustände der Harmonischen Balance gemäß Abschnitt 7.2.4 bestätigt diese Möglichkeit.

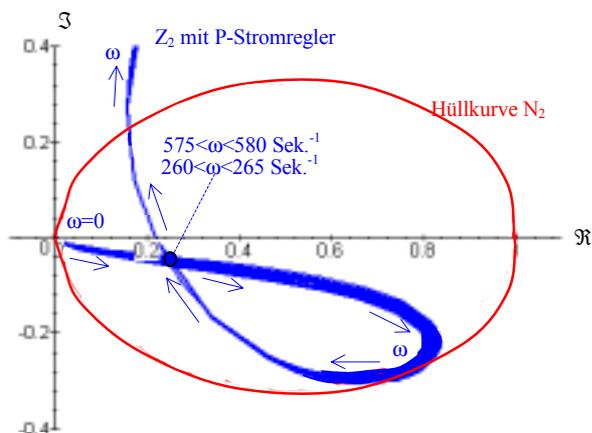


Bild 7/30 Vergleich der Werte von  $N_2$  und  $Z_2$

Die Stabilitätsprüfung zeigt, daß sich die Zustände der Harmonischen Balance im System für  $260 < \omega < 265$  in eine andere Richtung entlang  $N_2$  als für  $575 < \omega < 580$  bewegen werden. Da jedoch die beiden Frequenzbereiche bei kleinen Amplituden der einzelnen Harmonischen gleichzeitig die Voraussetzungen für die Entstehung der Zustände der Harmonischen Balance erfüllen, kann kein Ruhezustand im System erreicht werden. Es entsteht eine chaotische Bewegung des Systems, die in Bild 7/31 dargestellt ist.

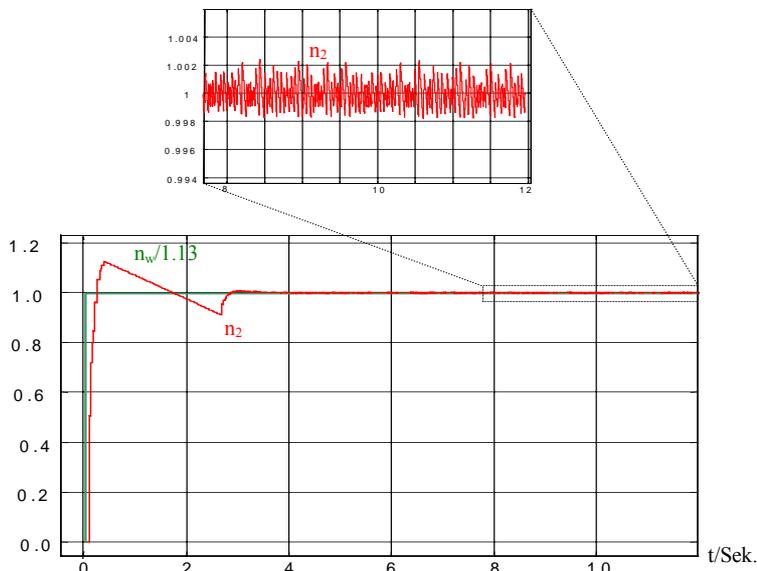


Bild 7/31 Simulation der Regelung von Bild 7/14 mit P-Stromregler

Der Frequenzbereich der chaotischen Schwingung von Bild 7/31 entspricht auch den in Bild 7/30 ermittelten Frequenzwerten. Der Verlauf von  $n_2$  zeigt eine Bewegung, die versucht den stationären Zustand für  $\omega=0$  zu erreichen es jedoch auf Grund der immer wieder entstehenden Zustände der Harmonischen Balance für  $575 < \omega < 580$  nicht erreichen kann.

### 7.3 Beispiel mit Bifurkation des Systemverhaltens

Ein weiterer Nachweis der Leistungsfähigkeit der Methode der Harmonischen Balance kann bei der Untersuchung des Systems von Bild 7/32 erbracht werden. Dieser Standardregelkreis wurde in [7] mit einer erweiterten Grundmethode der Harmonischen Balance analysiert. Diese Methode ist dort um die Anwendung der harmonisch linearisierten Poincaré-Karte in Verbindung mit dem Kriterium für die Entstehung von „period-doubling“-Bifurkationen von Lichtenberg und Liebermann (vgl. [21]) ergänzt worden. Der Vorteil der dort vorgestellten Vorgehensweise liegt in der Verwendung einer einfachen Beschreibungsfunktion, die mit einem Eingangssignal  $e = E_1 \sin(\omega t)$  berechnet wurde. Mit dieser Festlegung wird jedoch gleichzeitig die Nutzung der Methode auf Systeme mit „Tiefpaßeigenschaften“ beschränkt. Ein weiterer Nachteil liegt darin, daß dadurch einige Eigenarten der nichtlinearen Systems nicht entdeckt werden können. Darüber hinaus ist ein zusätzlicher Aufwand für das Integrationsverfahren aufzubringen, welcher bei der Erstellung der Poincaré-Karte erforderlich ist.

Die Abhandlung der Systemanalyse in dieser Arbeit führt zu einem vollständigen Verständnis des Systemverhaltens und dadurch zu teilweise anderen Aussagen. Es ist möglich *alle* Bifurkationspunkte des Systems also parameterabhängige Wechsel zwischen den diversen Grenzwahlungen, chaotischen Schwingungen, stabilem und instabilem Verhalten zu finden. Durch die Anwendung der Methode der Harmonischen Balance werden auf eine beachtenswerte Weise die Zusammenhänge der Auswirkung der unterschiedlichen Frequenzen und des Gleichanteils auf das Systemverhalten sichtbar.

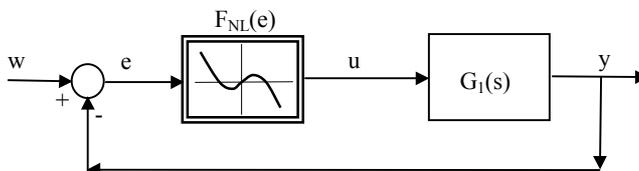


Bild 7/32 Standardregelkreis zur Untersuchung von chaotischem Verhalten

Für die Übertragungsfunktion  $G_1(s)$  und die nichtlineare Funktion  $F_{NL}(e)$  gelten nach [7] die Gleichungen (7.27) und (7.28).

$$F_{NL}(e) = e \left( 1 - \frac{3\pi}{8} |e| \right) \quad (7.27)$$

$$G_1(s) = \lambda \frac{0.2}{s^3 + 0.2s^2 + s} \quad (7.28)$$

Die Stabilitätsuntersuchung für  $\omega \rightarrow \infty$  und den Parameterbereich  $0.1 < \lambda < 6$  ist in Bild 7/33 dargestellt.

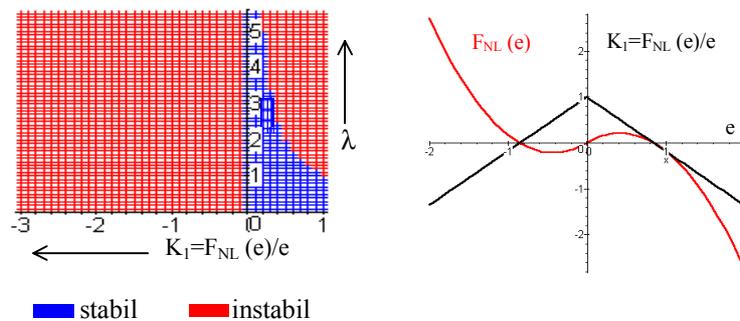


Bild 7/33 Untersuchung der Stabilität des Systems von Bild 7/32 für  $\omega \rightarrow \infty$

Aus Bild 7/32 und der Untersuchung des Systems im transienten Bereich in Bild 7/33 können für  $K_1 = F_{NL}(e)/e$  und  $\lambda$  folgende Aussagen abgeleitet werden:

- Für  $K_1 > 0$ , d.h. für kleinere Amplituden (vgl. Bild 7/33  $e < 0.848$ ) weist das System unterschiedliches Verhalten für unterschiedliche Werte des Parameters  $\lambda$  auf. *Damit können Bifurkationen des Systemverhaltens in Abhängigkeit von  $\lambda$  vermutet werden.*

- Ein Ruhezustand gemäß Definition 6.1 oder ein stationärer Zustand gemäß Definition 6.2 kann im System nur dann entstehen, wenn der Gleichanteil am Ausgang des nichtlinearen Gliedes  $U_0 = 0$  ist. Aus diesem Grund muß geprüft werden, für welche Eingangssignale des nichtlinearen Gliedes der Gleichanteil am Ausgang Null wird.
- Wegen des Pols  $s_1 = 0$  von  $G_1(s)$  liefert  $G_1(s)$  auch für Eingangssignale mit nur Wechselanteilen ein Ausgangssignal, welches einen Gleichanteil enthält.
- Mit großer Wahrscheinlichkeit können für  $\lambda > 1.0$  wegen des Übergangs vom instabilen Bereich für sehr kleine Amplituden in einen stabilen Bereich für größere Amplituden *Dauerschwingungen* erwartet werden. Wie sich das System beim Vergrößern von  $\lambda$  verhalten wird, muß noch durch die Untersuchung der anderen Frequenzen und der Beschreibungsfunktion geprüft werden.

Um die Aussagen zu vervollständigen, kann noch gesagt werden, daß für  $K_1 < 0$ , d.h. für wachsende Amplitude am Eingang des nichtlinearen Gliedes und beliebige  $\lambda$ -Werte das System im transienten Bereich instabil ist. Damit ist das System im Sinne der Definitionen 6.3 bis 6.5 instabil.

Für die Beschreibungsfunktion muß jetzt festgelegt werden, mit welchen Harmonischen sie berechnet werden soll. Darüber hinaus soll die Ermittlung des Amplitudenbereiches dieser Harmonischen erfolgen. Zu diesem Zweck wird die Funktion (7.29) gemäß Abschnitt 5.4 untersucht.

$$\left| R_{11}(jn\omega) \right| / \left| R_{11}(j\omega) \right| = \left| G_1(jn\omega) \right| / \left| G_1(j\omega) \right| \quad (7.29)$$

Für  $n$  gilt:  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ . Die Gleichung (7.29) ist in Bild 7/34 dargestellt und liefert zugleich die größten Werte aus  $\left| R_{11}(jn\omega) \right| / \left| R_{11}(j\omega) \right|$  für  $n=2$ .

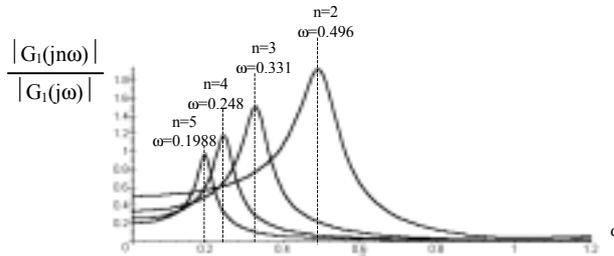


Bild 7/34 Funktion gemäß (7.29)

Für die Ermittlung der Beschreibungsfunktion wird zuerst das Eingangssignal  $E_0 + E_1 \sin(\omega t) + E_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$  berücksichtigt, weil das Verhältnis zwischen der 1. und der 2. Harmonischen am stärksten ausgeprägt ist. Aus Bild 7/34 geht hervor, daß für die Amplitude  $E_2$  im Allgemeinen die Beziehung  $E_2 < 2E_1$  gelten muß. Die Beschreibungsfunktion wird damit für die in (7.30) enthaltenen Werte des Eingangssignals berechnet:

$$\begin{aligned} E_0 &= [0, 0.03, 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50] \\ E_1 &= [0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.90, 1.00] \\ E_2 &= [0, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00, 1.20, 1.40, 1.60, 1.80, 2.00] \\ \varphi_2 &= k\pi/6; k=0..12 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Aus der Gleichung der Harmonischen Balance (7.31) (vgl. (5.31)) mit  $\mathbf{M}=1$ ,  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{11}$ ,  $\mathbf{E}_1 = E_1$  und  $\mathbf{R}(j\omega_x) = \mathbf{R}_{11}(j\omega) = -\mathbf{G}_1(j\omega)$  (vgl.(7.28)) wird die Kurve der Harmonischen Balance (7.32) entsprechend der Gleichung (5.33) hergeleitet.

$$(\mathbf{R}(j\omega_x) \mathbf{M}_n \mathbf{Z}_1 - \mathbf{1}) \mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \quad (7.31)$$

$$Z_{11} = \frac{1}{R_{11}} = \frac{\omega(j5\omega^2 + \omega - j5)}{\lambda} \quad (7.32)$$

Die Zustände der Harmonischen Balance können nur für diese Werte der Beschreibungsfunktion  $N_{11}$  entstehen, welche mit den Werten der Kurve  $Z_{11}$  übereinstimmen. Beide Funktionen  $N_{11}(E_0 + E_1 \sin(\omega t) + E_2 \sin(2\omega t + \varphi_2))$  und  $Z_{11}(\omega)$  sind in Bild 7/35 dargestellt.

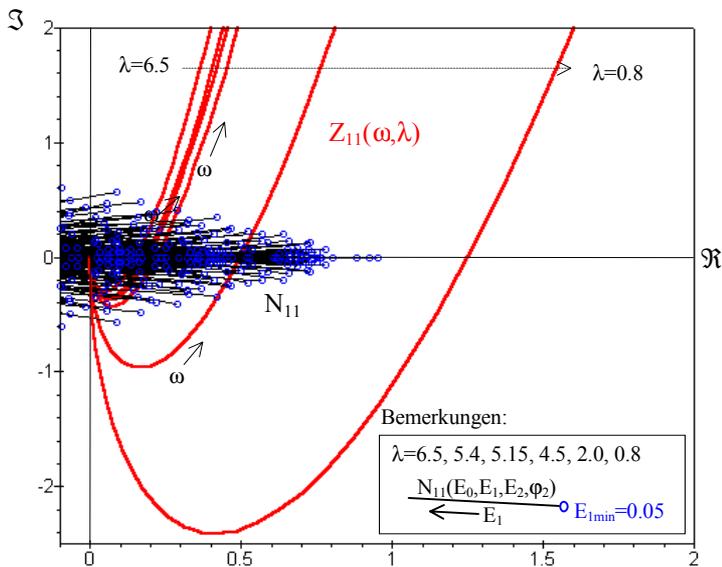


Bild 7/35 Vergleich der Werte der Beschreibungsfunktion  $N_{11}$  mit der Kurve der Harmonischen Balance  $Z_{11}$

Die einzelnen  $N_{11}$ -Kurven werden mit  $E_1$  als Variable und  $E_0, E_2$  und  $\varphi_2$  als Parameter gezeichnet. Für jede dieser Funktionen ist für  $E_{1(\min)}$  ein Kreis in Bild 7/35 und Bild 7/36 eingetragen. Es gilt  $E_2 < 2E_1$ . Die Beschreibungsfunktion  $N_{11}(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  aus Bild 7/35 muß genauer untersucht werden. Das Bild 7/36 zeigt die Abhängigkeit der Funktion  $N_{11}$  von der Variablen  $E_0$ .

Um das System weiter analysieren zu können, werden zuerst die Systemeigenschaften hinsichtlich des Gleichanteilverhaltens überprüft.

Wegen des Pols  $s_1 = 0$  von  $G_1(s)$  ist es erforderlich festzustellen, ob die nicht-lineare Kennlinie fähig ist, für ein Eingangssignal  $e(t) = E_0 + E_1 \sin(\omega t) + E_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$  ein Ausgangssignal  $u(t)$  mit  $U_0 = 0$  zu liefern.

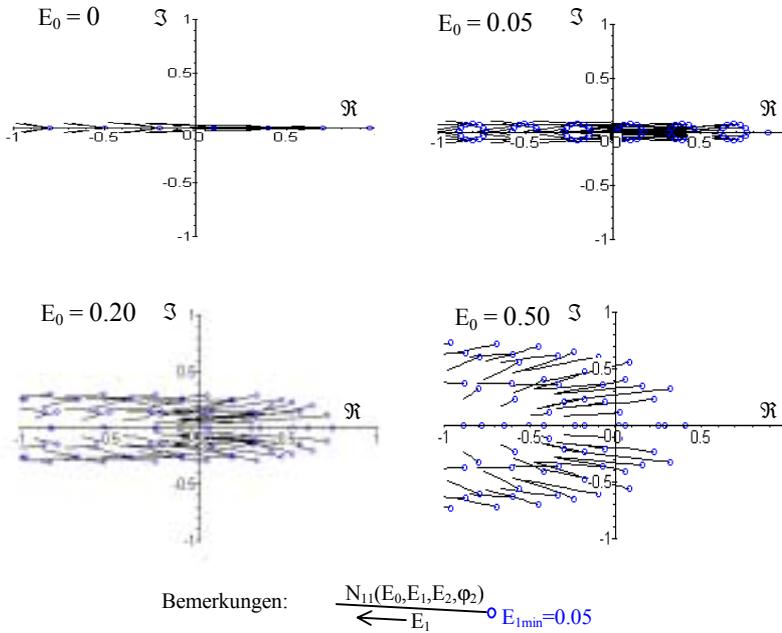


Bild 7/36 Darstellung der Beschreibungsfunktion  $N_{11}(E_1, E_2, \varphi_2)$  für verschiedene  $E_0$

Wenn das nicht der Fall ist, dann wird das System beim konstanten Eingang  $w$  das Signal  $e$  so lange erhöhen, bis schließlich der instabile Bereich für  $e > 0.848$  und  $\omega \rightarrow \infty$  erreicht ist. Der Gleichanteil  $U_0$  wird gemäß (4.7) und (4.14) berechnet.

Das Verhalten von  $U_0$  in Abhängigkeit von  $E_0, E_1, E_2$  und  $\varphi_2$  kann Bild 7/37 und Bild 7/38 entnommen werden. Das Bild 7/37 zeigt die Verschiebung der Funktion  $U_0 = f(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  mit  $E_0, E_2$  und  $\varphi_2$  als Parameter.

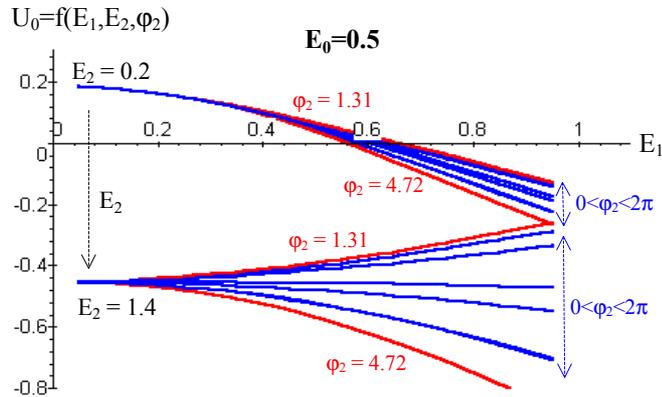


Bild 7/37 Gleichanteile des Ausgangssignals  $U_0=f(E_1, E_2, \varphi_2)$  der Kennlinie  $F_{NL}(e)$  von Bild 7/33 für  $E_0=0.5$

In Bild 7/38 ist die Übersicht für  $U_0(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  für den Wertebereich aus (7.30) dargestellt. Der Verlauf von  $U_0(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  in Bild 7/38 entspricht dem in Bild 7/37 gezeigten Verhalten dieser Funktion. Mit kleinerem Gleichanteil  $E_0$  wird ihre Abhängigkeit von  $E_2$  immer geringer, bis sie schließlich den in Bild 7/38 a) dargestellten Verlauf erreicht.

Die in Bild 7/37 und Bild 7/38 dargestellte Funktion  $U_0=f(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  mit  $E_0, E_2$  und  $\varphi_2$  als Parameter kann auch mit einem Gleichanteil  $E_0 \neq 0$  den Wert  $U_0=0$  zu erzeugen.

Jetzt muß geprüft werden, ob das lineare Teilsystem diese Werte der einzelnen Harmonischen  $E_0, E_1, E_2$  und  $\varphi_2$  liefern kann, die den Zustand  $U_0=0$  erzeugen würden. Darüber hinaus muß geprüft werden, ob das System der Gleichung (5.38) genügt.

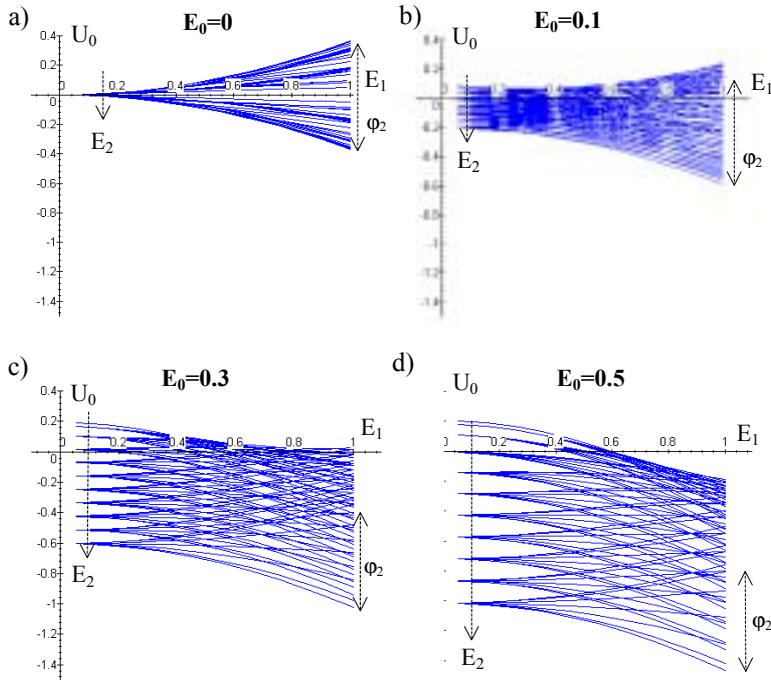


Bild 7/38 Gleichanteil des Ausgangssignals  $U_0=f(E_0,E_1,E_2,\varphi_2)$  mit (7.30) der Kennlinie  $F_{NL}(e)$  von Bild 7/33

Zu diesem Zweck wird gemäß der Ausführungen in Abschnitt 5.3 für  $t > t_0$  das Signal  $u(t)=U_1\sin(\omega t+\varphi_{1u})+U_1\cos(\omega t+\varphi_{1u})+U_2\sin(2\omega t+\varphi_{2u})+U_2\cos(2\omega t+\varphi_{2u})+\dots$  angenommen ( $U_0$  muß gleich 0 sein). Für  $t \rightarrow \infty$  gilt damit (7.33).

$$E_0 = W_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left\{ \lambda G_1(s) \mathcal{F} \{ u(t) \} \right\} \right\} \quad (7.33)$$

Die Gleichung (7.33) liefert unter der Berücksichtigung der Anfangsbedingungen für  $u(t)$  und  $y(t)$  zum Zeitpunkt  $(-t_0)$  die Gleichung (7.34). Es gilt:

$$E_0 = W_0 - Y_G(-t_0) - \frac{1}{5} \frac{\lambda}{\omega} U_1 \cos(\varphi_{1u}) - \frac{1}{10} \frac{\lambda}{\omega} U_2 \cos(\varphi_{2u}) - \dots \quad (7.34)$$

wobei  $Y_G(-t_0)$  die Anfangswerte in  $t_0$  darstellt. Für sie gilt die Gleichung (7.35).

$$Y_G(-t_0) = Y(-t_0) + \dot{Y}(-t_0) + \ddot{Y}(-t_0) \quad (7.35)$$

Im Zustand der Harmonischen Balance gelten weiter mit (7.32) die Gleichungen (7.36) und (7.37).

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{U_1 \cos(\varphi_{1u}) + jU_1 \sin(\varphi_{1u})}{E_1} \quad (7.36)$$

$$Z_{12}(j2\omega) = \frac{U_2 \cos(\varphi_{2u}) + jU_2 \sin(\varphi_{2u})}{E_2 \cos(\varphi_2) + jE_2 \sin(\varphi_2)} \quad (7.37)$$

(7.36) und (7.37) liefern schließlich für (7.34) die Gleichung (7.38).

$$E_0 = W_{0Y} - \frac{1}{5} \frac{\lambda E_1}{\omega} \Re\{Z_{11}(j\omega)\} - \frac{1}{10} \frac{\lambda E_2}{\omega} [\cos(\varphi_2) \Re\{Z_{11}(j2\omega)\} - \sin(\varphi_2) \Im\{Z_{11}(j2\omega)\}] - \dots \quad (7.38)$$

mit  $W_{0Y} = W_0 - Y_G(-t_0)$ . Aus (7.38) geht hervor, daß das System stationäre Zustände erzeugen, und daß (5.38) erfüllt werden kann. Mit der Berücksichtigung der Funktionen von Bild 7/38 und von Bild 7/36 lassen sich numerisch die möglichen stationären Schwingungszustände näherungsweise berechnen. Welcher dieser Zustände tatsächlich im System auftreten kann und für  $t \rightarrow \infty$  erhalten bleibt, muß bei der Untersuchung der Systemeigenschaften für unterschiedliche  $\lambda$  und  $0 < \omega < \infty$  ermittelt werden. Zu diesem Zweck werden die in Bild 7/35 dargestellten Funktionen genauer untersucht. Die Ergebnisse sind in Bild 7/39 enthalten.

Das Bild 7/39 zeigt den Verlauf der Funktion  $Z_{11}(\lambda, \omega)$  entsprechend (7.32) und die berechneten Punkte der Beschreibungsfunktion  $N_{11}(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  für

die Werte aus (7.30). Für  $\lambda > 3.5$  verändert sich das Zusammenwirken zwischen den Funktionen  $Z_{11}$  und  $N_{11}$ . Für diesen  $\lambda$ -Bereich existiert nur ein gemeinsamer Abschnitt von  $Z_{11}$  mit  $N_{11}$ . Für  $\lambda \leq 3.5$  dagegen gibt es zwei davon.

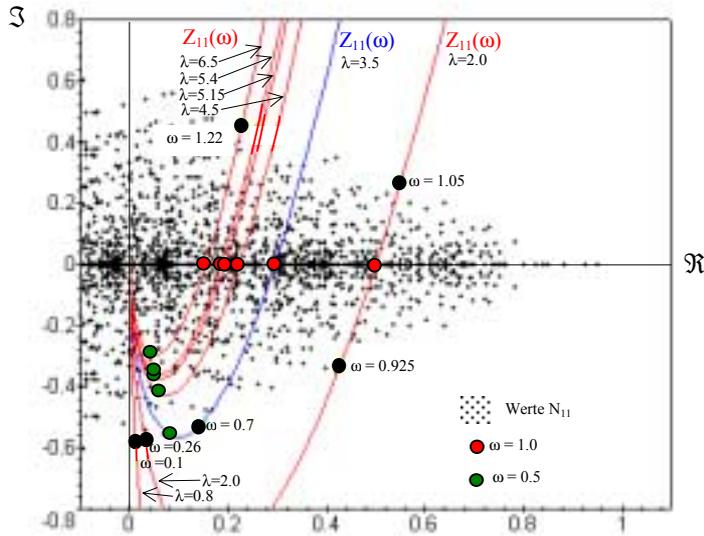


Bild 7/39 Festlegung der Frequenzbereiche für die möglichen Zustände der Harmonischen Balance

Damit können die Zustände der Harmonischen Balance für unterschiedliche  $\lambda$  nur in folgenden Frequenzbereichen entstehen:

- $\lambda = 0.8 \quad \omega \in (0.0 \dots 0.10)$
  - $\lambda = 2.0 \quad \omega \in (0.0 \dots 0.26) \text{ und } (0.925 \dots 1.050)$
  - $\lambda = 3.5 \quad \omega \in (0.0 \dots 0.52) \text{ und } (0.700 \dots 1.095)$
  - $\lambda = 4.5 \quad \omega \in (0.0 \dots 1.155)$
  - $\lambda = 5.15 \quad \omega \in (0.0 \dots 1.175)$
  - $\lambda = 5.40 \quad \omega \in (0.0 \dots 1.183)$
  - $\lambda = 5.15 \quad \omega \in (0.0 \dots 1.220)$
- (7.39)

Entsprechend Abschnitt 6.2.1 wird jetzt untersucht, ob die Zustände der Harmonischen Balance stabile Bereiche für die unterschiedlichen  $\gamma$ -Werte entsprechen.

chend (6.14) aufweisen. Dazu wird die nichtlineare Funktion durch die Gleichung (7.40) ersetzt. Es gilt:

$$\frac{u(s)}{e(s)} \equiv \frac{sK_{NL} \sin(\gamma + \varphi) + \omega K_{NL} \cos(\gamma + \varphi)}{s \sin(\gamma) + \omega \cos(\gamma)}. \quad (7.40)$$

Mit  $K_{NL} = \sqrt{N_r^2 + N_i^2}$  und  $\varphi = \angle(N_r, N_i)$  bzw.

$$K_{NL} = \sqrt{Z_r^2 + Z_i^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \angle(Z_r, Z_i)$$

ergibt sich für die charakteristische Gleichung folgende Beziehung:

$$5s^4 \sin(\gamma) + (\sin(\gamma) + 5\omega \cos(\gamma))s^3 + (\omega \cos(\gamma) + 5 \sin(\gamma))s^2 + (5\omega \cos(\gamma) + K_{NL} \lambda \sin(\gamma + \varphi))s + K_{NL} \lambda \omega \cos(\gamma + \varphi) = 0 \quad (7.41)$$

Im Zustand der Harmonischen Balance kann die Verteilung der Nullstellen von (7.41) in Abhängigkeit von  $\gamma$  ermittelt und damit die  $\omega$ - und  $\gamma$ -bezogene Stabilität dieser Zustände geprüft werden. Zu diesem Zweck wird der Betrag  $K_{NL} = |Z_{11}(j\omega)|$  und der Winkel  $\varphi = \angle(\Re(Z_{11}), \Im(Z_{11}))$  in (7.41) eingesetzt und ihre Polverteilung berechnet, womit die Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance gegeben ist. Die bezüglich  $\omega$  und  $\gamma$  stabilen und instabilen Bereiche für die Zustände der Harmonischen Balance sind in Bild 7/40 dargestellt.

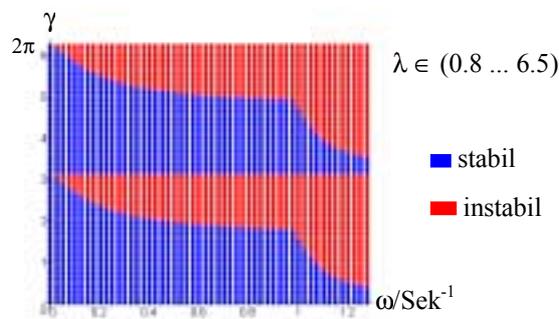


Bild 7/40  $\omega$ - und  $\gamma$ -bezogene Stabilitätsuntersuchung für die Zustände der Harmonischen Balance

Bild 7/40 ist zu entnehmen, daß die  $\gamma$ -bezogene Abhängigkeit der Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance für alle Werte von  $\lambda=0,8 \dots 6,5$  gleich ist. Weiterhin ist festzustellen, daß in Bezug auf  $\gamma$  das System die nötigen Voraussetzungen erfüllt, welche die Entstehung der stabilen Grenzwinkelungen oder gegebenenfalls chaotischen Bewegungen ermöglichen (vgl. Abschnitt 6.2.1).

Jetzt muß für alle relevanten Zustände der Harmonischen Balance die Prüfung ihrer Stabilität durchgeführt werden. Um den Rechenaufwand gering zu halten, soll geprüft werden, wie sich die Amplitudenverhältnisse zwischen der ersten und der zweiten Harmonischen auf den Gültigkeitsbereich der Zustände der Harmonischen Balance auswirkt. Diese Untersuchung muß die in Bild 7/39 und Bild 7/34 enthaltenen Informationen berücksichtigen. Daraus läßt sich entnehmen, daß für  $\omega > 0.7$  die Beziehung  $E_2 < 0.25E_1$  gilt. Mit diesen Amplitudenverhältnissen reduziert sich der zu berücksichtigende Bereich der Beschreibungsfunktion. Damit wird aber der relevante  $\omega$ -Intervall (gemeinsame Bereich von  $Z_{11}$  und  $N_{11}$ ) kleiner. Das führt wiederum zu der Veränderung der Beziehung  $E_2 < 0.25E_1$  und einer erneuten Verkleinerung des gültigen Bereiches der Beschreibungsfunktion.

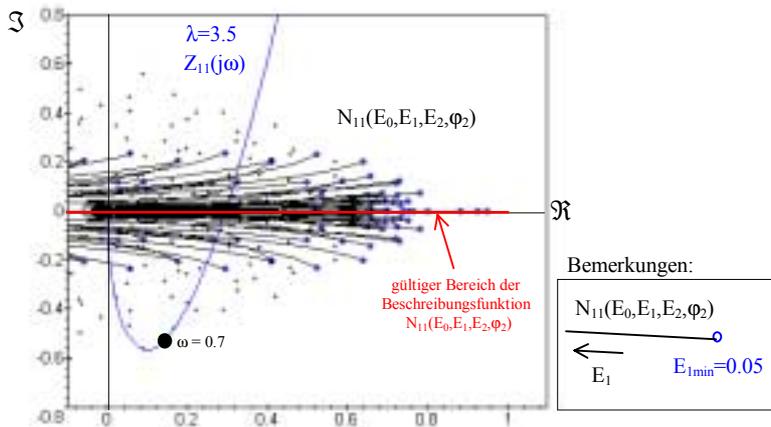


Bild 7/41 Untersuchung des Gültigkeitsbereiches der Beschreibungsfunktion

Diese Eigenschaft des Zusammenwirkens zwischen der Beschreibungsfunktion und der Kurve der Harmonischen Balance führt dazu, daß die für diesen  $\omega$ -Bereich gültige Beschreibungsfunktion mit der reellen Achse der komplexen Ebene zusammenfällt (vgl. Bild 7/41). Die Betrachtung der  $\omega$ -Werte entlang der Kurven der Harmonischen Balance für unterschiedliche  $\lambda$  in Bild 7/39 und die Aussage von Bild 7/41 führen zu der Schlußfolgerung, daß für  $1.0 < \lambda < 3.5$  und für  $\omega > 0.7$  Dauerschwingungen höchstens mit der Frequenz  $\omega=1.0$  möglich sind. Ob sich solche Schwingungen im System einstellen können und für welche Werte der einzelnen Harmonischen und des Gleichanteils die Schwingung existieren kann, muß berechnet werden. Wegen  $\omega=1.0$  kann gemäß der Funktion von Bild 7/34 für  $1.0 < \lambda < 3.5$  die zweite Harmonische vernachlässigt werden (vgl. Bild 7/34). Damit gilt für den Gleichanteil  $U_0(E_0, E_1)$  des Ausgangssignals des nichtlinearen Gliedes die in Bild 7/42 dargestellte Funktion.

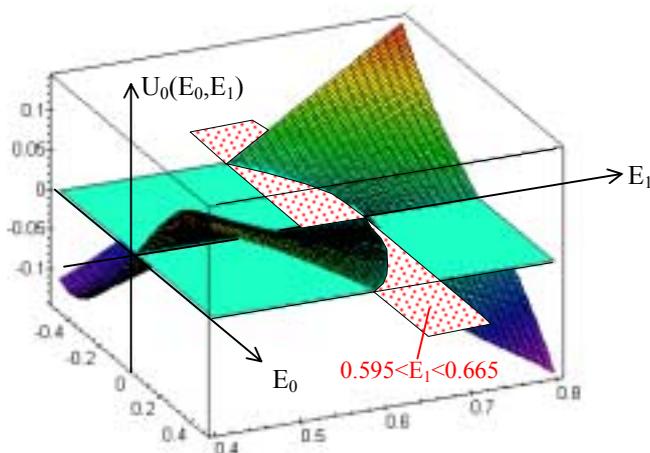


Bild 7/42 Gleichanteil  $U_0$  des Ausgangssignals des nichtlinearen Gliedes

Aus Bild 7/42 läßt sich ablesen, daß die Dauerschwingungen für  $E_0=0$  und beliebiges  $E_1$  möglich sind, weil die Funktion  $U_0(E_0, E_1)$  für  $E_0=0$  die  $E_0, E_1$ -Ebene entlang der  $E_1$ -Achse durchdringt. Darüber hinaus könnten die Dauerschwingungen in dem untersuchten Bereich  $-0.5 < E_0 < 0.5$  auch für  $0.595 < E_1 < 0.665$  entstehen. Aus diesem Grund kann die weitere Analyse für

$1.0 < \lambda < 3.5$  auf ungefähr diesen Bereich der Amplituden beschränkt werden und wird in Bild 7/43 durchgeführt. Dabei werden die Funktionen  $N_{11}(E_0, E_1)$  und  $Z_{11}(j\omega, \lambda)$  miteinander verglichen.

Zuerst wird in den  $E_1, N_{11}$ -Koordinaten die Beschreibungsfunktion  $N_{11}(E_0, E_1)$  mit  $E_0$  als Parameter gezeichnet. Auf der  $E_1$ -Achse wird anschließend dieser Bereich markiert, welcher den Wert  $U_0=0$  der Funktion  $U_0(E_0, E_1)$  von Bild 7/42 liefert. Die Funktion  $N_{11}(E_0, E_1)$  mit  $E_0=0$  weist für alle  $E_1$  den Wert  $U_0=0$  auf (vgl. Bild 7/42). Der zu untersuchende Bereich der Kurven der Harmonischen Balance liegt auf der reellen Achse der komplexen Ebene (vgl. Bild 7/39 für  $\omega=1.0$ ). Aus diesem Grund wird diese Achse zum Vergleich mit der  $N_{11}$ -Achse zusammengelegt.

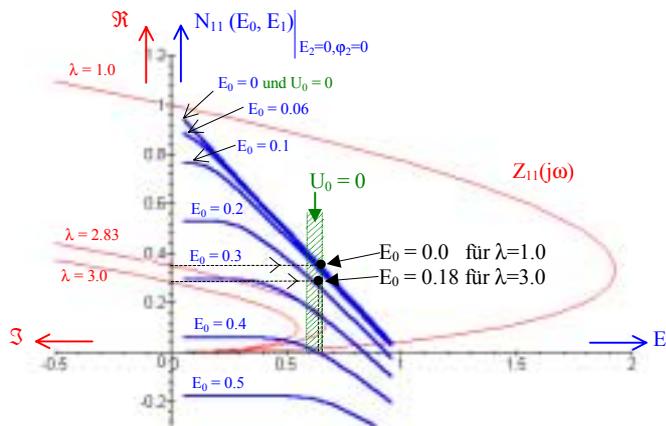


Bild 7/43 Ermittlung der Parameter einer möglichen Dauerschwingung.

Eine mögliche Schwingung kann bei einem bestimmten  $\lambda$  nur für diese Werte  $E_0$ , und  $E_1$  entstehen, welche die Bedingung  $U_0(E_0, E_1)=0$  aus Bild 7/42 erfüllen. Die Werte der Funktionen  $Z_{11}(j\omega, \lambda)$  auf der  $\Re$ -Achse zeigen auf diese Kurven aus dem Verlauf von  $N_{11}(E_0, E_1)$ , für welche die obige Bedingung geprüft werden muß. Die gefundenen Zustände können gemäß Abschnitt 6.2.1 auf ihre Stabilität geprüft werden. Sie weisen ein stabiles Verhalten auf. Unter

diesen Voraussetzungen ist vom System das nachfolgend beschriebene Verhalten zu erwarten.

Für  $1.0 < \lambda < 2.83$  sind nur Dauerschwingungen mit  $E_0=0$  und der Amplitude  $E_1 = 0.665$  gemäß der Kennlinie  $N_{11}(E_0=0, E_1)$  von Bild 7/43 möglich. Die Schwingungen sind unabhängig von  $W_0$ . In Bild 7/44 sind die Simulationsverläufe für  $\lambda = 2.83$  dargestellt. Sie bestätigen die Ergebnisse der Analyse.

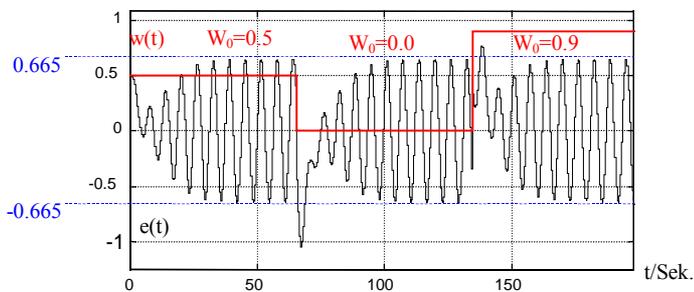


Bild 7/44 Verlauf  $w(t)$  und  $e(t)$  für  $\lambda = 2.83$

Für  $2.83 < \lambda < 3.5$  sind neben der Grenzschwingung mit  $E_0=0$  auch Grenzschwingungen mit  $|E_0|>0$  möglich. Die Stabilitätsuntersuchung dieser Zustände gemäß Abschnitt 6.2.1 liefert jedoch die Aussage, daß nur die Grenzschwingung mit dem höchsten Gleichanteil stabil sind und sich damit einstellen wird.

Aus Bild 7/43 und Bild 7/42 geht weiter hervor, daß mit wachsendem  $\lambda$  auch der Gleichanteil  $E_0$  der Dauerschwingung wachsen und die Amplitude  $E_1$  abnehmen wird. Die Schwingungen sind auch in diesem  $\lambda$ -Bereich unabhängig von  $W_0$ .

Gemäß Bild 7/42 sind die Dauerschwingungen sowohl mit einem positiven als auch mit einem negativen Gleichanteil möglich. In Bild 7/45 sind die Simulationsverläufe für  $\lambda = 3.5$  dargestellt. Sie zeigen, daß sich eine Dauerschwingung mit der gleichen Amplitude  $E_1$  und bei gleichen  $W_0$  sowohl für den Gleichanteil  $+E_0$  als auch  $-E_0$  einstellen kann.

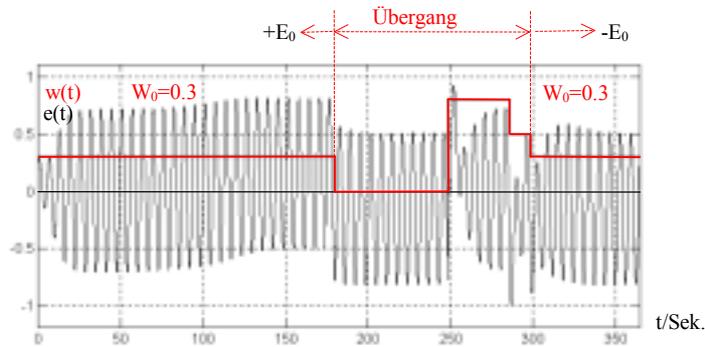


Bild 7/45 Simulationsverlauf  $w(t)$  und  $e(t)$  für  $\lambda = 3.5$

Die vollständige Untersuchung des Systems muß allerdings noch die Analyse der Zustände der Harmonischen Balance für den kleinen  $\omega$ -Bereich enthalten (d.h. z.B. bei  $\lambda=2$  für  $0 < \omega < 0.26$  oder für  $\lambda=3.5$  für  $0 < \omega < 0.5$ ; vgl. hierzu Bild 7/39). Auch diese Zustände, wenn sie im System als Dauerschwingung existieren, müssen vor allem den Gleichanteil  $U_0=0$  liefern.

Als Beispiel für die Prüfung dieser Zustände wird jetzt  $\lambda=2$  und  $\omega=0.1$  gewählt. Die Ergebnisse sind in Bild 7/46 dargestellt. In Bild 7/46 a) und b) sind die relevanten Bereiche der Beschreibungsfunktion  $N_{11}$  und der Kurve der Harmonischen Balance  $Z_{11}$  dargestellt. Aus Bild 7/46 b) geht hervor, daß mögliche Grenzschwingungen für  $\omega=0.1$  erst für  $E_0 > 0.10$  ( $E_0$  ca. 0.15) entstehen könnten, weil die Beschreibungsfunktion für  $0 < E_0 < 0.1$  den Punkt  $Z_{11}(j(\omega=0.1))$  nicht schneidet. Die Prüfung der Bedingung  $U_0=0$  muß für alle Punkte der Kennlinien  $N_{11}$ , welche mit dem Punkt  $Z_{11}(j(\omega=0.1))$  übereinstimmen, erfolgen.

In Bild 7/46 c) und d) sind zwei Kennlinienabschnitte als Beispiele für die durchzuführende Untersuchung gezeigt. Dort wird für die Parameter  $E_0, E_2$  und  $\varphi_2$  der Funktion  $N_{11}(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$  ein  $E_1$ -Intervall untersucht bei dem die  $N_{11}$ -Kurve den Punkt  $Z_{11}(j(\omega=0.1))$  schneidet. Gleichzeitig muß die Funktion in dem gleichen Bereich der Variablen  $E_0, E_1, E_2, \varphi_2$  den Wert  $U_0(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)=0$  annehmen. Nur dann ist ein Zustand der Harmonischen Balance möglich. Eine Grenzschwingung kann gemäß Bild 7/46 c) und d) nicht entstehen, weil die

Kennlinien  $U_0(E_0, E_1, E_2, \varphi_2)$ , die in Bild 7/46 c) und d) als  $U_0(E_1)$  mit  $E_0, E_2$  und  $\varphi_2$  als Parameter dargestellt ist, in diesem Bereich die  $E_1$ -Achse nicht schneiden ( $U_0 \neq 0$ ).

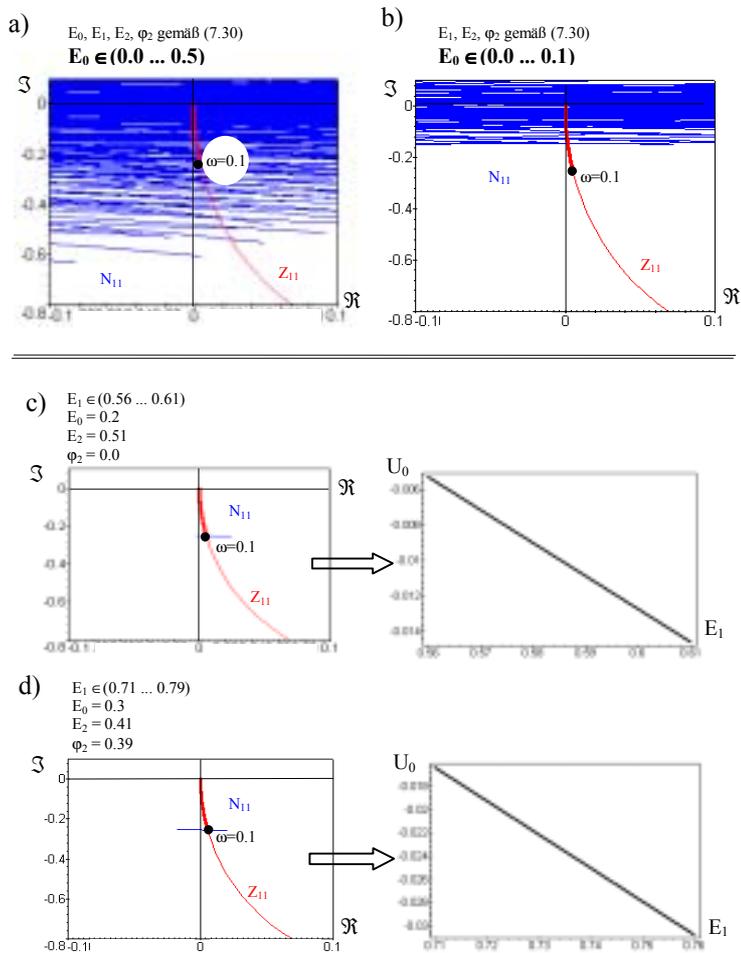


Bild 7/46 Prüfung der Bedingungen für den Gleichanteil  $U_0=0$  des Zustandes der Harmonischen Balance für  $\lambda=2$  und  $\omega=0.1$

Die Prüfung der Bedingung  $U_0=0$  und ggf. der Stabilität der gefundenen Zustände sowie der Systemeigenschaften für  $\omega \rightarrow \infty$  zeigt, daß für  $\lambda < 1$  im System für  $t \rightarrow \infty$  nur Ruhezustände gemäß Definition 6.1 zu erwarten sind. Die in Bild 7/47 dargestellten Simulationsverläufe für  $\lambda=0.8$  bestätigen diese Aussagen.

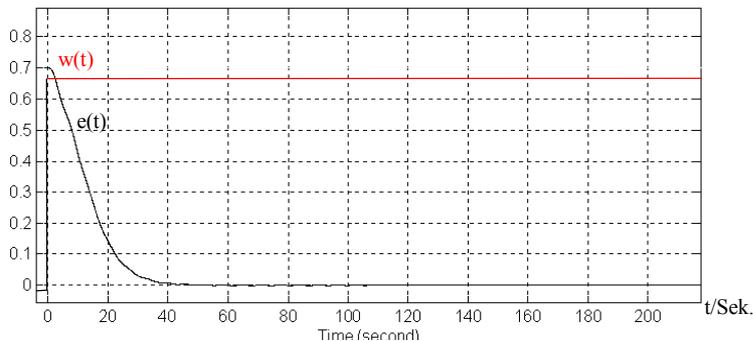


Bild 7/47 Verlauf  $w(t)$  und  $e(t)$  für  $\lambda = 0.8$

Für  $\lambda > 1$  bis  $\lambda \approx 2.83$  können im System nur Dauerschwingungen mit  $\omega=1.0$  und  $E_0=0$  entstehen. Für  $\lambda > 2.83$  bis ungefähr 3.5 entstehen nur Dauerschwingungen mit  $\omega = 1.0$  und einem positiven oder negativen Gleichanteil.

Für  $\lambda > 3.5$  können prinzipiell zuerst auch Dauerschwingungen wie für  $2.83 < \lambda < 3.5$  erwartet werden. Mit wachsenden  $\lambda$ -Werten verändert sich jedoch der Verlauf von  $Z_{11}$  so, daß die Zustände der Harmonischen Balance bei kleineren Amplituden  $E_2$  und  $E_0$  und niedrigeren Frequenzen d.h. für  $0 < \omega < 0.72$  möglich werden. Ob aus diesen Zuständen Dauerschwingungen entstehen können, muß genauso durch die Prüfung der Bedingung  $U_0 = 0$  und ggf. der Stabilität dieser Zustände festgestellt werden.

An dieser Stelle soll noch auf einige Besonderheiten der Anwendung der Methode der Harmonischen Balance bei Systemen mit Resonanzstellen in der Betragskennlinie hingewiesen werden (Bild 7/34 ). Die Auswirkung dieser Resonanzstellen auf das Verhalten des Systems soll für  $\lambda = 5$  analysiert werden. In diesem Fall erzeugen sie eine besondere Konstellation im Zusammenwirken der linearen und nichtlinearen Teile des Systems.

Die Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance hängt von den Variablen  $K_{NL}$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  und  $\gamma$  aus (7.40) ab. Bei der Analyse der charakteristischen Gleichung des Systems fällt auf, daß diese Zustände, dann instabil sind, wenn die Beziehungen (7.42) berücksichtigt werden.

$$K_{NL} = K_{NL} + \Delta K_{NL} \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi - \Delta\varphi \quad (7.42)$$

Die Veränderungen  $\Delta K_{NL}$  und  $\Delta\varphi$  werden von den Größen  $E_0, E_1, E_2$  und  $\varphi_2$  verursacht. Das Verhalten der Zustände der Harmonischen Balance muß jetzt hinsichtlich dieser Änderungen untersucht werden. Die entsprechende Situation ist für einen der Zustände der Harmonischen Balance für  $\omega=0.508$  in Bild 7/48 dargestellt.

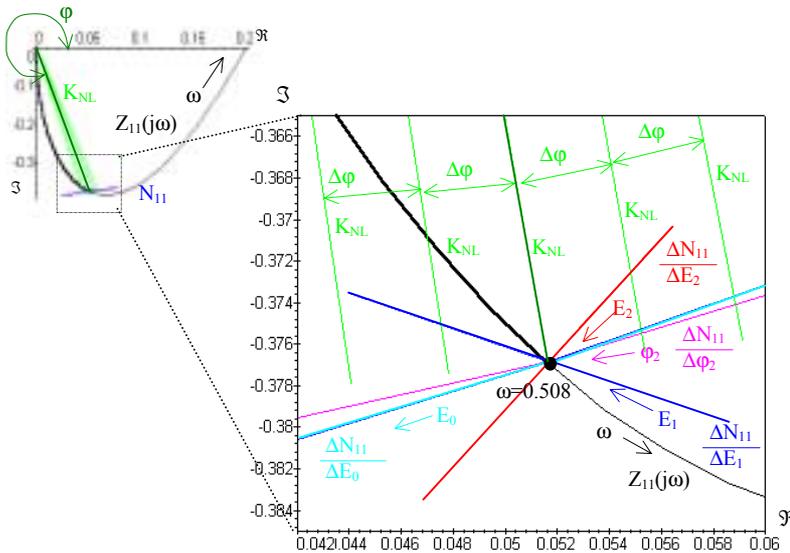


Bild 7/48 Stabilitätsprüfung des Zustandes der Harmonischen Balance für  $\omega = 0.508$  und  $\lambda = 5$

Das Bild 7/48 zeigt, das dieser Zustand der Harmonischen Balance betreffend des Verhaltens nach  $E_2$  mit der wachsenden Amplitude instabil wird.

Weiterhin existiert für das System kein einziger Winkel  $\gamma$  aus (7.40), bei dem sich mit der Erhöhung der Amplitude  $E_2$  die Pole von (7.41) links der  $\Im$ -Achse der komplexen Ebene verlagern würden. Für das in Bild 7/48 dargestellte Zustand der Harmonischen Balance ergibt sich mit  $\lambda=5.0$ ,  $\omega=0.508$  und  $\gamma=0.5$  die charakteristische Gleichung (7.43) wobei aus  $Z_{11}(j\omega)$  die Werte  $K_{NL}=0.38$  und  $\varphi=-1.435$  berechnet werden.

$$2.397s^4+2.709s^3+2.843s^2+0.699s+0.574=0 \quad (7.43)$$

Gleichung (7.43) liefert folgende Polverteilung:  $s_1=j0.508$ ,  $s_2=-j0.508$  und  $s_{3/4}=-0.565\pm j0.78$ . Die Erhöhung der Amplitude  $E_2$  führt dazu, daß der Wert  $K_{NL}$  um  $\Delta K_{NL}$  größer und Wert  $\varphi$  um  $\Delta\varphi$  kleiner wird. Mit  $\Delta K_{NL}=0.01$  und  $\Delta\varphi=0.01$  geht die Gleichung (7.43) in (7.44) über.

$$2.397s^4+2.709s^3+2.843s^2+0.647s+0.581=0 \quad (7.44)$$

Für (7.44) gilt:  $s_{1/2}=0.011\pm j0.503$  und  $s_{3/4}=-0.576\pm j0.792$ . Auch dieser Zustand der Harmonischen Balance ist instabil.

Die weitere Untersuchung des Systems zeigt, daß es stabile Zustände der Harmonischen Balance nur dann geben kann, wenn sich mit der Erhöhung von  $E_2$  der Wert von  $K_{NL}$  gleich bleibt und  $\varphi$  abnimmt. Entsprechend muß bei Abnahme von  $E_2$ . der Wert  $K_{NL}$  zunehmen oder konstant bleiben und der Winkel  $\varphi$  ebenfalls zunehmen Damit entsteht eine Dauerschwingung mit der höchstmöglichen Amplitude der zweiten Harmonischen für  $\omega=0.496$  d.h. für die Frequenz der Resonanzstelle (vgl. Bild 7/34 ). Diese Schwingung existiert nur dann, wenn die Beschreibungsfunktion  $N_{11}$  an dem Schnittpunkt mit  $Z_{11}$  für  $\omega=0.496$  das gewünschte Verhalten aufweist. Es ist in der Tat der Fall.

In Bild 7/49 ist der Verlauf der Funktion  $N_{11}(E_2)$  für  $E_0$ ,  $E_1$  und  $\varphi_2$  als Parameter dargestellt.

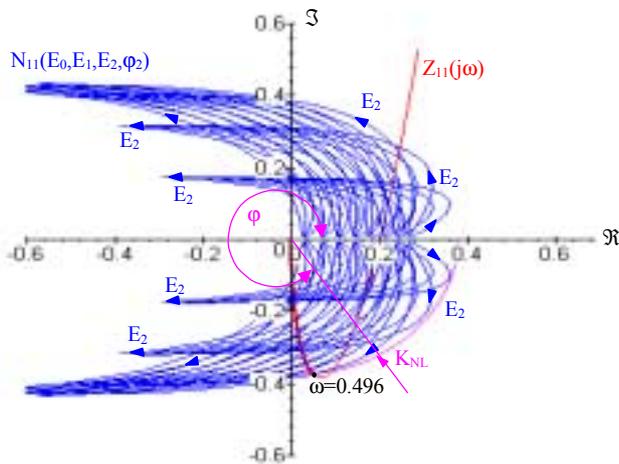


Bild 7/49 Prüfung der Bedingungen für einen stabilen Zustand der Harmonischen Balance für  $\omega = 0.496$  und  $\lambda = 5$ .

Mit dem hier vorliegenden Stabilitätsverhalten stellt sich für das System eine weitere Frage. Es kann sein, daß das System für die Frequenzen  $\omega < 0.496$  zwar die zweite Harmonische nicht begrenzt, für die Resonanzstellen der höheren Harmonischen jedoch ein ähnliches Verhalten zeigt wie für  $n=2$ . An diese Stelle soll nur noch die Prüfung für  $n=3$  (vgl. Bild 7/34) d.h. für  $\omega = 0.331$  durchgeführt werden. Zu diesem Zweck wird die Beschreibungsfunktion  $N_{11}$  mit der ersten und der dritten Harmonischen berechnet. Eine zu Bild 7/49 vergleichbare Prüfung liefert auch für  $\omega=0.331$  ( $n=3$ ) die Aussage, daß eine Dauerschwingung möglich ist. Die in Bild 7/50 dargestellten Verläufe bestätigen diese Aussagen.

Im Gegensatz zu [7] beweisen die obigen Untersuchungen, daß bei diesem System nicht von einer „period-doubling“-Bifurkation gesprochen werden kann, weil das System mit unterschiedlicher Frequenz bei gleichem Parameter  $\lambda$  schwingen kann. Die Schwingungsfrequenz ändert sich von  $\omega=1.0$  bei  $1.0 < \lambda < 3.5$  zu  $\omega=0.496$  oder  $0.331$  für  $\lambda=5.0$ . So kann nachgewiesen werden, daß bei Systemen mit einem vergleichbaren Verhalten keine „period-doubling“- sondern Bifurkationen mit Dauerschwingungen mit der Frequenz

des Maximums der Funktion  $|R_{11}(jn\omega)|/|R_{11}(j\omega)|$  mit  $n=2,3,\dots$  entstehen können.

In Bild 7/50 sind für  $\lambda = 5$  Simulationsverläufe dargestellt, die Schwingungen mit der Frequenz  $\omega=0.496$  für  $n=2$  und  $\omega=0.331$  für  $n=3$  zeigen.

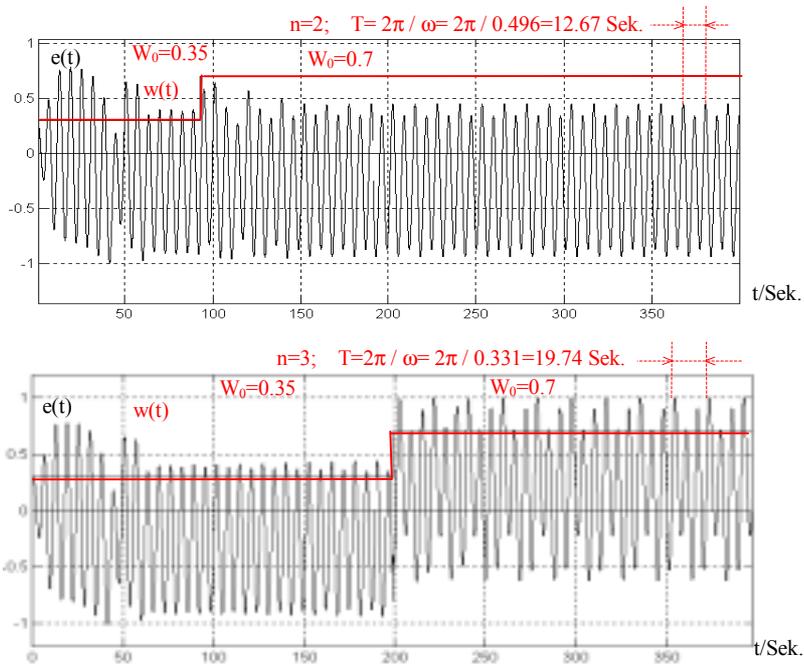


Bild 7/50 Verläufe  $w(t)$  und  $e(t)$  für  $\lambda = 5$

Für  $\lambda > 5$  und  $0 < \omega < 1.22$  kann auf Grund des kleiner werdenden Betrages von  $Z_{11}$ , die Bedingung  $U_0=0$  für die Stabilität der Zustände der Harmonischen Balance nicht mehr erfüllt bzw. die Zustände nicht mehr stabil werden. Weiterhin kann das System für  $\lambda > 5$  keinen stationären Zustand erzeugen, weil in diesem Fall der Wert  $U_0=0$  nur für  $E_0=0$  und  $E_0=0.848$  möglich ist (vgl. Bild 7/33). Für  $E_0=0.848$  ist das System für  $\omega \rightarrow \infty$  instabil und für  $E_0=0$  an der Stabilitätsgrenze. Da jedoch abhängig von  $\gamma$  aus (7.40) die Amplituden der

einzelnen Frequenzen  $0 < \omega < 1.22$  sowohl erhöht als auch reduziert (bedingt durch die momentane Lage der Pole des Systems) werden können, kann im System mit chaotischen Schwingungen gerechnet werden. Diese chaotischen Schwingungen sind abhängig von den Anfangsbedingungen und können den partiellen stabilen Schwingungsbereich verlassen. Die in Bild 7/51 und Bild 7/52 dargestellten Simulationsverläufe bestätigen diese Systemeigenschaften.

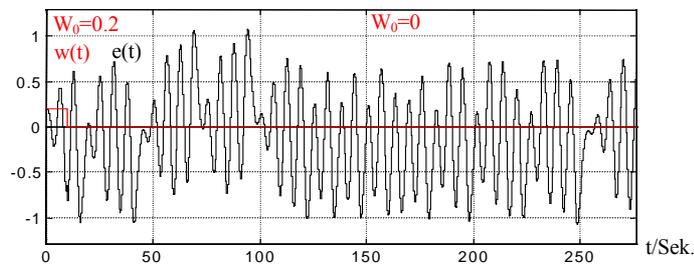


Bild 7/51 Chaotisches Verhalten des Systems für  $\lambda = 5.6$

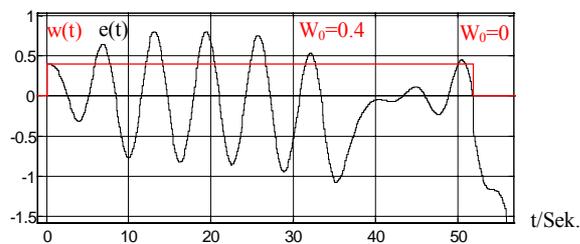


Bild 7/52 Chaotisches Verhalten des Systems für  $\lambda = 5.6$

## 8. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Untersuchungen für nichtlineare Systeme vorgestellt, welche neben der Analyse der Stabilität der Ruhelagen auch die Feststellung von Dauerschwingungen, chaotischen Bewegungen oder parameterabhängigen Bifurkationsphänomenen ermöglichen. Diese Arbeit schließt damit die Lücke in den für den Entwurf von nichtlinearen Systemen mit zeitinvarianten Parametern benötigten Werkzeugen, vor allem für Systeme mit festgelegter Struktur (z.B. Maschinenbauaufgaben) oder für die Berechnung der zulässigen Arbeitsbereiche in vorgegebenen Strukturen (z.B. Regelungsaufgaben mit PID-Regler), also dort wo z.B. die Hyperstabilitätskriterien nicht immer angewendet werden können (vgl. [24], [14], [3]).

Weiterhin ermöglicht die hier vorgestellte Methodik einen umfassenden Überblick über diese Systemeigenschaften, die nur durch die Untersuchung im Frequenzbereich sichtbar werden. Damit eröffnen sich neue Wege für die Unterdrückung und Beseitigung bzw. Gestaltung oder Ausprägung dieser Systemeigenschaften, welche z.B. Grenzzyklen oder chaotische Schwingungen hervorrufen.

Die Grundidee für die Ausarbeitung dieses Verfahrens liegt in der Erweiterung der Methode der Harmonischen Balance auf die Untersuchung bzw. auf das Verständnis der *transienten Vorgänge* in nichtlinearen Systemen. Ein weiterer Schritt zur Verbesserung der Fähigkeiten dieser jahrzehntelangen Methode wurde durch die Einführung einer solchen Beschreibungsfunktion erreicht, die mit einem Minimum an Harmonischen "auskommt", zugleich aber *alle komplexen Werte* liefert, die bei der Übertragung des Eingangssignals einer nicht-

linearen Funktion für eine beliebige Frequenz  $0 < \omega < \infty$  tatsächlich entstehen können.

Von diesen Voraussetzungen ausgehend wurde bei weiteren Untersuchungen bewiesen, daß bei der Analyse eines nichtlinearen Systems im Zustandsraum die gleichen Ergebnisse zu erwarten sind, wie bei der Untersuchung des Systemverhaltens in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen an den nichtlinearen Gliedern.

Mit den oben vorgestellten Schwerpunkten entwickelte sich das Hauptgewicht dieses Verfahrens zu einer rechnergestützten Methode für eine systematische Auswertung diverser Bedingungen im System, die in den einzelnen Kapiteln erläutert und mit einigen Beispielen verdeutlicht wurden. Damit konnten Untersuchungsziele in vielerlei Hinsicht formuliert und mit der in der Arbeit vorgestellten Vorgehensweise erreicht werden.

Zuerst konnte gezeigt werden, daß die Grundmethode der Harmonischen Balance mit nur einer Harmonischen für die Ermittlung der Beschreibungsfunktion  $N(E)$  im Prinzip nicht angewendet werden sollte, weil die Erfüllung der Bedingungen für ihre Anwendung (vgl. [3] oder Kapitel 1) eine zuverlässige Untersuchung nicht garantieren kann.

Um die Grundlagen für einen möglichst breiten Anwendungsbereich zu schaffen, wurde auf die Beschaffenheit der nichtlinearen Systeme eingegangen, die mit dieser Methode untersucht werden können. Das Bild 2/6 bzw. das Bild 2/7 zeigt die Ausgangsstruktur des Systems, welche für die Herleitung der einzelnen Bedingungen und Kriterien verwendet werden muß. Damit wurde eine große Klasse nichtlinearer Systeme mit zeitinvarianten Parametern und nichtlinearen Kennliniengliedern in die Untersuchung aufgenommen. Eine Zusammenstellung der in einigen Literaturquellen vorgestellten Methoden für die „Herausberechnung“ reiner Kennlinien aus den komplexen nichtlinearen dynamischen Systemen und der Umformung mehrdeutiger Kennlinien in eindeutige nichtlineare Funktionen liefert für die praktischen Aufgaben des Maschinenbaus und der Regelungstechnik eine ausreichende Untersuchungsplattform.

Um den Zusammenhang zwischen der Beschreibung des Systems im Zustandsraum und seiner Betrachtung im Frequenzbereich auszuarbeiten, wurden

die transienten Zeitvorgänge analysiert. Diese Betrachtung lieferte Erkenntnisse über die Übertragungseigenschaften der nichtlinearen Kennlinienglieder. Damit konnte eine erweiterte Linearisierungsgleichung für das System definiert werden (vgl. (3.32)). Die Auswirkung einer nichtlinearen Funktion auf das Verhalten des Systems wird für eine Frequenz  $0 < \omega < \infty$  durch folgende Parameter beschrieben:

- $K_{NL}$ : Verstärkungsfaktor
- $\varphi$ : relative Phasenverschiebung einer Harmonischen des Eingangssignals bezogen auf den Ausgangssignal einer nichtlinearen Funktion
- $\gamma$ : absolute Phasenverschiebung des Eingangssignals einer nichtlinearen Funktion

Die Erweiterung der harmonischen Linearisierung um den Winkel  $\gamma$  hat einen wichtigen Einfluß auf die Lösungen der linearisierten Differentialgleichung und ermöglicht damit die Einsicht in das tatsächliche Verhalten der nichtlinearen Systeme.

Mit den obigen Feststellungen konnte der Umgang mit der Beschreibungsfunktion neu analysiert werden, um die richtige Wahl der für die Berechnung der Beschreibungsfunktion notwendigen Harmonischen treffen zu können. Nach den obigen Analysen wurde eine vollständige Betrachtung der Zustände der Harmonischen Balance durchgeführt. Dabei wurde der Zustand der Harmonischen Balance im allgemeinen als ein transienter Vorgang im Zustandsraum gesehen. Durch diese Betrachtungsweise ist es möglich aus dem linearisierten Modell des nichtlinearen Systems einen Indikator für die möglichen Zustände der harmonischen Balance zu gewinnen. Es ist die Funktion (5.33). Mit ihr ist es letztlich möglich die Bedingungen (5.34) für die Amplituden der ersten Harmonischen einer beliebigen Frequenz  $\omega$  eines möglichen Zustandes der Harmonischen Balance aufzustellen. Weiterhin wurden weitere Bedingungen für die Überprüfung der Eigenschaften der nichtlinearen Glieder sowie der Übertragungsfunktionen aufgestellt. Sie sollen der Feststellung dienen, ob das nichtlineare System einen Zustand der Harmonischen Balance überhaupt annehmen kann.

Damit wurden die Voraussetzungen für die Überlegungen zu der Stabilitätsanalyse mit der Methode der Harmonischen Balance in Zusammenhang mit anderen Stabilitätskriterien geschaffen. Dabei wurde basierend auf den Stabilitätskriterien nach Ljapunow eine Stabilitätsdefinition formuliert, die für die Anwendung der Beschreibungsfunktion zugeschnitten ist. Der Grund dafür liegt darin, daß bei der Anwendung der Beschreibungsfunktion die Eingangssignale des Systems berücksichtigt werden müssen. Damit läßt sich zwischen den einzelnen Stabilitätsverhalten der nichtlinearen Systeme unterscheiden (stabiles System mit Dauerschwingungsverhalten, stabiles System mit chaotischem Verhalten).

Die eigentliche Herleitung der Stabilitätskriterien erfolgt durch die Aufstellung der Bedingungen für das Verhalten der Lösungen der charakteristischen Gleichung des Systems in Abhängigkeit von der Amplitudenänderung der Variablen, die für die Bildung der Beschreibungsfunktion ausgewählt wurden. Die Formulierung der Kriterien wurde ausschließlich für ein numerisches Verfahren vorgenommen, weil im allgemeinen die Beschreibungsfunktion mit der ersten und einer weiteren beliebigen Harmonischen definiert werden kann. Eine analytische Formulierung des Kriteriums hätte nur dann einen Sinn, wenn die Berechnung der Beschreibungsfunktion auch analytisch vorgenommen werden könnte. Dies ist allerdings nur dann der Fall, wenn die erste und zweite Harmonische verwendet werden.

In einigen praktischen Beispielen wurden schließlich viele Anregungen und Hinweise für den Umgang mit der Harmonischen Balance vorgestellt. Sie zeigen, daß diese Methode alleine durch die Anwendung der Beschreibungsfunktion mit zwei Harmonischen ein großes Anwendungsfeld öffnet und das Verständnis für das Verhalten nichtlinearer Systeme erweitert.

Nicht zuletzt ermöglicht die vorgestellte Betrachtung der nichtlinearen Systeme die Ausarbeitung neuer Syntheseverfahren für die Aufgaben der Regelungs- und Schwingungstechnik.

## ANHANG

### Verzeichnis wichtiger Formelzeichen und Abkürzungen

$b$	Begrenzung
$\Delta \mathbf{X}_{HB}$	Umgebung des Vektors des Zustandes der Harmonischen Balance
$e, \mathbf{e}$	Eingangsgröße, Vektor der Eingangsgrößen der nichtlinearen Funktionen
$E, \mathbf{E}$	Amplitude, Vektor der Amplituden einer Harmonischen des Eingangssignals einer Nichtlinearität
$\mathbf{F}$	Systemmatrix im s-Bereich
$f_{NL}(e)$	nichtlineare Funktion
$\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{e})$	Vektor der nichtlinearen Funktionen
$f_{\Re}, f_{\Im}$	Realteil, Imaginärteil einer Funktion
$\varphi$	relative Phasenverschiebung einer Harmonischen des Ausgangssignals bezogen auf ein Eingangssignal einer nichtlinearen Funktion
$\gamma$	absolute Phasenverschiebung des Eingangssignals einer nichtlinearen Funktion
$\mathbf{H}$	Systemmatrix im s-Bereich
$\Im$	Imaginärteil, Imaginärachse der komplexen Ebene
$K_{NL}, \mathbf{K}_{NL}$	Ersatzverstärkungsfaktor, Vektor der Ersatzverstärkungsfaktoren einer nichtlinearen Funktion oder einer Harmonischen
$\mathcal{L}$	Laplace-Transformation

$\mathcal{L}^{-1}$	inverse Laplace-Transformation
$\mathbf{N}, \mathbf{N}$	Beschreibungsfunktion, Vektor der Beschreibungsfunktionen einer nichtlinearen Funktion
$s, \mathbf{s}$	Laplace-Operand, ein Pol, Vektor der Pole in der s-Ebene
$\Re$	Realteil, Realachse der komplexen Ebene
$\mathbf{R}$	Rückführungsmatrix der Ausgangsgrößen der nichtlinearen Funktionen im s-Bereich
$u, \mathbf{u}$	Ausgangsgröße, Vektor der Ausgangsgrößen einer nichtlinearen Funktionen
$U, \mathbf{U}$	Amplitude, Vektor der Amplituden einer Harmonischen des Ausgangssignals einer nichtlinearen Funktion
$\mathbf{V}$	Eingangsmatrix im s-Bereich
$w, \mathbf{w}$	Führungsgröße, Vektor der Führungsgrößen
$x, \mathbf{x}$	Zustandsgrößen, Vektor der Zustandsgrößen
$\dot{\mathbf{x}}$	Zeitableitung $dx/dt$
$\mathbf{X}_{HB}$	Vektor des Zustandes der Harmonischen Balance
$y, \mathbf{y}$	Ausgangsgröße, Vektor der Ausgangsgrößen des Systems
$Z, \mathbf{Z}$	Harmonische Verstärkungsfaktor, Vektor der Harmonischen Verstärkungsfaktoren
$z_T$	tote Zone

## Literaturverzeichnis

### LITERATURQUELLEN MIT DIREKTBEZUG AUF DIE ARBEIT

- [1] ATHERTOR, D.P.: NONLINEAR CONTROL ENGINEERING. VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY, NEW YORK 1982
  
- [2] BRANDENBURG, G.: EINFLUß UND KOMPENSATION VON LOSE UND COULOMBSCHER REIBUNG BEI EINEM DREHZAHL- UND LAGEGE-REGELTEN, ELASTISCHEN ZWEIMASSENSYSTEM. AUTOMATISIERUNGSTECHNIK AT 37 (1989) 1 UND 3, R. OLDENBOURG VERLAG, MÜNCHEN, 1989.
  
- [3] FÖLLINGER, O.: NICHTLINEARE REGELUNGEN I UND II. OLDEN-BOURG VERLAG, MÜNCHEN, 1993.
  
- [4] FÖLLINGER, O.: LAPLACE- UND FOURIERTRANSFORMATION. HÜTHIG BUCH VERLAG GMBH, HEIDELBERG, 1993
  
- [5] FÖLLINGER, O.: REGELUNGSTECHNIK. HÜTHIG BUCH VERLAG GMBH, HEIDELBERG, 1994
  
- [6] GELB, A. UND VANDER VELDE, W.E.: MULTIPLE-INPUT DESCRIBING FUNCTIONS AND NONLINEAR SYSTEM DESIGN. MCGRAW-HILL, INC. NEW YORK 1968
  
- [7] HEYNS, L.J. UND KRÜGER, J.J.: A DESCRIBING-FUNCTION BASED CRITERION FOR A ROUTE TO CHAOS IN AUTONOMOUS NONLINEARSYSTEMS. INT. J. CONTROL, 1995, VOL.61, NO.1.

- [8] KACZOREK, T.: TEORIA UKLADOW REGULACJI AUTOMATYCZNEJ. CZ.II, ZESZYT 2, WPW VERLAG, WARSZAWA 1974
- [9] KACZOREK, T.: UKLAD ZASTEPCZY UKLADU NIELINIOWEGO O NIEJEDNOZNACZNEJ CHARAKTERYSTYCE. ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI, TOM XIX, ZESZYT 3, 1970
- [10] KACZOREK, T.: TEORIA STEROWANIA I SYSTEMOW, WPW-VERLAG, WARSZAWA 1993
- [11] POPOW, E.P. UND PALTOW, I.P.: NÄHERUNGSMETHODEN ZUR UNTERSUCHUNG NICHTLINEARER REGULUNGSSYSTEME. AKADE-MISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT, LEIPZIG 1963.
- [12] POSTLETHWAIT, I. UND MACFARLANE A.G.J.: A COMPLEX VARIABLE APPROACH TO THE ANALYSIS OF LINEAR MULTI-VARIABLE FEEDBACK SYSTEMS. SPRINGER-VERLAG, BERLIN HEIDELBERG NEW YORK 1979.
- [13] SCHÄFER, UWE: ENTWICKLUNG VON NICHTLINEAREN DREHZAHL- UND LAGEREGLUNGEN ZUR KOMPENSATION VON COULOMB-REIBUNG UND LOSE BEI EINEM ELEKTRISCH ANGETRIEBENEN, ELASTISCHEN ZWEIMASSENSYSTEM. DISSERTATION TU MÜNCHEN, 1993
- [14] SCHMITT, GABRIELE: DER EINSATZ VON MULTISEKTORENKRITERIEN ZUR STABILITÄTSANALYSE NICHTLINEARER MEHR-GRÖßENREGELKREISE. FORTSCHRITTBERICHTE. VDI REIHE 8 NR.661, VDI VERLAG, DÜSSELDORF 1997

- [15] SILJAK, D.D.: NONLINEAR SYSTEMS. JOHN WILEY & SONS, INC. NEW YORK 1969
  
- [16] SLOTINE J-J. E. UND WEIPING LI: APPLIED NONLINEAR CONTROL. PRENTICE HALL, ENGLEWOOD CLIFFS, NEW JERSEY 1991

**BEGLEITENDE LITERATURQUELLEN**

- [17] BÖHM R., BÖSCH M.: STABILITÄTSANALYSE VON FUZZY-MEHR-GRÖßENREGELUNGEN MIT HILFE DER HYPERSTABILITÄTSTHEORIE, AUTOMATISIERUNGSTECHNIK 43 (1995) 4, S181-186.
  
- [18] BRONSTEIN I.N., SEMENDJAJEW K.A.: TASCHENBUCH DER MATHEMATIK, BSB B.G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT, LEIPZIG 1979.
  
- [19] HOPFENGÄRTNER H.: STABILITÄTSUNTERSUCHUNG VON MEHR-SCHLEIFIGEN REGELKREISEN MIT ZWEI NICHTLINEARITÄTEN. REGELUNGSTECHNIK, HEFT5, 1977
  
- [20] KOCH, D.: UNTERSUCHUNG DES EINFLUSSES VON COLOMBSCHER REIBUNG AUF DAS VERHALTEN EINES ELASTISCHEN ZWEIMASSENSYSTEMS MIT DREHZAHL- UND WINKELREGELUNG. DIPLOMARBEIT TU MÜNCHEN LEHRSTUHL FÜR ELEKTRISCHE ANTRIEBSTECHNIK, 1984.

- [21] LICHTENBERG, A.J., LIEBERMANN M.A.: REGULAR AND STOCHASTIC MOTION, SPRINGER-VERLAG, BERLIN HEIDELBERG NEW YORK 1983.
- [22] MOHLER, R.R.: NONLINEAR SYSTEMS. PRENTICE HALL, ENGLEWOOD CLIFFS, NEW JERSEY 1991
- [23] PETERSMANN NORBERT: SUBSTRUKTURTECHNIK UND KONDENSATION BEI DER SCHWINGUNGSANALYSE, VORTSCHRITT-BERICHTS VDI, REIHE 11, NR. 76 VDI-VERLAG, DÜSSELDORF 1986.
- [24] POPOV, V.M.: HYPERSTABILITÄT OF CONTROL SYSTEM, SPRINGER-VERLAG, BERLIN HEIDELBERG NEW YORK 1973.
- [25] QINGHUA ZHENG: EINE UNTERSUCHUNG NICHTLINEARER AUTONOMER SCHWINGUNGEN IM FREQUENZBEREICH. DISSERTATION, UNIVERSITÄT HAMBURG, 1987.
- [26] STELTER, P.: NICHTLINEARE SCHWINGUNGEN REIBUNGSERREGTER STRUKTUREN. REIHE 11: SCHWINGUNGSTECHNIK NR. 137. VDI VERLAG, DÜSSELDORF, 1990. TU MÜNCHEN 65B 276 11,137
- [27] SCHWATZ, H.: MEHRFACHREGELUNGEN BAND 1, SPRINGER-VERLAG, BERLIN HEIDELBERG NEW YORK 1967.
- [28] TESI A., ABED E.A., GENESIO R. UND WANG H.O.: HARMONIC BALANCE ANALYSIS OF PERIOD-DOUBLING BIFURCATION WITH IMPLICATIONS FOR CONTROL OF NONLINEAR DYNAMICS. AUTOMATICA, SEPT. 1996.

- [29] VDI-GES. ENTWICKLUNG, KONSTRUKTION, VETRIEB:  
SELBST-ERREGTE SCHWIGUNGEN. TAGUNG FULDA APRIL  
1992,VDI-VERLAG 1992
  
- [30] WAGENPFEIL, A.: UNTERSUCHUNG DER AUSWIRKUNG  
EINER LOSE AUF DIE GÜTE DER DREHZAHLREGELUNG  
EINES ELASTISCHEN ZWEIMASSENSYSTEMS. DIPLO-  
MARBEIT TU MÜNCHEN LEHRSTUHL FÜR ELEKTRISCHE  
ANTRIEBSTECHNIK, 1985.
  
- [31] ZHONGYUAN LI: INNERE RESONANZEN IN NICHTLINEAREN  
SCHWINGUNGSFÄHIGEN SYSTEMEN. DISSERTATION,  
UNIVERSITÄT STUTTGART, 1990.