

Ein Werkstoffmodell für eine Aluminium- Druckgusslegierung unter statischen und dynamischen Beanspruchungen

Jan Jansen

Inhalt

1	Einleitung	5
1.1	Anwendungsgebiete von Werkstoffmodellen für Aluminium-Druckgusslegierungen	7
1.2	Anforderungen an das zu entwickelnde Werkstoffmodell und Vorgehensweise bei der Modellentwicklung..	8
1.3	Defizite bestehender Methoden.....	12
1.4	Ziele und Aufbau der Arbeit	16
2	Theoretische Grundlagen und Stand des Wissens... ..	19
2.1	Kontinuumsmechanische Grundlagen.....	19
2.1.1	Kinematische und statische Beschreibung eines Kontinuums.....	19
2.1.2	Physikalische Grundgleichungen	24
2.2	Kontinuumsmechanische Beschreibung von Materialeigenschaften	27
2.2.1	Linear-elastisches Werkstoffverhalten	30
2.2.2	Plastisches Werkstoffverhalten	31
2.2.3	Schädigung und Versagen	36
2.3	Numerische Lösungsverfahren	44
2.3.1	Finite Element Methode und Zeitintegration	44
2.3.2	Lösungsmethoden für Plastizitätsmodelle.....	52
2.4	Experimentelle Methoden der Werkstoffcharakterisierung.....	56
2.4.1	Varianten des Kreuzzugversuchs.....	56
2.4.2	Varianten des Schubversuchs.....	57
3	Zielsetzung.....	59
3.1	Diskussion des Standes des Wissens.....	59
3.1.1	Elastisch-plastisches Werkstoffverhalten.....	59
3.1.2	Schädigung und Versagen	60
3.2	Bewertung hinsichtlich der Aufgabestellung	64
4	Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens	67
4.1	Werkstoffcharakterisierung.....	67
4.1.1	Versuchsmethodik und Versuchseinrichtungen	69
4.1.2	Versuchsdurchführung und Ergebnisse	86
4.2	Mathematische Formulierung	94
4.3	Implementierung in ein FEM-Berechnungsprogramm.....	97
4.3.1	Zu lösende Grundgleichungen	98

4.3.2	Bewertung verschiedener Formulierungen der Eigenwerte und Lösungsalgorithmen	100
4.4	Verifikation und Validierung des elastisch-plastischen Werkstoffmodells	106
4.4.1	Verifikation und Bewertung der Implementierung	106
4.4.2	Validierung der Modellierung	112
5	Versagensmodellierung	119
5.1	Werkstoffcharakterisierung	119
5.1.1	Versuchsmethodik und Versuchseinrichtungen	121
5.1.2	Versuchsdurchführung und Ergebnisse	134
5.1.3	Diskussion der Versuchsergebnisse	145
5.2	Mathematische Formulierung	146
5.3	Implementierung in ein FEM-Programm	147
5.3.1	Konzept zur Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers	148
5.3.2	Realisierung innerhalb einer Materialsubroutine eines parallel mit verteiltem Speicher arbeitenden Berechnungsprogramms	150
5.4	Validierung der Modellierung	154
6	Anwendung des Werkstoffmodells	159
6.1	Versuchsdurchführung und Vergleich mit der Simulation	159
6.2	Bewertung der Prognosegüte des Werkstoffmodells	177
7	Zusammenfassung und Ausblick	179
7.1	Zusammenfassung	179
7.2	Ausblick	182
8	Literatur	184
9	Anhang	194
9.1	Modellierung der Lageabhängigkeit der Eigenschaften infolge makroskopischer Defekte [62]	194
9.1.1	Einleitung	194
9.1.2	Modellierungskonzept	195
9.1.3	Realisierung des Konzepts	196
9.1.4	Anwendung	200
9.1.5	Zusammenfassung und Ausblick	202
9.2	Approximation der Dehnratenabhängigkeit	204
9.3	Kraft-Zeit-Zusammenhänge des Komponentenversuchs und der FEM-Simulationen des Versuchs	207

9.4	Herleitungen der Auswertungsalgorithmen.....	210
9.4.1	Berechnung der Spannung bei einachsiger elastisch- plastischer Belastung	210
9.4.2	Berechnung der Spannung bei zweiachsiger elastisch- plastischer Belastung	210

1 Einleitung

Aluminium-Legierungen (Al-Legierungen) stellen gemessen an der Verarbeitungsmenge und Vielfalt der Einsatzgebiete die heute am weitest verbreitete Leichtbauwerkstoffklasse dar. Neben der Verwendung in der Verpackungs- und Bauindustrie sind Aluminiumbauteile aus dem Verkehrs- und Transportwesen nicht mehr wegzudenken. Abbildung 1-1 zeigt die Bandbreite der Einsatzgebiete anhand einiger Erzeugnisse aus dieser Werkstoffklasse.



Abbildung 1-1: Beispiele für die vielfältigen Einsatzgebiete von Al-Legierungen. Sie spiegeln die besonderen Eigenschaften dieser Werkstoffklasse wie die hohe Festigkeit, das geringe spezifische Gewicht und die gute Verarbeitbarkeit wider.

Al-Legierungen zeichnen sich durch eine ausgeprägte Korrosionsbeständigkeit und gute Verarbeitbarkeit aus. Das geringe spezifische Gewicht und die sehr guten, in weitem Rahmen steuerbaren Festigkeitseigenschaften tragen maßgeblich zum reduzierten Gewicht von Luft-, Raum-, Schienen- und Straßenfahrzeugen bei. Als Folge der verbesserten Gießprozesstechnologie nehmen Gussbauteile eine immer wichtiger werdende Rolle unter den Aluminiumbauteilen ein. So werden heutzutage von vielen Automobilherstellern Al-Gusskomponenten als Strukturbauteile in Kraftfahrzeug-Karosserien eingesetzt, vgl. beispielsweise [34], [61], [39] und [35]. Exemplarisch zeigt Abbildung 1-2 die Karosserierahmenstruktur eines Kompaktklasse-Kraftfahrzeugs [26].

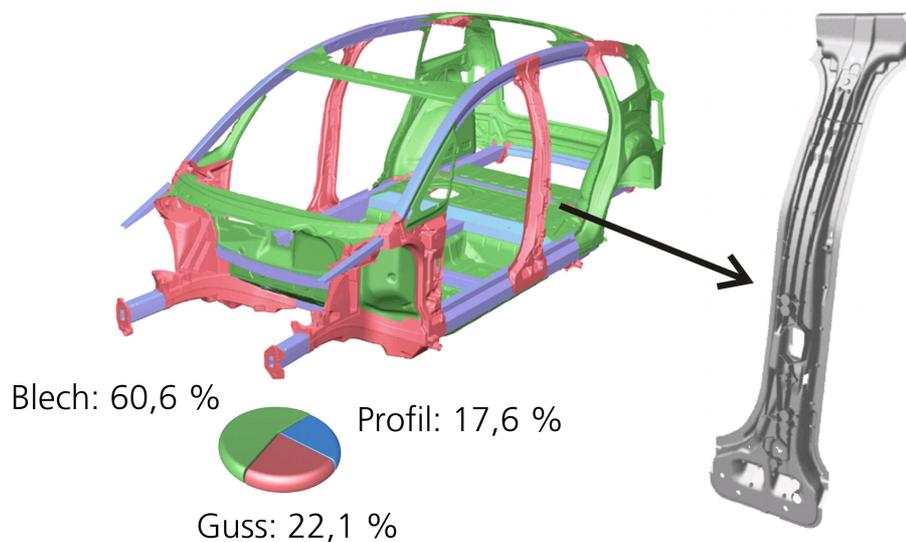


Abbildung 1-2: Die Aluminium Karosserierahmenstruktur eines Kompaktklasse-Kraftfahrzeugs [26]; die Abbildung zeigt links den Aufbau und Anteil verschiedener Aluminiumklassen an der Struktur und rechts eine Detailansicht der B-Säule zur Verdeutlichung der hohen geometrischen Komplexität.

Bei dieser selbsttragenden Karosseriestruktur werden Al-Gussbauteile nicht nur als Knoten, also Verbindungskomponenten, sondern auch als große, multifunktionale Strukturbauteile eingesetzt. Im rechten Teil der Abbildung ist die B-Säule des Fahrzeugs vergrößert dargestellt. Hier werden die hohe geometrische Komplexität und die damit verbundene hohe Funktionsintegration deutlich. Da derartige Bauteile in nur einem Fertigungsschritt (teilweise mit anschließender Wärmebehandlung) hergestellt werden können, sind sie aus produktionstechnischer Sicht besonders interessant. Insgesamt führt der Einsatz von Al-Gussbauteilen in hohem Maße zu reduziertem Fahrzeuggewicht und damit zu verringertem Treibstoffverbrauch, weniger Schadstoffemissionen und zu verbessertem Fahrverhalten. Als Folge ihres gestiegenen Anteils, des Einsatzes an Schlüsselpositionen und der gewachsenen Bauteilgröße tragen Al-Druckgussbauteile entscheidend zu dem gesamten strukturellen Verhalten der Automobile bei.

Die in dieser Arbeit betrachtete Al-Druckgusslegierung GD- AlSi10Mg T6 zeichnet sich durch eine gute Steuerbarkeit der mechanischen Eigenschaften mithilfe verschiedener Wärmebehandlungen aus [119]. Sie weist im Gegensatz zu anderen verbreiteten Gusslegierungen wie beispielsweise AlSiCu3 eine höhere Duktilität auf [4] und ist daher für crashrelevante Struktur- und Fahrwerksteile eine besonders geeignete Werkstoffwahl.

1.1 Anwendungsgebiete von Werkstoffmodellen für Aluminium-Druckgusslegierungen

Eine der wichtigsten strukturellen Eigenschaften von Fahrzeugkarosserien ist die Crashesicherheit. Nationale und internationale Gesetze und Richtlinien, deren Anzahl und Anforderungen immer weiter steigen, sowie interne Vorgaben der Automobilhersteller müssen eingehalten werden. Gleichzeitig steigt die Produktvielfalt, die Entwicklungskosten und Entwicklungszeiten hingegen müssen sinken. Diese gegensätzlichen Ziele können nur mit massivem Einsatz virtueller Hilfsmittel bei der Fahrzeugentwicklung erreicht werden. Die Crashsimulation mithilfe der Finiten-Elemente-Methode (FEM) ist bereits eine bewährte Methode in der Auslegung von Fahrzeugkarosserien. Um die erforderliche Anzahl von Versuchen an realen Fahrzeugen und Bauteilen weiter zu verringern, muss die Prognosefähigkeit der Crashsimulation verbessert werden. Dazu ist einerseits die geometrische Abbildungsgenauigkeit der Fahrzeuge zu erhöhen, d. h., die eingesetzten FE-Netze sind zu verfeinern, andererseits ist das Materialverhalten exakter abzubilden: Die Werkstoffmodelle – die mathematische Beschreibung des Werkstoffverhaltens – müssen genauer werden.

Ein weiteres Anwendungsfeld für ein Werkstoffmodell ist die Simulation von Umformvorgängen. In Analogie zur Karosserieauslegung können dort mithilfe der numerischen Simulation erhebliche Zeit- und Kostenersparnisse bei der Prozessentwicklung erzielt werden. Auch hier hängt der Erfolg der Simulationstechniken von der Prognosefähigkeit ab, die wiederum hauptsächlich durch den Einsatz genauerer Materialmodelle erhöht werden kann.

Bei Hochgeschwindigkeits-Impaktvorgängen, wie beispielsweise beim Aufschlag von Vögeln auf Flugzeuge oder von Partikeln auf Satelliten bzw. Weltraumfahrzeuge, steht die Frage nach der Widerstandsfähigkeit der Strukturen im Mittelpunkt. Solche Szenarien können aufgrund der hohen Impaktgeschwindigkeiten und Massen oftmals nicht experimentell nachgebildet werden. Daher verhilft hier die Simulation nicht nur zu den genannten Zeit- und Kostenvorteilen, sondern ermöglicht überhaupt erst eine Beurteilung der strukturellen Reaktionen bei diesen Vorgängen.

1.2 Anforderungen an das zu entwickelnde Werkstoffmodell und Vorgehensweise bei der Modellentwicklung

Crashsicherheit von Fahrzeugen wird durch gezielte Energieabsorption im Belastungsfall erreicht. Abbildung 1-3 verdeutlicht die Funktionsweise der Karosserie bei einer Crashbelastung: Der vordere Teil der Karosserie dissipiert durch plastische Verformung die kinetische Energie des Fahrzeugs, während sich die Karosserieteile in Fahrgastnähe kaum verformen. Dadurch wird die Sicherheit der Fahrgäste gegenüber äußeren Verletzungen durch Bauteile einerseits und inneren Verletzungen infolge hoher Trägheitskräfte andererseits gewährleistet.

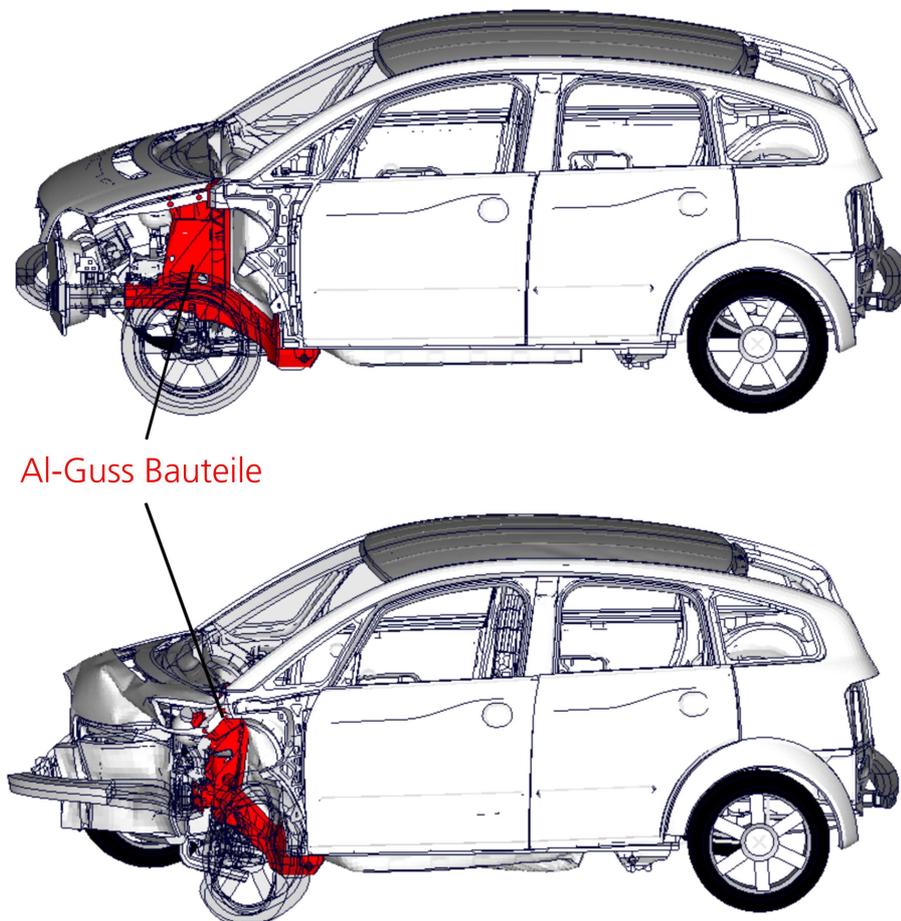


Abbildung 1-3: FEM-Simulation eines seitlich versetzten Frontalcrashes eines Kompaktklasse-Kraftfahrzeugs [26]. Der Vergleich der unbelasteten Karosserie (oben) mit der nach der Belastung (unten) verdeutlicht die große Deformation des Vorderwagens und die geringe Verformung der Fahrgastzelle. Rot gekennzeichnet sind der Längsträger 2 und der Federbeintopf als Beispiele für große Verformungen von Al-Druckgussbauteilen.

Bei der Auslegung der Crashfunktionalität von Fahrzeugen müssen also die Werkstoffeigenschaften bei hohen plastischen Verformungen bis zum Versagen berücksichtigt werden. Weiterhin zeigt Abbildung 1-3 anschaulich, dass die Bauteile komplexen, mehrachsigen Beanspruchungen ausgesetzt sind. Dies trifft insbesondere auf dickwandige Gussbauteile zu, die i. d. R. geometrische Unstetigkeiten wie Verrippungen, Stege oder Auswerferpunkte aufweisen. Bei einer Crashbelastung ist nicht nur die Deformation der Bauteile groß; ebenso ist die Deformationsgeschwindigkeit hoch. Weiterhin variiert sie stark: Belastungsgeschwindigkeiten von quasistatisch bis zu Dehnraten¹ im Bereich von 500 1/s treten typischerweise während eines Crashlastfalls an verschiedenen Stellen des Fahrzeugs auf.

Als ein Beispiel aus der Umformsimulation kann das Stanznieten, das als innovatives Verfahren zum Fügen von Al-Gussbauteilen eingesetzt wird, herangezogen werden. Abbildung 1-4 zeigt einen Schnitt durch eine Stanznietverbindung [50].

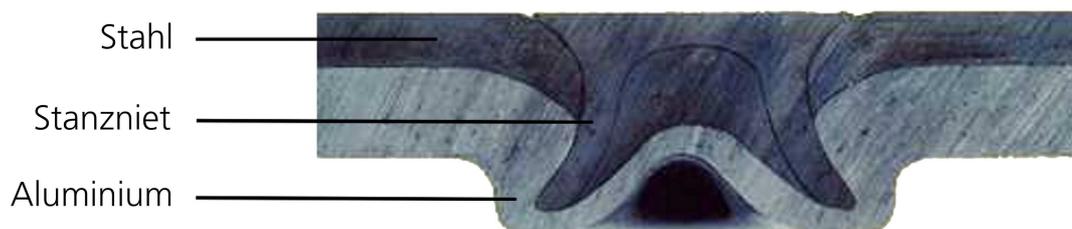


Abbildung 1-4: Schnitt durch eine Stanznietverbindung von Stahl und Aluminium. Die große Verformung aller Verbindungspartner und das gezielte Versagen des oberen Bleches sind sichtbar [50].

Die Verbindung wird hergestellt, indem ein Niet mit hoher Geschwindigkeit in eine Blechpaarung gestanzt wird. Dabei treten extreme Verformungen an der Verbindungsstelle auf; darüber hinaus wird das obere Blech gezielt vom Niet durchgeschnitten. Um mittels Simulation des Stanznietprozesses die äußere Form der Verbindung und den Werkstoffzustand, also die Eigenspannungen und die Dehnungen, der eingesetzten Teile vorhersagen zu können, muss das elastisch-plastische

¹ Korrekterweise bezeichnet der Begriff „Dehnrates“ die Rate einer relativen Verlängerung, also einer positiven Normalverzerrung. Da sich im Sprachgebrauch der Begriff „Dehnung“ für beliebige Verzerrungen eingebürgert hat, wird er im Folgenden synonym für den Begriff „Verzerrung“ verwendet.

Verhalten aller Verbindungspartner und das Versagen des oberen Blechs bei dynamischer Beanspruchung präzise abgebildet werden.

Auch bei Hochgeschwindigkeits-Impaktvorgängen wird in der Regel das Material an den Versagensorten und in deren Nachbarschaft über den gesamten bzw. über einen sehr weiten elastisch-plastischen Bereich beansprucht. Durch konstruktive Überlagerung der die Bauteile durchlaufenden Beanspruchungswellen treten mehrachsige Spannungszustände auf und führen zum Versagen, wie beispielsweise bei der Spallation [117].

Wie anhand obiger Fallbeispiele aufgezeigt, muss ein Werkstoffmodell, das zur Simulation von Crashvorgängen, Umformprozessen oder Hochgeschwindigkeits-Impaktszenarien eingesetzt werden soll,

- das elastisch-plastische Verhalten und
- das Versagen

bei allgemeinen Beanspruchungszuständen, also bei ein- und mehrachsigen Spannungszuständen, und über einen weiten Dehnratenbereich beschreiben.

Mathematisch kann das oben beschriebene Werkstoffverhalten unter Voraussetzung der strukturellen Stabilität mit einer mechanischen Zustandsgleichung (Gl. 1-1) beschrieben werden, die einen funktionalen Zusammenhang zwischen den dynamischen Variablen (Spannungen σ_{ij}), den kinematischen Variablen (Dehnungen ϵ_{ij} und Dehnraten $\dot{\epsilon}_{ij}$) und den thermischen Variablen (Temperatur T) herstellt (vgl. [73], [18] oder [110]).

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, T) = 0 \qquad \text{Gl. 1-1}$$

Eine erste Konkretisierung und Veranschaulichung dieser allgemeinen Formulierung erfolgt für temperaturunabhängige Vorgänge in Abbildung 1-5. Dort sind das für metallische Werkstoffe typische elastisch-plastische Verhalten und Versagen bei einachsiger Beanspruchung (links) sowie die Form der Fließ- und Versagensfläche für allgemeine, d.h. ein- und mehrachsige Zustände (rechts), skizziert.

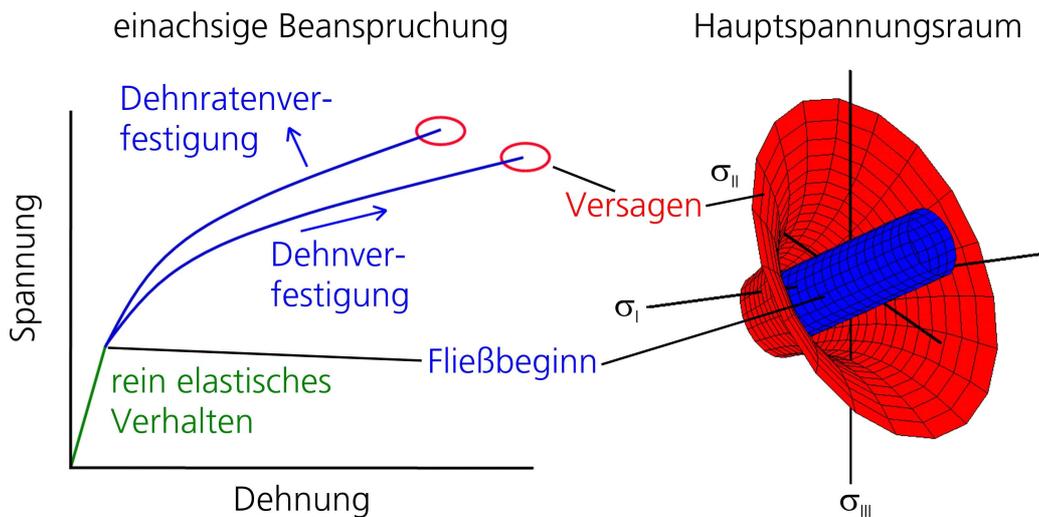


Abbildung 1-5: Schematische Darstellung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens und Versagens von metallischen Werkstoffen. Links ist der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang bei einachsiger Spannungsbeanspruchung dargestellt, rechts sind die Fließfläche (blau) und Versagensfläche (rot) im Hauptspannungsraum abgebildet. Die Notwendigkeit der Untersuchung verschiedener Spannungszustände über den Einachsigen hinaus wird deutlich.

Fließbeginn und Versagensort sind bei einachsiger Beanspruchung Punkte, für allgemeine Beanspruchungen Flächen mit charakteristischen Formen. Der blau gezeichnete Hohlzylinder entspricht der klassischen Fließfläche nach VON MISES (vgl. [84] und Gl. 2-44). Die rote Fläche repräsentiert ein klassisches Versagensmodell für duktile metallische Werkstoffe unter der Annahme des VON MISES Fließgesetzes mit assoziiertem Fließen und einer isotropen Dehnungsverfestigung (vgl. [74], [81] oder [65] und beispielsweise Gl. 2-49).

Abbildung 1-5 verdeutlicht, dass einachsige Versuche bzw. Kennwerte, die aus solchen Versuchen abgeleitet werden und für alle relevanten Werkstoffe standardisiert ermittelt werden (vgl. [36], [4]), nicht ausreichen, um das Werkstoffverhalten gesamtheitlich wiederzugeben, wie es für die oben genannten Anwendungsbeispiele erforderlich ist. Vielmehr muss das Werkstoffverhalten unter allgemeinen, also ein- und mehrachsigen Beanspruchungen untersucht und abgebildet werden.

Bei der Modellentwicklung bildet den fundamentalen Schritt eine möglichst umfassende Werkstoffcharakterisierung, wozu in gewissem Rahmen Berechnungsmethoden aus den Werkstoffwissenschaften herangezogen werden können (vgl. [57], [20] oder [51]). Bei komplexeren Legierungen kann das Zusammenspiel verschiedenster mikro- und mesoskopischer Effekte in der Regel nicht mehr analytisch nachvollzogen

werden. Es bietet sich dann eine direkte Ermittlung der makroskopischen Eigenschaften mithilfe der mechanischen Werkstoffprüfung an. Auf Basis der Werkstoffcharakterisierung muss dann eine mathematische Formulierung des Verhaltens des abzubildenden Werkstoffs und eine Implementierung in ein FEM-Berechnungsprogramm erfolgen.

Die drei Schritte Charakterisierung, mathematische Formulierung und Implementierung können durchaus komplex und umfangreich sein. Daher sind eine Verifizierung der Implementierung und eine Validierung des Modells unverzichtbar [103].

Im Zuge der Aufstellung eines Werkstoffmodells sind also die folgenden Schritte durchzuführen²:

- Werkstoffcharakterisierung
- mathematische Formulierung des Werkstoffverhaltens
- Implementierung in ein FEM-Berechnungsprogramm
- Verifizierung der Implementierung und Validierung des Modells

1.3 Defizite bestehender Methoden

Die Methoden, die bei der oben beschriebenen Modellentwicklung eingesetzt werden müssen, sind – obgleich ihre ständige Weiterentwicklung Gegenstand aktueller und darauf fokussierter Forschungsvorhaben ist – nur teilweise verfügbar oder verbesserungswürdig.

So wird der Kreuzzugversuch, der in dieser Arbeit zur Bestimmung der Fließfläche eingesetzt werden soll, mit verschiedenen Varianten der Probengeometrie durchgeführt (vgl. 2.4.1), die einerseits unterschiedlich

¹Eine „Trial-and-Error“ Vorgehensweise, d.h. ein iterativer Prozess aus Auswahl eines bekannten Modells und anschließende Verifizierung mit verschiedenen Anwendungen, ist zwar eine prinzipiell gangbare Alternative, allerdings eine mit einigen schwerwiegenden Nachteilen verbundene. So ist beispielsweise die Auswahl aussagekräftiger Anwendungen problematisch, und der Implementierungs- und Verifikationsaufwand wächst mit der Anzahl der notwendigen Iterationen.

homogene Spannungsfelder im Messbereich der Probe hervorrufen, andererseits unterschiedlich große Beanspruchungen in der Probenmitte erlauben. Es muss also für die vorliegende Messaufgabe die am Besten geeignete Probengeometrie bestimmt werden.

Zuverlässige Aussagen zum Versagen unter bestimmten Beanspruchungszuständen setzen zwingend voraus, dass die Probe an den Stellen versagt, wo die erwünschte Beanspruchung tatsächlich vorliegt. Zur Untersuchung von Werkstoffverhalten unter Schubbeanspruchung mit flachen Proben werden verbreitet Scherversuche wie der ARCAN-, IOSIPESCU- ODER MIYAUCHI-Versuch (vgl. 2.4.2) eingesetzt. Sie sind konzeptionell eng verwandt, sodass für diese Gruppe von Versuchen stellvertretend der ARCAN-Schubversuch betrachtet werden kann. Eine angerissene Probe bei diesem Versuch ist in Abbildung 1-6 dargestellt.

Arcan-Schubversuch

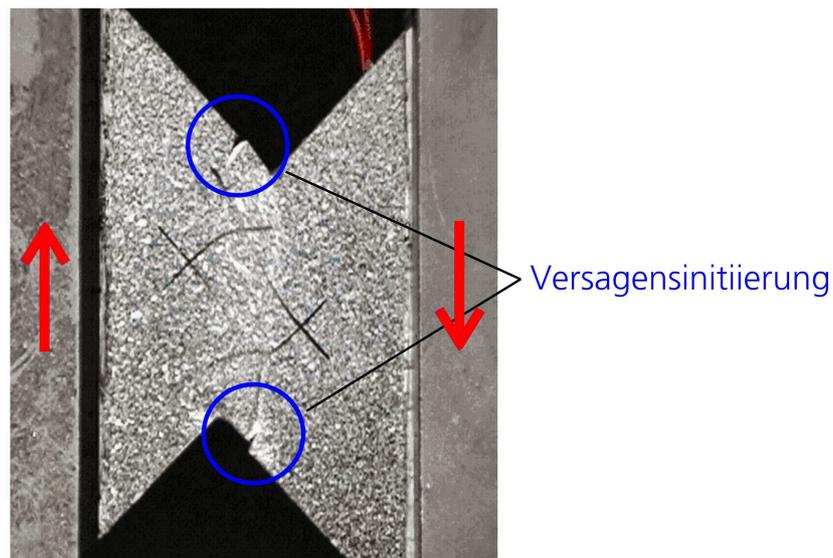


Abbildung 1-6: Versagensinitiierung bei einem Arcan-Schubversuch. Das Versagen beginnt am Probenrand, also unter einachsiger Beanspruchung. Der Versuch ist daher nicht geeignet, das Werkstoffversagen unter Schub zu untersuchen.

Die Probe reißt bei diesem Versuch vom Probenrand her ein; das Werkstoffversagen beginnt folglich bei einem einachsigen Spannungszustand. Der Schluss auf die vom Material ertragbare Schubspannung ist bei diesem Versuch unzulässig. Daher ist die Entwicklung einer neuen Versuchstechnik zur korrekten Charakterisierung des Werkstoffversagens unter Schubbeanspruchung erforderlich.

Nicht nur die experimentellen Verfahren, auch die numerischen Lösungsmethoden bieten Raum für Optimierungen im Detail und für grundlegende Verbesserungen. So besteht bei der exakten Prognose der Verläufe der Spannungs- und Dehnungsfelder an Orten hoher Gradienten mittels der FEM und expliziter Zeitintegration (vgl. Kapitel 2.3.1.2) folgendes konzeptionelles Problem: Die Genauigkeit (Dispersion, vgl. [92]) und Effizienz erfordert eine möglichst homogene, d.h. mit möglichst gleicher Elementgröße erzeugten, Vernetzung der Modelle. Ein Beispiel für ein solches homogen und sehr fein vernetztes Bauteil (mehr als 200000 Volumenelemente) zeigt Abbildung 1-7. In der Abbildung oben ist das Bauteil in der Gesamtansicht dargestellt. Unten sind die Bereiche um drei unterschiedlich große Löcher in dem Bauteil vergrößert abgebildet.

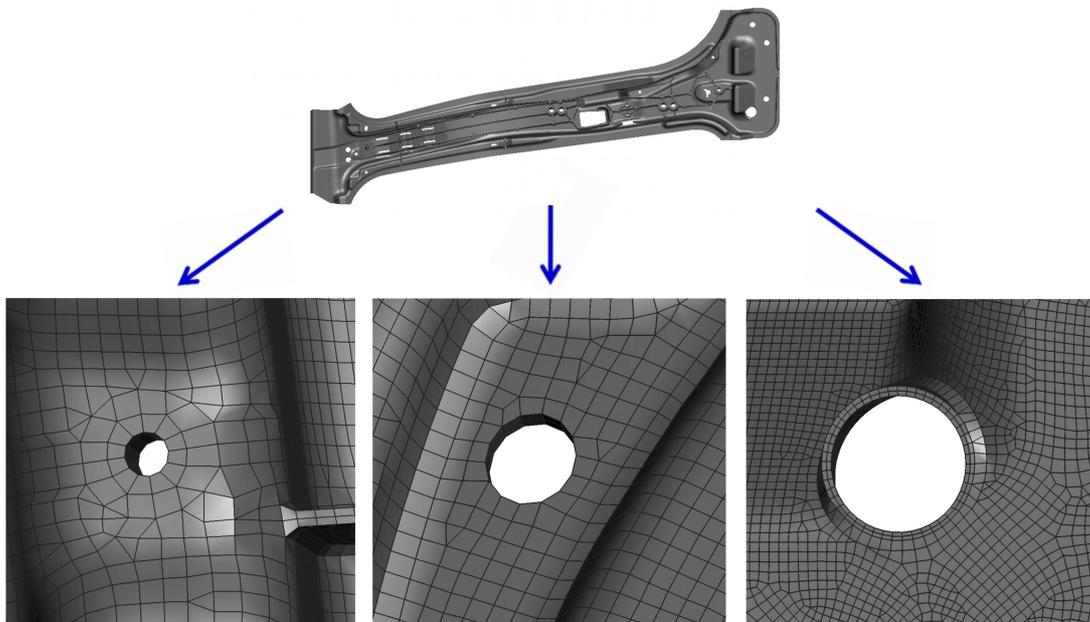


Abbildung 1-7: Sehr fein vernetztes FE-Modell eines Bauteils. Bei Verwendung eines FEM-Berechnungsprogramms mit expliziter Zeitintegration sind aus Genauigkeits- und Effizienzgründen möglichst homogene Elementgrößen erforderlich. Die Ausschnitte verdeutlichen, dass bei einer solchen Vernetzung an verschiedenen Stellen eines Bauteils die Spannungs- und Dehnungsfelder an geometrischen Kerben mit unterschiedlichen Diskretisierungsfehlern abgebildet werden.

Es wird deutlich, dass die bei vergleichbarer Beanspruchung auftretenden Spannungs- und Dehnungsfelder an den als Kerben wirkenden Löchern unterschiedlich fein aufgelöst werden. Das kleine Loch, in der Abbildung links unten, wird deutlich gröber aufgelöst, als das Große in der Abbildung rechts unten. Die Verwendung eines konvergierten Netzes, das auch die kleinste Kerbe im Bauteil hinreichend auflöst, würde den

Zeitschritt der Berechnung sehr stark senken. Daneben würde die Anzahl der Elemente überproportional ansteigen, da aus Genauigkeitsgründen möglichst homogene Vernetzungen im gesamten Berechnungsmodell erforderlich sind. Für komplexe Bauteile mit kleinen geometrischen Kerben wären die dann sehr kleinen Zeitschritte und großen Elementanzahlen nicht handhabbar. Selbst bei hochfein vernetzten Bauteilen wie in Abbildung 1-7 dargestellt, liegt keine konvergierte Vernetzung an allen Stellen der Bauteile vor.

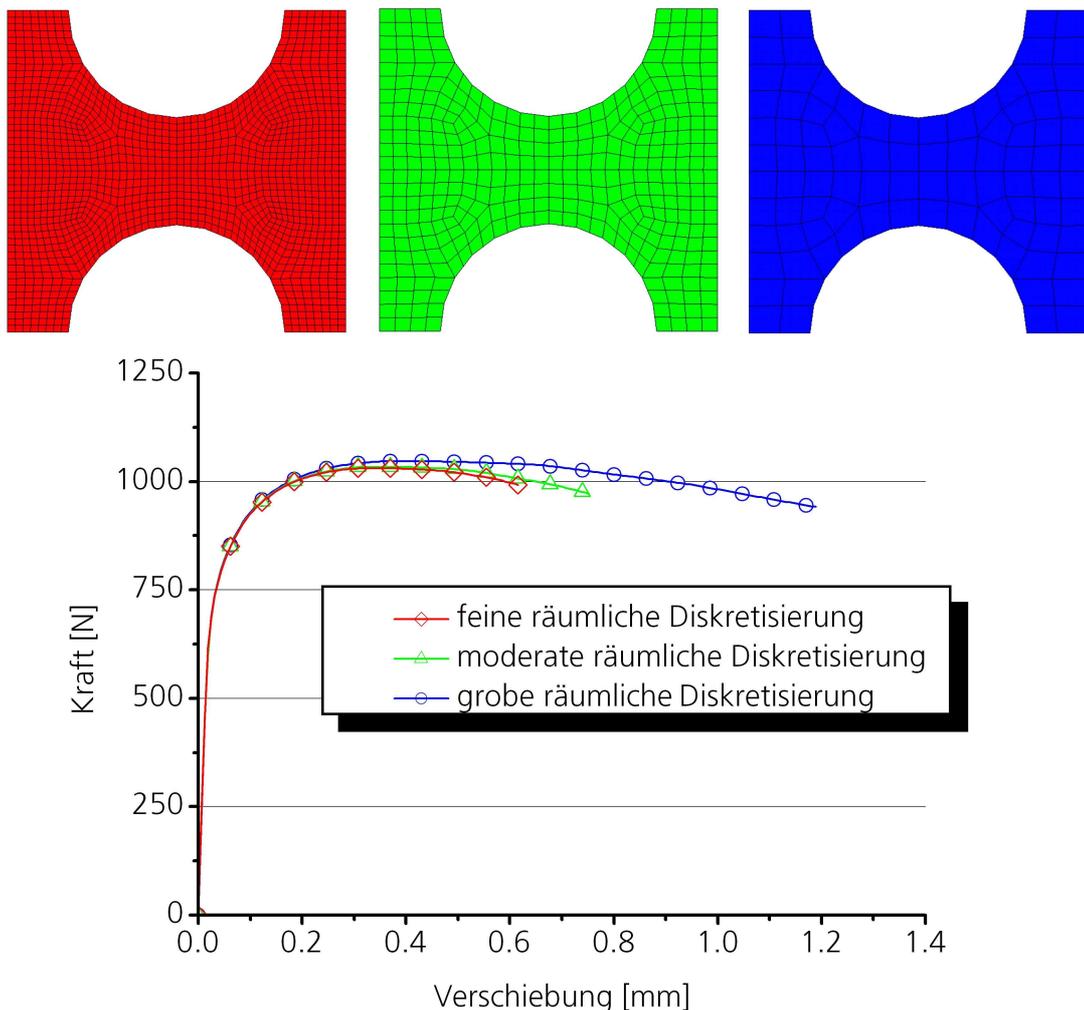


Abbildung 1-8: Folge des Diskretisierungsfehlers der FEM bei Anwendung auf gekerbte Flachzugproben. Bei gleichen Parametern des Versagensmodells ergeben sich bei nicht-konvergierten räumlichen Diskretisierungen erhebliche Fehler in der Vorhersage der globalen Verschiebung. Sogar bei einer sehr feinen Bauteilvernetzung (grobe räumliche Diskretisierung in der Abbildung – vgl. auch Abbildung 1-7) kann der Fehler leicht 100 % betragen.

Die Folge dieser Einschränkung auf die Prognose von Versagen verdeutlicht Abbildung 1-8. Oben sind drei unterschiedlich fein vernetzte

FE-Modelle von gekerbten Flachzugproben dargestellt. In der Abbildung unten sind den drei Vernetzungsvarianten Kraft-Weg-Kurven zugeordnet, die sich aus Simulationen mit einem Versagensmodell ergeben, das nicht die unterschiedliche Konvergiertheit der Vernetzung berücksichtigt. Obgleich die grobe Vernetzung der gekerbten Zugprobe als moderat im Kontext sehr fein vernetzter Bauteile (vgl. Abbildung 1-7) angesehen werden kann, wird die Verschiebung bis zum Versagen mit einem Fehler von rund 100 % prognostiziert. Daher ist es zurzeit nicht möglich, zutreffende Versagensprognosen bei der Crashesimulation aufzustellen, bei der zwangsläufig lokal nicht-konvergierte Vernetzungen vorliegen³.

1.4 Ziele und Aufbau der Arbeit

Das primäre Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Entwicklung eines Werkstoffmodells für die Al-Druckgusslegierung GD-ALSi10Mg. Die Entwicklung erfolgt mit der in Kapitel 1.2 dargestellten Vorgehensweise. Insbesondere sollen

- die Form der Fließfläche und des plastischen Potenzials,
- die Dehn- und Dehnratenverfestigung sowie
- das Versagensverhalten

mit geeigneten und validierten Versuchen (vgl. Abbildung 4-1 und Abbildung 5-1) ermittelt werden.

Wie in 1.3 zusammengefasst, weisen die zur Entwicklung des Werkstoffmodells vorhandenen Methoden einige gravierende Defizite auf. Das

³ Eine andere Form der Vernetzungsabhängigkeit tritt beim Verlust der Elliptizität der zugrunde liegenden Differentialgleichungen auf. Ein Beispiel hierfür ist die makroskopische Entfestigung des Werkstoffs bei der Schädigung. Für solche Fälle gibt es eine Vielzahl von lokalen und nichtlokalen Regularisierungsmethoden. JIRÁSEK [63] gibt eine Übersicht solcher Methoden; SCHULER [102] setzt eine auf der Bruchenergie basierende lokale Regularisierungsmethode ein, um die Schädigung von Beton numerisch abzubilden. Die in dieser Arbeit betrachtete Vernetzungsabhängigkeit resultiert aus einer nicht-konvergierten Vernetzung, wie sie bei Anwendung auf komplexe Bauteile entsteht, und darf nicht mit der bei instabilem Materialverhalten eintretenden Vernetzungsabhängigkeit verwechselt werden, die immer, also auch bei – bis zum Einsetzen der Entfestigung – konvergierter Vernetzung eintritt.

sekundäre Ziel dieser Arbeit ist daher die Verbesserung dieser Methoden. Dazu gehören

- die Auswahl bzw. Optimierung einer geeigneten Probengeometrie für den Kreuzzugversuch,
- die Entwicklung eines Versuchs, mit dem Versagen unter Schubbeanspruchung untersucht werden kann und
- eine Methodik, mit der die Versagensprognosen bei komplexen Bauteilen, d.h. bei der zwangsläufigen Verwendung nicht-konvergierter Vernetzungen, verbessert werden.

Diese Methoden können auch bei der Entwicklung von Werkstoffmodellen für andere Werkstoffe eingesetzt werden, haben also allgemein gültigen Charakter.

Die Methodenentwicklungen im Rahmen dieser Arbeit werden in den jeweiligen Kapiteln der Werkstoffmodellierung eingebunden. Insgesamt ist die Arbeit wie folgt aufgebaut:

In Kapitel 2 werden die zum Verständnis der Arbeit erforderlichen theoretischen Grundlagen zusammengefasst. Daneben wird der Stand des Wissens über Werkstoffmodelle für Al-Legierungen und über ausgewählte Versuchs- und Berechnungsmethoden dargestellt.

Eine Diskussion des Standes des Wissens und seine Bewertung hinsichtlich der Aufgabenstellung erfolgt in Kapitel 3.

Kapitel 4 dokumentiert die Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens.

Ein neu entwickelter Versuch zur Untersuchung des Versagens unter Schubbeanspruchung wird in Kapitel 5 vorgestellt. Folgend werden die Versagenscharakterisierung, die Modellierung und ein Konzept zur Berücksichtigung der Diskretisierungsfehler dargestellt.

Als Anwendung des neuen Materialmodells werden dynamische Komponentenversuche an Demonstratorbauteilen simuliert und experimentell durchgeführt. Diese Versuche sind eigens so konzipiert, dass ein Versagen der Bauteile eintritt. Die Ergebnisse der Simulation und

der realen Versuche werden in Kapitel 6 miteinander verglichen und so die Prognosefähigkeit des neuen Werkstoffmodells bewertet.

Eine Zusammenfassung der Arbeit erfolgt in Kapitel 7. Weiterhin wird auf mögliche zukünftige Entwicklungen ausgeblickt.

Fertigungsbedingte Streuung und Lageabhängigkeit der Eigenschaften

Grundsätzlich muss ein Materialmodell für Gusswerkstoffe drei Phänomene in ihrem Zusammenspiel berücksichtigen:

- das ideal-typische Werkstoffverhalten
- die fertigungsbedingte Streuung
- die Lageabhängigkeit der Eigenschaften

Das ideal-typische Verhalten ist weitgehend unabhängig vom Gießprozess und kann daher im Bauteilentwicklungsprozess A PRIORI für bestimmte Legierungen und Wärmebehandlungen bestimmt und modelliert werden. Diese Modellierung ist Gegenstand des Hauptteils dieser Arbeit. Zur Abbildung der fertigungsbedingten Streuung in den Materialeigenschaften stehen bewährte stochastische Methoden zur Verfügung. Dahingegen ist die Abbildung der Lageabhängigkeit der Eigenschaften von Gussbauteilen infolge makroskopischer Defekte und deren Auswirkungen insbesondere auf das Versagensverhalten der Bauteile für industrielle Anwendungen noch nicht zufrieden stellend gelöst. Die Entwicklung eines solchen Modellierungskonzepts erfolgte ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit und wird im Anhang dargestellt, um die Übersichtlichkeit der Dokumentation zu gewährleisten.

2 Theoretische Grundlagen und Stand des Wissens

Der Stand des Wissens über die Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens und Versagens von Al-Legierungen (Kapitel 2.2.2 und 2.2.3) ist in eine Zusammenfassung der kontinuumsmechanischen Grundlagen eingebunden, die zum Verständnis der vorliegenden Arbeit erforderlich sind. Weiterhin wird in diesem Kapitel das in der vorliegenden Arbeit verwendete numerische Lösungsverfahren für die physikalischen Erhaltungsgleichungen kurz skizziert, wobei besondere Bedeutung der Abschätzung von Diskretisierungsfehlern und der Lösungsmethoden für Plastizitätsmodelle beigemessen wird. Abschließend werden Varianten des Kreuzzugversuchs und des Schubversuchs dargestellt.

2.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die in diesem Kapitel zusammengefassten kontinuumsmechanischen Grundlagen entstammen ausführlicher Literatur (vgl. [18], [25], [78], [71], [89] oder [77]) und können dort vertieft werden.

2.1.1 Kinematische und statische Beschreibung eines Kontinuums

Zur Beschreibung von Bewegungen kann ein bestimmtes Materieteilchen beobachtet werden, das im Verlauf des untersuchten Zeitraums seine Lage im Raum ändert. Wenn das betrachtete Materieteilchen anhand seiner Lage im Raum zu einem bestimmten Referenzzeitpunkt identifiziert wird, wird diese Betrachtungsweise LAGRANGE'SCHE Beschreibung genannt. Andererseits kann ein bestimmter Ort beobachtet werden, wobei die Bewegung von Materie sich bei dieser Betrachtungsweise in einem Materiefluss durch diesen Ort äußert. Diese Sichtweise wird als raumfeste oder EULER'SCHE Beschreibung bezeichnet. So wird die Geschwindigkeit v_i eines Materieteilchens in LAGRANGE'SCHER Formulierung in Abhängigkeit von seiner Lage in der Ausgangskonfiguration X_i zum Zeitpunkt t_0 und der aktuellen Zeit t mit

$$v_i = f(X_i(t_0), t)$$

Gl. 2-1

und in EULER'SCHER Formulierung in Abhängigkeit von seiner Lage in der aktuellen Konfiguration x_i und der aktuellen Zeit mit

$$v_i = f(x_i, t) \quad \text{Gl. 2-2}$$

beschrieben.

Die Bewegung eines Materieteilchens eines Körpers kann durch die Verschiebung u_i beschrieben werden.

$$u_i = x_i - X_i \quad \text{Gl. 2-3}$$

Die Verschiebungen aller Materieteilchen eines Körpers beschreiben seine Bewegung vollständig. Sie setzt sich im Allgemeinen aus einer Verzerrung und einer Starrkörperbewegung zusammen, die wiederum in eine Translation und Rotation aufgespalten werden kann. Für kontinuumsmechanische Betrachtungen sind die Verzerrungen von besonderer Bedeutung. Es muss daher ein Maß für den Verzerrungszustand eines Körpers definiert werden. Dazu kann ein infinitesimal kleines Linienelement betrachtet werden. Die Abbildung von der Ausgangs- in die aktuelle Konfiguration eines solchen Elementes kann linearisiert mithilfe des Deformationsgradienten F_{ij} beschrieben werden:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad \text{Gl. 2-4}$$

Der Deformationsgradient beinhaltet jedoch noch die Starrkörperrotation des Körpers. Da die Länge eines Linienelementes bei einer Starrkörperrotation unverändert bleibt, kann die Änderung eines quadrierten infinitesimal kleinen Linienelementes als Maß für die Verzerrung betrachtet werden:

$$dx_i dx_i - dX_i dX_i = (F_{ij} F_{ik} - \delta_{jk}) dX_j dX_k = 2\lambda_{jk} dX_j dX_k \quad \text{Gl. 2-5}$$

Der Tensor, der die Längenänderung eines Linienelementes bei der Abbildung von der Ausgangskonfiguration in die aktuelle Konfiguration beschreibt und somit ein geeignetes Maß für die Verzerrung eines Körpers in LAGRANGE'SCHER Betrachtungsweise darstellt, wird LAGRANGE'SCHER DEHNUNGSTENSOR genannt:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) \quad \text{Gl. 2-6}$$

Er kann auch in Abhängigkeit von der Verschiebung geschrieben werden (vgl. [18]):

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad \text{Gl. 2-7}$$

Andere Bezeichnungen für diesen Dehnungstensor sind GREEN-LAGRANGE'SCHER oder nur GREEN'SCHER DEHNUNGSTENSOR. Bei kleinen Verzerrungen können die nichtlinearen Anteile dieses Dehnungstensors

$\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$ vernachlässigt werden, was zum LINEAREN LAGRANGE'SCHEN

DEHNUNGSTENSOR für kleine Verformungen führt:

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad \text{Gl. 2-8}$$

Die vorangegangenen Schritte können analog in der EULER'SCHEN Betrachtungsweise vollzogen werden (vgl. [18]). Für große Verformungen ergibt sich der nichtlineare EULER'SCHE (oder auch ALMANSI'SCHE) DEHNUNGSTENSOR. Werden nur kleine Verformungen betrachtet, können die nichtlinearen Anteile wiederum vernachlässigt werden. Dann lautet der LINEARE EULER'SCHE DEHNUNGSTENSOR für kleine Verformungen:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{Gl. 2-9}$$

Die beiden linearen Dehnungstensoren nach LAGRANGE und nach EULER stimmen für kleine Verformungen näherungsweise miteinander überein. Der EULER'SCHE DEHNUNGSTENSOR für kleine Verformungen ε_{ij} (Gl. 2-9) wird auch als KLASSISCHER DEHNUNGSTENSOR bezeichnet [18].

Nachdem nun die Kinematik eines Körpers beschrieben ist, werden im Folgenden geeignete Formulierungen für die Ursachen der Bewegung aufgeführt. Hierbei werden nur die Wirkungen von Oberflächen- und Volumenkräften, nicht jedoch Verzerrungen infolge einer Temperatur-

änderung, in Betracht gezogen. Abbildung 2-1 zeigt einen Körper und eine an sie angreifende Oberflächenkraft f_i .

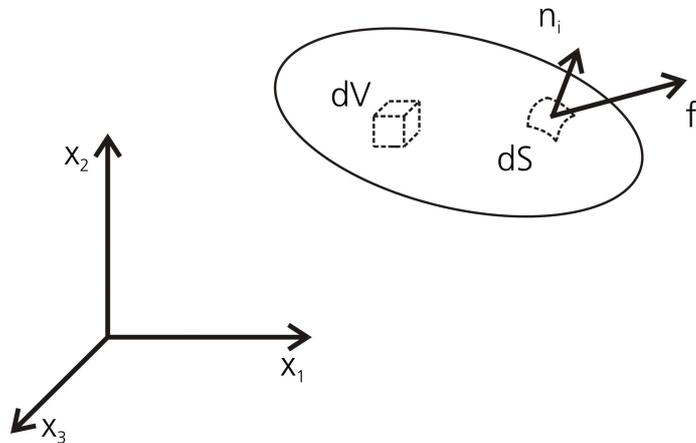


Abbildung 2-1: Schematische Darstellung eines Körpers und einer an ihm angreifenden Oberflächenkraft f_i . Kontinuumsmechanische Größen werden in Bezug auf infinitesimale Volumenelemente dV und Flächenelemente dS definiert.

Die Oberflächenkraft kann in eine für kontinuumsmechanische Betrachtungen relevante Größe überführt werden, indem sie auf das infinitesimal kleine Flächenelement dS , auf das sie wirkt, bezogen wird. Unter der Annahme, dass aufgrund der infinitesimalen Betrachtungen keine Momentenbelastung auf das Flächenelement wirkt, wird die resultierende Größe als CAUCHY'SCHER SPANNUNGSVEKTOR τ_i bezeichnet.

$$\tau_i = \frac{df_i}{dS} \quad \text{Gl. 2-10}$$

Da die Oberflächenkräfte bei einem homogenen Körper auch innerhalb des Körpers wirken (die Kräfte werden durch den Körper übertragen), können für jedes infinitesimale Volumenelement dV des Körpers analog die angreifenden Kräfte auf die Flächen des Volumenelementes bezogen werden. Der Beanspruchungszustand eines Volumenelementes ist nun vollständig beschrieben, wenn für drei senkrecht zueinander stehende Ebenen die Spannungsvektoren τ_i bekannt sind. Für alle anderen Ebenen kann dann durch Koordinatentransformation der jeweilige Spannungsvektor bestimmt werden. Der bei dieser Transformation eingesetzte Tensor σ_{ij} beschreibt den Spannungszustand an einem beliebigen Punkt vollständig und setzt sich aus den je drei Komponenten der Spannungsvektoren an den drei senkrecht zueinander stehenden Ebenen des aktuellen Koordinatensystems zusammen:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1\tau_1 & {}^1\tau_2 & {}^1\tau_3 \\ {}^2\tau_1 & {}^2\tau_2 & {}^2\tau_3 \\ {}^3\tau_1 & {}^3\tau_2 & {}^3\tau_3 \end{pmatrix} \quad \text{Gl. 2-11}$$

Da gemäß der obigen Definition keine Momentenspannungen auftreten, ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht an einem infinitesimalen Flächenelement die Symmetrie des CAUCHY'SCHEN SPANNUNGSTENSORS $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Der Spannungsvektor an einer beliebigen Ebene n_i folgt aus:

$$\tau_i = \sigma_{ji} n_j \quad \text{Gl. 2-12}$$

Da der CAUCHY'SCHE SPANNUNGSTENSOR in Bezug auf die jeweils aktuelle Konfiguration definiert ist, wird er auch als EULER'SCHER SPANNUNGSTENSOR bezeichnet. Eine Spannungsbeschreibung aus der LAGRANGE'SCHEN Betrachtungsweise, d. h. bezogen auf die Ausgangskonfiguration der Ebene N_i und des infinitesimalen Flächenelements dS_0 , liefert den ERSTEN PIOLA-KIRCHHOFF'SCHEN SPANNUNGSTENSOR T_{ij} :

$$df_i = T_{ji} N_j dS_0 \quad \text{Gl. 2-13}$$

Er wird auch als LAGRANGE'SCHER Spannungstensor bezeichnet. Bei dieser Spannungsbeschreibung wird der infinitesimale Kraftvektor df_i in der aktuellen Konfiguration auf die Ausgangskonfiguration bezogen. Wird nun ein fiktiver Kraftvektor dF_i betrachtet, der durch Transformation des aktuellen Kraftvektors df_i in die Ausgangskonfiguration entsteht, ergibt sich der ZWEITE PIOLA-KIRCHHOFF SPANNUNGSTENSOR \tilde{T}_{ij} , der den Zusammenhang zwischen einem Flächenelement und einem Kraftvektor in der Ausgangskonfiguration herstellt:

$$dF_i = \tilde{T}_{ji} N_j dS_0 \quad \text{Gl. 2-14}$$

Bei der Anwendung der verschiedenen Definitionen für Spannungen und Dehnungen dürfen nur solche Spannungs- und Dehnungstensoren zusammen verwendet werden, die miteinander kompatibel sind [18]. So muss der CAUCHY'SCHE SPANNUNGSTENSOR mit dem EULER'SCHEN DEHNUNGSTENSOR eingesetzt werden, oder der ZWEITE PIOLA-KIRCHHOFF'SCHE SPANNUNGSTENSOR mit dem LAGRANGE'SCHEN DEHNUNGSTENSOR. Da bei kleinen Verformungen (vgl. Kapitel 2.3.1) die Unterschiede zwischen den aus der LAGRANGE'SCHEN Betrachtungsweise und der EULER'SCHEN

Betrachtungsweise abgeleiteten Größen näherungsweise vernachlässigt werden können und der CAUCHY'SCHE SPANNUNGSTENSOR eine besonders anschauliche und praktische Definition für die Beanspruchung von Körpern ist, wird er zusammen mit dem EULER'SCHEN DEHNUNGSTENSOR oftmals (vgl. beispielsweise [18], [71] oder [77]) und auch im Folgenden zur Beschreibung kontinuumsmechanischer Zusammenhänge eingesetzt.

2.1.2 Physikalische Grundgleichungen

Die nachstehenden Herleitungen der physikalischen Grundgleichungen orientieren sich an [78], [71] oder [89].

Der Massezuwachs in einem betrachteten Raum, also in der EULER'SCHERN Beobachtungsweise, muss dem Massezufluss über den Rand des Raumes entsprechen:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_i n_i dS = 0 \quad \text{Gl. 2-15}$$

Die Anwendung des GAUSS'SCHEN Integralsatzes auf Gl. 2-15 liefert:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) \right) dV = 0 \quad \text{Gl. 2-16}$$

In differenzieller oder „starker“ Form und nach Anwendung der Produktregel nimmt die Massenerhaltungsgleichung die Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{Gl. 2-17}$$

an. Die totale Ableitung der Dichte (Gl. 2-18) lautet:

$$\frac{d\rho(x_i, t)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{Gl. 2-18}$$

Sie ist bei der EULER'SCHEN Beschreibung von dem aktuellen Ort, der wiederum eine Funktion der Zeit ist, und von der Zeit abhängig.

Gl. 2-18 kann in Gl. 2-17 eingesetzt werden und liefert so die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \text{Gl. 2-19}$$

Den Zusammenhang zwischen der Bewegung eines Körpers und den angreifenden Oberflächen- und Volumenkräften liefern die Erhaltungsgleichungen für den translatorischen Impuls und den Drehimpuls. Für ein infinitesimal kleines Volumenelement sollen jedoch in Übereinstimmung mit den in dieser Arbeit verwendeten Spannungsdefinitionen keine Momentenbelastungen auftreten, sodass für die folgenden Herleitungen nur die translatorische Impulserhaltung betrachtet wird. An einem finiten Volumen kann dennoch die Drehimpulserhaltung aufgestellt werden (vgl. [100]). Gemäß des NEWTON'SCHEN Gesetzes entspricht die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers der Summe der angreifenden äußeren Kräfte:

$$\int_V b_i \rho dV + \int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \frac{dv_i}{dt} \rho dV \quad \text{Gl. 2-20}$$

Nach Umwandlung des Flächenintegrals in ein Volumenintegral mithilfe des GAUSS'SCHEN Integralsatzes folgt:

$$\int_V \left(b_i \rho + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) dV = \int_V \frac{dv_i}{dt} \rho dV \quad \text{Gl. 2-21}$$

Die **Impulserhaltungsgleichung** lautet in differenzieller Form:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i \quad \text{Gl. 2-22}$$

Im Folgenden wird von einem Kontinuum angenommen, dass es sich in infinitesimale Subsysteme aufteilen lässt, die sich jeweils näherungsweise im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Die Zustände dieser Subsysteme können dann mit Zustandsvariablen beschrieben werden, die nur von den Prozessen in den jeweiligen Subsystemen bestimmt sind. Diese Annahme wird lokales Zustandspostulat (engl.: „local state postulate“) genannt, vgl. [71] oder [89].

Eine vollständige Energiebilanz für ein abgeschlossenes System liefert der erste Hauptsatz der Thermodynamik. Sofern nur die in das System eingebrachte oder dem System entzogene Wärmeenergie und mechanische Arbeit betrachtet werden, lautet der 1. Hauptsatz der Thermodynamik:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) \rho dV = \int_V (b_i v_i + r) \rho dV + \int_S (\sigma_{ji} n_j v_i - q_i n_i) dS \quad \text{Gl. 2-23}$$

Hierbei wird als eine Zustandsvariable die spezifische innere Energie e eingeführt, die die potenzielle und dissipative mechanische Energie einschließt. Den Wärmetransport über die Ränder des Systems erfasst der Wärmeflussvektor q_i . Die Wärmeentstehung im System infolge äußerer Einflüsse (beispielsweise Induktionswärme) wird mit der spezifischen Wärmeproduktion r beschrieben. Die Anwendung des GAUSS'SCHEN Integralsatzes liefert:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(e + \frac{1}{2} v_i v_i \right) \rho dV = \int_V \left((b_i v_i + r) \rho + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) dV \quad \text{Gl. 2-24}$$

Einsetzen der Impulsgleichung (Gl. 2-21) liefert die Energiegleichung:

$$\int_V \frac{de}{dt} \rho dV = \int_V \left(\sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + r \rho - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) dV \quad \text{Gl. 2-25}$$

In differenzieller Form lautet die **Energieerhaltungsgleichung**:

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sigma_{ji}}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad \text{Gl. 2-26}$$

Der 1. Hauptsatz sagt aus, dass bei Zustandsänderungen in einem geschlossenen System Energie nur umgewandelt, nicht jedoch erzeugt oder vernichtet werden kann. Ob solche Umwandlungsprozesse reversibel oder irreversibel sind, kann mithilfe des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik beschrieben werden. Dazu werden zwei weitere Zustandsvariablen eingeführt, nämlich die spezifische Entropie s und die Temperatur T .

Der 2. Hauptsatz lautet dann:

$$\int_V \frac{ds}{dt} \rho dV - \int_V \frac{r}{T} \rho dV + \int_S \frac{q_i}{T} n_i dS \geq 0 \quad \text{Gl. 2-27}$$

Demnach ist die Entropieproduktion immer größer oder gleich der zugeführten Wärmemenge bezogen auf die Temperatur. Die Entropie bleibt also in einem adiabaten System konstant oder nimmt zu. Die differenzielle Form nach Anwendung des GAUSS'SCHEN Integralsatzes lautet:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} \rho - \frac{r}{T} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{q_i}{T} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} \rho - \frac{r}{T} \rho + \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 2-28}$$

Die Kombination mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik liefert die **CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung**:

$$\begin{aligned} T \frac{ds}{dt} \rho - \left(\rho \frac{de}{dt} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow T \frac{ds}{dt} \rho - \rho \frac{de}{dt} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 2-29}$$

Zustandsänderungen, die die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung zu Null erfüllen, sind reversibel. Für irreversible Prozesse erhöht sich die Entropie im System, was zu einem positiven Ergebnis bei der Auswertung der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung führt. Negative Ergebnisse würden dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik widersprechen.

2.2 Kontinuumsmechanische Beschreibung von Materialeigenschaften

Erfahrungsgemäß reagieren Körper aus unterschiedlichen Materialien auf gleiche äußere Belastungen mit unterschiedlichen Verformungen. Diese Eigenschaft wird in der Kontinuumsmechanik mathematisch mit

Gleichungen beschrieben, die Materialgleichungen oder konstitutive Gleichungen genannt (vgl. [18]).

Eine fundamentale Anforderung an konstitutive Gleichungen ist, dass sie unabhängig vom Bewegungszustand eines Beobachters sind: Materialgleichungen müssen objektiv sein. Es dürfen also nur von Starrkörperbewegungen unabhängige Größen in Materialgleichungen verwendet werden. Geeignete kinematische Größen sind daher Verzerrungen. Als statische Größe zur Repräsentation der auf ein Kontinuum einwirkenden äußeren Kräfte kann der CAUCHY'SCHE SPANNUNGSTENSOR herangezogen werden. Der Nachweis der Objektivität des CAUCHY'SCHEN SPANNUNGSTENSORS und anderer kontinuumsmechanischer Größen wird beispielsweise von BETTEN [18] geführt. Weiterhin müssen konstitutive Gleichungen in Einklang mit den grundlegenden physikalischen Gesetzen sein. Gemäß dem Postulat der lokalen Zustände können konstitutive Gleichungen als Zustandsgleichungen aufgefasst werden⁴ und ausgehend von den thermodynamischen Hauptsätzen unter bestimmten Annahmen konkretisiert werden. Bei einer solchen Vorgehensweise sind A PRIORI die thermodynamischen Hauptsätze erfüllt. Von LEMAITRE und CHABOCHE [71] werden verschiedene Materialgesetze auf diesem Wege hergeleitet. Andererseits können die thermodynamischen Hauptsätze genutzt werden, um empirisch ermittelte Werkstoffgleichungen A POSTERIORI zu rechtfertigen. Beispielsweise stellt JUNGINGER [66] ein experimentell und werkstofftechnisch gerechtfertigtes Plastizitätsmodell auf und weist A POSTERIORI nach, dass alle von diesem Werkstoffmodell beeinflussten möglichen Zustandsänderungen mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik im Einklang stehen⁵.

⁴ Bei der kontinuumsmechanischen Beschreibung von hochdynamischen Vorgängen, bei denen hohe hydrostatische Drücke und hohe Temperaturen entstehen, wird der Spannungstensor häufig in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Tensor aufgeteilt. Die hydrostatischen Anteile werden mit einer Zustandsgleichung im klassischen Sinn ($f(T,p,v)$) behandelt, wobei die Temperatur als Variable auftritt, während die deviatorischen Anteile separat behandelt werden. Wenn kein direkter Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Dichte besteht, muss keine Zustandsgleichung explizit formuliert werden. Dann werden der Druck und die Dichte von den Materialgleichungen in Relation gesetzt. Beispielsweise beinhaltet das HOOKE'SCHE Gesetz eine lineare Zustandsgleichung für isotherme Vorgänge.

⁵ Es sei angemerkt, dass solche Herleitungen oder Beweisführungen oftmals aufgrund der Unbestimmbarkeit der Zustandsvariablen und Unbekanntheit der Zustandsgleichungen auf Annahmen angewiesen sind. In solchen Fällen liefern sie keine

Ein empirisches Werkstoffmodell für einachsige Spannungszustände kann mit einem einfachen Zugversuch ermittelt werden. Mit diesem Versuch kann die CAUCHY'SCHE SPANNUNG σ , die in der Werkstoffprüfung auch als wahre Spannung bezeichnet wird, in Abhängigkeit von der NATÜRLICHEN DEHNUNG ε_n ermittelt werden. Die NATÜRLICHE oder LOGARITHMISCHE DEHNUNG ist als differenzielle Verlängerung der Zugprobe definiert:

$$d\varepsilon_n = \frac{dl}{l} \Leftrightarrow \varepsilon_n = \int_{l_0}^l \frac{1}{l} dl = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) = \ln(1 + \varepsilon_t) \quad \text{Gl. 2-30}$$

Hierbei ist ε_t die TECHNISCHE DEHNUNG, für die bei den hier betrachteten infinitesimalen Verformungen die LAGRANGE'SCHE Formulierung näherungsweise mit der EULER'SCHEN übereinstimmt.

Für metallische Werkstoffe können die typischen Bereiche des elastischen und elastisch-plastischen Verhaltens unterschieden werden. Elastische Verformungen sind linear in den Spannungen und Dehnungen sowie reversibel. Nach Erreichen der Fließspannung $\sigma_{\text{Fließ}}$ bzw. der Elastizitätsgrenze überlagert sich zu der elastischen die plastische Verformung. Mit Zunahme der elastisch-plastischen Verformung steigt typischerweise die Spannung weiter an. Dieses Phänomen wird Dehnverfestigung oder Kaltverfestigung genannt. Daneben wird bei vielen Werkstoffen eine Zunahme der Fließspannung bei steigender Belastungsgeschwindigkeit beobachtet, was als Dehnratenverfestigung bezeichnet wird. Andererseits kann es bei einigen Werkstoffen auch zu einer Dehnungsentfestigung kommen, d. h., bei zunehmender Dehnung nimmt die Spannung wieder ab. Ein solches Verhalten wird auch als Schädigung bezeichnet. Das Ende der Beanspruchbarkeit des Werkstoffes kennzeichnet das Versagen (vgl. [21]).

Da die sich überlagernden elastischen und plastischen Verformungen unterschiedliche makroskopische Merkmale aufweisen, werden sie getrennt betrachtet. Diese Vorgehensweise ist auch durch die unterschiedlichen assoziierten werkstofftechnischen Phänomene gerechtfertigt. Bei den hier betrachteten kleinen Verformungen (vgl.

notwendigen Bedingungen, können jedoch bei konservativen Annahmen hinreichend sein, um die physikalische Rechtmäßigkeit sicherzustellen.

Kapitel 2.3.1) kann der Dehnungstensor additiv in seine elastischen $\varepsilon_{ij}^{\text{elast}}$ und plastischen $\varepsilon_{ij}^{\text{plast}}$ Anteile zerlegt werden:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{elast}} + \varepsilon_{ij}^{\text{plast}} \quad \text{Gl. 2-31}$$

Im Folgenden werden grundlegende Formulierungen und konkrete Werkstoffmodelle für das elastische und plastische Verhalten sowie für die Schädigung und das Versagen zusammengefasst.

2.2.1 Linear-elastisches Werkstoffverhalten

Linear-elastisches Verhalten kann mit dem CAUCHY'SCHEN SPANNUNGSTENSOR und dem KLASSISCHEN DEHNUNGSTENSOR als lineare Transformation dargestellt werden. Die allgemeine Form lautet:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{Gl. 2-32}$$

Der Transformationstensor C_{ijkl} enthält 81 Komponenten. Aufgrund der Symmetrie des Spannungs- und des Dehnungstensors besteht Gl. 2-32 nur aus 6 unabhängigen Gleichungen. Daher reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten von C_{ijkl} auf 36. Diese Anzahl der unabhängigen Parameter kann unter Verwendung des quadratischen elastischen Potentials (Formänderungsenergie) weiter auf 21 reduziert werden [18]. Für isotropes Materialverhalten reduziert sie sich weiter auf zwei, und es kann das verallgemeinerte HOOKE'SCHE Gesetz für isotropes Verhalten aufgestellt werden, wobei E den E-Modul und ν die Querkontraktionszahl bezeichnen:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad \text{Gl. 2-33}$$

Eine alternative Darstellung kann durch eine andere Definition der elastischen Konstanten erfolgen, wobei die Parameter λ und μ als LAMÉ'SCHE Konstanten bezeichnet werden.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{Gl. 2-34}$$

2.2.2 Plastisches Werkstoffverhalten

2.2.2.1 Allgemeine Zusammenhänge

Die Dehnungsverfestigung wird je nach ihrer Ausprägung bei wechselnden Beanspruchungsrichtungen, als isotrope, anisotrope, kinematische oder gemischte Verfestigung – eine Überlagerung der isotropen bzw. anisotropen mit der kinematischen Verfestigung – bezeichnet [25]. Als Verfestigungsparameter wird oftmals eine Funktion der plastischen Dehnung oder der verrichteten plastischen Arbeit gewählt. Im ersteren Fall wird die äquivalente plastische Dehnung κ so definiert, dass sie bei einachsigen Spannungszuständen mit der plastischen Dehnung in der Belastungsrichtung übereinstimmt:

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\varepsilon_{ij}^{\text{plast}} \varepsilon_{ij}^{\text{plast}} \right)} \quad \text{Gl. 2-35}$$

Die Verallgemeinerung der Fließbedingung f für isotrope Verfestigung lautet nun:

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_{\text{Fließ}}(\kappa)) = 0 \quad \text{Gl. 2-36}$$

Ein Werkstoff beginnt also zu fließen, wenn Gl. 2-36 erfüllt ist. Umgekehrt ist Gl. 2-36 immer erfüllt, wenn das Material plastisch deformiert. Die Spannung kann nie die Fließspannung überschreiten. Diese empirischen Bedingungen an die möglichen Zustände des Materials lassen sich zusammenfassen (vgl. [25]):

$$f \leq 0$$

$$f < 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{plast}} = 0_{ij}$$

$$f = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{plast}} \neq 0_{ij} \quad \text{Gl. 2-37 a-d}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{plast}} \neq 0_{ij} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Über diese Kriterien hinausgehend, d. h., der Aussage, unter welchen Bedingungen plastische Deformation auftritt, muss zur vollständigen Beschreibung des Materialverhaltens der Tensor der plastischen Dehnungssinkremente bestimmt werden. Dabei kann die in Kapitel 2.3

erwähnte Herleitung ausgehend von den thermodynamischen Hauptsätzen gewählt werden. Es sind dann meist Annahmen über unbekannte Größen und Zusammenhänge zu treffen. Dennoch kann im Sinne einer konservativen Abschätzung A PRIORI sichergestellt werden, dass die so konkretisierten konstitutiven Beziehungen nicht gegen die thermodynamischen Hauptsätze verstoßen. Am Beispiel eines ideal plastischen Werkstoffes kann eine Formulierung für das plastische Verhalten aufgestellt werden, die den thermodynamischen Hauptsätzen genügt.

Unter der Annahme kleiner Verformungen gelten Gl. 2-31 und

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad \text{Gl. 2-38}$$

Eingesetzt in Gl. 2-29 ergibt sich:

$$T \frac{ds}{dt} - \rho \frac{de}{dt} + \sigma_{ij} \left(\dot{\epsilon}_{ij}^{\text{elast}} + \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{plast}} \right) - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0 \quad \text{Gl. 2-39}$$

In einem adiabaten System sind für dissipative Zustandsänderungen die plastischen Dehnungen verantwortlich. Das Grundprinzip der maximalen Entropieproduktion entspricht also für elastisch-plastische Verformungen dem Prinzip der maximalen mechanischen Dissipation w^{plast} [18]. D. h., bei Vorgabe einer bestimmten plastischen Dehnung wird sich von allen denkbaren Zuständen für die Spannungen σ_{ij} derjenige einstellen, für den gilt:

$$W^{\text{plast}} = \text{Max} \left(\int_{t_0}^t \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{plast}} dt \right) \quad \text{Gl. 2-40}$$

$$\Leftrightarrow dW^{\text{plast}} = \text{Max} \left(\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{\text{plast}} \right)$$

Für die Spannung gilt als Nebenbedingung Gl. 2-37 c, sodass die Ermittlung der Spannung der Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung entspricht.

Mithilfe der LAGRANGE'SCHEN Multiplikatorenmethode kann ein Zusammenhang zwischen dem plastischen Dehnungsinkrement, der Fließbedingung und der Spannung hergestellt werden, für die die dissipierte Energie maximal wird [18]:

$$\frac{\partial(-\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{\text{plast}})}{\partial\sigma_{ij}} + d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} = 0_{ij}$$

Gl. 2-41

$$\Leftrightarrow d\varepsilon_{ij}^{\text{plast}} = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}$$

Gl. 2-41 wird als Fließregel bezeichnet. Mit ihr werden die Richtung und der Betrag der plastischen Dehnung zu den anliegenden Spannungen in Relation gesetzt. Aus mathematischer Sicht stellen Gl. 2-37 a-d Nebenbedingungen an die Lösung von Gl. 2-41 und werden als Kuhn-Tucker Bedingungen bezeichnet. Die Funktion f wird plastisches Potenzial genannt und stimmt mit der Fließfunktion überein. Diese Konstellation wird als assoziiertes Fließen bezeichnet. Sofern als plastisches Potenzial eine Funktion gewählt wird, deren Form von der der Fließfläche abweicht, ist mit den getroffenen Annahmen nicht A PRIORI gewährleistet, dass das Prinzip der maximalen dissipierten Energie eingehalten wird. Diese Konstellation wird als nicht assoziiertes Fließen bezeichnet.

Mithilfe von Gl. 2-39 können spezielle Eigenschaften des plastischen Potenzials abgeleitet werden. Eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung des 2. thermodynamischen Hauptsatzes an alle möglichen Zustände von Spannungen und plastischen Dehnungen ist:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{plast}} \geq 0$$

Gl. 2-42

Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn das plastische Potenzial konvex ist und den Nullpunkt enthält, was anschaulich dem auf Erfahrung beruhenden Umstand entspricht, dass das Material nicht der Spannung entgegen fließen kann.

2.2.2.2 Spezielle Fließfunktionen

Bei den folgenden Ausführungen wird von assoziiertem Fließen ausgegangen. Die Fließfunktionen repräsentieren also auch das plastische Potenzial.

Bei dem Fließkriterium nach TRESCA wird das Abgleiten der Gitterebene als ein von den größten Hauptschubspannungen bestimmter Vorgang angesehen [109]:

$$f = (\sigma_I - \sigma_{III}) - \sigma_{\text{Fließ}}, \text{ wobei } \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \quad \text{Gl. 2-43}$$

Eine andere Fließfunktion, die VON MISES Fließfunktion [84], kann aus der Überlegung abgeleitet werden, dass alle Hauptschubspannungen den Fließbeginn mitbestimmen, wobei der Betrag der Hauptschubspannungen so gewichtet wird, dass für den einachsigen Fall $\sigma_I = \sigma_{\text{Fließ}}$ gilt:

$$f = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2)} - \sigma_{\text{Fließ}} \quad \text{Gl. 2-44}$$

Diese Funktion kann auch aus dem Grundgedanken hergeleitet werden, dass die elastische Scherenergie den Fließbeginn verursacht (vgl. [71]). Die grafische Darstellung dieser Fließfunktion im Hauptspannungsraum erfolgt in Abbildung 2-2.

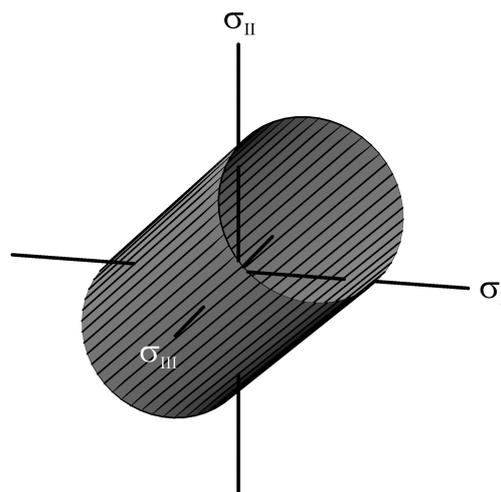


Abbildung 2-2: grafische Darstellung der von Mises Fließfunktion im Hauptspannungsraum. Sie ist ein Zylinder entlang der hydrostatischen Achse. Die Fließfunktion hängt also nur von der 2. Invariante des Spannungstensors ab und ist daher druckunabhängig.

Die VON MISES Fließfunktion ist ein entlang der hydrostatischen Achse laufender Zylinder und somit unabhängig von der ersten (hydrostatischer Druck) und dritten (Lodewinkel) Invariante (Definition vgl. [19]) des Spannungstensors. Gl. 2-44 kann daher auch direkt als Funktion der zweiten Invariante J_2 des Spannungsdeviators ausgedrückt werden:

$$f = \sqrt{3}J_2 - \sigma_{\text{Fließ}} \quad \text{Gl. 2-45}$$

Tieferegehende werkstofftechnische Überlegungen zur Aufstellung von Fließfunktionen werden von HOSFORD [57], BISHOP und HILL [20] sowie HERSHEY und DAHLGREN [51] angestellt. Dort wird eine parametrisierte druckunabhängige Fließfunktion vorgeschlagen, wobei s_I , s_{II} und s_{III} die Eigenwerte des Spannungsdeviators sind:

$$f = \sqrt[n]{\frac{1}{2}(|s_I - s_{II}|^n + |s_{III} - s_I|^n + |s_{II} - s_{III}|^n)} - \sigma_{\text{Fließ}} \quad \text{Gl. 2-46}$$

Für $n=2$ entspricht Gl. 2-46 der VON MISES Fließfunktion und für $n=1$ bzw. $n=\infty$ der TRESCA Fließfunktion. Für Metalle mit kubisch-flächenzentrierter Struktur wie Aluminium wird als Parameter $n=8$ vorgeschlagen. Abbildung 2-3 zeigt im Deviatorschnitt die Fließfunktionen gemäß Gl. 2-46 mit den Parametern $n=2$, $n=8$ und $n=20$.

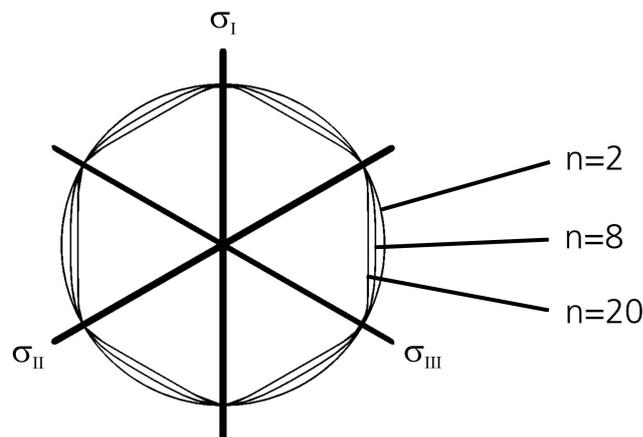


Abbildung 2-3: Parametrisierte, druckunabhängige Fließfläche. Die Form variiert mit der Wahl des Exponenten n . Für $n=2$ ergibt sich die von Mises Fließfunktion, für $n=\infty$ die Fließfunktion nach Tresca. BARLAT et al [11] und GREEN et al [44] bescheinigen Al-Legierungen eine Fließfläche mit einem Exponenten $n=8$.

KARAFILLIS und BOYCE [67] stellen eine Erweiterung von Gl. 2-46 vor, mit der zusätzlich Fließflächen beschrieben werden können, die zwischen der

VON MISES Fließfläche und der theoretischen oberen Grenze für Fließfunktionen (vgl. [18]) liegen.

Parametrische Fließfunktionen wie von KARAFILLIS und BOYCE [67] vorgeschlagen oder Gl. 2-46 bilden die Basis für viele anisotrope Plastizitätsmodelle, die insbesondere für Aluminiumbleche vorgesehen sind (vgl. [12], [11], [13], [10] und [23]). Von BARLAT et al [11] wird der Exponent der Fließfunktion experimentell für Al-Mg-Bleche zu $n=8$ bestimmt.

Eine weitere experimentelle Untersuchung des plastischen Verhaltens von Al-Blechen wurde von GREEN et al [44] durchgeführt. Für die dort untersuchte Legierung des Typs 1145 wurde als Fließfunktion ebenfalls eine nicht-quadratische Funktion mit einem Exponenten von $n=8$ bestimmt.

2.2.3 Schädigung und Versagen

Die verschiedenen Formen der Schädigung können in spröde und duktile Schädigung sowie Kriech- und Ermüdungsschädigung unterteilt werden [47]. Für duktile Werkstoffe wie Al-Legierungen steht unter transienten, dynamischen Beanspruchungen die duktile Schädigung im Mittelpunkt des Interesses. Als werkstofftechnische Ursache für die duktile Schädigung werden die Entstehung, das Wachstum und die Vereinigung von Hohlräumen angesehen (vgl. [46], [117], [71] oder [81]). Eine derartige Schädigungsentwicklung hängt von der Beanspruchung ab. Sie ist unter hohen hydrostatischen Zugspannungszuständen stärker ausgeprägt als bei Schub- oder Druckbeanspruchungen (vgl. [95]).

Im Rahmen der folgenden Betrachtungen werden Versagensmodelle von Schädigungsmodellen abgegrenzt: Schädigungsmodelle beschreiben die Entfestigung des Werkstoffes bis zum Versagen. Versagensmodelle hingegen sind nicht mit dem Festigkeitsmodell des Werkstoffs gekoppelt, sie sind reine Kriterien. Daher werden in dieser Arbeit solche Kriterien – auch wenn in ihnen Schädigungsparameter verwendet werden – nicht den Schädigungsmodellen zugeordnet, solange die Schädigungsvariable von der Festigkeit entkoppelt bleibt.

2.2.3.1 Schädigungsmodelle

Ein verbreitetes Modell zur Beschreibung der Schädigung ist das MODIFIZIERTE GURSON-Modell ([46], [111]), das aus der theoretischen Betrachtung einer elastisch-plastischen Matrix mit kugelförmigen Hohlräumen abgeleitet wurde. Kernstück ist die Fließfunktion, die von einem spezifischen Hohlraumanteil \tilde{h} und den Modellparametern q_1 , q_2 und q_3 abhängt:

$$f = \left(\frac{\sqrt{3} J_2}{\sigma_{\text{Fließ}}} \right)^2 + 2q_1 \tilde{h} \cosh \left(q_2 \frac{\sigma_{kk}}{2\sigma_{\text{Fließ}}} \right) - (1 + q_3 \tilde{h}^2) \quad \text{Gl. 2-47}$$

Die Form dieser Fließfunktion kann je nach Hohlraumanteil und Parameterwahl zylindrisch (VON MISES) oder rotationsellipsoidisch sein. Die Entwicklungsgleichung des spezifischen Hohlraumvolumens setzt sich aus einem Entstehungsanteil und einem Wachstumsanteil zusammen. Aufgrund der Annahme von kugelförmigen Hohlräumen sind die Entwicklungsgleichungen isotrop: Die Hohlraumentstehung hängt von der äquivalenten plastischen Dehnung ab, das Hohlraumwachstum von dem hydrostatischen Anteil des makroskopischen plastischen Dehnungstensors. Im Rahmen einer Modifizierung führten TVERGAARD und NEEDLEMAN [111] ein kritisches Hohlraumvolumen ein, oberhalb dessen eine beschleunigte Schädigungsentwicklung eintritt. Eine anwendungsorientierte Diskussion des Modells, der Parameterwahl und des Einflusses der Vernetzungseinheit bei der Anwendung in Rahmen der FEM wird von BERNAUER et al [17] geführt.

Eine Weiterentwicklung des MODIFIZIERTEN GURSON-Modells stammt von GOLOGANU et al [43]. Ausgangsbasis ist eine Matrix mit ellipsoiden Hohlräumen, deren Form und Orientierung sich im Verlauf der Beanspruchung ändern können. Um Schädigung unter Schubbeanspruchung abbilden zu können, ist neben den auch im GURSON-Modell eingesetzten Entstehungs- und Wachstumstermen ein zusätzlicher Schubterm eingeführt worden.

Eine Übersicht weiterer Schädigungsmodelle geben LEMAITRE und CHABOCHE [71]. Dort erfolgt die kontinuumsmechanische Beschreibung der Schädigung – orientiert an den werkstofftechnischen Ursachen – mit der Reduktion der tragenden Fläche im Material.

Für isotrope Schädigung lautet die effektive Spannung $\tilde{\sigma}_{ij}$:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(1-D)} \quad \text{Gl. 2-48}$$

Hierbei ist D die Schädigungsvariable, für die verschiedene isotrope, anisotrope, ein- oder multiaxiale Entwicklungsfunktionen angewendet werden können.

Die Schädigungsentwicklung der Al-Gusslegierung A356 wurde von HORSTEMEYER et al [56] mit verschiedenen experimentellen Methoden untersucht. Mit Bildanalysen von lichtmikroskopischen Schnittaufnahmen und CT-Untersuchungen wurde die Hohlrumentwicklung unter mehrachsigen Zugbeanspruchungen quantifiziert. Dabei wurden gekerbte Zugproben unterschiedlich stark beansprucht und untersucht. Zusätzlich wurden FEM-Berechnungen mit einem Schädigungsmodell [55] durchgeführt, mit dem eine Anfangsschädigung in Form von im unbelasteten Material vorhandenen Hohlräumen als homogen oder als zufällig verteilt abgebildet werden kann.

2.2.3.2 Versagenskriterien

Die Annahme, dass die größte Normalspannung (1. Hauptspannung) ursächlich für das Werkstoffversagen ist, führt zum Versagenskriterium nach RANKINE (vgl. beispielsweise [25]). Dieses Verhalten wird bei spröden Werkstoffen beobachtet und auch als Trennbruch oder Sprödbbruch bezeichnet [110].

Dahingegen liegt ein Gleitbruch vor, wenn die größte Schubspannung zum Versagen führt [110]. In diesem Fall kann als Versagenskriterium das TRESKA-Kriterium (vgl. Kapitel 2.2.2) verwendet werden, das dann nicht den Fließbeginn, sondern das Versagen indiziert.

Ein weiteres druckunabhängiges Versagenskriterium ist das der maximalen äquivalenten plastischen Dehnung. Bei Verwendung der VON MISES Fließfunktion und isotroper Verfestigung führt dieses Kriterium wiederum auf eine VON MISES Vergleichsfunktion.

Erweiterungen der TRESKA- und VON MISES Kriterien, mit denen zusätzlich eine lineare Druckabhängigkeit abgebildet werden kann, stellen die

Kriterien nach MOHR-COULOMB und DRUCKER-PRAGER dar, vgl. beispielsweise [28] oder [25].

Mit dem Versagenskriterium von WILLAM und WARNKE [118] kann in Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck duktiles oder sprödes Versagen modelliert werden. Dieses Kriterium wird oftmals bei der Versagensmodellierung von Beton eingesetzt, vgl. beispielsweise das RHT-Modell [97]. Abbildung 2-4 [97] zeigt neben dem Vergleich der VON MISES, RANKINE und WILLAM-WARNKE Versagensfläche im Deviatorschnitt (links) die verschiedenen Formen der WILLAM-WARNKE Versagensfläche bei unterschiedlichen hydrostatischen Drücken (rechts).

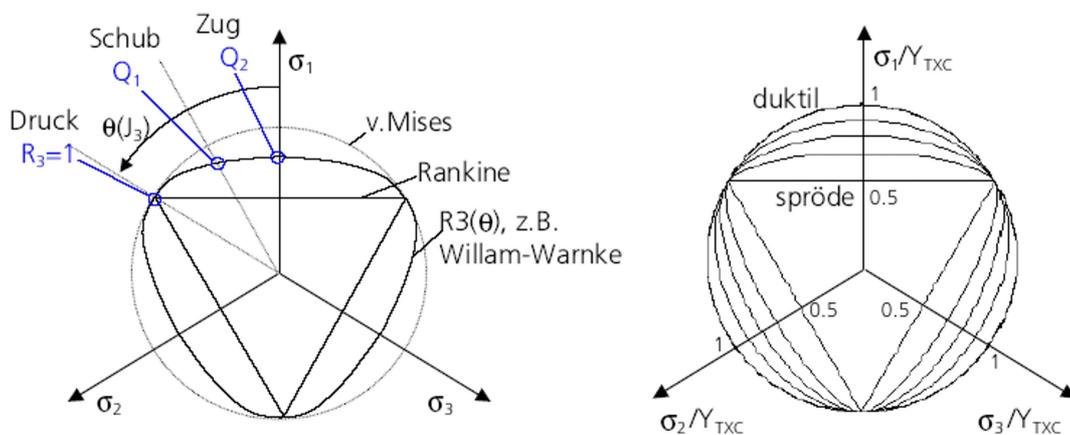


Abbildung 2-4 [97]: Vergleich der VON MISES, RANKINE und WILLAM-WARNKE Versagensflächen im Deviatorschnitt (links) und Form der WILLAM-WARNKE Versagensfläche bei verschiedenen hydrostatischen Drücken (rechts). Mit dieser Versagensfläche kann der Übergang von duktilem zu sprödem Versagen modelliert werden.

Der Einfluss des Spannungszustands auf die Versagensdehnung bei duktilen Werkstoffen ist Gegenstand vieler Untersuchungen. MCCLINTOCK [81] stellt ein Versagenskriterium auf, indem das Wachstum von Hohlräumen in duktilen Matrixwerkstoffen bei verschiedenen Spannungszuständen mit theoretischen Ansätzen analysiert wird. Experimentelle Untersuchungen zur Quantifizierung des Einflusses der Spannungsmehrachsigkeit auf die Versagensdehnung von hochfesten Stählen und von anderen metallischen Werkstoffen werden von MACKENZIE et al [74] sowie HANCOCK und MACKENZIE [49] durchgeführt. In den letztgenannten Arbeiten wird die äquivalente plastische Dehnung als Kriterium für Versagen verwendet, wobei das Überschreiten eines bestimmten Grenzwertes – die Versagensdehnung $\epsilon_{\text{Versagen}}^{\text{plastisch}}$ – für den Eintritt des

Versagens herangezogen wird. Diese Versagensdehnung wird in Abhängigkeit von der Spannungsmehrachsigkeit σ^* und den Werkstoffparametern ϵ_n , α und β definiert:

$$\epsilon_{\text{Versagen}}^{\text{plastisch}} = \epsilon_n + \alpha e^{-\beta \sigma^*} \quad \text{Gl. 2-49}$$

Hierbei entspricht die Spannungsmehrachsigkeit σ^* dem auf die VON MISES Vergleichsspannung bezogenen hydrostatischen Druck:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3\sqrt{3}J_2} \quad \text{Gl. 2-50}$$

JOHNSON und COOK [65] untersuchen neben dem Einfluss der Spannungsmehrachsigkeit auch den der Dehnrates und der Temperatur auf die Versagensdehnung an einem Eisen-, Stahl- und Kupferwerkstoff. Sie erweitern Gl. 2-49 um Dehnraten- und Temperatureinflüsse und versuchen der Pfadabhängigkeit der Schädigungsentwicklung gerecht zu werden, indem sie als Versagenskenngröße den akkumulierten Schädigungsparameter D einführen, wobei $\Delta\kappa$ das Inkrement der äquivalenten plastischen Dehnung ist:

$$D = \sum_i \frac{(\Delta\kappa)_i}{\epsilon_{\text{Versagen}}^{\text{plastisch}}} \quad \text{Gl. 2-51}$$

Versagen tritt ein, wenn die skalare Variable D den Wert 1 erreicht. In Gl. 2-51 beschreibt $\epsilon_{\text{Versagen}}^{\text{plastisch}}$ die plastische Versagensdehnung, die mit dem folgendem Zusammenhang von der Spannungsmehrachsigkeit, der Dehnrates und der Temperatur abhängt:

$$\epsilon_{\text{Versagen}}^{\text{plastisch}} = \left[D_1 + D_2 e^{D_3 \sigma^*} \right] \left[1 + D_4 \ln \dot{\epsilon}^* \right] \left[1 + D_5 T^* \right] \quad \text{Gl. 2-52}$$

In Gl. 2-52 ist $\dot{\epsilon}^*$ die dimensionslose Dehnrates (auf 1/s bezogen) und T^* die so genannte homologe Temperatur (vgl. [64]). Eine Anwendung dieses Versagenskriteriums bei der Modellierung eines duktilen Stahlwerkstoffes erfolgt beispielsweise von ROHR [98].

Eine anschauliche Darstellung dieser beiden ähnlichen Versagenskriterien nach Gl. 2-49 und Gl. 2-52 bei linearen monotonen Beanspruchungen

kann im Hauptspannungsraum erfolgen. Bei Annahme einer VON MISES Fließfunktion und isotroper Verfestigung entsprechen unterschiedlich große plastische Dehnungen unterschiedlich großen deviatorischen Spannungen. Eine Fläche, die den Versagensbeginn kennzeichnet, ist in Abbildung 2-5 dargestellt.

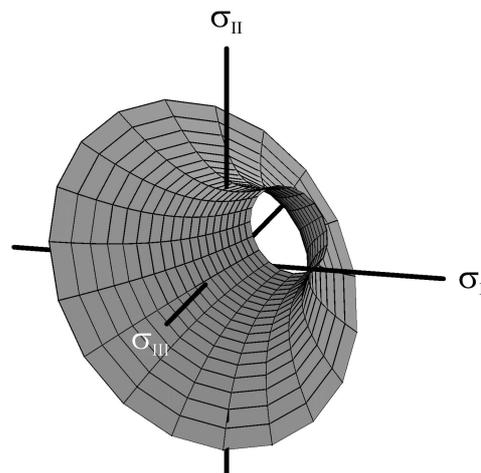


Abbildung 2-5: Schematische Darstellung einer typischen Versagensfläche im Hauptspannungsraum für verfestigende metallische Werkstoffe gemäß Gl. 2-49 bzw. Gl. 2-52. Je höher die Spannungsmehrachsigkeit, desto geringer sind die plastische Versagensdehnungen und damit die deviatorischen Spannungen. Versagen ist unabhängig von dem Lodewinkel.

Die Abbildung 2-5 zeigt anschaulich, dass Versagen gemäß den Gl. 2-49 bis Gl. 2-52 nur von der ersten und zweiten Invariante des Spannungstensors, nicht von dem Lodewinkel abhängt. Ein Versagenskriterium, das auch die dritte Invariante des Spannungstensors berücksichtigt, stellt WILKINS et al [116] vor. Hierzu wird als zusätzlicher Modellbestandteil die Asymmetrie des Spannungstensors eingeführt, wodurch dem vorliegenden Versagensmodus Rechnung getragen werden kann. Neben der Initiierung des Versagens soll mit diesem Modell zugleich die Rissausbreitung abgebildet werden. Um den dann auftretenden Größeneffekt der Bruchmechanik (geometrisch ähnliche, größere Bauteile versagen unter geringeren Nennlasten als kleinere Bauteile, vgl. beispielsweise [15]) abzubilden, wird eine absolute Länge r_c definiert, über der der folgend definierte Schädigungsparameter D den kritischen Wert D_c erreichen muss, damit das Material versagt:

$$D = \int_0^{\epsilon_{\text{äquivalent}}^{\text{plastisch}}} w_1 w_2 d\epsilon_{\text{äquivalent}}^{\text{plastisch}} \quad \text{Gl. 2-53}$$

Der Wichtungsterm w_1 repräsentiert den Einfluss des hydrostatischen Druckes:

$$w_1 = \left(\frac{1}{1 + a \frac{1}{3} \sigma_{kk}} \right)^\alpha \quad \text{Gl. 2-54}$$

Die Asymmetrie des Spannungstensors wird mit Term w_2 erfasst:

$$w_2 = \left(2 - \text{Max} \left(\frac{s_2}{s_3}, \frac{s_2}{s_1} \right) \right)^\beta \quad \text{Gl. 2-55}$$

Den Einfluss des Parameters β auf die Form eines Deviatorschnittes einer zu Abbildung 2-5 analogen Versagensfläche im Hauptspannungsraum zeigt Abbildung 2-6:

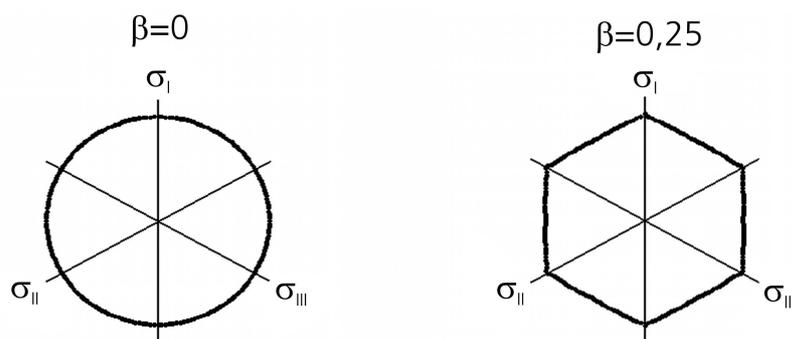


Abbildung 2-6: Durch den Modellparameter β ermöglichte Berücksichtigung der Asymmetrie des Spannungszustandes bei dem Versagenskriterium von WILKINS et al [116]. Gezeigt sind Deviatorschnitte einer dem Versagenskriterium äquivalenten Versagensfläche im Hauptspannungsraum.

Mit der Wahl des Parameters β lässt sich der Einfluss der Spannungsasymmetrie am Versagen festlegen. Bei der Anwendung des Kriteriums in einem FEM-Programm wird von WILKINS et al [116] eine auf die Elementkantenlänge Δx bezogene Definition der kritischen Schädigung D_F empfohlen:

$$D_F = \frac{2D_C r_C}{\Delta x} \quad \text{Gl. 2-56}$$

WERNER et al [113] stellen ein Versagenskriterium für Blechwerkstoffe vor, bei dem die verschiedenen Versagensmechanismen Scherbruch, duktiles

Versagen und Instabilität unterschieden werden. Eine ähnliche Aufteilung der Versagenskurve nehmen BAO und WIERZBICKI [7] vor. Der Verlauf der Versagensdehnung bzw. Schädigung über der Spannungsmehrachsigkeit lässt sich in zwei Bereiche unterteilen, wobei der Übergang vom Scherversagen zum duktilen Versagen durch einen Knick in der Versagenskurve gekennzeichnet ist. Abbildung 2-7 zeigt die von BAO und WIERZBICKI [7] ermittelte Versagenscharakteristik für die Aluminium-Knetlegierung 2024T35.

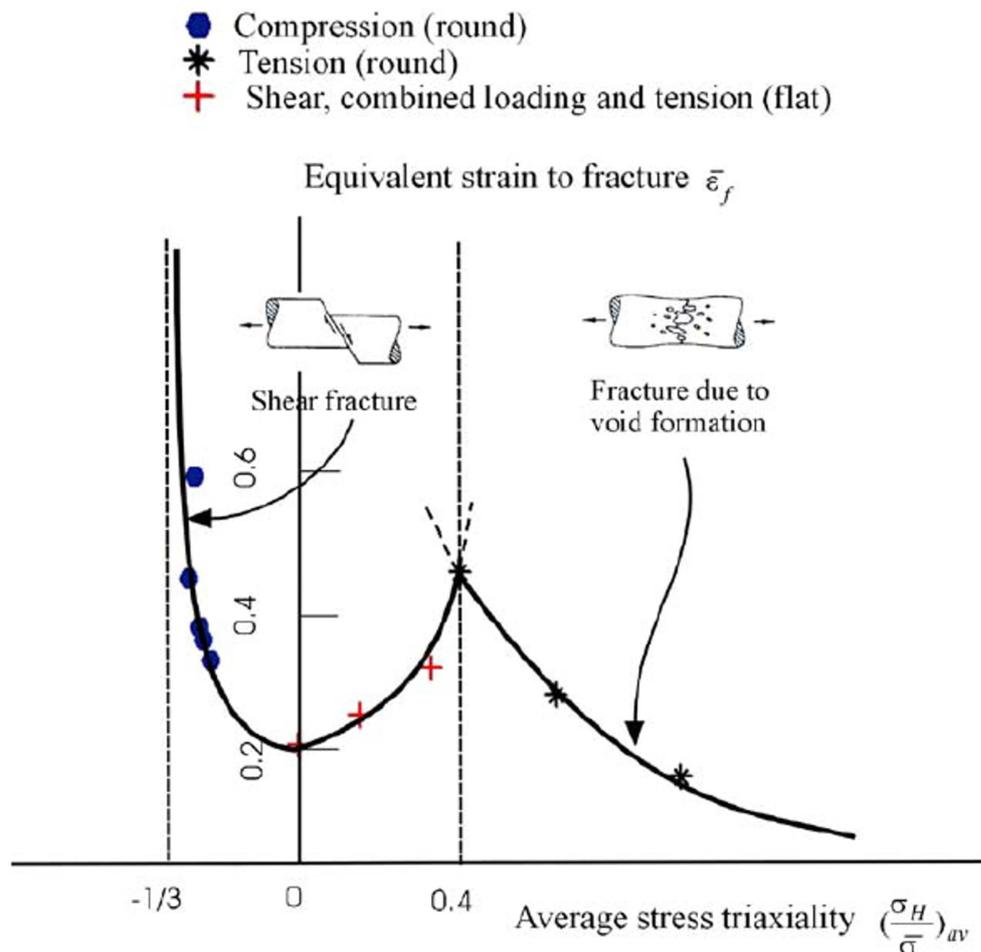


Abbildung 2-7 [7]: Versagenskurve für die Aluminium-Knetlegierung 2024T351 nach BAO und WIERZBICKI [7]. Hier bezeichnet „Average stress triaxiality“ die Spannungsmehrachsigkeit σ^* . Die Versagensmoden Scherversagen und duktilen Versagen werden unterschieden. Nach dieser Versagenskurve liegt die Versagensdehnung unter reiner Schubbeanspruchung bei weniger als 50 % der Versagensdehnung bei einer Spannungsmehrachsigkeit von 0,4.

Die hier ermittelte Versagensdehnung unter reiner Schubbeanspruchung ist im Vergleich zu der bei einer Spannungsmehrachsigkeit von 0,4 deutlich niedriger (etwa 0,2 im Vergleich zu etwa 0,45). Bei höherer

Spannungsmehrachsigkeit fällt die Versagensdehnung erwartungsgemäß wieder ab. Die Approximationsfunktion der Messdaten ist daher im Gegensatz zu den vorher diskutierten Modellen nicht monoton fallend zu höheren Spannungsmehrachsigkeiten, sondern weist ein lokales Maximum im Bereich der einachsigen Zugbeanspruchung auf.

Bei allen oben beschriebenen schädigungsbasierten Modellen wird eine skalare Variable als Kriterium für das Versagen verwendet. Dabei geht die Information verloren, bei welchen Spannungszuständen die Schädigung entstanden ist. Dagegen kann mit einer tensoriellen Beschreibung der Schädigung diese Information erhalten werden. Ein solches tensorielles Schädigungsmodell wird beispielsweise in [30] vorgestellt.

2.3 Numerische Lösungsverfahren

Im folgenden Kapitel werden die mathematischen Lösungsverfahren für die in Kapitel 2.2.2 dargestellten Erhaltungsgleichungen beschrieben. Diese Lösungsverfahren sind Näherungsverfahren, d. h., sie sind mit gewissen Fehlern behaftet, die unter Umständen quantifiziert werden müssen. Eine zu diesem Zweck einsetzbare Fehler-Abschätzungsprozedur wird ebenfalls vorgestellt. Abschließend werden Methoden zur Lösung von elastisch-plastischen Materialgleichungen zusammengefasst.

2.3.1 Finite Element Methode und Zeitintegration

Die Finite Elemente Methode wird in zahlreichen Fachbüchern und umfangreichen Theorie-Handbüchern von Berechnungsprogrammen beschrieben, auf denen auch die folgenden Ausführungen beruhen (vgl. [92], [14], [117], [121], [105], [48], [108], [42] oder [59]).

Abbildung 2-8 zeigt einen Körper in der Ausgangskonfiguration im Gebiet Ω^0 und in der aktuellen Konfiguration im Gebiet Ω .

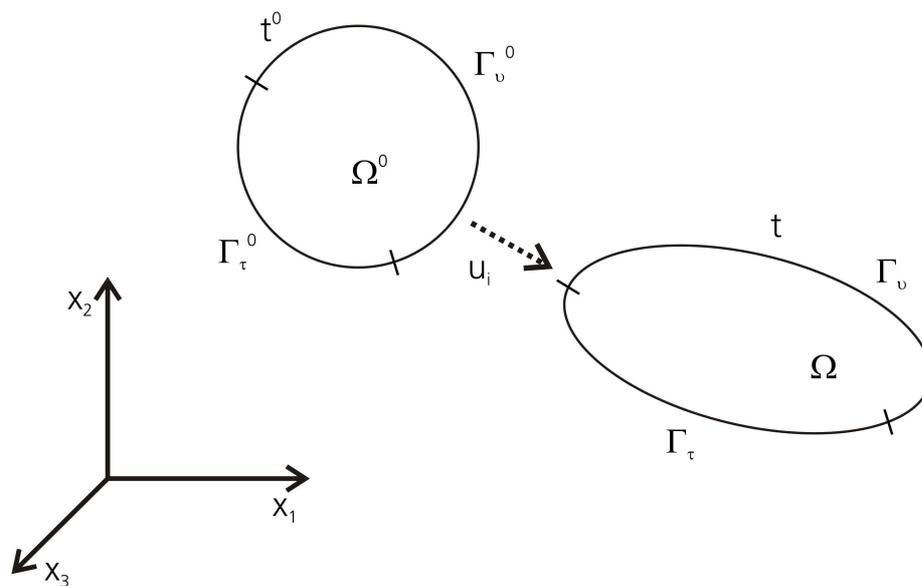


Abbildung 2-8: Bewegung eines Körpers, die von den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t^0 sowie den kinematischen Randbedingungen Γ_u und Traktionsrandbedingungen Γ_t abhängt.

Die Bewegung des Körpers hängt einerseits von ihrem Zustand zum Referenzzeitpunkt t^0 , den Anfangsbedingungen, andererseits von Randbedingungen ab. Diese Randbedingungen bestehen entweder aus kinematischen Zwangsbedingungen (wesentliche Randbedingungen), die auf den Rand Γ_u wirken, oder aus Randbedingungen, die Kräfte bzw. Spannungen (Traktionen) auf den übrigen Teil der Berandung Γ_t aufbringen (natürliche Randbedingungen). Weiterhin können Volumenkräfte auf den Körper wirken. Für den Körper müssen jederzeit die physikalischen Grundgleichungen (Kapitel 2.2.2) und die konstitutiven Gleichungen (Kapitel 2.3) erfüllt sein. Sie bestimmen zusammen mit den Anfangs- und Randbedingungen seine Bewegung. Die in dieser Arbeit betrachteten transienten Bewegungen fester Körper werden zweckmäßig in der LAGRANGE'SCHEN Betrachtungsweise formuliert. Daher muss die Kontinuitätsgleichung nicht explizit gelöst werden. Sofern der Druck und damit der Bewegungszustand für die zu berechnenden Werkstoffe in dem betrachteten Temperaturbereich nicht von der inneren Energie abhängt, muss auch die Energieerhaltungsgleichung nicht zwingend gelöst werden. Beispielsweise kann bei Fahrzeugcrashvorgängen die Erhöhung der inneren Energie infolge einer Temperaturerhöhung vernachlässigt werden, muss aber bei Hochgeschwindigkeits-Impaktvorgängen betrachtet werden. Die zentrale Gleichung, die den Bewegungszustand beschreibt, ist daher die Impulserhaltungsgleichung, Gl. 2-22. Bei kleinen Verformungen zwischen der Referenzkonfiguration und der aktuellen Konfiguration kann die Deformation mit dem infinitesimalen

Dehnungstensor beschrieben werden. Große Verformungen können wiederum in eine Folge kleiner Verformungen zerlegt werden, wobei die jeweils zuletzt ermittelte aktuelle Konfiguration als Referenzkonfiguration für den nächsten Schritt dient. Diese Vorgehensweise wird in der englischsprachigen Literatur UPDATED LAGRANGE Methode genannt und steht im Gegensatz zu der TOTAL LAGRANGE Methode, bei der die Referenzkonfiguration die gleiche bleibt.

Eine äquivalente Formulierung zu der Impulserhaltungsgleichung in differenzieller Form in Verbindung mit den gegebenen Randbedingungen kann mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit gewonnen werden. Dabei werden mit den wesentlichen Randbedingungen verträgliche, virtuelle Verschiebungen auf das betrachtete Gebiet aufgebracht und die gesamte innere Arbeit mit der äußeren Arbeit gleichgesetzt. Wenn die natürlichen Randbedingungen als Spannungsvektoren ausgedrückt werden, lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \rho b_i \right) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\tau}} (\sigma_{ji} n_j - \tau_i) \delta u_i d\Gamma_{\tau} = 0 \quad \text{Gl. 2-57}$$

Nach der Anwendung des GAUSS'SCHEN Integralsatzes und der Produktregel nimmt Gl. 2-57 die folgende Form an:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{dv_i}{dt} \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i d\Omega = \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\tau}} \tau_i \delta u_i d\Gamma_{\tau} \quad \text{Gl. 2-58}$$

Diese mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit hergeleitete Darstellungsform wird im Gegensatz zur starken Form (Gl. 2-22) schwache Form der Impulserhaltungsgleichung genannt. Sie impliziert die wesentlichen Randbedingungen durch die Wahl der virtuellen Verschiebungen und die natürlichen Randbedingungen durch das Flächenintegral. Gl. 2-58 stellt eine kombinierte Anfangs-/Randwertaufgabe. In dem in dieser Arbeit verwendeten Berechnungsprogramm [92] wird zur Lösung der Randwertaufgabe die Finite-Elemente-Methode genutzt, vgl. Kapitel 2.3.1.1. Die Anfangsaufgabe wird mit einem expliziten Finiten Differenzen Ansatz gelöst (Kapitel 2.3.1.2). Mit dieser Form der Zeitintegration kann ein sehr effizienter Berechnungsablauf aufgestellt werden, der in Kapitel 2.3.1.3 erläutert wird.

2.3.1.1 Räumliche Diskretisierung

Bei der FEM wird zunächst das betrachtete Gebiet in Untergebiete, die so genannten finiten Elemente, unterteilt:

$$e_{\Omega^0} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{Elemente}}} e_{\Omega^0} \quad \text{Gl. 2-59}$$

Für jedes Element werden Näherungsfunktionen ${}^e u_i$ formuliert, mit denen die tatsächliche Lösung für das Verschiebungsfeld angenähert werden soll.

$${}^e u_i = \sum_{a=1}^n k_{u_{ia}} N_a, \text{ bzw. in vektorieller Schreibweise} \quad \text{Gl. 2-60}$$

$${}^e u_i = k_{\bar{u}_i} \bar{N}$$

Hierbei sind n die Anzahl der Knoten des jeweiligen Elementes, N_a linear unabhängige Ansatzfunktionen und $k_{u_{ia}}$ die Werte der Verschiebungen an den Knoten des Elementes. Die Knotenverschiebungen beschreiben die Näherungslösung vollständig und sind daher die zu bestimmenden Größen. Die in den FEM-Berechnungen dieser Arbeit verwendeten 8-knotigen isoparametrischen Elemente haben trilineare Ansatzfunktionen:

$$N_a = \frac{1}{8} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) (1 + \zeta_a \zeta) \quad \text{Gl. 2-61}$$

Sie werden in den lokalen Elementkoordinaten ξ , η und ζ formuliert, die jeweils von -1 bis 1 innerhalb des Elements definiert sind. Die Parameter ξ_a , η_a und ζ_a sind je nach Wahl der lokalen Koordinatenrichtungen und den Knotennummerierungskonventionen des Elementes 1 oder -1, vgl. [92]. Innerhalb der Elemente ist die Näherung differenzierbar, zwischen den Elementen jedoch nur stetig. Diese Näherung wird daher auch C^0 kontinuierlich genannt, da sie nur bis zur 0-ten Ableitung stetig ist.

Die Finite-Elemente Diskretisierung der Impulserhaltungsgleichung in ihrer schwachen Form (Gl. 2-58) nimmt unter Verwendung der Gleichungen Gl. 2-59 und Gl. 2-60 folgende Form an:

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{\text{Elemente}}} & \left[\int_{e\Omega} \rho \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} d^e\Omega \frac{d^2 k_{\tilde{\mathbf{u}}_i}}{dt^2} + \int_{e\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial x_j} \sigma_{ji} d^e\Omega \right. \\ & \left. = \int_{e\Omega} \rho b_i \bar{\mathbf{N}}^T d^e\Omega + \int_{e\Gamma_\tau} \tau_i \bar{\mathbf{N}}^T d^e\Gamma_\tau \right] \quad \text{Gl. 2-62} \\ & = M \frac{d^2 k_{\tilde{\mathbf{u}}_i}}{dt^2} + f^{\text{int}} = f^{\text{ext}} \end{aligned}$$

Wobei $k_{\tilde{\mathbf{u}}_i}$ der Vektor der jeweiligen Knotenverschiebungskomponente aller Knoten im Gebiet ist.

2.3.1.2 Zeitliche Diskretisierung

Die Zeitintegration der Gl. 2-62 erfolgt i. d. R. mit einem Finiten-Differenzen-Verfahren. Die verschiedenen Varianten dieser Verfahren unterscheiden sich im Wesentlichen darin, welche Größen zu welchen Zeitpunkten bekannt sein müssen. Bei den impliziten Verfahren werden die zunächst unbekanntesten Beschleunigungen zum Zeitpunkt t_{n+1} verwendet, um auf die gesuchten Verschiebungen zum Zeitpunkt t_{n+1} zu schließen. Die Beschleunigungen hängen von den inneren Kräften ab. Um also auf den unbekanntesten Zustand t_{n+1} schließen zu können, muss die Randwertaufgabe im betrachteten Gebiet gelöst werden. Im Gegensatz dazu werden bei den expliziten Verfahren nur die bekannten Beschleunigungen zum Zeitpunkt t_n verwendet, um auf die Verschiebungen zum Zeitpunkt t_{n+1} zu schließen. Die Randwertaufgabe muss hierbei nicht gelöst werden. Allerdings dürfen dann nur Zeitintervalle betrachtet werden, die so klein sind, dass sich in ihnen die Beschleunigungen infolge innerer Kräfte nicht ändern. Ein Knoten darf daher nur so lange als von seinen Nachbarknoten unabhängig betrachtet werden, wie die Ausbreitung der inneren Kräfte von den Nachbarknoten zu dem betrachteten Knoten dauert. Die maximale Zeitschrittgröße wird daher von der Elementgröße und der Ausbreitungsgeschwindigkeit der inneren Kräfte im Gebiet bestimmt. Diese Bedingung an die Stabilität des Lösungsverfahrens wird COURANT-FRIEDRICH-LEVY Kriterium genannt, vgl. [92]. Das in dieser Arbeit verwendete FEM-Berechnungsprogramm

verwendet zur zeitlichen Integration der Gl. 2-62 das zentrale Differenzen-Verfahren mit folgender Berechnungsvorschrift:

$$\ddot{u}_n = M^{-1} (f_n^{\text{ext}} - f_n^{\text{int}})$$

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}_{n-\frac{1}{2}} + \ddot{u}_n \Delta t_n \quad \text{Gl. 2-63 a-c}$$

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_{n+\frac{1}{2}} \Delta t_{n+\frac{1}{2}}$$

Zur vereinfachten Darstellung steht hier der Index n für den Zeitpunkt t des Zeitschrittes n , \dot{u} für $\frac{d^k \tilde{u}_i}{dt}$ und \ddot{u} für $\frac{d^2 k \tilde{u}_i}{dt^2}$.

2.3.1.3 Entkopplung der Gleichungen und Berechnungsablauf

Neben den in Gl. 2-63 a aufgeführten inneren und äußeren Knotenkräften müssen unter Umständen zusätzlich Kontakt- und Dämpfungskräfte (u. a. „Hourglass“-Dämpfung und künstliche Viskosität) berücksichtigt werden. Detaillierte Ausführungen hierzu können [117] oder [92] entnommen werden.

Ein wichtiger Aspekt zur Beurteilung der Effizienz der Lösung der Gleichungen Gl. 2-63 a-c besteht darin, dass die Massenmatrix M nicht diagonal ist. Sie wird als konsistente Massenmatrix bezeichnet. Bei Verwendung dieser Massenmatrix sind die Gleichungen nicht vollständig entkoppelt. Anstelle der konsistenten Massenmatrix kann aber auch eine konzentrierte (engl.: „lumped“) Massenmatrix verwendet werden, bei der die Elementmasse auf die Knoten konzentriert wird. Dies kann mit verschiedenen Verfahren geschehen, wovon einige in [92] näher beschrieben werden. Durch diese Maßnahme vereinfacht sich der Berechnungsablauf, da die Gleichungen nun voneinander unabhängig sind. Es muss dann kein Gleichungssystem gelöst werden, sondern ein Satz von unabhängigen Gleichungen. Eine vereinfachte Darstellung des Berechnungsablaufes ist Abbildung 2-9 dargestellt.

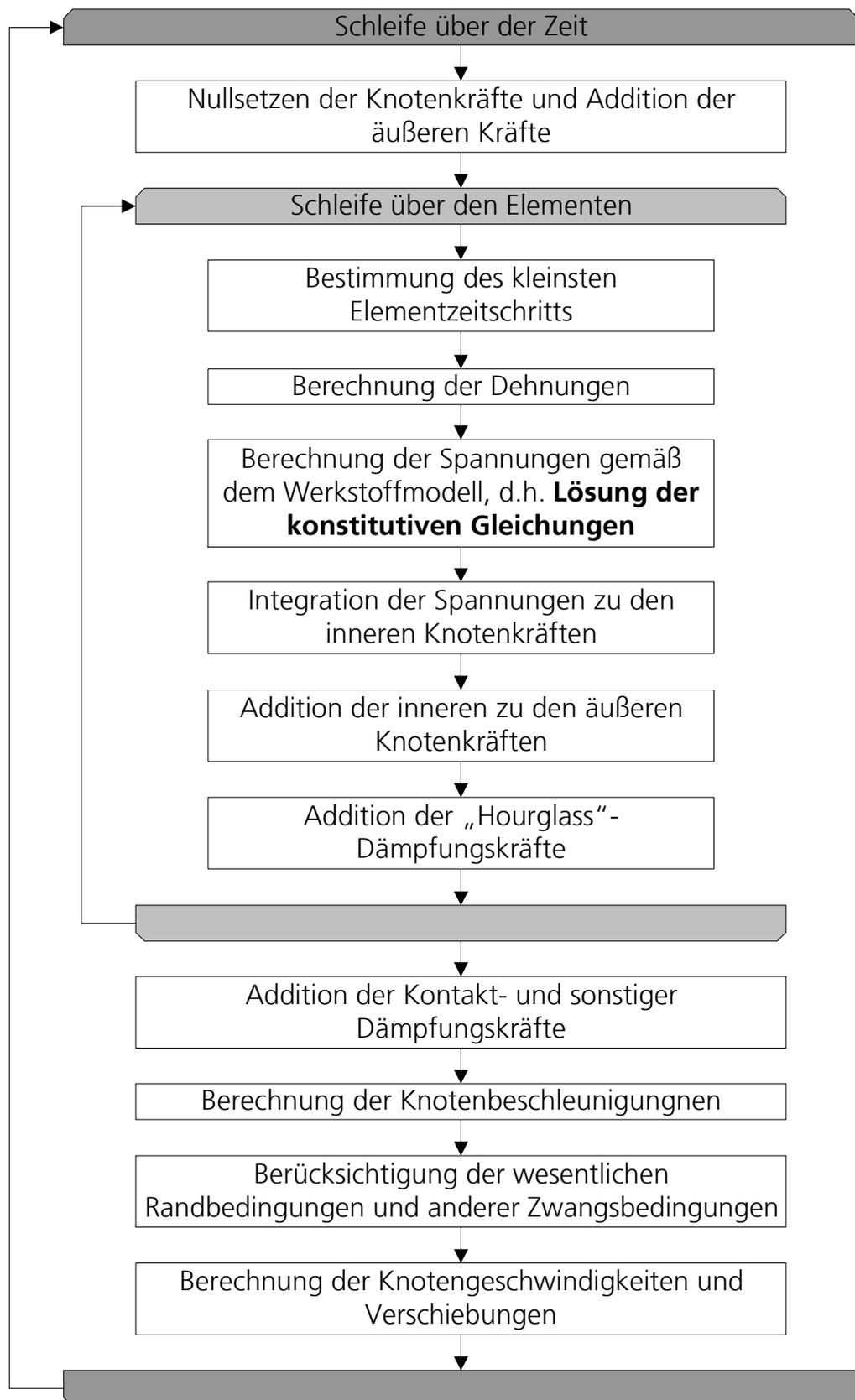


Abbildung 2-9: Berechnungsablauf eines LAGRANGE'SCHEN FEM-Programms mit expliziter Zeitintegration.

2.3.1.4 Fehlerabschätzung auf Basis einer Rekonstruktion der Gradienteninterpolation (engl.: RECOVERY-BASED ERROR ESTIMATION)

Fehlerabschätzungen ermöglichen Aussagen zur Güte der mit einer FEM-Berechnung verbundenen Näherung. Insbesondere wenn ein wesentliches Ergebnis einer FEM-Simulation von der korrekten Prognose der lokalen Gradienten abhängt, d.h. von den Dehnungen und damit auch von den Spannungen, ist es unerlässlich, den durch die räumliche Diskretisierung hervorgerufenen Fehler zu betrachten. Zur Abschätzung derartiger Vernetzungsfehler gibt es eine Vielzahl von A POSTERIORI Verfahren. Eine Übersicht solcher Methoden geben [1], [2] oder [107]. Im Folgenden wird eine dieser Methoden zusammengefasst, die auf der Tatsache beruht, dass die realen Gradienten des Verschiebungsfeldes kontinuierlich (bis zu beliebiger Ordnung) sind, die Näherungslösungen bei Elementansätzen niedriger Ordnung jedoch nicht. Diese Diskontinuität der Näherungslösung ${}^e u$ kann zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers herangezogen werden.

Der wahre Fehler in der Energienorm lautet:

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial {}^e u_i}{\partial x_j} \right|^2 d\Omega \quad \text{Gl. 2-64}$$

Da die tatsächliche Lösung u nicht bekannt ist, müssen Näherungen für den Gradienten gefunden werden. Wenn eine solche Näherung mit der Funktion $G({}^e u_i)$ ausgedrückt wird, nimmt der geschätzte Fehler die folgende Form an:

$$\eta^2 = \int_{\Omega} \left| G({}^e u_i) - \frac{\partial {}^e u_i}{\partial x_j} \right|^2 d\Omega \quad \text{Gl. 2-65}$$

Die Aufgabe in der Fehlerabschätzung besteht nun in der geeigneten Definition der Approximationsfunktion G .

Einen sehr effizienten Weg zur Bestimmung von G bietet die RECOVERY-BASED Methode (ZIENKIEWICZ und ZHU [120], [1]). Diese basiert darauf, dass der Fehler der FEM-Lösung an sogenannten superkonvergenten Punkten am geringsten ist (vgl. beispielsweise [6]). Die Lösung an diesen Punkten wird nun genutzt, um an den Knoten über alle benachbarten Elemente

gemittelte Werte für die Gradienten zu berechnen. Diese Knotenwerte der Gradienten liefern mit den Interpolationsfunktionen der Elemente die Funktion G , die kontinuierlich bis zur gleichen Ordnung wie der Verschiebungsansatz ist.

Auch in Fällen, in denen die Superkonvergenz nicht mehr zutrifft, kann die Fehlerabschätzung auf Basis dieser Eigenschaft sehr gute Ergebnisse liefern [1]. Neben dieser Robustheit ist der größte Vorteil dieses Verfahrens gegenüber anderen Methoden die Einfachheit der Implementierung und Schnelligkeit in der Anwendung.

2.3.2 Lösungsmethoden für Plastizitätsmodelle

Die Lösung der konstitutiven Gleichungen ist eine der zentralen Aufgaben bei der FEM, vgl. Abbildung 2-9. Für Problemstellungen, bei denen elastisch-plastisches Materialverhalten auftritt, werden besondere Verfahren benötigt, da die Lösung nicht direkt erfolgen kann. Auf Basis der bei kleinen Verformungen zulässigen additiven Zerlegung der Dehnung (Gl. 2-31) muss bestimmt werden, wie groß jeweils die elastischen und plastischen Dehnungsanteile sind. Dies geschieht meist mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren, bei dem im Prädiktor-Schritt angenommen wird, dass die Verformungen elastisch sind. Die mit dieser Annahme berechneten Testspannungen (engl.: „trial stresses“) werden dann in die Fließbedingung (Gl. 2-36) eingesetzt. Wenn die Testspannung die Fließgrenze überschreitet, ist die Annahme einer rein elastischen Verformung widerlegt. Es müssen dann die plastischen Anteile an der Gesamtdehnung bestimmt werden, sodass Gl. 2-36 und Gl. 2-41 erfüllt sind. Die Art der numerischen Bestimmung der plastischen Dehnungsanteile, d. h., die Integration der Fließregel (Gl. 2-41), ist das Hauptunterscheidungsmerkmal der verschiedenen Lösungsverfahren in der Plastizität.

Die meisten Methoden lassen sich auf die verallgemeinerte Mittelpunktsregel (Gl. 2-66) oder die verallgemeinerte Trapezregel (Gl. 2-67) zurückführen (vgl. [91]):

$$\text{Mittelpunktsregel: } \Delta \varepsilon_{ij}^{\text{plast}} = \Delta \lambda \left. \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \kappa)}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{n+\alpha} \quad \text{Gl. 2-66}$$

$$\text{Trapezregel: } \Delta \varepsilon_{ij}^{\text{plast}} = \Delta \lambda \left((1-\alpha) \left. \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \kappa)}{\partial \sigma_{ij}} \right|_n + \alpha \left. \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \kappa)}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{n+1} \right) \quad \text{Gl. 2-67}$$

Der Parameter α bestimmt bei der Mittelpunktsregel, wann die Ableitungen der Fließfunktion gebildet werden; bei der Trapezregel legt der Parameter α fest, welche Anteile die Ableitungen zum Schritt n und $n+1$ an der Näherungslösung haben. Für $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ sind die verallgemeinerte Mittelpunktsregel und die Trapezregel identisch. Für $\alpha = 0$ liegt ein VORWÄRTS-EULER-Verfahren vor, bei dem alle zur Ableitung benötigten Größen (Spannung, Verfestigungsparameter) bekannt sind, weshalb diese Variante auch als explizit bezeichnet wird. Nachteilig bei der Wahl dieses Integrationsalgorithmuses ist die nicht-bedingungslose Stabilität. Als weiterer Nachteil kann angesehen werden, dass bei dem Übergang von rein elastischem zu elastisch-plastischem Verhalten der Spannungspunkt auf der Fließfläche ermittelt werden muss. Ein Vertreter der expliziten Verfahren ist das so genannte CUTTING-PLANE-Verfahren (vgl. [104]). Hierbei wird iterativ auf Basis der linearisierten Fließbedingung und der expliziten Lösung der Fließregel Konsistenz herbeigeführt. Wenn der Parameter $\alpha \geq 0.5$ gewählt wird, sind beide Verfahren bedingungslos stabil. Das von RICE und TRACY [96] vorgestellte SECANT-STIFFNESS-Verfahren geht aus der verallgemeinerten Trapezregel mit $\alpha = 0.5$ in Verbindung mit quadratischen Fließfunktionen hervor [91]. Für $\alpha=1$ entsteht das voll-implizite RÜCKWÄRTS-EULER-Verfahren, bei dem die Ableitungen zu dem gesuchten Zeitpunkt gebildet werden. Neben der Stabilität weist diese Variante der Integration der Gl. 2-66 eine hohe Genauigkeit auf [29]. Nachteilig bei allgemeinen Fließfunktionen sind die großen rechnerischen Umfänge und der hohe Implementierungsaufwand, da zur effizienten numerischen Lösung mit einem iterativen Verfahren wie dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren die Hesse-Matrix der Fließfunktion aufgestellt werden muss. Diese allgemeine Form der RÜCKWÄRTS-EULER Integration der Fließregel ist auch als CLOSEST-POINT-PROJECTION (vgl. [104]) bekannt. Allerdings vereinfacht sich für bestimmte plastische Potenziale in

Verbindung mit linear-elastischem Verhalten das RÜCKWÄRTS-EULER-Verfahren entscheidend: Für quadratische plastische Potenziale wie beispielsweise die VON MISES Fließfunktion (vgl. Kapitel 2.3.2) entspricht die Fließrichtung, d.h. die Ableitung der Fließfunktion nach der Spannung, der Richtung der deviatorischen Spannungen. Ebenso entspricht die Richtung der deviatorischen elastischen Dehnung der Richtung der deviatorischen Spannungen (vgl. HOOKE'SCHES Gesetz Kapitel 2.3.1), sodass die deviatorischen elastischen Dehnungen die gleiche Richtung wie die plastischen Dehnungsanteile haben. Daher weist der elastische Testspannungszustand in die Richtung der gesuchten plastischen Dehnungen, und es ist nur noch der Betrag der plastischen Dehnung unbekannt. Dieses Verfahren wird RADIAL-RETURN Verfahren genannt und wurde von WILKINS [115] vorgestellt.

Bei einer assoziierten Fließfunktionen gemäß Gl. 2-46 mit einem Exponenten $n=8$ kann das RADIAL-RETURN Verfahren nicht verwendet werden, da die Richtungen der Spannungen und der plastischen Dehnungen nur für bestimmte Spannungszustände – mit einem Lodewinkel von einem ganzzahligen Vielfachen von 30° – übereinstimmen. Die Ableitung einer solchen Fließfunktion nach den Komponenten des Spannungstensors erfordert eine analytische Formulierung der Eigenwerte, die für spurlose Tensoren von BARLAT et al [11] dargestellt und in Gl. 2-68 a-f wiedergegeben ist:

$$H_2 = \frac{s_{yz}^2 + s_{zx}^2 + s_{xy}^2 - s_y s_z - s_z s_x - s_x s_y}{3}$$

$$H_3 = \frac{s_x s_y s_z + 2 s_{yz} s_{zx} s_{xy} - s_x s_{yz}^2 - s_y s_{zx}^2 - s_z s_{xy}^2}{2}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{H_3}{\frac{H_2}{\sqrt{3}}} \right)$$

Gl. 2-68 a-f

$$s_I = 2\sqrt{H_2} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$s_{II} = 2\sqrt{H_2} \cos\left(\frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$s_{III} = 2\sqrt{H_2} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Von BRON und BESSON [23] wird eine anisotrope nicht-quadratische Fließfunktion vorgestellt, die auf Basis der Eigenwertermittlung gemäß Gl. 2-68 a-f für dreidimensionale Spannungszustände mit einem voll-impliziten Algorithmus (vgl. Kapitel 2.3.2) implementiert wird. Da der Definitionsbereich der Gl. 2-68 a-f eingeschränkt ist ($H_2 \geq 0$ und

$$-1 \leq \left(\frac{H_3}{H_2^{3/2}} \right) \leq 1),$$

werden im Falle einer Verletzung des Definitionsbereichs die erforderlichen Ableitungen pauschal durch die vorher bestimmten Grenzwerte ersetzt. Die Ermittlung der ersten (für die Fließrichtung) und zweiten Ableitungen (für das iterative Lösungsverfahren) werden dort mit einem Computeralgebraprogramm [87] durchgeführt.

2.4 Experimentelle Methoden der Werkstoffcharakterisierung

Zur Charakterisierung der Fließ- und Versagensflächen (vgl. Abbildung 4-1 und Abbildung 5-1) können Druckversuche, Schubversuche sowie ein- und mehrachsige Zugversuche herangezogen werden. Grundsätzlich sind auch Versuche an Hohlzylindern geeignet, um näherungsweise alle zweiachsigen Zustände durch Überlagerung von axialem Zug bzw. Druck, Torsion und Innen- bzw. Außendruck herbeizuführen. Da in der vorliegenden Arbeit die Proben aus dünnwandigen Bauteilen entnommen werden, können naturgemäß keine Versuche an Hohlzylindern durchgeführt werden. Tiefungsversuche führen zwar zu zweiachsigen Zugspannungszuständen, doch sind diese aufgrund der globalen Biegung der Probe nicht homogen. Bei diesen Vorgaben ist der Kreuzzugversuch zur Untersuchung zweiachsiger Zugspannungszustände von besonderem Interesse. Daneben sind vor dem Hintergrund der Bedeutung des Schubversagens (vgl. Kapitel 2.3.3) Schubversuche in der Ebene hinsichtlich der Versagensinitiierung zu bewerten (vgl. Abbildung 1-6). Im Folgenden wird eine kurze Übersicht über die verschiedenen Varianten dieser beiden Versuchskategorien gegeben.

2.4.1 Varianten des Kreuzzugversuchs

Zugversuche an kreuzförmigen Proben werden in vielen Variationen durchgeführt. Dabei wird stets versucht, für die zwei gegenläufigen Ziele – einerseits einen möglichst homogenen Spannungszustand im Messbereich der Probe zu erzeugen und andererseits ein möglichst spätes Versagen an dieser Stelle der Probe herbeizuführen – einen optimalen Kompromiss zu finden. Die Varianten des Kreuzzugversuches lassen sich in drei Gruppen aufteilen:

- Proben mit homogenem Querschnitt und homogenen Materialeigenschaften
- Proben mit zum Probenzentrum hin verringertem Querschnitt und homogenen Materialeigenschaften
- Proben mit lokal unterschiedlichen Materialeigenschaften

Je einen Vertreter dieser Gruppen zeigt Abbildung 2-10.

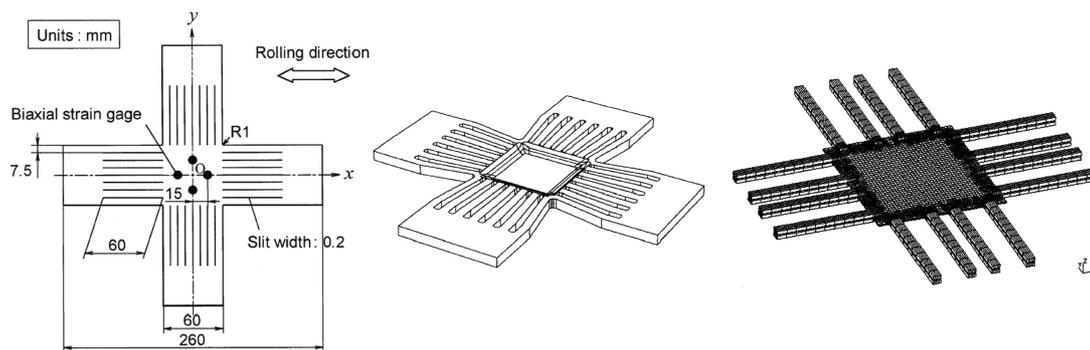


Abbildung 2-10: Beispiele für verschiedene Probengeometrien beim Kreuzzugversuch. Links ist eine Probe mit homogenem Querschnitt und gleichmäßig geschlitzten Armen abgebildet [70]. Dahingegen weist die in der Mitte abgebildete Probe keinen homogenen Querschnitt auf. Im Probenzentrum ist die Probe verjüngt [68]. Eine Variante, bei der die Kräfteinleitung über andere Werkstoffe als den zu Untersuchenden erfolgt, ist rechts in der Abbildung dargestellt. Hier wird die Kraft über senkrecht zur Kraftrichtung frei gelagerte Arme mittels einer Klemmung in die quaderförmige Probe eingeleitet [54].

Links ist eine Probe mit homogenem Querschnitt und gleichmäßig geschlitzten Armen abgebildet, wie sie beispielsweise von KUWABARA et al [70] verwendet wird. Ein Vertreter der zweiten Gruppe, also mit nicht-homogenem Querschnitt ist in der Mitte der Abbildung 2-10 dargestellt [68]. Weitere Beispiele von Probengeometrien dieser Art können in [68], [3], [33] oder [44] gefunden werden. Die dritte Kategorie von Kreuzzugproben realisieren MATHIAK et al [80] und HOFERLIN et al [54] auf unterschiedliche Weise. MATHIAK et al [80] schweißen an einen quaderförmigen Messbereich höher feste Arme zur Kräfteinleitung, um ein frühes Versagen der Arme zu unterbinden. Dahingegen gehören bei HOFERLIN et al [54] die Arme zur Prüfeinrichtung. Sie werden direkt an die quaderförmige Probe geklemmt. Darüber hinaus sind dort die Arme senkrecht zur Kräfteinleitung frei gelagert, um die Verstärkungswirkung senkrecht zur Wirkrichtung zu reduzieren. Diese Variante ist in Abbildung 2-10 rechts wiedergegeben.

2.4.2 Varianten des Schubversuchs

Eine Übersicht von verschiedenen Schubversuchen, deren Proben aus ebenen Bauteilen bzw. Blechen erzeugt werden können, verschafft Abbildung 2-11.

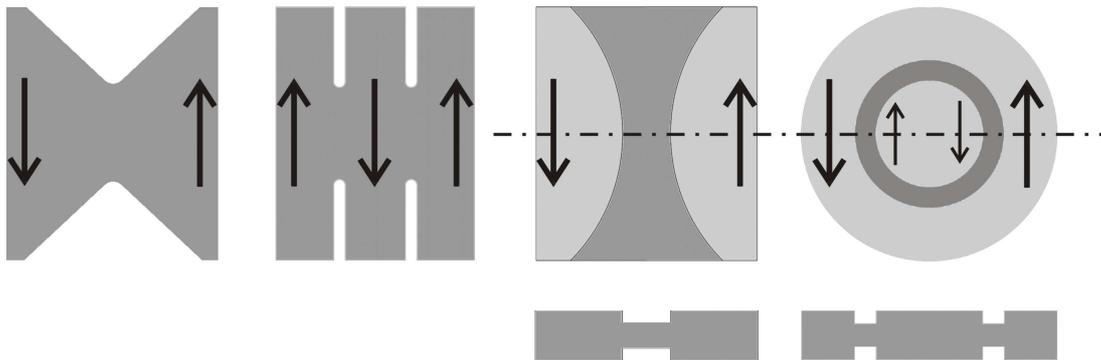


Abbildung 2-11: Übersicht von verschiedenen Prinzipien und Probengeometrien für Schubversuche. Links ist der Versuch nach ARCAN [5] dargestellt. Daneben ein Abscherversuch (MIYAUCHI [86]), wie er bei der Prüfung von Blechen eingesetzt wird. Die zweite Skizze von rechts stellt einen von BAO und WIERZBICKI [8] vorgeschlagenen Versuch schematisch dar und ganz rechts ist eine Probe für ebene Torsion dargestellt, die von DELL und GESE [32] verwendet wird.

Bei allen diesen Versuchen wird die Schubbeanspruchung durch eine Abscherung erzeugt, d. h., die Kräfte werden tangential in die zu prüfenden Bereiche eingebracht. Links in Abbildung 2-11 ist schematisch der Schubversuch nach ARCAN [5] abgebildet. Die Probe wird fest in einen Rahmen eingespannt, der konzentrisch zur Kerbe der Probe in eine Zugprüfmaschine eingebaut werden kann. Mit diesen Kräfteinleitungs- und Einspannbedingungen wird gewährleistet, dass kein Biegemoment über der Kerbe der Probe entsteht. Diesem Versuch ähnlicher ist der IOSIPESCU-Versuch [60]. Um eine optimale, d. h., eine möglichst biege- und normalspannungsfreie, Belastung zu gewährleisten, sind Modifikationen der Versuchsapparatur von diversen Autoren vorgeschlagen worden. Einen dieser Beiträge und eine Übersicht liefert LIU [72]. In Abbildung 2-11 ist neben dem ARCAN-Versuch der Scherversuch nach MIYAUCHI [86] abgebildet. DELL und GESE [32] beobachten bei diesem Versuch den Versagensbeginn am Probenrand. Daher führen DELL und GESE [32] einen ebenen Torsionsversuch durch, der in Abbildung 2-11 ganz rechts schematisch dargestellt ist. Allerdings tritt bei dieser Probengeometrie eine Überlagerung einer Zugspannung in radialer Richtung in Erscheinung. DELL und GESE [32] beobachten eine Instabilität in der Probe, bevor Versagen auftritt. Die in Abbildung 2-11 an zweiter Stelle von rechts skizzierte Probe wird von BAO und WIERZBICKI [8] in Verbindung mit einer Apparatur vorgestellt, mit der diese Probe unter verschiedenen Belastungsrichtungen geprüft werden kann.

3 Zielsetzung

Der im vorhergehenden Kapitel dargestellte Stand des Wissens wird im Folgenden bewertet. Darauf basierend werden die wesentlichen Ziele der vorliegenden Arbeit formuliert.

3.1 Diskussion des Standes des Wissens

3.1.1 Elastisch-plastisches Werkstoffverhalten

Sowohl experimentelle als auch auf werkstofftechnischen Herleitungen beruhende Ergebnisse zeigen, dass das plastische Verhalten von reinem Aluminium und Al-Knetlegierungen am besten mit einer nicht-quadratischen Fließfunktion beschrieben wird, wie sie gemäß Gl. 2-46 mit einem Exponenten $n=8$ (vgl. Abbildung 2-3) formuliert werden kann. Für Al-Druckgusslegierungen liegen bisher noch keine Untersuchungsergebnisse hinsichtlich der Form der Fließfläche vor.

Die voll-implizite numerische Lösung von elastisch-plastischen Werkstoffmodellen ist hinsichtlich der Stabilität und Genauigkeit das beste Verfahren. Bei nicht-quadratischen Fließflächen kann das einfach zu implementierende RADIAL-RETURN Verfahren nicht verwendet werden, denn neben dem Inkrement der plastischen Dehnung muss auch die Fließrichtung bestimmt werden. BRON und BESSON [23] verwenden ein solches iteratives Lösungsverfahren für eine nicht-quadratische Fließfunktion, die in den Eigenwerten des Spannungsdeviators formuliert ist. Die dort verwendete analytische Formulierung der Eigenwerte ist jedoch nur für deviatorische Spannungen (spurlose Tensoren) definiert, vgl. Gl. 2-68 a-f. Bei Verletzung des Definitionsbereichs werden die erforderlichen Ableitungen pauschal durch die vorher bestimmten Grenzwerte ersetzt. Dieser Umstand könnte aus Sicht des Autors die Konvergenz der Lösung des Gleichungssystems mit einem iterativen Verfahren erschweren. Eine Bestimmung der Eigenwerte mit einer für alle Spannungstensoren gültigen Formulierung, also mit uneingeschränktem Definitionsbereich, wird hinsichtlich des Konvergenzverhaltens als robuster angesehen.

Zur experimentellen Untersuchung der Form der Fließfläche sind mehrachsige Versuche der Werkstoffprüfung erforderlich, dazu gehören auch zweiachsige Zugversuche. Mit einem Kreuzzugversuch lassen sich

zweiachsige Zugspannungszustände herbeiführen. Allerdings gibt es hinsichtlich der Durchführung des Kreuzzugversuchs und der optimalen Probengeometrie verschiedene Auffassungen. In vielen Arbeiten werden Probengeometrien mit einem nicht-homogenen Querschnitt des Messbereichs verwendet (vgl. Kapitel 2.4.1, zweite Kategorie). Die dort anliegenden Spannungszustände können nur in sehr begrenztem Maße als homogen angesehen werden. In solchen Fällen muss mithilfe von FEM-Berechnungen ein Auswertungsalgorithmus bestimmt werden. Diese Vorgehensweise erfordert allerdings, dass sich das zu untersuchende Werkstoffverhalten mit dem in den vorangegangenen FEM-Berechnungen verwendeten Materialmodell beschreiben lässt. Eine iterative Vorgehensweise ist oftmals erforderlich. Um eine möglichst hohe Dehnung im Messbereich der Probe zu erzielen, wird bei anderen Varianten der Probengeometrie (vgl. Kapitel 2.4.1, dritte Kategorie) die Krafteinleitung durch höher feste Arme realisiert. Dieser Vorgehensweise verstärkt den Messbereich jedoch auch in höherem Maße senkrecht zu der gewünschten Richtung, was sich wiederum negativ auf die Homogenität des Spannungszustandes in der Probenmitte auswirkt. Eine Quantifizierung der Homogenität des Spannungszustandes und Verifikation des Versuchs mithilfe von FEM-Berechnungen erscheint schwierig, da die Verbindungstechnik genau abgebildet werden muss, was im Falle einer Schweißverbindung oder Klemmung als problematisch angesehen wird. Bei Proben mit homogenen Querschnitten und Werkstoffeigenschaften (vgl. Kapitel 2.4.1, erste Kategorie) scheint die Homogenität des Spannungszustandes prinzipiell am besten zu sein.

3.1.2 Schädigung und Versagen

Es existiert eine Vielzahl von Schädigungsmodellen, die auch für Al-Legierungen angewendet werden können. Einerseits kann mit diesen Modellen die makroskopische Entfestigung in Abhängigkeit von der Verformung und Spannungsmehrachsigkeit beschrieben werden, andererseits können Schädigungsmodelle als Versagenskriterien genutzt werden, um Versagen infolge der Schädigung abzubilden. Schädigung im Sinne einer Entfestigung tritt jedoch nicht bei allen Beanspruchungszuständen in Erscheinung, bei denen auch Versagen eintritt. Daher kann alleine mit einem Schädigungsmodell Versagen nur unvollständig beschrieben werden. Aus der Sicht des Autors ist dazu zusätzlich ein Versagenskriterium erforderlich, das alle Beanspruchungszustände umfasst. Auch ist die Parameterbestimmung von Schädigungsmodellen oftmals aufwendig und nur mit inversen Methoden möglich. Weiterhin

führt die Modellierung von Werkstoffentfestigung zum Verlust der Elliptizität der zugrunde liegenden Differenzialgleichungen (vgl. Fußnote 2, Kapitel 1.3). Der Einsatz eines Schädigungsmodells erfordert demzufolge zwingend geeignete Regularisierungsmethoden, was den Aufwand bei der Modellierung der Schädigung weiter erhöht.

Die gängigen Versagensmodelle für duktile Werkstoffe berücksichtigen die Abhängigkeit der Versagensdehnung von der Spannungsmehrachsigkeit. Darüber hinaus ermöglicht das Modell von WILKINS et al [116] die Berücksichtigung der Spannungsasymmetrie. Für wechselnde Beanspruchungen erscheint die Verwendung eines tensoriellen Schädigungsmodells im Sinne eines Versagenskriteriums als sinnvoll. Dann wird aber auch ein für diese Belastungen geeignetes elastisch-plastisches Modell benötigt, das die Verfestigung des Werkstoffes korrekt wiedergibt. Dies wiederum würde die Voraussetzungen für den Erfolg versprechenden Einsatz von spannungsbasierten Versagensmodellen bei nichtlinearen Belastungspfaden bilden. Für lineare Belastungspfade bieten sich skalare Schädigungsmodelle an (vgl. [81], [74], [49] oder [65]). Die exakte Parameterbestimmung ist hier jedoch aufwendig, da die Spannungsmehrachsigkeit im Verlauf der Versuche oftmals nicht konstant ist. Beispielsweise zeigt Abbildung 3-1 [7] den Verlauf der Spannungsmehrachsigkeit bei einem Druckversuch und die mittlere Spannungsmehrachsigkeit, die bei der Parameterbestimmung von BAO und WIERZBICKI [7] verwendet wird. Bei spannungsbasierten Kriterien ist hingegen die Parameterbestimmung einfach und exakt. WERNER et al [113] sowie BAO und WIERZBICKI [7] weisen auf die unterschiedlichen Versagensmechanismen „Schubversagen“ und „duktilen Versagen“ hin und ziehen entsprechende Konsequenzen in ihren Modellierungsansätzen. So verwenden sie verschiedene Zweige in den Versagenskurven in Abhängigkeit von der Spannungsmehrachsigkeit (vgl. Abbildung 2-7). Aus Sicht des Autors ist jedoch zur Modellierung von Schubversagen ein Ansatz gemäß WILKINS et al [116], TRESCA oder MOHR-COULOMB viel versprechender, da in einer auf die ersten beiden Invarianten reduzierten Repräsentation der Spannungszustände, wie sie den Modellierungsansätzen in [113] und [7] zugrunde liegt, die Information über die Höhe der maximalen Schubspannungen verloren geht⁶. Wenn verschiedene Versagensmechanismen in der Modellierung berücksichtigt werden sollen,

⁶ Alle Spannungszustände, die mit Formulierungen analog [113] und [7] beschrieben werden können, liegen im Deviatorschnitt auf einem Kreis. Die maximalen Schubspannungen formen im Deviatorschnitt jedoch ein Hexagon.

wird eine Modellierung in Analogie zu dem Modell von WILLAM-WARNKE [118], wie es bei der Modellierung von Beton im RHT-Modell von RIEDEL [97] eingesetzt wird, als zielführend angesehen. Insgesamt erscheint der Einsatz von spannungsbasierten Versagenskriterien gegenüber den klassischen Modellen für duktilen Versagen vorteilhaft.

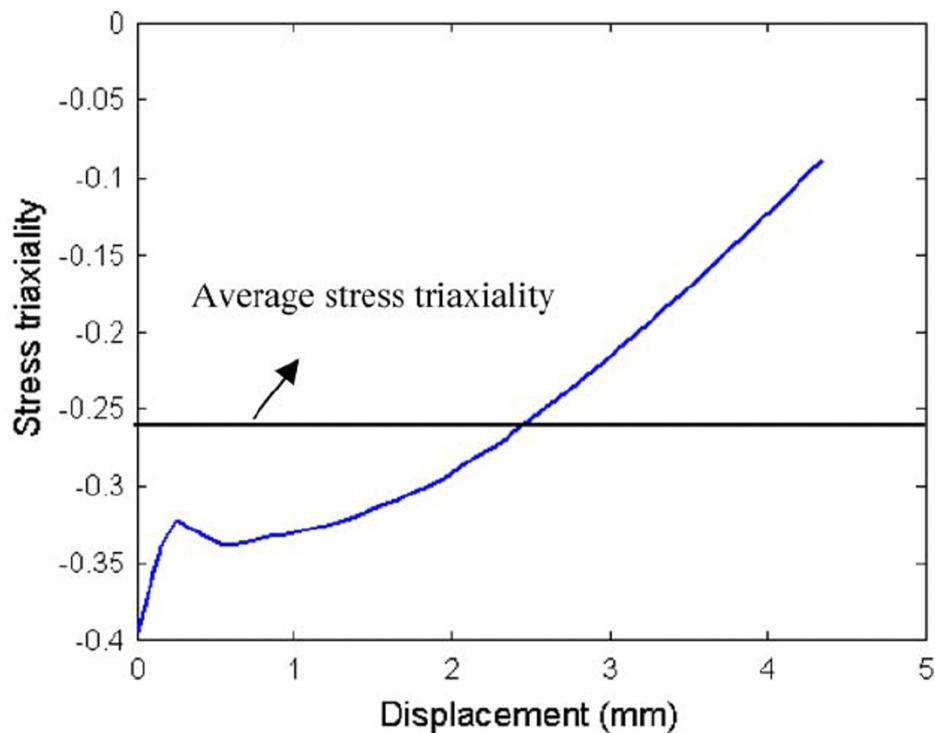


Abbildung 3-1 [7]: Änderung der Spannungsmehrachsigkeit bei einem modifizierten Druckversuch. Zur Ermittlung der Versagensdehnung in Abhängigkeit von der Spannungsmehrachsigkeit wird eine mittlere Spannungsmehrachsigkeit eingeführt.

Bei dem Versagensmodell von WILKINS et al [116] wird eine konstante Länge (r_0) verwendet, um Größeneffekte zu berücksichtigen. Allerdings erscheint der Implementierungsvorschlag für dieses Modell gemäß Gl. 2-56 problematisch, weil die Elementgröße nicht unbedingt eine eindeutige Beziehung zu dem Spannungs- bzw. Dehnungs-Verlauf im Material herstellen kann. Beispielsweise lieferten diese Formulierung unterschiedliche Versagensprognosen für einen Bauteilbereich mit einem homogenen Spannungszustand, wenn zwei unterschiedlich feine FE-Netze verwendet würden, die jedoch beide wegen des homogenen Zustandes trivialerweise konvergiert wären.

Die Berücksichtigung von Größeneffekte erforderte eine Charakterisierung mit unterschiedlich großen Proben. Umgekehrt dürfen bei einer Charakterisierung ohne Berücksichtigung von Größeneffekten nur Proben

mit ähnlichen beanspruchten Volumina verwendet werden, weil bei den eingesetzten Versuchen nicht zwischen Rissentstehung und instabilem Risswachstum unterschieden werden kann.

Alle oben genannten Modelle erscheinen in der Anwendung auf komplexe Bauteile als problematisch, da ihre Prognosegüte von der exakten quantitativen Wiedergabe der Spannungen bzw. der Dehnungen an den Versagensstellen abhängt, vgl. Abbildung 1-7. Die verwendete FE-Diskretisierung muss also fein genug sein, um diese lokalen Extrema an allen Stellen der Bauteile aufzulösen. Abbildung 3-2 zeigt diese Anforderung schematisch.

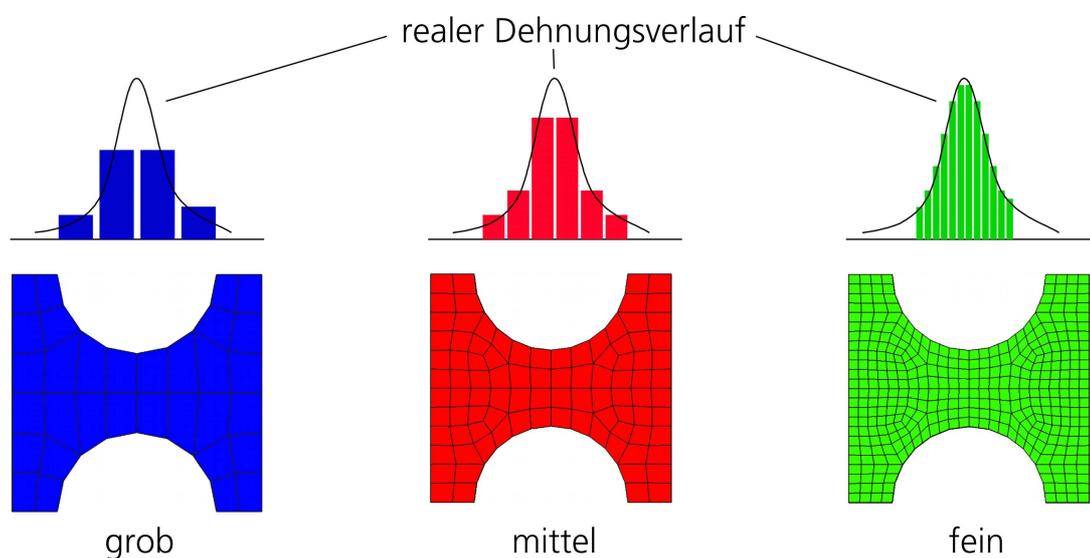


Abbildung 3-2: Schematische Darstellung des Auflösungsvermögens unterschiedlich feiner FE-Diskretisierungen von lokalen Extremwerten der Dehnungen und damit auch der Spannungen. Mit zu groben Vernetzungen kann die Höhe des Extremwertes nicht korrekt wiedergegeben werden.

Die für die korrekte Versagensprognose erforderliche Netzfeinheit kann aus Effizienzgründen für Bauteile A PRIORI nicht eingesetzt werden. Iterative Berechnungen mit adaptiver Netzanpassung (vgl. beispielsweise [52]) können diese Problematik zwar prinzipiell lösen, sind jedoch bei komplexen Bauteilen nicht gangbar, da der Zeitschritt mit der kleinsten Elementgröße im gesamten Berechnungsmodell sinkt und die Modellgröße wegen der erforderlichen homogenen Vernetzung überproportional ansteigt. Für diese Problematik, d. h., die Anwendung von Versagensmodellen bei nicht-konvergierten FE-Diskretisierungen, gibt es derzeit keine Lösungsansätze.

Die Charakterisierung des Versagens unter Schubbeanspruchung ist für die Versagensmodellierung von sehr großer Bedeutung. Zu diesem Zweck stehen zurzeit die in Abbildung 2-11 schematisch dargestellten Methoden zur Verfügung. Allerdings belegt Abbildung 1-6, dass das Versagen bei Abscherversuchen wie dem ARCAN-Versuch am Probenrand beginnt, wo nur ein einachsiger Spannungszustand vorliegen kann. Daher kann Versagen unter Schub in einem solchen Experiment nicht erfasst werden. Bei der von BAO und WIERZBICKI [8] vorgeschlagenen Probengeometrie liegt durch die Taillierung in der Probenmitte eine größere Schubbeanspruchung vor, als am oberen und unteren Probenrand. Allerdings gibt es bisher keinen Nachweis, dass das Versagen der Probe auch an dieser Stelle beginnt.

3.2 Bewertung hinsichtlich der Aufgabestellung

In dieser Arbeit werden die Schwerpunkte bei der Untersuchung auf das elastisch-plastische Verhalten und auf die Versagensinitiierung gelegt, da es sich hierbei um die wesentlichen Einflussgrößen bei der Prognose der Deformation und Energieaufnahme von Bauteilen aus duktilen Werkstoffen handelt. Außerdem stehen Schädigungsmodelle in vielen Varianten ebenso wie die in diesem Zusammenhang unverzichtbaren Regularisierungsmethoden zur Verfügung, sodass dort weniger grundlegender Forschungsbedarf besteht, als an einer für praktische Anwendungen gangbaren Methodik.

Vor diesem Hintergrund zeigt die Bewertung des Standes des Wissens hinsichtlich der Aufgabestellung, dass bei den folgenden Themengebieten, die sich im Wesentlichen in die Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens und des Versagens unterteilen, Entwicklungsbedarf besteht:

- Experimentelle Charakterisierung des plastischen Verhaltens von Al-Druckgusslegierungen insbesondere hinsichtlich der Fließfunktion und des plastischen Potenzials
- Auswahl und Optimierung einer Probengeometrie für den Kreuzzugversuch, die geeignet für die Bestimmung des Fließbeginns ist. Die Probengeometrie und Auswertungs-algorithmen müssen

hinsichtlich ihrer Genauigkeit der Spannungsprognose validiert werden.

- Bewertung und ggf. Optimierung bestehender Lösungsansätze für Plastizitätsmodelle mit nicht-quadratischen Fließfunktionen gemäß Gl. 2-46
- Experimentelle Charakterisierung des Versagensverhaltens von Al-Druckgusslegierungen
- Entwicklung einer experimentellen Methode zur Charakterisierung von Schubversagen und der Nachweis, dass die Probe an der Stelle versagt, wo der erwünschte Schubspannungszustand vorliegt.
- Modellierung des Versagensverhaltens, wobei das Modell eine hohe Flexibilität aufweisen und eine einfache Parameterbestimmung erlauben soll.
- Entwicklung einer Methodik, mit der Versagensprognosen im industriellen Kontext, d.h. bei der zwangsläufigen Verwendung nicht-konvergierter Vernetzungen, verbessert werden.

4 Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens

Die Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens umfasst die in Kapitel 1.2 beschriebenen Schritte:

- Werkstoffcharakterisierung
- mathematische Formulierung des Werkstoffverhaltens
- Implementierung in ein FEM-Berechnungsprogramm
- Verifizierung der Implementierung und Validierung des Modells

Neben der Durchführung dieser Schritte und den jeweiligen Ergebnissen sind in diesem Kapitel die Methodenentwicklungen zur Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens dargestellt. So wird in Kapitel 4.1.1.2 die Auswahl und Validierung einer Kreuzzugprobe beschrieben. Die Optimierung eines Fallgewichtsversuchs zur Bestimmung der Dehnratenverfestigung ist Gegenstand von Abschnitt 4.1.1.4. Im Zuge der Implementierung des Werkstoffmodells wurde das Konvergenzverhalten verschiedener Lösungsansätze für nicht-quadratische Fließfunktionen gemäß Gl. 2-46 analysiert. Diese Untersuchung ist in Kapitel 4.3.2 dokumentiert.

4.1 Werkstoffcharakterisierung

Wie in Abschnitt 1.3.1 erläutert, sind die Formen der Fließfläche und des plastischen Potenzials experimentell mit Versuchen der mechanischen Werkstoffprüfung zu bestimmen, in denen jeweils unterschiedliche Spannungszustände in der Probe realisiert sind. Eine Übersicht von hierzu geeigneten Versuchen verschafft Abbildung 4-1. Dort sind in der Hauptspannungsebene – das ist ein Schnitt des Hauptspannungsraums (vgl. Abbildung 1-5, rechts) – zwei klassische Fließfunktionen, nämlich die nach TRESCA und die nach VON MISES (vgl. Kapitel 2.2.2 und Abbildung 2-2), skizziert.

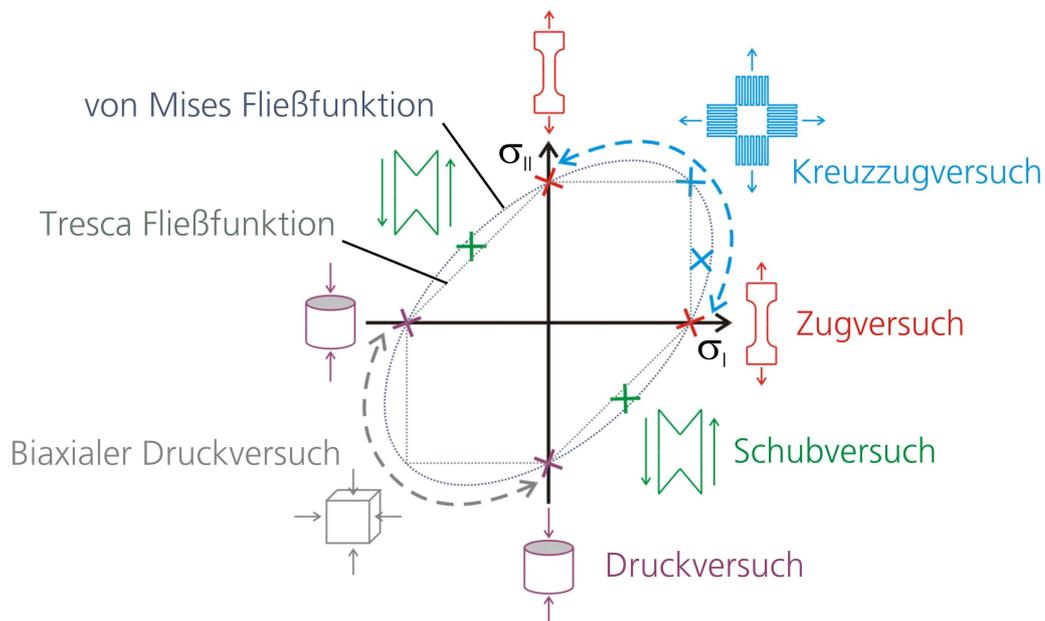


Abbildung 4-1: Versuchsübersicht zur Charakterisierung der Fließfläche in der Hauptspannungsebene. Mit Schub- und zweiachsigen Zug- bzw. Druckversuchen können die für verschiedene druckunabhängige Fließflächen charakteristischen Punkte bestimmt werden. Für druckunabhängige Fließfunktionen sind Druck- und Zugversuche redundant.

Die einzelnen Versuchstypen sind in der Hauptspannungsebene gemäß den jeweils erzeugbaren Beanspruchungszuständen angeordnet. Kreuzzugversuch, Zugversuch und Schubversuch lassen sich mit relativ zur Länge und Breite dünnen Proben durchführen. Dagegen erfordern Druckversuche aufgrund der Knick- und Beulneigung relativ zur Länge und Breite dicke Proben. Die in der vorliegenden Arbeit untersuchte Legierung wird für dünnwandige Bauteile verwendet, weshalb sich im Verhältnis zur verfügbaren Prüfeinrichtung nur sehr kleine Proben aus den Bauteilen herstellen lassen. Die Genauigkeit von Druckversuchen mit solchen Proben ist aufgrund der relativ hohen geometrischen Toleranzen als unzureichend anzusehen (vgl. Kapitel 5.1.1.3). Deshalb wurden zur Bestimmung der Fließfläche und des plastischen Potenzials keine Druckversuche verwendet. Insgesamt wurde die Charakterisierung des elastisch-plastischen Verhaltens der vorliegenden Al-Druckgusslegierung mit den folgenden Versuchstypen durchgeführt:

- Zugversuche, quasistatisch und dynamisch
- Kreuzzugversuche, Spannungsverhältnis etwa 1:1
- Kreuzzugversuche, Spannungsverhältnis etwa 1:2

- Schubversuche

Ob die erwünschten Beanspruchungen bei den jeweiligen Versuchen erreicht werden, hängt maßgeblich von der Probengeometrie und der zielgerichteten Aufbringung der Belastung ab. Daher werden vor der Darstellung der Durchführung der Experimente und der Ergebnisse zunächst die Versuchsmethoden und –einrichtungen für die einzelnen Versuchstypen vorgestellt.

4.1.1 Versuchsmethodik und Versuchseinrichtungen

Um das mit den Versuchen herbeigeführte Verhalten des Werkstoffes zu quantifizieren, werden die Spannungen und Dehnungen an einer aussagefähigen Stelle der Probe während der Belastung ermittelt. Dabei werden die CAUCHY'SCHEN SPANNUNGEN (vgl. Gl. 2-10) und die NATÜRLICHE DEHNUNG (vgl. Gl. 2-30) verwendet.

Es ist – wenn überhaupt möglich – sehr aufwendig, die jeweils aktuelle Querschnittsfläche zu messen. Sie kann alternativ unter bestimmten Modellannahmen errechnet werden, wie z. B. unter der Annahme des HOOKE'SCHEN GESETZES und eines druckunabhängigen plastischen Potentials (Volumenkonstanz der plastischen Dehnungen).

Zur Bestimmung der Fließfunktion müssen bei relativ geringen Dehnungen (0,001 bis 0,002) relativ kleine Spannungsdifferenzen (5 %) ermittelt werden. Die Genauigkeitsanforderungen an die entsprechenden Versuche sind also sehr hoch. Das stellt wiederum hohe Anforderungen an die Homogenität der Spannungs- und Dehnungszustände und an die optimale Einbringung der Belastung. Ebenso müssen die verwendeten Auswertungsalgorithmen, mit denen die aktuelle Querschnittsfläche errechnet wird, die erforderliche Genauigkeit aufweisen. Daher wurden in der vorliegenden Arbeit prinzipiell die exakten Auswertungsalgorithmen verwendet, obgleich sie in der Herleitung und vor allem in der Lösung deutlich aufwendiger als die weit verbreiteten Näherungsgleichungen sind.

4.1.1.1 Quasistatischer Zugversuch

Wichtige Randbedingungen für einen homogenen Spannungszustand bei quasistatischen Zugversuchen sind eine Probengeometrie, die einen hinreichend langen parallelen Bereich aufweist, sowie eine momenten- und querkräftfreie Krafteinleitung. Abbildung 4-2 zeigt links die eingesetzte Universalprüfmaschine und rechts die verwendete Zugprobengeometrie.

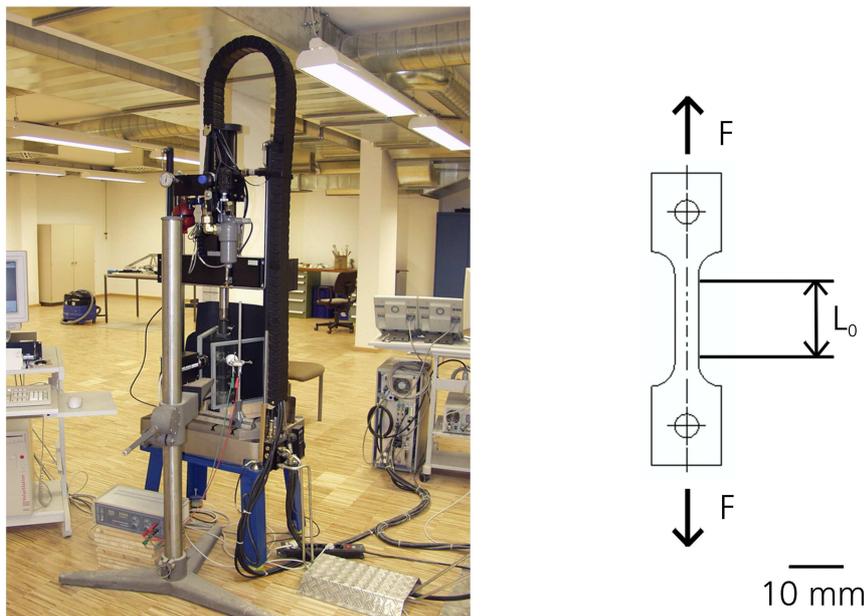


Abbildung 4-2: Für Zugversuche eingesetzte Universalprüfmaschine (links) und verwendete Probengeometrie (rechts) mit Kennzeichnung der Messlänge und der Krafteinleitung.

Über eine gelenkige Aufhängung in der Zugmaschine wird die Kraft momenten- und querkräftfrei eingeleitet. Hierzu werden durch die Löcher in den Schulterbereichen der Probe Stifte geschoben, die ihrerseits in den beiden Werkzeugen (je eines oben und unten) verankert sind. Die Werkzeuge sind mit verschiedenen Gewintheadaptoren versehen worden, sodass sie sowohl in den Universalprüfmaschinen als auch in den Fallgewichtsanlagen Anwendung finden können. Eines der beiden hier verwendeten beiden Werkzeuge ist in Abbildung 4-13 des Fallgewichtsaufbaus dargestellt. Die Messlänge L_0 beträgt 12,5 mm. Ihre Verlängerung während des Versuchs wird mit einem Extensiometer gemessen. Die Bestimmung der Dehnung erfolgt gemäß Gl. 2-30, wobei sich die aktuelle Messlänge L aus dem Extensiometersignal ergibt. Zur Berechnung der wahren Spannung dient Gl. 2-10. Unter der Annahme des HOOKE'SCHEN GESETZES für die elastischen Dehnungsanteile und der

Annahme eines druckinvarianten plastischen Potentials (Volumenkonstanz) für die plastischen Dehnungsanteile kann der folgende implizite Zusammenhang für die wahre Spannung gefunden werden, wobei A_x^0 die Querschnittsfläche der Probe senkrecht zur Belastungsrichtung im unverformten Zustand bezeichnet:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x^0 e^{\left(-2\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \varepsilon_{xx} + \frac{\sigma_{xx}}{E}\right)}} \quad \text{Gl. 4-1}$$

Die Herleitung dieser Gleichung erfolgt in Abschnitt 9.4.1. Zur Lösung dieser Gleichung stehen numerische Verfahren zur Verfügung, z. B. das NEWTON-Verfahren (vgl. [94] oder [75]).

4.1.1.2 Kreuzzugversuch

Ein zweiachsiger Spannungszustand in einer Probe kann auf recht einfache Weise erzeugt werden. Beispielsweise kann dies durch Aufbringung einer Kraft an allen vier Armen einer kreuzförmigen Probe erfolgen. Das Ergebnis einer FEM-Simulation einer solchen Probe mit vier massiven Armen unter symmetrischer Belastung zeigt Abbildung 4-3.

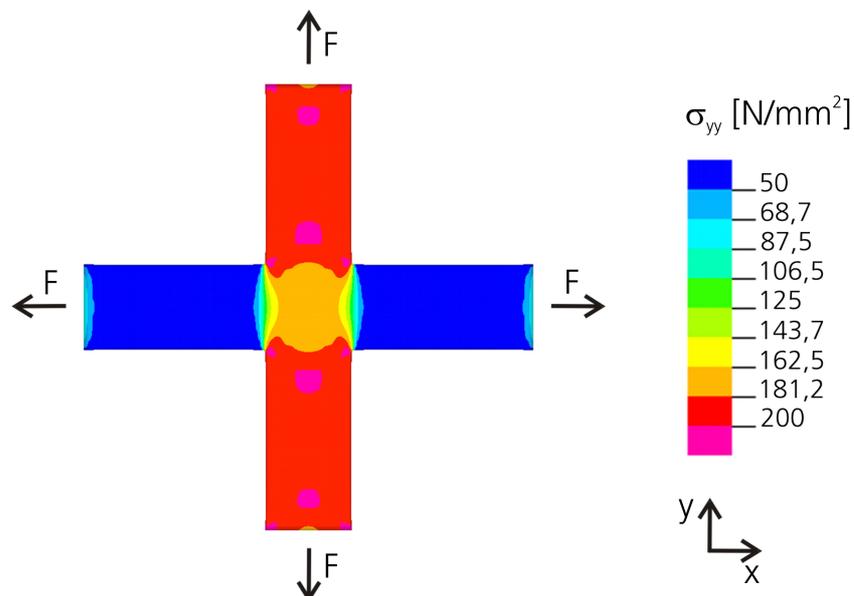


Abbildung 4-3: FEM-Simulation einer kreuzförmigen Probe mit massiven Armen bei symmetrischer zweiachsiger Belastung; die Verteilung der Spannungskomponente in y -Richtung ist als Farbkontur über der Probe dargestellt.

Der vollständige Spannungszustand besteht aus einer Überlagerung der in der Größe identischen, jeweils in x- und in y-Richtung Richtung weisenden Spannungskomponenten.

Das in der Draufsicht quadratische Zentrum der Probe wird im Folgenden auch als Messbereich bezeichnet. Abbildung 4-3 zeigt deutlich, dass der Spannungszustand im Messbereich nicht homogen ist. Die Spannungen in Richtung der jeweils betrachteten Belastung sind an den Rändern des Messbereichs kleiner. An dieser Stelle greifen die Arme an, durch die die Belastung in die andere Richtung eingeleitet wird. Ein Teil der Belastung der Ränder des Messbereichs wird von dem Material der senkrecht zur Belastungsrichtung liegenden Arme mitgetragen. Dadurch verringert sich die Beanspruchung und damit die Spannung an den Rändern des Messbereichs.

Um einen homogenen Spannungszustand im Messbereich zu erzeugen, muss die Verstärkungswirkung der Arme senkrecht zu ihrer Krafteinleitung minimiert werden. Bei den meisten bekannten Versuchskonzepten wird diese Eigenschaft herbeigeführt (vgl. Kapitel 2.4.1), indem anstelle eines massiven Armes viele schmalere Arme je Richtung die Beanspruchung in den Messbereich einleiten. Die FEM-Simulation einer solchen Probe – bei identischen Randbedingungen wie bei der Simulation der Probe mit massiven Armen – belegt die Wirkung dieser Maßnahme, siehe Abbildung 4-4.

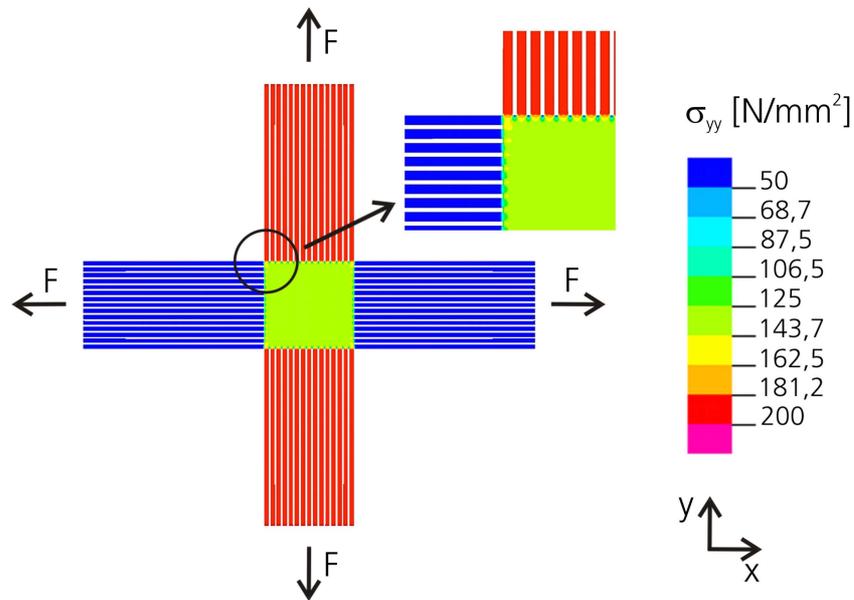


Abbildung 4-4: FEM-Simulation einer kreuzförmigen Probe mit geschlitzten Armen bei symmetrischer zweiachsiger Belastung; die Verteilung der Spannungskomponente in y -Richtung ist als Farbkontur über der Probe dargestellt.

In der Detailansicht wird deutlich, dass die einzelnen, sehr viel schmalere Arme die gleiche Verstärkungstendenz haben wie die breiten Arme. Die Inhomogenitäten sind jedoch sehr viel. Der Spannungszustand im Messbereich einer Kreuzzugprobe ist umso homogener, je feiner die Arme geschlitzt sind.

Allerdings reduzieren die Schlitze in den Armen ihren Gesamtquerschnitt und damit die übertragbare Kraft, vgl. die Spannungswerte im Messbereich in Abbildung 4-3 und in Abbildung 4-4. In der Probenmitte kann also bei der hier betrachteten Probengeometrie nie eine so hohe Spannung wie in den Armen erreicht werden. Es ist unmittelbar klar, dass bei Beachtung einer fertigungstechnisch diktierten Mindestschlitzbreite die im Messbereich erreichbare maximale Spannung mit steigender Anzahl der Schlitze sinkt.

Es liegt also eine Ambivalenz zwischen der Homogenität des Spannungszustandes und der mit dieser Probengeometrie erreichbaren maximalen Spannung im Messbereich vor. Viele dünne Schlitze und damit viele dünne Arme verbessern die Homogenität des Spannungszustandes, reduzieren aber die maximal erreichbare Beanspruchung in der Probenmitte. Die Homogenität des Spannungszustandes hat bei der Entwicklung der für die hier verfolgte Messaufgabe als optimal angesehenen Probengeometrie oberste Priorität.

Auf der Grundlage der bisher durchgeführten Überlegungen und Simulationen wurde zunächst eine Probengeometrie virtuell optimiert und validiert, die den besten Kompromiss aus Homogenität des Spannungszustandes und erreichbarer Dehnung repräsentiert. Abbildung 4-5 zeigt das Modell dieser Kreuzzugprobe.

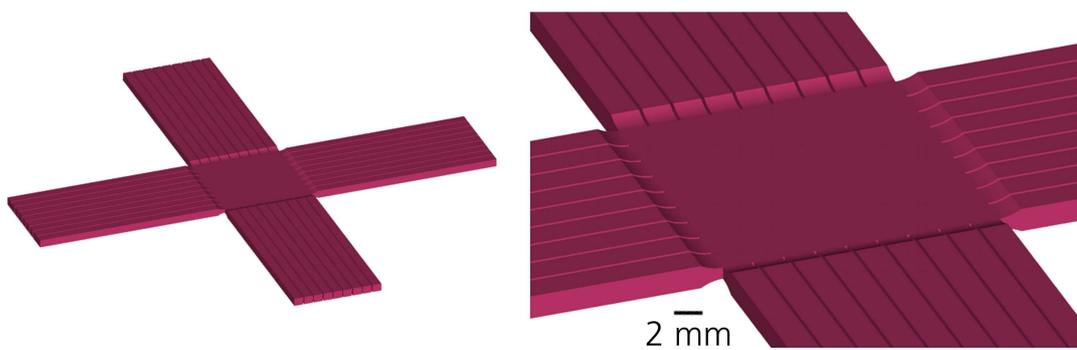


Abbildung 4-5: Modell einer Kreuzzugprobe mit in ausreichender Entfernung zum Messbereich erhöhter Dicke der Arme, um die Versagenswahrscheinlichkeit infolge makroskopischer Materialdefekte zu minimieren.

Entscheidend für die bestmögliche Homogenität des Spannungszustandes ist bei dieser Geometrie, dass beim Übergang der Arme zum Messbereich die Arme die gleiche Dicke wie der Messbereich aufweisen. Eine größere Dicke würde wiederum einen höheren Verstärkungseffekt für die Ränder des Messbereichs nach sich ziehen und damit die Homogenität des Spannungszustandes verschlechtern. Die Dicke der Arme erhöht sich bei dieser Probengeometrie in ausreichender Entfernung vom Übergangsbereich zum Probenzentrum. Dadurch wird der Versagensort der Arme auf einen kleinstmöglichen Raum reduziert, die Versagenswahrscheinlichkeit infolge von Materialinhomogenitäten geringer und der Einfluss der Kerbwirkung bei der Einspannung der Probe – vgl. Abbildung 4-10 – an den äußeren Enden der Arme entschärft. Die Homogenität des Spannungszustandes ist hiervon unabhängig. Die Versuche können also prinzipiell auch an Kreuzzugproben mit gleicher Dicke erfolgen, wengleich dann – je nach Ausmaß der Fehlstellen in den Armen und Einspannbedingungen – mit einem früheren Versagen gerechnet werden muss.

Die Ermittlung der Spannungen in den beiden Richtungen erfolgt gemäß Gl. 4-2. Unter den gleichen Annahmen wie beim einachsigen Zugversuch ergibt sich folgendes implizites Gleichungssystem, das in Abschnitt 9.4.2 hergeleitet wird:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x^0 e \left(\varepsilon_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \varepsilon_{xx} + \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} - \varepsilon_{yy} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \right)}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F_y}{A_y^0 e \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \varepsilon_{yy} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \varepsilon_{xx} + \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \right)}$$

Gl. 4-2

Die Zusammenhänge gemäß Gl. 4-2 werden numerisch mithilfe eines Computeralgebra-Programms [79] gelöst.

Die Validierung der Probengeometrie und des Auswertungsalgorithmus erfolgt mithilfe einer FEM-Analyse. Abbildung 4-6 fasst die allgemeine Vorgehensweise bei dieser Überprüfung zusammen.

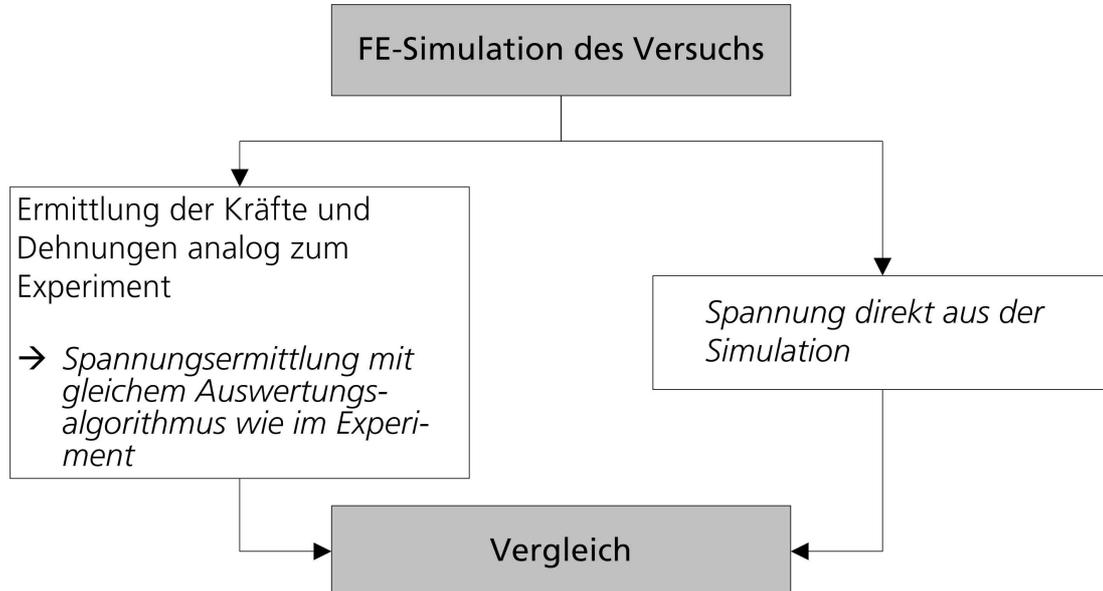


Abbildung 4-6: Vorgehensweise zur quantitativen Bewertung einer Probengeometrie und eines Auswertungsalgorithmus

Insgesamt wurden zwei Versionen der vorgeschlagenen Probengeometrie untersucht: Die in Abbildung 4-5 dargestellte mit 2 mm breiten Armen und eine Variante dieser Form mit 1,5 mm breite Armen und sonst identischen Abmessungen.

Die Gegenüberstellung einer Spannungskomponente gemäß der experimentellen Ermittlung und der Spannung, die die FEM-Simulation direkt liefert, erfolgt in Abbildung 4-7. Die Übereinstimmung ist in beiden Fällen sehr gut. Die höhere maximal erreichbare Spannung, aber auch die etwas größere Abweichung der errechneten (Auswertungsalgorithmus) von der tatsächlichen (FEM-Berechnung) Spannung bei der Probe mit den 2 mm breiten Armen wird ersichtlich. Der mittlere relative Fehler liegt bei der Probe mit 1,5 mm breiten Armen im Bereich von 0,2 % und bei der mit 2 mm breiten Armen bei etwa 0,5 %. Die Genauigkeit der Spannungsprognose wird als ausreichend angesehen. Daher sind beide Geometrien für eine experimentelle Untersuchung der Fließfunktion geeignet, und der Auswertungsalgorithmus ist korrekt.

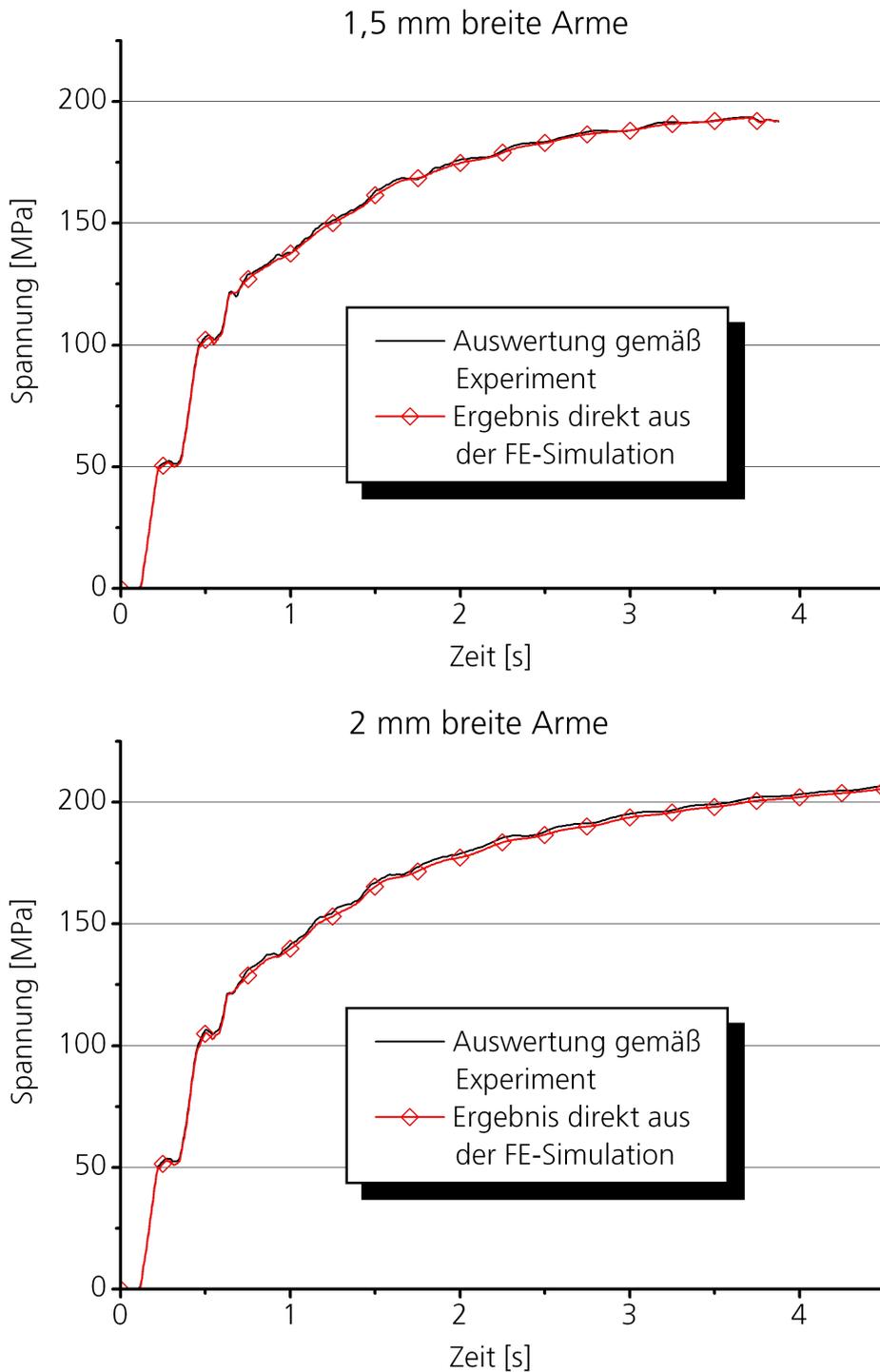


Abbildung 4-7: Gegenüberstellung der gemäß der experimentellen Auswertung ermittelten und der direkt aus der FEM-Simulation folgenden Spannungen in einer Belastungsrichtung, vgl. Abbildung 4-6; beide Varianten (1,5 mm und 2 mm breite Arme) zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der Spannungen und sind daher für eine experimentelle Umsetzung geeignet.

Bei der realen Durchführung des Versuchs werden die Dehnungen in der Probenmitte mit zwei Dehnungs-Mess-Streifen (DMS), je einer in eine Belastungsrichtung, gemessen. Eine schematische Darstellung und eine reale Probe mit 2 mm breiten Armen sind in Abbildung 4-8 wiedergegeben.

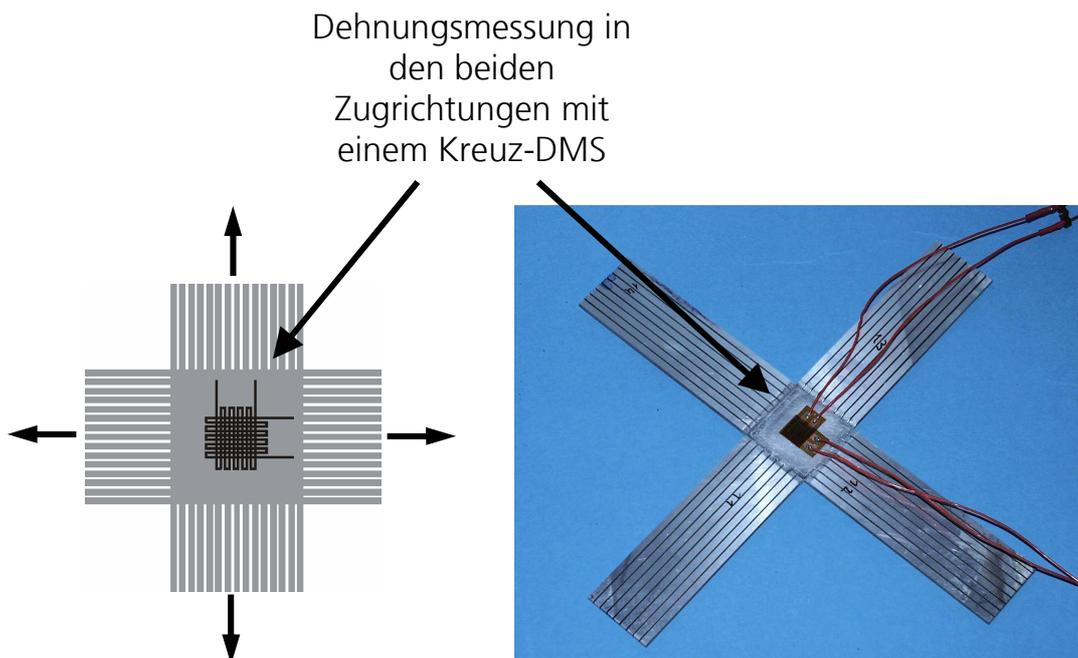


Abbildung 4-8: Schematische Darstellung einer Probe mit applizierten Kreuz-DMS (links) und Abbildung einer eingesetzten Probe mit 2 mm breiten Armen (rechts).

Da die DMS nicht nur entlang ihrer Messrichtung, sondern auch quer dazu mit einer relativ hohen Dehnung belastet werden, wird eine Querdehnungskorrektur vorgenommen [112]. Die Krafteinleitung in die Arme der Proben erfolgt über einen von NAHME [88] entwickelten vierbeinigen Gelenkaufbau, der in eine Universalprüfmaschine eingebaut wird, sodass die Kraft der Prüfmaschine auf die vier Arme der Kreuzzugprobe verteilt wird. Diese Einrichtung hat sich bei der Untersuchung von Geweben bewährt und fand Verwendung bei ersten Versuchen mit metallischen Kreuzzugproben. Allerdings wurden die Fertigungstoleranzen und damit die Lagepräzision den im Verhältnis zu den Gewebeproben kleineren Al-Druckguss-Kreuzzugproben und den höheren Genauigkeitsanforderungen der Versuche nicht gerecht. Daher war eine Neukonstruktion der Kraftübertragungs- und Einspannkomponenten erforderlich. Abbildung 4-9 zeigt ein Modell der neu entwickelten Versuchseinrichtung.

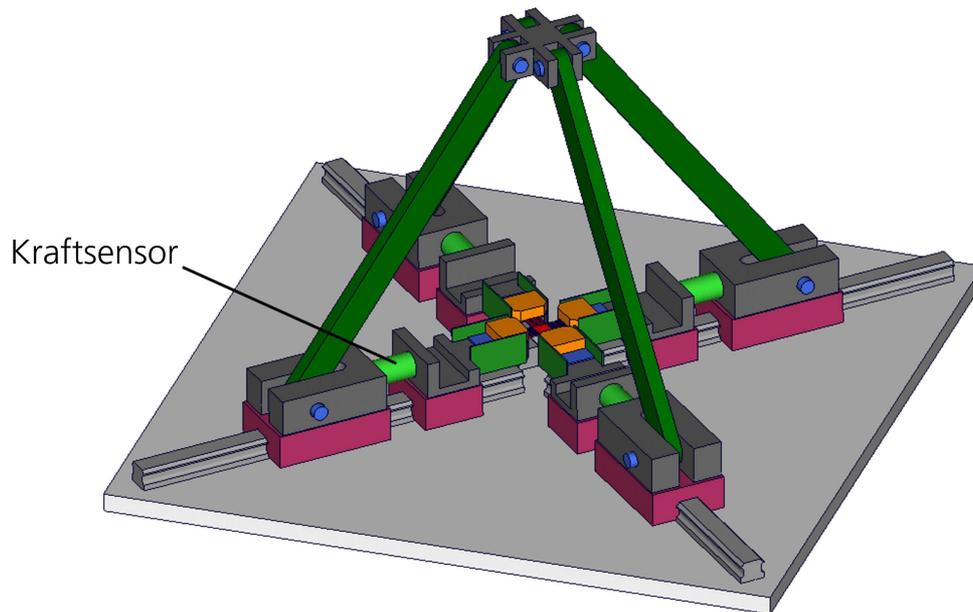


Abbildung 4-9: Modell der verwendeten Versuchsaufbaueinrichtung für die Prüfung metallischer Kreuzzugproben.

Abbildung 4-9 verdeutlicht die Kinematik der Apparatur: Eine von oben auf die vier Beine wirkende vertikale Kraft wird auf die vier äußeren Schlitten als Kräfte in Richtung der Beine übertragen. Die Linearführungen wirken den vertikalen Komponenten der Kräfte an den Schlitten entgegen, sodass nur die Kräfte in horizontaler Richtung weitergeleitet werden. Die Kräfte verlaufen über die Kraftsensoren auf die vier Einspannwerkzeuge und weiter auf die Probe. Die Einspannwerkzeuge sind auf eigenen Schlitten geföhrt, sodass einerseits im Falle des Versagens der Probe keine Querkräfte auf die in dieser Richtung sehr empfindlichen Kraftsensoren wirken und andererseits eine sehr hohe Lagepräzision, d. h., kein merkbares Spiel, der Einspannwerkzeuge gegeben ist. Der Einsatz paarweise verschieden langer Beine ruft nichtsymmetrische Beanspruchungen in der Probe hervor. Ebenso können mit einer Variation der freien Länge der Arme der Kreuzzugproben verschiedene Spannungszustände erzeugt werden. Eine teilweise durchscheinende Detailansicht der Einspannung und der Probe zeigt Abbildung 4-10.

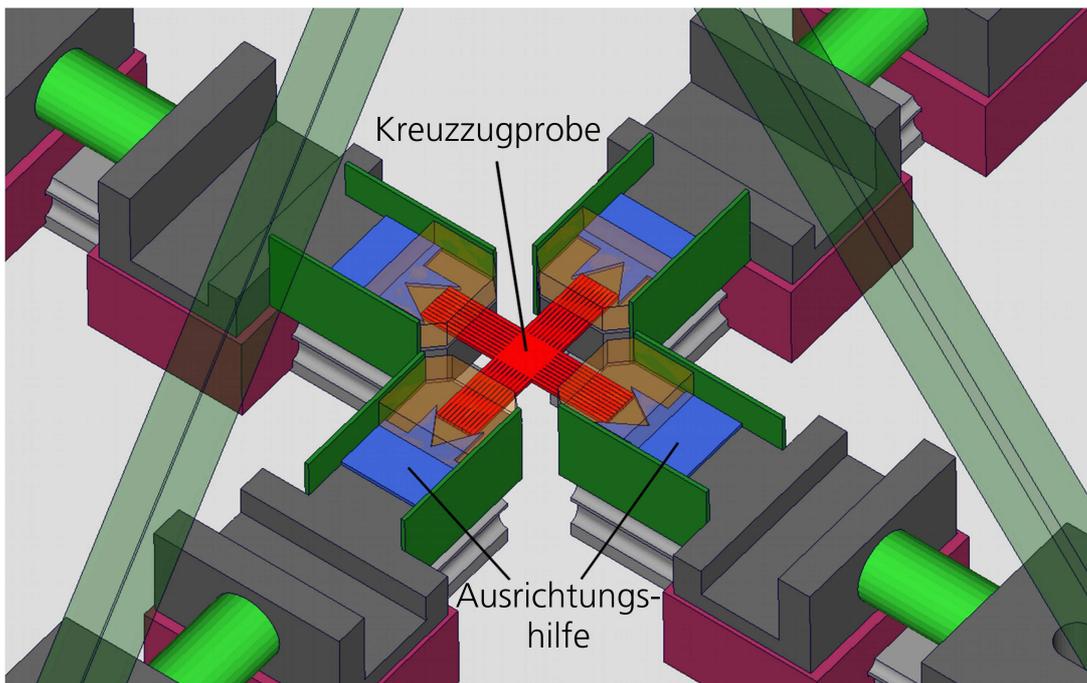


Abbildung 4-10: Detailansicht – teilweise durchscheinend – der Einspannungsvorrichtung und der Kreuzzugprobe.

Die Ausrichtung der Probe erfolgt einfach und gleichzeitig präzise mit den schwalbenschwanzförmigen Ausrichtungshilfen. Mit den in Abbildung 4-10 durchscheinend dargestellten Deckplatten wird die Probe eingespannt.

Die als optimal angesehene Probengeometrie (Abbildung 4-5 und Abbildung 4-8), die Messtechnik, die Auswertungsalgorithmen und der Versuchsaufbau haben sich in vielen Vorversuchen bewährt. Der Fertigungsaufwand für die Proben ist jedoch sehr hoch und kann erheblich reduziert werden, wenn Proben mit konstanter Dicke verwendet werden. Abbildung 4-11 zeigt eine solche Probengeometrie.

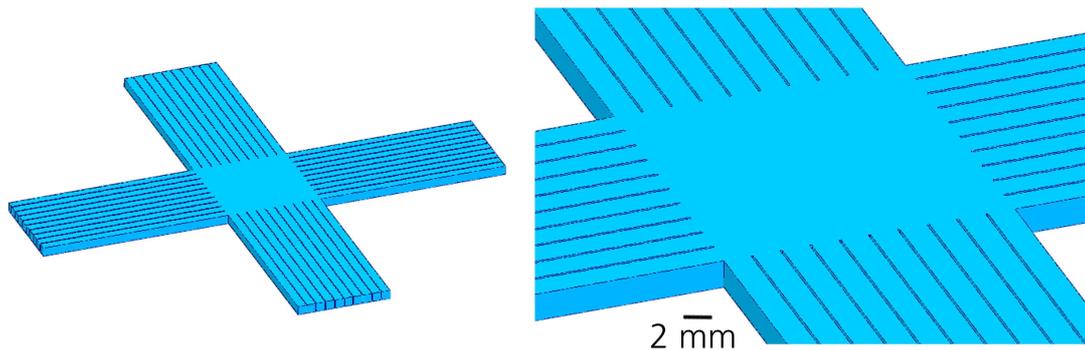


Abbildung 4-11: Modell einer Kreuzzugprobe mit konstanter Dicke und damit reduziertem Fertigungsaufwand. Diese Probengeometrie kann auch bei großen Versuchsumfängen rentabel eingesetzt werden.

Die Homogenität des Spannungszustandes bleibt bei dieser Probengeometrie unverändert. Die Wahrscheinlichkeit eines früheren Versagens der Arme infolge von makroskopischen Defekten im Material steigt jedoch. Da die Versuchsumfänge, die zur Charakterisierung der vorliegenden Al-Gusslegierung durchzuführen sind, einerseits sehr groß sind, andererseits mit der vereinfachten Probengeometrie (Abbildung 4-11) in Vorversuchen ausreichend hohe Spannungen erreicht werden konnten, wurde diese vereinfachte Geometrie verwendet. Gleichwohl wird eine Probengeometrie mit variabler Dicke der Arme – Abbildung 4-5 – als optimal angesehen.

4.1.1.3 Schubversuch

Beim Schubversuch wird eine Probengeometrie in Anlehnung an ARCAN [5] eingesetzt. Abbildung 4-12 zeigt links schematisch die Probengeometrie zur Verdeutlichung der Richtung der Dehnungsmessung und rechts die tatsächlich verwendete Probe. Die Proben in der von ARCAN [5] vorgeschlagenen Größe konnten nicht zugleich mit den Kreuzzugproben aus den jeweils identischen Bauteilen entnommen werden. Die aus diesem Grund kleineren Proben weisen die gleichen Proportionen im Messbereich auf.

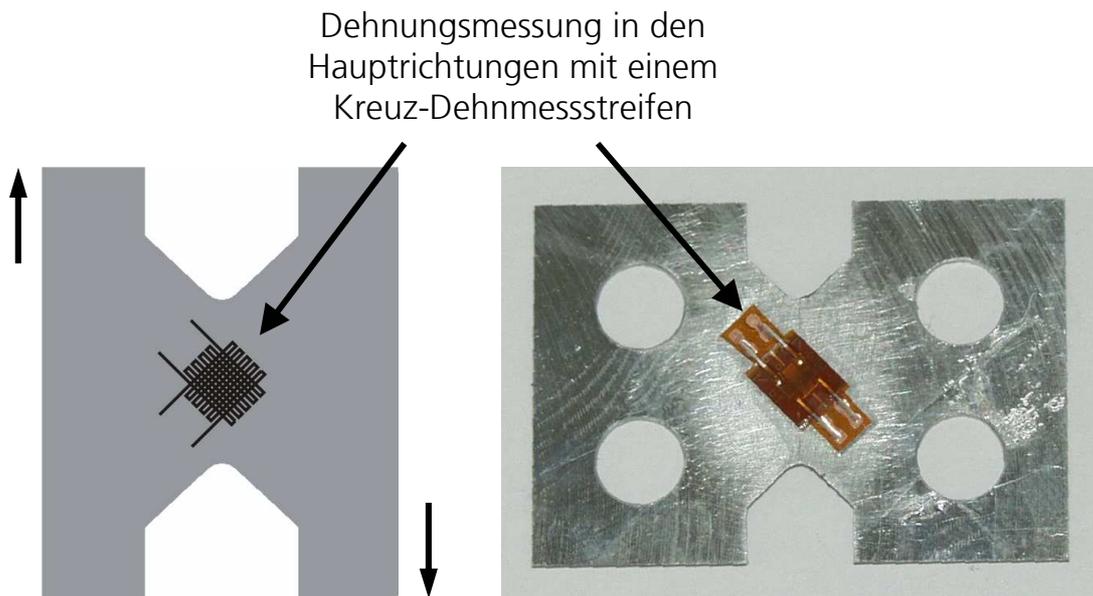


Abbildung 4-12: Schematisch dargestellte (links) und reale Probe (rechts) für den Schubversuch mit appliziertem Kreuz-Dehnmessstreifen.

Die Spannungen wurden als Schubspannungen im Sinne der Gl. 2-10 ermittelt. Da bei den gleichen Annahmen, wie sie bei der Auswertung des Zug- und Kreuzzugversuchs getroffen wurden, keine Querdehnung bei reiner Schubbeanspruchung auftritt, nimmt die exakte Bestimmungsgleichung für die Spannung die folgende Form an:

$$\sigma_{xy} = \sigma_I = -\sigma_{II} = \frac{F_x}{A_0} \quad \text{Gl. 4-3}$$

Die Dehnungsmessung erfolgte in den Hauptrichtungen. Ebenso wie beim Kreuzzugversuch wurde eine Querdehnungskorrektur [112] vorgenommen. Bei der Versuchsdurchführung kam eine Universalprüfmaschine zum Einsatz.

4.1.1.4 Dynamischer Zugversuch

Die Versuchsmethodik, d. h., Probengeometrie, Messgrößen und Auswertungsalgorithmen, unterscheidet sich bei dynamisch durchgeführten Versuchen nicht von der bei quasistatisch durchgeführten Versuchen. Allerdings können sich infolge der Belastungsaufbringung in die Probe Schwierigkeiten ergeben. Bei schlagartiger Belastung werden viele Eigenfrequenzen des Systems angeregt. So entstehen unerwünschte

Schwingungen, die sich negativ insbesondere auf das Signal der Kraftsensoren auswirken. Alternative Kraftmessmethoden (vgl. [40]) können eingesetzt werden, um ein schwingungsärmeres Kraftsignal zu gewinnen. Bei einer dieser Varianten wird die elastische Verformung des Schulterbereichs der Probe mit einem DMS gemessen und unter der Annahme des HOOKE'SCHEN GESETZES die Spannung dort berechnet. Dann kann bei Vorliegen einer homogenen Spannungsverteilung auf die Kraft in der Probe geschlossen werden. Problematisch bei dieser Art der Kraftermittlung ist, dass die elastischen Eigenschaften des Werkstoffs bei der an dieser Stelle vorliegenden Dehnrates bekannt sein müssen. Das kann bei Werkstoffen mit einer gewissen Streuung der Eigenschaften nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden, weshalb diese Vorgehensweise in dieser Arbeit nicht verfolgt wird.

Stattdessen wird der Ansatz verfolgt, durch eine verbesserte Lasteinleitung die Schwingungen zu reduzieren. Dies kann durch eine schwellende Lastaufbringung – im Gegensatz zu einer Schlagartigen – erreicht werden, da dabei weniger Eigenfrequenzen des Systems angeregt werden. Eine solche Beanspruchungscharakteristik wurde durch eine geeignete Abstimmung der Steifigkeit der Stäbe und Einsatz von Schaumunterlagen realisiert. Dabei sind FEM-Analysen – Abbildung 4-13 zeigt zwei Ansichten des FE-Modells – und experimentelle Studien durchgeführt wurden.

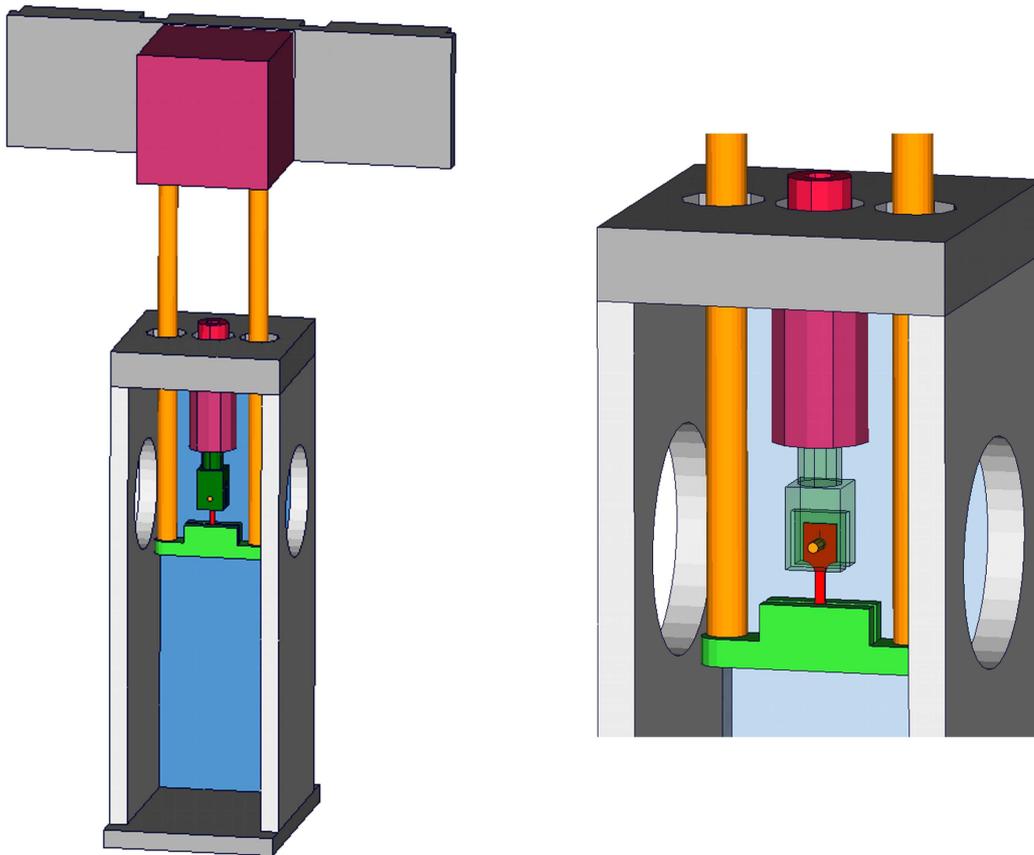


Abbildung 4-13: Modell des Fallgewichtsaufbaus; links Gesamtansicht und rechts eine Detailansicht mit durchscheinend dargestellter Probenhalterung.

Eine Gegenüberstellung der so gewonnenen Spannungs-Dehnungskurven mit Spannungs-Dehnungskurven, die mit der Standard-Versuchs-einrichtung ermittelt wurden, zeigt Abbildung 4-14.

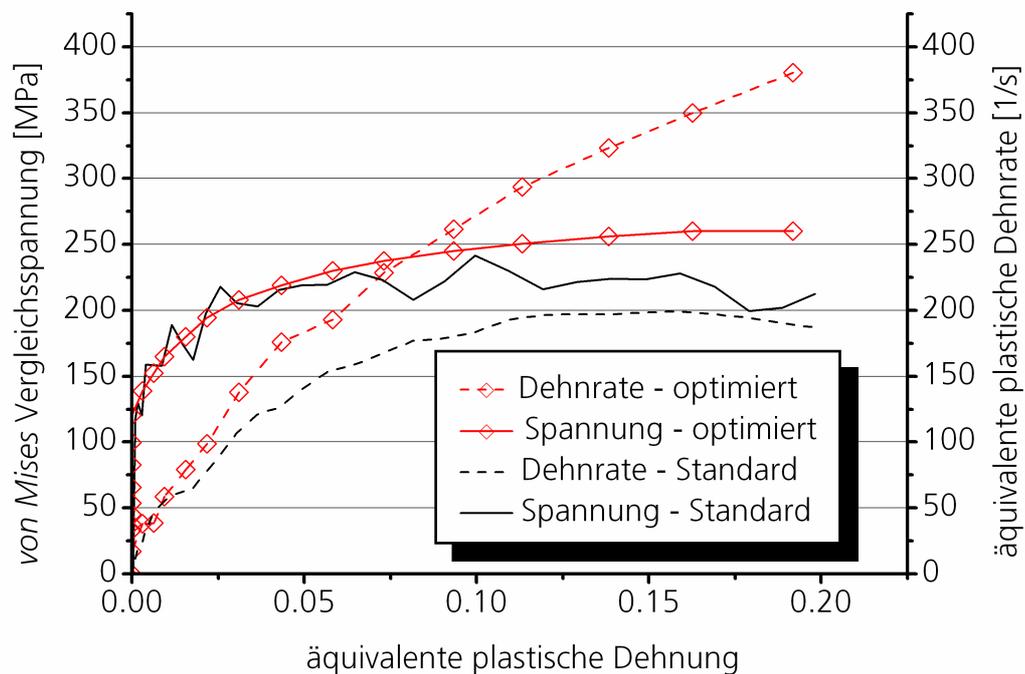


Abbildung 4-14: Vergleich von mit der ursprünglichen und der mit der optimierten Versuchseinrichtung ermittelten Spannungs-Dehnungskurven und Dehnraten-Dehnungskurven. Die Schwingungsfreiheit der Spannungs-Dehnungskurve bei fast doppelt so hoher Dehnrate gegenüber der Kurve des Standardversuchsaufbaus ermöglicht sehr viel genauere Aussagen.

Die mit dem optimierten Versuchsaufbau ermittelten Spannungs-Dehnungskurven weisen keine Schwingungen mehr auf, obwohl die maximale Dehnrate im Vergleich zur Referenz erhöht ist. Daneben wird in Abbildung 4-14 deutlich, dass auch bei dem Referenzversuch die Dehnrate nicht konstant ist, sondern im Verlauf des Versuchs ansteigt. Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz, durch eine gezielt schwellende Belastungscharakteristik die Schwingungen im System zu reduzieren, bringt also keine Nachteile im Vergleich zum Referenzversuch. Insgesamt ermöglicht diese wesentliche Verbesserung der Versuchseinrichtung Untersuchungen der Dehnratenverfestigung mit höherer Genauigkeit.

Zur Dehnungsmessung kann ein Extensiometer wegen eines möglichen Abgleitens infolge seiner Trägheit nur bedingt eingesetzt werden. Die Dehnungsmessung erfolgte daher optisch über die Probenverlängerung. Hierzu wurde auf den Proben die Messlänge – analog zu den quasistatischen Versuchen 12,5 mm – markiert und diese Marken mit einer Hochgeschwindigkeitskamera im Verlauf des Versuchs verfolgt. Abbildung 4-15 zeigt zwei Bilder des Messbereichs der Probe.

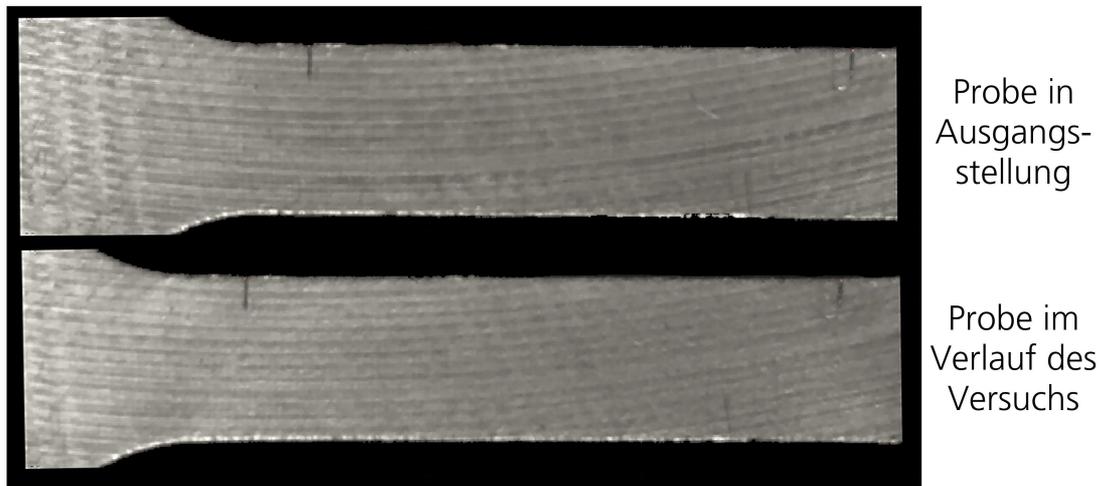


Abbildung 4-15: Zwei Bilder des Messbereichs der Probe. Oben vor und unten während des Versuchs. Die Messlänge ist durch die zwei vertikalen schwarzen Striche markiert.

Die Messlänge ist durch je zwei vertikale schwarze Striche gekennzeichnet. Oben in Abbildung 4-15 ist die Probe in Ausgangsstellung, unten während des Versuchs dargestellt. Die Ermittlung der Dehnung erfolgt mit einer für diesen Zweck programmierten Auswertungssoftware. Das Programm liest die in dem ASCII-Format PPM [58] abgelegten Einzelbilder automatisch ein und ermittelt die Positionen der Marken und daraus die Dehnung.

4.1.2 Versuchsdurchführung und Ergebnisse

Das primäre Ziel dieser Arbeit besteht in der Entwicklung eines Werkstoffmodells, welches das Verhalten von Bauteilen aus der Al-Druckgusslegierung GD-ALSi10Mg abbilden kann. Daher werden alle Proben aus Serienbauteilen entnommen, die Teile der Karosserie eines Kompaktklasse-Kraftfahrzeugs [26] sind. Abbildung 1-2 zeigt die Karosserierahmenstruktur dieses Fahrzeugs und unterteilt sie nach den Al-Erzeugnisklassen, die dort eingesetzt werden. Alle in dieser Abbildung rot dargestellten Bauteile bestehen aus der zu untersuchenden Al-Druckgusslegierung. Da insbesondere für die Kreuzzugproben möglichst große Proben benötigt werden, wurden die Proben aus einem Bauteil entnommen, das große ebene Flächen aufweist, nämlich dem Federbeintopf. Abbildung 4-16 zeigt einen Federbeintopf und die Entnahmeposition der Proben.

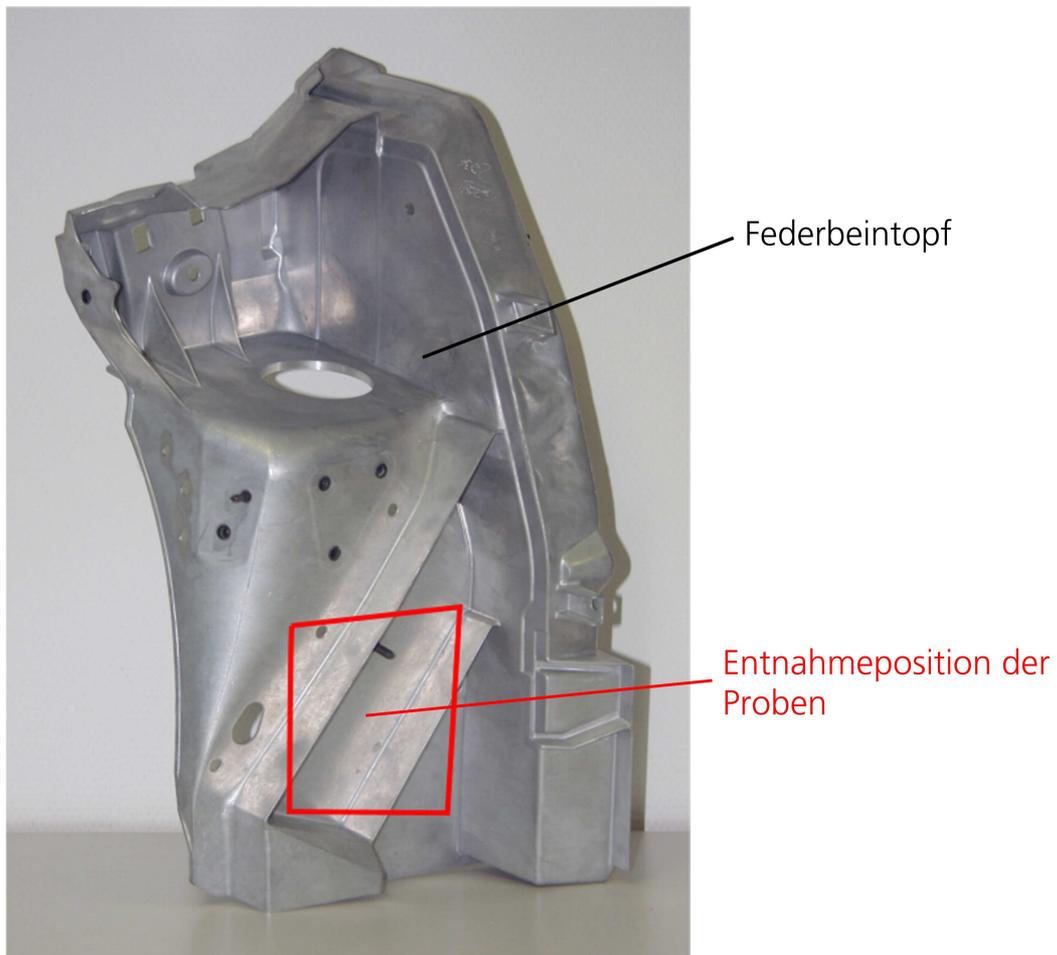


Abbildung 4-16: Entnahmepositionen der Proben aus dem Bauteil. Die Proben wurden aus Federbeintöpfen entnommen, die aus der Serienproduktion eines Kompaktklasse-Fahrzeugs [26] stammen. Diese Bauteile weisen die insbesondere für die Kreuzzugproben benötigten großen ebenen Flächen auf.

Aus den Bauteilen wurden zunächst Platten jeweils an der in Abbildung 4-16 markierten Position entnommen. Um einerseits die notwendige Planparallelität und andererseits ein möglichst homogenes Gefüge der Proben sicher zu stellen, wurden diese Platten von beiden Seiten plan gefräst und so von der Gusshaut und Gefügerandschichten befreit. Anschließend wurden die Proben funkenerosiv aus den Platten herausgeschnitten.

4.1.2.1 Fließfläche, plastisches Potenzial und Dehnverfestigung

Die Ergebnisse der quasistatischen einachsigen Zugversuche, Schubversuche und Kreuzzugversuche mit den Spannungsverhältnissen 1:1 und 1:2 werden als VON MISES Vergleichsspannung (vgl. Gl. 2-44,

erster Term auf der linken Seite) in Abhängigkeit von der äquivalenten plastischen Dehnung (Gl. 2-35) dargestellt. Die Berechnung der äquivalenten plastischen Dehnung erfolgt aus der Gesamtdehnung mithilfe der additiven Zerlegung der Dehnung in elastische und plastische Anteile (Gl. 2-31) und des HOOKE'SCHEN Gesetzes (Gl. 2-33 bzw. Gl. 2-34). Die Diagramme sind für die jeweiligen Versuchstypen auf Ausschnitte bis zu einer äquivalenten plastischen Dehnung von 0,01 beschränkt, um diesen für die Bestimmung der Fließfunktion ausschlaggebenden Bereich möglichst hoch aufzulösen. Die Zugversuche sind bis zum Versagen durchgeführt worden. Sie liefern auch unmittelbar die Dehnverfestigung bis zum Höchstkraftpunkt (Zugfestigkeit R_m , vgl. [36]), d. h., dem Beginn der Lokalisierung. Auf die Auswertung über diesen Punkt hinaus wird in Kapitel 5.1.2 näher eingegangen.

Einachsige Zugversuche

Insgesamt sind sechs einachsige Zugversuche durchgeführt worden, deren Spannungs-Dehnungs-Verläufe in Abbildung 4-17 wiedergegeben sind.

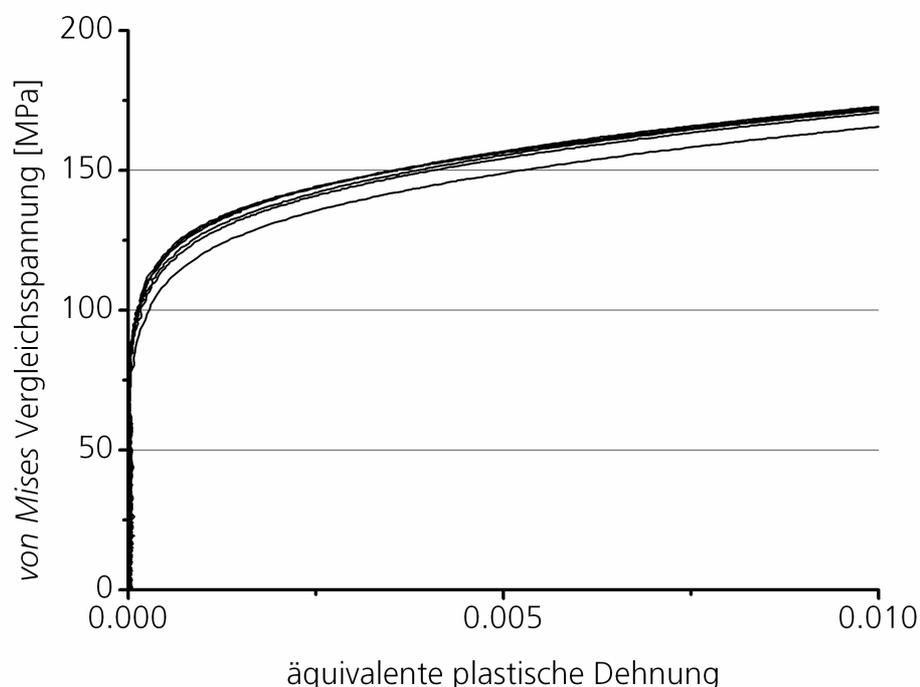


Abbildung 4-17: Spannungs-Dehnungs-Verläufe aller einachsigen Zugversuche. Das Diagramm enthält nur einen Ausschnitt der Kurven bis zu einer äquivalenten plastischen Dehnung von 0,01, um diesen für die Bestimmung der Fließfunktion ausschlaggebenden Bereich möglichst hoch aufzulösen.

Die Versuche sind sehr gut reproduzierbar.

Schubversuche

Die Ergebnisse der Schubversuche sind in Abbildung 4-18 dargestellt. Insgesamt wurden neun Messungen durchgeführt.

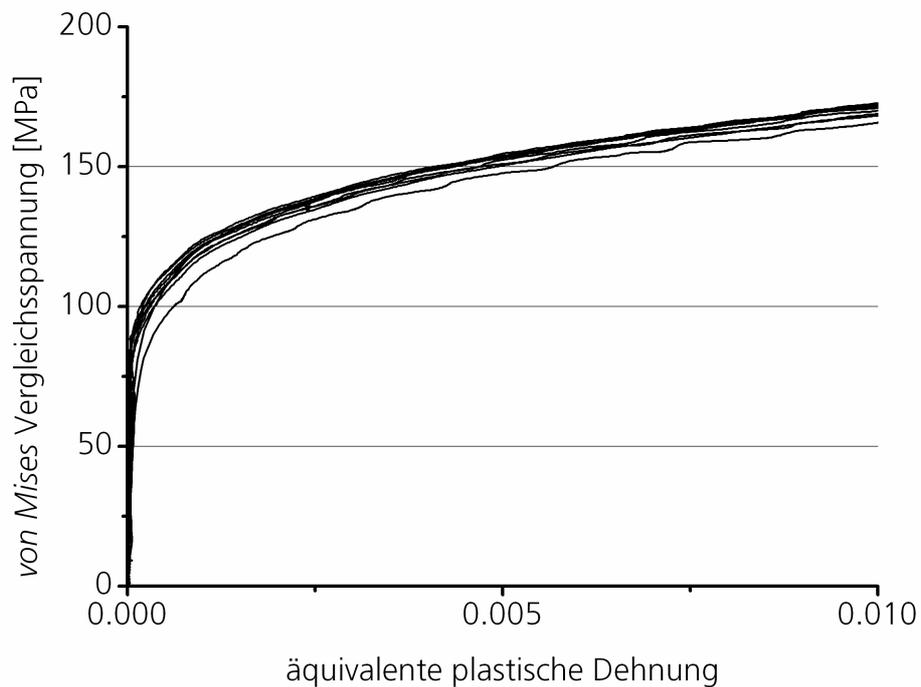


Abbildung 4-18: Spannungs-Dehnungs-Verläufe aller Schubversuche. Insgesamt ist die Streuung bei diesem Versuch etwas größer als die bei den Zugversuchen. Das Diagramm enthält nur einen Ausschnitt der Kurven bis zu einer äquivalenten plastischen Dehnung von 0,01.

Die Verfestigungskurve eines Versuchs liegt unter den Verläufen der anderen Versuche, die trotz einer größeren Streuung als bei den einachsigen Zugversuchen und Kreuzzugversuchen mit den Spannungsverhältnissen 1:1 eine für Gusswerkstoffe gute Übereinstimmung zeigen.

Kreuzzugversuche mit Spannungsverhältnissen 1:1

Abbildung 4-19 zeigt die Ergebnisse der insgesamt sechs Kreuzzugversuche mit Spannungsverhältnissen 1:1.

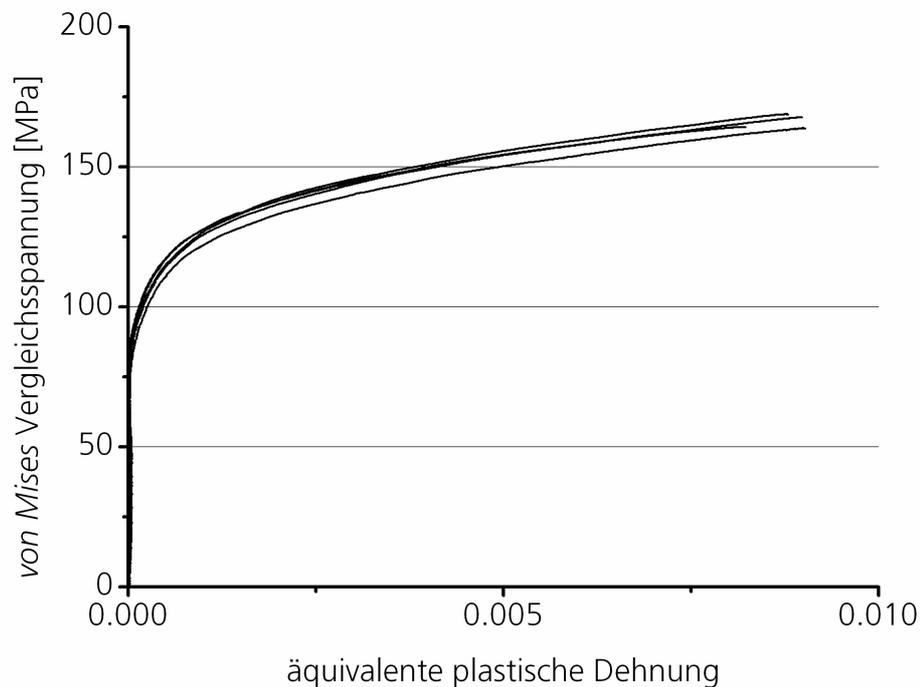


Abbildung 4-19: Spannungs-Dehnungs-Verläufe aller Kreuzzugversuche mit Spannungsverhältnissen von 1:1. Die Reproduzierbarkeit der Versuche ist gut.

Auch hier zeigt sich eine für diese Werkstoffklasse gute Übereinstimmung der Versuche.

Kreuzzugversuche mit Spannungsverhältnissen 1:2

Die Spannungs-Dehnungs-Verläufe der Kreuzzugversuche mit Spannungsverhältnissen von etwa 1:2 sind in Abbildung 4-20 zusammengestellt. Es wurden insgesamt sieben Wiederholungen bei diesem Versuchstyp durchgeführt.

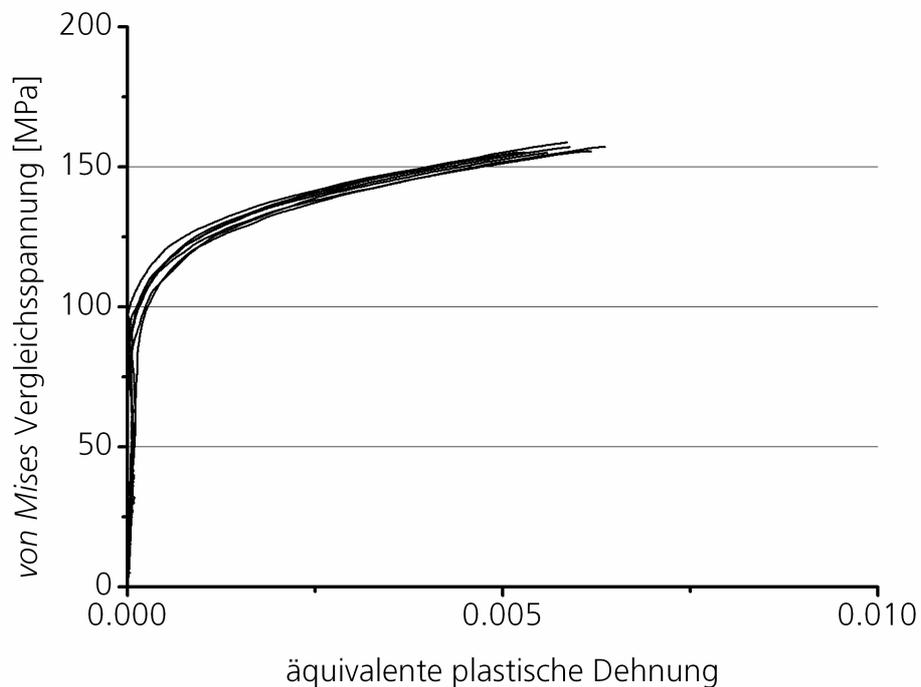


Abbildung 4-20: Spannungs-Dehnungs-Verläufe aller Kreuzzugversuche mit Spannungsverhältnissen von etwa 1:2. Insgesamt wurden sieben Versuche durchgeführt, wobei keine eindeutigen Ausreißer identifiziert werden können.

Bei diesem Versuchstyp können keine eindeutigen Ausreißer ausgemacht werden. Die Spannungszustände von 1:2 wurden durch eine unterschiedliche freie Länge der Arme der Kreuzzugprobe und durch eine zeitlich verzögerte Belastung herbeigeführt, wobei diese durch entsprechenden Freigang in der Verbindung der inneren und äußeren Schlitten (vgl. Abbildung 4-9 und Abbildung 4-10) realisiert wurde. Dabei entsteht eine leichte Streuung in den Spannungsverhältnissen, die sich bei der obigen Darstellung nicht bemerkbar macht, allerdings bei der Auswertung der Versuche in der Hauptspannungsebene (vgl. Kapitel 4.2) berücksichtigt wird.

Eine Zusammenstellung der Ergebnisse aller Versuchstypen in der Hauptspannungsebene bei verschiedenen äquivalenten plastischen Dehnungen erfolgt in Kapitel 4.2.

4.1.2.2 Dehnratenverfestigung

Die Ergebnisse der dynamischen Zugversuche sind in Abbildung 4-21 zusammengestellt.

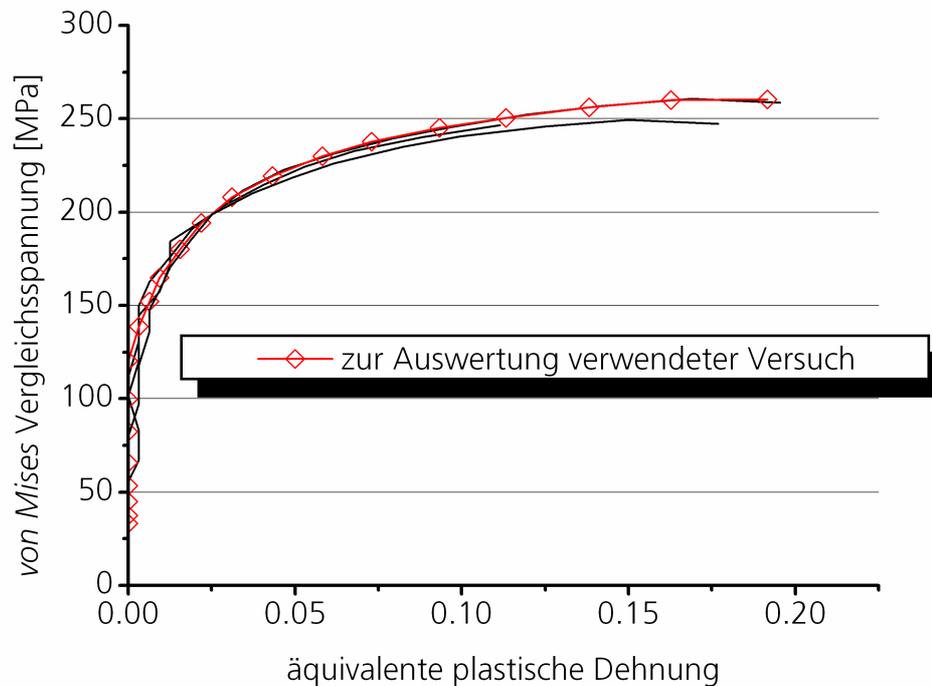


Abbildung 4-21: VON MISES Vergleichsspannung in Abhängigkeit von der äquivalenten plastischen Dehnung aller dynamischen Zugversuche. Insgesamt wurden vier Versuche durchgeführt. Die Bestimmung der Dehnratenverfestigung erfolgt auf Basis des rot dargestellten Versuchs.

Insgesamt wurden vier Versuche durchgeführt, von denen zwei eine sehr gute Übereinstimmung zeigen. Die Bestimmung der Dehnratenverfestigung erfolgt mit einem dieser beiden Versuche, der in Abbildung 4-21 rot dargestellt ist. Dieser Versuch ist isoliert in Abbildung 4-22 dargestellt, wobei dort auch die Dehnratenverfestigung über der äquivalenten plastischen Dehnung aufgetragen ist.

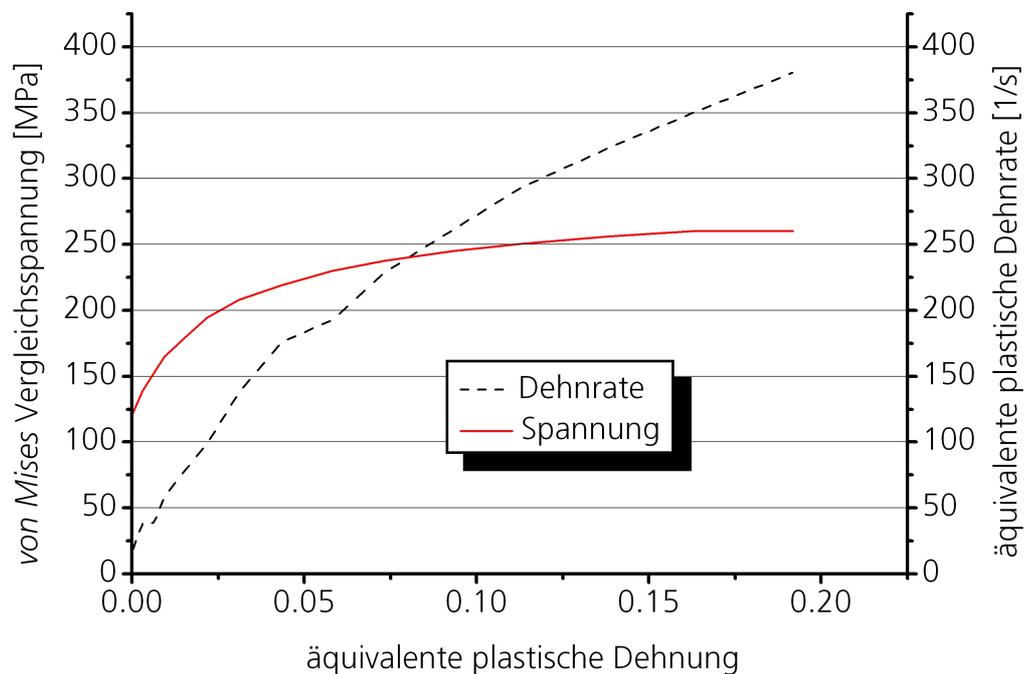


Abbildung 4-22: VON MISES Vergleichsspannung in Abhängigkeit von der äquivalenten plastischen Dehnung des zur Quantifizierung der Dehnratenverfestigung genutzten Versuchs. Daneben ist auch die Dehnrate in Abhängigkeit von der äquivalenten plastischen Dehnung dargestellt.

Die Dehnrate ist nicht konstant, sondern steigt monoton im Verlauf des Versuchs auf etwa 375 1/s an. Es steht zur Quantifizierung der Dehnratenverfestigung also für jede Dehnrate ein Spannungswert zur Verfügung. Da jedoch die Dehnverfestigung bei quasistatischer Beanspruchung bekannt ist, vgl. Abbildung 4-17, kann unter der Annahme, dass die Dehnverfestigung unabhängig von der Dehnratenverfestigung ist, das gesamte Dehn- und Dehnratenverfestigungsverhalten extrapoliert werden. Diese Extrapolation ist in Abbildung 4-23 dargestellt.

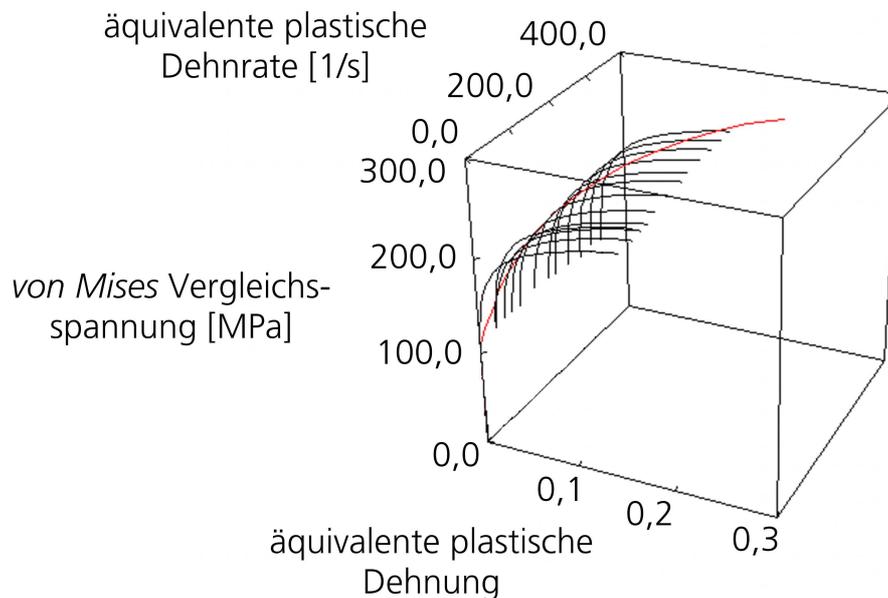


Abbildung 4-23: VON MISES Vergleichsspannung in Abhängigkeit von der äquivalenten plastischen Dehnung und der Dehnrates des zur Quantifizierung der Dehnratesverfestigung genutzten Versuchs (rote Kurve). Daneben enthält das Diagramm für einige Dehnrates Dehnverfestigungskurven, die gemäß der jeweiligen Dehnrates so skaliert wurden, dass sie mit der Messkurve (rot) übereinstimmen.

Die rote Kurve repräsentiert die VON MISES Vergleichsspannung in Abhängigkeit von der äquivalenten plastischen Dehnung und der Dehnrates des zur Quantifizierung der Dehnratesverfestigung genutzten Versuchs. Die Extrapolation der Dehnverfestigung bei den jeweiligen Dehnrates erfolgt, indem die bei den quasistatischen Versuchen ermittelte Dehnverfestigung so skaliert wird, dass sie in dem jeweils verfügbaren Messpunkt mit diesem übereinstimmt. Um die Dehnratesverfestigung zu extrahieren, werden Schnitte des Diagramms aus Abbildung 4-23 bei konstanter Dehnung erzeugt. Dabei ergibt sich eine näherungsweise lineare und konstante Dehnratesverfestigung von 0,07 MPas. Die detaillierte Auswertung ist in Kapitel 9.2 dargestellt.

4.2 Mathematische Formulierung

Die Aufgabe bei der mathematischen Formulierung von Werkstoffverhalten auf Basis experimenteller Daten besteht in einer Approximation oder Inter- bzw. Extrapolation der gemessenen Werte mit werkstofftechnisch und kontinuumsmechanisch plausiblen Formulierungen. Abbildung 4-24 zeigt eine Zusammenstellung der experimentellen Ergebnisse aus Kapitel 4.1.2.1 für äquivalente plastische

Dehnungen von 0,1 %, 0,2 % und 0,3 % in einer Hauptspannungsebene. Neben den Spannungspunkten (rot) sind die Projektionen der mit dem Faktor 20000 skalierten Vektoren der plastischen Dehnung in einer Hauptdehnungsebene abgebildet (blau). Da für die verschiedenen Spannungszustände unterschiedliche Anteile der plastischen Dehnung in der dritten Hauptrichtung auftreten, sind die Projektionen in die Ebene unterschiedlich lang. Die plastische Dehnung ist nur bei Schubbeanspruchung zweiachsig, weshalb hier die gesamte plastische Dehnung von den Vektoren dargestellt wird. Die Dehnungsvektoren zeigen die Fließrichtung des Werkstoffs. Neben den experimentellen Ergebnissen sind je zwei Fließfunktionen in Abbildung 4-24 a-c dargestellt, nämlich die nach VON MISES und eine von HOSFORD [57], BISHOP und HILL [20] sowie HERSHEY und DAHLGREN [51] vorgeschlagene nicht-quadratische Funktion gemäß Gl. 2-46 mit einem Exponenten von 8.

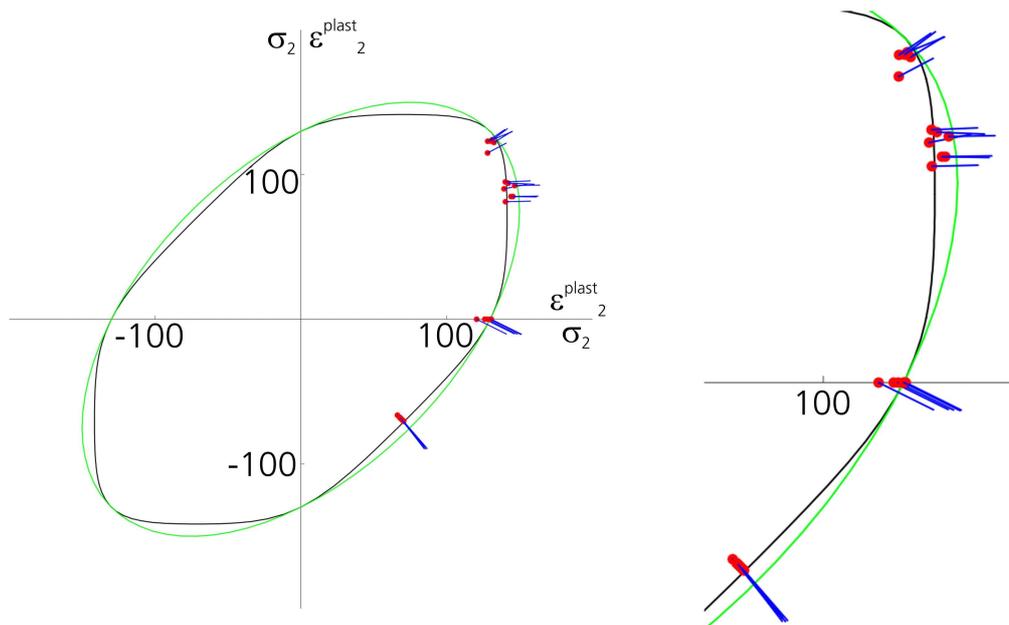


Abbildung 4-24 a: Approximation der Fließspannungen bei äquivalenten plastischen Dehnungen von 0,1 %. Es sind die Spannungen und die Projektionen der Vektoren der plastischen Dehnungen dargestellt. Daneben sind die VON MISES (grün) und eine nicht-quadratische Fließfunktion mit einem Exponenten $n=8$ (schwarz) visualisiert. Die Versuchsdaten werden von der nicht-quadratischen Funktion deutlich besser approximiert als von der VON MISES Fließfunktion.

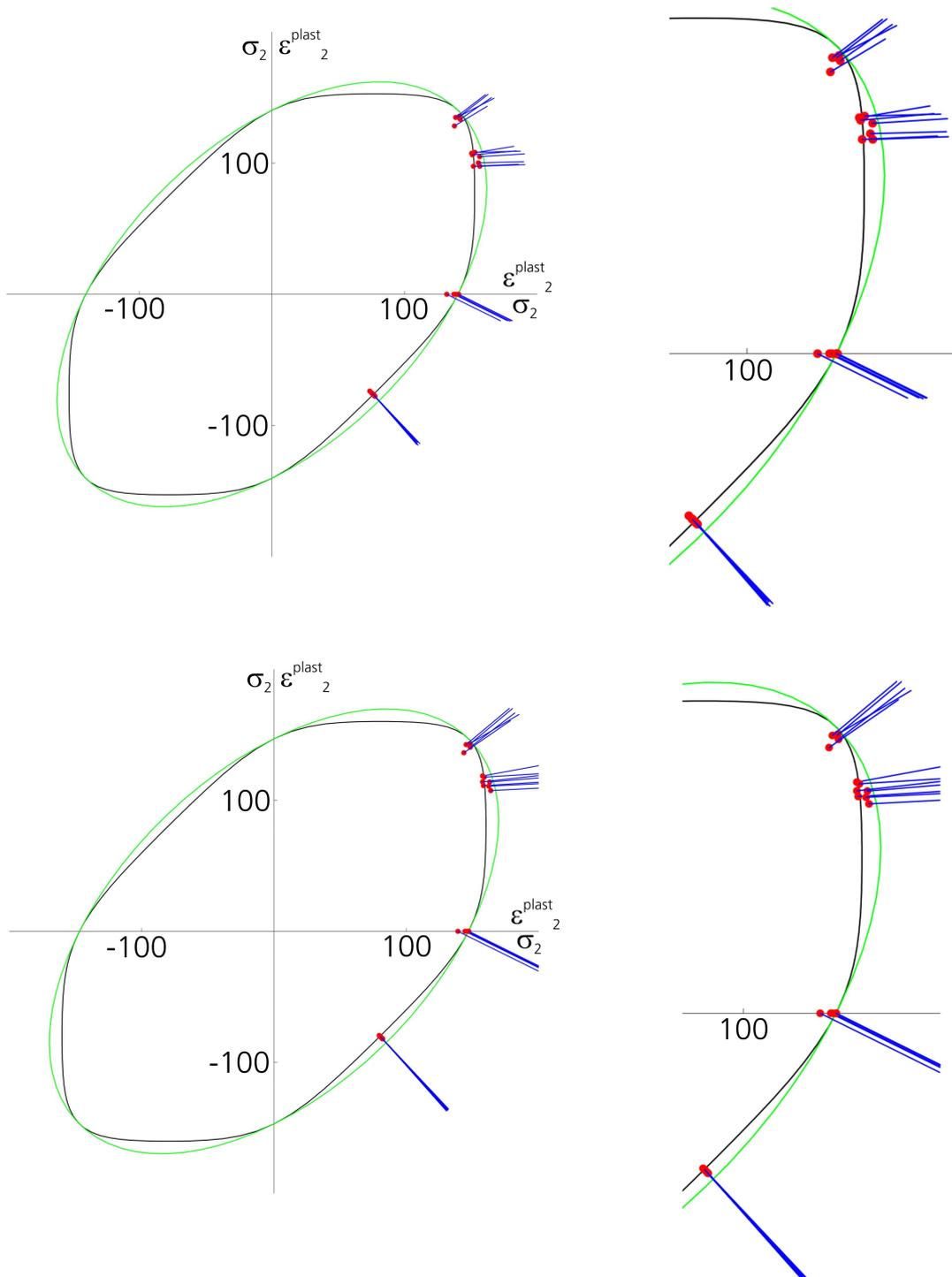


Abbildung 4-24 b (oben), c (unten): Approximation der Fließspannungen bei äquivalenten plastischen Dehnungen von 0,2 % und 0,3 %. Neben den Versuchsdaten sind die VON MISES (grün) und eine nicht-quadratische Fließfunktion mit einem Exponenten $n=8$ (schwarz) dargestellt. Letztere Funktion nähert die Versuchsdaten für alle dargestellten äquivalenten plastischen Dehnungen deutlich besser als die VON MISES Fließfunktion an.

Abbildung 4-24 zeigt, dass alle Messwerte von dieser Funktion gut angenähert werden, während bei Schubbeanspruchungen und bei zweiachsigen Zugbeanspruchungen mit Spannungsverhältnissen von etwa 1:2 die Messwerte deutlich neben der VON MISES Fließfunktion liegen. Da die blauen Vektoren, die die Fließrichtung wiedergeben, ebenfalls gut mit den Normalen der nicht-quadratischen Funktion mit dem Exponenten $n=8$ übereinstimmen, wird das plastische Potenzial auch mit dieser Funktion gut approximiert. Es liegt also in Übereinstimmung mit dem Prinzip der maximalen plastischen Dissipation (Kapitel 2.3.2) assoziiertes Fließen vor, d.h. das plastische Potenzial kann mit der gleichen Funktion beschrieben werden wie die Fließfläche.

In guter Näherung mit den experimentellen Daten lautet die Fließbedingung für die vorliegende Al-Druckgusslegierung also (Gl. 4-4):

$$f = \sqrt[8]{\frac{1}{2}(|s_I - s_{II}|^8 + |s_{II} - s_{III}|^8 + |s_{III} - s_I|^8)} - \sigma_{\text{Fließ}} \left(\kappa, \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) \quad \text{Gl. 4-4}$$

Die Fließspannung $\sigma_{\text{Fließ}}$ ist nicht konstant, sondern unterliegt einer als isotrop angenommenen Dehn- und Dehnratenverfestigung, deren mathematische Formulierungen mit der Art des Lösungsverfahrens verbunden ist und daher im folgenden Kapitel vorgestellt wird.

4.3 Implementierung in ein FEM-Berechnungsprogramm

Die Lösung von Werkstoffgleichungen für das elastisch-plastische Verhalten erfolgt mit einem Prädiktor-Korrektor Verfahren, vgl. Kapitel 2.3.2.

Aus Gründen der Genauigkeit und Stabilität der Lösung wird in dieser Arbeit eine voll-implizite Lösung des Korrektorschrittes angestrebt, d. h., die elastisch-plastischen Beziehungen sollen für den gesuchten Zustand zum Zeitpunkt t_{n+1} erfüllt sein. Dazu ist eine iterative Lösung der Werkstoffgleichungen im Rahmen des insgesamt inkrementell gelösten globalen Anfangs-/Randwertproblem erforderlich, siehe auch Abbildung 2-9.

Die in dieser Arbeit verwendete Fließfunktion (Gl. 4-4 bzw. Gl. 2-46) ist mit den Eigenwerten des Spannungsdeviators formuliert. Aufgrund des

inkrementellen Charakters des Gesamtlösungsverfahrens muss die Lösung für allgemeine Spannungszustände, also nicht nur für in die Eigenrichtungen transformierte Spannungszustände (Normalspannungszustände), erfolgen⁷. Die zur Bestimmung der Fließrichtung benötigte Ableitung der Fließfunktion nach dem Spannungstensor erfordert daher eine analytische Formulierung der Eigenwerte. Die Berechnung der Eigenwerte kann für spurlose Tensoren (wie der Spannungsdeviator) mit den Gl. 2-68 a-f erfolgen. Allerdings erscheint diese Restriktion für die Anwendung von iterativen Lösungsmethoden als nicht optimal, vgl. Kapitel 3.1. Daher wird in Kapitel 4.3.2 das Konvergenzverhalten verschiedener Formulierungen der Eigenwerte, nämlich einerseits einer nur für spurlose und andererseits einer für allgemeine Spannungstensoren, bewertet. Doch zuvor werden die grundlegenden Gleichungen und die Formulierung der Dehn- und Dehnratenverfestigung dargestellt.

4.3.1 Zu lösende Grundgleichungen

Obgleich für die vorliegende Al-Druckgusslegierung eine Fließfunktion gemäß der Fließbedingung aus Gl. 4-4 bestimmt worden ist, wird die allgemeine parametrisierte Form (Gl. 2-46) implementiert, um ein universell einsetzbares elastisch-plastisches Modell auch für zukünftige anders gelagerte Anwendungen bereitzustellen.

Die zu lösenden Gleichungen sind Gl. 2-37 a-d und Gl. 2-41. Da die globale Lösung des nichtlinearen Anfangs-/Randwertproblem der FEM inkrementell erfolgt, werden zwangsläufig die lokalen konstitutiven Gleichungen auch inkrementell gelöst (vgl. Abbildung 2-9). Gl. 4-5 stellt die Lösungsfolge für die Elementspannungen dar:

$$\sigma_{ij n+1} = \sigma_{ij n} + \Delta \sigma_{ij} \quad \text{Gl. 4-5}$$

Mit dem HOOKE'SCHEN GESETZ (Gl. 2-34) folgt:

$$\sigma_{ij n+1} = \sigma_{ij n} + \lambda \Delta \varepsilon_{kk}^{\text{elast}} \delta_{ij} + 2\mu \Delta \varepsilon_{ij}^{\text{elast}} \quad \text{Gl. 4-6}$$

⁷ Der Spannungstensor zum Zeitpunkt t_{n+1} und der Tensor des Dehnungsinkrementes besitzen nicht immer das gleiche Hauptachsensystem, vgl. auch Gl. 4-7.

Additive Zerlegung des Gesamtdehnungsincrementes gemäß Gl. 2-31 und Einsetzen der Fließregel Gl. 2-41 unter Berücksichtigung der Definition der äquivalenten plastischen Dehnung (Gl. 2-35) ergibt die Bestimmungsgleichung für das elastische Dehnungsincrement bei einer voll-impliziten Lösung:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{\text{elast}} = \Delta \varepsilon_{ij}^{\text{gesamt}} - \Delta \kappa \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right\|_{n+1} \quad \text{Gl. 4-7}$$

Infolge des expliziten Zeitintegrationsverfahrens des verwendeten FEM-Berechnungsprogramms [92] sind die Zeitschritte bei der Lösung verhältnismäßig klein. Daher sind die Dehnungsincremente und damit auch die Inkremente der äquivalenten plastischen Dehnung für die meisten Beanspruchungsgeschwindigkeiten ebenfalls verhältnismäßig klein, sodass der Fehler bei einer Linearisierung der Dehnverfestigung pro Rechenschritt vernachlässigt werden kann. Diese Linearisierung ist in Gl. 4-8 formuliert:

$$\sigma_{\text{Fließ } n+1} = \sigma_{\text{Fließ } n} + H_1 \Delta \kappa \quad \text{Gl. 4-8}$$

H_1 stellt den linearen Verfestigungskoeffizienten bei κ_n dar.

Dagegen kann die Änderung der Dehnrates von Zeitschritt zu Zeitschritt groß sein. Daher darf die Dehnratesverfestigung innerhalb eines Rechenschritts nicht linearisiert werden, sondern muss gemäß ihrer genauen Formulierung bei der Lösung der Gl. 4-7 berücksichtigt werden. Allerdings verhält sich die in Kapitel 3.1.2 experimentell quantifizierte Dehnratesverfestigung näherungsweise linear. Daher gilt für die Dehnratesverfestigung ein originärer linearer Zusammenhang (Gl. 4-9):

$$\sigma_{\text{Fließ } n+1} = \sigma_{\text{Fließ } n+1} + H_2 \frac{\Delta \kappa}{\Delta t} \quad \text{Gl. 4-9}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. 4-8 und Gl. 4-9 kann Gl. 4-4 in inkrementeller Form ausgedrückt werden (Gl. 4-10):

$$f = \sqrt{\frac{1}{2} \left(|s_I - s_{II}|^n + |s_{II} - s_{III}|^n + |s_{III} - s_I|^n \right)} - \sigma_{\text{Fließ}}(\kappa_n) - \left(\Delta\kappa \left(H_1 + \frac{H_2}{\Delta t} \right) \right) \quad \text{Gl. 4-10}$$

Insgesamt stehen mit Gl. 4-6 in Verbindung mit Gl. 4-7 und Gl. 4-10 sieben Gleichungen zur Verfügung, mit denen die sechs unbekanntenen Komponenten des Spannungstensors σ_{ij} und das Inkrement der äquivalenten plastischen Dehnung $\Delta\kappa$ errechnet werden können.

4.3.2 Bewertung verschiedener Formulierungen der Eigenwerte und Lösungsverfahren

Wie in Kapitel 3.1 dargestellt wird eine Formulierung der Fließbedingung gemäß Gl. 4-11 für allgemeine Spannungszustände und eine analytische Formulierung der Eigenwerte für allgemeine Spannungszustände hinsichtlich des Konvergenzverhaltens einer iterativen Lösung als geeigneter erachtet denn eine Formulierung in den Deviatorspannungen. Gl. 4-11 gibt nun die Fließbedingung als Funktion der Eigenwerte eines allgemeinen Spannungstensors wieder⁸:

$$f = \sqrt{\frac{1}{2} \left(|\sigma_I - \sigma_{II}|^n + |\sigma_{II} - \sigma_{III}|^n + |\sigma_{III} - \sigma_I|^n \right)} - \sigma_{\text{Fließ}}(\kappa_n) - \left(\Delta\kappa \left(H_1 + \frac{H_2}{\Delta t} \right) \right) \quad \text{Gl. 4-11}$$

Für diese Funktion muss eine analytische Bestimmung der Eigenwerte des Spannungstensors erfolgen. Die Eigenwerte sind die Lösung der charakteristischen Gleichung. Diese Gleichung ist eine kubische Gleichung, deren Lösung mit der CARDANISCHEN Formel erfolgen kann.

⁸ Die hydrostatischen Drücke heben sich in den jeweiligen Differenzen auf.

Eine praxisgerechtere Lösungsfolge wird in [24] vorgestellt, die hier gemäß den Gl. 4-12 a-i Anwendung findet:

$$a = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$b = -(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11})$$

$$c = \sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{31}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}$$

$$q = \frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2}$$

$$p = \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-q}{\sqrt{-p^3}}\right)$$

Gl. 4-12 a-i

$$\sigma_I = 2\sqrt{-p} \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

$$\sigma_{II} = -2\sqrt{-p} \cos\left(\frac{\varphi + \pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

$$\sigma_{III} = -2\sqrt{-p} \cos\left(\frac{\varphi - \pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

Die vereinfachten und auf spurlose Tensoren beschränkten Bestimmungsgleichungen für die Eigenwerte gemäß Gl. 2-68 a-f gehen aus den Gl. 4-12 a-i hervor. Einsetzen von Gl. 4-12 a-i in Gl. 4-11 bzw. Gl. 2-68 a-f in Gl. 4-10 liefert die allgemein bzw. deviatorisch formulierte Fließbedingung in globalen Koordinaten, die die Basis für die Implementierung bildet.

Nun kann die Fließrichtung für die Fließfunktion Gl. 4-10 unter Anwendung der Kettenregel durch Gl. 4-13 bestimmt werden:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_I} \frac{\partial \sigma_I}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{II}} \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{III}} \frac{\partial \sigma_{III}}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{Gl. 4-13}$$

Im Folgenden werden zwei Algorithmen zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems betrachtet: Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren (siehe

beispielsweise [94]) und das Verfahren nach LEVENBERG-MARQUADT (vgl. [75]), wobei im letzteren Fall auf eine bestehende Fortran Subroutine aus der MinPack-Bibliothek [83] zurückgegriffen wird. Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren wurde in seiner originären Form implementiert. In der hier verwendeten Routine für den ohnehin aufwendigeren und robusteren LEVENBERG-MARQUADT-Algorithmus werden darüber hinaus Maßnahmen getroffen, die das Konvergenzverhalten verbessern sollen, wie eine Skalierung der Variablen und eine Schrittweitenbegrenzung.

Die beiden Lösungsverfahren benötigen neben den Funktionswerten auch die Werte der partiellen Ableitungen des Gleichungssystems. Die Ermittlung der dabei erforderlichen zweiten partiellen Ableitungen der Fließfunktion (Gl. 4-11) wurde ebenso wie die in Gl. 4-13 dargestellten ersten partiellen Ableitungen der Fließfunktion mithilfe eines Computeralgebra-Systems [79] vorgenommen ⁹.

Die Bewertung des Konvergenzverhaltens erfolgt in einer Mehrfachschleife, in der die Komponenten des Gesamtdehnungstensors variiert werden und dann das elastisch-plastische Modell in seinen verschiedenen Varianten der Implementierung gelöst wird. Diese Schleife ist in Abbildung 4-25 dargestellt.

⁹ Der optimierte Fortran Quellcode allein für die Berechnung der erforderlichen ersten und zweiten partiellen Ableitungen enthält rund 6000 Rechenoperationen. Eine Herleitung ohne die Hilfe eines Computeralgebrasystems wäre sehr aufwändig und darüber hinaus fehleranfällig.

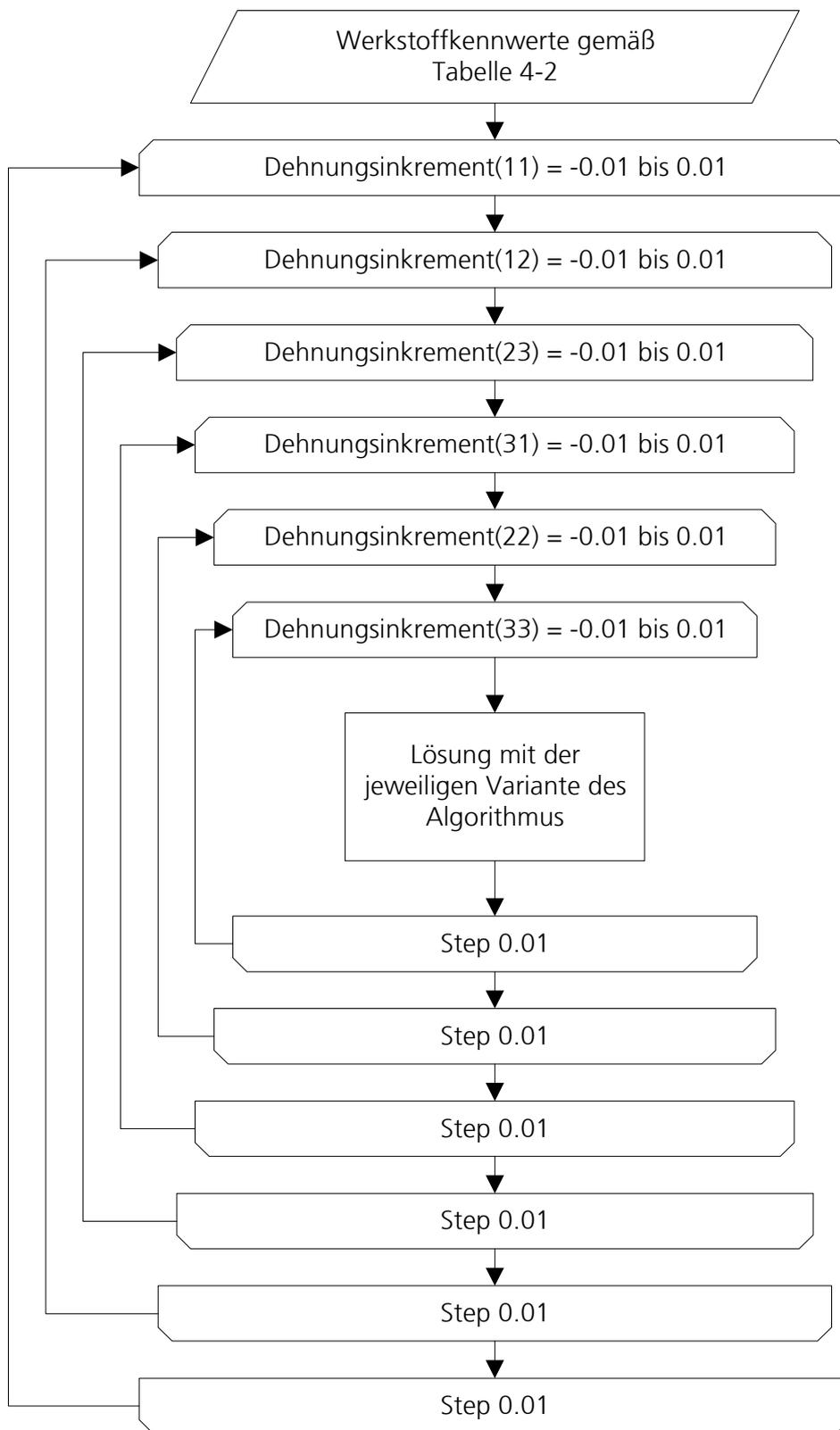


Abbildung 4-25: Ablaufdiagramm des Computerprogramms zur Bewertung des Konvergenzverhaltens verschiedener Formulierungen und Lösungsverfahren des elastisch-plastischen Modells.

Die in dieser Studie verwendeten Modellparameter sind in Tabelle 4-1 zusammengestellt. Hierbei wird eine lineare Dehnverfestigung gewählt.

Tabelle 4-1: In der Studie zur Bewertung des Konvergenzverhaltens verwendeten Modellparameter.

$\sigma_{\text{Fließ}}$	100 N/mm ²
H ₁	100
H ₂	0
Schubmodul	30000 N/mm ²
Kompressionsmodul	50000 N/mm ²

Bei der Implementierung der Variante mit der Eigenwertbestimmung für spurlose Tensoren werden zwei verschiedene Varianten betrachtet. Bei der einen wird vor jeder Iteration der Spannungsdeviator gebildet. Es wird also vorab pauschal korrigiert. Bei der anderen Variante wird eine Korrektur erst unmittelbar vor einer Verletzung des Definitionsbereichs einer Funktion vorgenommen, wobei der Grenzwert dieser Funktion verwendet wird. Diese Vorgehensweise ist analog zu der von BRON und BESSON [23] Gewählten. Dort werden die Ableitungen durch vorher berechnete Grenzwerte ersetzt, hier erfolgt die Grenzwertbetrachtung innerhalb der Berechnungsfolge der Ableitungen. Außerdem werden alle Varianten mit einem rotationssymmetrischen plastischen Potenzial (VON MISES, $n=2$ in Gl. 4-10 bzw. Gl. 4-11) und dem für die vorliegenden Al-Druckgusslegierung gefundenen ($n=8$ in Gl. 4-10 bzw. Gl. 4-11) überprüft.

Es werden maximal 500 Iterationen erlaubt und als konvergiert wird – wenn nicht anders in Tabelle 4-2 verwiesen – 10^{-8} angesehen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4-2 zusammengestellt.

Tabelle 4-2: Ergebnisse der Untersuchungen des Konvergenzverhaltens verschiedener Formulierungen und Lösungsverfahren eines elastisch-plastischen Modells mit einer parametrischen Fließfunktion gemäß Gl. 4-10 bzw. Gl. 4-11 mit Exponenten von $n=2$ und $n=8$.

	Anteil der konvergierten Lösungen gemäß der Schleife in Abbildung 4-25					
	Eigenwertformulierung für spurlose Tensoren				Eigenwertformulierung für allg. Tensoren	
	Exponent 2		Exponent 8		Exponent 2	Exponent 8
	Globale Korrektur	Grenzwertbildung	Globale Korrektur	Grenzwertbildung		
Newton-Raphson-Verfahren	100 %, $LS < 10^{-4}$	100 %, $LS < 2^* 10^{-8}$	8 %	26 %	100 %	56 %
Levenberg-Marquadt-Verfahren	100 %, $LS < 10^{-4}$	100 %, $LS < 2^* 10^{-8}$	8 %	58 %	100 %	100 %

Für rotationssymmetrische plastische Potenziale ($n=2$) konvergieren alle Varianten bei allen getesteten Beanspruchungen. Dagegen zeigen sich bei der nicht-quadratischen Funktion zwei Trends. Die aus Konvergenzsicht beste Formulationsvariante ist die für allgemeine Spannungszustände. Bei beiden Lösungsverfahren zeigt sich diese Formulierung überlegen, wengleich nur mit dem LEVENBERG-MARQUADT-Verfahren in allen Fällen Konvergenz erreicht wird. Daneben liefert bei der deviatorischen Formulierung eine globale Korrektur der Spannungstensoren zu deviatorischen Tensoren schlechtere Ergebnisse als die lokale Korrektur durch Grenzwertbildung der jeweils im Definitionsbereich verletzten Funktion. Der zweite Trend zeigt, dass das Lösungsverfahren nach Levenberg-Marquadt dem einfachen Newton-Raphson-Verfahren überlegen ist, wobei in der hier verwendeten Routine zusätzliche konvergenzverbessernde Maßnahmen ergriffen werden, die für das bessere Lösungsverhalten entscheidend sein könnten. Von den in dieser Arbeit untersuchten Varianten führt also nur eine allgemeine Formulierung der Fließfunktion in Verbindung mit einem hoch-

entwickelten Lösungsalgorithmus in allen betrachteten Fällen zur Konvergenz.

4.4 Verifikation und Validierung des elastisch-plastischen Werkstoffmodells

Zunächst erfolgt eine Verifikation und Bewertung der Implementierung. Dann wird die Modellierung validiert, indem die Versuche nachgerechnet werden.

4.4.1 Verifikation und Bewertung der Implementierung

Die Verifikation erfolgt in fünf Schritten. Zunächst werden die Residuen der Fließbedingung bestimmt. Es folgt der Vergleich des Algorithmus für einen Exponenten von zwei mit einem iterativen RADIAL-RETURN Verfahren. Weiterhin wird die Form der Fließfläche visualisiert und der sich aus der Berechnung ergebende Kraft-Spannungszusammenhang mit der Vorgabe, die sich aus den Werkstoffparametern ergibt, verglichen. Abschließend wird die implizit gelöste Dehnratenverfestigung einer expliziten Lösung gegenübergestellt.

4.4.1.1 Residuum der Fließbedingungen

Die Fließbedingung wurde mit einer ähnlichen Schleife wie in Abbildung 4-25 dargestellt ausgewertet, allerdings mit einer Schrittweite von 0,002, d. h., bei 1771551 Schritten. Dabei betragen die maximalen Werte der Fließbedingung (maximalen Residuen der Fließbedingung, da diese gleich Null sein soll):

- $n=2: 4,8 \cdot 10^{-11}$
- $n=8: 4,6 \cdot 10^{-9}$

Die Residuen sind sehr klein, die Fließbedingung wird also sehr genau erfüllt.

4.4.1.2 Vergleich mit dem RADIAL-RETURN Verfahren bei $n=2$

Mit der gleichen Schleife (d. h., Schrittweite 0,002) wurde der implementierte Algorithmus mit einem iterativen RADIAL-RETURN Verfahren verglichen. Der maximale relative Fehler des Spannungstensors und der äquivalenten plastischen Dehnung in den 1771551 getesteten Lastfällen beträgt 0,0011. Diese Abweichung wird auf Rundungsfehler zurückgeführt, die infolge der vielen Rechenoperationen bei der Lösung des in dieser Arbeit implementierten Modells entstanden sein könnten. Insgesamt wird dieser maximale relative Fehler jedoch als gering angesehen.

4.4.1.3 Grafischer Vergleich

Die Visualisierung der Fließfläche erfolgte mit einer Mehrfachschleife ähnlich der in Abbildung 4-25 Dargestellten. Hierbei wurde zusätzlich eine schrittweise Skalierung der Dehnungen je Dehnungsrichtung vorgenommen, sodass radial vom Ursprung ausgehend der Hauptspannungsraum durchschritten wird. Die bei einer äquivalenten plastischen Dehnung von 0,1 % berechneten Spannungen wurden extrahiert und sind in Abbildung 4-26 visualisiert.

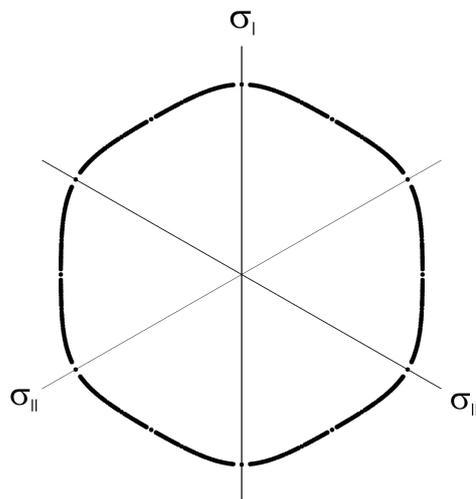


Abbildung 4-26: Visualisierung der mit der Implementierung erzeugten Fließfläche. Sie hat die erforderliche Form, vgl. Abbildung 2-3.

Die Visualisierung der mit der Implementierung erzeugte Fließfunktion zeigt, dass sie die erforderliche Form aufweist, vgl. Abbildung 2-3.

4.4.1.4 Vergleich des Kraft-Spannungszusammenhangs mit der Vorgabe des Werkstoffmodells

Für einen einachsigen Spannungszustand kann bei linearer Verfestigung und linear-elastischem Verhalten die Spannung mit der Kraft in Zusammenhang gebracht werden:

$$F_x = \sigma_{xx} A_{Null} e^{\left(-2\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{Fließ}}{H_1} \right)} \quad \text{Gl. 4-14}$$

Dieser Zusammenhang spiegelt die Werkstoffeigenschaften wider und muss von der FEM-Berechnung reproduziert werden. Zur Überprüfung des implementierten Modells wird ein Ein-Element-Test durchgeführt und aus dieser Berechnung der Kraft-Spannungszusammenhang extrahiert. Dieser Zusammenhang wird mit der Vorgabe gemäß Gl. 4-14 und dem Ergebnis einer Berechnung mit einem kommerziellen FEM-Berechnungsprogramm [92] verglichen. Die bei dieser Untersuchung verwendeten Werkstoffparameter sind in Tabelle 4-3 aufgeführt.

Tabelle 4-3: Beim analytischen Vergleich der Implementierung in dieser Arbeit mit anderen Implementierungsvarianten verwendete Modellparameter.

$\sigma_{Fließ}$	200 N/mm ²
H_1	100
H_2	0
Schubmodul	20510 N/mm ²
Kompressionsmodul	44440 N/mm ²

In Abbildung 4-27 sind die Ergebnisse dieser Berechnungen gegenübergestellt.

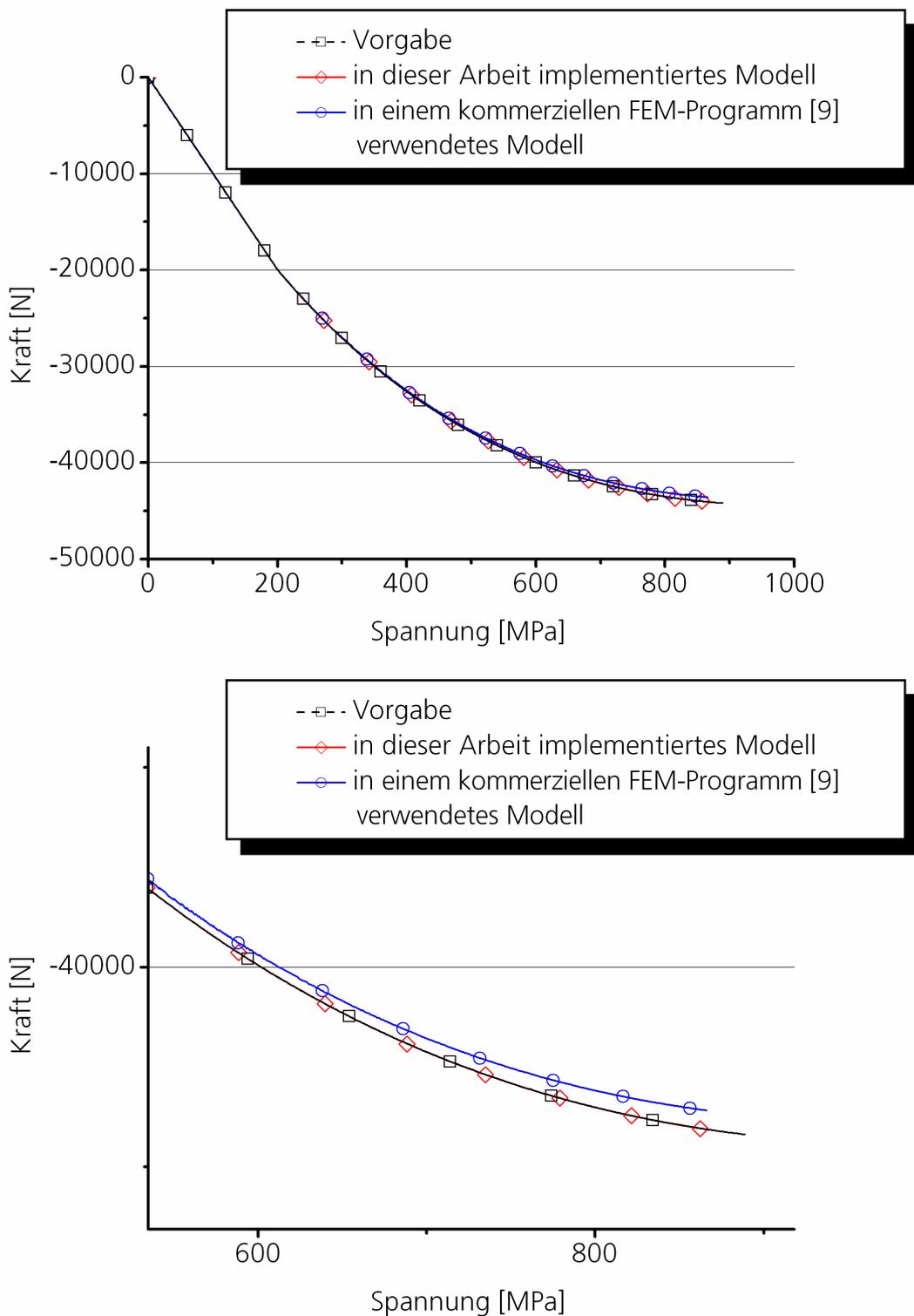


Abbildung 4-27: Vergleich des vorgegebenen Kraft-Spannungszusammenhangs mit dem in dieser Arbeit implementieren und dem in [92] verwendeten Algorithmus. Oben ist eine Gesamtansicht dargestellt, unten ein vergrößerter Ausschnitt. Der in dieser Arbeit implementierte Algorithmus stimmt mit sehr hoher Genauigkeit mit der Vorgabe überein, wohingegen der in [92] verwendeten Algorithmus bei hohen Beanspruchungen zunehmend abweicht.

Der in dieser Arbeit implementierte Algorithmus weist eine nahezu exakte Übereinstimmung mit der Vorgabe auf. Das in [92] implementierte Verfahren weicht hingegen bei hohen Beanspruchungen zunehmend von der Vorgabe ab. Der in [93] als Vorlage für eine User-Subroutine gegebene Quellcode zeigt, dass dort der Spannungstensor mit dem Verhältnis der Prädiktor-Vergleichsspannung zur Vergleichsspannung des alten Zeitschrittes skaliert wird, und nicht mit dem Verhältnis der mit dem ermittelten Dehnungszinkrement korrigierten Vergleichsspannung zur Vergleichsspannung des alten Zeitschrittes.

4.4.1.5 Vergleich der implizit gelösten Dehnratenverfestigung mit einer Explizit gelösten

Bei diesem Testlastfall beträgt die Kantenlänge des Elementwürfels 10 mm und die Werkstoffparameter entsprechen den in Tabelle 4-3 aufgeführten Werten, wobei hier eine lineare Dehnratenverfestigung von $H_2=1$ MPas gewählt wurde. Der Würfel wurde mit einer konstanten Verschiebungsgeschwindigkeit von 1 m/s einachsig in Zugrichtung beansprucht, sodass die anfängliche Dehnratenrate bei 100 1/s liegt. Im Verlauf der Beanspruchung sinkt die Dehnratenrate mit steigender Bezugslänge. In Abbildung 4-28 sind die Ergebnisse der in dieser Arbeit implementierten impliziten Lösung mit der in einem kommerziellen FEM-Berechnungsprogramm verwendeten expliziten Lösung der Dehnratenverfestigung vergleichend dargestellt.

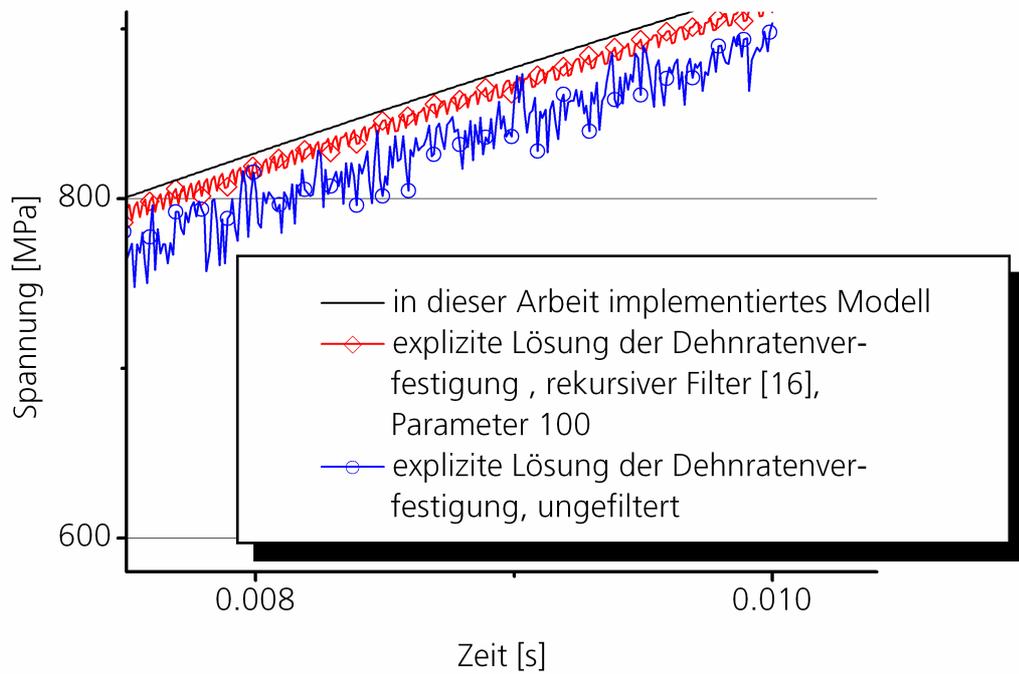
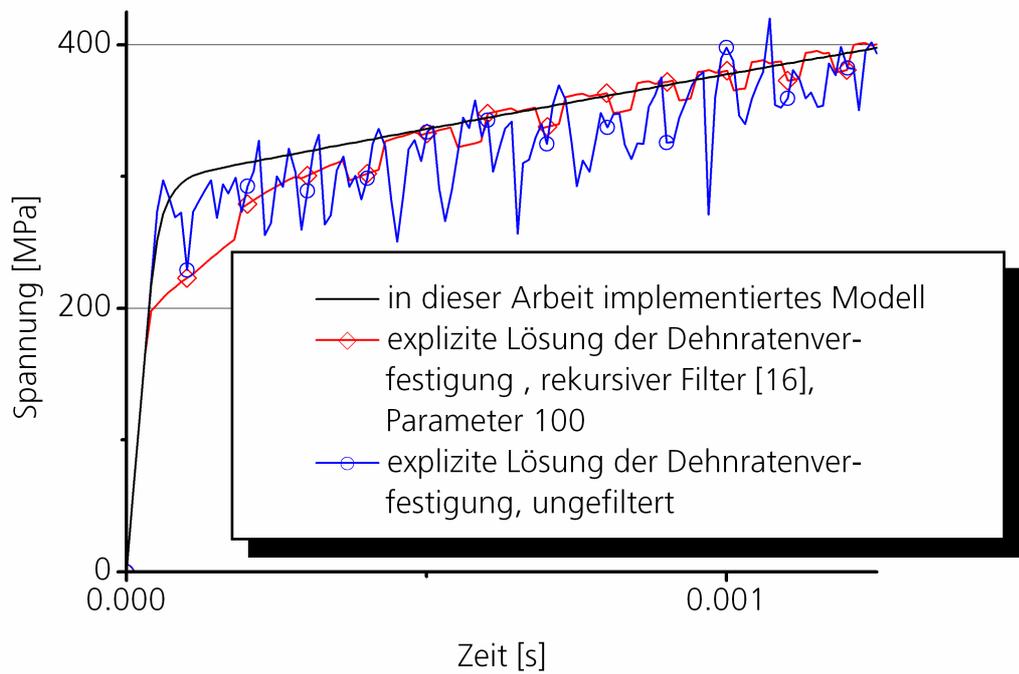


Abbildung 4-28: Vergleich der Spannungsverläufe bei visko-plastischen Materialverhalten, jeweils berechnet nach dem in dieser Arbeit implementierten Verfahren, einem ungefilterten und gefilterten expliziten Verfahren.

Es wird deutlich, dass nicht nur die Qualität der numerischen Berechnung aufgrund der Freiheit von numerischen Oszillationen stark verbessert ist. Auch weichen sowohl die ungefilterte als auch die gefilterte explizite Lösung von der impliziten, genaueren Lösung ab, vgl. Abbildung 4-28 oben. Eine Filterung kann zwar das Rauschen reduzieren und verschiebt das Signal in die richtige Richtung, trifft dennoch den mit der impliziten Lösung berechneten Verlauf nicht. Darüber hinaus birgt die Filterung den schwerwiegenderen Nachteil, dass die Spannung bei Sprüngen in der Dehnrate, wie sie bei realen Impaktvorgängen vorkommt, nicht korrekt berechnet werden, vgl. Abbildung 4-28 unten. Der Dehnratensprung in dem hier betrachteten Beispiel liegt bei beginnender Belastung vor.

4.4.2 Validierung der Modellierung

Zur Validierung wurde ein Versuch je Versuchstyp mit der ermittelten nicht-quadratischen Fließfläche mit Exponent $n=8$ und der VON MISES Fließfläche nachgerechnet. Die Dehnverfestigung entstammt dem einachsigen Zugversuch (vgl. Abbildung 4-17), der zur Validierung herangezogen wurde. Gegenstand der Validierung ist in erster Linie die Modellierung des plastischen Verhaltens, daher werden alle Versuche mit der gleichen Dehnverfestigung nachgerechnet. Zu dieser Dehnverfestigung wiesen jedoch die Dehnverfestigungen der einzelnen Versuche infolge der Streuung kleine Abweichungen auf. Dahingegen wurden als elastische Konstanten, die ebenfalls einer gewissen Streuung unterliegen, die jeweils gemessenen Parameter verwendet.

Die zum Vergleich herangezogenen Größen müssen direkt gemessene Größen sein, weshalb je Belastungsrichtung die Kraft und die Dehnung verglichen werden. Da bei einem mit einer Scherbewegung durchgeführten Schubversuch nur eine Kraft gemessen wird, ist beim Schubversuch diese Kraft jeweils über den Dehnungen in den beiden Richtungen aufgetragen.

4.4.2.1 Einachsiger Zugversuch

In Abbildung 4-29 sind die gemessenen und berechneten Kraft-Dehnungs-Verläufe für einen einachsigen Zugversuch dargestellt.

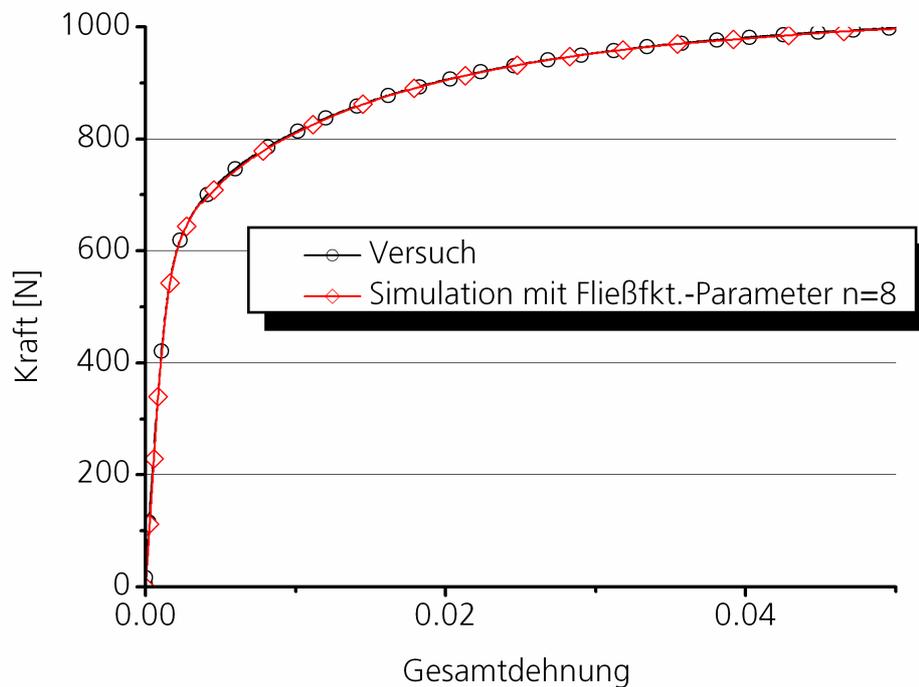


Abbildung 4-29: Vergleich der Simulation und des Versuchs bei einem einachsigen Zugversuch. Das einachsige Verhalten kann nahezu ideal wiedergegeben werden.

Die beiden Kurven stimmen nahezu exakt überein. Da in dem Simulationsmodell die idealen Randbedingungen aufgebracht worden sind, zeugt die gute Übereinstimmung auch von einer exakten Versuchsdurchführung, d. h., die Belastung der Probe erfolgte ideal. Die Berechnungsergebnisse mit der VON MISES Fließfunktion sind theoretisch und praktisch identisch.

4.4.2.2 Schubversuch

Abbildung 4-30 und Abbildung 4-31 zeigen den Vergleich der Simulations- und Versuchsergebnisse eines Schubversuchs. Die Verfestigung im Versuch ist größer als die in der Simulation. Da sich im Verlauf des Schubversuchs eine Zugbeanspruchung überlagert und sich der Messbereich der Probe dreht, wird seine Genauigkeit zu Beginn der Verformung als am höchsten angesehen. Eine tiefergehende Untersuchung des Gültigkeitsbereichs eines ARCAN-Schubversuchs bei duktilen Werkstoffen erfolgt nicht im Rahmen dieser Arbeit, sodass dieser Schubversuch nur im Bereich kleiner Verformungen als zuverlässig angesehen wird.

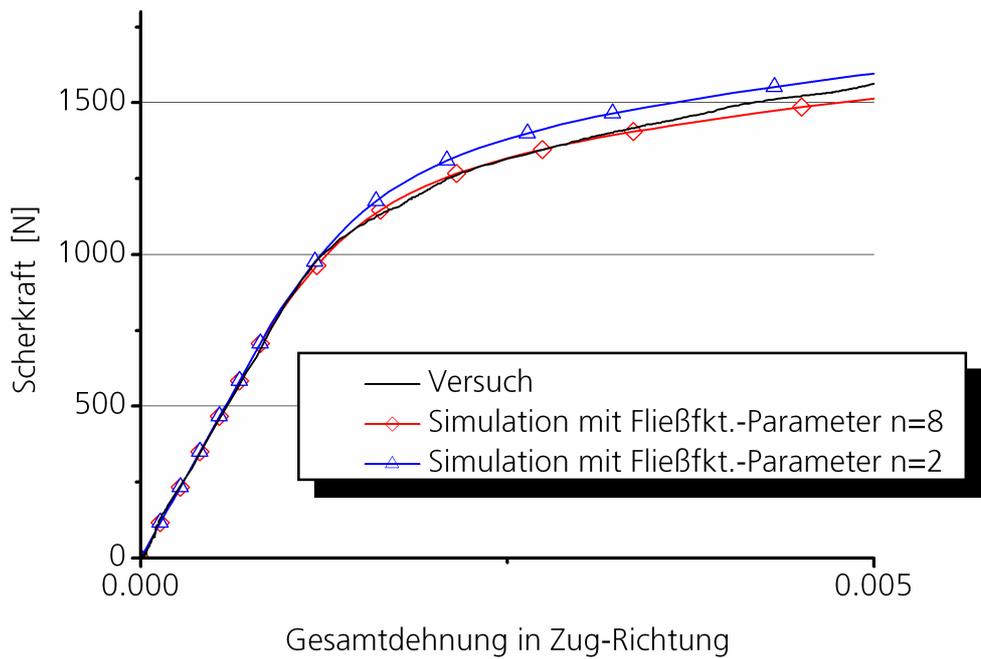


Abbildung 4-30: Vergleich der Simulation und des Experiments bei einem Schubversuch, wobei die Dehnung in Zugrichtung und die Kraft als Gesamtkraft ermittelt wurden.

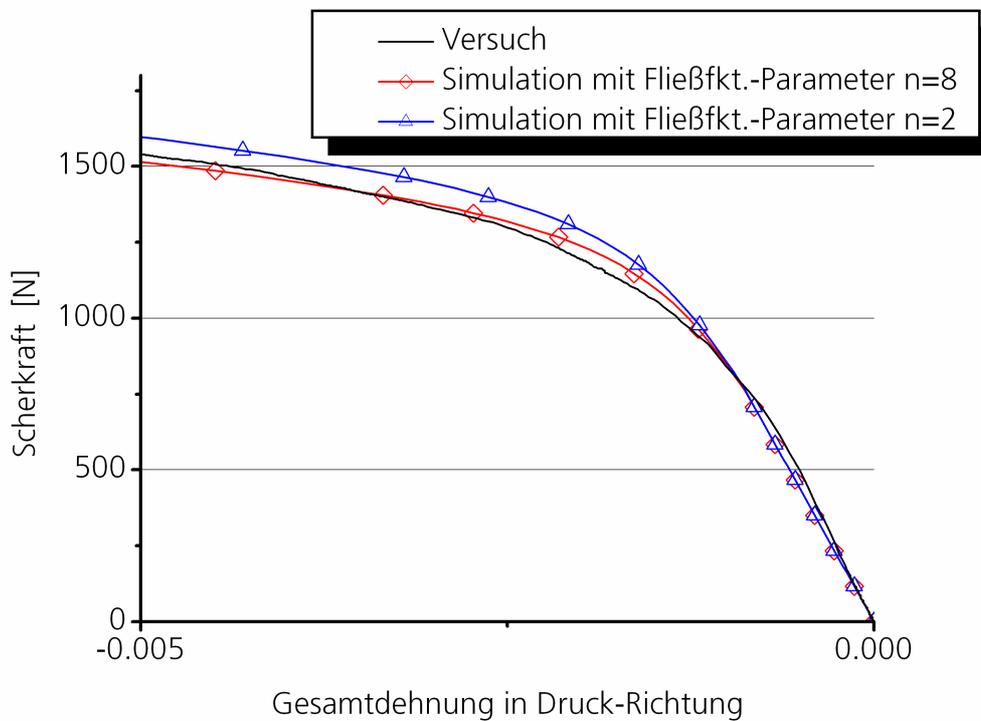


Abbildung 4-31: Vergleich der Simulation und des Experiments bei einem Schubversuch, wobei die Dehnung in Druckrichtung und die Kraft als Gesamtkraft ermittelt wurden.

Die Versuchsdaten werden in beiden Richtungen von Berechnungen mit einer Fließfunktion mit Exponenten $n=8$ besser als mit einer VON MISES Fließfunktion ($n=2$) wiedergegeben.

4.4.2.3 Kreuzzugversuch mit Spannungsverhältnissen 1:1

Die Übereinstimmung der Simulation des Kreuzzugversuchs bei Spannungsverhältnissen 1:1 mit dem Versuch ist gut angesichts der Streuung des Gusswerkstoffes und der Verwendung der Verfestigungskurve eines einachsigen Zugversuchs. Abbildung 4-32 und Abbildung 4-33 zeigen die Kraftverläufe über den Dehnungen für die beiden Belastungsrichtungen.

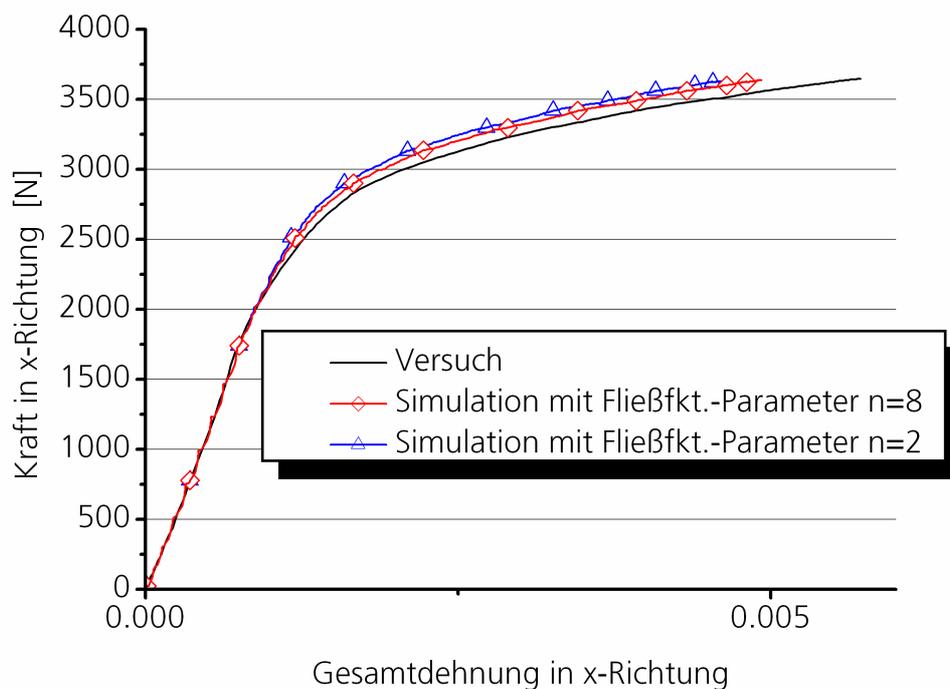


Abbildung 4-32: Vergleich der Simulation und des Versuchs bei einem Kreuzzugversuch mit Spannungsverhältnissen 1:1 in x-Richtung.

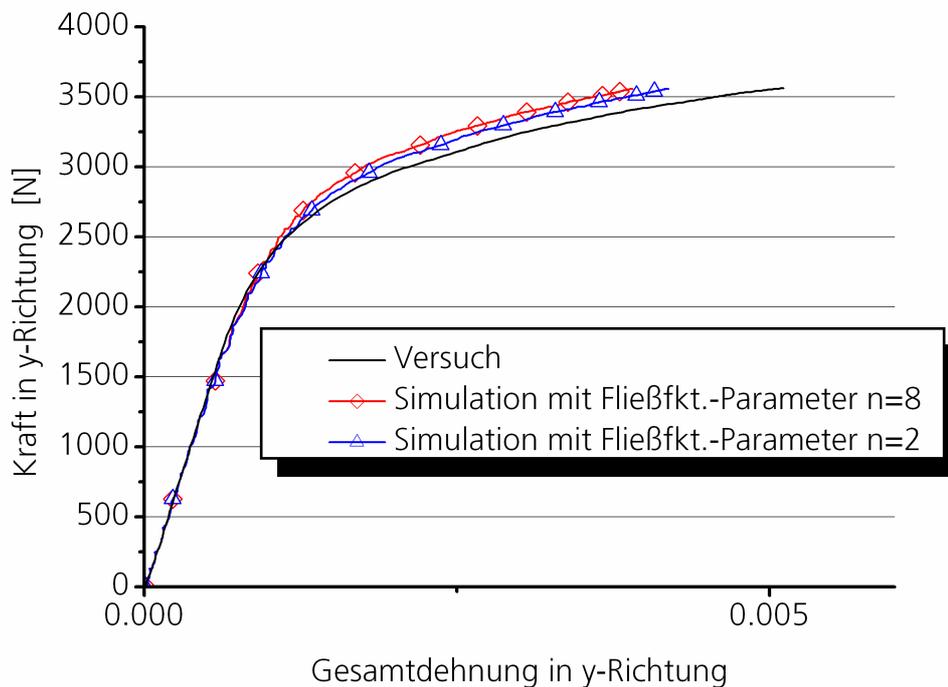


Abbildung 4-33: Vergleich der Simulation und des Versuchs bei einem Kreuzzugversuch mit Spannungsverhältnissen 1:1 in y-Richtung.

Erwartungsgemäß ist der Unterschied zwischen Berechnungen mit der von Mises Fließfunktion und der Fließfunktion mit Exponenten $n=8$ gering. Er kommt überhaupt erst durch eine nicht exakt balancierte Beanspruchung zustande, vgl. Abbildung 4-24.

4.4.2.4 Kreuzzugversuch mit Spannungsverhältnissen 1:2

Unter den gleichen Bewertungsgesichtspunkten wie bei den Kreuzzugversuchen mit den Spannungsverhältnissen 1:1 wird bei den Kreuzzugversuchen mit den Spannungsverhältnissen 1:2 eine gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den Versuchsergebnissen erzielt, vgl. Abbildung 4-34 und Abbildung 4-35. Die Übereinstimmung bei der höher belasteten Richtung, also der, in der direkt die Kraft aufgebracht wurde, ist sehr gut. Dagegen weisen die Kraft-Dehnungs-Zusammenhänge von Versuch und Simulation der Seite, bei der die Belastung zeitlich versetzt durch einen bestimmten Freigang in der Versuchseinrichtung aufgebracht wurde, geringe Diskrepanzen auf.

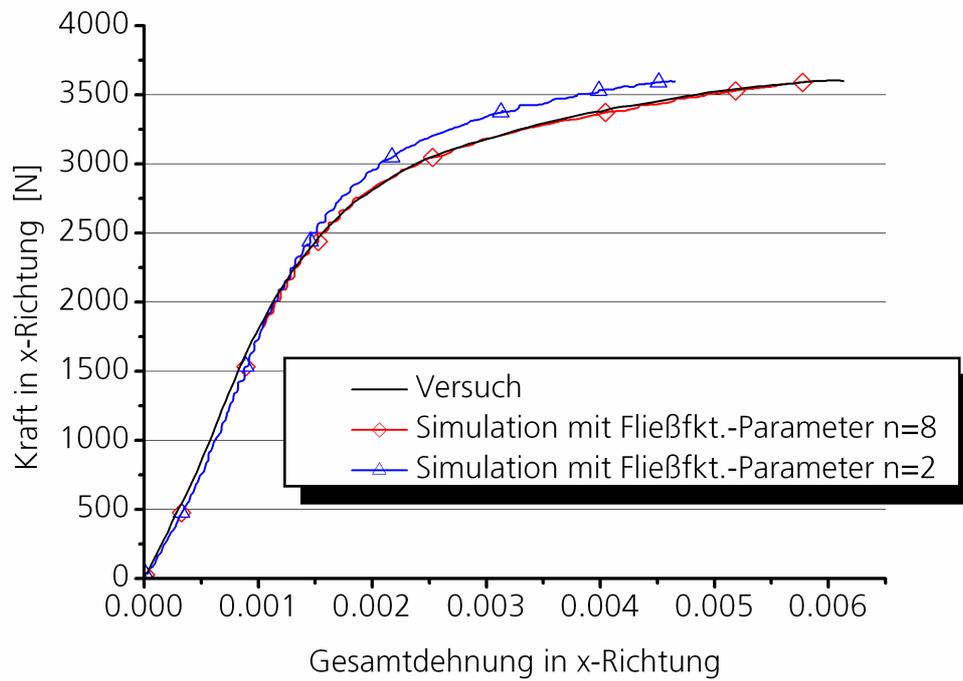


Abbildung 4-34: Vergleich der Simulation und des Versuchs bei einem Kreuzzugversuch mit Spannungsverhältnissen 2:1 in der Richtung der größeren Belastung.

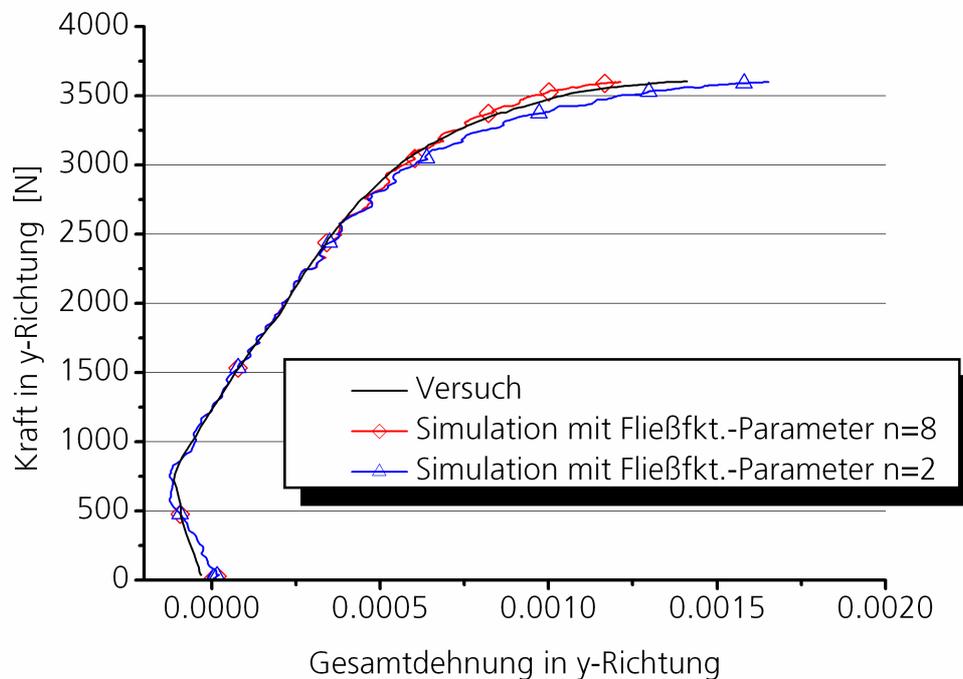


Abbildung 4-35: Vergleich der Simulation und des Versuchs bei einem Kreuzzugversuch mit Spannungsverhältnissen 2:1 in der Richtung der niedrigeren Belastung, die durch eine verzögerte Belastung erzeugt wurde. Daher resultiert auch die anfängliche

negative Dehnung, die die Querdehnung infolge der Belastung in der anderen Richtung ist.

In beiden Belastungsrichtungen zeigt die Berechnung mit der nicht-quadratischen Fließfunktion (Exponent $n=8$) eine bessere Übereinstimmung mit dem Versuch als die Simulation mit der VON MISES Fließfunktion. Insbesondere in x-Richtung wird die bessere Prognose mit der in dieser Arbeit ermittelten Fließfläche deutlich.

4.4.2.5 Dynamischer Zugversuch

In Abbildung 4-36 werden die Kraft-Dehnungs-Verläufe eines realen dynamischen Zugversuchs, der Simulation dieses Versuchs mit dem in dieser Arbeit implementierten Modell und der Simulation unter Vernachlässigung der Dehnratenverfestigung verglichen.

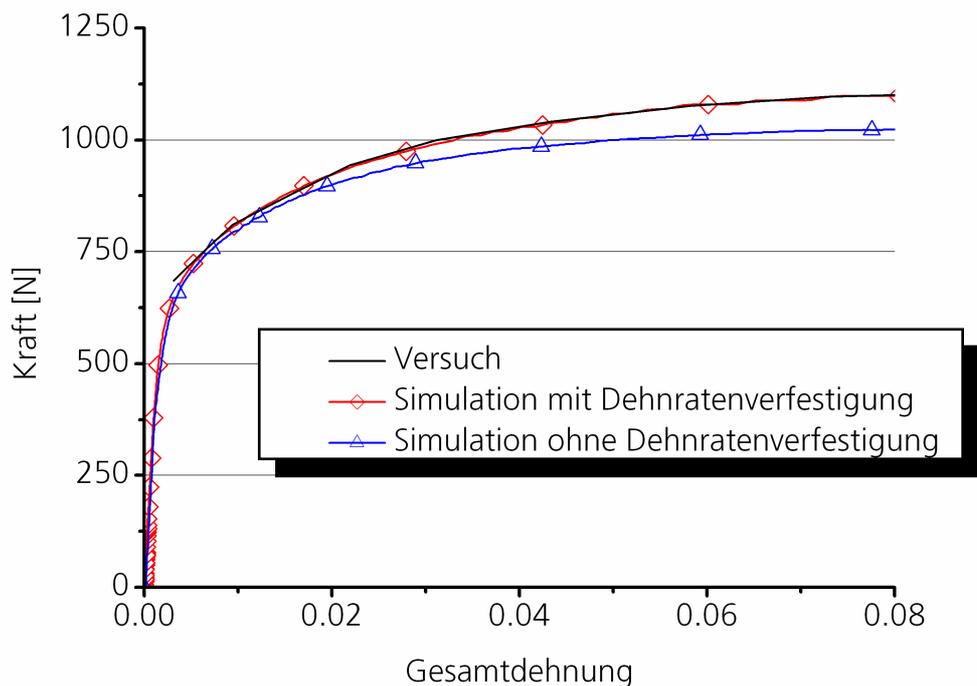


Abbildung 4-36. Vergleich der Simulation und des Versuchs bei einem dynamischen einachsigen Zugversuch. Die Dehnratenverfestigung kann nahezu ideal wiedergegeben werden.

Mit dem Modell kann die Dehnratenverfestigung nahezu exakt abgebildet werden, die Vernachlässigung der Dehnratenverfestigung führt hingegen zu Fehlern bis zu etwa 10 %.

5 Versagensmodellierung

Wie bei der Untersuchung und Abbildung des elastisch-plastischen Verhaltens werden die vier Schritte

- Werkstoffcharakterisierung
- mathematische Formulierung des Werkstoffverhaltens
- Implementierung
- Verifizierung

auch bei der Modellierung des Versagensverhaltens vollzogen, vgl. Kapitel 1.2. Ein Schwerpunkt der Methodenentwicklungen für die Versagensmodellierung ist die Entwicklung eines Schubversuchs, mit dem Versagen unter Schubbeanspruchung untersucht werden kann, d.h. bei dem Versagen an einer Stelle beginnt, an der tatsächlich eine Schubbeanspruchung vorliegt. In Kapitel 5.1.1.4 wird dieser Versuch vorgestellt und validiert. Um die Prognosefähigkeit bei nicht-konvergierten Netzen zu verbessern, wird in dieser Arbeit ein Konzept verfolgt, bei dem der Diskretisierungsfehler in die Versagensprognose mit einbezogen wird. Dieses Konzept und die Implementierung in ein kommerzielles FEM-Berechnungsprogramm, das parallel mit verteiltem Speicher ausgeführt werden kann, wird in den Kapiteln 5.2 und 5.3 beschrieben.

5.1 Werkstoffcharakterisierung

Analog zur Untersuchung des elastisch-plastischen Verhaltens wird das Versagensverhalten mit charakteristischen Versuchen der mechanischen Werkstoffprüfung bestimmt. Abbildung 5-1 zeigt einen modifizierten Schnitt der Versagensfläche des Hauptspannungsraums entlang der hydrostatischen Achse (vgl. Abbildung 2-5). Die Ordinate gibt hier als Vergleichsspannung die 2. Invariante des Spannungsdeviators wieder, die Abszisse den auf die Vergleichsspannung bezogenen hydrostatischen Druck.

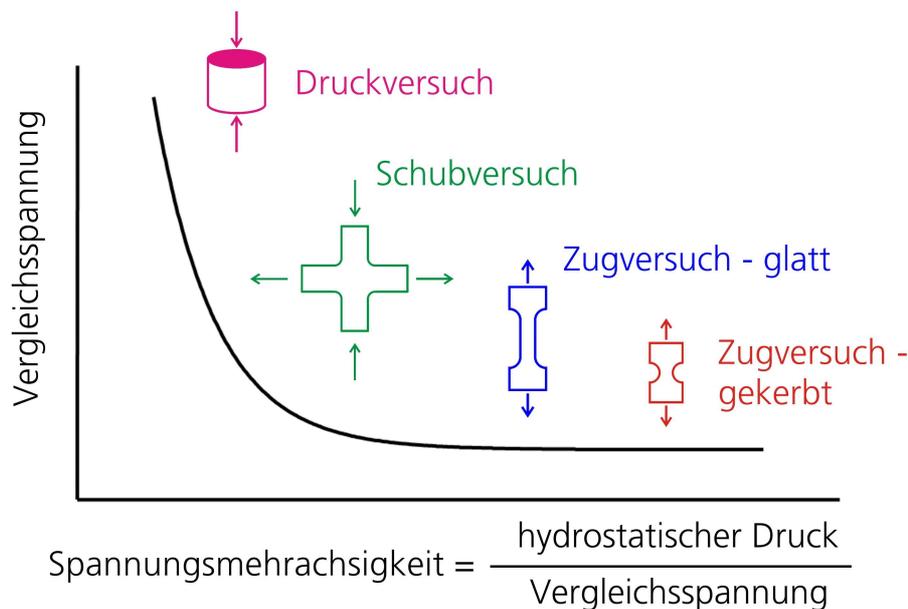


Abbildung 5-1: Übersicht zur Bestimmung der Versagensfläche. Die Versagenskurve in der Abbildung ist ein Schnitt der Versagensfläche im Hauptspannungsraum (vgl. Abbildung 2-5), wobei hier als Vergleichsspannung die 2. Invariante des Spannungsdeviators gesetzt und der hydrostatische Druck auf die Vergleichsspannung bezogen wird. Anstelle der Vergleichsspannung als Ordinate könnten ohne Verlust der Allgemeingültigkeit von ihr abhängige Größen wie die plastische Dehnung oder Schädigungsdefinitionen gewählt werden.

Als Ordinatengröße können unter der Annahme linearer Belastungspfade ohne Einschränkung der Aussagekraft der Abbildung auch von der Vergleichsspannung abhängige Größen gewählt werden, wie beispielsweise die plastische Vergleichsdehnung oder von ihr abhängige kumulative Variablen. Druckversuche, Schubversuche sowie Zugversuche an glatten und gekerbten Proben liefern für das Versagensverhalten charakteristische Eckpunkte. Da die zu untersuchende Legierung nur in dünnwandigen Bauteilen vorliegt, können Proben nur mit Dicken von bis zu 2 mm hergestellt werden. Die Zugversuche werden daher an flachen glatten und gekerbten Proben durchgeführt. Für die Druckversuche können sehr kleine Proben oder Stapel aus mehreren Platten verwendet werden. Beide Varianten wurden im Rahmen dieser Arbeit erprobt. Wie in Kapitel 1 und in Kapitel 2.6 diskutiert, gibt es keinen validierten Versuch, mit dem Schubversagen an flachen Proben untersucht werden kann. Die schematische Darstellung des Schubversuchs in Abbildung 5-1 greift dem in Kapitel 5.1.1.4 näher beschriebenen neu entwickelten Versuchskonzept vor.

Im Gegensatz zu den Versuchen zur Untersuchung des plastischen Verhaltens sind weder die Spannungs- noch die Dehnungszustände bei den hier verwendeten Versuchen bei Versagensbeginn homogen¹⁰. Der Einsatz von lokalen Dehnungsmessmethoden, beispielsweise von optischen Verfahren, erlaubt zwar eine experimentelle Bestimmung des Dehnungsfeldes auf der Probenoberfläche, die gesamte Dehnungs- und Spannungsverteilung in der Probe kann jedoch nicht bestimmt werden. Diese können nur in Ausnahmefällen analytisch berechnet werden (vgl. BRIDGEMANN [22]).

Aus den oben genannten Umständen bietet sich die Ermittlung der Spannungs- und Dehnungszustände bei Versagensbeginn mithilfe der FEM an. Hierbei wird das in Kapitel 4 erarbeitete elastisch-plastische Modell eingesetzt.

Um dem Größeneffekt in der Bruchmechanik Rechnung zu tragen, werden Proben mit möglichst gleich großen belasteten Volumina und Querschnitten verwendet.

5.1.1 Versuchsmethodik und Versuchseinrichtungen

Bei den jeweiligen Versuchen soll das Versagen unter ganz bestimmten Beanspruchungszuständen eintreten. Mindestens zu fordern ist, dass am Versagensort der erwünschte Beanspruchungszustand vorliegt, oder umgekehrt ausgedrückt: Die Probe muss an der Stelle versagen, wo die jeweils erwünschten Spannungszustände herrschen. Der Versagensort kann identifiziert werden, indem die Probe während des Versuchs mit einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgenommen wird. Bei der nachfolgenden Beschreibung der Versuchsmethoden wird daher besonderer Wert auf die Nachweise gelegt, dass einerseits die jeweils erwünschten Spannungszustände beim Versagen vorliegen und andererseits die Proben tatsächlich an diesen Stellen versagen.

¹⁰ Bei Zugversuchen an duktilen Werkstoffen kommt es nach einer bestimmten Dehnung zur Einschnürung. Bei Druckversuchen an kompakten Proben, die durch zwei zusammenfahrende Stempel belastet werden, entsteht aufgrund der Reibung zwischen Stempel und Probe eine nicht homogene Beanspruchung. Diese Inhomogenität nimmt mit der Kraft und damit mit der Dehnung der Probe zu.

5.1.1.1 Zugversuch an glatten Proben

Die Untersuchungen des Versagens unter nahezu einachsiger Zugbeanspruchung erfolgen mit den gleichen Versuchen, die bei Charakterisierung des elastisch-plastischen Verhaltens verwendet wurden. Die Versuchseinrichtung, Probengeometrie und Messtechnik sind daher die gleichen, wie sie in Kapitel 4.1.1.1 beschrieben werden. Als Eingabegrößen für die numerische Simulation, mit der die Versuche ausgewertet werden müssen, genügen die globalen Kraft- und Wegverläufe über der Zeit.

5.1.1.2 Zugversuch an gekerbten Proben

Die Versuche an gekerbten Zugproben wurden mit derselben Versuchseinrichtung und Messtechnik durchgeführt, wie die an den glatten Proben. Bei Versuchen an gekerbten Flachzugproben muss sichergestellt sein, dass die Probe in der Mitte versagt, wo ein mehrachsiger Zugspannungszustand vorliegt. Dazu wurden bei den Versuchsdurchführungen die Proben mit einer Hochgeschwindigkeitskamera gefilmt. Zunächst wurden Proben mit scharfen Kerben untersucht, weil bei Zugbelastung in deren Mitte eine sehr hohe Spannungsmehrachsigkeit vorliegt. Allerdings wurde beobachtet, dass solche Proben ausgehend vom Kerbgrund, also vom Probenrand, versagen. Abbildung 5-2 belegt dieses Versagensbild mit je zwei Bildern von Proben mit unterschiedlich scharfen Kerbradien.

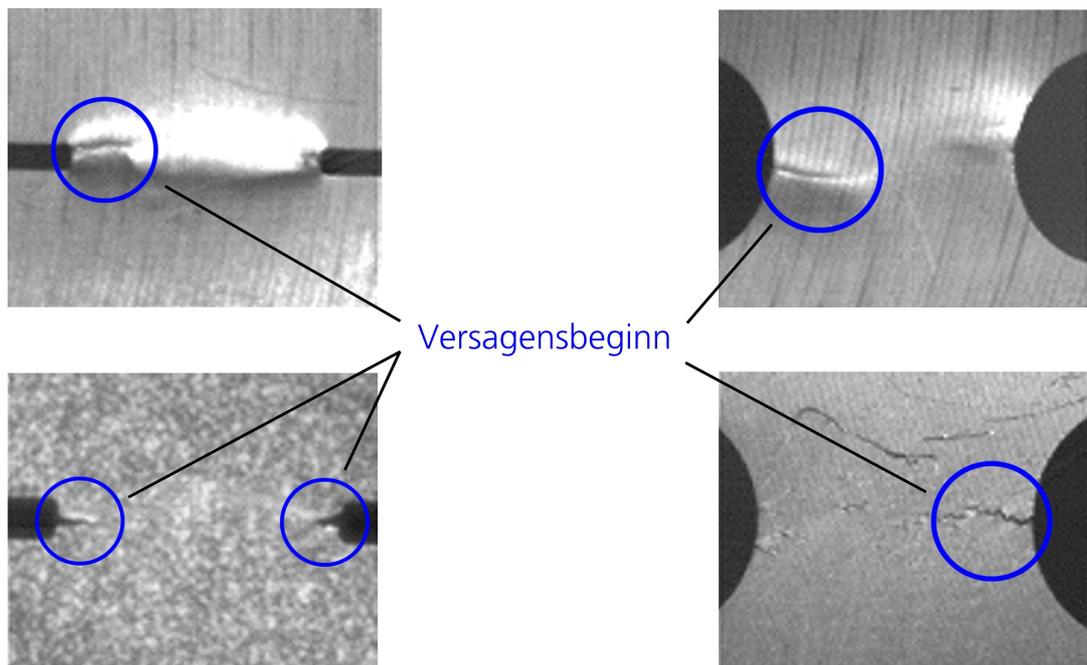


Abbildung 5-2: Versagensinitiierung bei Proben mit verschiedenen Kerbradien. Links sind zwei Proben mit sehr scharfen Kerbradien abgebildet; die Risse laufen von dem Probenrand zur Probenmitte. Die Kerbradien der Proben rechts in der Abbildung sind weicher, dennoch versagt auch hier die Probe zuerst am Probenrand. In beiden Fällen kann Versagen unter mehrachsiger Zugbeanspruchung nicht untersucht werden.

Die Proben links in der Abbildung weisen sehr scharfe Kerbradien auf. Das Versagen der Probe beginnt am Rand. In Abbildung 5-2 rechts ist die Rissinitiierung von Proben mit weniger scharfen Kerbradien dokumentiert. Auch hier beginnt das Versagen am Rand der Proben, also nicht dort, wo die erwünschten Spannungszustände herrschen. Diese Probengeometrien sind daher nicht geeignet, um Versagen unter mehrachsiger Zugbeanspruchung zu untersuchen. Daher wurde die Schärfe der Kerben weiter reduziert, bis eine Probengeometrie gefunden wurde, bei der das Versagen zuerst in der Probenmitte auftritt. Abbildung 5-3 zeigt drei Einzelbilder aus dem Film einer solchen Probe während des Versuchs. Die Bildrate des Films beträgt 1000/s. Links in der Abbildung ist die Probe noch ohne Riss. Auf dem Bild in der Mitte der Abbildung 5-3 zeichnet sich bereits in der Probenmitte der Riss ab. Die komplett gerissene Probe ist rechts in der Abbildung dargestellt.

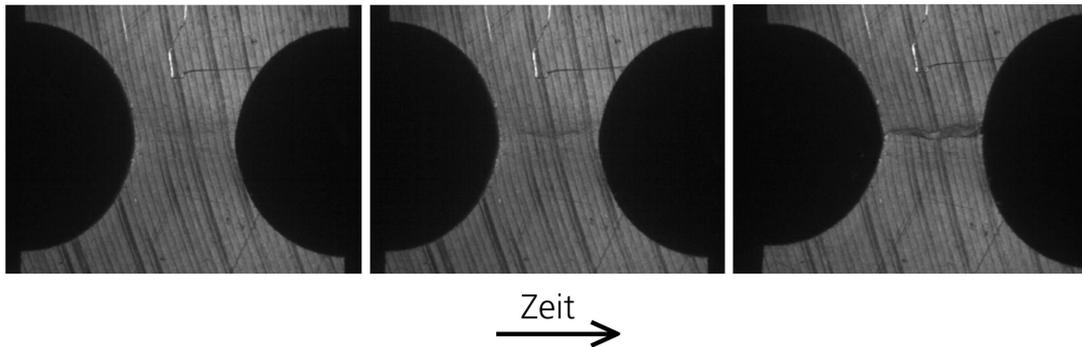


Abbildung 5-3: Versagensablauf bei einer gekerbten Flachzugprobe mit der in Abbildung 5-4 dargestellten Geometrie. Die Bilder zeigen von links nach rechts mit ansteigender Zeit den gekerbten Teil der Probe. Links ist die Probe noch ohne Riss. In der Mitte deutet sich bereits ein Riss in der Probenmitte an. Rechts ist die Probe komplett durchgerissen. Das Versagen beginnt also in der Probenmitte.

Die Filmaufnahmen belegen, dass die Probe in der Mitte versagt, also am Ort der erwünschten Beanspruchung. Die Geometrie der verwendeten Probe ist in Abbildung 5-4 dargestellt.

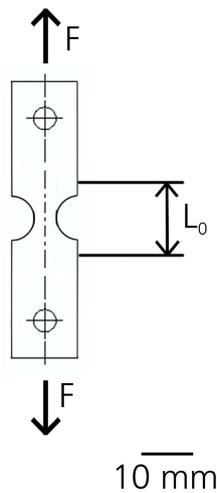


Abbildung 5-4: Probengeometrie der verwendeten gekerbten Flachzugprobe. Der Kerbradius beträgt 4 mm. Die Wegmessung erfolgt mit einem Extensiometer direkt an der Probe. Die Schneiden des Extensiometers liegen an den mit L_0 gekennzeichneten Stellen.

5.1.1.3 Druckversuch

Zur Durchführung von Druckversuchen stehen aufgrund der geringen Wandstärke der Bauteile (maximal 2 mm) entweder insgesamt sehr kleine zylindrische oder quaderförmige Proben oder Stapel aus zylindrischen oder quaderförmigen Platten mit größeren Abmessungen zur Verfügung.

Es wurden beide Varianten eingesetzt, da keine der beiden als optimal angesehen wird. Bei den kleinen Proben aus einem Stück sind die Toleranzen der Probengeometrie und der Prüfmaschine im Verhältnis zur Probengröße groß. Im Falle der gestapelten Platten summieren sich die Toleranzen der einzelnen Platten und können dadurch ebenfalls groß im Verhältnis zur Probengröße werden.

5.1.1.4 Schubversuch zur Untersuchung von Versagen

Der reine Schubspannungszustand ist in seinen Hauptrichtungen ein zweiachsiger Zustand aus Druck und Zugbeanspruchungen mit gleichen Beträgen. Anschaulich geht dies aus den MOHR'SCHEN Spannungskreisen hervor. Daher ist die Belastung in den Hauptrichtungen, also zweiachsig mit Druck und Zug, ein zum Abscheren der Probe alternatives Konzept zur Herbeiführung von Schubspannungszuständen. Die Äquivalenz der Beschreibung als Scherung und als zweiachsigen Zug-/Druck-Belastung veranschaulicht Abbildung 5-5.

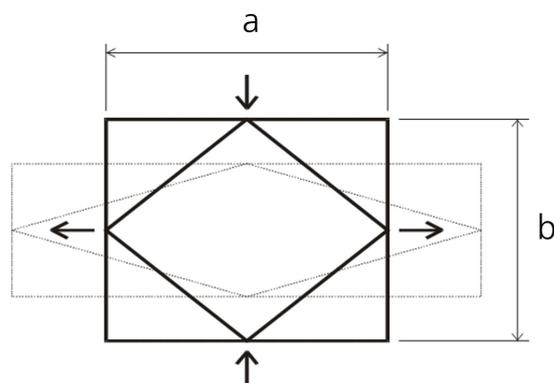


Abbildung 5-5: Schematische Darstellung der Verformung eines Rechtecks unter Schubbeanspruchung. Die Verformung als Zug-Druck Verformung in Normalenrichtung oder als Scherung in einer um 45° zur Normalen gedrehten Richtung wird veranschaulicht.

Die Schubverformung kann einerseits als eine Scherung der Raute (inneres Viereck) gesehen werden, andererseits als eine Streckung und Stauchung des Rechtecks (äußeres Viereck). Wenn für das elastisch-plastische Werkstoffverhalten das HOOKE'SCHE GESETZ und druckunabhängiges plastischen Potenzial angenommen werden, ändert sich weder die Probendicke noch das Volumen der Probe. Die Fläche muss also konstant sein.

Aus dieser Bedingung lassen sich Verschiebungsrandbedingungen für eine Verformung unter reiner Schubbeanspruchung ermitteln (Gl. 5-1):

$$a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b$$

$$ab = \text{konstant}$$

Gl. 5-1

$$\Rightarrow \Delta b = \frac{b_0 \Delta a}{a_0 + \Delta a}$$

Die Entwicklung einer Probengeometrie, bei der mit einer zweiachsigen Zug-Druck Belastung Versagen in der Probenmitte unter Schubbeanspruchung auftritt, erfolgte mithilfe der numerischen Simulation, wobei die Verschiebungsrandbedingungen gemäß der Zusammenhänge aus Gl. 4-10 formuliert wurden. Die im Folgenden dargestellten Rechnungen sind mit die Symmetrie der Belastung und des Probenkörpers nutzenden FE-Modellen durchgeführt worden. Ausgehend von einer kreuzförmigen Probengeometrie, vgl. Abbildung 5-6, wurde eine Optimierung des Radius hinsichtlich der Minimierung der maximalen Zugspannung am Probenrand vorgenommen. Als notwendige – jedoch nicht hinreichende – Bedingung wird das Versagen in der Probenmitte gemäß des Kriteriums der maximalen plastischen Dehnung angesehen; denn wenn die Probe am Rand eine höhere Dehnung aufweist als in der Mitte, kann mit der Annahme, dass die Versagensdehnung unter Zugbeanspruchung kleiner als die unter Schubbeanspruchung ist, vorab ausgeschlossen werden, dass Versagen in der Probenmitte eintritt. Abbildung 5-6 verschafft eine Übersicht über die durchgeführte numerische Optimierung. Als Kontur ist die Höhe der äquivalenten plastischen Dehnung dargestellt, die bei verfestigendem Materialverhalten direkt auf die Größe des Betrags der deviatorischen Spannungsanteile schließen lässt. Die oben abgebildete Geometrie weist einen geringen Radius und eine relativ hohe Zugbeanspruchung am Probenrand auf. Unten in Abbildung 5-6 ist eine Probe mit zu großem Radius dargestellt. Die Probe versagt nicht in der Probenmitte; die oben erwähnte notwendige Nebenbedingung ist nicht eingehalten worden. In der Mitte ist die Probe mit dem optimalen Radius abgebildet. Die Spannung am Probenrand ist geringer als bei der Geometrie oben, und die Probe versagt noch in der Probenmitte.

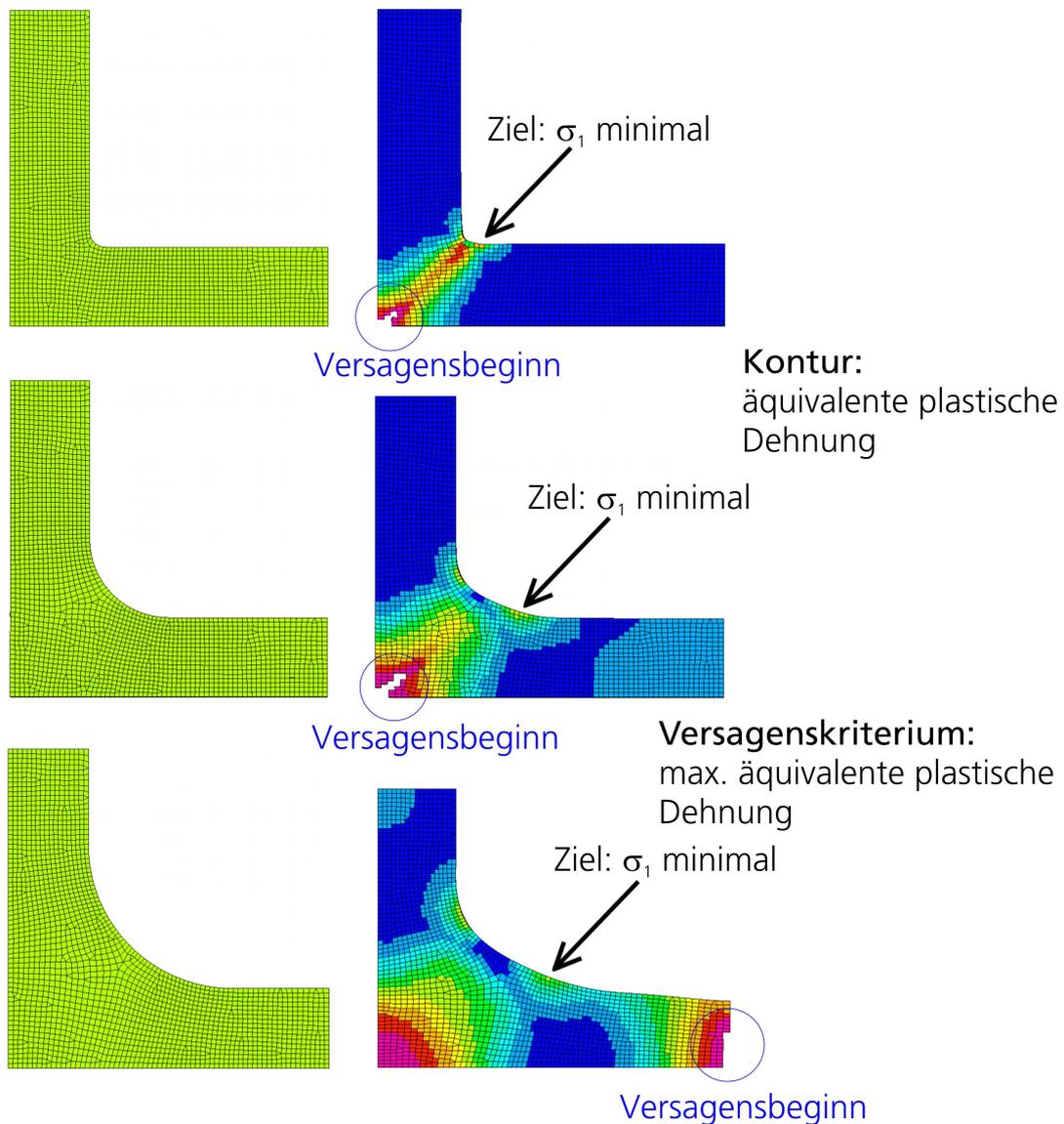


Abbildung 5-6: Numerische Optimierung der Probengeometrie. Variiert wird der Radius, sodass die maximale Zugspannung am Probenrand minimiert wird. Nebenbedingung ist das Versagen der Probe in der Mitte gemäß dem Kriterium der max. plastischen Dehnung.

Die versuchstechnische Umsetzung der Randbedingungen gemäß Gl. 5-1 würde einen paarweise getrennt steuerbaren Antrieb der Vorschub-einrichtungen der verwendeten Maschine oder ein speziell abgestimmtes Getriebe (z. B. Kurvengetriebe) erfordern. Beide Lösungen standen nicht zur Verfügung. Daher wurde eine Versuchseinrichtung auf Basis der von NAHME [88] entwickelten zweiachsigen Zugvorrichtung für Gewebe konstruiert, mit der eine betragsmäßig gleiche zweiachsige Zug-Druck-Belastung auf eine kreuzförmige Probe aufgebracht werden kann.

Abbildung 5-7 zeigt ein Modell der verwendeten Versuchseinrichtung in der Gesamtansicht.

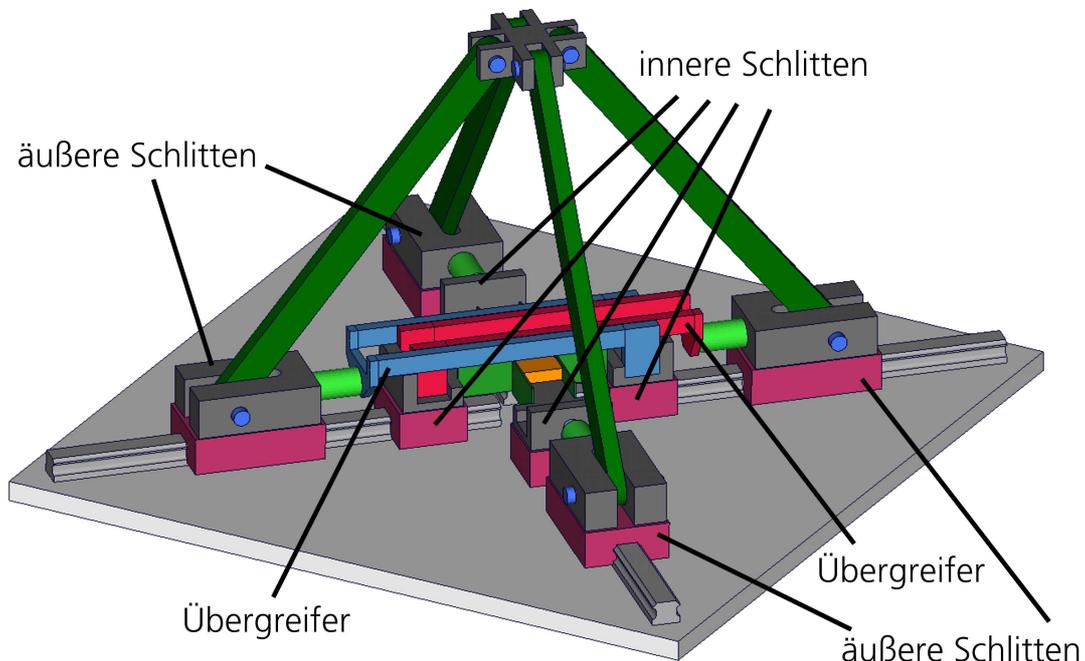


Abbildung 5-7: Geometriemodell der verwendeten Versuchseinrichtung. Bei Herunterfahren des oben befindlichen Kreuzes, in dem sich die vier Beine treffen, fahren alle vier äußeren Schlitten nach außen. Die äußeren Schlitten links und rechts sind mit Übergreifern mit den gegenüberliegenden inneren Schlitten verbunden, sodass sich diese nach innen bewegen.

Unter Belastung fahren die vier äußeren Schlitten nach außen. Die äußeren Schlitten links und rechts in der Abbildung 5-7 sind über die Übergreifer mit den jeweils gegenüber liegenden inneren Schlitten verbunden, sodass diese nach innen gezogen werden. Die beiden anderen äußeren Schlitten sind direkt mit den nächstliegenden inneren Schlitten verbunden und ziehen diese nach außen. Abbildung 5-8 verdeutlicht in einer Detailansicht die Kinematik der Versuchseinrichtung.

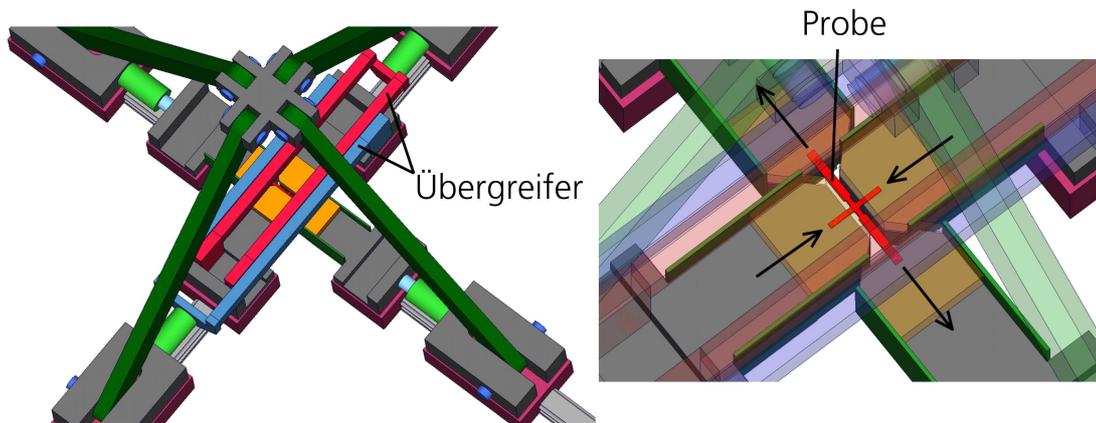


Abbildung 5-8: Detailansicht – teilweise durchscheinend – der Versuchseinrichtung. Links wird die Funktion der Übergreifer deutlich. Die Bewegung der äußeren Schlitten wird auf die gegenüberliegenden inneren Schlitten übertragen. Rechts werden die Position der Probe und die Bewegungsrichtung (Pfeile) der inneren Schlitten verdeutlicht.

In Abbildung 5-8 links wird die Funktionsweise der Übergreifer deutlich. Rechts ist die Probe (rot) unter den durchscheinend dargestellten Spannplatten erkennbar. Die Bewegungsrichtung der inneren Schlitten wird mit schwarzen Pfeilen verdeutlicht.

In diesem Versuchsaufbau bewegen sich die Schlitten zwar paarweise nach innen bzw. nach außen, allerdings mit gleichen Beträgen und nicht mit den Randbedingungen gemäß Gl. 5-1. Um dennoch einen Spannungszustand beim Versagen der Probe zu erhalten, der einem reinen Schubspannungszustand möglichst nahe kommt, wird die Probengeometrie in einer weiteren numerischen Studie optimiert. Ein FE-Modell der modifizierten Probe unter Berücksichtigung der Symmetrie ist in der Gesamtansicht und in Detailansichten im undeformierten und deformierten Zustand in Abbildung 5-9 dargestellt.

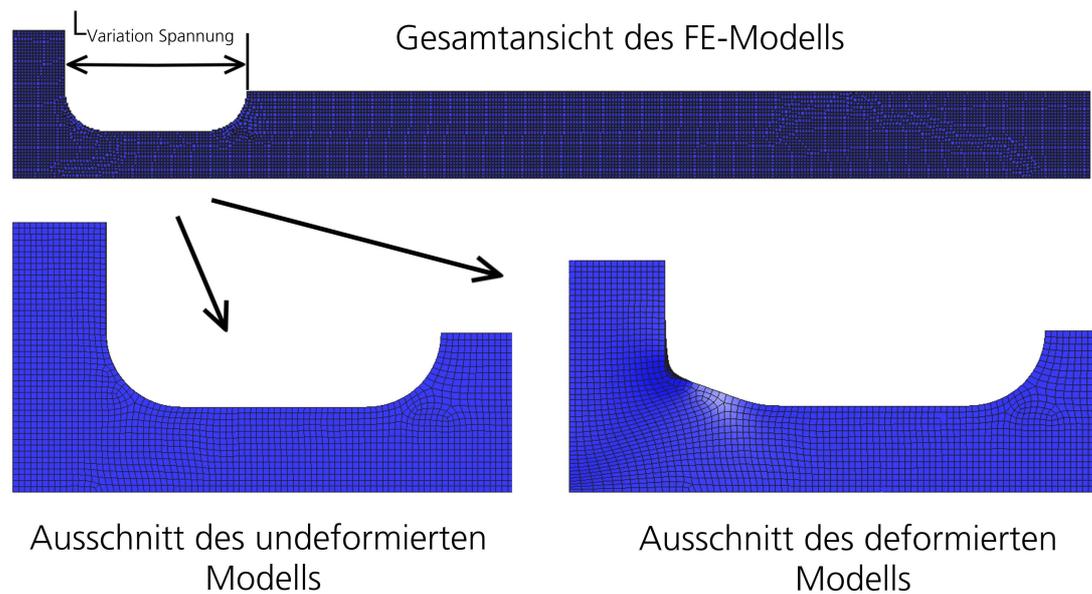


Abbildung 5-9: Oben ist die Gesamtansicht des FE-Modells der verwendeten Probe unter Berücksichtigung der Symmetrie abgebildet. Durch Variation der Länge $L_{\text{Var. Spannung}}$ kann der Spannungszustand in der Probenmitte variiert werden. Unten sind ein undeformierter (links) und deformierter Ausschnitt (rechts) der Probe dargestellt.

Durch Variation der Länge $L_{\text{Var. Spannung}}$ können verschiedene Spannungszustände in der Probenmitte herbeigeführt werden. Diese Länge wurde in einer numerischen Studie so bestimmt, dass der Spannungszustand in der Probenmitte einer reinen Schubbeanspruchung ausreichend nahe kommt. Die Hauptspannungsverläufe sind in Abbildung 5-10 dargestellt.

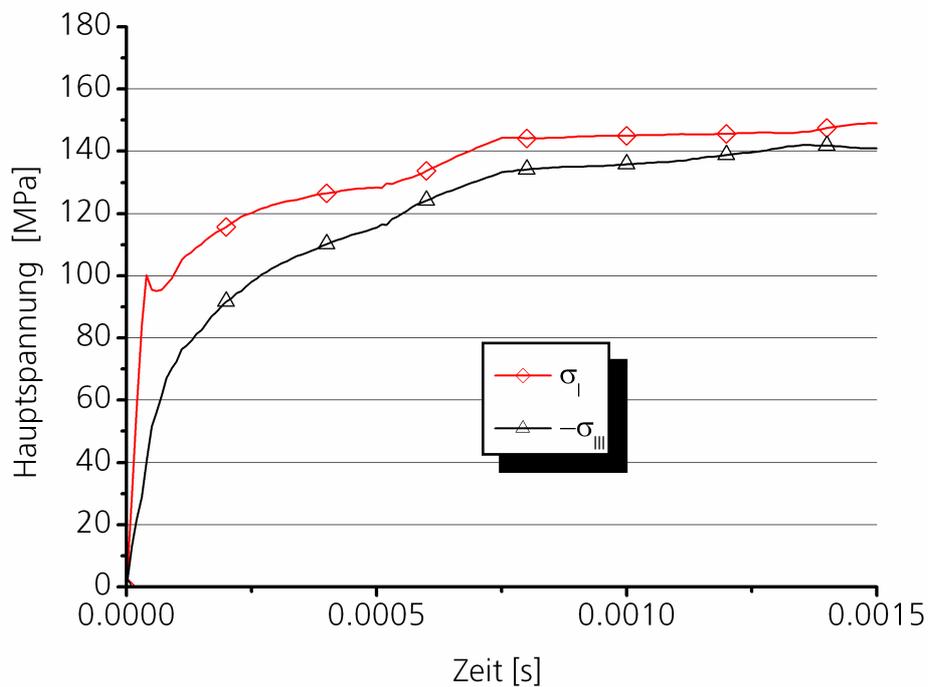


Abbildung 5-10: Verlauf des Spannungszustandes bei der verwendeten Geometrie der Probe zur Untersuchung von Schubversagen. Als Materialmodell wurde ein PRANDL-REUSS-Fließmodell mit einer Verfestigungskurve aus einem Zugversuch verwendet.

Im Verlauf der Verformung nähert sich der Spannungszustand immer mehr einem reinen Schubzustand. Abbildung 5-11 zeigt ein Foto einer Probe.

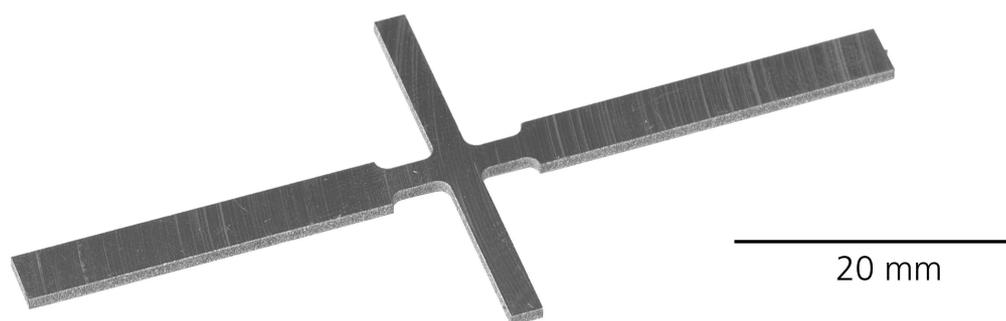


Abbildung 5-11: Foto der verwendeten Probengeometrie, die aus numerischen Optimierungen hervorgegangen ist und die die zur Kompatibilität mit Versuchseinrichtung erforderlichen Merkmale aufweist.

Die wie oben dargestellt virtuell entwickelte Probengeometrie muss in der Realität der Forderung nach Versagen in der Probenmitte nachkommen. Die Überprüfung wurde durch Filmen des Versagens der Probe mit einer

Hochgeschwindigkeitskamera während des Versuchs vorgenommen. Die in eine Universalprüfmaschine eingebaute Versuchseinrichtung ist in einer Gesamt- und Detailansicht in Abbildung 5-12 abgebildet. Links in der Abbildung ist eine Übersicht des Versuchsaufbaus gegeben. Zu sehen sind die Hochgeschwindigkeitskamera, der in eine Universalprüfmaschine eingebaute Versuchstisch (vgl. Abbildung 5-7) und die Messinstrumente.

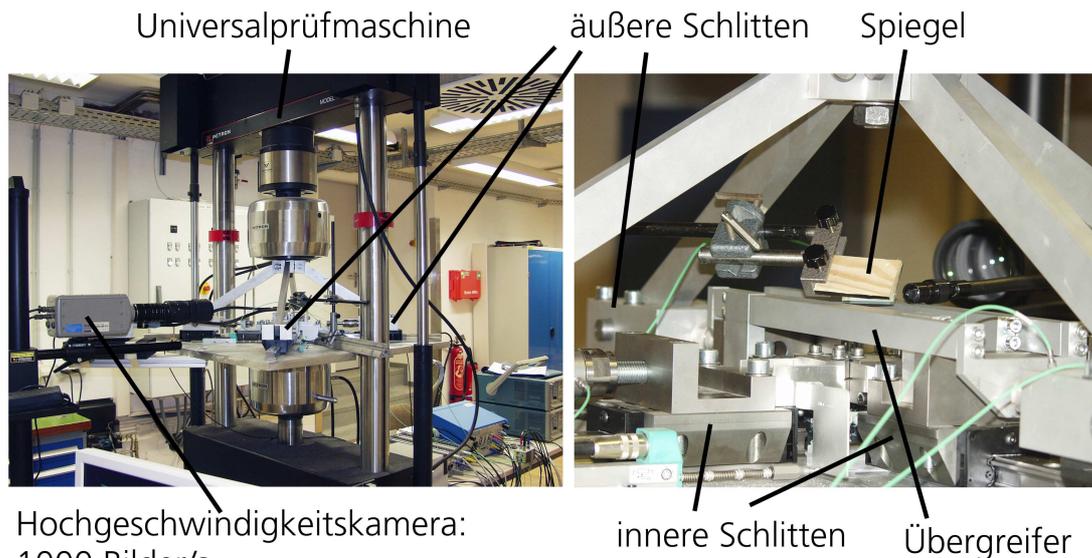


Abbildung 5-12: Versuchseinrichtung zur Untersuchung von Schubversagen. Links eine Gesamtansicht der in eine Universalprüfmaschine eingebauten Vorrichtung (vgl. Abbildung 5-7), der Hochgeschwindigkeitskamera und der Messtechnik. Rechts ist eine Detailansicht von der gegenüberliegenden Perspektive abgebildet. Mithilfe eines Spiegels kann die Probe von oben gefilmt werden.

In Abbildung 5-12 rechts ist von der gegenüberliegenden Ansicht eine Detailansicht des Aufbaus dargestellt. Mithilfe eines Spiegels kann die Probe von oben gefilmt werden. Einzelbilder aus einem Film von einem Versuch sind in Abbildung 5-13 dargestellt.

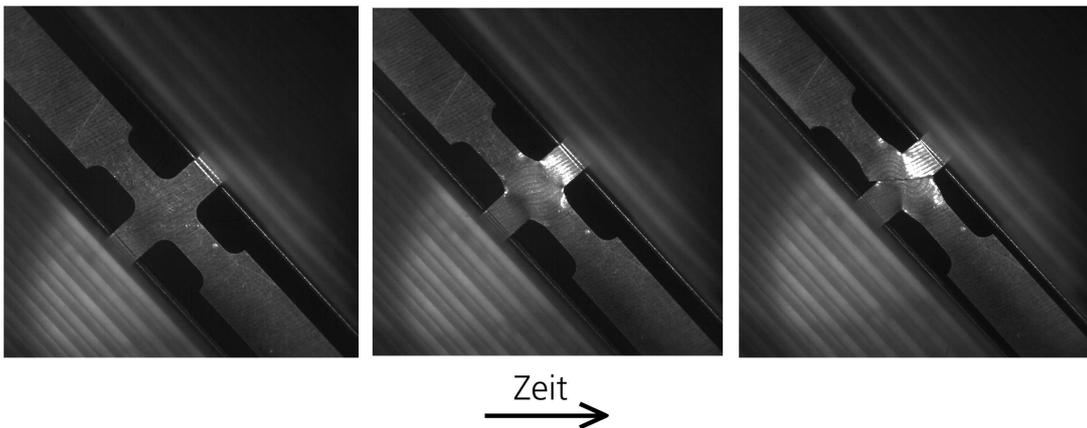


Abbildung 5-13: Einzelbilder des Versuchs zur Untersuchung von Schubversagen. Links zu Versuchsbeginn, in der Mitte kurz vor Versagen und rechts nach Versagen der Probe.

Links ist die Probe zu Versuchsbeginn, also im undeforzierten Zustand zu sehen. In der Mitte ist die Probe verformt. Sie befindet sich unmittelbar vor dem Versagen. Die komplett versagte Probe ist in der Abbildung rechts abgebildet. Aus dieser Bildfolge geht jedoch nicht hervor, ob die Probe zuerst in der Mitte oder am Rand versagt hat. Daher wurde der Versagensvorgang mit einer Aufnahmerate von 1000/s gefilmt. Einzelbilder einer solchen Aufnahme sind in Abbildung 5-14 dargestellt.

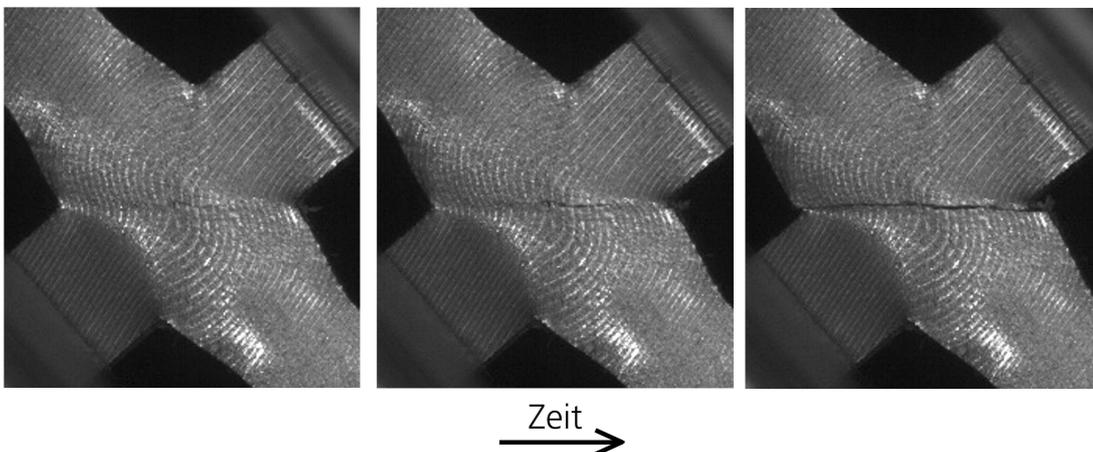


Abbildung 5-14: Rissausbreitung beim Versagen der Probe zur Untersuchung des Schubversagens. Links ist bereits ein Riss in der Probenmitte zu sehen. Die Ränder weisen noch keine Risse auf. In dem Einzelbild in der Mitte ist der Riss nach außen gewachsen. Die Ränder hängen immer noch zusammen. Das rechte Bild zeigt die komplett versagte Probe.

In dem linken Einzelbild ist ein beginnender Riss in der Probenmitte zu sehen. Die Ränder weisen zu diesem Zeitpunkt noch keine Risse auf. Der Versagensbeginn liegt also in der Probenmitte. Das Einzelbild in der Mitte

der Abbildung 5-14 zeigt den gewachsenen Riss. Die Ränder der Probe hängen noch immer zusammen. Die versagte Probe ist schließlich in dem Bild rechts dargestellt.

5.1.2 Versuchsdurchführung und Ergebnisse

Um das ideal-typische Verhalten des Werkstoffes zu bestimmen, müssen Proben betrachtet werden, die möglichst frei von Defekten sind. Da das Versagen in hohem Maße von Defekten bestimmt wird, wird umgekehrt geschlossen, dass Proben, die spät versagen, wenige Defekte aufweisen. Daher werden die ideal-typischen Eigenschaften im Folgenden an den Proben mit der größten Dehnung ermittelt¹¹.

Die Proben für die Versuche zur Versagenscharakterisierung wurden an den gleichen Bauteilen und den gleichen Positionen entnommen, wie die Proben zur Charakterisierung des elastisch-plastischen Verhaltens, vgl. Abbildung 4-16. Im Folgenden werden zunächst die Nennspannungen (ERSTEN PIOLA-KIRCHHOFF'SCHE Spannungen, vgl. Gl. 2-13) der Versuche an glatten und gekerbten Proben sowie die Kraft pro Probendicke der Schubversuche mit den kreuzförmigen Proben über den Verschiebungen zusammengefasst. Dann werden mit dem Ergebnis je Versuchstyp, das das ideal-typische Verhalten am besten repräsentiert, die Spannungs- und Dehnungszustände beim Versagensbeginn ermittelt. Die dabei verwendeten Materialparameter wurden so bestimmt, dass eine bestmögliche Übereinstimmung der Simulation mit dem ausgewählten Zugversuch an einer glatten Probe vorliegt. Der Verlauf der Verfestigungskurve jenseits der Zugfestigkeit R_m wurde mittels einer numerischen Optimierung bestimmt, die eine Erweiterung der in [90] vorgestellten Methode dahingehend darstellt, dass hier zunächst eine Unterteilung des globalen Kraft-Weg-Zusammenhanges erfolgt. Dann wird abschnittsweise die Verfestigungskurve mit einer numerischen Optimierung bestimmt. Auf diese Art und Weise kann ohne lokale Messmethoden die Verfestigungskurve unter Berücksichtigung inhomogener Spannungs- und Dehnungszustände bestimmt werden. Abbildung 5-15 zeigt die so ermittelte Verfestigungskurve. Der Vergleich mit den

¹¹ Ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Modellierungskonzept zur Berücksichtigung von fertigungsbedingten Einflüssen auf die Werkstoffeigenschaften ist im Anhang dargestellt (Kapitel 9.1).

Versuchsdaten (vgl. Abbildung 5-17) belegt die hohe Güte dieses Auswerteverfahrens.

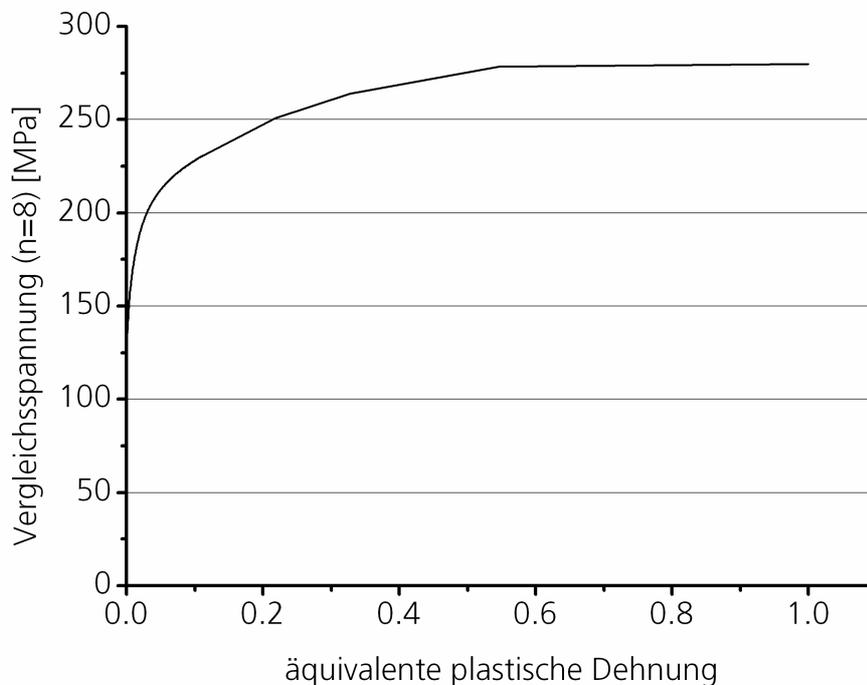


Abbildung 5-15: Bei der Versuchsauswertung verwendete Verfestigungskurve. Die Bestimmung jenseits der Zugfestigkeit R_m erfolgte mit einer numerischen Optimierung.

Der Verlauf der Vergleichsspannung bei größeren Dehnungen als der Maximalen bei dem Zugversuch wurde linear extrapoliert.

5.1.2.1 Druckversuche

Bei keinem der durchgeführten Druckversuche trat Werkstoffversagen auf. Die Versuche werden daher nicht weiter betrachtet. Bei der Modellierung des Versagens wird jedoch berücksichtigt, dass die vorliegende Al-Druckgusslegierung nicht unter Druck versagt.

5.1.2.2 Zugversuche an glatten Proben

Nennspannungs-Verschiebungs-Verläufe der insgesamt sechs durchgeführten Zugversuche sind in Abbildung 5-16 zusammengestellt.

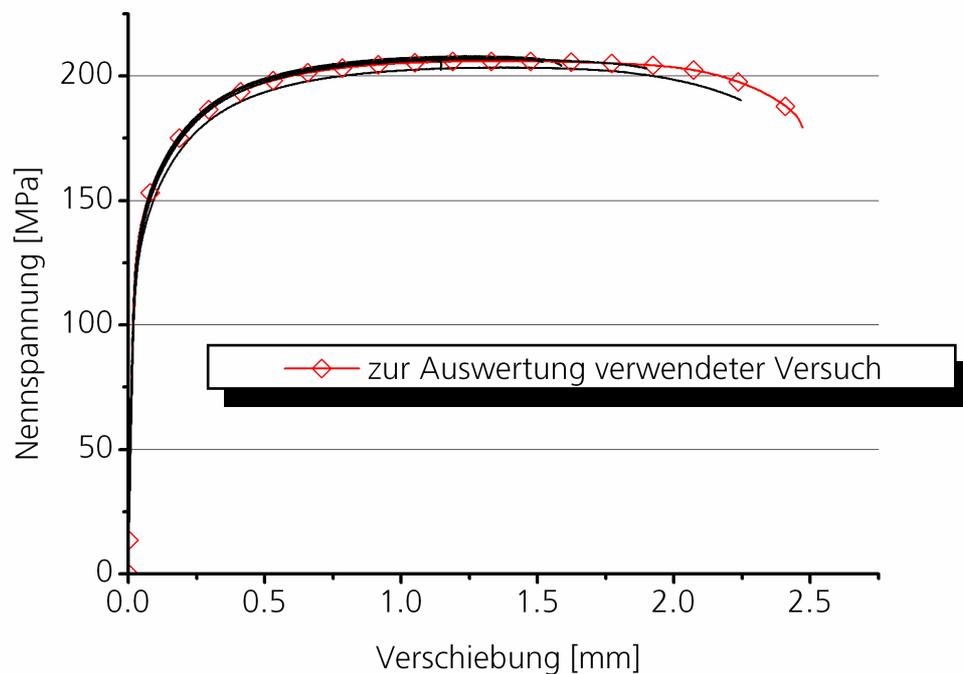


Abbildung 5-16: Nennspannung in Abhängigkeit von der Verschiebung für die Zugversuche an glatten Proben. Insgesamt wurden sechs Versuche durchgeführt. Die maximale Verschiebung variiert im Gegensatz zu den Nennspannungen stark, da das Versagen sensitiver gegenüber Defekten ist. Zur Auswertung wird der Versuch mit der größten Versagensdehnung genutzt, da er dem ideal-typischen Verhalten am nächsten kommt.

Die Verschiebung bis zum Versagen streut stärker als die Festigkeit; das Versagen ist sensitiver gegenüber Inhomogenitäten in den Proben. Der in Abbildung 5-16 markierte Versuch weist die größte Versagensdehnung auf und wurde daher zur Auswertung mithilfe der FEM herangezogen. Die Kraft-Verschiebungs-Verläufe der Berechnung und des Versuchs sind Abbildung 5-17 gegenübergestellt.

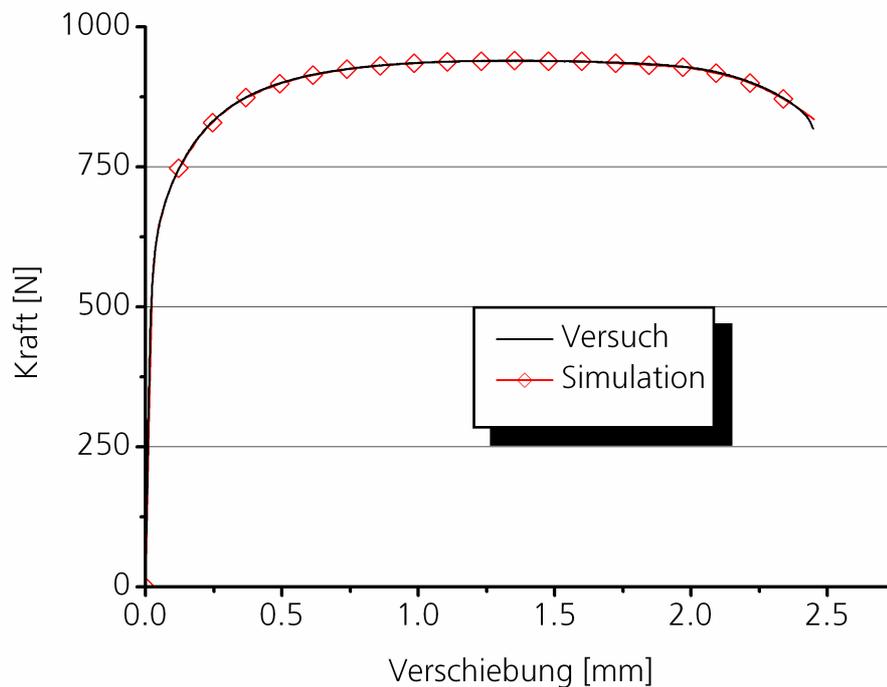


Abbildung 5-17: Kraft-Verschiebungs-Verläufe des zur Auswertung verwendeten Versuchs an einer glatten Zugprobe und der Simulation dieses Versuchs. Die Übereinstimmung auch bei nicht-homogenen Spannungs- und Dehnungsfeldern ist sehr gut, weil die Verfestigungskurve mit diesem Versuch bestimmt wurde.

Die Übereinstimmung ist praktisch vollständig, da dieser Versuch zur numerischen Bestimmung der Verfestigungskurve verwendet wurde. Sie belegt die Güte der Versuchsdurchführung und der Auswertung.

Das zur Auswertung verwendete FE-Modell ist in Abbildung 5-18 dargestellt. Die Spannungen und Dehnungen sind nicht homogen, da die Probe einschnürt. Es wird deutlich, dass die größte äquivalente plastische Dehnung in der Probenmitte auftritt und die globale Dehnung von etwa 0,18 (vgl. Abbildung 5-16, wobei $L_0=12,5$ mm) um ein Vielfaches übersteigt.

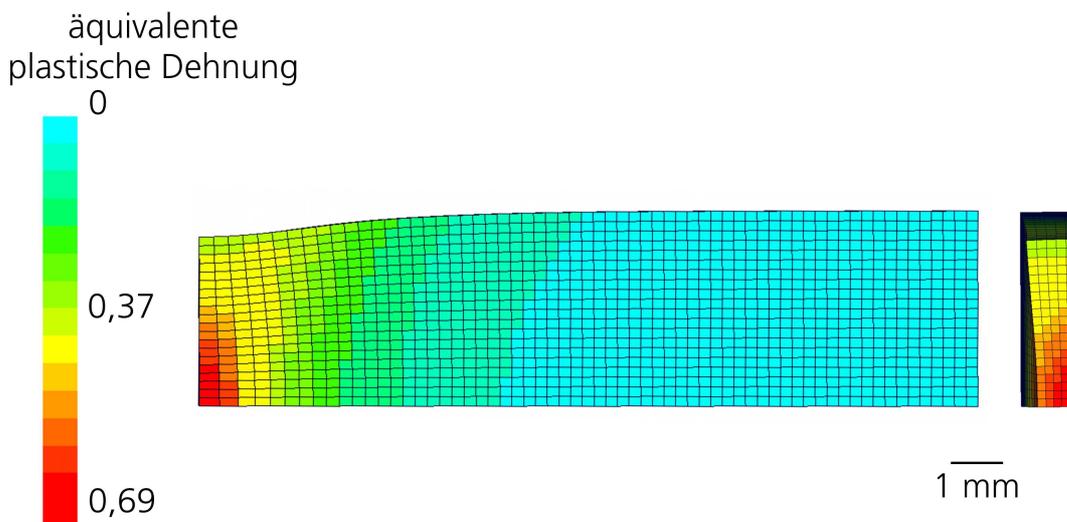


Abbildung 5-18: Symmetrienutzendes FE-Modell der glatten Zugprobe zum Versagenszeitpunkt. Aufgrund der leichten Einschnürung sind die Spannungen und Dehnungen nicht homogen. Die maximale äquivalente plastische Dehnung tritt in der Probenmitte auf und übersteigt die globale Dehnung (vgl. Abbildung 5-16, $L_0=12,5$ mm) um ein Vielfaches.

Die Querschnittsfläche der Probe, die zu mindestens 75 % der maximalen äquivalenten plastischen Dehnung beansprucht ist, beträgt etwa $0,71 \text{ mm}^2$. In Tabelle 5-1 sind die beim Versagensbeginn am Versagensort bestehenden ideal-typischen Versagenskennwerte aufgeführt.

Tabelle 5-1: Ideal-typische Versagenskennwerte bei einem Zugversuch an einer glatten Probe.

Vergleichs- spannung (Exponent der Fließfunktion $n=8$) [MPa]	äqui- valente plastische Dehnung	VON MISES Vergleichs- spannung [MPa]	Spannungs- mehr- achsichtigkeit	beanspruchte Querschnitts- fläche (mind. 75 % der max. Dehnung)
279,14	0,74	276,035	0,686	$0,71 \text{ mm}^2$

5.1.2.3 Zugversuche an gekerbten Proben

Abbildung 5-19 zeigt die Ergebnisse der sechs Zugversuche an gekerbten Proben. Es liegt eine große Variation der maximalen Verschiebung zwischen den einzelnen Versuchen vor. Auch hier wird der Versuch mit der größten Verschiebung ausgewertet.

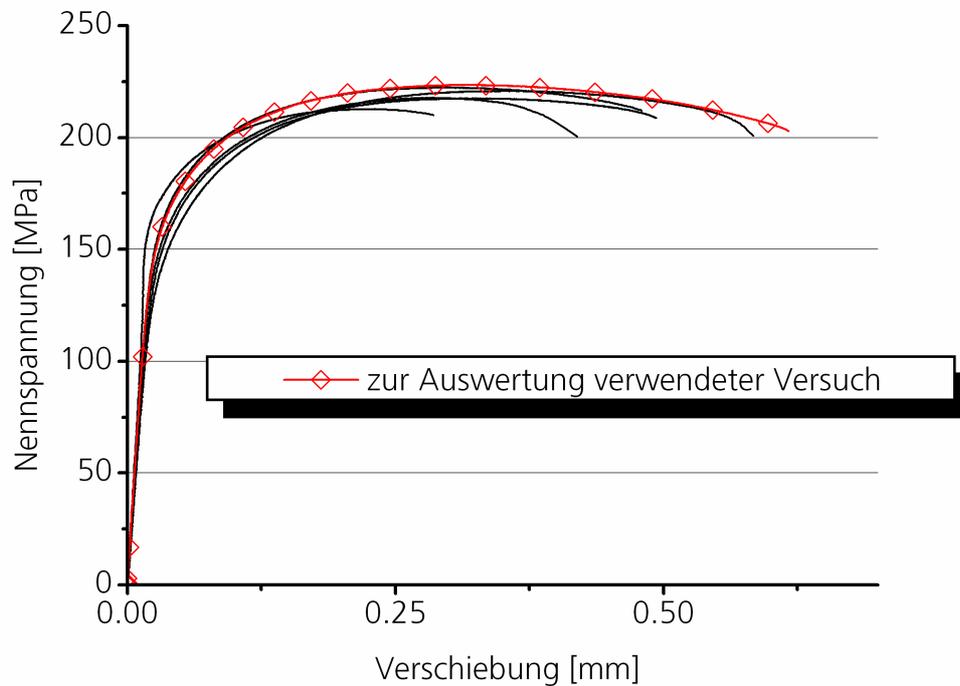


Abbildung 5-19: Nennspannung in Abhängigkeit von der Verschiebung für die Zugversuche an gekerbten Proben. Insgesamt wurden sechs Versuche durchgeführt. Die maximale Verschiebung variiert sehr stark. Zur Auswertung wird der Versuch mit der größten Verschiebung genutzt, da er dem ideal-typischen Verhalten am nächsten kommt.

Die Kraft-Verschiebungs-Verläufe des in Abbildung 5-19 hervorgehobenen Versuchs und der entsprechenden Berechnung sind in Abbildung 5-20 wiedergegeben. Die Übereinstimmung ist bis zum Erreichen der Höchstkraft sehr gut. Bei größeren Verschiebungen wird die Kraft von der Simulation leicht überschätzt.

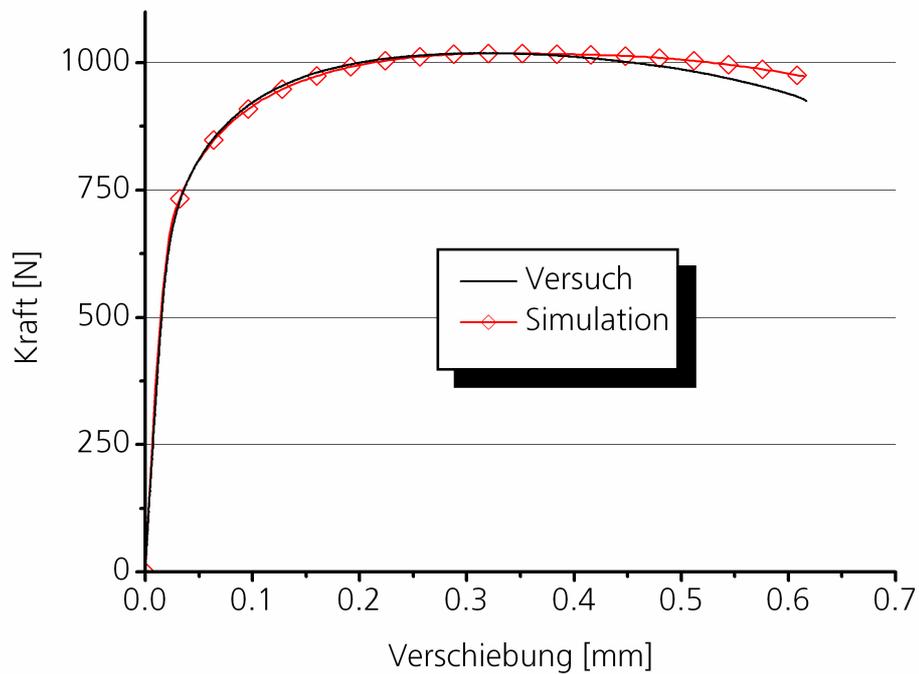


Abbildung 5-20: Kraft-Verschiebungs-Verläufe des Versuchs und der Simulation einer gekerbten Zugprobe. Bei höheren Verschiebungen wird die Kraft in der Simulation leicht überschätzt. Hier zeigt sich der Effekt der Schädigung.

Das FE-Modell der gekerbten Zugprobe ist in Abbildung 5-21 dargestellt. Die maximale äquivalente plastische Dehnung tritt ebenso wie bei dem Versuch an der glatten Zugprobe in der Probenmitte auf.

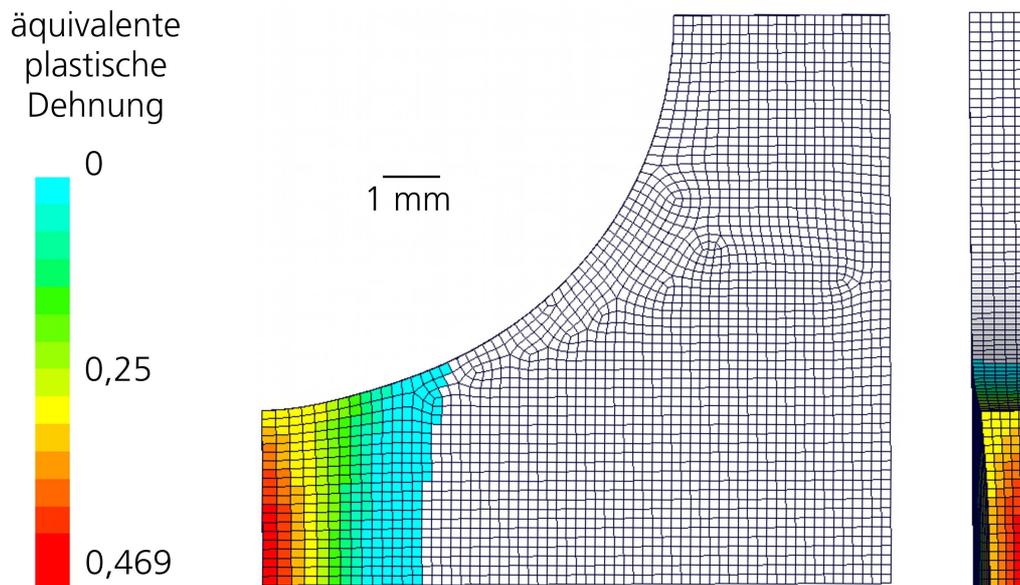


Abbildung 5-21: Symmetrienutzendes FE-Modell der gekerbten Zugprobe zum Versagenszeitpunkt. Die maximale Dehnung tritt in der Probenmitte auf.

Die mit mindestens 75 % der maximalen äquivalenten plastischen Dehnung belastete Querschnittsfläche der Probe beträgt etwa $2,2 \text{ mm}^2$ und ist damit rund dreimal so groß wie die bei dem Zugversuch an den glatten Proben. Die berechneten Versagenskennwerte sind in der Tabelle 5-2 aufgeführt.

Tabelle 5-2: Ideal-typische Versagenskennwerte bei einem Zugversuch an einer gekerbten Probe.

Vergleichs- spannung (Exponent der Fließfunktion $n=8$) [MPa]	äqui- valente plastische Dehnung	VON MISES Vergleichs- spannung [MPa]	Spannungs- mehr- achsigkeit	beanspruchte Querschnitts- fläche (mind. 75 % der max. Dehnung)
267,23	0,379	261,975	0,578	$2,2 \text{ mm}^2$

5.1.2.4 Schubversuche an kreuzförmigen Proben

Da die Proben im Verhältnis zur Versuchseinrichtung sehr klein sind (vgl. Abbildung 5-7 und Abbildung 5-8), erreicht die Qualität dieser Versuche nicht die der Zugversuche an glatten und gekerbten Proben. Spiel und

geometrische Toleranzen der Versuchseinrichtung gestatten nicht die Aufbringung einer ideal-symmetrischen Beanspruchung.

Für die Versuche sind die auf die Probendicke bezogenen Kräfte in Abhängigkeit von den Verschiebungen für die Druck- und Zugseite in Abbildung 5-22 zusammengestellt. Aus Gründen der Übersicht ist nur einer der beiden aus den oben genannten Gründen leicht voneinander abweichenden Verläufe der Zug- bzw. Druckbeanspruchungen je Versuch dargestellt. Hier wird der Versuch zur numerischen Bestimmung der Versagenskennwerte genutzt, der die größte Beanspruchung bei gleichzeitig guter Übereinstimmung der beiden Kraft-Verschiebungs-Verläufe für die Druck- bzw. Zugseite aufweist.

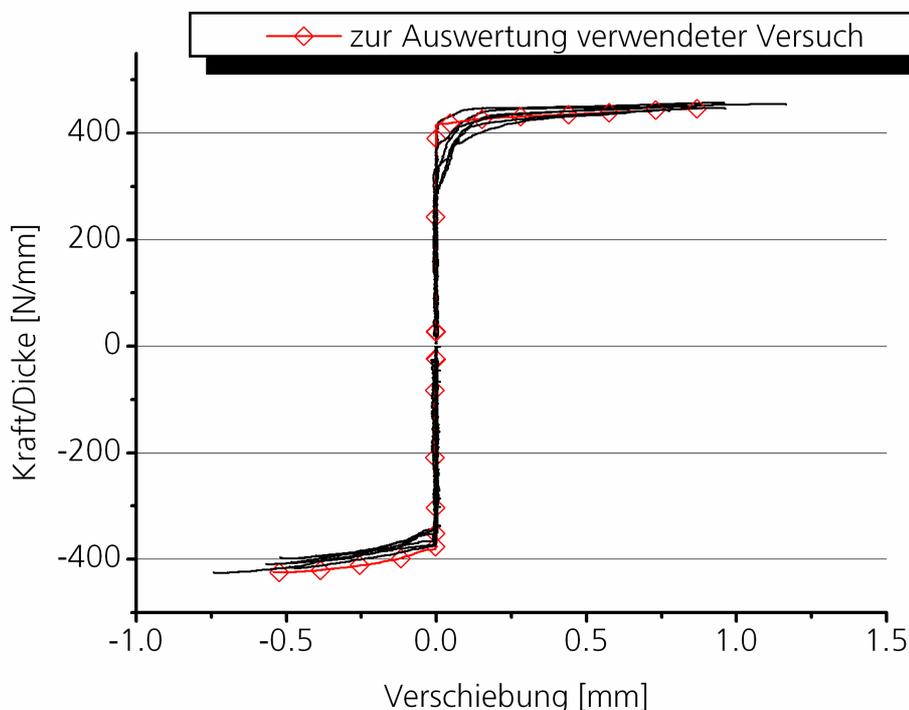


Abbildung 5-22: Auf die Probendicke bezogene Kraft in Abhängigkeit von der Verschiebung für die Schubversuche an kreuzförmigen Proben. Es sind die Verläufe der Druck- und Zugrichtung dargestellt. Insgesamt wurden sieben Versuche durchgeführt. Die maximale Verschiebung variiert weniger als bei den Zugversuchen an glatten und gekerbten Proben.

Für diesen Versuch sind alle vier Kraft-Verschiebungs-Verläufe in Abbildung 5-23 zusammengestellt. Daneben sind die Ergebnisse der Simulation dieses Versuchs abgebildet.

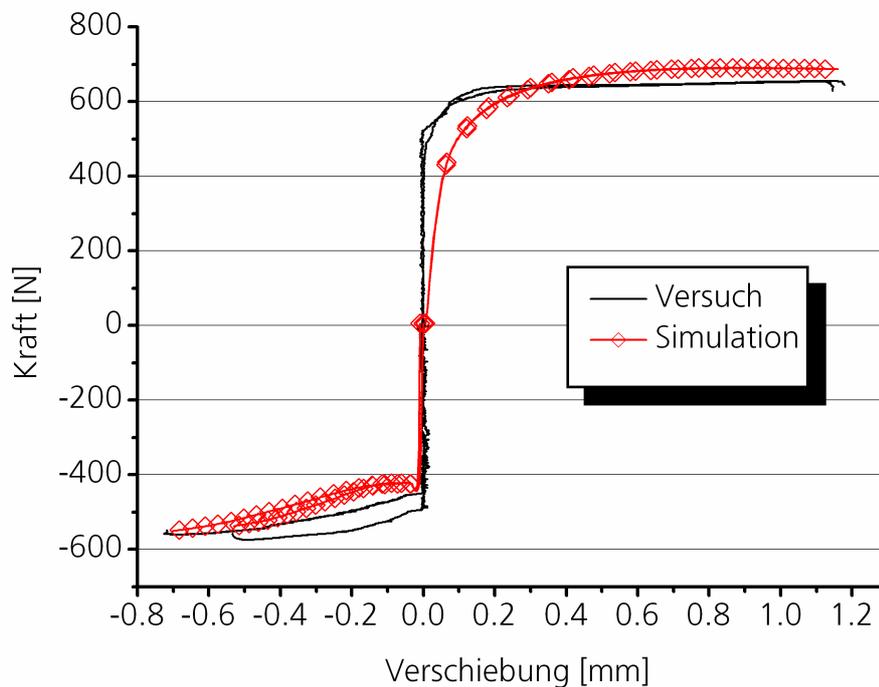


Abbildung 5-23: Kraft-Verschiebungs-Verläufe des zur Auswertung verwendeten Versuchs und der entsprechenden Simulation eines Schubversuchs mit kreuzförmiger Probe. Aufgrund der geringen Probengröße sind die geometrischen Toleranzen der Versuchseinrichtung relativ groß (vgl. Abbildung 5-7 und Abbildung 5-8). Unter diesen Umständen wird die Abweichung der Versuchsergebnisse mit denen der Simulationen als akzeptabel angesehen.

Angeht die oben genannten Schwierigkeiten infolge der geringen Probengröße wird die Übereinstimmung als akzeptabel angesehen.

Das zur Auswertung verwendete FE-Modell ist in Abbildung 5-24 zum Versagenszeitpunkt dargestellt. Im Gegensatz zu den Zugversuchen an glatten und gekerbten Proben ist die äquivalente plastische Dehnung über Dicke nahezu konstant.

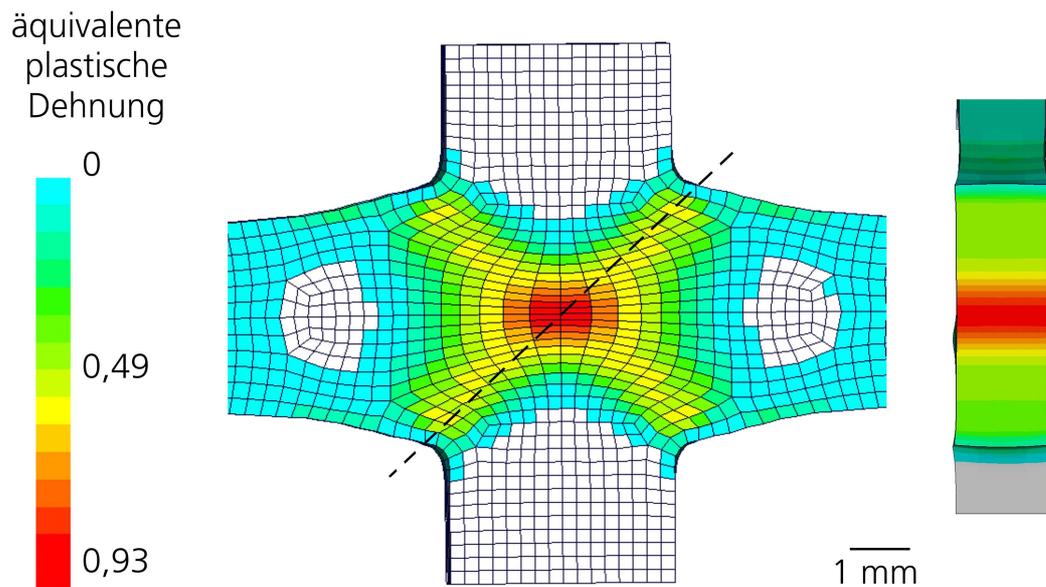


Abbildung 5-24: FE-Modell der Schubprobe zum Versagenszeitpunkt. Die maximale Dehnung tritt in der Draufsicht in der Probenmitte auf und ist im Gegensatz zu den Zugversuchen an glatten und gekerbten Proben über der Dicke nahezu konstant. Es wurden 6 Elementreihen in Dickenrichtung der Probe verwendet,

Tabelle 5-3 zeigt die zum Versagenszeitpunkt in der Probenmitte (also am Versagensort, vgl. Abbildung 5-14) berechneten Versagenskennwerte.

Tabelle 5-3: Ideal-typische Versagenskennwerte bei einem Schubversuch an kreuzförmigen Proben.

Vergleichs- spannung (Exponent der Fließfunktion $n=8$) [MPa]	äqui- valente plastische Dehnung	VON MISES Vergleichs- spannung [MPa]	Spannungs- mehr- achsigkeit	beanspruchte Querschnitts- fläche (mind. 75 % der max. Dehnung)
279,76	0,928	265,9	0,1397	1,9 mm ²

Bei diesem Versuch ist die zu mindestens 75 % der maximalen äquivalenten plastischen Dehnung belasteten Querschnittsfläche etwa 1,9 mm² und liegt damit nahe der des Versuchs an der gekerbten Probe (2,2 mm²).

5.1.3 Diskussion der Versuchsergebnisse

Insgesamt fallen bei allen Versuchen die hohen ertragbaren äquivalenten plastischen Dehnungen auf. Folgende Erklärungen können diese Ergebnisse plausibilisieren:

- Als Versuch zur Bestimmung des Schubversagens wurde in dieser Arbeit ein neuer Versuch entwickelt, bei dem die Probe an der Stelle der höchsten Schubspannung versagt, und nicht verfrüht unter Zugbeanspruchung. Die hier gemessenen Schubspannungen sind erwartungsgemäß größer, da bei Untersuchungen mit Abscherversuchen (vgl. Abschnitt 2.4.2 und 3.1.2) nicht die maximal ertragbare Schubspannung erreicht wird.
- Die in dieser Arbeit verwendeten Proben sind relativ klein. Aufgrund des Größeneffektes der Bruchmechanik sind die ertragbaren Belastungen höher als bei größeren Proben. Zur Modellierung des Werkstoffverhaltens ohne Berücksichtigung des Größeneffektes dürfen nur Proben mit vergleichbaren belasteten Volumina verglichen werden. Anderenfalls würden verschiedene Effekte miteinander vermischt werden.

Aus dem letztgenannten Grund wird im Folgenden der Zugversuch an einer glatten Probe nicht bei der Formulierung des Modells verwendet. Er weist trotz höherer Spannungsmehrachsigkeit eine deutlich größere äquivalente plastische Dehnung als der Versuch an einer gekerbten Probe auf. Dieser Effekt wird jedoch nicht als Werkstoffphänomen interpretiert, sondern als Folge der unterschiedlich großen mit mindestens 75 % der maximalen äquivalenten plastischen Dehnung belasteten Querschnitte, nämlich $0,71 \text{ mm}^2$ im Vergleich zu $2,2 \text{ mm}^2$. Die belastete Querschnittsfläche des Schubversuchs beträgt $1,9 \text{ mm}^2$, was nahe der des Versuchs an der gekerbten Probe liegt. Die mathematische Formulierung des Versagens erfolgt daher auf Basis der Schubversuche und der Zugversuche an gekerbten Proben.

Aufgrund der oben genannten Überlegungen stehen zwar weniger Messpunkte zur Modellierung des Versagensverhaltens zur Verfügung als in anderen Untersuchungen, jedoch werden die vorhandenen Datenpunkte hinsichtlich des Versagensorts und der davon abhängigen

korrekten Interpretation der Versuchsergebnisse¹² und der Beachtung des Größeneffektes als plausibler denn in anderen Arbeiten angesehen.

5.2 Mathematische Formulierung

Wie in Kapitel 3.1 diskutiert, wird eine Versagensmodellierung auf Basis der Versagensspannungen als vorteilhaft angesehen. Die wichtigsten Gründe hierfür sind zusammengefasst:

- Bei nichtlinearen oder nichtmonotonen Beanspruchungen muss die Beanspruchungshistorie ohnehin in dem Festigkeitsmodell berücksichtigt werden. Ob dann das Versagenskriterium zusätzlich die Beanspruchungshistorie beinhalten muss, bleibt zu prüfen.
- Die Parameterbestimmung ist einfach und im Falle von verfestigendem Werkstoffverhalten eindeutig¹³. Bei der Versagensbewertung auf Basis von akkumulierten Schädigungsvariablen muss dies oftmals unter vereinfachenden Annahmen geschehen, vgl. Abbildung 3-1.

Als Versagensindikator wird daher die Vergleichsspannung (Exponent der Fließfunktion $n=8$) in Abhängigkeit von der Spannungsmehrachsigkeit verwendet. Auf eine Unterscheidung hinsichtlich unterschiedlicher Versagensmodi wird aufgrund der relativ geringen Datenbasis nicht weiter eingegangen, obgleich dies prinzipiell als sinnvoll angesehen wird. Hierzu sind aber deutlich mehr Versuche insbesondere im Übergangsbereich von Scherversagen zu duktilem Versagen erforderlich. Die Formulierung erfolgt zwecks größtmöglicher Flexibilität nicht in einer analytischen Form, sondern als Datentabelle, zwischen deren Einträgen linear interpoliert wird. So können beliebige Verläufe approximiert werden, beispielsweise ein Verlauf gemäß Abbildung 2-7 oder ein anderer

¹² Ein Abscherversuch, bei dem die Probe zuerst am Rand versagt, liefert Informationen über die maximal ertragbare einachsige Zugspannung und die Rissausbreitung, jedoch nicht über die maximal ertragbare Schubspannung. Gleiches gilt für scharf gekerbte Proben, deren Versagen am Rand beginnt (vgl. Abbildung 5-2).

¹³ Zur numerischen Behandlung von Schädigung bzw. entfestigendem Werkstoffverhalten mit der FEM sind ohnehin geeignete Regularisierungsmethoden zu verwenden, vgl. [63] und als Anwendungsbeispiel [102]. Ein spannungsbasiertes Kriterium kann hier den Beginn der Entfestigung indizieren.

gemäß Gl. 2-49. Die in dieser Arbeit verwendeten Parameter sind in Abbildung 5-25 dargestellt.

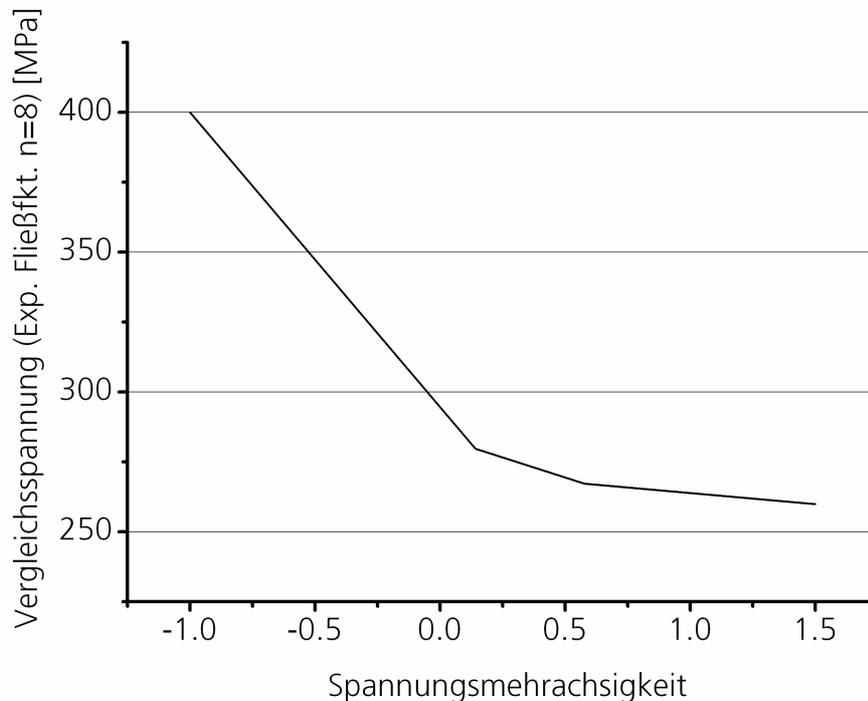


Abbildung 5-25: In dieser Arbeit verwendete Parameter des Versagensmodells. Die beiden äußeren Punkte (bei einer Spannungsmehrachsigkeit von -1,0 und 1,5) sind extrapoliert.

5.3 Implementierung in ein FEM-Programm

Die Problematik bei der Versagensprognose mit nicht-konvergierten Vernetzungen, wie sie bei der Anwendung der FEM mit expliziter Zeitintegration bei komplexen Bauteilen i. d. R. vorliegen, ist in Kapitel 1.3 und 3.1 dargestellt. Um vor diesem Hintergrund dennoch Versagensprognosen zu ermöglichen, erfolgt in dieser Arbeit die Versagensmodellierung unter Berücksichtigung des lokalen Diskretisierungsfehlers.

5.3.1 Konzept zur Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers

Der hier verfolgte Modellierungsansatz besteht aus zwei wesentlichen Schritten. Zunächst wird der lokale Diskretisierungsfehler abgeschätzt. Da diese Abschätzung die wahren Diskretisierungsfehler bei den Extrema der Spannungsfelder unterschätzt, erfolgt im zweiten Schritt eine empirische Korrektur der an diesen Stellen vorliegenden Spannungen auf der Basis des abgeschätzten Fehlers. Diese Korrektur wird mit Simulationen der Probenversuche mit unterschiedlich konvergierten Vernetzungen vorgenommen und für andere Belastungen interpoliert.

5.3.1.1 Abschätzung des lokalen Diskretisierungsfehlers

Die in dieser Arbeit angewandte Methode zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers ist in Kapitel 2.3.1.4 beschrieben. Hier erfolgt die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers auf Basis der äquivalenten plastischen Dehnungen. Die Volumenelemente, die typischerweise und auch in dieser Arbeit für Berechnungen mit expliziter Zeitintegration und näherungsweise volumenkonstanter Verformung eingesetzt werden, sind unterintegrierte hexaedrische isoparametrische Elemente mit trilinearer Ansatzfunktion. Die Elemente weisen also einen Integrationspunkt auf, der sich in der Elementmitte befindet. An den Knoten werden die äquivalenten plastischen Dehnungen der angrenzenden Elemente (Anzahl dieser Elemente: n_{Patch}) gemittelt. Dabei erfolgt eine Gewichtung mit dem Abstand des jeweiligen Integrationspunktes zu dem Knoten $|_j^{\text{GK}}$. Die gemittelte äquivalente plastische Dehnung κ_{Knoten} lautet also:

$$\kappa_{\text{Knoten}} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{\text{Patch}}} \kappa_j |_j^{\text{GK}}}{\sum_{j=1}^{n_{\text{Patch}}} |_j^{\text{GK}}} \quad \text{Gl. 5-2}$$

Die Knotenwerte werden trilinear – mit der Ansatzfunktion der Elemente, vgl. Gl. 2-60 und Gl. 2-61 – interpoliert und liefern so eine verbesserte Lösung für die äquivalente plastische Dehnung $G(\kappa)$. Der lokale Fehler μ_κ des Elementes wird dann als mittlerer Fehler im Element zwischen der ursprünglichen – nur am Integrationspunkt ausgewerteten – Lösung und der verbesserten Lösung bestimmt:

$$\mu_\kappa^2 = \int_{\Omega_{\text{Element}}} (G(\kappa) - \kappa)^2 d\Omega \quad \text{Gl. 5-3}$$

Die numerische Auswertung dieses Volumenintegrals erfolgt in natürlichen Koordinaten mit der erwünschten Auflösung als Schrittweite, hier 0,01.

5.3.1.2 Empirische Korrektur des Versagensindikators

Zur Aufstellung einer empirischen Korrektur der Versagensspannung wurden die zur Auswertung verwendeten Versuche – ein Zugversuch an einer gekerbten Probe und ein Schubversuch – mit unterschiedlich fein vernetzten FE-Modellen nachgerechnet. Die mit dem jeweils feinsten Modell ermittelte äquivalente plastische Dehnung wurde als Referenz gewählt. Für geringere Dehnungen, die mit den gröber vernetzten Modellen berechnet wurden, sind mit dieser Referenz Skalierungsfaktoren ermittelt worden. Diese Skalierungsfaktoren sind in Abbildung 5-26 über dem lokalen Diskretisierungsfehler aufgetragen. Daneben ist in der Abbildung eine Approximation der Skalierungsfaktoren der beiden Versuche dargestellt. Mit dieser Approximation erfolgt eine empirische Korrektur der äquivalenten plastischen Dehnung in Abhängigkeit von dem lokalen Diskretisierungsfehler. Abschließend wird mit Hilfe der Verfestigungskurve die korrigierte Vergleichsspannung ($n=8$) bestimmt. Die empirische Korrektur des Versagensindikators erfolgt zusammengefasst:

1. Bestimmung des lokalen Diskretisierungsfehlers (Gl. 5-4)
2. Empirische Korrektur der äquivalenten plastischen Dehnung gemäß Abbildung 5-26
3. Ermittlung der korrigierten Vergleichsspannung ($n=8$) mit Hilfe der Verfestigungskurve (Abbildung 5-15)

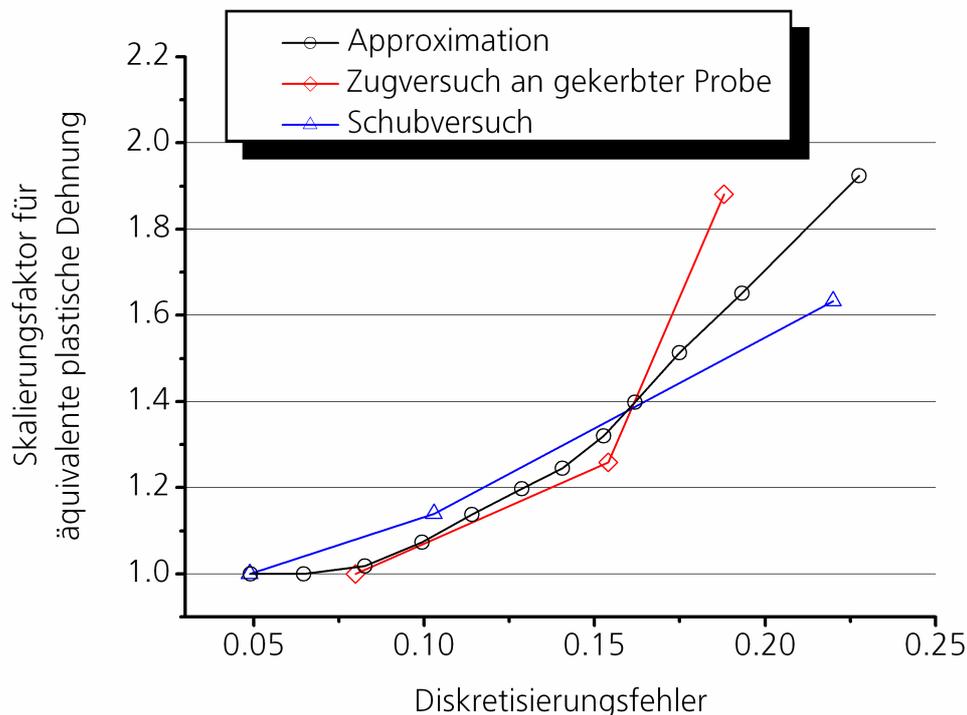


Abbildung 5-26: Skalierungsfaktoren der äquivalenten plastischen Dehnung in Abhängigkeit von dem lokalen Diskretisierungsfehler. Neben den mit jeweils unterschiedlich fein vernetzten FE-Modellen bestimmten Werten ist die im Folgenden verwendete Approximation abgebildet.

Die Versagensprognose wird nun gemäß Abbildung 5-25 getroffen, wobei die korrigierte Vergleichsspannung verwendet wird. Die Spannungsmehrachsigkeit wird nicht skaliert: Es wird die vereinfachende Annahme getroffen, dass der Diskretisierungsfehler isotrop ist und sich bei der Quotientenbildung (vgl. Gl. 5-5) aufhebt.

5.3.2 Realisierung innerhalb einer Materialsubroutine eines parallel mit verteiltem Speicher arbeitenden Berechnungsprogramms

Zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers müssen für jedes Element die Nachbarelemente und deren Knotenpositionen zur Bestimmung der Lage des jeweiligen Integrationspunktes im verformten Netz bekannt sein. In die Material-Subroutinen des verwendeten kommerziellen FEM-Berechnungsprogramms [92] werden die Knotenkoordinaten der Elemente übergeben. Diese Informationen können in Verbindung mit den Informationen aus der Eingabedatei, die die geometrischen Informationen

und Nummerierungen der Knoten und Elemente enthält, im unverformten Netz genutzt werden, um die Nachbarschaftsbeziehungen zu ermitteln. Weiterhin müssen während des Berechnungsablaufs für jedes Element die Dehnungen und Koordinaten der Integrationspunkte der Nachbarschaftselemente bekannt sein. Da die Material-Subroutine mehrfach pro Prozess und Zeitschritt aufgerufen wird, allerdings nicht zwangsläufig gleich oft in allen Prozessen, sind zwei Arten der Kommunikation erforderlich. Einerseits müssen Informationen eines Prozesses zwischen den verschiedenen Aufrufen der Subroutine ausgetauscht werden. Dies kann geschehen, indem bestimmte Variablen nach Verlassen der Subroutine im Speicher erhalten bleiben und so für den nächsten Aufruf zur Verfügung stehen, was durch die Option „SAVE“ bei der Deklaration veranlasst werden kann. Andererseits müssen die Prozesse untereinander kommunizieren, was mit Subroutinen der MPI-Bibliothek [106] geschieht¹⁴. Abbildung 5-27 veranschaulicht die Einbindung der Material-Subroutine in einem Rechenlauf eines parallel mit verteiltem Speicher arbeitenden Berechnungsprogramms (engl.: Distributed Memory Parallelisation, kurz: DMP) und die erforderlichen beiden Kommunikationsmethoden.

¹⁴ Da in der vorliegenden Version der User-Subroutine kollektive MPI-Funktionen eingesetzt werden, die allesamt blockende Funktionen sind, muss in jedem Prozess mindestens ein Element des von der User-Subroutine zu berechnenden Materialtyps vorhanden sein. Alternativ könnten auch nicht blockende Punkt-zu-Punkt Funktionen der MPI Bibliothek verwendet werden.

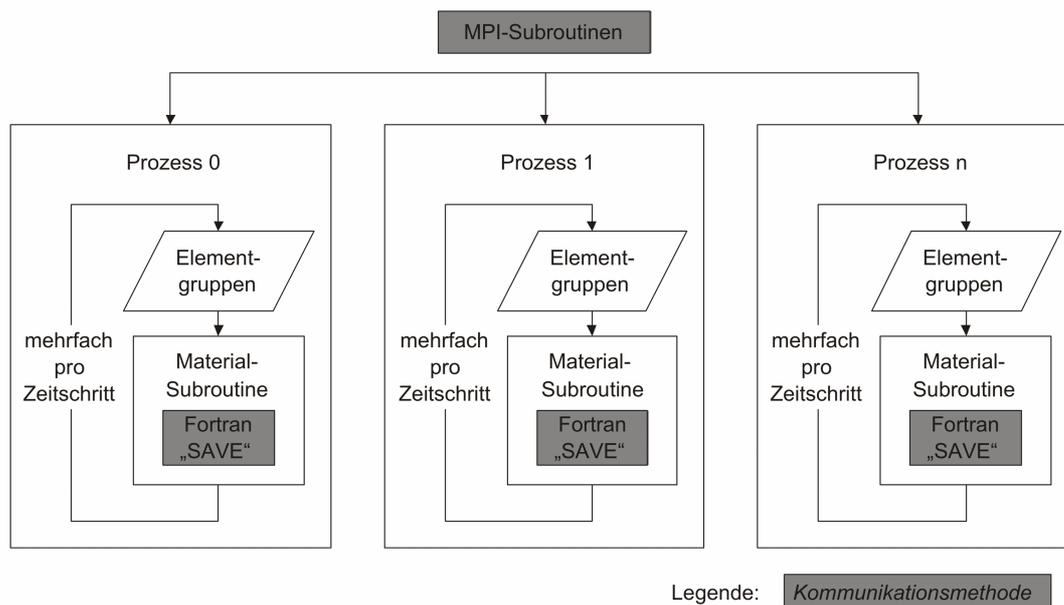


Abbildung 5-27: Lokalisierung der Aufrufe der Material-Subroutine während eines DMP-Berechnungsverlaufs des verwendeten FEM-Berechnungsprogramms [92]. Die Aufrufe der Subroutine innerhalb der Prozesse erfolgen nicht unbedingt gleich oft. Es sind daher zwei Arten der Kommunikation nötig, um eine globale Kommunikation aus der Subroutine zu gestalten. Innerhalb eines Prozesses kann dies erfolgen, indem Variablen nach Verlassen der Subroutine für den nächsten Aufruf erhalten bleiben (Option „SAVE“ für die jeweiligen Variablen). Die Kommunikation zwischen den Prozessen erfolgt mit Subroutinen der MPI-Bibliothek.

Der Ablauf der Kommunikation ist in Abbildung 5-28 schematisch abgebildet. Zum Zeitschritt 0, an dem noch keine Verformung vorliegt, werden die Elemente anhand der Knotenpositionen identifiziert. Die Nachbarelemente werden als Historienvariablen für jedes Element gespeichert. Der globale Austausch des Feldes, das die Dehnungen und Koordinaten der Integrationspunkte für jedes Element enthält, erfolgt durch eine globale Addition temporärer Felder mit der Subroutine `MPI_ALL_REDUCE(...)`. Die temporären Felder enthalten je Prozess nur an den Stellen von Null verschiedene Einträge, an denen die Informationen der dem jeweiligen Prozess zugeordneten Elemente stehen. Da die Material-Subroutine mehrfach pro Zeitschritt und nicht zwangsläufig gleich oft von allen Prozessen aufgerufen wird, erfolgt die Erstellung der temporären Felder einen Zeitschritt vor der globalen Addition.

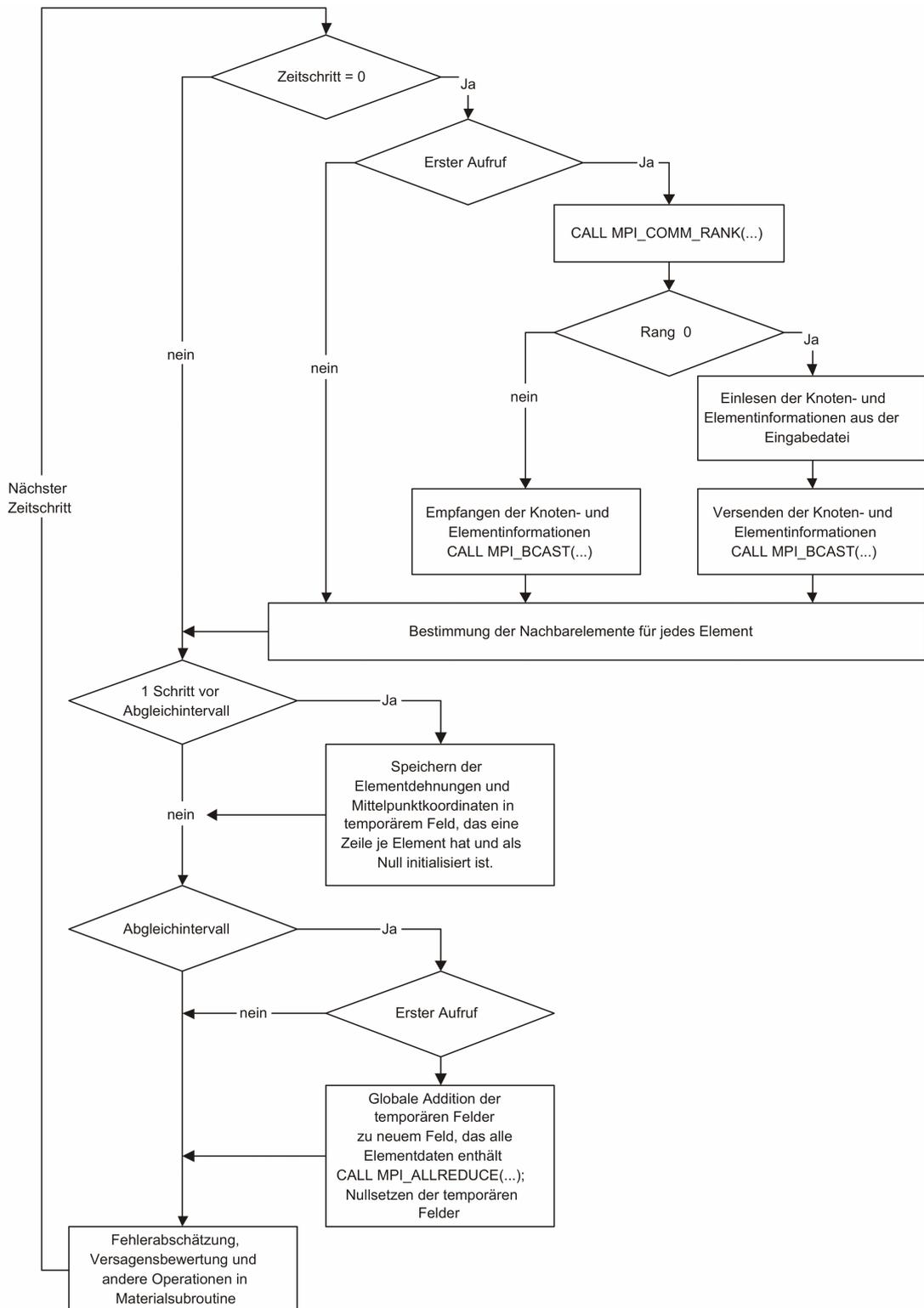


Abbildung 5-28: Ablauf der globalen Kommunikation zur Bereitstellung der Nachbarelementinformationen.

5.4 Validierung der Modellierung

Die Versagensmodellierung wird validiert, indem die Versuche mit unterschiedlich feinen Vernetzungen nachgerechnet werden. Die Prognosegüte wird anhand der berechneten globalen Verschiebungen bis zum Versagen bewertet.

Zugversuche an gekerbten Proben

Abbildung 5-29 zeigt oben die FE-Modelle mit den unterschiedlich feinen Netzen. Darunter sind die Kraft-Verschiebungs-Verläufe des zur Auswertung verwendeten Versuchs und der FEM-Berechnungen mit unterschiedlich fein vernetzten Modellen zusammengestellt, wobei das Versagensmodell ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers verwendet wurde. Die globale Verschiebung bis zum Versagen wird nur von dem fein vernetzten Modell wiedergegeben. Das moderat vernetzte Modell überschätzt die Verschiebung um etwa 25 %. Von dem grob vernetzten Modell wird der Versagenszeitpunkt sogar um rund 100 % falsch prognostiziert, wobei diese Vernetzung im Kontext sehr fein vernetzter Bauteile sogar noch als moderat angesehen werden kann, vgl. Abbildung 1-7. Ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers ist also eine Versagensprognose nur mit sehr feinen, konvergierten Vernetzungen möglich. In Abbildung 5-29 unten sind die Kraft-Verschiebungs-Verläufe zusammengestellt, die mit dem Modellierungskonzept zur Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers berechnet wurden. Die Versagensprognose ist deutlich verbessert. Bei der moderaten Vernetzung wird Versagen etwas früher als im Versuch berechnet, da der approximierten Skalierungsfaktor (vgl. Abbildung 5-26) hier über dem für diese Variante exakten Faktor liegt. Bei der Simulation mit dem grob vernetzten Modell liegt der exakte Skalierungsfaktor hingegen über der Approximation. Daher tritt Versagen in dieser Berechnung etwas später als im Versuch auf. Dennoch kann eine deutliche Verbesserung – von etwa 100 % Abweichung auf etwa 10 % – erreicht werden.

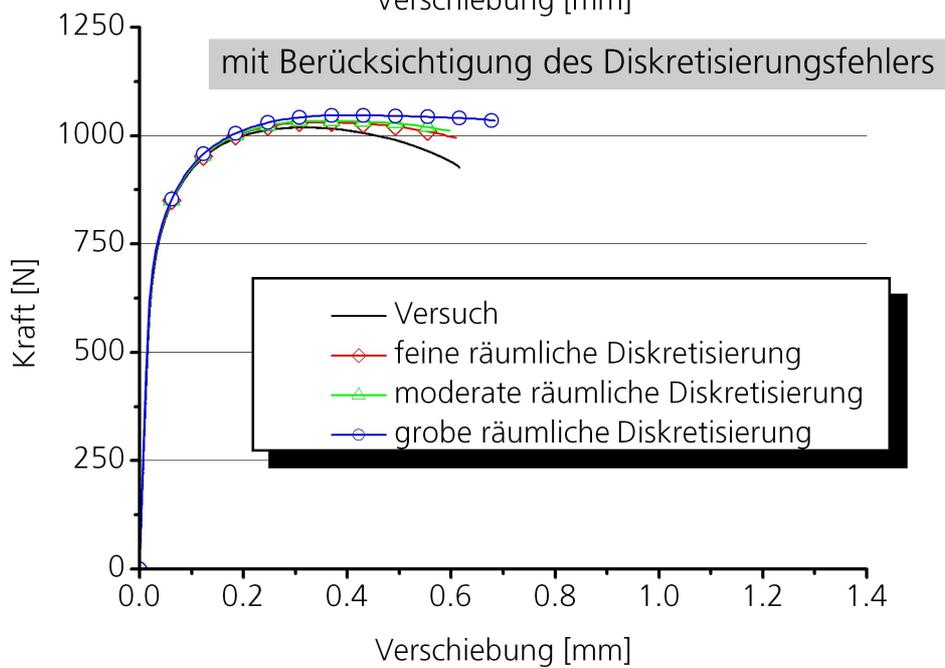
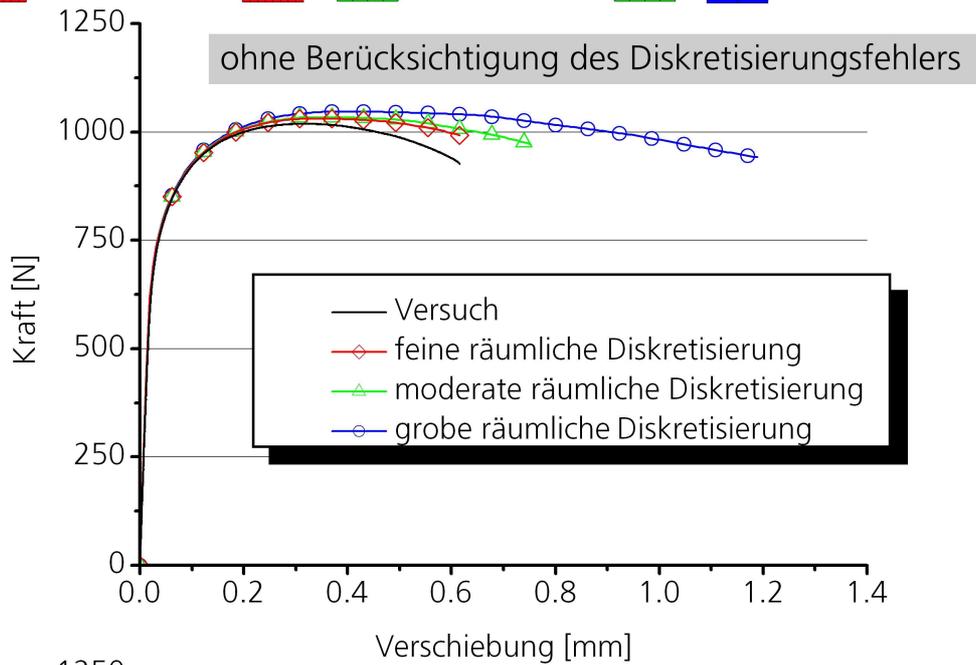
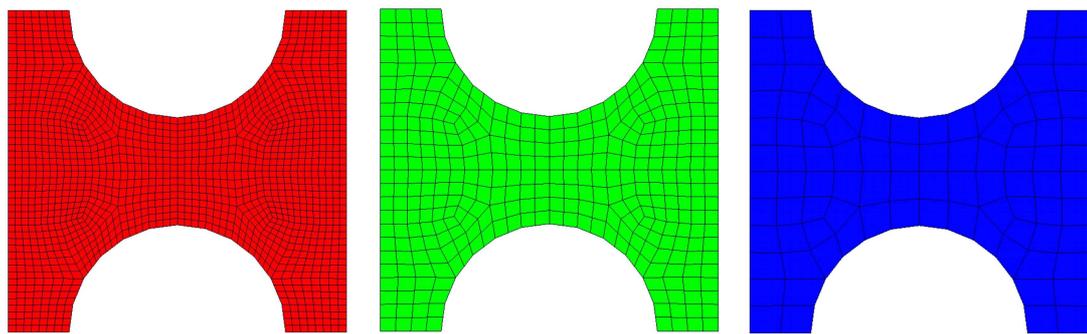


Abbildung 5-29: Der Modellierungsansatz zur Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers ermöglicht eine deutliche bessere Versagensprognose.

Schubversuche mit kreuzförmigen Proben

Die Kraft-Verschiebungs-Verläufe des Versuchs und der verschiedenen FEM-Simulationen sowie Ausschnitte der unterschiedlich fein vernetzten Modelle des Schubversuchs sind in Abbildung 5-30 dargestellt. Ebenso wie bei der Simulation des Zugversuchs an der gekerbten Probe kann hier das Versuchsergebnis ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers nur mit einem sehr feinen Modell zutreffend vorhergesagt werden. Die Modelle mit der moderaten und groben Vernetzung überschätzen den Versagensbeginn um etwa 50 % bzw. 100 %. Wird bei der Versagensberechnung der lokale Diskretisierungsfehler berücksichtigt, kann eine deutliche Verbesserung in der Versagensprognose erzielt werden. Die Verschiebungen bis zum Versagen bei den Berechnungen mit der moderaten Vernetzung stimmen sehr gut mit denen des Versuchs überein. Das Modell mit der feinen Vernetzung liefert insbesondere in Zugrichtung etwas höhere Verschiebungen bis zum Versagen. Die Ursache hierfür liegt in der Approximation des Skalierungsfaktors, die im Bereich kleiner Diskretisierungsfehler unterhalb der mit dem Schubversuch berechneten Werte liegt. Die Spannungen werden daher weniger skaliert, weshalb ein späteres Versagen eintritt. Für das Modell mit der groben Vernetzung gilt Umgekehrtes: Die Approximation des Skalierungsfaktors liegt über dem berechneten Wert. Daher versagt die Probe in dieser Simulation etwas früher.

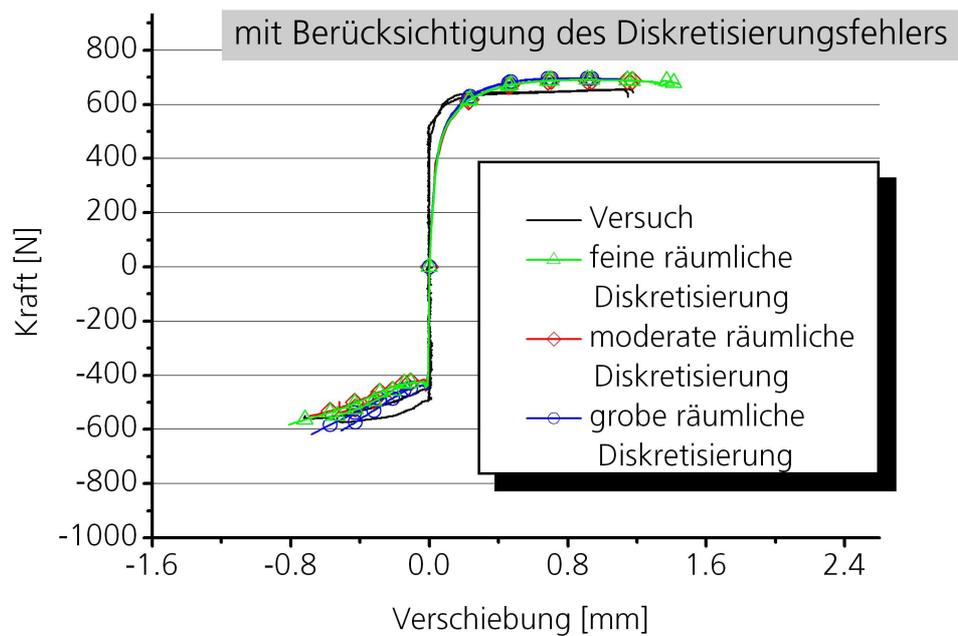
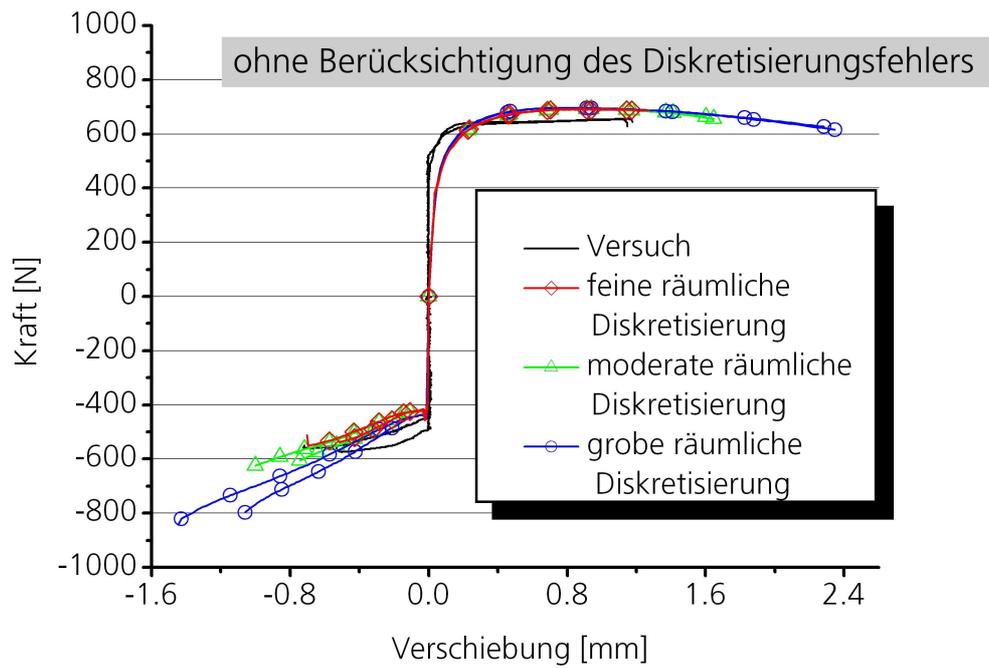
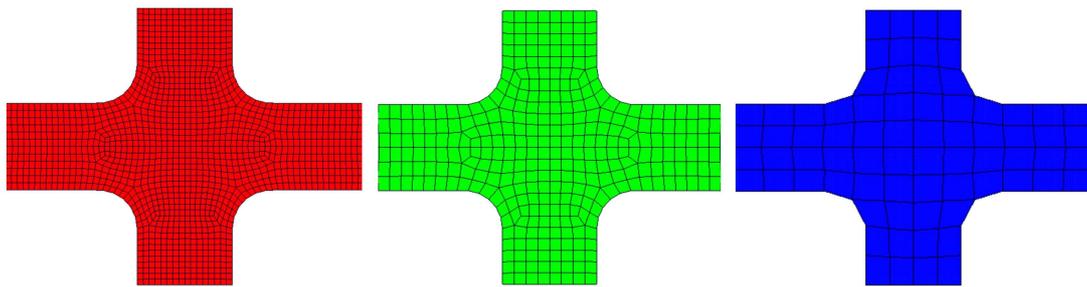


Abbildung 5-30: Der Modellierungsansatz zur Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers ermöglicht eine deutliche bessere Versagensprognose.

6 Anwendung des Werkstoffmodells

Eine erste Anwendung des in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Werkstoffmodells ist die Simulation eines dynamischen Komponentenversuchs an Demonstratorbauteilen. Daneben werden reale Versuche an vier Bauteilen durchgeführt und anschließend mit der Simulation verglichen.

6.1 Versuchsdurchführung und Vergleich mit der Simulation

Der Versuchsaufbau, der zu diesem Zweck konstruiert wurde, ist in eine von NAHME [88] entwickelten Komponenten-Crashanlage integriert und in Abbildung 6-1 schematisch dargestellt.

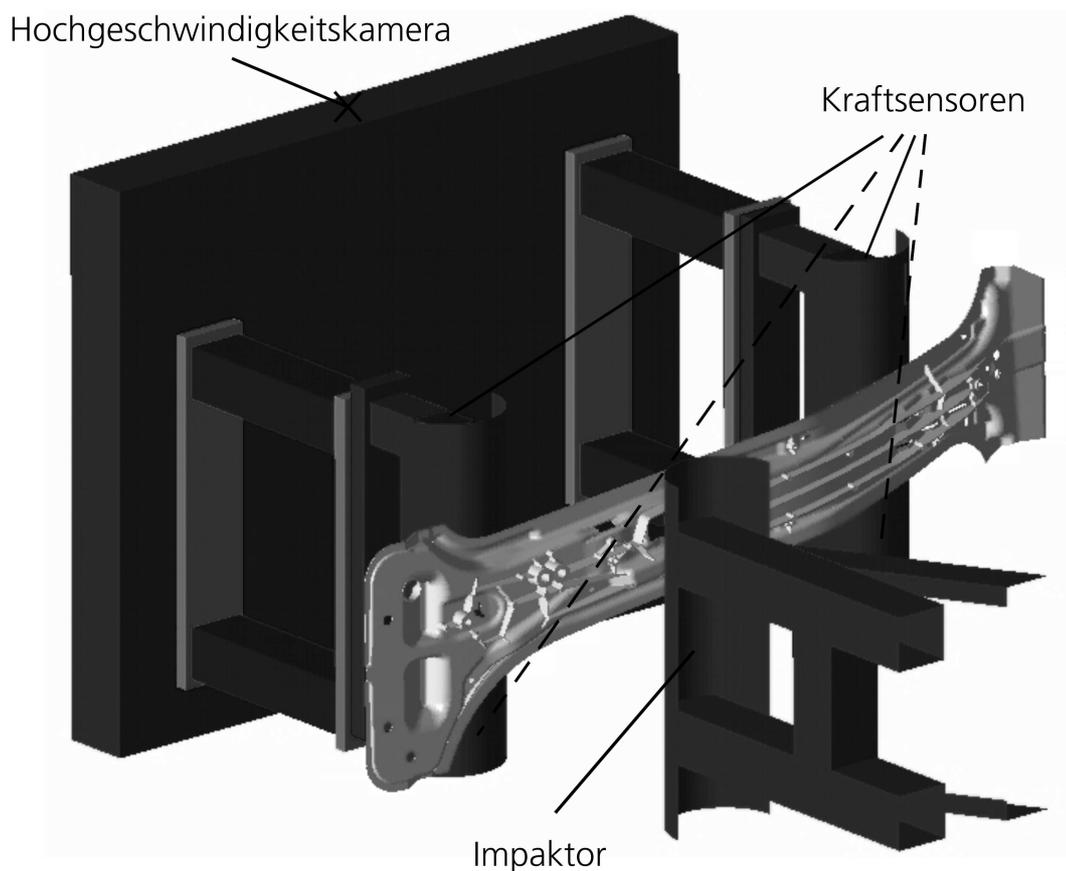


Abbildung 6-1: Schematische Darstellung des für den dynamischen Komponentenversuch konstruierten Versuchsaufbaus.

Der Versuch ist ein Drei-Punkt-Biegeversuch, wobei die Kräfte mit vier Kraftsensoren an den Auflagern gemessen werden. Der Impaktorweg wird mit einer Kamera gemessen, mit der die Position einer Schwarz-Weiss-Kante verfolgt werden kann. Eine solche Schwarz-Weiss-Kante ist an dem Impaktorschlitten befestigt. Zusätzlich werden zwei Hochgeschwindigkeitskameras eingesetzt, um die Deformation und das Versagen des Bauteils aufzunehmen. Eine der beiden Kameras befindet sich an der in Abbildung 6-1 markierten Position. Die andere filmt das Bauteil von oben. Die Impaktgeschwindigkeit bei den Versuchen betrug 5,4 m/s.

Eine Zusammenstellung von Bildsequenzen der Filmaufnahmen aller vier durchgeführten Versuche erfolgt in Abbildung 6-2 bis Abbildung 6-5. Die Reproduzierbarkeit der Versuche ist sehr gut. Sowohl der Versagensbeginn, als auch Versagensfortschritt und Deformationsbild der einzelnen Versuche stimmen sehr gut überein.

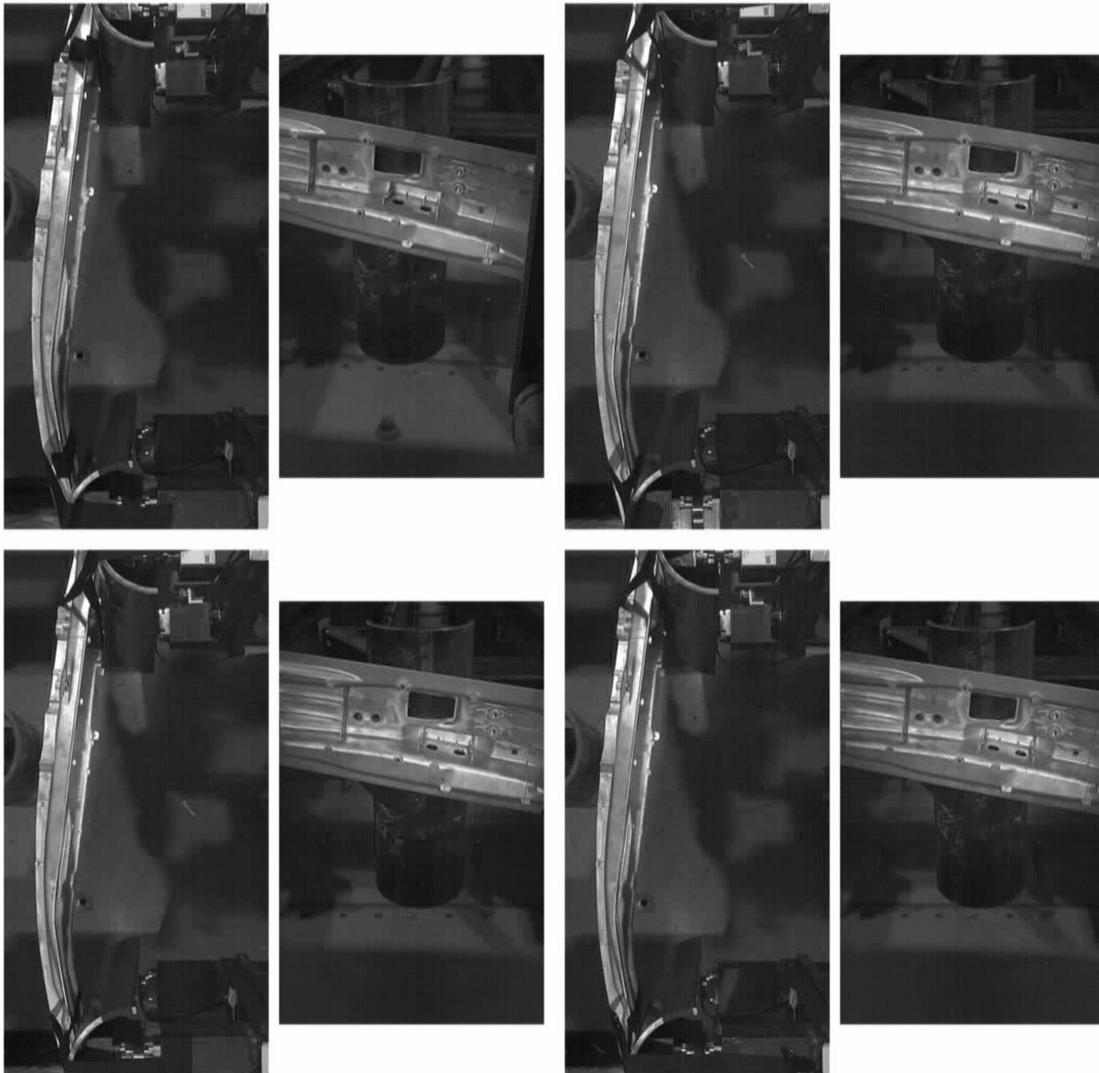


Abbildung 6-2: Zusammenstellung von Bildsequenzen der Filmaufnahmen aller vier Versuche, Teil 1; $t=0$ ms.

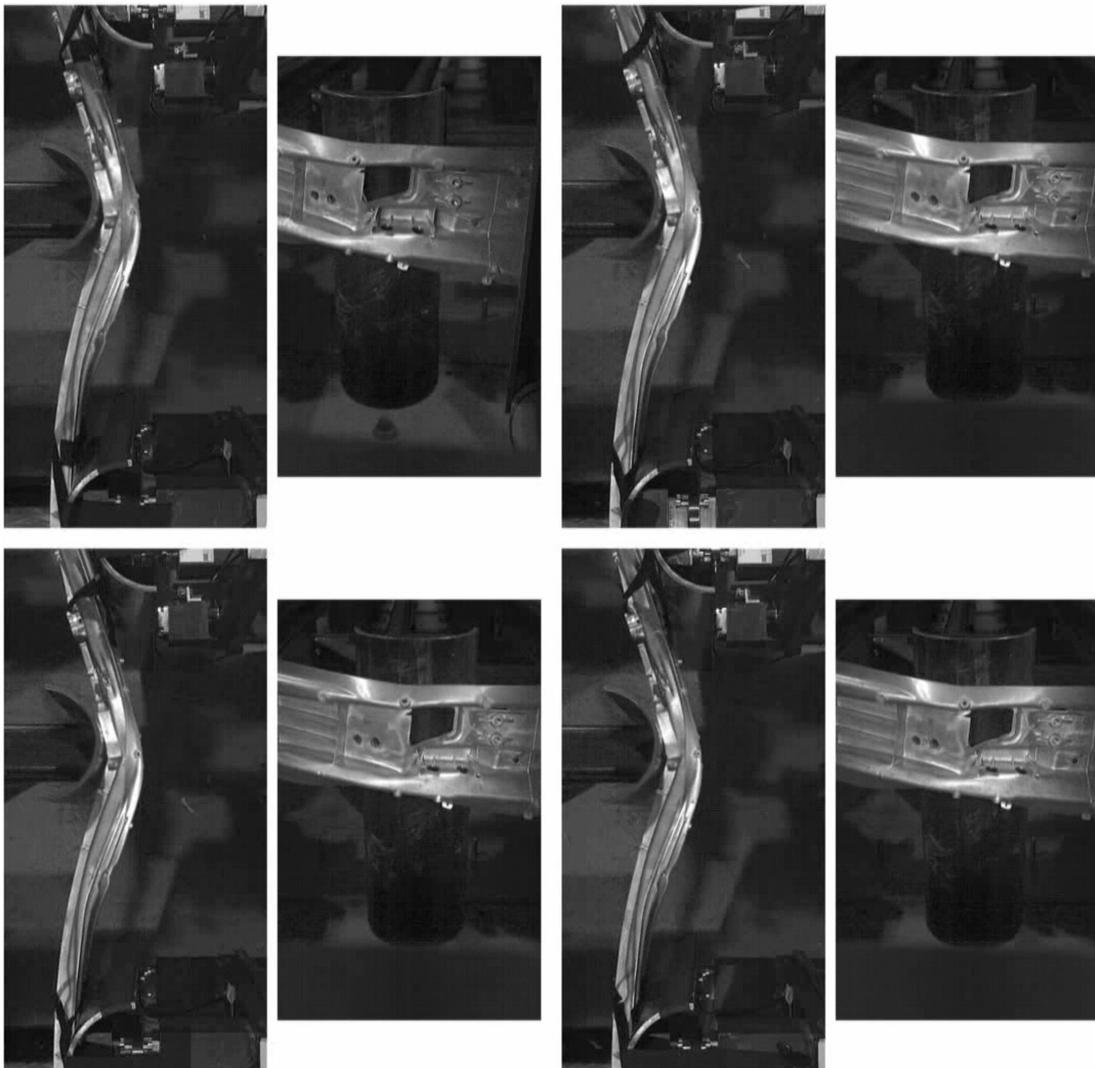


Abbildung 6-3: Zusammenstellung von Bildsequenzen der Filmaufnahmen aller vier Versuche, Teil 2; $t=15$ ms.

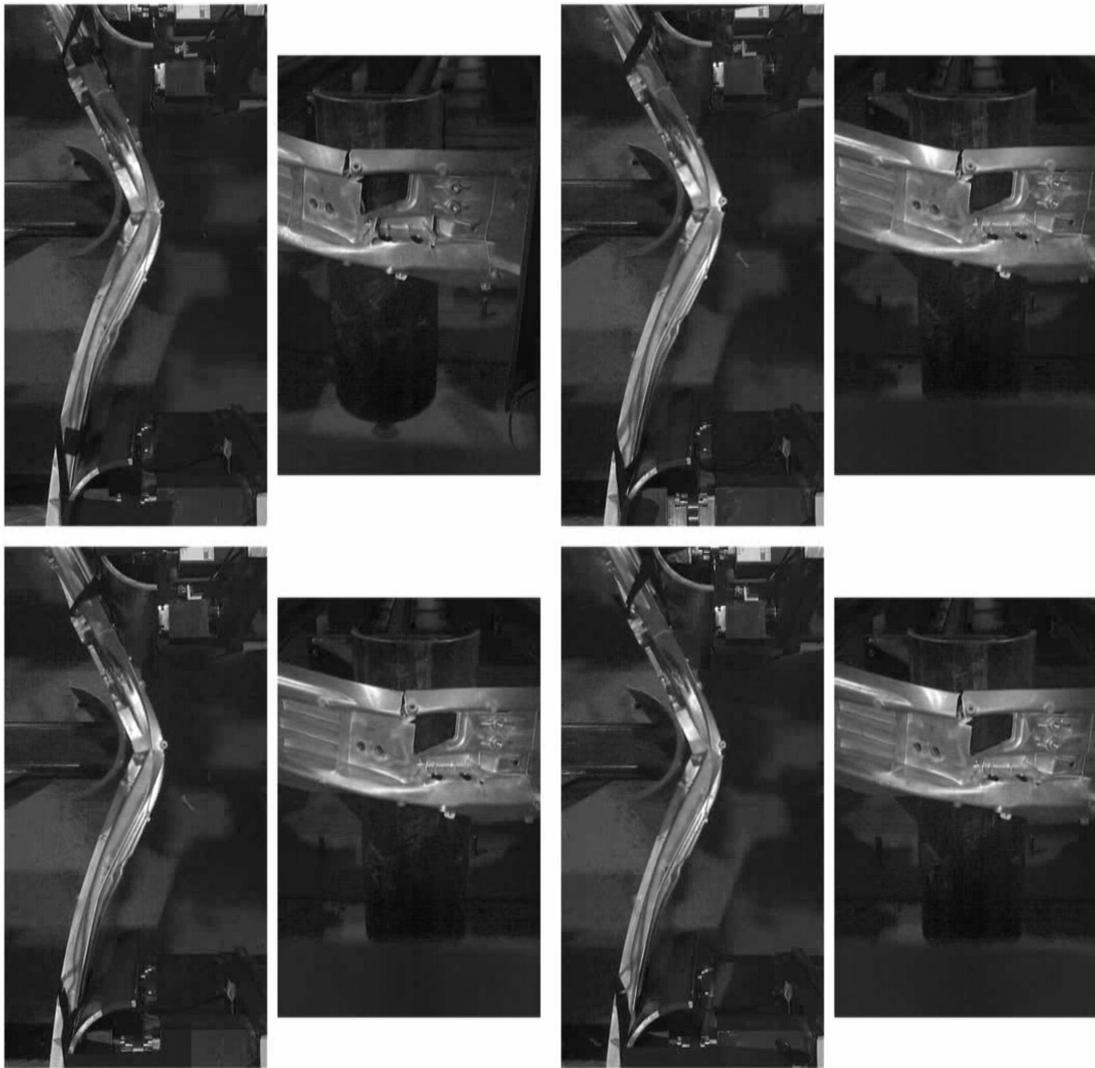


Abbildung 6-4: Zusammenstellung von Bildsequenzen der Filmaufnahmen aller vier Versuche, Teil 3; $t=18$ ms.

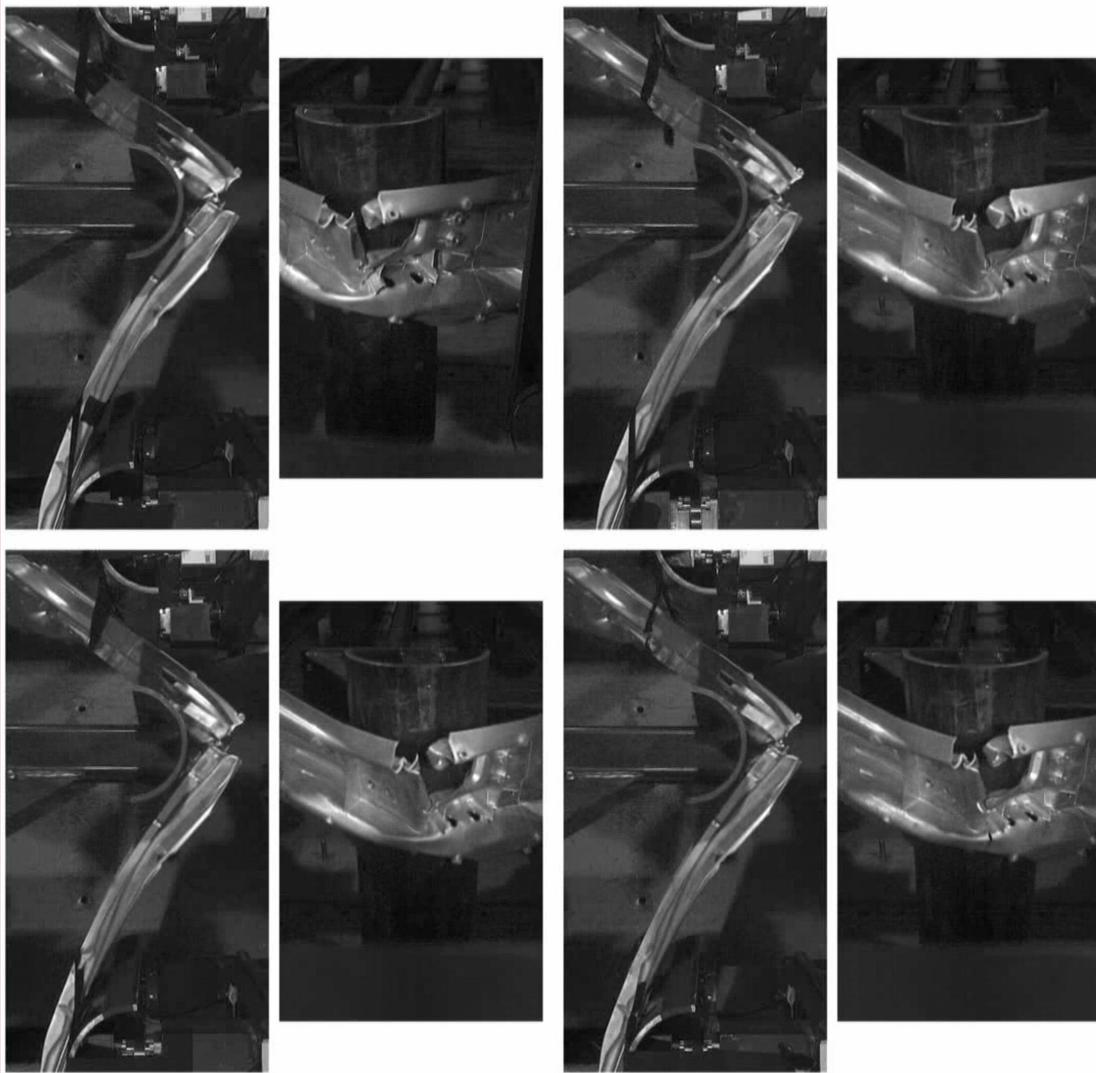


Abbildung 6-5: Zusammenstellung von Bildsequenzen der Filmaufnahmen aller vier Versuche, Teil 4; $t=40$ ms.

Der in Abbildung 6-2 bis Abbildung 6-5 dargestellte Versuch wurde mit dem in dieser Arbeit entwickelten Werkstoffmodell numerisch simuliert. Um den Effekt der Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers bei der Versagensprognose zu bewerten, wurde zusätzlich eine Simulation ohne dieses Modellierungskonzept durchgeführt. Diese Simulation kommt Simulationen mit klassischen Versagensmodellen für duktile metallische Werkstoffe nahe (vgl. beispielsweise [65]).

Bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten (Impaktorgeschwindigkeit bei diesem Versuch: $5,4$ m/s) werden die Kraftsignale von den Trägheitseffekten dominiert. Sie sind daher zur Beurteilung der Modellierung wenig geeignet und im Anhang (Kapitel 9.3) dargestellt. Daher erfolgt die Beurteilung der Modellierung qualitativ anhand der

Verformungsbilder, die in Abbildung 6-6 bis Abbildung 6-17 als Bildsequenzen dargestellt sind. Der Vergleich von einem der Versuche mit der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers erfolgt in Abbildung 6-6 bis Abbildung 6-8 in der Rückansicht und in Abbildung 6-12 bis Abbildung 6-14 in der Draufsicht. Die Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers wird in Abbildung 6-9 bis Abbildung 6-11 und Abbildung 6-15 bis Abbildung 6-17 dem gewählten Versuch gegenübergestellt. In den Abbildungen befinden sich jeweils in den linken Spalten Bilder des Versuchs und rechts Abbildungen der FEM-Simulationen.

In der jeweils ersten Zeile Bildsequenzen ist das Demonstratorbauteil im unverformten Zustand kurz nach dem Auftreffen des Impaktors abgebildet. Der Versagensbeginn ist jeweils in Zeile zwei erkennbar. Der Versagensort wird in der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers sehr gut vorhergesagt. Der Versagenszeitpunkt, qualitativ bewertbar an der Gesamtverformung des Bauteils, wird gut prognostiziert. Er liegt in der Simulation geringfügig vor dem Tatsächlichen; die Gesamtverformung ist im Versuch zu diesen Zeitpunkt etwas fortgeschrittener. In der jeweils dritten Zeile kann ein zweiter Versagensort ausgemacht werden. Die Ausbreitung des Risses vom ersten Versagensorts setzt aus und ein zweiter Riss direkt neben einem Auswerfererker an dem in den Bildern oberen Teil des Bauteils entsteht. Sowohl das Aussetzen der Ausbreitung des ersten Risses, als auch die Entstehung des zweiten Risses werden von der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers sehr gut berechnet. Auch hier liegt der Zeitpunkt der Versagensprognose geringfügig vor dem tatsächlichen Zeitpunkt. Das Bild in der dritten Zeile links zeigt, dass der am Auswerfererker entstandene Riss im Versuch bis zum Rand des Bauteils fortgeschritten ist. Dieses Verhalten weist auch der Riss in der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers auf. Der Durchriss des oberen Flansches des Bauteils wird qualitativ von der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers gut wiedergeben, allerdings bei einer etwas geringeren Verformung. Der gesamte Durchriss des oberen Teils des Bauteils hingegen wird von der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers bei einer ähnlichen Verformung wie beim Versuch prognostiziert. Erst zu diesem Zeitpunkt wird der Versagensbeginn von der Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers vorhergesagt.

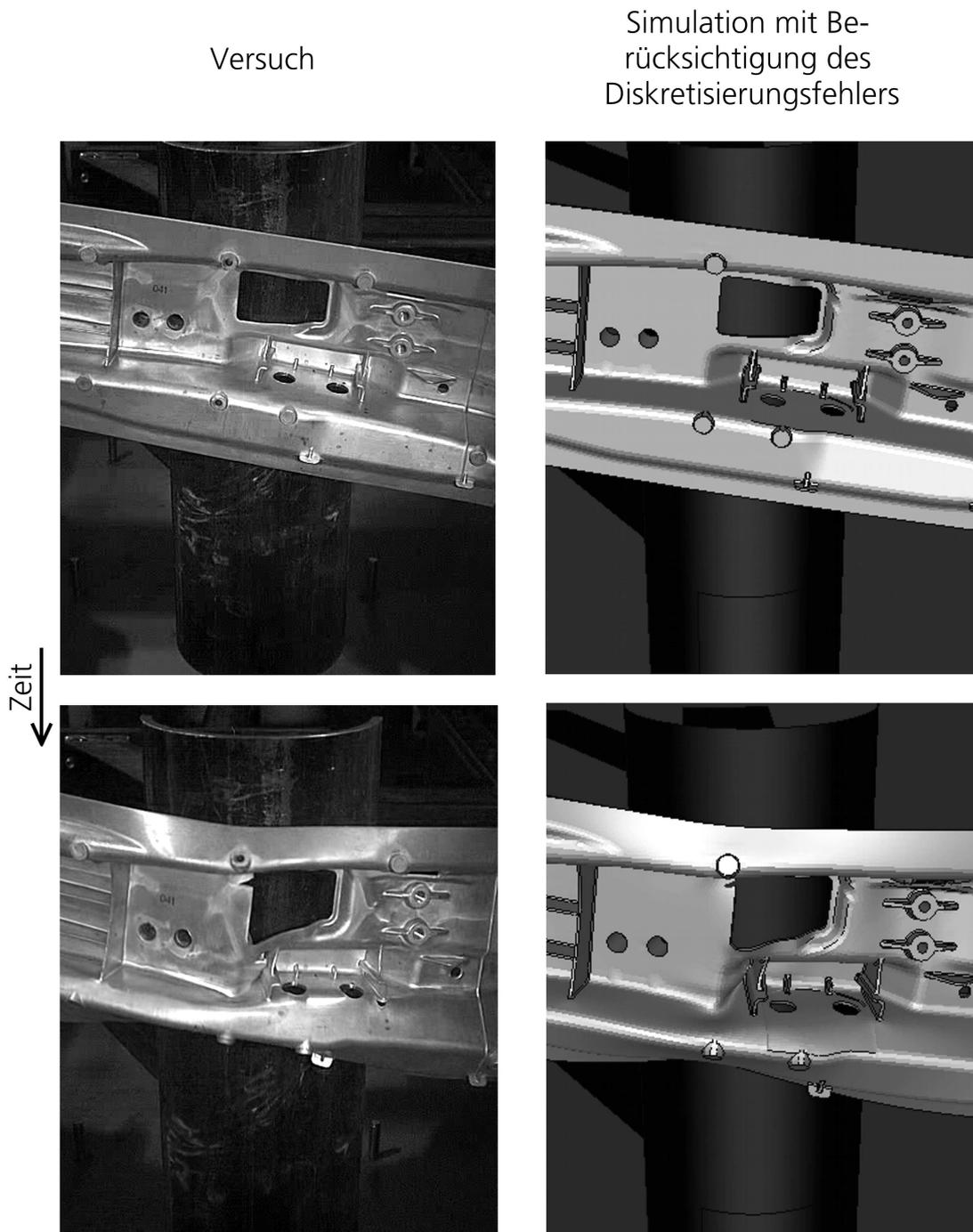


Abbildung 6-6: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Rückansicht (Teil 1); $t=0$ ms (oben), $t=15$ ms (unten).

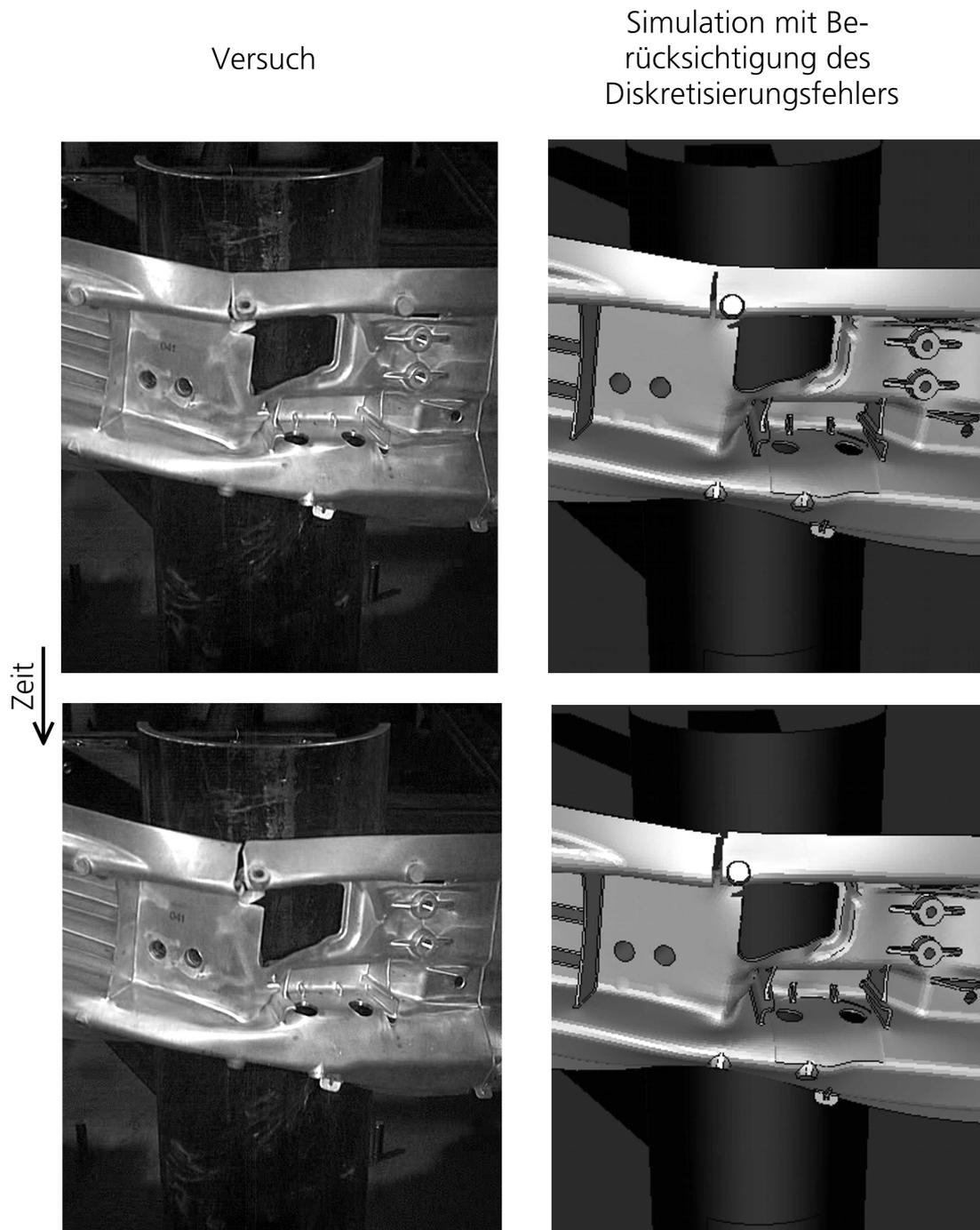


Abbildung 6-7: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Rückansicht (Teil 2); $t=16$ ms (oben), $t=18$ ms (unten).

Versuch



Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers

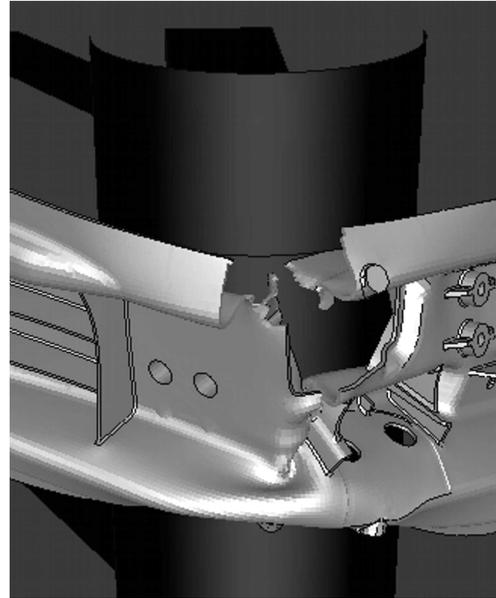


Abbildung 6-8: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Rückansicht (Teil 3); $t=40$ ms.

Versuch

Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers

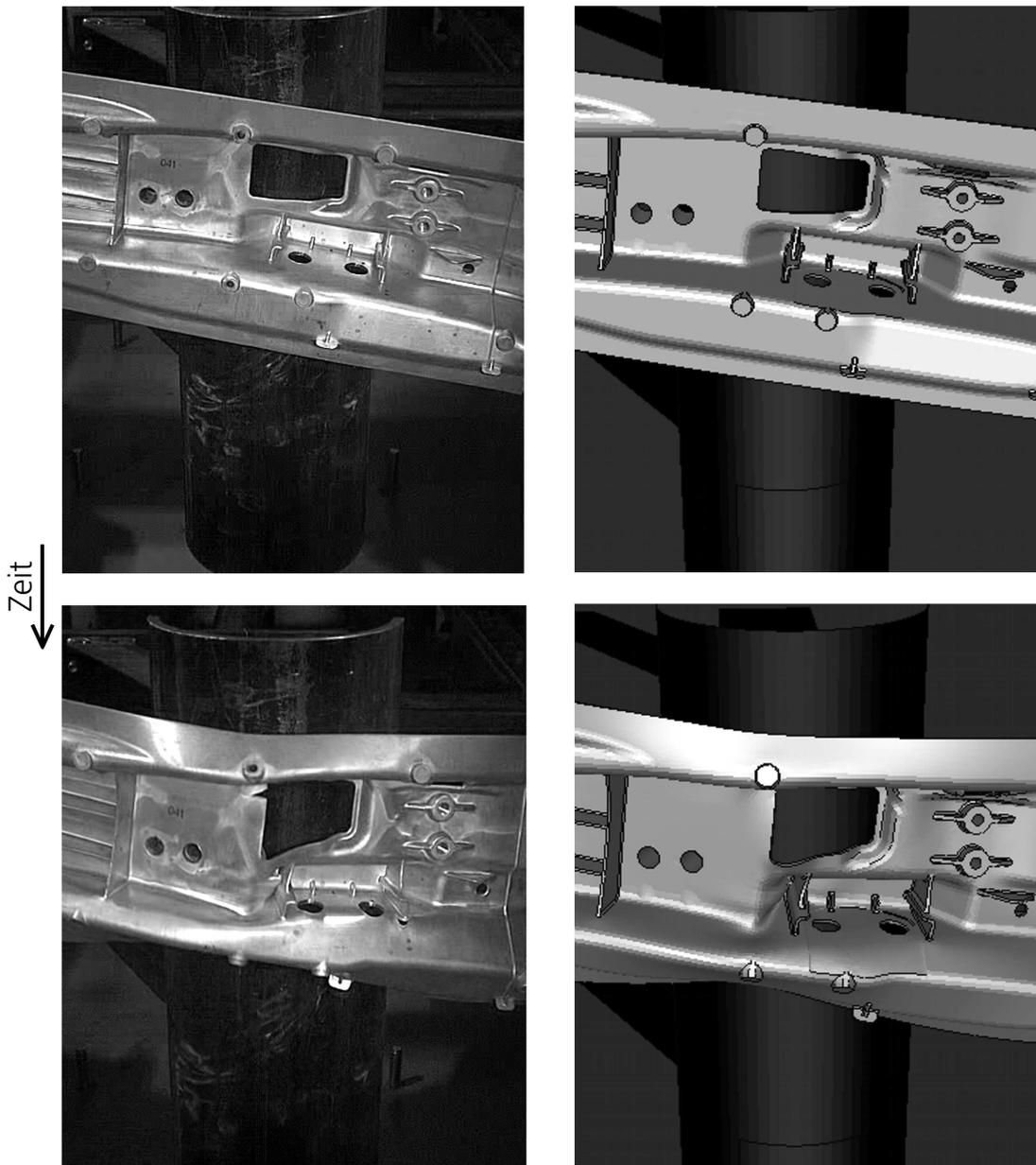


Abbildung 6-9: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Rückansicht (Teil 1); t=0 ms (oben), t=15 ms (unten).

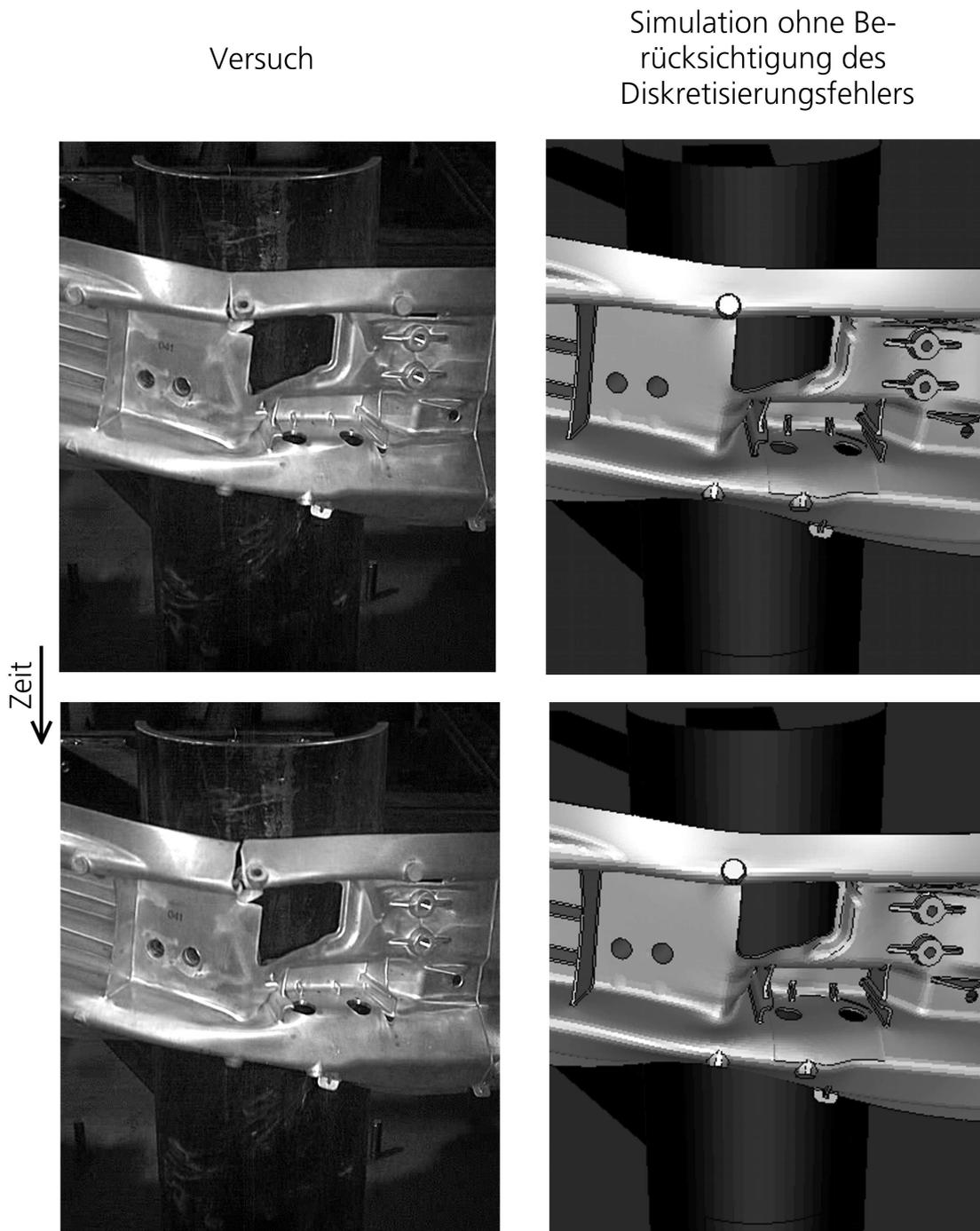


Abbildung 6-10: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Rückansicht (Teil 2); $t=16$ ms (oben), $t=18$ ms (unten).

Versuch



Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers

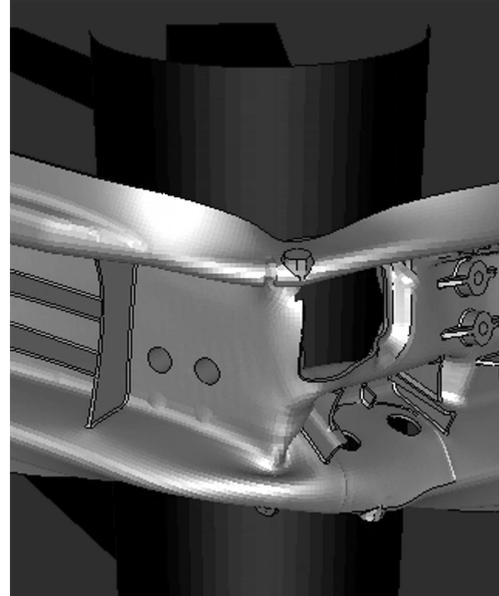


Abbildung 6-11: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Rückansicht (Teil 3); $t=40$ ms.

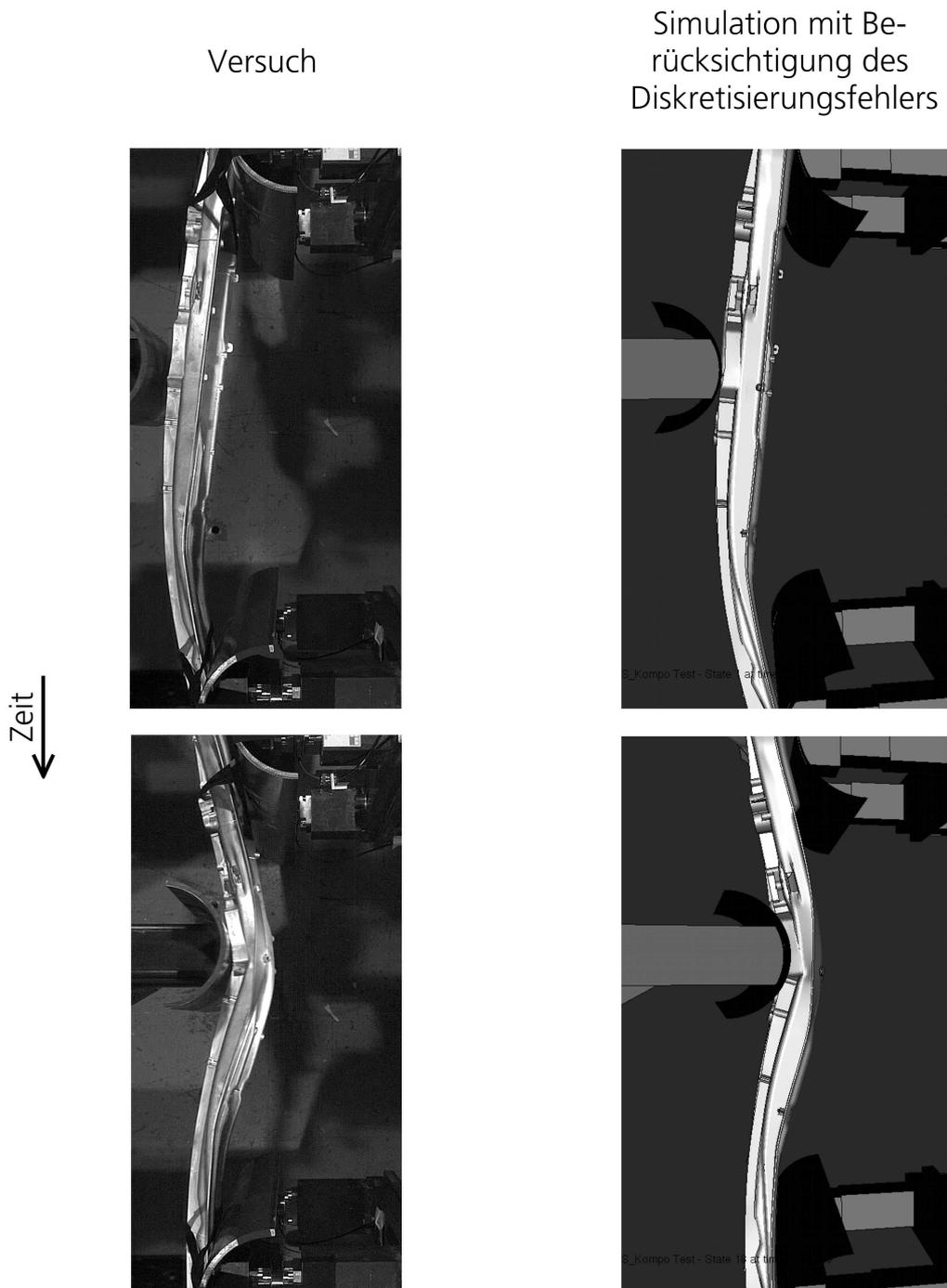


Abbildung 6-12: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Draufsicht (Teil 1); $t=0$ ms (oben), $t=15$ ms (unten).

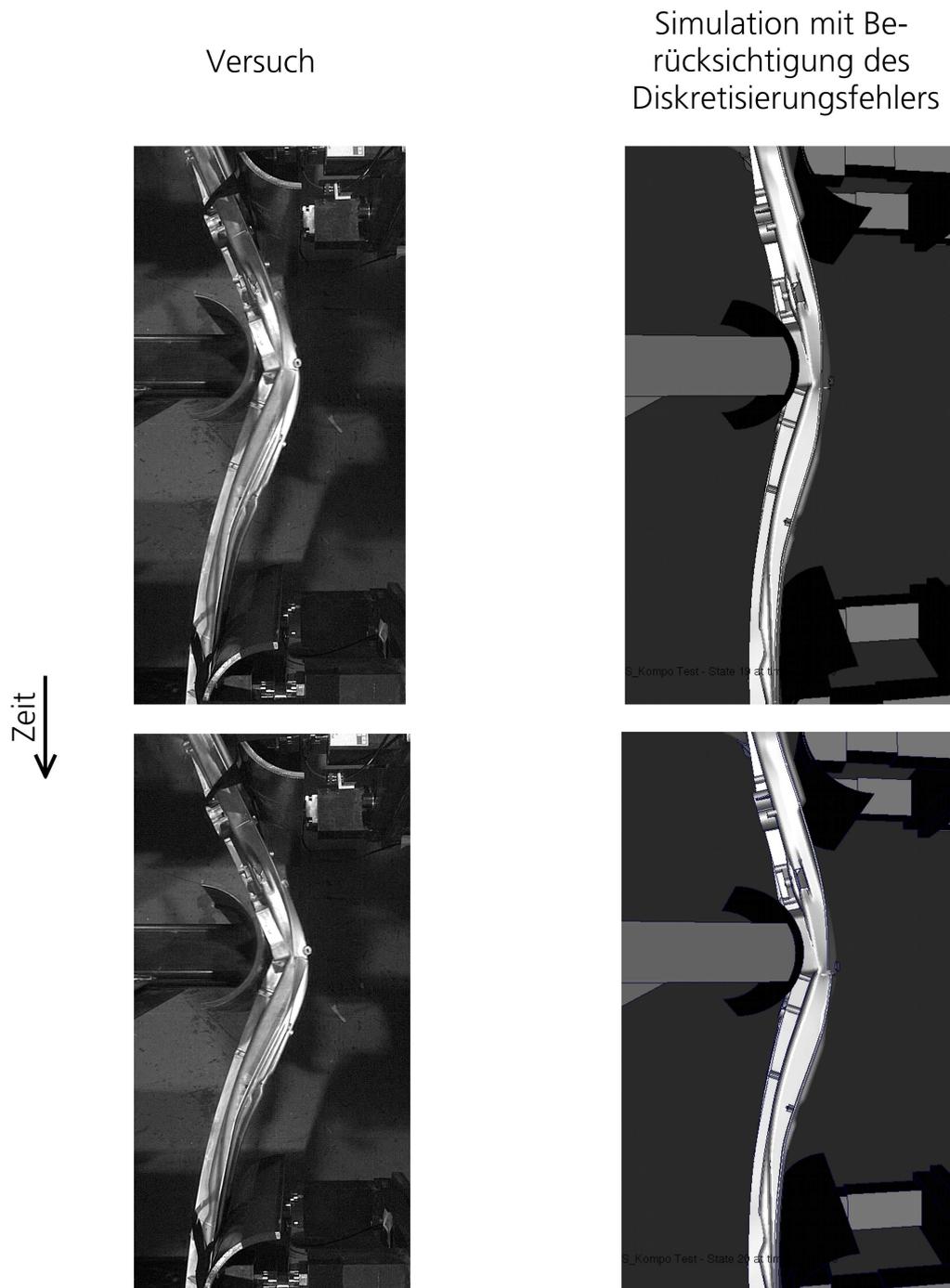


Abbildung 6-13: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Draufsicht (Teil 2); $t=16$ ms (oben), $t=18$ ms (unten).

Versuch



Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers



Abbildung 6-14: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Draufsicht (Teil 3); $t=40$ ms.

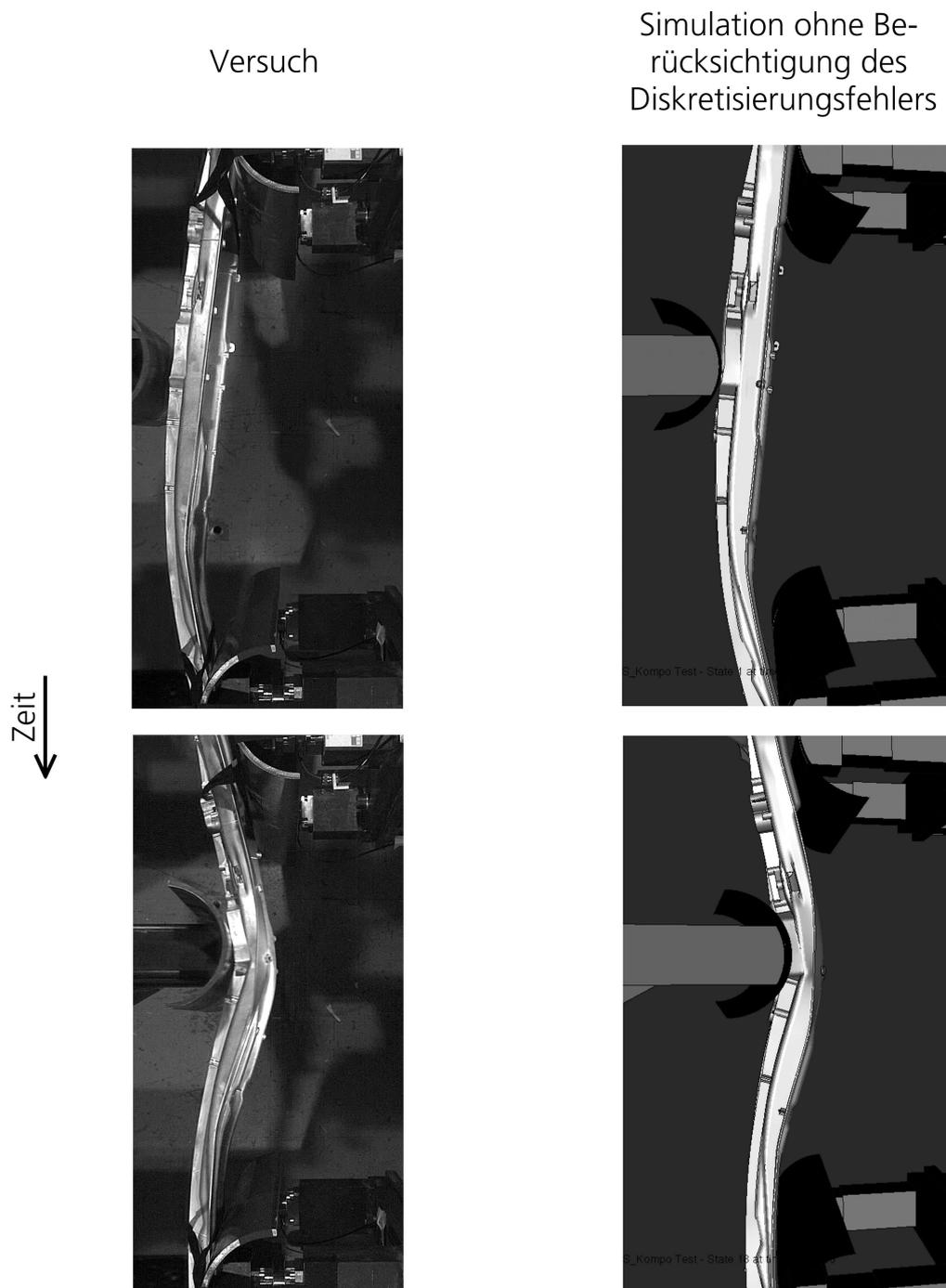


Abbildung 6-15: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Draufsicht (Teil 1); $t=0$ ms (oben), $t=15$ ms (unten).

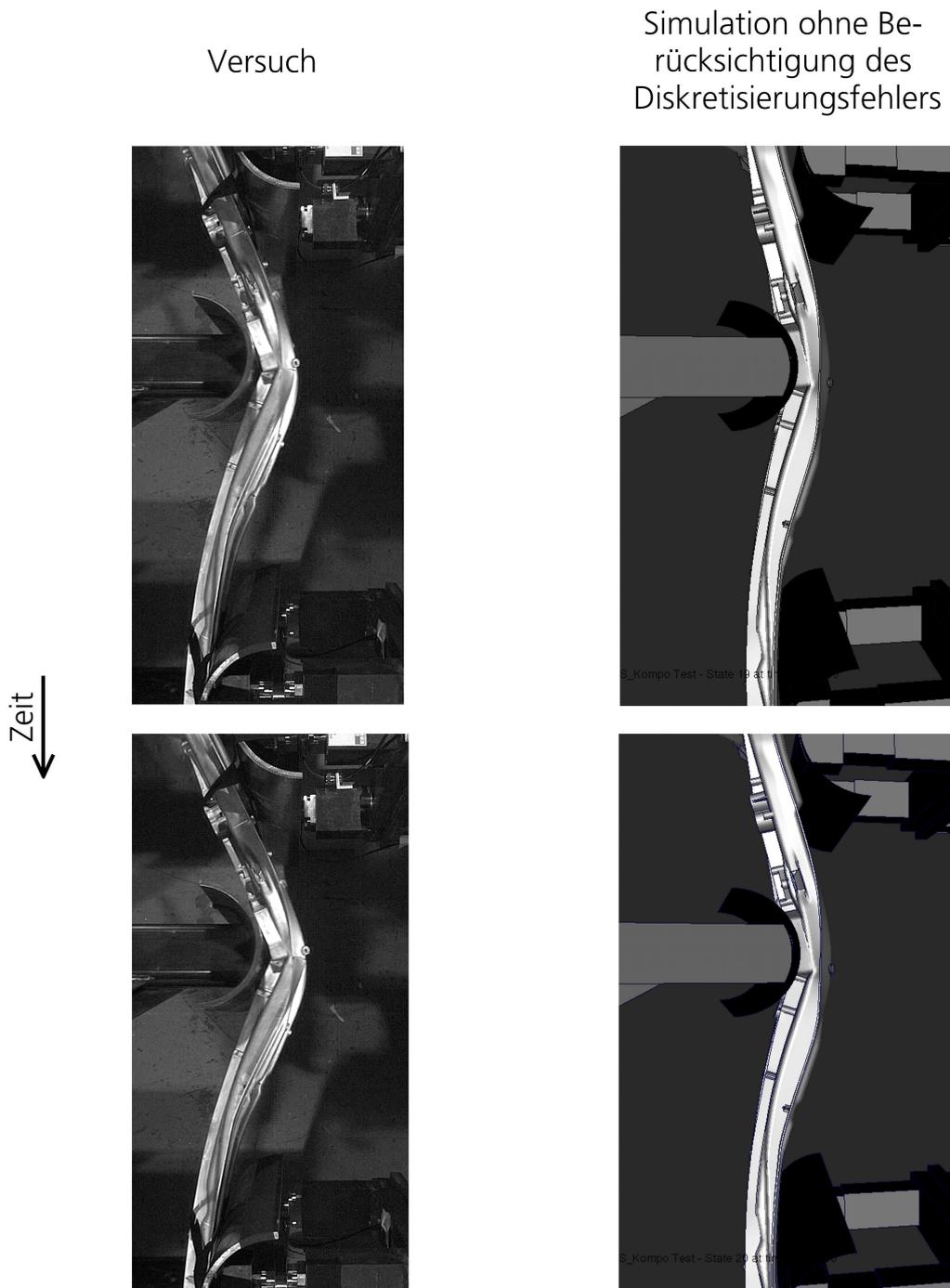
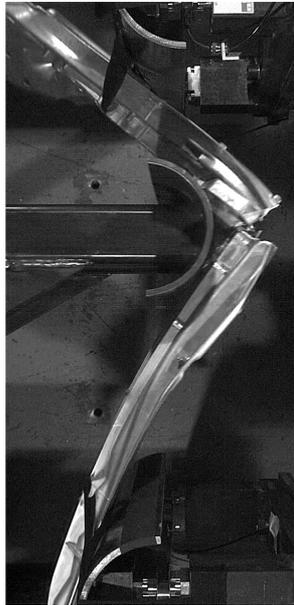


Abbildung 6-16: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Draufsicht (Teil 2); $t=16$ ms (oben), $t=18$ ms (unten).

Versuch



Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers



Abbildung 6-17: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen und Deformationsbilder aus dem Simulationsmodell – Draufsicht (Teil 3); $t=40$ ms.

6.2 Bewertung der Prognosegüte des Werkstoffmodells

Mit dem in dieser Arbeit entwickelten Werkstoffmodell ist eine sehr präzise Prognose des Bauteilverhaltens möglich. Dagegen ist mit den bislang bekannten Modellen, die allesamt den Diskretisierungsfehler nicht berücksichtigen, eine zuverlässige Simulation des Bauteilversagens nicht möglich.

Neben der sehr guten Vorhersage des Verformungsbildes gelingt mit dem neuen Werkstoffmodell ebenso eine sehr gute Prognose des Versagensverhaltens des Bauteils, wobei

- die Versagensorte,
- die Versagenszeitpunkte und auch

- der Versagensfortschritt

sehr genau abgebildet werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Folgenden werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst und abschließend auf mögliche zukünftige Untersuchungsfelder ausgeblickt.

7.1 Zusammenfassung

Das primäre Ziel der vorliegenden Arbeit bestand in der Entwicklung eines Werkstoffmodells für die Al-Druckgusslegierung GD-ALSi10Mg. Da die zur Entwicklung erforderlichen Methoden nur teilweise verfügbar oder verbesserungswürdig waren, bilden die Neuentwicklung und Optimierung von experimentellen und numerischen Methoden einen wesentlichen Schwerpunkt der Arbeit. Diese Methoden haben allgemein gültigen Charakter und können auch im Zusammenhang mit anderen Werkstoffen eingesetzt werden.

Analog zur Gliederung der Arbeit werden zunächst die Ergebnisse, die im Rahmen der Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens entstanden sind, zusammengefasst. Dann werden die bei der Versagensmodellierung erarbeiteten Resultate dargestellt und abschließend die Modellierung anhand einer ersten Anwendung bewertet.

Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens

Von zentraler Bedeutung bei der Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens sind die Fließfunktion und das plastische Potenzial. Eine Übersicht zur Charakterisierung des plastischen Verhaltens geeigneter Versuche verschafft Abbildung 4-1. Während einachsige Zugversuche und Schubversuche hinreichend validiert sind, erfordert der Einsatz von Kreuzzugversuchen eine genaue Untersuchung der für eine analytische Auswertung erforderlichen Homogenität der Spannungen im Messbereich. Daher erfolgte in dieser Arbeit die Optimierung und Validierung einer Kreuzzugprobengeometrie, die möglichst homogene Spannungszustände im Messbereich aufweist und bei der ein möglichst spätes Versagen des Krafteinleitungsbereichs eintritt. Eine der Proben ist schematisch und als Foto in Abbildung 4-8 dargestellt. Die Validierung erfolgte anhand des Vergleichs der analog zum Versuch berechneten

Spannung mit der mit der FEM berechneten Spannung im Messbereich, vgl. Abbildung 4-6 und Abbildung 4-7.

Weiterhin sind das Verfestigungsverhalten des Werkstoffs aufgrund der Dehn- und Dehnratenverfestigung zu bestimmen. Bei dynamisch durchgeführten Zugversuchen stellt sich aufgrund der schlagartigen Belastung ein stark schwingungsbehaftetes Signal ein, das eine genaue Bestimmung der Verfestigungskurve bei hohen Dehnraten kaum zulässt. Daher wurde die Durchführung dynamischer Zugversuche zur Bestimmung der Dehnratenverfestigung optimiert, indem die Krafteinleitung nicht schlagartig, sondern kontinuierlich mit steigender Geschwindigkeit erfolgt. So können die Schwingungen im Kraftsignal eliminiert werden, weshalb die Dehnratenverfestigung mit einer höheren Genauigkeit als bisher bestimmt werden kann, vgl. Abbildung 4-14. Diese modifizierte Versuchsdurchführung bietet einen weiteren Vorteil: Unter der Annahme einer dehnratenunabhängigen Dehnverfestigung kann mit nur einem Versuch der gesamte Dehnratenbereich bis zur höchsten im Versuch erreichten Dehnraten abgedeckt werden, vgl. Abbildung 4-23.

Mithilfe dieser und anderer Versuchsmethoden wurden die Fließfläche und das plastische Potenzial des untersuchten Werkstoffs AlSi10MnMg experimentell bestimmt (Abbildung 4-24 a-c). Die experimentellen Daten zeigen, dass das Fließverhalten der Legierung assoziiert ist und sich am besten mit einer nicht-quadratischen Fließfunktion mit einem Exponenten $n=8$ beschreiben lässt. Die Dehnverfestigung wird als isotrop angenommen und mit einer numerischen Optimierung über den Höchstkraftpunkt (CONSIDÈRE-Bedingung) hinaus bestimmt. Sie ist in Abbildung 5-15 dargestellt. Die Genauigkeit dieser numerischen Versuchsauswertung zeigt die sehr gute Übereinstimmung der Messdaten mit den entsprechenden Größen einer FEM-Berechnung des Versuchs, vgl. Abbildung 5-17. Die Dehnratenverfestigung des Werkstoffs wird mit 0,07 MPas als näherungsweise linear modelliert.

Die voll-implizite Lösung einer nicht-quadratischen Fließfunktion gemäß Gl. 4-10 erfordert eine analytische Bestimmung der Eigenwerte. In dieser Arbeit sind die bestehende (auf spurlose Tensoren beschränkte) und eine alternative Formulierung (für allgemeine Tensoren gültige) hinsichtlich des Konvergenzverhaltens mit verschiedenen Lösungsverfahren untersucht worden, vgl. Tabelle 4-2. Mit der hier vorgeschlagenen Formulierung für allgemeine Spannungszustände konvergiert das Lösungsverfahren in allen geprüften Fällen. Dahingegen wird mit der bisher verwendeten

Formulierung für spurlose Tensoren nur bei 58% der geprüften Fälle eine Lösung gefunden.

Die umfangreiche Verifikation belegt die Genauigkeit des in dieser Arbeit implementierten Algorithmus. Insbesondere die implizite Lösung der Dehnratenverfestigung weist große Genauigkeitsvorteile gegenüber der expliziten Lösung auf, vgl. Abbildung 4-28.

Versagensmodellierung

Für die Versagenscharakterisierung ist eine notwendige Voraussetzung, dass das Versagen der Proben an den Stellen beginnt, an denen die erwünschten Spannungszustände vorliegen. Abscherversuche zeigen nicht dieses notwendige Verhalten: Bei diesem Versuchstyp beginnt Versagen am Probenrand, wo eine Zugspannungsspitze vorliegt. Daher wurde in dieser Arbeit ein neuer Schubversuch mit kreuzförmigen Proben entwickelt, bei dem Versagen an der Stelle der Proben beginnt, an der eine Schubbeanspruchung vorliegt, nämlich in der Probenmitte. Der Versagensort wurde mit Aufnahmen einer Hochgeschwindigkeitskamera identifiziert und somit der Versuch validiert. In Abbildung 5-14 sind der Versagensort und die Rissausbreitung bei diesem Versuch dargestellt. Der zur Durchführung dieses neuen Versuchstyps eingesetzte Versuchsaufbau ist in Abbildung 5-7 und Abbildung 5-8 als Modell dargestellt. Mittels zweier Übergreifer wird eine paarweise Zug-/Druck-Belastung der Probe erzeugt.

Mit diesem und anderen validierten, d. h., hinsichtlich des korrekten Versagensortes überprüft und als gültig angesehenen, Versuchen wurde das Versagensverhalten der vorliegenden Legierung charakterisiert. Dabei wurden auch die beanspruchten Querschnitte der Proben miteinander verglichen. Nur Versuche mit vergleichbaren beanspruchten Querschnitten wurden zur Modellierung des Versagensbeginns herangezogen, da anderenfalls die Überlagerung von Größeneffekten die Ergebnisse verfälschen würden. Die Modellierung erfolgte spannungsbasiert in Abhängigkeit von der Spannungsmehrachsigkeit, wobei die Vergleichsspannung mit einem Fließfunktionsexponenten von $n=8$ als Versagenskenngröße verwendet wurde.

Um überhaupt eine Versagensprognose mithilfe der FEM unter Verwendung expliziter Zeitintegration bei komplexen Bauteilen zu ermöglichen, wurde in der vorliegenden Arbeit ein Modellierungskonzept

entwickelt, das den Diskretisierungsfehler beim Einsatz lokal nicht-konvergierter Netze berücksichtigt. Eine Versagensbewertung erfolgt hier auf Basis einer Abschätzung des Diskretisierungsfehlers. Abbildung 5-29 und Abbildung 5-30 zeigen einerseits die Notwendigkeit des Einsatzes eines solchen Modellierungskonzeptes (vgl. dazu auch Abbildung 1-7) und andererseits die deutliche Verbesserung in der Versagensprognose, die mit dem hier vorgestellten Ansatz erreicht werden.

Anwendung

Eine erste Anwendung des Werkstoffmodells erfolgte bei einem dynamischen Komponentenversuch an einem Demonstratorbauteil. Hier bewies das neu entwickelte Modell eine sehr präzise Prognose des Verformungsbildes und des Versagensverhaltens des Bauteils. In Abbildung 6-6 bis Abbildung 6-8 sind der Versuch und die Simulation mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Versagensmodell mit Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers gegenübergestellt.

Insbesondere die zuverlässige Prognose von Bauteilversagens ist ohne die hier vorgestellte Berücksichtigung des lokalen Diskretisierungsfehlers, wie es in keinem bislang bekannten Werkstoffmodell geschieht, nicht möglich.

7.2 Ausblick

Das in dieser Arbeit entwickelte Werkstoffmodell zeigt in einer Anwendung an einem Komponentenversuch sehr gute Ergebnisse. Die Modellierung von Baugruppen oder gar ganzen Fahrzeugen birgt jedoch noch einige Herausforderungen:

- Trotz des Konzeptes der Versagensbewertung unter Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers ist eine bestimmte Mindestauflösung der Diskretisierung der Bauteile erforderlich. Die Bestimmung dieser Auflösung bei anderen Verformungsarten wie beispielsweise dem Faltenbeulen, sowie die Beurteilung der Handhabbarkeit solcher Modelle müssen noch erfolgen.
- Daneben muss die Abbildung der Verbindungstechnik verbessert werden. Bei einer geometrischen Abbildung der Verbindung kann das hier entwickelte Werkstoffmodell eingesetzt werden. Als

wichtige Aufgaben stehen hier allerdings noch die Bestimmung der Werkstoffeigenschaften bzw. Werkstoffzustände infolge des Verbindungsprozesses im Raum. So ist beispielsweise die Ermittlung der Eigenspannungs- und Verformungszustände bei Nietverbindungen eine unverzichtbare Voraussetzung zur Erfolg versprechenden Anwendung des hier erstellten Werkstoffmodells zur Prognose von Versagen von Nietverbindungen.

In dieser Arbeit wurde die Schädigung und Rissausbreitung nicht näher betrachtet, da der Einfluss der Modellierung des elastisch-plastischen Verhaltens und des Versagensbeginns als entscheidender angesehen wird. Des Weiteren existiert bereits eine Vielzahl von Untersuchungen und Modellierungsansätzen zu diesen Phänomenen. Dennoch würde die Berücksichtigung der Schädigung und Rissausbreitung mittels geeigneter Regularisierungsmethoden die in dieser Arbeit durchgeführte Modellierung sinnvoll ergänzen.

8 Literatur

- [1] AINSWORTH, M., ODEN, J.T.: Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000
- [2] AKIN, J.E.: Finite Element Analysis with Error Estimation, Draft 4.1. Houston: Rice University, Department of Mechanical Engineering, 2003
- [3] ALBERTINI, C., BRUSA, F., DEL GRANDE, A., MOGLIEVSKI, M., PIZZINATO, E. V., QUIK, M., SCHNABEL, W., CRUTZEN, Y., INZAGHI, A., CARAVATI, D.: Dynamic Uniaxial and Quasi-Static Biaxial Tensile Properties of Aluminium Alloy AA7108, Technical Note No. I.96.148, Joint Research Centre, Ispra, Italy, 1996
- [4] Aluminium-Zentrale: Aluminium-Taschenbuch, Band 1: Grundlagen und Werkstoffe. Düsseldorf: Aluminium-Verlag, 1995.
- [5] ARCAN, M.: A New Method for the Analysis of Mechanical Properties of Composite Materials. Third International Congress on Experimental Mechanics, Los Angeles (1973).
- [6] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T., GANGARAJ, S. K., UPADHYAY, C. S.: Eta percent superconvergence in the interior of locally refined meshes of quadrilaterals – superconvergence of the gradient in finite element solutions of Laplace and Poisson equations. *Appl. Num. Math.*, 16, 3-49, 1994
- [7] BAO, Y., WIERZBICKI, T.: On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space, *International Journal of Mechanical Sciences*, 46, 81-98, 2004
- [8] BAO, Y., WIERZBICKI, T.: Determination of the fracture locus for the 2024t351 Aluminum, *Impact & Crashworthiness Laboratory, Report No. 81, MIT*, 2002
- [9] BARLAT, F., LEGE, D.J., BREM, J.C.: A Six-Component Yield Surface for Anisotropic Materials, *Int. J. of Plasticity*, 7, 693-712, 1991
- [10] BARLAT, F., LIAN, J.: Plastic Behavior and stretchability of sheet metals. Part 1: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions, *Int. J. of Plasticity*, 5, 51-66, 1989
- [11] BARLAT, F., MAEDA, Y., CHUNG, K., YANAGAWA, M., BREM, J.C., HAYASHIDA, Y., LEGE, D.J., MATSUI, K., MURTHA, S.J., HATTORI, S., BECKER, R.C., MAKOSEY, S.: Yield Function Development for

- Aluminum Alloy Sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, 45, 1727-1763, 1997
- [12] BARLAT, F., BECKER, R.C., HAYASHIDA, Y., MAEDA, Y., YANAGAWA, M., CHUNG, K., BREM, J.C., LEGE, D.J., MATSUI, K., MURTHA, S.J., HATTORI, S.: Yielding Description for Solution Strengthened Aluminum Alloys. *Int. J. of Plasticity*, 13, 385-401, 1997
- [13] BARLAT, F., BREM, J.C., YOON, J.W., CHUNG, K., DICK, R.E., LEGE, D.J., POURBOGHRAAT, F., CHOI, S.-H., CHU, E.: Plane stress yield function for aluminium alloy sheets – part 1: theory. *International Journal of Plasticity*, 19, 2003
- [14] BATHE, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2002.
- [15] BAŽANT, Z. P., PLANAS, J.: *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials*. CRC Press LLS, 1998.
- [16] BENSON, D.J.: *Computational methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99, (1992), 235-394
- [17] BERNAUER, G., BROCKS, W., MÜHLICH, U., STEGLICH, D., WERWER, M.: Hinweise zur Anwendung des Gurson-Tvergaard-Needleman-Modells. Geesthacht: Technical Note GKSS/WMG/99/10, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht, 1999
- [18] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik: Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2001.
- [19] BETTEN, J.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. Stuttgart: B.G. Teubner Stuttgart, 1987
- [20] BISHOP, J.F.W., HILL, R.: A Theoretical Derivation of the Plastic Properties of a Polycrystalline Face-Centred Metal.
- [21] BLECK, W.: *Werkstoffprüfung in Studium und Praxis*. Mainz: Verlag Mainz, Wissenschaftsverlag Aachen, Institut für Eisenhüttenkunde der RWTH-Aachen, 1999
- [22] BRIDGEMANN, P.: *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1964
- [23] BRON, F., BESSON, J.: A yield function for anisotropic materials – Application to aluminum alloys, *Int. J. of Plasticity*, 20, 937-963, 2004

- [24] BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A., MUSIOL, G., MÜHLIG, H.: Taschenbuch der Mathematik. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch, 1993
- [25] CHEN, W.F., HAN, D.J.: Plasticity for Structural Engineers. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1988.
- [26] CHRISTLEIN, J., SCHÜLER, L.: Audi Space Frame 2. Generation: Realisierung eines zukunftsweisenden Leichtbau-Karosseriekonzepts mithilfe der Simulation. Entwicklungen im Karosseriebau, VDI Berichte 1543, Düsseldorf, 2000
- [27] CRISFIELD, M.A.: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2001
- [28] CRISFIELD, M.A.: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2: Advanced Topics. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2001
- [29] DE BORST, R.: Computational strategies for strongly curved and non-smooth yield criteria with application to localisation of deformation. Swansea: Computational plasticity, Pineridge Press, 237-261, 1989
- [30] DELL, G.D.: Bruchdeformationen des verformten Metalles. Fisika i tehnika visokich dawlenij, 11, 28-32, 1983
- [31] DELL, H., GESE, H., KEBLER, L., WERNER, H., HOOPUTRA, H.: Continuous Failure Prediction Model for Nonlinear Load Paths in Successive Stamping and Crash Processes. SAE 2001 World Congress, Michigan, 2001
- [32] DELL, H., GESE, H.: Werkstoffmodelle für die Simulation des Stanznietens, 2000
- [33] DEMMERLE, S., BOEHLER, J. P.: Optimal Design of biaxial tensile cruciform specimens, J. Mech. Phys. Solids, 41, 143-181, 1993
- [34] Der neue Audi A8, ATZ-Sonderheft, August 2002, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Wiesbaden, 2002
- [35] Der neue BMW 5er, ATZ-Sonderheft, August 2003, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Wiesbaden, 2003
- [36] DIN Taschenbuch 19: Materialprüfnormen für metallische Werkstoffe 1, Mechanisch-technologische Prüfverfahren (erzeugnisformunabhängig), Prüfmaschinen, Bescheinigungen. Beuth Verlag, Berlin, Wien, Zürich, 2003

-
- [37] DRUCKER, D. C.: A Definition of Stable Inelastic Material. *Journal of Applied Mechanics*, 26 (1959) 101-106.
- [38] EL-MAGD, E., GESE, H., THAM, R., HOOPUTRA, H., WERNER, H.: Fracture Criteria for Automobile Crashworthiness Simulation of Wrought Aluminium Alloy Components. *Materialwissenschaften und Werkstofftechnik*, 32 (2001) 712-724.
- [39] Ford GT:
http://www.ford.com/NR/rdonlyres/ebcqunzqbvrxelxvegkevphdu35oj35vuabflufutuii466yy6tsvl6sqb4q5mrfuyv33dfolvhsh7rtryxknyrcyhff/innovation_reportC.pdf
- [40] Fraunhofer IWM Jahresbericht 2003, S.30
<http://www.iwm.fhg.de/publikationen/publikationen.html>
- [41] GEBBEKEN, N., RUPPERT, M.: On the Safety and Reliability of High Dynamic Hydrocode Simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, 839-851, 1999
- [42] GEBBEKEN, N.: Einführung in die Methode der finiten Elemente. Vorlesungsmanuskript, Universität der Bundeswehr, München, Institut für Mechanik und Statik, WT 1999
- [43] GOLOGANU, M., LEBLOND, J. B., DEVAUX, J.: Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids-case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41, 1723-1754, 1993
- [44] GREEN, D. E., NEALE, K. W., MACEWAN, S. R., MAKINDE, A., PERRIN, R.: Experimental investigation of the biaxial behaviour of an aluminum sheet, *International Journal of Plasticity*, 20, 1677-1706, 2004
- [45] GROSS, D., SEELIG, T.: Bruchmechanik: mit einer Einführung in die Mikromechanik. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2001.
- [46] GURSON, A.L.: Continuum Theory of Ductile Rupture by Void nucleation and growth: Part 1 – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99, 2-15, 1977
- [47] HABRAKEN, A.-M.: Contributions to Constitutive Laws of Metals: Damage Models Applied to Metals. Département MSM, University Liège, 2001

- [48] HALLQUIST, J.O.: Theoretical Manual for Dyna3D. Lawrence Livermore National Laboratory, 1983
- [49] HANCOCK, J.W., MACKENZIE, A.C.: On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *J. Mech. Phys. Solids*, 24, 147-169, 1976
- [50] Heicofasteners
<http://www.heicofasteners.com/heicofasteners/prodselfpierce.htm>
- [51] HERSHEY, A.V., DAHLGREN, V.A.: The plasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Face-Centered Cubic Crystals. *Journal of Applied Mechanics*, 76, 241, 1954
- [52] HIERMAIER, S., SAUER, M., THOMA, K.: Predictive Crash Simulation Using Adaptive Finite Methods. VDI-Tagung Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, VDI-Berichte 1701, S. 2738, Würzburg, 01.02.10.2002
- [53] HILL, R.: The mathematical theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950.
- [54] HOFERLIN, E., VAN BAELE, A., VAN HOUTTE, P., STEYAERT, G., DE MARÉ, C.: Biaxial tests on cruciform specimens for the validation of crystallographic yield loci, *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81, 545-550, 1998
- [55] HORSTEMEYER, M. F., LATHROP, J., GOKHLAE, A. M., DIGHE, M.: Modeling Stress State Independent Damage Evolution in a Cast Al-Si-Mg-Aluminum Alloy. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 33, 31-47, 2000
- [56] HORSTEMEYER, M.F., GALL, K., DOLAN, K.W., WATERS, A., HASKINS, J.J., PERKINS, D.E., GOKHALE, A.M., DIGHE, M.D.: Numerical, experimental, non-destructive, and image analysis of damage progression in cast A356 aluminum notch tensile bars. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 39, 23-45, 2003
- [57] HOSFORD, W.F.: On the Crystallographic Basis of Yield Criteria. *Textures and Microstructures*, 26-27, 479-493, 1996
- [58] <http://netpbm.sourceforge.net/doc/ppm.html>
- [59] HUGHES, T.J.R.: The Finite Element Method: Linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1987
- [60] IOSIPESCU, N.: New accurate procedure for single shear testing of metals. *Journal of Materials*, 2 (1967) 537-566.

-
- [61] Jaguar XJ:
http://www.autofachmann.de/fachartikel/af_startseite_39734.html
- [62] JANSEN, J., BLÜMCKE, E., THOMA, K: Ein Werkstoffmodell für eine Al-Druckgusslegierung unter besonderer Berücksichtigung makroskopischer Defekte, *Giesserei*, 2/2005, Giesserei-Verlag GmbH, Düsseldorf, 2005
- [63] JIRÁSEK, M.: Numerical Modeling of Failure. Lecture Notes, UniBW München, 2000
- [64] JOHNSON, G.R., COOK, W.H.: A Constitutive Model and Data for Metals subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures. Proc. 7th Int. Symp. On Ballistics, 541, Den Haag, 1983
- [65] JOHNSON, G.R., COOK, W.H.: Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21, 32-48, 1985
- [66] JUNGINGER, M.: Charakterisierung und Modellierung unverstärkter thermoplastischer Kunststoffe zur numerischen Simulation von Crashvorgängen (Dissertation). Schriftenreihe Forschungsergebnisse aus der Kurzeitdynamik, Heft Nr. 3, ISBN 3-8167-6339-1, Fraunhofer IRB Verlag, 2004
- [67] KARAFILLIS, A.P., BOYCE, M.C.: A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids*, 41, 1859-1886, 1993
- [68] KELLY, D. A.: Problems in Creep Testing Under Biaxial Stress Systems, *J. Strain Anal.*, 11, 1, 1976
- [69] KRIEG, R.D., KRIEG, D.B.: Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model, *Journal of Pressure Vessel Technology*, 101, 510-515, 1977
- [70] KUWABARA, T., IKEDA, S., KURODA, K.: Measurement and analysis of differential work hardening in cold-rolled steel sheet under biaxial tension, *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81, 517-523, 1998
- [71] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.-L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge: Cambridge University Press: 1998

- [72] LIU, L. Y.: Shear test fixture design for orthotropic materials, USDA Forest Service, Forest Products Laboratory, 2000, www.fpl.fs.fed.us/documnts/pdf2000/liu00b.pdf
- [73] LUDWIK, P.: Elemente der technologischen Mechanik, Berlin, Springer, 1909
- [74] MACKENZIE, A.C., HANCOCK, J.W., BROWN, D.K.: On the influence of state of stress on ductile failure initiation in high strength steels. *Engineering Fracture Mechanics*, 9, 167 ff., 1977
- [75] MADSEN, K., NIELSEN, H. B., TINGLEFF, O.: Methods for Non-Linear Least Square Problems. Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 2004
- [76] MAEDA, Y., YANAGAWA, M., BARLAT, F., CHUNG, K., HAYASHIDA, Y., HATTORI, S., MATSUI, K., BREM, J.C., LEGE, D.J., MURTHA, S.J., ISHIKAWA, T.: Experimental analysis of aluminum yield surface for binary Al-Mg alloy sheet samples. *Int. J. of Plasticity*, 14, 301-318, 1998
- [77] MALVERN L. E.: Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1969.
- [78] MASE, E.M.: Schaum's Outline of Theory and Problems of Continuum Mechanics. New York: McGraw-Hill, Inc, 1970.
- [79] Mathematica
<http://documents.wolfram.com>
- [80] MATHIAK, F., KRAWIETZ, A., NOWACK, H., TRAUTMANN, K.-H.: Kreuzförmige, ebene Probe, insbesondere aus Blech für eine zweiachsige Materialprüfung im Bereich großer Dehnung, Anspruch 5, Internationales Patent, WO 90/13804, 1990
- [81] MCCLINTOCK, F.A.: A Criterion for Ductile Fracture by Growth of Holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35, 363-371, 1968
- [82] MEYERS, M.A.: Dynamic Behavior of Materials. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994
- [83] MinPack: <http://www.netlib.org/minpack/>
- [84] MISES, R. VON: Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse (1913) 582-592.
- [85] MITCHELL, G.P., OWEN, D.R.J.: Numerical solutions for elastic-plastic problems. *Eng. Comp.*, 5, 274-284, 1988

-
- [86] MIYAUCHI, K.: A proposal of a planar simple shear test in sheet metals. *Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research*, 78 (3), 27-40, 1984
- [87] MONAGAN, M. B., GEDDES, K. O., HEAL, K. M., LABAHN, G., VORKOETTER, S. M., MCCARROU, J., P., D.: *Maple 7 Programming Guide*. Waterloo Maple Inc., Waterloo, Canada, 2001
- [88] NAHME, H.: Neue Prüfeinrichtungen für mehrachsige und dynamische Werkstoffprüfung, *CrashMAT2002*, EMI, Freiburg, 15./16. April 2002
- [89] NGUYEN, Q.S.: *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2000
- [90] NORRIS, D. M. JR., MORAN, B., SCUDDER, J. K., QUIÑONES, D. F.: A Computer Simulation of the Tension Test. *J. Mech. Phys. Solids*, 26, 1-19, 1977
- [91] ORTIZ, M., POPOV, E.P.: Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 1561-1576, 1985
- [92] PAM-CRASH, Version 2000: *Theory Notes Manual*. Pam System International SA, 20, rue Saarinen, Silic 303, 94588 Rungis-Cedex, Frankreich.
- [93] PAM-CRASH, Version 2003: *Solver Notes Manual*. Pam System International SA, 20, rue Saarinen, Silic 303, 94588 Rungis-Cedex, Frankreich.
- [94] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*. Second Edition. Cambridge University Press, New York, 1992
- [95] RICE, J. R., TRACEY, D. M.: On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17, 201-217, 1969
- [96] RICE, J. R., TRACY, D. M.: *Computational Fracture Mechanics*, Proc. Symp. Num. Meth. Struct. Mech., Urbana, Illinois, 1971, (Ed. S. J. Fenves), 585, Academic Press, New York, 1973
- [97] RIEDEL, W.: *Beton unter dynamischen Lasten. Meso- und makromechanische Modelle und ihre Parameter. Schriftenreihe Forschungsergebnisse aus der Kurzzeitdynamik (Dissertation), Schriftenreihe Forschungsergebnisse aus der Kurzzeitdynamik, Heft Nr. 5, 3-8167-6340-5, Fraunhofer IRB Verlag, 2004*

- [98] ROHR, I.: Integrale Charakterisierung und Modellierung von duktilem Stahl unter dynamischen Lasten (Dissertation). Schriftenreihe Forschungsergebnisse aus der Kurzzeitdynamik, Heft Nr. 2, ISBN 3-8167-6397-9, Fraunhofer IRB Verlag, 2004
- [99] RUNESSON, K., STURE S., WILLIAM, K.: Integration in computational plasticity. *Computers & Structures*, 30, 119-130, 1988
- [100] SAUER, M.: Adaptive Kopplung des netzfreien SPH-Verfahrens mit finiten Elementen zur Berechnung von Impaktvorgängen. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 00/5. München: Universität der Bundeswehr, 2000.
- [101] SCHREYER, H.L., KULAK, R.F., KRAMER, J.M.: Accurate Numerical Solutions for Elastic-Plastic Models, *Journal of Pressure Vessel Technology*, 101, 226-234, 1979
- [102] SCHULER, H.: Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Schädigung von stoßbeanspruchtem Beton (Dissertation). Schriftenreihe Forschungsergebnisse aus der Kurzzeitdynamik, Heft Nr. 6, ISBN 3-8167-6463-0, Fraunhofer IRB Verlag, 2004
- [103] SCHWER, L. E.: Verification and Validation in Computational Solid Mechanics and the ASME Standards Committee,
- [104] SIMO, J.C., HUGHES, T.J.R.: *Computational Inelasticity*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1998
- [105] SMITH, I.M., GRIFFITHS, D.V.: *Programming the Finite Element Method*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1998
- [106] SNIR, M., STEVE, O., HUSS-LEDERMAN, S., WALKER, D., DONGARRA, J.: *MPI: The Complete Reference*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1996
- [107] STEIN, E., RAMM, E., RANK, E., RANNACHER, R., SCHWEIZERHOF, K., WENDLAND, W., WITTUM, G., WRIGGERS, P., WUNDERLICH, W.: *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2003
- [108] TAYLOR, L.M., FLANAGAN, D.P.: PRONTO 3D, A Three-Dimensional Transient Solid Dynamics Program. Albuquerque: Sandia Report SAND87 – 1912, 1989
- [109] TRESCA, H.: *Comptes Rendus. Acad. Sci. Paris*, 59, 754, 1864
- [110] TROOST, A.: *Einführung in die allgemeine Werkstoffkunde metallischer Werkstoffe I*. Zürich: B.I. Wissenschaftsverlag, 1984

-
- [111] TVERGAARD, V., NEEDLEMAN, A.: Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta metal.*, 32, 157-169, 1984
- [112] Vishay Tech Notes: Errors Due to Transverse Sensitivity in Strain Gages, TN-509
- [113] WERNER, H., HOOPUTRA, H., GESE, H., DELL, H., HEATH, A, PYTTEL, T., KEBLER, L, V. YELISSEYEV: Ein umfassendes Materialmodell für die Versagensbewertung in der Prozesskette Tiefziehen-Crash. CrashMAT2004, EMI, Freiburg, 27./28. April 2004
- [114] WIERZBICKI, T., BAO, WERNER, H.: Ductile Fracture – Theory, Calibration and Applications. Presentation at EuroPAM 2002, 2002
- [115] WILKINS, M. L.: Computation of elastic plastic flow. *Methods of Computational Physics*, 3, Academic Press, New York, 1964
- [116] WILKINS, M.L., STREIT, R.D., REAUGH, J.E.: Cumulative-Strain-Damage Model of Ductile Fracture: Simulation and Prediction of Engineering Fracture Tests. UCRL-53058, Lawrence Livermore Laboratory, 1980
- [117] WILKINS, M.L.: Computer Simulation of dynamic Phenomena. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1999.
- [118] WILLAM, K. J., WARNKE, E. P.: Constitutive Model for the triaxial behaviour of concrete, International Association of Bridge and Structural Engineers, Seminar on Concrete Structure Subjected to triaxial stresses, IABSE Proc. 19, Italy, 1975
- [119] WINKLER, R.: Aural-2, Druckgusslegierung für crashrelevante Struktur- und Fahrwerksteile. 24. Aalener Gießereisymposium 9.710. April 2003
- [120] ZIENKIEWICZ, O.C, ZHU, J.Z.: A Simple Error Estimator und adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 337-357, 1987
- [121] ZIENKIEWICZ, O.C.: *The Finite Element Method*. Maidenhead, Berkshire: McGraw-Hill Book Company, 1977.

9 Anhang

9.1 Modellierung der Lageabhängigkeit der Eigenschaften infolge makroskopischer Defekte [62]

9.1.1 Einleitung

Ein Materialmodell für Gusswerkstoffe muss grundsätzlich drei Phänomene in ihrem Zusammenspiel berücksichtigen:

- das ideal-typische Werkstoffverhalten
- die fertigungsbedingte Streuung
- die Lageabhängigkeit der Eigenschaften

Alle drei Phänomene werden durch den Fertigungsprozess in hohem Maße bestimmt. Das ideal-typische Verhalten kann durch eine gezielte Wärmebehandlung beeinflusst werden. Es ist weitgehend unabhängig vom Gießprozess und kann daher im Bauteilentwicklungsprozess A PRIORI für bestimmte Legierungen und Wärmebehandlungen bestimmt und modelliert werden. Eine solche Charakterisierung und Modellierung erfolgt für die hier betrachtete Legierung GD AlSi10MgMn T6 im Hauptteil dieser Arbeit. Die fertigungsbedingte Streuung und Lageabhängigkeit der Eigenschaften hingegen hängen maßgeblich vom Gießprozess ab, dessen wesentliche Bestimmungsgröße wiederum die Bauteilgeometrie ist. Die Bauteilauslegung, d.h. die geometrische Gestaltung, beeinflusst also den Fertigungsprozess und der wiederum die Bauteileigenschaften. Daher müssen im Sinne einer effizienten Bauteilentwicklung und Auslegung eines robusten Gießprozesses Fertigung und Funktionsauslegung virtuell gekoppelt werden. Einerseits müssen die Eigenschaften – dabei insbesondere die Phänomene Streuung und Lageabhängigkeit – mit der Gießsimulation vorhergesagt werden können, andererseits muss die Funktionssimulation, hier die Crashsimulation, diese Eigenschaften abbilden können. Zur Abbildung der Streuung in den Materialeigenschaften stehen bewährte stochastische Methoden zur Verfügung. Dahingegen ist die Abbildung der Lageabhängigkeit der Eigenschaften von Gussbauteilen infolge makroskopischer Defekte und deren Auswirkungen insbesondere auf das Versagensverhalten der

Bauteile für industrielle Anwendungen noch nicht zufrieden stellend gelöst. Die Entwicklung eines solchen Modellierungskonzepts wird im Folgenden vorgestellt.

Um das Modellierungskonzept zu validieren, sind Demonstratorbauteile mit gezielt herbeigeführten Poren und Lunkern gegossen worden. Dabei wurde die Gießsimulation zur Vorhersage von Poren und Lunkern verwendet. Durch experimentelle Bestimmung dieser makroskopischen Defekte mithilfe der Computer-Tomographie (CT) wurde die Gießsimulation validiert. Weiterhin sollen diese makroskopischen Defekte vereinfacht in der Crashsimulation abgebildet werden. Abbildung 9-1 veranschaulicht diese zentrale Aufgabe.

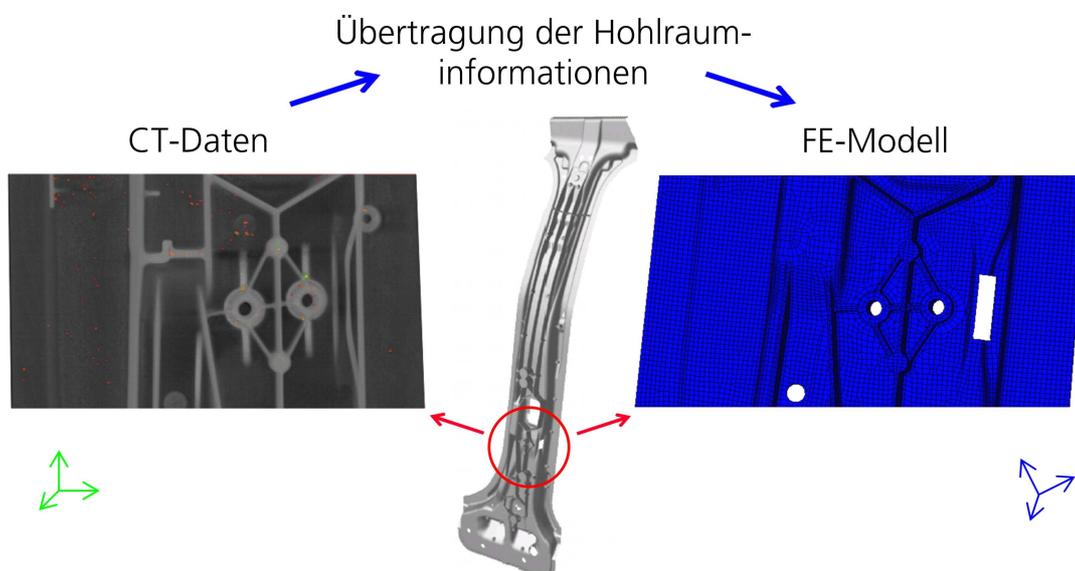


Abbildung 9-1: Übertragung der Hohlrauminformation von einem CT-Datensatz auf ein FE-Modell.

Anschließend wird die Abbildung dieser Defekte bewertet, indem dynamische Komponentenversuche der Demonstratorbauteile den entsprechenden Simulationen mit der Finiten Elemente Methode (FEM) gegenübergestellt werden.

9.1.2 Modellierungskonzept

Poren und Lunker wirken in Bauteilen als mesoskopische Kerben, an denen bei Beanspruchungen Spannungsspitzen entstehen. Sie sind strukturelle Einheiten der Bauteile und beeinflussen daher auch die Spannungsfelder in den Bauteilen. Andererseits hängen die Spannungs-

felder an diesen Kerben aber auch von der Bauteilstruktur ab. Diese Wechselwirkung kann nur abgebildet werden, wenn die Poren und Lunker als strukturelle Einheiten abgebildet werden, was bei einem makroskopischen Ansatz zur Modellierung des Einflusses der Hohlräume nicht der Fall ist. Weiterhin wird ein solcher makroskopischer Ansatz als nicht zielführend angesehen, da für alle denkbaren Spannungszustände Versagenskenngrößen in Abhängigkeit von der Porosität ermittelt werden müssten. Beispielsweise führen im einachsigen Zugversuch ermittelte Bruchdehnungen in Abhängigkeit von der Probenporosität nur dann zu richtigen Prognosen, wenn in den Bauteilen die gleichen Spannungszustände vorliegen wie bei den Zugversuchen.

Aus diesen Gründen wird in der vorliegenden Arbeit ein Ansatz verfolgt, bei dem die Poren und Lunker als strukturelle Einheiten aufgelöst werden, d.h. sie werden vom FE-Netz diskretisiert. Dabei wird für ein bestehendes FE-Modell für jedes Element der spezifische Hohlraum- bzw. Werkstoffanteil bestimmt. Die Festigkeitseigenschaften, d.h. die elastischen Konstanten und die Verfestigungskurve, jedes Elementes werden dann gemäß ihrem spezifischen Werkstoffanteil skaliert. Hohlräume, die in der Größenordnung der Elementkantenlänge liegen, werden also diskretisiert, indem den Elementen, die in ihnen liegen, gemäß ihrem spezifischen Hohlraumanteil von 1.0 keine Festigkeit zugewiesen wird. Kleinere Hohlräume werden mit der reduzierten Festigkeit einzelner Elemente abgebildet, wobei je nach Größe der Festigkeitsdiskontinuität eine entsprechende Spannungskonzentration um diese Elemente vorliegt. Die Berechnungen erfolgen dann mit den üblichen kontinuumsmechanischen Methoden, ohne dass die Versagenskriterien für die Elemente angepasst werden. Da die Diskretisierung der Hohlräume mit FE-Modellen, die eine industriell handhabbare Größe nicht überschreiten, nur relativ grob aufgelöst werden können, ist ein Versagensmodellierungsansatz, der die lokalen Diskretisierungsfehler berücksichtigt, bei dieser Vorgehensweise essenziell (vgl. Kapitel 1.3, 3.1 und 5.3.1).

9.1.3 Realisierung des Konzepts

Zur Übertragung der Hohlrauminformation von den CT-Daten der Demonstratorbauteile auf die FE-Modelle (vgl. Abbildung 9-1) wurde ein Computerprogramm erstellt, das automatisch auf die Bilddateien der CT-Daten zugreift und sie mit den Koordinateninformationen des FE-Modells verarbeitet.

Dabei sind die drei folgenden Schritte erforderlich:

- 1) Koordinatentransformation der CT-Daten in das Koordinatensystem des FE-Modells
- 2) Zuordnung jedes Hohlraumvoxels der CT-Daten zu einem bestimmten Element des FE-Modells
- 3) Berechnung der jeweiligen spezifischen Hohlraumanteile der Elemente und entsprechende Skalierung der Festigkeitseigenschaften

Koordinatentransformation

Als räumliche Information der CT-Daten dienen die Auflösung der einzelnen Bilder und der Abstand der Bilder des Bilderstapels untereinander. Damit und mit der Annahme eines Koordinatensystems – beispielsweise mit Ursprung in einer Ecke des ersten Bildes – kann die Lage der Voxel in Längeneinheiten in Bezug auf dieses Koordinatensystem angegeben werden. Die Lage der Elemente des FE-Modells ist bereits auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogen. Allerdings sind in der Regel die Koordinatensysteme der Voxel der CT-Daten und der Elemente des FE-Modells nicht dieselben, vgl. Abbildung 9-1. Daher werden die Voxelkoordinaten der CT-Daten in das Koordinatensystem des FE-Modells transformiert. Diese Transformation ist vollständig durch die Koordinaten dreier nicht kollinearere Punkte in den beiden Koordinatensystemen beschrieben. Die Bestimmung der Transformationsmatrix erfolgt gemäß einer bekannten Vorgehensweise unter Verwendung der GRAM-SCHMIDT-Formel.

Zuordnung der Hohlräume zu den Elementen

Die Bestimmung des elementspezifischen Hohlraumanteils erfolgt durch eindeutige Zuordnung jedes Voxels des CT-Datensatzes, das einen Hohlraum repräsentiert, zu einem Volumenelement. Der hier gewählte Entscheidungsalgorithmus ist in Abbildung 9-2 anschaulich dargestellt.

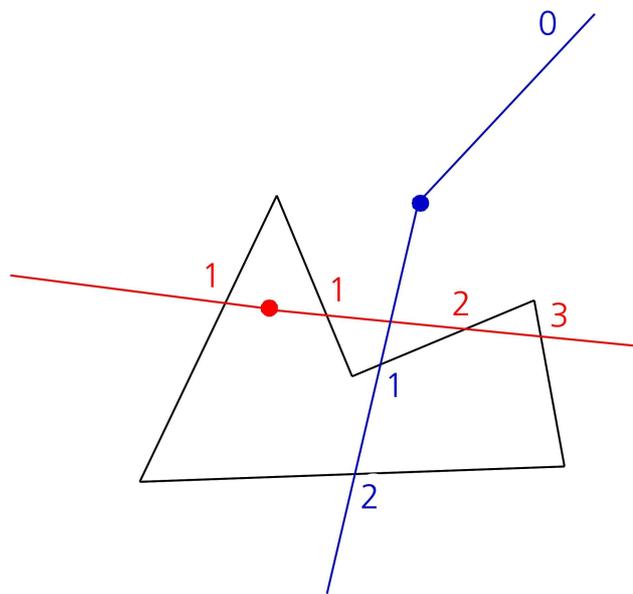


Abbildung 9-2: Konzept des Entscheidungsalgorithmus – wenn die Anzahl der Schnitte eines beliebigen Strahls von dem Punkt mit der Begrenzung des Gebietes ungerade ist, dann liegt der Punkt in dem Gebiet.

Dabei wird die Anzahl der Schnitte eines beliebigen von dem zu prüfenden Voxel ausgehenden Strahls mit einem jeweiligen Element ermittelt. Wenn die Anzahl der Schnitte des Strahls mit der Berandung des Elementes ungerade ist, liegt das Voxel im Element.

Bestimmung der spezifischen Hohlraumanteile

Nachdem das Volumen jedes Voxels als Hohlraumvolumen dem entsprechendem Element zugeschrieben ist, wird der spezifische Hohlraumanteil für jedes Element berechnet. Die Elemente werden abschließend in frei definierbaren Stufen gruppiert, denen dann die jeweils skalierten Festigkeitseigenschaften zugeordnet werden können.

Abbildung 9-3 zeigt das Ergebnis einer wie vorhergehend beschriebenen Abbildung von Hohlräumen in einem FE-Modell. Links sind die Hohlräume im FE-Modell visualisiert, wobei das FE-Modell durchscheinend dargestellt ist, und die Hohlraumvoxel durch rote Punkte repräsentiert werden.

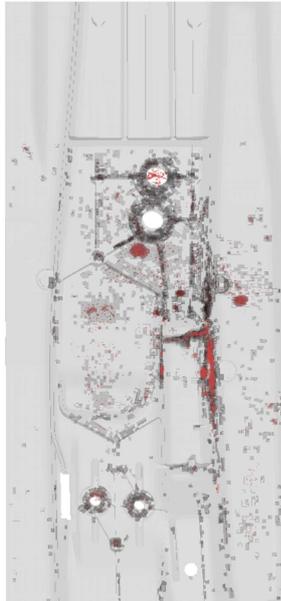
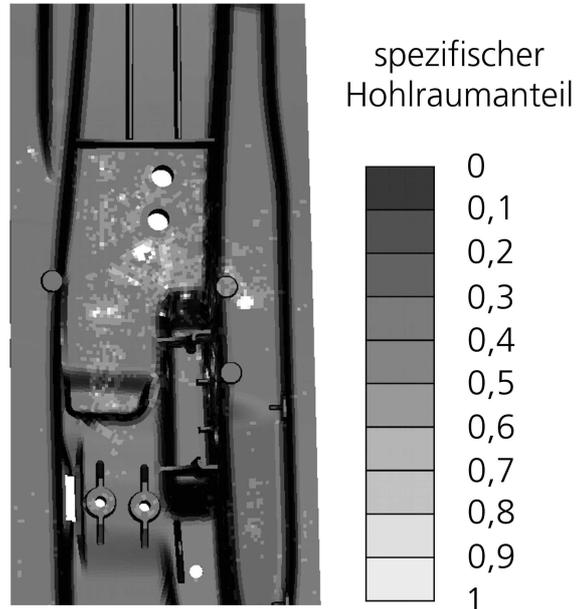
Visualisierte Hohlräume
im FE-ModellFE-Modell mit hohlraum-
anteilspezifischen Elementgruppen

Abbildung 9-3: Ergebnis der Übertragung der Hohlrauminformationen von CT-Daten auf ein FE-Modell.

Auf der rechten Seite ist ein FE-Modell mit hohlraumanteilspezifischen Elementgruppen abgebildet. Insgesamt wurden 11 Stufen gewählt, um die skalierten Festigkeitseigenschaften der Elemente zu gruppieren. Hohlraumfreie Elemente sind schwarz dargestellt, Elemente, die vollständig in einem Hohlraum liegen, weiß. Eine detaillierte Darstellung erfolgt in Abbildung 9-4.

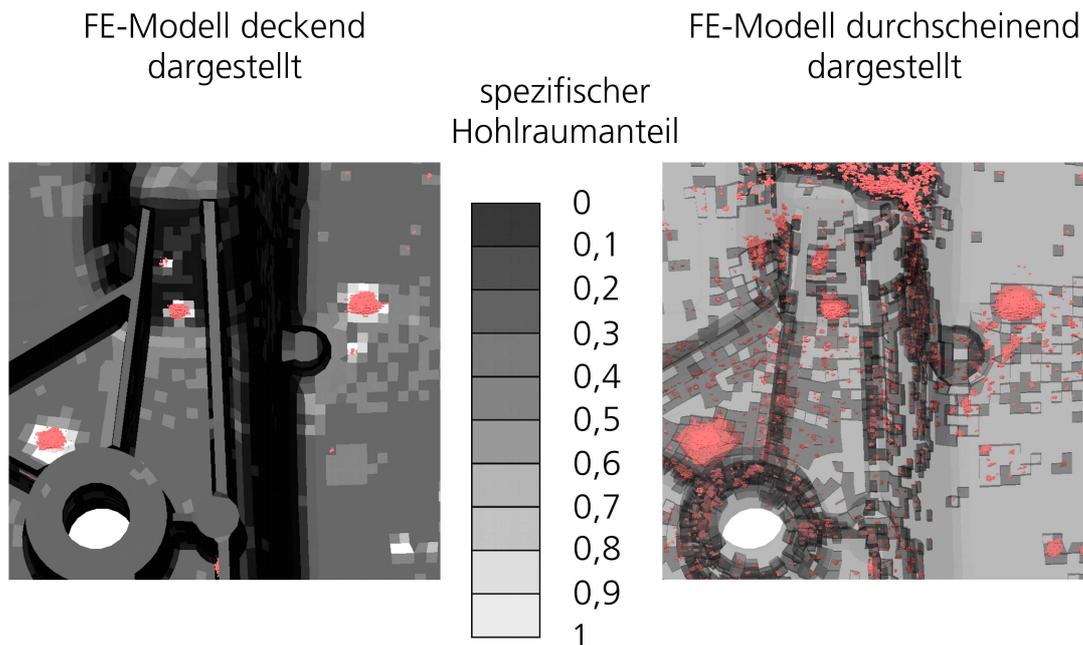


Abbildung 9-4: Detaillierte Darstellung einer Übertragung der Hohlrauminformationen von CT-Daten auf ein FE-Modell.

Hier sind die Hohlräume als rote Punkte dem FE-Modell mit den hohlraumanteilspezifischen Elementgruppen überlagert. Die großen Hohlräume werden wie oben beschrieben vollständig diskretisiert, indem die Elemente, die in ihnen liegen, keine Festigkeit aufweisen (weiß dargestellt).

9.1.4 Anwendung

Die Anwendung der in dieser Arbeit beschriebenen Modellierung erfolgte bei dynamischen Komponentenversuchen, die mit den gezielt mit hoher Porosität gegossenen Demonstratorbauteilen durchgeführt wurden. Der Versuchsaufbau wird in Kapitel 6 beschrieben. Die Impaktorgeschwindigkeit betrug bei dem hier dargestellten Versuch etwa 5,2 m/s. Da bei dieser Geschwindigkeit die Kraftsignale von den Trägheitseffekten dominiert werden, kann die Beurteilung der Modellierung am besten qualitativ anhand der Verformungsbilder erfolgen, die in Abbildung 9-5 als Bildsequenz dargestellt sind. Diese Abbildung enthält links Bilder des Demonstratorbauteils während des Versuchs und rechts Bilder aus der FEM-Simulation.

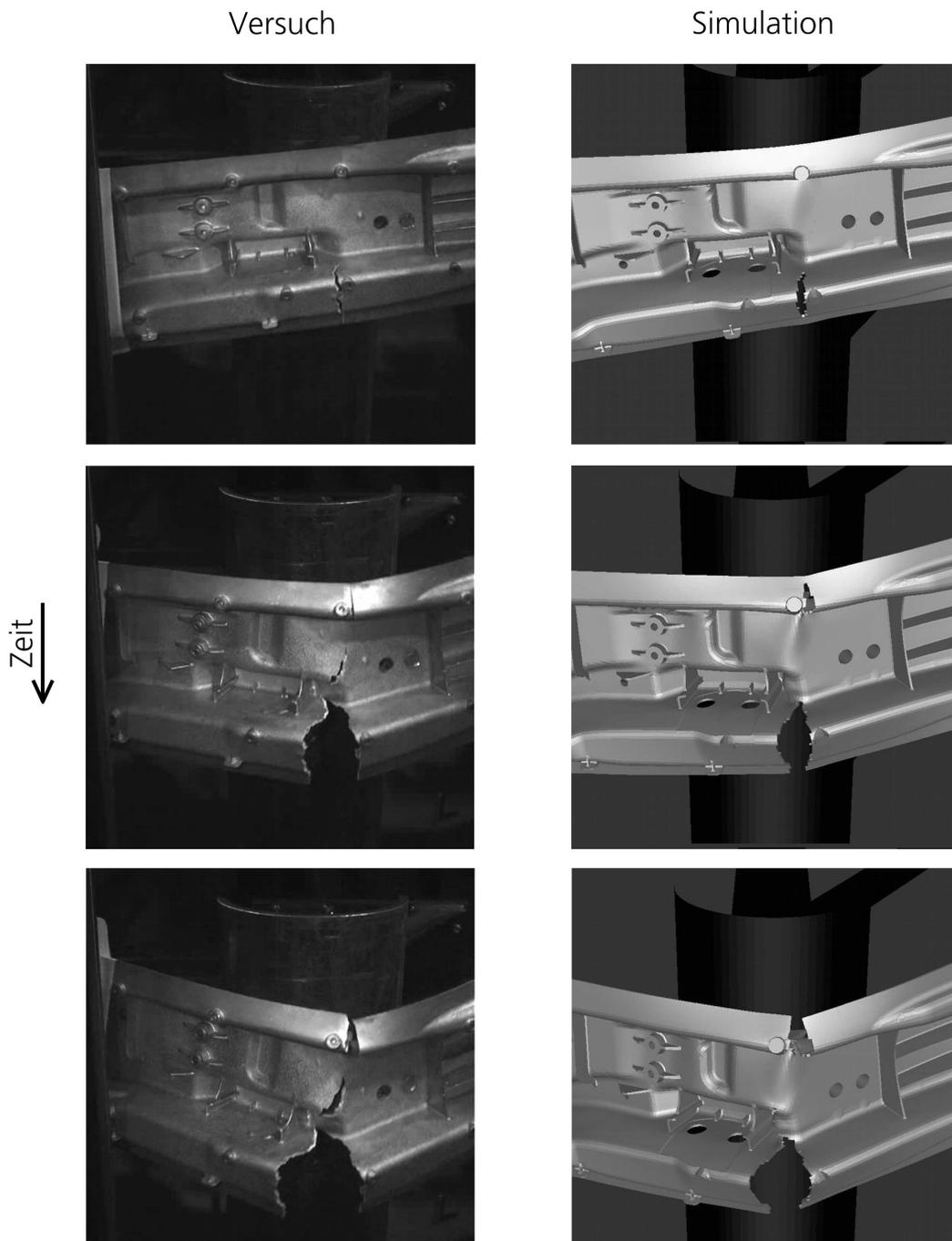


Abbildung 9-5: Qualitativer Vergleich des Versuchs mit der Simulation anhand Einzelbilder der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen.

Das Versuchsbild in der zweiten Zeile zeigt, dass das Versagen sehr früh bei kaum erkennbarer Gesamtverformung des Bauteils beginnt. Das Versagen wird von einer großen Gasporosität (vgl. auch Abbildung 9-3) verursacht, die an dem unverformten Bauteil oben links in Abbildung 9-5 durch die typische kleine Ausbeulung erkennbar ist, die während der Wärmebehandlung an Gasporosität nahe der Bauteiloberfläche entsteht. In

der Simulation, zweites Bild oben rechts, wird das Versagensbild sehr gut vorhergesagt. Das Versagen erfolgt hier geringfügig später als im Versuch, was sich in der etwas fortgeschritteneren Gesamtverformung des Bauteils äußert. Versuche und Simulationen ohne die Modellierung der Hohlräume zeigen einen anderen Versagensort, vgl. Kapitel 6. Er würde also ohne die Abbildung der Hohlräume im FE-Modell nicht getroffen werden. Auch wäre ohne die Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers die gute Prognose des Versagenszeitpunktes nicht möglich. Denn aufgrund der zu groben FE-Diskretisierung wird die Höhe der Spannungsspitzen um die Pore vom FEM-Algorithmus stark unterschätzt.

Im Versuch entstehen dann Risse in der Bauteilmitte, vgl. das Bild in der dritten Zeile links in Abbildung 9-5. Diese Risse werden in der Simulation nicht vorhergesagt, aber das Auftreten einer weiteren Bruchstelle oben am Bauteil wird wieder gut getroffen. Die Versagensbilder zeigen eine gute Übereinstimmung, der Versagenszeitpunkt ist – wieder ersichtlich durch Vergleich der Gesamtverformung – etwas früher als im Experiment.

Insgesamt wird das Versagensverhalten des Demonstratorbauteils qualitativ sehr gut wiedergegeben.

9.1.5 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt ist die Modellierung einer Al-Druckgusslegierung unter besonderer Berücksichtigung makroskopischer Defekte wie Poren und Lunker vorgestellt worden. Zu Validierungszwecken wurden Demonstratorbauteile gezielt mit hoher Porosität gegossen, die mit CT-Untersuchungen quantifiziert wurde.

Die Modellierung der Hohlräume erfolgt durch ihre Diskretisierung im FE-Netz. Dabei wird für jedes Element der spezifische Hohlraumanteil ermittelt und die Festigkeit gemäß des verbleibenden spezifischen Werkstoffanteils skaliert. So werden größere Hohlräume tatsächlich modelliert, und Hohlräume, die kleiner als die Elemente sind, werden durch Festigkeitsdiskontinuitäten an den jeweiligen Elementen angenähert. Zur Validierung dieses Ansatzes wurden die gezielt in die Demonstratorbauteile eingebrachten Hohlräume in FE-Modelle mit einem zu diesem Zweck erstellten Computerprogramm automatisiert

übertragen. Abschließend wurden Simulationen mit diesen Modellen dynamischen Komponentenversuchen mit den Demonstratorteilen gegenübergestellt. Die Bewertung der Versagensprognose erfolgt durch Vergleich der Versagensbilder, die mit einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgenommen wurden.

Insgesamt ermöglicht ein Modellierungsansatz, der die Diskretisierung der Hohlräume im FE-Netz vorsieht, in Verbindung mit einer Versagensmodellierung, die den lokalen Diskretisierungsfehler berücksichtigt, sehr gute Versagensprognosen.

Ausblick

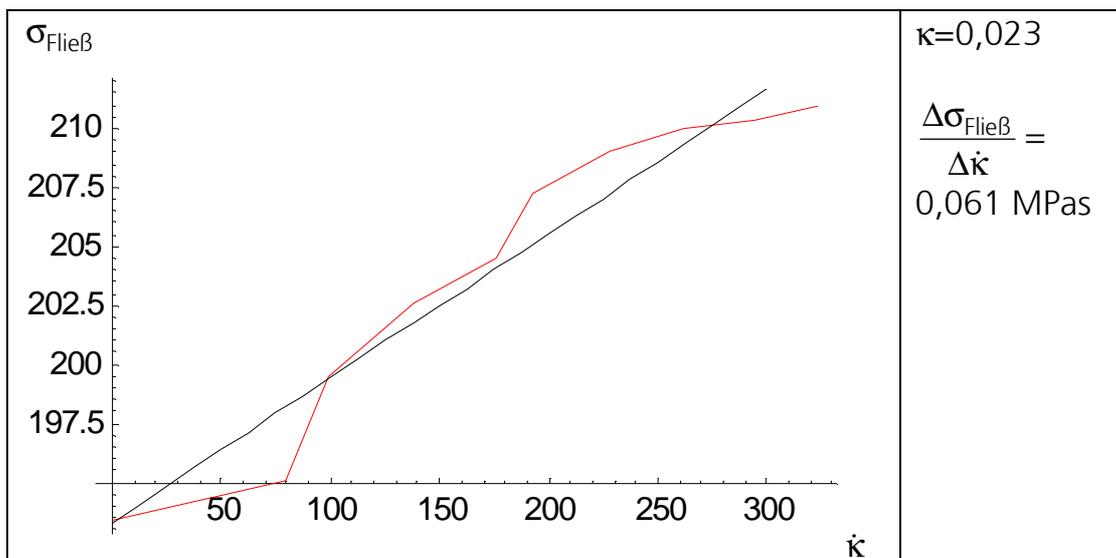
Die das Versagen der Demonstratorbauteile bestimmenden Hohlräume sind relativ zu den Elementen groß, sie können gut diskretisiert werden. Eine Untersuchung, bis zu welcher Hohlraumgröße die hier vorgestellte Modellierung zufrieden stellende Ergebnisse liefert, wird als weiterer sinnvoller Schritt angesehen. Dabei müssten Demonstratorbauteile mit einer geringeren Porosität hergestellt werden.

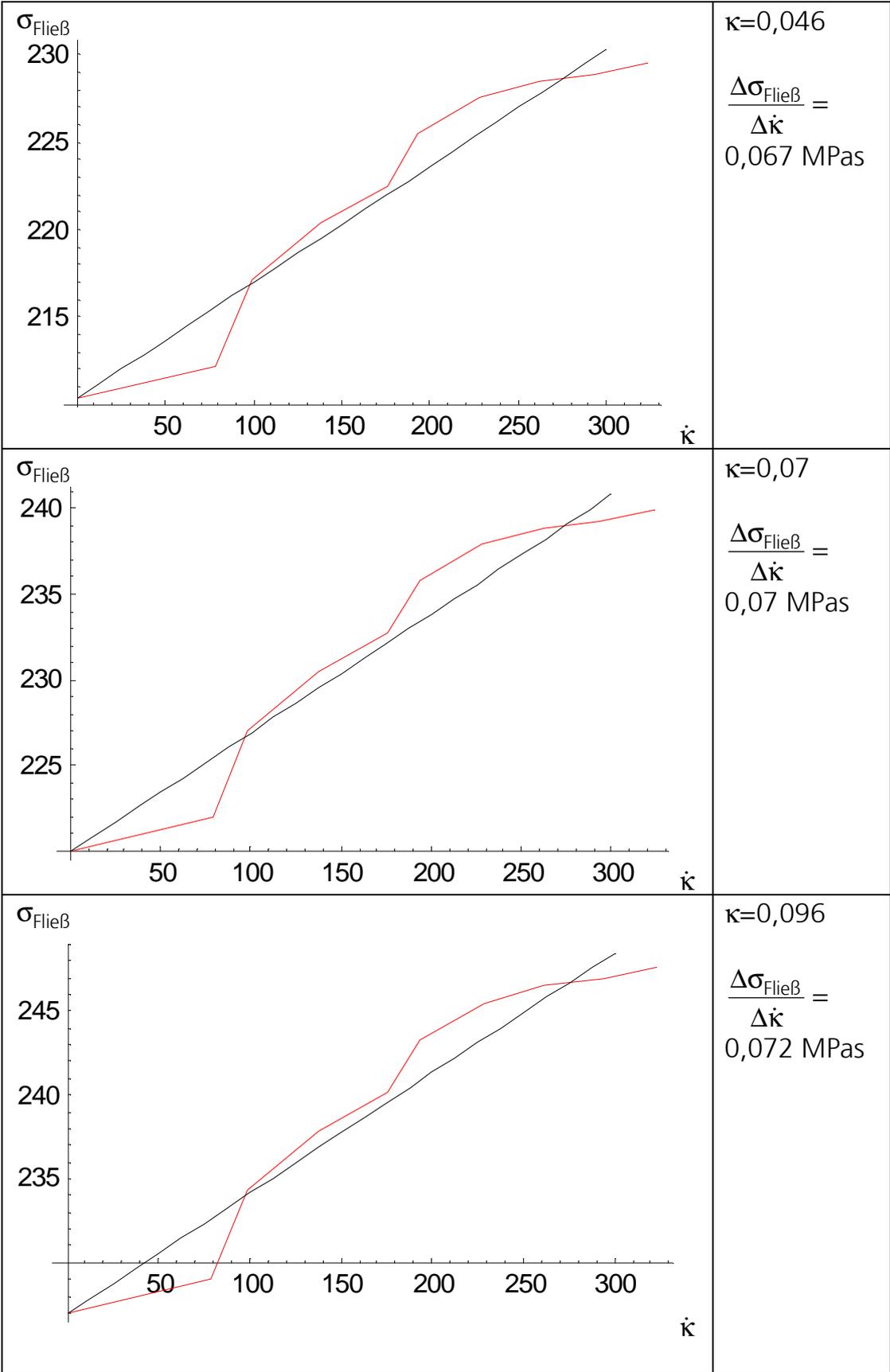
Fernziel der Arbeiten zu dieser Thematik ist es, eine ausreichend prognosefähige geschlossene virtuelle Kette zwischen Gießsimulation und Eigenschaftssimulation aufzubauen. Die hier zur Validierung beider Methoden eingesetzte Schnittstelle, nämlich die CT-Daten, steht im virtuellen Bauteilentwicklungsprozess natürlich nicht zur Verfügung. Insbesondere bei der Weiterentwicklung der Prognosefähigkeit der Gießsimulation besteht hier noch Handlungsbedarf.

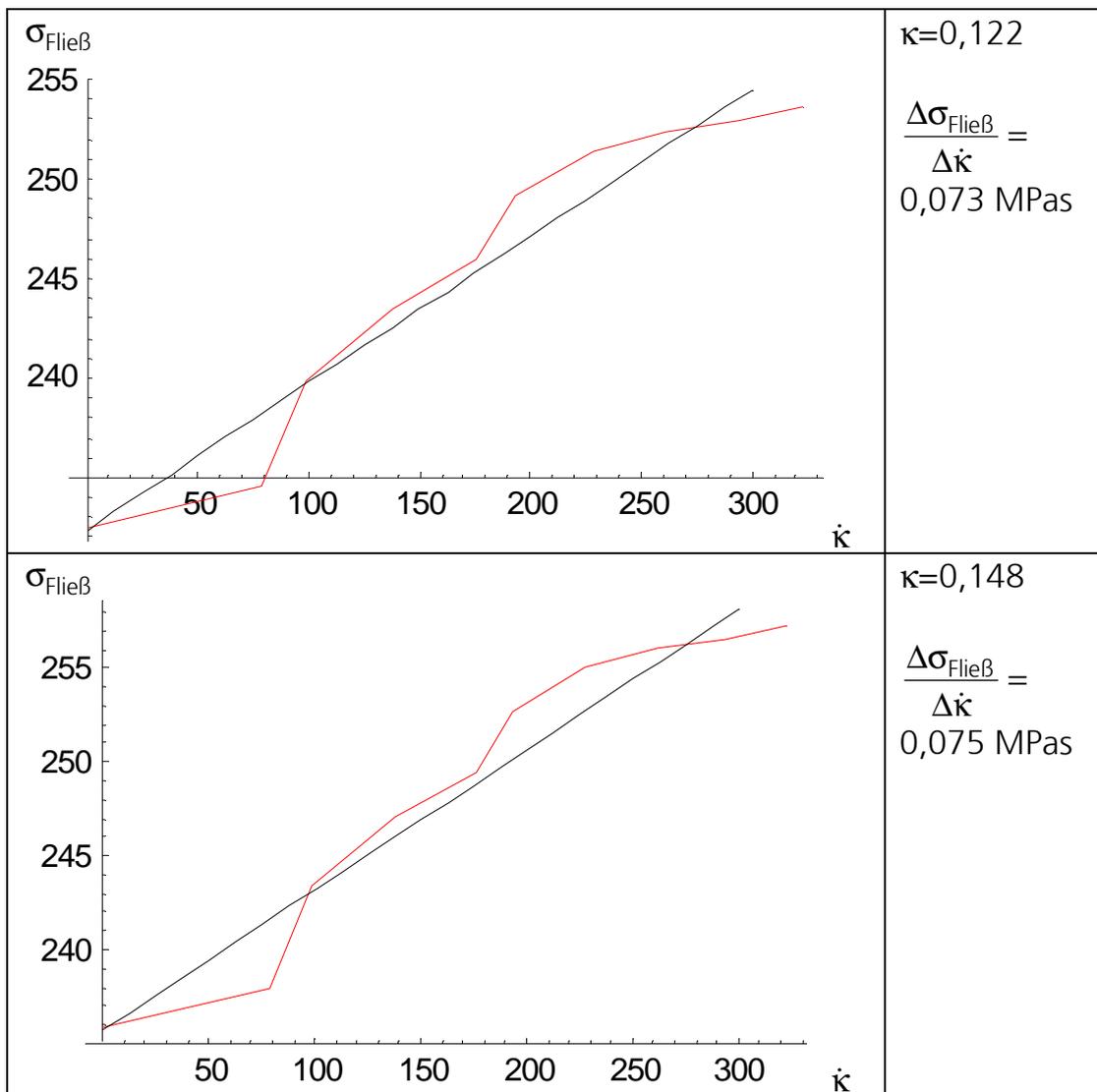
9.2 Approximation der Dehnratenabhängigkeit

Um die Dehnratenverfestigung zu approximieren, werden Schnitte des Diagramms aus Abbildung 4-23 bei konstanter Dehnung erzeugt. Tabelle 9-1 zeigt diese Kurvenverläufe bei bestimmten äquivalenten plastischen Dehnungen und lineare Approximationen an diese Kurven in der linken Spalte. Die rechte Spalte enthält die jeweilige äquivalente plastische Dehnung κ und Steigung der Kurve, die die linearisierte Dehnratenverfestigung ist. Insgesamt ergibt sich eine näherungsweise lineare und konstante Dehnratenverfestigung von 0,07 MPas.

Tabelle 9-1: Extrapolierte Dehnratenverfestigung bei verschiedener äquivalenten plastischen Dehnung κ . In der linken Spalte sind die Kurvenverläufe und lineare Approximationen an diese Kurven abgebildet. Die rechte Spalte enthält die jeweilige äquivalente plastische Dehnung κ und Steigung der Kurve, die die linearisierte Dehnratenverfestigung beschreibt.







9.3 Kraft-Zeit-Zusammenhänge des Komponentenversuchs und der FEM-Simulationen des Versuchs

Die Kraft-Zeit-Verläufe der durchgeführten Komponentenversuche und der Simulationen der Versuche sind nicht geeignet, um die Versagenszeitpunkte zu identifizieren und so die Prognosen der Simulationen zu bewerten. Der Vergleich der Kraftverläufe der Simulationen mit und ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers belegt diesen Umstand. Abbildung 9-6 und Abbildung 9-7 zeigen die Kraft-Zeit-Zusammenhänge für die Simulationen mit und ohne Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers. Obgleich in den Simulationen das Bauteilversagen zu stark unterschiedlichen Zeitpunkten prognostiziert wird, kann in den Kraft-Zeit-Verläufen kein Hinweis darauf gefunden werden. Sie sind von Schwingungen dominiert und nahezu identisch, weshalb auf weitere Analysen wie Filterungen o.ä. verzichtet wird.

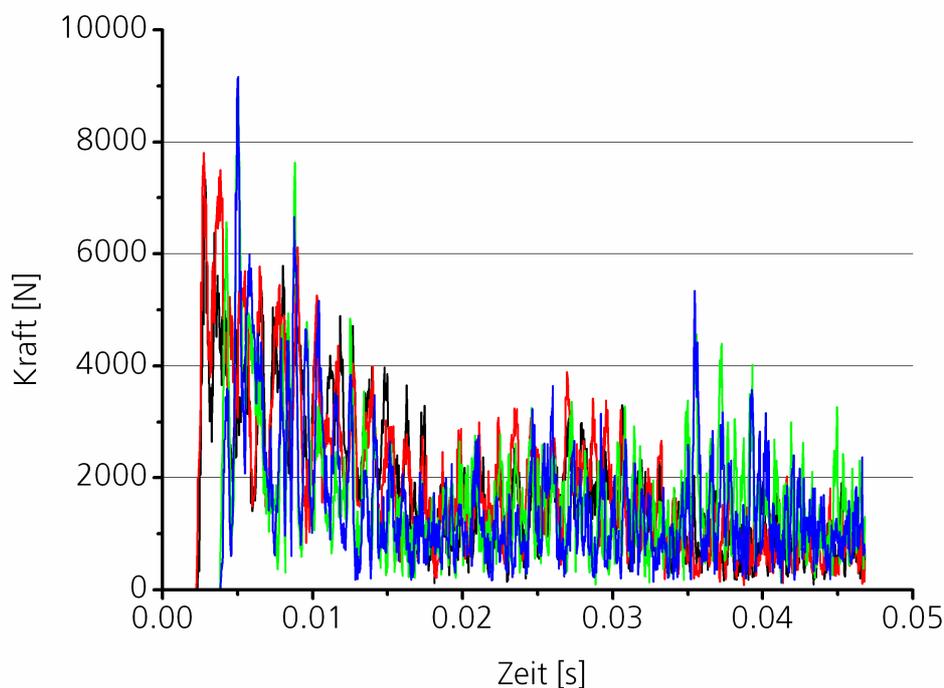


Abbildung 9-6: Kraft-Zeit-Verläufe an den vier Kraftsensoren bei der Simulation mit dem Versagensmodell, das den Diskretisierungsfehler berücksichtigt.

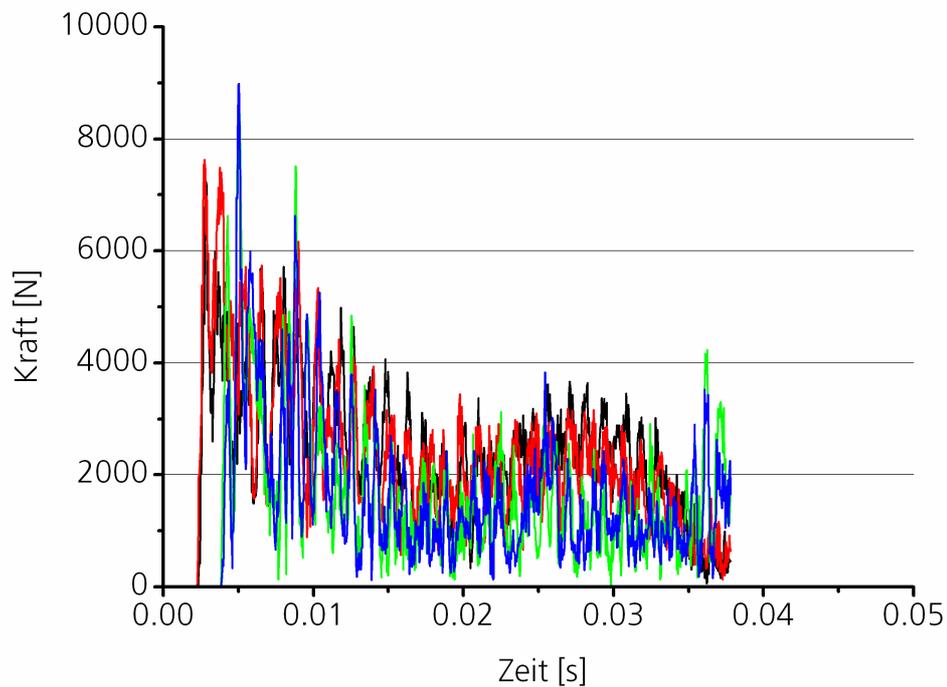


Abbildung 9-7: Kraft-Zeit-Verläufe an den vier Kraftsensoren bei der Simulation mit dem Versagensmodell, das den Diskretisierungsfehler nicht berücksichtigt.

Der Vergleich der Kraft-Weg-Verläufe der Simulationen mit denen des Versuchs, vgl. Abbildung 9-8, zeigt eine gute Übereinstimmung der mittleren Kraftverläufe. Die maximalen Amplituden sind in den FEM-Simulationen etwa 50 % höher. Mögliche Erklärungen können die in der Simulation vernachlässigte Werkstoffdämpfung oder die Vereinfachung in der Modellierung des Kraftsensors sein, der als Stahlblock modelliert ist.

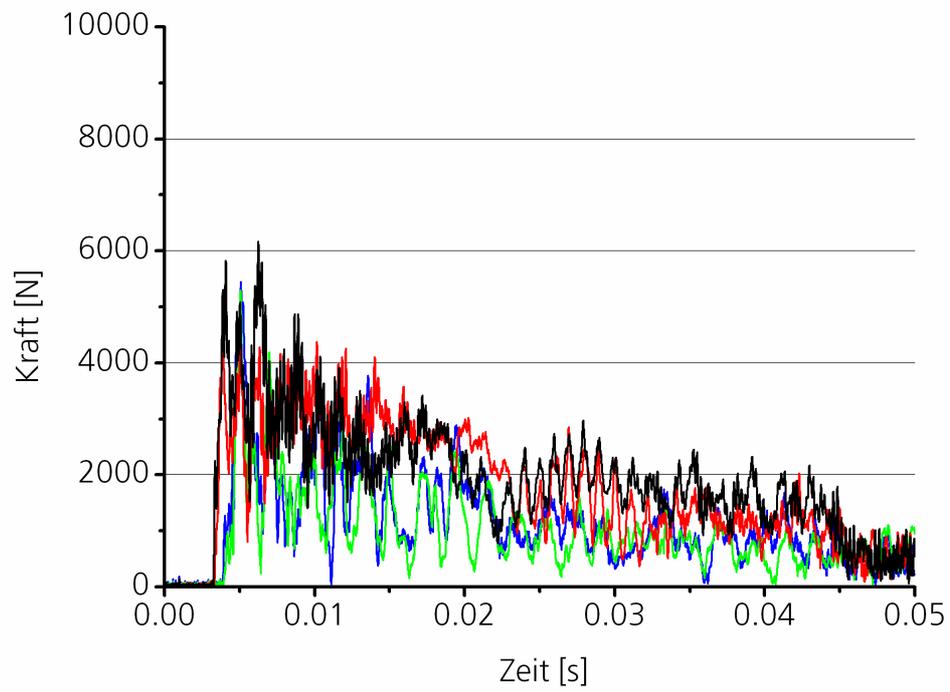


Abbildung 9-8: Kraft-Zeit-Verläufe an den vier Kraftsensoren bei dem Versuch.

9.4 Herleitungen der Auswertungsalgorithmen

9.4.1 Berechnung der Spannung bei einachsiger elastisch-plastischer Belastung

Die Berechnung der Spannung bei einem Zugversuch unter der Annahme des HOOKE'SCHEN GESETZES, additiver Zerlegung des Dehnungstensors und eines druckunabhängigen plastischen Potenzials kann anhand folgender Zusammenhänge erfolgen:

$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^{\text{elast.}} + \varepsilon_{yy}^{\text{plast.}} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^{\text{elast.}} + \varepsilon_{zz}^{\text{plast.}} \\ &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - 0,5 \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\sigma_{xx}}{E} \right) \\ \Rightarrow \sigma_{xx} &= \frac{F_x}{A_x^{\text{aktuell}}} \\ &= \frac{F_x}{A_x^0 e^{(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}} \\ &= \frac{F_x}{A_x^0 e^{\left(-2\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \varepsilon_{xx} + \frac{\sigma_{xx}}{E} \right)}}\end{aligned}$	Gl. 9-1 a-c
--	-------------

9.4.2 Berechnung der Spannung bei zweiachsiger elastisch-plastischer Belastung

Analog zum einachsigen Zugversuch kann die Berechnung der Spannung bei einem Kreuzzugversuch unter der Annahme des HOOKE'SCHEN GESETZES, additiver Zerlegung des Dehnungstensors und eines druckunabhängigen plastischen Potenzials durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^{\text{elast.}} + \varepsilon_{zz}^{\text{plast.}} \\
&= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - (\varepsilon_{xx}^{\text{plast.}} + \varepsilon_{yy}^{\text{plast.}}) \\
&= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{\text{elast.}} + \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^{\text{elast.}}) \\
&= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \varepsilon_{yy} - \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sigma_{xx} &= \frac{F_x}{A_{\text{aktuell}}} \\
&= \frac{F_x}{A_x^0 e^{(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}} \\
&= \frac{F_x}{A_x^0 e^{\left(\varepsilon_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \varepsilon_{xx} + \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \varepsilon_{yy} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \right)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sigma_{yy} &= \frac{F_y}{A_{\text{aktuell}}} \\
&= \frac{F_y}{A_y^0 e^{(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})}} \\
&= \frac{F_y}{A_y^0 e^{\left(\varepsilon_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \varepsilon_{xx} + \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \varepsilon_{yy} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \right)}}
\end{aligned}$$

Gl. 9-2 a-c