

Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau

Zur Reflexion von Luftstoßwellen an nachgiebigen Materialien und Baustrukturen

Torsten Döge

Herausgeber:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. N. Gebbeken (federführend)
Univ.-Prof. Dr.-Ing. M. Brüning
Univ.-Prof. Dr.-Ing. S. Holzer
Univ.-Prof. Dr.-Ing. M. Keuser
Univ.-Prof. Dr.-Ing. I. Mangerig
em. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. C. Petersen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Siebert
Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-Ch. Thienel

Schriftleitung:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. N. Gebbeken
Institut für Mechanik und Statik
Labor für Ingenieurinformatik
Universität der Bundeswehr München
Werner-Heisenberg-Weg 39
85577 Neubiberg
Tel.: 089-6004-3414
Email: norbert.gebbeken@unibw.de

© 2012 Torsten Döge
Institut für Mechanik und Statik
Universität der Bundeswehr München
Werner-Heisenberg-Weg 39
85577 Neubiberg

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors/Herausgebers ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu vervielfältigen.

ISSN 1431-5122

Zur Reflexion von Luftstoßwellen an nachgiebigen Materialien und Baustrukturen

Torsten Döge

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften der Universität der
Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktoringenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation.

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Brüning
1. Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Norbert Gebbeken
2. Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Hiermaier
3. Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Kaliske (Technische Universität Dresden)

Tag der Einreichung: 14. September 2011

Tag der Prüfung: 16. Februar 2012

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation wurde der Einfluss von Materialparametern auf die Reflexion von Luftstoßwellen untersucht. Die Untersuchung erfolgte mittels analytischer Berechnungen. Bei der Betrachtung der Reflexion von Luftstoßwellen an Materialien mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit stellte sich heraus, dass der Einfluss der Materialparameter auf den Reflexionsfaktor beträchtlich ist. Es wurde gezeigt, dass Materialien mit geringer Dichte und Steifigkeit zwar den reflektierten Druck der reflektierten Luftstoßwelle reduzieren, jedoch der Druck auf Bauteile in manchen Fällen verstärkt wird. Dabei haben die Materialeigenschaften des Bauteils ebenfalls einen starken Einfluss auf den Spitzendruck an der Bauteiloberfläche. Wenn eine Luftstoßwelle direkt auf ein Bauteil – wie beispielsweise eine Stahlbetonwand – trifft, dann kann dieses Bauteil für die Bestimmung des reflektierten Druck-Zeit-Verlaufes meist als starr angenommen werden. Wenn jedoch vor diesem Bauteil ein Material mit geringer Dichte und Steifigkeit ist, dann ist diese Annahme nicht mehr gerechtfertigt.

Für ein geschlossenes Stoßrohr wurde die Reflexion der Verdünnungswelle analytisch berechnet. Weiterhin wurde für eine einfache Stoßwelle die analytische Lösung des Druck-Zeit-Verlaufes bestimmt. Die Lösungen der analytischen Berechnungen können als Referenz für Konvergenzstudien numerischer Berechnungen verwendet werden.

Zusätzlich enthält diese Arbeit einen historischen Überblick bis zurück in das 17. Jahrhundert über die Entwicklung der Erkenntnisse zu Luftstoßwellen.

Abstract

In this dissertation, the influence of material parameters on the reflection of blast waves was investigated by analytical calculations. It was shown by the investigation of the reflection of blast waves at materials with low density and low stiffness, that the influence of the material parameters on the reflection coefficient is quite large. It was shown that materials with low density and low stiffness reduce on the one hand the reflected pressure in the blast wave, but on the other hand, they amplify the pressure on structural elements in some cases. Thereby, the material properties of the structural element have also a strong influence on the peak pressure at the structural element. If a blast wave hits directly a structural element, e.g. a reinforced concrete wall, then the structural element can mostly be assumed as a rigid body. But, when a material with low density and low stiffness is in front of this structural element, then this assumption is not valid anymore.

The reflection of a rarefaction wave in a closed shock tube was analytically calculated. Furthermore, the analytical solution of a pressure-time history was determined for a simple blast wave. The solutions of the analytical calculations can be used as a reference for convergence studies of numerical simulations.

Additionally, this dissertation gives a historical review of the development of the scientific knowledge of shock and blast waves back until the 17th century.

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Statik an der Universität der Bundeswehr München.

In erster Linie danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Norbert Gebbeken für die Betreuung dieser Arbeit. Er hat meine Themenwahl unterstützt, bei der Erstellung dieser Arbeit immer hinter mir gestanden und mich als wissenschaftlicher Mitarbeiter kontinuierlich gefördert. Ich habe es sehr geschätzt, am Institut für Mechanik und Statik arbeiten und forschen zu können. Während meiner Tätigkeit am Institut habe ich sehr viel dazu gelernt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Hiermaier und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Kaliske danke ich für die Übernahme der Koreferate und für die für mich lehrreichen und anregenden Gespräche. Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Brünig danke ich für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsausschusses und für die reibungslose Durchführung des Promotionsverfahrens.

Allen Mitarbeitern am Institut danke ich für die freundschaftliche Zusammenarbeit. In vielen interessanten Gesprächen konnte ich Ideen sammeln und immer wieder etwas lernen. Ich habe mich am Institut sehr wohl gefühlt. Diese Zeit wird mir in schöner, freudiger Erinnerung bleiben.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie und insbesondere meiner Frau Vroni, die mich in den zurückliegenden Jahren liebevoll und ermutigend unterstützt hat.

Neubiberg, im März 2012

Torsten Döge

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	IX
1 Einleitung	1
2 Stand der Forschung	3
2.1 Entwicklung der wissenschaftlichen Erkenntnisse zu den Luftstoßwellen	3
2.1.1 17. Jahrhundert	4
2.1.2 18. Jahrhundert	8
2.1.3 19. Jahrhundert	12
2.1.4 Erste Hälfte des 20. Jahrhunderts	23
2.2 Reduktion der Luftstoßwellenbelastung auf Baustrukturen	26
2.3 Einordnung der Arbeit	30
3 Grundlagen	33
3.1 Kinematik	33
3.2 EULERSche und LAGRANGESche Betrachtungsweise	34
3.2.1 EULERSche Betrachtungsweise	34
3.2.2 LAGRANGESche Betrachtungsweise	34
3.2.3 Zusammenhang	35
3.3 Verzerrungen	35
3.4 Spannungen	36
3.5 Erhaltungs- und Bilanzsätze	37
3.5.1 Massenerhaltung	38
3.5.2 Impulserhaltung	38
3.5.3 Drehimpulserhaltung	38
3.5.4 Energieerhaltung	38
3.5.5 Entropiebilanz	39
3.6 Konstitutive Gleichungen	39
3.7 Gaskinetik	40
3.7.1 MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung	40
3.7.2 Druck	41
3.7.3 Gleichverteilungssatz	42

3.8	Zustandsgleichungen	42
3.8.1	Zustandsgleichung für ideale Gase	43
3.8.2	Weitere Zustandsgleichungen	44
3.9	Luftstoßwellen	48
3.9.1	Entstehung von Luftstoßwellen	48
3.9.2	Der senkrechte Verdichtungsstoß	49
3.9.3	Entropiebetrachtung beim Sprung über die Stoßfront	50
3.9.4	Das RIEMANN-Problem	51
3.9.5	Senkrechte Reflexion von Luftstoßwellen an starren Oberflächen	57
3.9.6	Reguläre und irreguläre Reflexionen	59
3.10	Hydrocodes	68
3.10.1	Zeitintegration	68
3.10.2	EULERSche und LAGRANGESche Methoden	69
3.10.3	EULER-GODUNOV	70
3.10.4	EULER-FCT	71
4	Der Einfluss nachgiebiger Materialien auf den Reflexionsfaktor	73
4.1	Einleitung	73
4.2	Zustandsgleichung für den Feststoff	74
4.2.1	Nachweis der Stoßbedingungen für die Zustandsgleichung für ideales Gas	75
4.2.2	Nachweis der Stoßbedingungen für die Zustandsgleichung (4.1)	76
4.3	Planare Stoßwelle im Feststoff	78
4.4	Der Reflexionsfaktor an nachgiebigen Materialien	81
4.4.1	Beschreibung der Problemstellung	81
4.4.2	Aufstellen der Gleichungen	82
4.4.3	Materialparameter	83
4.4.4	Lösung des Gleichungssystems	84
4.4.5	Einfluss der Materialparameter auf den Reflexionsfaktor	85
4.4.6	Einfluss der Bauteildicke und Bauteillagerung auf den Reflexionsfaktor . .	85
4.4.7	Zusammenfassung	86
4.5	Reflexion der Stoßwelle im Feststoff an starrer Wand	87
4.5.1	Beschreibung der Problemstellung	87
4.5.2	Aufstellen der Gleichungen	88
4.5.3	Lösung des Gleichungssystems	89
4.6	Reflexion der Stoßwelle im Feststoff an nachgiebiger Wand	91
4.6.1	Beschreibung der Problemstellung	91
4.6.2	Aufstellen der Gleichungen	92
4.6.3	Lösung des Gleichungssystems	93
4.6.4	Untersuchung des Einflusses der Materialparameter	94
4.6.5	Zusammenfassung	96

4.7	Zusammenfassung	98
5	Analytische Lösungen zu Luftstoßwellen	99
5.1	Einleitung	99
5.2	Stoßrohr mit abschließender Wand	99
5.2.1	Problembeschreibung	100
5.2.2	Problemlösung für die Bereiche (1) bis (3)	101
5.2.3	Problemlösung für den Bereich (5)	103
5.2.4	Problemlösung für den Bereich (6)	105
5.2.5	Bereich (7)	107
5.2.6	Zusammenfassung	107
5.3	Konstruktion einer einfachen Stoßwelle	107
5.3.1	Problemlösung für den Bereich (2)	109
5.3.2	Problemlösung für den Bereich (3)	109
5.3.3	Problemlösung für den Bereich (4)	110
5.3.4	Vergleich der analytischen Lösung mit numerischen Berechnungen	111
5.4	Zusammenfassung	114
6	Versuche an Wärmedämmverbundsystemen	115
6.1	Einleitung	115
6.2	Beschreibung der Versuche	115
6.3	Ergebnisse der Versuche	118
6.4	Diskussion der Versuchsergebnisse	119
6.4.1	Auswertung der Ergebnisse	119
6.4.2	Einfluss der Reflexionen an den Stoßrohrwänden	120
6.4.3	Einfluss der Materialeigenschaften auf den reflektierten Spitzenüberdruck	123
6.4.4	Einfluss der Materialeigenschaften auf den Druck an der Grenze Fassade zur Stahlplatte	123
6.4.5	Schutzwirkung der Fassadensysteme	124
6.5	Zusammenfassung und Ausblick	125
7	Zusammenfassung und Ausblick	127
7.1	Zusammenfassung	127
7.2	Ausblick	128
	Literaturverzeichnis	129
A	Nachweis der Stoßbedingungen	143
B	Berechnungen zum Reflexionsfaktor	145
B.1	Planare Stoßwelle im Feststoff	145
B.2	Der Reflexionsfaktor an nachgiebigen Materialien	147

B.3 Reflexion der Stoßwelle im Feststoff an starrer Wand	151
B.4 Reflexion der Stoßwelle im Feststoff an nachgiebiger Wand	153
C Berechnung Stoßrohr mit abschließender Wand	157
D Ergebnisse der Versuche an Wärmedämmverbundsystemen	163
D.1 Überdruck-Zeit-Verläufe	163
D.2 Impuls-Zeit-Verläufe	167
Index	171

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

A	Konstante
\mathbf{a}	FINGERScher Verzerrungstensor
\mathbf{A}	ALMANSIScher Verzerrungstensor
B_0, B_1	Parameter der polynomischen Zustandsgleichung
\mathcal{B}	materieller Körper
\mathbf{B}	linker CAUCHY-GREEN-Tensor
c	Wellengeschwindigkeit
c_L	Longitudinalwellengeschwindigkeit
c_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_r	Reflexionsfaktor (<i>reflection coefficient</i>)
c_V	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
C	EULERSche Konstante ($C = 0,5772156649\dots$)
C_{\pm}	Charakteristiken
\mathbf{C}	rechter CAUCHY-GREEN-Tensor
\mathbf{C}	Elastizitätstensor
d	Differential, z. B. dx
e	EULERSche Zahl, Basis der natürlichen Logarithmen ($e = 2,718281828\dots$)
e	spezifische innere Energie
E	Elastizitätsmodul
E_k	kinetische Energie
\mathbf{e}	PIOLAScher Verzerrungstensor
\mathbf{E}	GREENScher Verzerrungstensor
f	Freiheitsgrade
\mathbf{f}	Kraftvektor
\mathbf{F}	Deformationsgradient
h	dimensionslose Enthalpie
\mathbf{I}	Impulsvektor
\mathbf{J}	JACOBI-Matrix
k	BOLTZMANN-Konstante
K	Kompressionsmodul

K_1, K_2, K_3	Parameter der polynomischen Zustandsgleichung
K_T	isotherme Kompressibilität
L	Länge
m	Masse
m_M	Teilchenmasse, Molekülmasse
\mathcal{M}	materieller Punkt
n	Teilchendichte; Parameter
N	Teilchenzahl
p	Druck
p_{ro}	reflektierter Spitzenüberdruck (<i>peak reflected overpressure</i>)
p_{so}	einfallender Spitzenüberdruck (<i>peak side-on overpressure</i>)
R	RIEMANN-Funktion
R'	massenbezogene Gaskonstante
S	Steigung der v_s - v_1 -Beziehung
S	Entropie
t	Zeit
T	Temperatur
T_1, T_2	Parameter der polynomischen Zustandsgleichung
\mathbf{t}	CAUCHY-Spannungsvektor
\mathbf{T}	CAUCHY-Spannungstensor
u	atomare Masseneinheit
U	innere Energie
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\mathbf{u}	Vektor zur Beschreibung des Gases
v	Geschwindigkeit
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
\bar{v}	mittlere Teilchengeschwindigkeit
v_w	wahrscheinlichste Teilchengeschwindigkeit
V	Volumen
V	spezifisches Volumen
w	MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung
x	Raumkoordinate
X	dimensionslose Koordinate
\mathbf{x}	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
\mathbf{X}	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
y	Raumkoordinate
z	Raumkoordinate

Griechische Buchstaben

α	Wärmeausdehnungskoeffizient
α	Porosität
γ	Isentropenexponent
Γ	GRÜNEISEN-Parameter
Γ_{\pm}	RIEMANN-Invarianten
Δ	Differenz
η	RIEMANN-Invariante
θ	Winkel
μ	Kompression
ν	POISSON-Zahl (Querkontraktionszahl, Querdehnzahl, Querverformungszahl)
ξ	RIEMANN-Invariante
ϱ	Dichte
σ	Spannungen
τ	dimensionslose Zeit
φ	Winkel
χ	Abbildung
ψ	abhängige Variable

Weitere Zeichen

1	Einheitsmatrix (<i>identity matrix</i>)
----------	---

Kapitel 1

Einleitung

Luftstoßwellen sind starke Druckwellen in der Luft. Sie besitzen einen plötzlichen Druckanstieg (z. B. Abbildungen 3.9 und 6.4). Dieser plötzliche Druckanstieg wird als Stoßfront bezeichnet. Er wird in einigen Idealisierungen als eine Diskontinuität abgebildet. Luftstoßwellen werden beispielsweise durch Explosionen hervorgerufen. Sie wirken nur über kurze Zeiten im Millisekundenbereich, können aber trotz der kurzen Zeit solche Mengen an Impuls und Energie übertragen, dass Gebäude stark geschädigt werden.

Im Automobilbau oder bei Verpackungen werden Stöße durch energieabsorbierende Konstruktionen aufgefangen (z. B. durch Aluminiumschäume). Es stellt sich die Frage, ob solche Konstruktionen zur Energieabsorption auch im Bauwesen möglich sind. In vielen Fällen ist es einfacher und billiger, Bauteile etwas stärker auszubilden, als zusätzliche Konstruktionen zur Energieabsorption zu bauen. Die meisten Gebäude benötigen aus bauphysikalischen Gründen eine Wärmedämmung, die außen auf das Gebäude aufgebracht wird. Diese Wärmedämmungen bestehen meistens aus leichten, porösen Stoffen (z. B. Polystyrolschaum, Mineralwolle). Es stellt sich nahezu zwangsläufig die Frage, ob solche Wärmedämmungen als Schutz vor Explosionen genutzt werden können.

Es gab bereits Experimente, in denen der Einfluss von Schaumstoffen auf Explosionsbelastungen untersucht wurde (Abschnitt 2.2). Überraschenderweise wurde oft nicht der gewünschte Effekt erzielt, die Belastung zu reduzieren, sondern genau das Gegenteil trat ein, nämlich eine Verstärkung der Belastung.

Im Rahmen dieser Arbeit kamen verschiedene Fragen zum Vorschein, wie z. B.:

- Wie ändert sich der Druck in einer Luftstoßwelle bei der Reflexion an Bauteilen im Vergleich zu einer Reflexion an einer starren Oberfläche? Zum Beispiel: Wie ändert sich der Druck bei einer Reflexion an einer Fensterscheibe, da die Fensterscheibe sich verformen kann?
- Können mit Materialien mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit die Belastungen aus Luftstoßwellen reduziert werden?
- Warum erhöht sich der Druck zwischen einem Material mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit und einer steifen Wand?

- Können Wärmedämmungen vor Explosionen schützen?

Auf diese Fragen wird in den folgenden Kapiteln dieser Dissertation eingegangen.

Im Kapitel 2 wird ein Überblick zum Stand der Forschung der behandelten Thematik gegeben. Dabei wird bis auf Veröffentlichungen des 17. Jahrhunderts zurückgegangen, um die Entwicklung der wissenschaftlichen Erkenntnisse zu den Luftstoßwellen zu zeigen.

Im 3. Kapitel werden die wichtigsten Grundlagen angeführt, die für diese Arbeit von Bedeutung sind und die nicht alle im Bauingenieurstudium gelehrt werden. Dies betrifft vor allem Grundlagen zur Thematik der Luftstoßwellen und zu ihrer Berechnung.

Die Analyse der Reflexion von Luftstoßwellen an nachgiebigen Materialien wird im 4. Kapitel beschrieben. Dabei wird untersucht, welchen Einfluss die Materialeigenschaften auf den reflektierten Spitzendruck in der Luftstoßwelle besitzen. Darauf aufbauend wird untersucht, wie Materialien mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit vor einem Bauteil den reflektierten Spitzendruck auf das Bauteil verändern. Die Untersuchungen beruhen auf analytischen Berechnungen und liefern genaue Ergebnisse.

Da nicht nur der Spitzendruck für die Belastung von Bauteilen maßgebend ist, sondern der gesamte reflektierte Druck-Zeit-Verlauf, werden in Anlehnung an das 4. Kapitel analytische Lösungen für Stoßwellen mit abfallendem Druck-Zeit-Verlauf nach der Stoßfront im 5. Kapitel gesucht. Für die Reflexion einer Verdünnungswelle an einer starren Stoßrohrwand wird eine analytische Lösung gemäß [36] beschrieben. Für eine einfache Stoßwelle wird der Druck-Zeit-Verlauf soweit mir möglich analytisch berechnet und mit den Ergebnissen einer Konvergenzstudie numerischer Berechnungen verglichen.

Im 6. Kapitel werden reale Versuche an Fassadensystemen beschrieben und ausgewertet. Diese Versuche dienen als praktisches Beispiel für die theoretischen Untersuchungen dieser Arbeit. Sie zeigen, dass Fassadensysteme zusätzlich zu ihrer Funktion als Wärmedämmung auch die Funktion des Explosionsschutzes übernehmen können. Die Versuche verdeutlichen aber auch, dass bei falscher Konstruktion der Fassadensysteme die Wirkung der Explosionen verstärkt statt reduziert wird.

Abschließend werden im 7. Kapitel die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Aus Sicht der Arbeit heraus wird ein Überblick über mögliche weitere Forschungsarbeiten gegeben.

In den Anhängen werden die vollständigen MAPLE-Berechnungen angegeben, damit die Lösungen dieser Dissertation nachvollzogen werden können.

Kapitel 2

Stand der Forschung

2.1 Entwicklung der wissenschaftlichen Erkenntnisse zu den Luftstoßwellen

Dieses Kapitel beschreibt den aktuellen Stand der Forschung. Bei der dazu notwendigen Literaturrecherche zu dem Thema dieser Dissertation war es für mich wichtig, auch in den älteren, herausragenden Beiträgen zu recherchieren. Diese älteren Beiträge waren für mich sehr lehrreich. Unter Anderem sind mir beim Lesen dieser Beiträge erst folgende Punkte richtig bewusst geworden:

- Auch in den richtungweisenden Arbeiten herausragender Personen wurden Fehler gemacht, die heute nicht mehr denkbar sind. Jedoch mussten die wissenschaftliche Erkenntnisse erst reifen, und die Fehler waren auch notwendig, damit die Erkenntnisse reifen konnten.
- „Man muß die ‚Meister‘ lesen, also ihre Originalarbeiten studieren, um die geschichtliche Wahrheit nicht verfälscht weiterzugeben.“ (SZABÓ [162, S. XIII])

In dieser Arbeit wird zunächst mit einem kurzen Überblick über die historische Entwicklung der Theorie der Luftstoßwellen begonnen. In dem Rahmen dieser Dissertation kann unmöglich ein vollständiger historischer Rückblick gegeben werden. Es gibt deutlich bessere Literatur, die ausführlicher die Geschichte beschreibt (z. B. die Bücher und Beiträge von BRUSH [18, 19], FOX [48], KLEIN [88], KREHL [89], MACH [101], SACHDEV [143], SALAS [144], SCHLOTE [147], SZABÓ [162] und TRUESDELL (Einführungen in [43, 44], sowie [172, 173, 174])). Ich habe mich dennoch dazu entschieden, diesen historischen Rückblick in dieser Dissertation aufzunehmen. Erstens weil dies für mich notwendig war, um zu dem jetzigen Stand der Erkenntnis zu gelangen und zweitens soll der Leser dazu angeregt werden, nicht einfach das zu glauben, was in der Literatur geschrieben steht, sondern er sollte sich selbst die Originalliteratur beschaffen und darin lesen. Es ist sehr lehrreich! Leider ist es nicht immer möglich, die Originalliteratur zu beschaffen, da sie nicht in jedem Fall erhältlich ist, und manchmal treten bei Fremdsprachen Übersetzungsprobleme auf.

Das Durchlesen der älteren Literatur ist äußerst eindrucksvoll. Insbesondere beeindruckt die Erkenntnis, wie sich das Wissen ab etwa dem 17. Jahrhundert explosionsartig vermehrte. MACH schreibt in [101, S. 108] in Bezug auf GUERICKE'S Zeit:

„Mit Erstaunen sehen wir, welche kurze Spanne Zeit uns von der wissenschaftlichen Barbarei trennt, und wir dürfen uns daher nicht wundern, daß die soziale Barbarei noch so schwer auf uns lastet.“

Erst beim Lesen der Literatur versteht man, welche Probleme damals aus dem Weg geräumt werden mussten und warum Probleme erst zu einer bestimmten Zeit gelöst wurden, dann aber oft von mehreren Personen unabhängig voneinander. Während meiner Recherchen bin ich bis zu Arbeiten aus dem 17. Jahrhundert zurück gegangen, wo mein kurzer Überblick bei MERSENNE beginnt.

2.1.1 17. Jahrhundert

Der Franziskanermönch MARIN MERSENNE (1588–1648) maß um 1636 die Schallgeschwindigkeit (LENIHAN [95, 96]). Er bediente sich zweier Methoden. Die eine Methode bestand darin, dass er die Zeit vom Erreichen des Lichtblitzes einer Kanone, dessen Entfernung bekannt war, bis zum Erreichen des Schalls maß. Auf diese Weise bestimmte er die Schallgeschwindigkeit zu 230 Toisen pro Sekunde (≈ 448 m/s) [95]. Bei der anderen Methode maß er die Zeit, die ein Schall und dessen Echo bis zu einer Wand, dessen Entfernung bekannt war, und zurück benötigte. Damit erhielt er ungefähr 316 m/s [96].

GALILEO GALILEI (1564–1642) berichtete bereits in seinem im Jahr 1638 gedruckten Werk *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica et i movimenti locali* (deutsche Übersetzung in [49, 50, 51]) über Experimente zur Luft. Dabei beschrieb er ein Experiment, mit dem die Dichte der Luft bestimmt werden kann [49, S. 71]:

„Ich nahm einen ziemlich grossen Glasballon mit engem Halse, den ich mit einem Stück Leder umgab. Letzteres war fest um den Hals geschnürt und besass einen Einschnitt am Rande. Darüber befestigte ich ein Stück Membran, durch welches ich mittels einer Spritze gewaltsam in den Ballon eine grosse Menge Luft eintrieb, die alsdann so verdichtet war, dass man mit ihr zwei oder drei andere Ballons hätte füllen können, abgesehen von der Luft, die dieselben von Natur enthalten. Auf einer sehr genauen Wage habe ich alsdann den Ballon mit comprimierter Luft gewogen, indem ich die Tara mit feinem Sande herstellte. Nach Oeffnung der Blase trat die verdichtete Luft heftig aus, und auf die Waage zurückgebracht, war das Gewicht merklich kleiner, so dass von der Tara eine wohlaufgehobene Menge Sand fortgenommen werden musste. Unzweifelhaft ist das Gewicht dieser Sandmenge genau gleich dem der Luft, die gewaltsam eingepresst war und schliesslich austrat. Mehr hat dieser Versuch nicht ergeben, als eben die Gleichheit der Gewichte jener Sandmenge und der eingepressten Luft, aber wollte man genau die Luft mit Bezug auf Wasser wägen, so erfahre ich dieses noch nicht, ja ich kann es gar nicht erfahren, wenn ich nicht zugleich die Menge jener zusammengepressten Luft bestimme : und zu diesem Zwecke habe ich zweierlei Wege ersonnen. Entweder man nimmt einen zweiten ähnlichen Ballon mit einem Halse, welch' letzterer ebenfalls mit Leder versehen ist, aber mit einer zweiten Oeffnung auf dem ersten Ballon aufgestülpt wird, worauf beide fest mit einander verbunden werden. Dieser zweite Ballon ist am Boden durchbohrt, so dass man einen Eisenstab hindurchstecken kann, um mittelst desselben die Membran durchstossen zu können und dadurch der verdichteten Luft den Austritt zu ermöglichen : aber der zweite Ballon muss voll Wasser sein. Wenn alles gehörig vorbereitet, und mit dem Stabe die Membran durchlöchert worden ist, wird die Luft heftig austreten und in den Ballon mit Wasser überströmen, dieses letztere durch die Bodenöffnung hinausdrängend; die auf solche Weise vertriebene Wassermenge wird an Volumen gleich sein dem Volumen derjenigen Luft, die aus dem anderen Ballon ausgeströmt war. Man hebt nun die Wassermenge auf, wägt den entleerten, (sowie zuvor den verdichteten) Ballon, man merkt sich den Taraüberschuss wie vorhin, so ist dessen Gewicht dasjenige eines Luftvolumens gleich dem Volumen des vertriebenen Wassers; letzteres wägen wir, und bekommen das Verhältnis zum aufbewahrten Sande; alsdann können wir sicher angeben, wieviel mal schwerer das Wasser ist als die Luft, und es wird sich nicht die Zahl 10 finden, wie *Aristoteles* schätzte, wohl aber gegen 400, wie der Versuch lehrt.“

An dieser Beschreibung ist erkennbar, welche Probleme im 17. Jahrhundert erst gelöst werden mussten, um Tatsachen – wie die Dichte der Luft – herauszufinden, welche heute allgemein bekannt sind. In GALILEO GALILEIS Arbeiten schlich sich in den Versuchen ein Fehler von einem Faktor von ungefähr 2 aufgrund experimenteller Unzulänglichkeiten ein. Denn die Dichte von Luft beträgt im Normzustand ungefähr $1,292 \text{ kg/m}^3$ dem 774stel der Dichte von Wasser.

Zur Zeit GALILEIS war bereits bekannt, dass Wasser in einem verschlossenen Saugrohr nur bis etwa 18 italienische Ellen aufsteigt. Das Aufsteigen des Wassers versuchte man mit dem *horror vacui*, einer Kraft der Natur, die das Entstehen eines Vakuums zu verhindern versucht, zu erklären. EVANGELISTA TORRICELLI (1608–1647) kam auf die Idee, den Versuch mit Quecksilber statt mit Wasser zu wiederholen. Er erwartete eine Säule von $1/14$ der Länge der Wassersäule. Der Versuch wurde 1643 von VIVIANI ausgeführt [101].

MACH beschrieb den TORRICELLISCHEN Versuch mit den Worten [101]:

„Eine etwa 1 m lange, einerseits zugeschmolzene, mit Quecksilber gefüllte Glasröhre wird am offenen Ende mit dem Finger geschlossen, mit diesem Ende nach unten in Quecksilber gebracht und vertikal aufgestellt. Entfernt man den Finger, so fällt die Quecksilbersäule und bleibt auf einer Höhe von etwa 76 cm stehen.“

GALILEI hatte versucht, das Gewicht der Luft zu messen. TORRICELLI war derjenige, der das Gewicht der Luft mit dem *horror vacui* verband und schließlich das Aufsteigen des Wassers und des Quecksilbers mit dem Gewichtsdruck der Luft erklärte [101]. Er entdeckte also den Luftdruck.

BLAISE PASCAL (1623–1662) führte verschiedene Experimente zum Luftdruck durch. Er kam auf den Gedanken, dass der Luftdruck von der Höhe über dem Meeresspiegel abhängig ist. Sein Schwager PERIER führte im Jahr 1648 einen entsprechenden Versuch auf dem Puy de Dôme durch [101, S. 105–107]. GUERICKE schrieb über PASCAL [69, S. 85]:

„Andere haben die Abnahme des Luftdrucks durch das Sinken des in einer Glasröhre eingeschlossenen Quecksilbers, je nach der verschiedenen Höhe des Berges [...] zu beweisen gesucht. So nahm Herr *Pascal* in Paris wahr, dass am Fusse eines Berges das in eine Glasröhre gegossene Quecksilber auf etwa 27 Zoll gefallen war. In einer höheren Region, ungefähr 156 Klafter weiter oben, sah er, dass die Quecksilbersäule innerhalb der Röhre nicht mehr und nicht weniger als 25 Zoll maass. Auf dem Gipfel endlich der Anhöhe, 206 Klafter über dem Fusse, betrug die Länge der Quecksilbersäule etwa 24 Zoll.

Ich habe ebenfalls in dieser Frage vor 4 Jahren einen Versuch am Brocken unternommen. Auch ging am Fuss des Berges alles gut von Statten; als ich aber jene Glasröhre, die in einer Blechbüchse verschlossen war, dem Diener zum Tragen gegeben hatte, zerbrach derselbe sie durch einen Fall und vereitelte dadurch das ganze Unternehmen.“

Nach PASCAL ist die Einheit des Druckes benannt ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$).

OTTO VON GUERICKE (1602–1686) stellte Aufsehen erregende Versuche zum Luftdruck an, deren Ergebnisse er im Jahr 1672 veröffentlichte [70]. Einige seiner Versuche führte er bereits deutlich früher durch, wie beispielsweise 1654 auf dem Reichstag in Regensburg [69, S. 77].

GUERICKE versuchte bei seinen ersten Versuchen zum Luftdruck, Wasser aus einem Holzfass heraus zu pumpen (Abbildung 2.1 links). Dazu benutzte er eine Messingspritze, die damals bei Bränden benutzt wurde und die zusätzlich mit Ventilen aus Leder versehen war. Dies führte

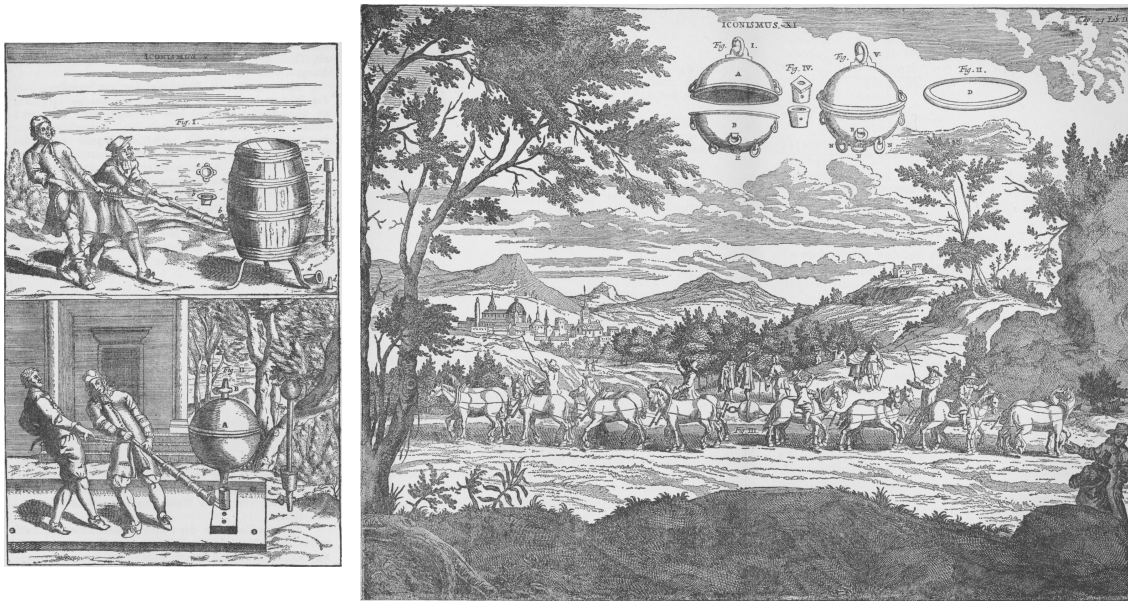


Abbildung 2.1: Versuche von OTTO VON GUERICKE [69]

noch nicht zum gewünschten Erfolg, da die Luft durch die Ritzen eindrang. Dabei wurde „ein Geräusch gehört, als wenn das Wasser heftig koche“.

Um das Problem der eindringenden Luft zu überwinden, pumpte er ein kleineres Fass mit Wasser, das sich in einem größeren Fass mit Wasser befand, leer. Hier war der Erfolg schon größer, auch wenn ein Ton zu hören war, der einem leise zwitschernden Vogel glich. Dieser Ton war über drei Tage vernehmbar. Als dann das kleine Fass geöffnet wurde, fand man es zum großen Teil mit Luft und Wasser gefüllt. Im nächsten Versuch nahm er eine Kupferkugel, die jedoch plötzlich mit lautem Knall zusammen gedrückt wurde. Mit einer genauer gearbeiteten Kupferkugel, kam Guericke zu dem Erfolg, die Luft aus der Kugel heraus zu pumpen [69, S. 11–15].

Berühmt wurde sein Versuch, bei dem 16 Pferde zwei Halbkugeln mit einem Durchmesser von $\frac{67}{100}$ Magdeburger Ellen, die miteinander durch einen Lederring abgedichtet und nahezu luftleer gepumpt wurden, nicht auseinander ziehen konnten ([70] 3. Buch, 23. Kapitel; Abbildung 2.1 rechts).

GUERICKE führte auch Versuche zur Schallausbreitung im (Teil-)Vakuum durch und schrieb über diese Versuche in [70] im 3. Buch im 15. Kapitel:

„In einem luftleeren Gefäße klingen Glocken, Saiten von Musikinstrumenten und andere Tonquellen überhaupt nicht. Um dies zu erproben, ließ ich ins Innere der (oft genug erwähnten) gläsernen Vorlage ein heftiges Uhrwerk an einer Schnur von der Mündung aus herab. Dies Uhrwerk war so eingerichtet, daß es während einer halben Stunde durch den Anschlag des Hammers an das Glöckchen einen wohl vernehmenden Ton in bestimmten Zwischenräumen erklingen ließ. Nach diesen Vorbereitungen begann ich den abgedichteten Behälter luftleer zu pumpen und nahm wahr, wie mit wachsender Luftverdünnung der Schall schwächer wurde und bei völliger Luftleere nicht mehr zu hören war.“

Trotz dieser Versuche erkannte er nicht, dass der Schall sich in Luft ausbreitet und traf merkwürdigerweise in [70] im 4. Buch im 10. Kapitel die fälschliche Aussage:

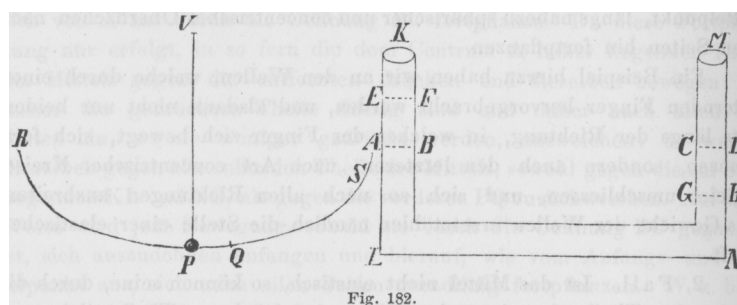


Abbildung 2.2: Zykloidenpendel und U-förmiger Wasserkanal nach NEWTON [124, S. 358]

„Aber Schall, Krachen, Geräusch, Stimmen usw. breiten sich eigentlich nicht vermittels der Luft aus, wie die Gelehrten gewöhnlich behaupten. ... Es ist auch wahr, daß bei Windstille, wenn die Luft unbewegt ist, ein Schall besser als bei Sturm hörbar ist. Pflanzte er sich aber mit Hilfe der Luft fort, wie könnte er da bei stehender Luft zu unseren Ohren gelangen? Daraus folgt schlüssig, daß die Schallausbreitung nicht vermittels der Luft erfolgt.“

CASPAR SCHOTT (1608–1666) veröffentlichte 1657 das Buch *Mechanica Hydraulico-Pneumatica*, in dem er über GUERICQUES Magdeburger Versuche berichtete [149, S. 441 ff.]. Wahrscheinlich erfuhr ROBERT BOYLE (1627–1691) über dieses Buch von diesen Versuchen und der Erfindung der Luftpumpe [14, S. 407].

BOYLE verbesserte zusammen mit ROBERT HOOKE (1635–1703) die Luftpumpe und führte Experimente zur Luft durch, die 1660 veröffentlicht wurden [14, S. 407 ff.]. Im Jahr 1662 veröffentlichte BOYLE ein weiteres Buch, um auf die Kritik von FRANCISCUS LINUS einzugehen [14, S. 652 ff.]. Darin veröffentlichte er, dass sich der Druck umgekehrt proportional zum Volumen verhält [14, S. 671]. Ähnliche Ergebnisse publizierte EDME MARIOTTE (um 1620–1684) im Jahr 1676 [147], weshalb dieser Zusammenhang als BOYLE-MARIOTTESCHES Gesetz bezeichnet wird. WEBSTER wies in [175] darauf hin, dass dieser Zusammenhang nicht zuerst von BOYLE, sondern von HENRY POWER (1623–1668) und RICHARD TOWNELEY entdeckt wurde. BOYLE erfuhr davon in Briefen von POWER und schrieb dies in [14] auf Seite 669. Die Bezeichnung BOYLE-MARIOTTESCHES Gesetz ist somit nicht ganz gerecht. Ein Begriff wie POWER-TOWNELEY-BOYLE-HOOKE-MARIOTTESCHES Gesetz würde es zwar allen recht machen, wäre aber viel zu klobig.

ISAAC NEWTON (1643–1727) beschäftigte sich in seiner *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, die im Jahr 1687 veröffentlicht wurde (deutsche Übersetzung in [124]), auch mit der Geschwindigkeit von Wellen in Fluiden. Über die Schwingungszeiten eines Zykloidenpendels und von Wasser in einem U-förmigen Kanal (Abbildung 2.2) leitete er die Geschwindigkeit von Wellen in Fluiden her, die er in dem Lehrsatz

„Die Geschwindigkeiten der in einem elastischen Mittel sich fortplanzenden Stöße stehen in einem Verhältniss, welches aus dem halben directen der elastischen Kraft und dem halben indirecten Verhältniss der Dichtigkeit zusammengesetzt ist; vorausgesetzt, dass die elastische Kraft der Flüssigkeit ihrer Verdichtung proportional sei.“

zusammenfasste [124, S. 363]. Die Herleitung dieser Zusammenhänge ist für die damalige Zeit ein beachtlicher Schritt gewesen. NEWTON ist damit der Erste, der die Schallgeschwindigkeit berechnet hat. In heutiger Terminologie lässt sich dieser Lehrsatz mit

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (2.1)$$

beschreiben [162, S. 282]. Diese Gleichung weicht von der heute bekannten Gleichung der Wellengeschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{\gamma}$ ab.

Die Schallgeschwindigkeit von Luft berechnete NEWTON wie folgt [124, S. 366]:

„Das specifische Gewicht des Regenwassers verhält sich nämlich zu dem des Quecksilbers, wie ungefähr 1 : 13²/₃, und wenn das letztere im Barometer eine Höhe von 30 engl. Zoll erreicht, verhält sich das specifische Gewicht der Luft zu dem des Regenwassers, wie ungefähr 1 : 870; daher verhält sich das specifische Gewicht der Luft zu dem des Quecksilbers, wie 1 : 11890. Da ferner die Höhe des Quecksilbers 30 Zoll beträgt, so würde die Höhe der gleichförmigen Luft, deren Gewicht unsere unterhalb gelegene Atmosphäre zusammendrücken könnte, 356700 Zoll oder 29725 Fuss engl. betragen. Diese Höhe ist diejenige, welche wir bei der Construction der obigen Aufgabe durch A. bezeichnet haben. Die Peripherie eines mit dem Radius von 29725 Fuss beschriebenen Kreises beträgt 186768 Fuss. Da ferner ein Pendel von 39¹/₅ Zoll Länge, wie bekannt, eine aus Hin- und Hergang zusammengesetzte Schwingung in 2 Secunden vollendet; so wird eine Pendel von 29725 Fuss = 356700 Zoll eine ähnliche Schwingung in Zeit von 190³/₄ Secunden zurücklegen müssen. In dieser Zeit legt aber der Schall fortschreitend einen Wege von 186768 Fuss und in der Zeit von 1 Secunde einen Weg von 979 Fuss zurück.“

Diese berechnete Schallgeschwindigkeit von 979 engl. Fuß/Sekunde = 298 m/s korrigierte NEWTON noch durch zusätzliche, verwirrende Faktoren für Verunreinigungen in der Luft und erhielt eine Geschwindigkeit von 1142 engl. Fuß/Sekunde = 348 m/s. Diese Faktoren führte NEWTON wohl ein, weil das theoretische Ergebnis nicht mit den Experimenten übereinstimmte. Wenn man von diesen zusätzlichen Faktoren absieht, dann kann man seine Leistung in der damaligen Zeit nur bewundern.

2.1.2 18. Jahrhundert

DANIEL BERNOULLI (1700–1782), der Sohn des Mathematikers JOHANN BERNOULLI (1667–1748), veröffentlichte 1738 seine berühmte *Hydrodynamica* [5]. Im zehnten Kapitel beschrieb er ein Modell der Gase, bei dem die Gase aus sehr kleinen Partikeln mit sehr schneller Bewegung bestehen. Vor DANIEL BERNOULLI gab es zwar noch andere Personen, die versuchten, Luft mit Partikeln zu beschreiben. Diese Personen gingen jedoch meist davon aus, dass die Partikel in einem Äther gehalten sind und lediglich Vibrationen und Rotationen ausführen. STEPHEN G. BRUSH und CLIFFORD AMBROSE TRUESDELL (1919–2000) betrachteten DANIEL BERNOULLI als den Ersten, der eine kinetische Theorie der Gase aufstellte ([18, S. 20], [173, S. 276]).

DANIEL BERNOULLI betrachtete einen Zylinder, der Luft enthält, die durch einen Kolben mit einem Gewicht P zusammengedrückt wird (Abbildung 2.3). Er nahm an, dass die Luft aus sehr kleinen Partikeln mit sehr schneller Bewegung besteht. Den Druck erklärte er als Folge der vielen Stöße der kleinen Partikel gegen die Gefäßwände. Nach einigen Berechnungen kam er zu dem Ergebnis, dass der Druck sich proportional zum Quadrat der Teilchengeschwindigkeit ändert [17, S. 57 ff.].

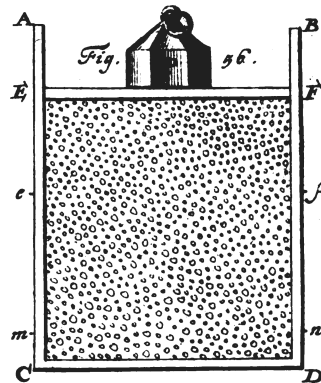


Abbildung 2.3: Erklärung der Teilchentheorie der Luft von DANIEL BERNOULLI [5]

LEONHARD EULER (1707–1783), ein Schüler JOHANN BERNOULLIS [47], war einer der bedeutendsten und produktivsten Mathematiker. Das von GUSTAF ENESTRÖM (1852–1923) verfasste *Verzeichnis der Schriften LEONHARD EULERS* umfasst 866 Nummern [37]. EULER befasste sich mit Algebra, Zahlentheorie, Analysis, Geometrie, Physik – insbesondere mit der Mechanik – und Astronomie. Nach ihm sind über 50 Begriffe, Sätze und Verfahren in der Mathematik und Mechanik benannt [64].

EULER beschäftigt sich in seinem Leben wiederholte Male mit der Schallausbreitung. Dazu zählt bereits eine seiner ersten Veröffentlichungen *Dissertatio physica de sono* (E2, [42, S. 181–196]) aus dem Jahr 1727 als er gerade erst 20 Jahre alt war. Im Folgenden werden nur wenige, jedoch bedeutende Erkenntnisse von EULER vorgestellt.

EULER gibt in dem 1750 geschriebenen und 1752 veröffentlichten Werk *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* (E177, [38]) dem „NEWTONSchen Grundgesetz“ die allgemeine Form

$$M d^2x = P dt^2; \quad M d^2y = Q dt^2; \quad M d^2z = R dt^2 \quad (2.2)$$

wobei x, y, z die Koordinaten der Punktmasse M und P, Q, R die an die Punktmasse in x -, y - und z -Richtung angreifenden Kräfte bedeuten [38, S. 195–196]. In [38] steht $2M$ statt M , da EULER damals über das Gewicht M die Erdbeschleunigung mit $g = 1/2$ eingeführt hatte [162, S. 22]. EULER kommentierte:

„Und diese allein ist diejenige Formel, welche alle Prinzipien der Mechanik enthält.“

Man beachte, dass diese Gleichungen in NEWTONS *Principia* nicht enthalten waren und dass für die Aufstellung dieser Gleichungen das „EULERSche Schnittprinzip“ – unter Heranziehung des Reaktionsprinzips – notwendig war [162, S. 247–248]. ISTVÁN SZABÓ (1906–1980) schrieb treffend über dieses Schnittprinzip [162, S. 20]:

„Fast nirgendwo wird erwähnt, dass dieses einfache wie geniale Prinzip auf EULER zurückgeht. Mit der Phantasie des großen Künstlers lehrte er uns, in Gedanken in die Materie hineinzuschauen, wohin weder Auge noch Experiment eindringen können, und hatte damit den Grundstein zur einzig wahren, nämlich der Kontinuumsmechanik gelegt.“

In *Sectio prima de statu aequilibrii fluidorum* (1769, E375, [44, S. 1–72]) nahm EULER für Luft die Zustandsgleichung

$$p = n q r \quad (2.3)$$

mit dem Druck p , der Dichte q und der Wärme r an, die große Ähnlichkeit mit der gegenwärtig bekannten Zustandsgleichung für ideale Gase $p = (\gamma - 1) \rho e$ besitzt. Er schrieb dazu [40, S. 20]:

„In den gewöhnlich nur vorkommenden Fällen, wo die Dichtigkeit der Luft weder sehr groß, noch sehr klein ist, kann man $p = n q r$ setzen, oder annehmen, daß der Druck im zusammengesetzten Verhältnisse der Dichtigkeit und der Wärme wachse, weil bekanntlich bei gleicher Wärme der Druck fast genau der Dichtigkeit proportional ist, und man bei gleicher Dichtigkeit wenigstens für jetzt, da uns ein eigentliches Wärmemaß noch fehlt, den Druck als der Wärme proportional annehmen kann.“

In *Sectio secunda de principiis motus fluidorum* (1770, E396, [44, S. 73–153]) stellte EULER die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= P - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= Q - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= R - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.4)$$

auf, die die Erhaltung des Impulses beschreiben. Dabei sind die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \end{aligned} \quad (2.5)$$

gemäß der „EULERSchen Differentiationsregel“, die EULER zuvor hergeleitet hatte, zu verwenden. Zusätzlich stellte er die Differentialgleichung für die Erhaltung der Masse

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (q u)}{\partial x} + \frac{\partial (q v)}{\partial y} + \frac{\partial (q w)}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

auf, die heute auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet wird. In diesen Gleichungen sind q die Dichte und u, v, w die Geschwindigkeiten in den drei kartesischen Koordinaten x, y, z .

EULER war sich der Bedeutung dieser Gleichungen bewusst und schrieb über diese Gleichungen [40, S. 140–141]:

„Diese drei Gleichungen [(2.4)], verbunden mit der zwischen der Dichtigkeit und den Geschwindigkeiten gefundenen [nämlich (2.6)], enthalten die ganze Theorie der Bewegung flüssiger Körper.

Unser ganzes Geschäft würde also darin bestehen, die Größen p, q, u, v, w als solche Functionen von x, y, z und t zu bestimmen, welche jenen Gleichungen Genüge thun, oder die aus jenen Gleichungen gefundenen Integrale auf bestimmte Fälle anzuwenden.

Da q entweder beständig ist, oder blos vom Drucke p abhängt, oder zugleich von der Wärme, welche wir als eine gegebene Function von x, y, z und t betrachten, so ergibt sich hieraus eine neue Gleichung, weil die Natur des flüssigen Körpers, wie nämlich die Dichtigkeit vom Drucke und von der Wärme abhängt, als bekannt vorausgesetzt wird. Wir können daher q als eine anders woher gegebene Function betrachten, statt welcher wir in den Gleichungen ihren Werth setzen, und wir haben alsdann zur Bestimmung der vier Größen

p , u , v , w vier Gleichungen, woraus erhellet, daß die gegebne Auflösung vollständig und keine Bedingung übersehen ist.

Diese Gleichungen enthalten nun zwar die ganze Theorie der Bewegung flüssiger Körper; aber um sie anzuwenden, muß man die Integrale dieser Gleichungen bestimmen, und diese auf gegebne Fälle anzuwenden wissen – eine Aufgabe, welche mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist.“

Diese Gleichungen bilden die sogenannten EULER-Gleichungen, auf die – zusammen mit einer weiteren Differentialgleichung für die Erhaltung der Energie – später in dieser Dissertation genauer eingegangen wird.

Im Jahr 1775 gelang EULER die Entdeckung, dass der Satz der Erhaltung des Drehimpulses ein unabhängiges Prinzip darstellt [162, S. 30]. Die Gleichungen des Impulserhaltungssatzes erscheinen in [39, §29] (deutsche Übersetzung: [41]) in der Form

$$\begin{aligned} S &= \int z dM \left(\frac{d dy}{dt^2} \right) - \int y dM \left(\frac{d dz}{dt^2} \right) \\ T &= \int x dM \left(\frac{d dz}{dt^2} \right) - \int z dM \left(\frac{d dx}{dt^2} \right) \\ U &= \int y dM \left(\frac{d dx}{dt^2} \right) - \int x dM \left(\frac{d dy}{dt^2} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei in [39] in der dritten Zeile statt des zweiten x ein z steht. Noch viele Jahre nach EULER sind nicht alle Physiker zur Erkenntnis gelangt, dass dies ein unabhängiges Prinzip ist. So schrieb z. B. MACH in [101, S. 272]:

„Die Newtonschen Prinzipien sind genügend, um ohne Hinzuziehung eines neuen Prinzips jeden praktisch vorkommenden mechanischen Fall, ob derselbe nun der Statik oder der Dynamik angehört, zu durchschauen. Wenn sich hierbei Schwierigkeiten ergeben, so sind dieselben immer nur mathematischer (formeller) und keineswegs mehr prinzipieller Natur.“

Bei der Betrachtung der Arbeiten EULERS kann man deutlich erkennen, wie die Erkenntnisse EULERS über die Jahre reiften und wie er auch aus den Errungenschaften seiner Mitstreiter lernte und daraus neue Erkenntnisse gewann. EULER war bis ins hohe Lebensalter produktiv. 34% der Anzahl seiner Werke stammen aus der Zeit 1775–1783, als er bereits über 68 Jahre alt und nahezu vollständig erblindet war! Selbst am Tag seines Todes fand man eine neu begonnene Arbeit über den sensationellen Flug mit einem Heißluftballon der Brüder MONTGOLFIER am 5. Juni 1783, die sein Sohn JOHANN ALBRECHT EULER zur Veröffentlichung brachte [47].

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) vermutete 1760 in *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son* [90, S. 296 ff.], dass in Schallwellen die Beziehung

$$\varphi(D) = D^m \quad (2.8)$$

zwischen dem Druck φ und der Dichte D auftritt [48]. Dabei schätzte er die Konstante m auf $1 + \frac{1}{3}$. Diese Konstante entspricht dem heutigen Isentropenexponenten γ und LAGRANGES Schätzung kommt dem heute bekannten Wert von ungefähr 1,4 recht nahe.

Es ist noch anzumerken, dass die materielle Betrachtungsweise, die heute als LAGRANGESCHE Betrachtungsweise bezeichnet wird, auf EULER zurückgeht [43, S. CXX ff.].

2.1.3 19. Jahrhundert

Die Verbreitung der Dampfmaschine im 18. Jahrhundert führte zu der Notwendigkeit, die Arbeitsvorgänge der Dampfmaschine besser zu verstehen. Im Jahr 1802 veröffentlichte JOSEPH LOUIS GAY-LUSSAC (1778–1850) die Ergebnisse seiner Versuche zur Ausdehnung von Gasen und Dämpfen durch Wärme (*Recherches sur la dilatation des gaz et des vapeurs*, Annales de Chimie, t. 46, p. 137–175; deutsche Übersetzung in [54]). Er fand bei diesen Versuchen heraus, dass sich das Volumen von atmosphärischer Luft, Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff bei der Erwärmung von 0 °C bis 100 °C um den nahezu gleichen Betrag von $37,5 \pm 0,02\%$ ausdehnt und kam zu den Schlussfolgerungen [54, S. 25]:

- „1. Alle Gasarten, gleich viel, welches ihre Dichtigkeit sei und wie viel Feuchtigkeit sie aufgelöst enthalten, und so auch alle Dämpfe, werden durch gleiche Grade von Wärme um gleich viel ausgedehnt.
2. Die permanenten Gasarten vermehren, wenn sie von der Temperatur des Frostpunktes bis zu der des Siedepunktes erhitzt werden, ihr Volumen um $\frac{80}{213,33}$ ihres anfänglichen Volums für das achtzigtheilige, oder um $\frac{100}{255,66}$ für das hunderttheilige Thermometer.“

Dies ist das sogenannte GAY-LUSSACSche Gesetz, das angibt, dass sich ein Gas linear mit steigender Temperatur ausdehnt, wenn der Druck konstant bleibt. Wie beim Zitat angegeben, steht in [54, S. 25] bei der 2. Schlussfolgerung zwar „ $\frac{100}{255,66}$ “, tatsächlich hat GAY-LUSSAC vorher $\frac{100}{266,66}$ berechnet [54, S. 20].

SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840) publizierte 1808 die Abhandlung *Mémoire sur la théorie du son* [132] (englische Übersetzung in [82]). Darin führte er im Abschnitt 22 einen Faktor k ein, um die Schallgeschwindigkeit genauer zu berechnen und berechnete $k = 0,4254$ ([132, S. 362], [98]). Dabei entspricht $k + 1$ dem heutigen Isentropenexponenten γ .

In den Abschnitten 23 und 24 untersuchte POISSON eindimensionale Bewegungen von Luft mit endlichen Amplituden. Für die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} + a \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad (2.9)$$

mit dem Geschwindigkeitspotential φ , der Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dx}$ und der Schallgeschwindigkeit a , fand POISSON die Lösung

$$\frac{d\varphi}{dx} = f\left(x - at - \frac{d\varphi}{dx} t\right) \quad (2.10)$$

wobei f eine beliebige Funktion ist.

Eine weitere wichtige Veröffentlichung von POISSON ist die Arbeit *Sur la Chaleur des gaz et des vapeurs* [134] aus dem Jahr 1823 (englische Übersetzung von HERAPATH in [133]). Dort leitete er das sogenannte POISSONSche Gesetz

$$p' = p \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^k \quad (2.11)$$

für adiabatische Zustandsänderungen her [134, Gl. (5)]. Dabei ist $k = \frac{c}{c'}$ das Verhältnis von der spezifischen Wärmekapazität c bei konstantem Druck zur spezifischen Wärmekapazität c' , bei

konstantem Volumen. Dieses k entspricht dem heutigen Isentropenexponenten γ . POISSON gab an, dass GAY-LUSSAC den Wert für k zu 1,375 ermittelt hatte.

PIERRE-SIMON DE LAPLACE (1749–1827) gelang 1816 die richtige Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Luft [92]. Er erkannte, dass durch Schallwellen auch eine Temperaturerhöhung hervorgerufen wird. Er formulierte die Schallgeschwindigkeit mit den Worten:

„La vitesse réelle du son est égale au produit de la vitesse que donne la formule newtonienne, par la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique de l'air soumis à la pression constante de l'atmosphère et à diverses températures, à sa chaleur spécifique lorsque son volume reste constant.“

In Deutsch: „Die tatsächliche Schallgeschwindigkeit ist gleich dem Produkt der Geschwindigkeit nach NEWTONS Formel mit der Quadratwurzel aus dem Verhältnis der spezifischen Wärme von Luft bei konstantem Druck der Atmosphäre und bei verschiedenen Temperaturen und der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen.“ Dies entspricht der heute bekannten Gleichung $c = \sqrt{\gamma p / \varrho}$.

CLAUDE LOUIS MARIE HENRI NAVIER (1785–1836) legte am 18. März 1822 der Französischen Akademie der Wissenschaften seine Arbeit *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides* [120] vor. Er ging von der abstoßenden Kraft $f(r)$ zwischen den Molekülen aus, die schnell mit zunehmendem Abstand r zwischen den Molekülen abnimmt. Er stellte die Gleichungen

$$\begin{aligned} P - \frac{\partial p}{\partial x} &= \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ Q - \frac{\partial p}{\partial y} &= \varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ R - \frac{\partial p}{\partial z} &= \varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

auf, die heute als NAVIER-STOKES-Gleichungen bezeichnet werden. Hierbei sind P , Q und R äußere Kräfte in den x -, y - und z -Richtungen, wie beispielsweise die Gravitation. Die Größen u , v und w sind die Geschwindigkeiten in den drei Richtungen. Der Druck p wurde mit

$$p = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty r^3 f(r) dr \quad (2.13)$$

und die Materialkonstante ε mit

$$\varepsilon = \frac{8\pi}{30} \int_0^\infty r^4 f(r) dr \quad (2.14)$$

berechnet ([120], [162, S. 260]). Auf die NAVIER-STOKES-Gleichungen wird bei STOKES noch einmal eingegangen.

NICOLAS LÉONARD SADI CARNOT (1796–1832) veröffentlichte 1824 seine Abhandlung *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* (deutsche Übersetzung in [22]), die seine einzige blieb, da er bereits jung an Cholera verstarb

[22, S. 68]. Beim Lesen der Abhandlung neigt man zunächst zu der Vermutung, dass CARNOT die Äquivalenz von Arbeit und Wärme kannte. Es zeigt sich jedoch, dass dem nicht so ist [22, S. 8]:

„Die Erzeugung von bewegender Kraft ist daher bei den Dampfmaschinen nicht sowohl auf einen wirklichen Verbrauch des Wärmestoffs zurückzuführen, sondern auf seinen Übergang von einem heißen Körper zu einem kalten, ...“

CARNOT war sich bewusst, dass Arbeit nur verrichtet werden kann, wenn ein Temperaturunterschied vorhanden ist [22, S. 8]:

„Nach diesem Prinzip genügt es zur Gewinnung bewegender Kraft nicht, Wärme hervorzubringen: man muss sich auch Kälte verschaffen; ohne sie wäre Wärme unnütz.“

Er gab auch die Umkehrung der Prozesse einer Dampfmaschine an. Er beschrieb damit die Funktionsweise einer Wärmepumpe [22, S. 13]:

„Durch unsere ersten Operationen fand gleichzeitig Erzeugung von bewegender Kraft und Ueberführung des Wärmestoffs vom Körper A zum Körper B statt; durch die umgekehrten Operationen ergibt sich gleichzeitig ein Verbrauch von bewegender Kraft und die Rückkehr des Wärmestoffs aus dem Körper B in den Körper A .“

Auf den Seiten 20 und 21 in [22] wird der heutzutage als CARNOT-Kreisprozess bezeichnete Prozess beschrieben. CARNOT war sich bewusst, dass dieser Prozess die optimale Wirkung erzielt, denn er schrieb [22, S. 21]:

„Die Luft hat uns als Wärmemaschine gedient; wir haben sie sogar auf die möglichst vorteilhafte Weise benutzt, weil keine unbenutzte Wiederherstellung des Gleichgewichts des Wärmestoffes stattgefunden hat.“

Er erkannte, dass die verrichtete Arbeit von der Temperatur abhängig ist [22, S. 42]:

„Der Fall des Wärmestoffes bringt bei niedrigeren Graden der Temperatur mehr bewegende Kraft hervor, als bei höheren Graden. So wird eine gegebene Wärmemenge mehr bewegende Kraft entwickeln, wenn sie von einem auf 1° erhaltenen Körper zu einem auf 0° erhaltenen übergeht, als wenn beide Körper die Temperaturen 101° und 100° besessen hätten.“

Dies ist richtig, auch wenn diese Schlussfolgerung auf der falschen Annahme beruhte, dass keine Wärme bei der Gewinnung von Arbeit verschwindet.

ROBERT BROWN (1773–1858) beschrieb 1827 die von ihm mit einem Mikroskop beobachteten Bewegungen von Pollen und anderen kleinen Teilchen in Wasser. Diese Beobachtungen wurden 1828 in [16] veröffentlicht. BROWN erkannte jedoch noch nicht, dass diese Bewegung der Pollen durch die zufälligen Stöße der Wassermoleküle verursacht wird. Diese nach ihm benannte BROWNSche Bewegung wurde erst 1905 und 1906 von ALBERT EINSTEIN und MARIAN VON SMOLUCHOWSKI molekular kinetisch erklärt [34, 35, 156].

JULIUS ROBERT MAYER (1814–1878) war promovierter Mediziner. Seine erste Abhandlung wollte er 1841 in den Poggendorff-Annalen publizieren. Diese Abhandlung wurde aber abgelehnt, da sie voller grober Fehler und Irrtümer war [112, S. 81]. 1842 veröffentlichte MAYER die Abhandlung *Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur* [109], die den Energieerhaltungssatz

beinhaltet. Auch diese Abhandlung enthält noch einige ungenaue physikalische Begriffe. Beispielsweise berechnet er die kinetische Energie, die er als lebendige Kraft bezeichnet, zu mc^2 statt zu $\frac{mc^2}{2}$.

Zu damaliger Zeit war der Begriff Energie noch nicht eingeführt worden. Allgemein sprach man damals von Kraft statt Energie. Die Wichtigkeit einer unterschiedlichen Benennung erkannte MAYER mit [111, S. 27]:

„Unter den obwaltenden Umständen ist nun nichts übrig, als entweder der Newton’schen todten, oder der Leibnitz’schen lebendigen Kraft die Benennung ‚Kraft‘ zu entziehen, wobei man aber in jedem Falle mit dem herrschenden Sprachgebrauche in Conflict geräth.“

Selbst heute noch wird oft der Begriff Kraft fälschlicherweise für Energie verwendet, man denke nur an den Begriff Kraftwerk.

Wenn man bedenkt, dass MAYER Mediziner und nicht Physiker war, dann muss seine Leistung, den Erhaltungssatz der Energie zu erkennen, um so höher eingeschätzt werden. Er musste vielen Anfeindungen widerstehen, z. B. schrieb ein junger Physiker [112, S. 85]:

„Von dem Übergang der Bewegung in Wärme oder davon, daß Wärme als Äquivalent der Bewegung gelten kann, kann keine Rede sein.“

Die vielen abfälligen Beurteilungen wirkten schlimm auf MAYERS Gesundheit [112, S. 85].

MAYER postulierte nicht nur den Energieerhaltungssatz, sondern er berechnete auch das Verhältnis zwischen den Energieformen. In [109] stellt er die Frage: „Z. B. wir müssen ausfindig machen, wie hoch ein bestimmtes Gewicht über den Erdboden erhoben werden müsse, daß seine Fallkraft [potentielle Energie] äquivalent sey der Erwärmung eines gleichen Gewichtes Wasser von 0° auf 1° C.“ MAYER findet heraus, das Herabsinken einer Masse um 365 m der Erwärmung der gleichen Masse Wasser von 0° C auf 1° C entspricht.

In der Veröffentlichung *Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel* aus dem Jahr 1845 gibt MAYER den Energieerhaltungssatz für alle damals bekannten Energieformen an [110, S. 32 ff.].

Der Name von GEORGE GABRIEL STOKES (1819–1903) ist durch die sogenannten NAVIER-STOKES-Gleichungen bekannt, die STOKES im Jahr 1845 in der Arbeit „*On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion*“ veröffentlichte. In dieser Arbeit stellte Stokes die Gleichungen

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} - \mu \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) = 0 \quad \text{etc.}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad (2.15)$$

für inkompressible Flüssigkeiten mit innerer Reibung auf [161, Gl. (13)]. Dabei steht X für externe Kräfte wie beispielsweise Gravitation.

STOKES schrieb einleitend zu seiner Arbeit, dass er diese Gleichungen selbst hergeleitet hatte und erst anschließend herausfand, dass POISSON eine Denkschrift zu dem gleichen Thema geschrieben

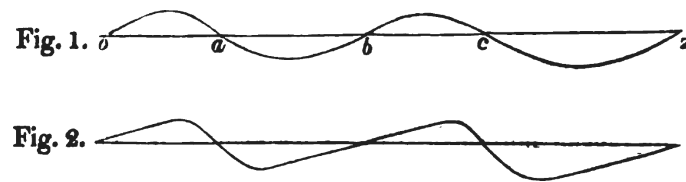


Abbildung 2.4: Abbildung von STOKES zur nichtlinearen Ausbreitung von Wellen [159]

hatte. STOKES meinte, dass seine angewandte Methode sich von POISSONS so unterscheidet, dass er es gerechtfertigt fand, seine Arbeit der Gesellschaft vorzulegen. Außerdem fügte STOKES noch die Fußnote

„The same equations have also been obtained by Navier in the case of an incompressible fluid (*Mém. de l'Académie*, t. VI. p. 389), but his principles differ from mine still more than do Poisson's.“

hinzu. SZABÓ wies darauf hin, dass ADHÉMAR-JEAN-CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT (1797–1886) bereits elf Jahre vor STOKES eine Denkschrift mit ähnlichen Ergebnissen vorgelegt hatte. SZABÓ unterstellte, dass Stokes diese Denkschrift nicht kannte, sonst hätten NAVIER und SAINT-VENANT als Namensgeber dieser Gleichungen erhalten müssen [162, S. 267 f.].

Die NAVIER-STOKES-Gleichungen sind ein Problem der sieben Millennium-Probleme, die vom Clay Mathematics Institute (CMI) in Cambridge (Massachusetts) im Jahr 2000 gestellt wurden [46]. Bisher wurde nur ein Problem der sieben Millennium-Probleme gelöst, nämlich die POINCARÉ-Vermutung, die von GRIGORI JAKOWLEWITSCH PERELMAN im Jahr 2003 bewiesen wurde [128, 129, 130]. Beim Millennium-Problem der NAVIER-STOKES-Gleichungen geht es darum, die Existenz und Glattheit der Lösung der Gleichungen zu beweisen. Die Bedeutung und Komplexität der NAVIER-STOKES-Gleichungen lassen sich daran erkennen, dass die Gleichungen ein Problem der Millennium-Probleme sind und dass dieses Problem bisher nicht gelöst wurde. Die EULER-Gleichungen werden zwar aus den NAVIER-STOKES-Gleichungen erhalten, wenn die Viskosität ν gleich Null gesetzt wird, sind aber nicht notwendigerweise einfacher als die NAVIER-STOKES-Gleichungen [46].

Im Jahr 1848 veröffentlichte STOKES den Artikel „*On a difficulty in the Theory of Sound*“ [159]. Er ging auf die von POISSON gefundene Gleichung (2.10) der Form $w = f(z - (a + w)t)$ ein und zeigte, dass die Steigung der Geschwindigkeitskurve $w(z, t)$

$$\frac{\frac{dw}{dz}\Big|_{t=0}}{1 + \frac{dw}{dz}\Big|_{t=0} t} \quad (2.16)$$

beträgt. STOKES bemerkte, dass die Kurve immer steiler wird, wenn $\frac{dw}{dz}\Big|_{t=0}$ negativ ist und damit der Nenner in (2.16) kleiner wird (Abbildung 2.4).

Er stellte fest, dass man nicht ohne Einschränkungen größere Werte für t einsetzen darf, als die Zeit t , zu der der Nenner in (2.16) Null erreicht. Dazu schrieb STOKES:

„Of course, after the instant at which the expression (2.16) becomes infinite, some motion or other will go on, and we might wish to know what the nature of that motion was. Perhaps the most natural supposition

to make for trial is, that a surface of discontinuity is formed, in passing across which there is an abrupt change of density and velocity. The existence of such a surface will presently be shown to be possible, on the two suppositions that the pressure is equal in all directions about the same point, and that it varies as the density. I have however convinced myself, by a train of reasoning which I do not think it worth while to give, inasmuch as the result is merely negative, that even on the supposition of the existence of such a surface of discontinuity, it is not possible to satisfy all the conditions of the problem by means of a single function of the form $f\{z - (a + w)t\}$."

STOKES leitete anschließend die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho w - \rho' w' &= (\rho - \rho') \gamma \\ (\rho w - \rho' w') \gamma - (\rho w^2 - \rho' w'^2) &= a^2 (\rho - \rho') \end{aligned} \quad (2.17)$$

für die Erhaltung der Masse und des Impulses an der Diskontinuität her. Dabei ist γ die Geschwindigkeit der Diskontinuität. STOKES schrieb weiter:

„The strange results at which I have arrived appear to be fairly deducible from the two hypotheses already mentioned. It does not follow that the discontinuous motion considered can ever take place in nature, for we have all along been reasoning on an ideal elastic fluid which does not exist in nature. [...] It appears, then, almost certain that the internal friction would effectually prevent the formation of a surface of discontinuity, and even render the motion continuous again if it were for an instant discontinuous.“

Offensichtlich kannte STOKES den Energieerhaltungssatz damals noch nicht. Sehr interessant sind die Briefwechsel mit BARON RAYLEIGH und THOMSON, die ihn auf die Energieerhaltung hinwiesen [144]. Hätte STOKES auch noch die Sprungbedingung für die Energieerhaltung aufgestellt, dann müssten die RANKINE-HUGONOT-Bedingungen heute anders bezeichnet werden. Bemerkenswerterweise strich STOKES den Teil mit den Sprungbedingungen in dem Nachdruck des Artikels in seinen gesammelten Werken im Jahr 1883 [160] mit der Anmerkung, dass der Energieerhaltungssatz verletzt wird, bzw. dass die Sprungbedingung für die Energieerhaltung nur die Lösung $\rho = \rho'$ zulässt. Der Fehler lag in der Annahme der Zustandsgleichung in der Form $p = p(\rho)$ unter Vernachlässigung der inneren Energie. Dies ist bemerkenswert, da EULER bereits 1768 die Zustandsgleichung (2.3) angab und da RANKINES Beitrag aus dem Jahr 1870 [135] bekannt gewesen sein müsste.

WILLIAM THOMSON (1824–1907) wurde 1892 zum 1. BARON KELVIN OF LARGS geadelt und wird seitdem allgemein als LORD KELVIN bezeichnet. Er schlug 1848 in [165] die Einführung einer absoluten Temperaturskala basierend auf CARNOTS Untersuchungen vor. Die darin vorgeschlagene absolute Temperaturskala lautet [165, S. 316]:

„The characteristic property of the scale which I now propose is, that all degrees have the same value; that is, that a unit of heat descending from a body A at the temperature T° of this scale, to a body B at the temperature $(T - 1)^\circ$, would give out the same mechanical effect, whatever be the number T .“

Diese vorgeschlagene Skala unterscheidet sich noch von der später verwendeten KELVIN-Skala. In [165, S. 315] vertrat THOMSON auch noch die Ansicht, dass Wärme nicht in mechanische Effekte umgewandelt werden kann. Später änderte er jedoch diese Ansicht.

Seinen zweiten Vorschlag für die absolute Temperaturskala formulierte er 1854 mit den Worten [83, S. 351]:

„If any substance whatever, subjected to a perfectly reversible cycle of operations, takes in a heat only in a locality kept at a uniform temperature, and emits heat only in another locality kept at a uniform temperature, the temperatures of these localities are proportional to the quantities of heat taken in or emitted at them in a complete cycle of the operations.“

was mit der Gleichung

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (2.18)$$

ausgedrückt wird, wobei Q_1 und Q_2 die zu- und abgeführten Wärmen im CARNOT-Kreisprozess bei den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 sind [169, S. 200] (siehe auch [166, S. 117], [167, S. 280], [168, S. 123 Fußnote †]). THOMSON berechnete den Schmelzpunkt von Wasser auf der neuen Skala zu ungefähr 273,7 [83, S. 352].

RUDOLF JULIUS EMANUEL CLAUSIUS (1822–1888) legte 1850 in [25, 26] die Grundlagen für den 2. Hauptsatz der Thermodynamik, den er 1854 in [27] mit den Worten

„Die algebraische Summe aller in einem Kreisprocesse vorkommenden Verwandlungen kann nur positiv seyn.“

formulierte. Er stellte in [27] fest, dass für umkehrbare Kreisprozesse die Gleichung $\int \frac{dQ}{T} = 0$ gilt. CLAUSIUS führte 1865 in [29] in Anlehnung an den Begriff *Energie*, den nach CLAUSIUS Angaben THOMSON vorschlug, den Begriff *Entropie* ein und stellte die Ungleichung

$$S - S_0 = \int \frac{dQ}{T} \geq 0 \quad (2.19)$$

auf, wobei S die Entropie ist.

Im Jahr 1858 führte CLAUSIUS das Konzept der mittleren freien Weglänge zwischen den Molekülen von Gasen ein [28].

Angeregt durch CLAUSIUS Arbeiten veröffentlichte JAMES CLERK MAXWELL (1831–1879) im Jahr 1860 seine Untersuchungen zur Gastheorie, worin er die Bewegungen und Kollisionen einer großen Zahl elastischer Kugeln untersuchte [107, 108]. Er beschrieb in [107, S. 23] die Gleichung der Geschwindigkeitsverteilung:

$$dN = N \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv \quad . \quad (2.20)$$

Diese Gleichung beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeiten der Partikel und wird heute als MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung oder auch als MAXWELL-BOLTZMANN-Verteilung bezeichnet. Diese Veröffentlichungen von MAXWELL werden heute als einer der Grundsteine der Gaskinetik betrachtet [63].

Der Geistliche SAMUEL EARNSHAW (1805–1888) reichte 1858 seine Arbeit *On the mathematical theory of sound* ein, die 1860 veröffentlicht wurde [33]. Darin entwickelte er Lösungen für die

eindimensionale Ausbreitung von Wellen für isotherme, isentrope und allgemeine Druck-Dichte-Beziehungen. Er erkannte, dass laute Schallwellen schneller sind als leise, so dass der Befehl „Feuer“ und der Knall eines Gewehres in gewissem Abstand in umgekehrter Reihenfolge gehört werden können:

„I should expect, therefore, that in circumstances where the human voice can be heard at a sufficiently great distance, the *command* to fire a gun, if instantly obeyed, and the *report* of the gun, might be heard at a long distance in an inverse order; i.e. *first* the report of the gun, and *then* the word 'fire.'“

Dabei verwies er auf [126, S. 239], wo geschrieben steht:

„The Experiments on the 9th February, 1822, were attended with a singular circumstance, which was – the officers' word of command 'fire,' was several times distinctly heard both by Captain Parry and myself, about one beat of the chronometer *after* the report of the gun; from which it would appear, that the velocity of sound depended in some measure on its intensity.“

EARNSHAW beschrieb weiterhin das Auftreten von Diskontinuitäten, die er *bore* nannte.

BERNHARD RIEMANN (1826–1866) war ein herausragender Mathematiker, der trotz seines kurzen Lebens die mathematische Welt entscheidend beeinflusste. Seine bedeutendsten Werke liegen auf dem Gebiet der Zahlentheorie und der Differentialgeometrie. Aber auch auf dem Gebiet der Luftstoßwellen gelang ihm mit seinem im Jahr 1859 vorgelegten Werk *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* [140] ein wichtiger Meilenstein. Darin entwickelte er die Methode der Charakteristiken zur Lösung hyperbolischer Systeme partieller Differentialgleichungen. Er führte die zwei Größen r und s ein, die heute als RIEMANN-Invarianten bezeichnet werden. Er erkannte das Auftreten von Verdichtungsstößen und von Verdünnungswellen und erläuterte seine Ausführungen am Beispiel des später nach ihm benannten RIEMANN-Problems. RIEMANN berücksichtigte für seine Berechnungen nur die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls, jedoch nicht die Energieerhaltungsgleichung.

AUGUST JOSEPH IGNAZ TOEPLER (1836–1912) entwickelte das Schlierenverfahren und beobachtete damit erstmals Stoßwellen. Da die Fachzeitschriften seine Abhandlung zurückwiesen, ließ er sie 1864 als Broschüre [170] bei Max Cohen & Sohn drucken [171, S. 57]. Zur Abbildung 2.5 schrieb er:

„Der hübscheste Versuch, welcher sich mit den Wellensphäroiden ausführen lässt, ist ihre Reflexion. Klemmt man zwischen die isolirten Korke $a b$ Fig. 11, welche die Platinelektroden tragen, eine blanke Glastafel $x y$ ein, so dass sie etwa $1/2$ bis $3/4$ Zoll von dem axialen Funken c absteht, so zeigt sich neben dem ursprünglichen Wellensystem noch ein zweites, welches in Form von Kreissegmenten über der Glastafel ausgespannt ist. Dieses zweite System hat ganz augenscheinlich ein imaginäres Centrum c' in gleichem Abstände des Funkens c jenseits der reflectirenden Fläche. Ich glaube, dass das Grundgesetz über die Reflexion der Wellenbewegungen in der That kaum einer schöneren Verification bedarf.“

Bei dem letzten zitierten Satz ist zu beachten, dass das „Grundgesetz über die Reflexion der Wellenbewegungen“ (d.h. Einfallswinkel = Ausfallswinkel) bei Stoßwellen im Allgemeinen nicht eingehalten wird. Nur in Spezialfällen behält dieses Gesetz seine Gültigkeit, beispielsweise im Grenzfall sehr kleiner Überdrücke.

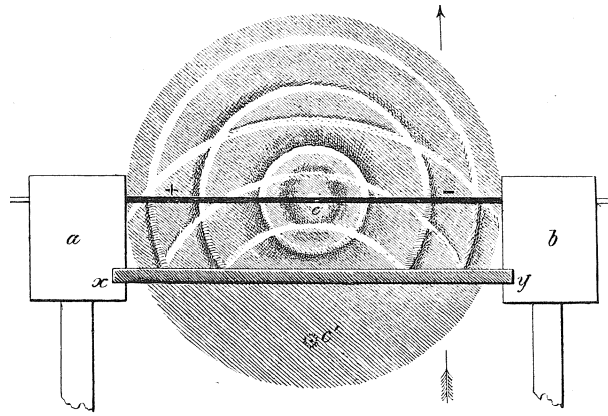


Fig. 11.

Abbildung 2.5: Schlierenverfahren von TOEPLER, Reflexion von Funkenwellen [171]

LUDWIG BOLTZMANN (1844–1906) präsentierte 1868 in [8] eine Herleitung der MAXWELLSchen Geschwindigkeitsverteilung, ohne besondere Annahmen zu den Kollisionen zwischen den Molekülen zu treffen. Er nahm an, dass eine bestimmte Menge an Energie so unter einer endlichen Anzahl von Molekülen verteilt ist, dass alle Kombinationen von Energien gleich wahrscheinlich sind ([18, S. 234 f.], [8, S. 544 ff.]).

BOLTZMANN leitete 1872 die Gleichung

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \left[\frac{f(\xi, t) f(x+x'-\xi, t)}{\sqrt{\xi} \sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x, t) f(x', t)}{\sqrt{x} \sqrt{x'}} \right] \sqrt{x x'} \psi(x, x', \xi) dx' d\xi \quad (2.21)$$

her [9, Gl. (16)]. Diese Gleichung ist ein Spezialfall der allgemeinen BOLTZMANNschen Transportgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} + Y \frac{\partial f}{\partial \eta} + Z \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \int d\omega_1 \int b db \int d\varphi V (f f_1 - f'_1 f) = 0 \quad (2.22)$$

([9, Gl. (44)], [18, S. 237]). BOLTZMANN zeigte, dass für die MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = 0$ erhalten wird. Dies bedeutet: Wenn die Geschwindigkeitsverteilung die MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung annimmt, dann verändert sie sich nicht mehr. BOLTZMANN ging über diesen Beweis hinaus und konnte beweisen, dass beliebig gewählte Geschwindigkeitsverteilungen sich mit der Zeit der von MAXWELL gefundenen annähern. Dies gelang BOLTZMANN durch die Einführung der Größe

$$E = \int_0^\infty f(x, t) \left\{ \log \left[\frac{f(x, t)}{\sqrt{x}} \right] - 1 \right\} dx \quad (2.23)$$

und dem Beweis, dass $\frac{dE}{dt}$ immer negativ ist und nur für $f(x, t) = C \sqrt{x} e^{-hx}$ gleich Null wird [9, S. 306]. Die Größe E wurde später mit H bezeichnet. Das Theorem, dass H für Nichtgleichgewichtssysteme immer abnimmt, wird heute als BOLTZMANNsches H -Theorem bezeichnet.

BOLTZMANN zeigte 1877 in [10], dass die Entropie mit der Verteilungswahrscheinlichkeit verknüpft ist und formulierte dies mit den Worten [10, S. 428]:

„Es ist daher das Permutabilitätsmass eine Größe, welche für den Zustand des Wärmegleichgewichtes bis auf einen constanten Factor und Addenden mit der Entropie identisch ist“

In [18, S. 241] steht zwar geschrieben, dass in [10] die berühmte Beziehung $S = k \log W$ entwickelt und angewendet wurde, jedoch habe ich diese Gleichung in dieser Abhandlung BOLTZMANNs nicht gefunden. Erstmals führte wohl MAX PLANCK (1858–1947) im Jahr 1900 die Gleichung $S_N = k \log W + \text{const}$ [131, Gl. (3)] ein. PLANCK berechnete die Konstante k , die heute als BOLTZMANN-Konstante bezeichnet wird, zu $k = 1,346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}}$.

WILLIAM JOHN MACQUORN RANKINE (1820–1872) stellte in seiner im Jahr 1869 eingereichten Arbeit *On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance* [135] die Sprungbedingungen

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{S} \left\{ (\gamma + 1) \frac{p}{2} + (\gamma - 1) \frac{P}{2} \right\} \\ a^2 &= m^2 S^2 = S \left\{ (\gamma + 1) \frac{p}{2} + (\gamma - 1) \frac{P}{2} \right\} \\ u &= \frac{p - P}{m} = (p - P) \sqrt{\left\{ \frac{S}{(\gamma + 1) \frac{p}{2} + (\gamma - 1) \frac{P}{2}} \right\}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

an einer Stoßfront auf. Diese Gleichungen wurden aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie hergeleitet. Diese Gleichungen werden heute als RANKINE-HUGONIOT-Gleichungen bezeichnet.

Am 7. März 1870 schrieb THOMSON zu STOKES [144, 177]:

„MY DEAR STOKES,
I have read Rankine's paper with great interest. The simple elementary method by which he investigates the condition for sustained uniformity of type is in my opinion very valuable. It ought as soon as it is published to be introduced into every elementary book henceforth written on the subject.“

Bei der Kenntnis dieses Briefes ist es verwunderlich, dass STOKES in seinen gesammelten Werken im Jahr 1883 den Teil mit den Sprungbedingungen aus seiner 1848er Arbeit [159] strich.

Am 26. Oktober 1885 reichte PIERRE HENRI HUGONIOT (1851–1887) seine Arbeit bei der Akademie der Wissenschaften ein. HUGONIOT starb bereits vor der Veröffentlichung der Arbeit und konnte nach Angaben der Herausgeber nicht mehr die Änderungen vornehmen, die er anscheinend noch beabsichtigte vorzunehmen. HUGONIOTs Arbeit wurde in zwei Teilen veröffentlicht. Der erste Teil [79] erschien 1887. Dieser Teil beinhaltet die ersten drei Kapitel, worin die Theorie der charakteristischen Kurven, die Bewegungsgleichungen für ideale Gase und die Bewegung in Gasen ohne Diskontinuitäten behandelt wurden. Besonders interessant ist der 1889 erschienene zweite Teil [80], in dem HUGONIOT im fünften Kapitel über Diskontinuitäten schrieb.

Die sogenannte HUGONIOT-Gleichung wird oft in der Form

$$e_1 - e_0 = \frac{1}{2} (p_1 + p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (2.25)$$

angeführt. Man findet diese Gleichung in [80] jedoch nicht in dieser Form [144], sondern in der Form

$$\frac{p + p_1}{2} + \frac{p_1 - p}{m - 1} \frac{1}{z_1 - z} + \frac{p_1 z_1 - p z}{m - 1} \frac{1}{z_1 - z} [= 0] \quad (2.26)$$

[80, S. 82]. Mit $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$, $\gamma = m$ und $\frac{1}{\rho} = z + 1$ können die Gleichungen (2.25) und (2.26) ineinander überführt werden.

SALAS stellte in [144] fest, dass die Entwicklung der Theorie der Stoßwellen von POISSON bis zu HUGONOT durch folgende Faktoren behindert wurde:

1. ein fehlendes Verständnis dafür, was eine zulässige Lösung für eine partielle Differentialgleichung ist,
2. das unvollständige Wissen über die Thermodynamik zu damaliger Zeit,
3. das fehlende Erkennen, dass die Stoßwelle ein Grenzfall der NAVIER-STOKES-Gleichungen ist.

Und selbst nach HUGONOT findet man fehlerhafte Literatur über das Auftreten von Diskontinuitäten [144].

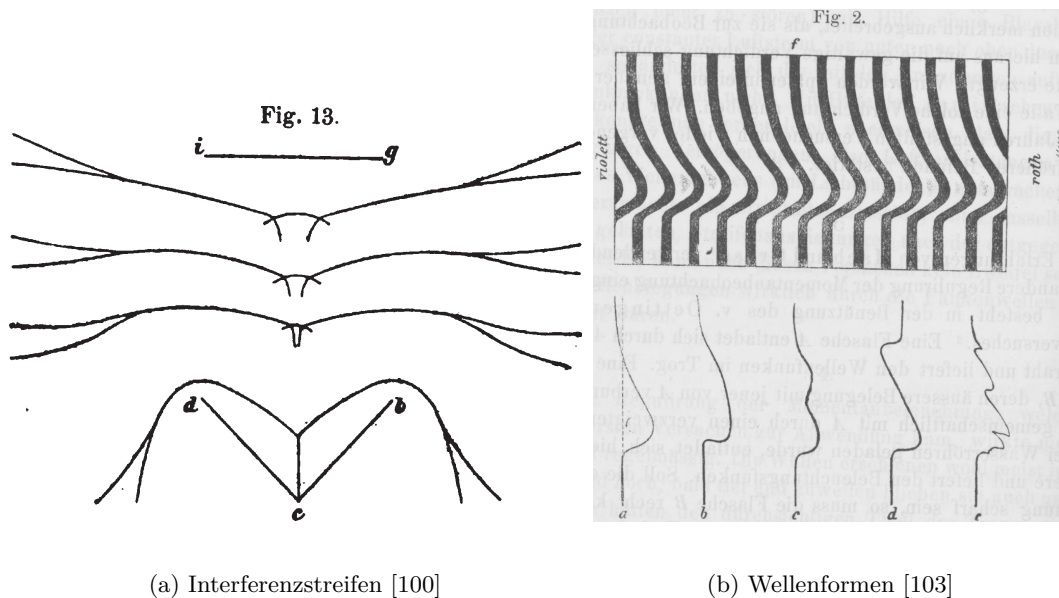


Abbildung 2.6: MACHS Abbildungen zu seinen Versuchen zu Funkenwellen

ERNST MACH (1838–1916) berichtete 1878 in [100] über Experimente mit Funkenwellen. Er erzeugte Stoßwellen mit zwei elektrischen Funken und beobachtete die Auswirkungen auf eine beruhte Platte. In den Interferenzstreifen auf der Platte erkannte MACH eine V-förmige Ausbreitung der Wellen (Abbildung 2.6(a)). Die Ursache für diese V-förmigen Interferenzstreifen ist eine irreguläre Reflexion, die später als MACH-Reflexion bezeichnet wurde.

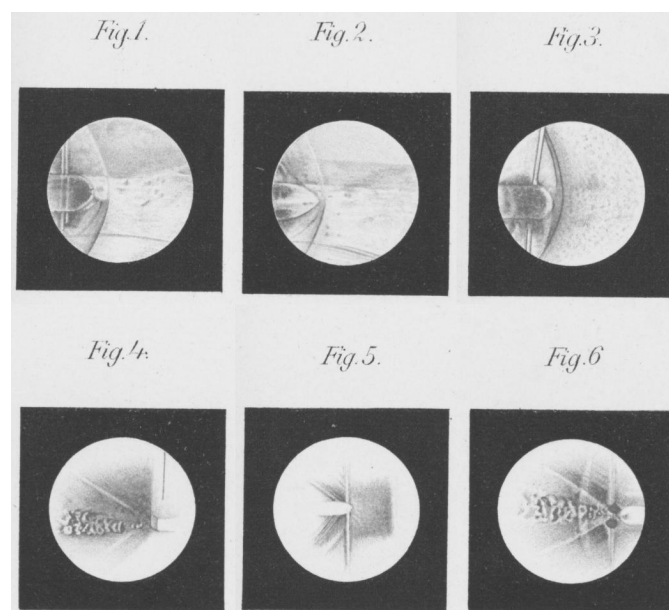


Abbildung 2.7: MACHs Fotografien von Projektilen [102]

MACH & v. WELTRUBSKÝ untersuchten 1879 [103] mit optischen Methoden die Formen von Funkenwellen. In Bezug zur Abbildung 2.6(b) schrieben sie:

„Es kamen nun wieder die mannigfaltigsten Wellenformen vor, von welchen einige in der Fig. 2 dargestellt sind. Die häufigste Form, die man als die Normalform bezeichnen könnte, war *a*, eine in der Fortpflanzungsrichtung steil abfallende Verdichtung, welcher eine schwächere, dafür aber längere Verdünnung folgte.“

Im Jahr 1887 gelang es MACH & SALCHER die Stoßwellen an fliegenden Projektilen mit dem Schlierenverfahren zu fotografieren [102] (Abbildung 2.7). Einen ausführlichen Überblick über MACHs Arbeiten gab REICHENBACH in [137].

2.1.4 Erste Hälfte des 20. Jahrhunderts

JOHN WILLIAM STRUTT, 3. BARON RAYLEIGH (1842–1919) veröffentlichte 1910 seine Arbeit *Aerial Plane Waves of Finite Amplitude* [136]. Darin gab er zunächst eine hervorragende Zusammenfassung über die Arbeiten von POISSON, STOKES, EARNSHAW, RIEMANN, RANKINE und HUGONOT. Anschließend untersuchte er den Einfluss von Viskosität und Wärmeleitung auf die Stoßwellen. Er berechnete numerisch ein Beispiel und gab die Dicke der Stoßfront in der Größenordnung von $\frac{1}{3} \times 10^{-5}$ cm an.

GEOFFREY INGRAM TAYLOR (1886–1975) untersuchte ebenfalls im Jahr 1910 in *The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases* [163] den Einfluss von Viskosität und Wärmeleitung auf die Stoßfront. Er berechnete die Dicke T der Stoßfront zu $T \approx (u_1 - u_2)^{-1}$. Dabei ist die Gasgeschwindigkeit u in der Einheit cm/s einzusetzen, um die Dicke T in der Einheit cm zu erhalten [164].

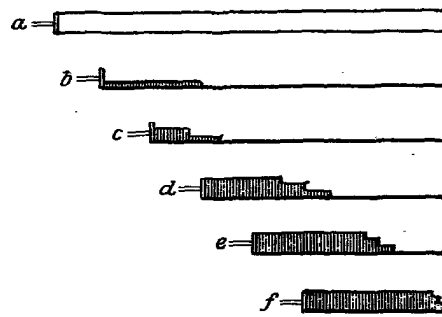


Fig. 1.

Abbildung 2.8: BECKERS Gedankenexperiment zu Entstehung von Stoßwellen [2]

RICHARD BECKER (1887–1955) hat in der 1921 eingereichten Arbeit *Stoßwelle und Detonation* [2] das damalige Wissen gekonnt zusammengefasst und mit eigenen Erkenntnissen bereichert. Er begann im §1 mit einem berühmten Gedankenexperiment zur Entstehung von Stoßwellen (Abbildung 2.8), das er mit folgenden Worten beschrieb:

„Ein nach rechts hin sehr langes (Fig. 1a) und links durch einen Stempel verschlossenes Rohr sei erfüllt von ruhender, überall gleich beschaffener Luft. Wir erteilen dem Stempel eine sehr kleine Geschwindigkeit dw und erzeugen dadurch im Gas eine schwache Verdichtungswelle, die nach rechts hin mit der Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{\gamma RT}$ fortschreitet. In einem bestimmten Augenblick (Fig. 1b) ist dann die Luft rechts vom Wellenkopf unverändert und in Ruhe, während sie zwischen Wellenfront und Stempel um einen Betrag $d\rho$ adiabatisch verdichtet ist und die Geschwindigkeit dw besitzt. Nunmehr vergrößern wir die Geschwindigkeit des Stempels nochmals um den Betrag dw , wodurch in der zuletzt erwähnten Luftmasse eine zweite Verdichtungswelle erzeugt wird, die hinter der ersten herläuft (Fig. 1c). Durch häufige Wiederholung dieses Verfahrens bringen wir schließlich den Stempel auf die endliche Geschwindigkeit w . In der Gasmasse haben wir damit einen treppenförmigen Wellenberg erzeugt, an dessen oberster Stufe die Gasteilchen ebenfalls die Geschwindigkeit w besitzen. Wir fragen nach dem weiteren Schicksal dieses Wellenberges. Zunächst sehen wir, daß die oberen Stufen unserer Treppe relativ zum Rohr eine größere Geschwindigkeit haben als die tieferen. Denn einmal ist die Temperatur und daher auch die Schallgeschwindigkeit dort größer und überdies hat das Gas selbst an den höheren Stufen die größere Strömungsgeschwindigkeit. Die Folge wird sein, daß die einzelnen Stufen im weiteren Verlauf sich zusammenschieben, daß also die Wellenfront immer steiler wird (Fig. 1e und 1f). Es ist vorerst gar nicht zu übersehen, was geschehen wird, wenn die Steilheit des Anstieges nach einer gewissen Zeit (die wir im §2 berechnen werden) unendlich wird.

Wenn man dagegen (durch Bewegen des Stempels nach links hin) eine Verdünnungswelle im Rohr erzeugt, so erkennt man durch eine ganz analoge Betrachtung, daß hier jene Schwierigkeit nicht auftritt. Die Verdünnungswelle wird im Gegenteil immer flacher, je weiter sie in das Rohr eindringt.

In den üblichen Darstellungen, wie auch später in §9 dieser Arbeit werden ‚Verdünnungsstöße‘ ausgeschlossen, indem man zeigt, daß sie mit einer Entropieabnahme verbunden sind, also zufolge dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht möglich sind. Hier dagegen wurde gezeigt, daß sie aus Gründen der reinen Mechanik nicht auftreten können.“

Im anschließenden §2 behandelte BECKER den gleichen Vorgang rechnerisch und erläuterte dies an einem Beispiel. In diesem Beispiel wird der Stempel mit einer Beschleunigung von 200 m/s^2 auf eine Geschwindigkeit von 100 m/s beschleunigt. Mit $c_0 = 330 \text{ m/s}$ und $\gamma = 1,4$ berechnete er, dass der Verdichtungsstoß zur Zeit $T = 1,38 \text{ s}$ am Ort $x = 453 \text{ m}$ entsteht.

Für die Entstehung von Verdichtungsstößen und Verdünnungsstößen gab BECKER folgende Bedingung an:

„In einem gegebenen Medium können mechanisch nur Verdichtungsstöße oder nur Verdünnungsstöße entstehen, je nachdem ob $\left(\frac{d^2 p}{dv^2}\right)_{ad}$ positiv oder negativ ist.“

In den folgenden Paragraphen ging BECKER auf den Einfluss der Wärmeleitung und der Viskosität ein. In §7 berechnete er die Frontbreite der Stoßwelle und zeigte, dass die Frontbreite für einen Druck von 8 atm in der Stoßwelle kleiner als die mittlere Weglänge ($90 \cdot 10^{-7}$ cm) und bei einem Druck über 2000 atm sogar kleiner als der mittlere Abstand der Moleküle ($3,3 \cdot 10^{-7}$ cm) ist. BECKER bemerkte, dass die allgemeinen Gleichungen [2, Gl. (3)] der Kontinuumsmechanik nicht für die Beschreibung der wirklichen Vorgänge innerhalb der Wellenfront ausreichend sind. Abschließend betrachtete BECKER Detonationen und Verbrennungen und leitete aus Stabilitätsbetrachtungen die Berechnung der Detonationsgeschwindigkeit ab.

HANS ALBRECHT BETHE (1906–2005) entwickelte 1942 in seinem Report *On the Theory of Shock Waves for an Arbitrary Equation of State* [7] drei Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Verdichtungsstößen für Materialien mit allgemeinen Zustandsgleichungen:

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_S > 0 \quad , \quad (2.27)$$

$$\Gamma = V \left. \frac{\partial p}{\partial E} \right|_V > -2 \quad , \quad (2.28)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_E < 0 \quad . \quad (2.29)$$

BETHE bezeichnete die Bedingung (2.27) als die wichtigste der drei Bedingungen. Er wies darauf hin, dass diese Bedingung bei Phasenübergängen verletzt werden kann. Die zweite Bedingung (2.28) ist für alle Materialien erfüllt, wenn sich das Material mit steigender Temperatur bei konstantem Druck ausdehnt. Selbst für einen negativen Ausdehnungskoeffizienten, wie bei flüssigem Wasser bei 0°C , ist diese Bedingung erfüllt. Für schmelzendes Eis I scheint der Wert für $V \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_V$ kleiner als -2 zu werden, nämlich $-2,1$. Die Bedingungen (2.27) und (2.28) sind hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Erhaltungsgleichungen über die Stoßfront. Die dritte Bedingung (2.29) ist eine hinreichende Bedingung für die Stabilität der Stoßfront.

HERMANN WEYL (1885–1955) veröffentlichte 1949 in [176] den bereits 1944 eingereichten Report *Shock Waves in Arbitrary Fluids*. Diese Arbeit hat gewisse Ähnlichkeiten mit dem Report von BETHE, den WEYL – wie er selbst angibt – um 1944 nicht kannte. WEYL formulierte ebenfalls Bedingungen für die Zustandsgleichung, unter denen sich Stoßwellen ausbilden können. Er formulierte die Bedingungen mit den Gleichungen

$$\left(\frac{d\tau}{dp} \right)_{ad} < 0 \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{d^2\tau}{dp^2} \right)_{ad} > 0 \quad (2.31)$$

für adiabatische Zustandsänderungen, wobei $\tau = \rho^{-1}$ das spezifische Volumen ist.

Die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts war durch die Entwicklung der elektronischen Rechner geprägt. Damit war die Entwicklung der numerischen Verfahren zur Lösungen von Differentialgleichungen verbunden (z. B. [4], [62], [123], [179]). Im Folgenden wird nun das Augenmerk auf die Thematik der Reduktion von Luftstoßwellen gelegt.

2.2 Reduktion der Luftstoßwellenbelastung auf Baustrukturen

Nachdem im Abschnitt 2.1 die Entwicklung der Erkenntnisse zu den Luftstoßwellen beschrieben wurde, möchte ich nun in diesem Abschnitt insbesondere auf den Stand der Forschung zur Thematik der Reduzierung der Luftstoßwellenbelastung durch nachgiebige Materialien eingehen. HERRMANN wies 1969 in [75] auf die Verwendung poröser Materialien für die Reduzierung von Stoßwellen hin. Er entwickelte ein neues Materialmodell, die sogenannte p - α -Zustandsgleichung. MONTI berechnete 1970 in [118] den reflektierten Spitzenüberdruck an nachgiebigen Materialien. Er deutete in [118] bereits an, dass der reflektierte Druck an Wänden durch davor platzierte nachgiebige Materialien vergrößert werden kann.

SKEWS bestimmte experimentell 1991 in [153] die reflektierten Drücke bei der Interaktion von Luftstoßwellen und Schäumen und berücksichtigte auch das Eindringen der Luftstoßwelle in den Schaum. Er schrieb in [153] auf Seite 206, dass GELFAND ET AL. 1975 in [60] als Erste experimentell gezeigt haben, dass die Drücke an der Grenze vom Schaum zur Wand größer sind als bei der Reflexion der Luftstoßwelle direkt an der Wand. SKEWS bezweifelte auf Seite 211, dass das Verhalten zufriedenstellend beschrieben werden kann, wenn der Schaumstoff als homogenes Material beschrieben wird. Eine etwas neuere Veröffentlichung von ihm ist [154] aus dem Jahr 1993. SKEWS et al. gaben 2001 in [155] einen guten Überblick über den Stand der Forschung zu Stoßwellen in porösen Stoffen.

MAZOR et al. berechneten 1994 in [114] in einer analytischen Untersuchung die Drücke die in Folge einer Luftstoßwelle hinter einem zellularen Material an einer Wand auftreten. Sie ermittelten, dass diese Drücke größer sind als ohne einem zellularen Material. MAZOR et al. kamen zu der Schlussfolgerung, dass zellulare Materialien die Drücke an der hinteren Wand des Stoßrohres nicht reduzieren können.

NESTERENKO beschrieb 2001 in [121] Experimente an porösen Materialien und deren dämpfende aber auch deren teilweise verstärkende Wirkung. Er schrieb in [121] auf Seite 279:

„It is worth mentioning that a shock wave in air after reflection transmits the same linear momentum I to all the investigated laminar materials, irrespective of their inner structure. But the energy transmitted into material depends on the mass of the material of the first buffer plate.“

Die Aussage, dass eine Stoßwelle bei der Reflexion immer den gleichen Impuls I überträgt, ist mit Vorsicht zu genießen. Diese Aussage mag in den meisten Fällen annähernd zutreffen. Ein einfaches Gegenbeispiel wird durch den Vergleich des Impulses einer sich frei ausbreitenden Luftstoßwelle (Grenzfall Luft an Luft) und des Impulses einer an einer starren Oberfläche reflektierten Luftstoßwelle gefunden.

NESTERENKO gab die übertragene kinetische Energie mit

$$E_k = \frac{I^2}{2M} \quad (2.32)$$

an, wobei M die Masse der Frontplatte (*buffer plate*) ist. Dabei wurde angenommen, dass der gesamte Impuls I zunächst von der Frontplatte aufgenommen wird:

$$\begin{aligned} I &= Mv \\ v &= I/M \\ E_k &= \frac{1}{2} M v^2 = \frac{I^2}{2M} \quad . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nach Gleichung (2.32) ist es also günstig, eine Frontplatte vor dem energieabsorbierenden Material zu verwenden, welche eine große Dichte und damit eine große Masse besitzt, um die übertragene Energie zu reduzieren.

EVANS et al. beschrieben 1999 in [45] die Dämpfung von Stoßwellen durch Schäume. Sie gaben eine erforderliche Dicke des Schaums mit

$$D \geq \frac{I^2}{2\Omega_b d_b U} \quad (2.34)$$

an, mit der Dichte Ω_b , der Dicke d_b der Frontplatte (*buffer plate*) und dem Energieabsorptionsvermögen

$$U = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \approx \sigma_p \varepsilon_d \quad (2.35)$$

des energieabsorbierenden Materials (Abbildung 2.9).

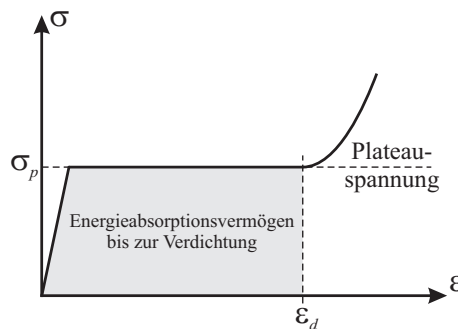


Abbildung 2.9: Energieabsorptionsvermögen, schematische Darstellung nach EVANS et al. [45]

REID & C. PENG [138] stellten 1997 ein Materialmodell für Stoßwellen in porösen Materialien auf, welches an Experimenten an Holz validiert wurde. HANSSEN et al. [71] griffen 2002 dieses Materialmodell auf und untersuchten das Verhalten von Aluminiumschäumen bei Detonationsbelastung theoretisch und experimentell.

Das Modell nach HANSSEN et al. [71] ist in Abbildung 2.10 links dargestellt. Vor einem Bauteil wird ein Schaumstoff mit der Dichte ρ_f und der Länge l platziert. Vor dem Schaumstoff

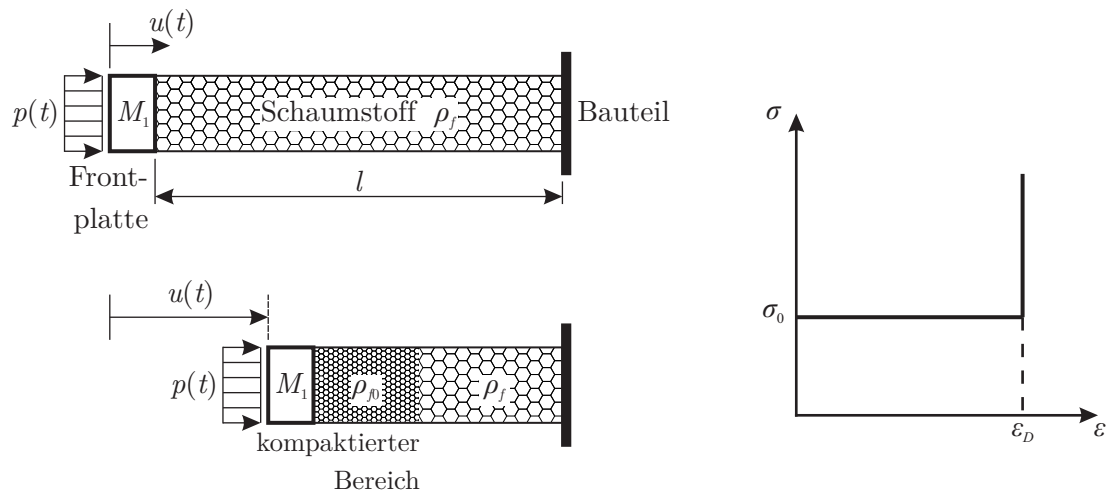


Abbildung 2.10: Modell nach HANSEN et al. [71], links: Konfiguration vor und während der Kompaktion, rechts: Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

befindet sich die starre Frontplatte mit der Masse M_1 . Die Querschnittsfläche des Systems ist A . Auf das System wirkt der reflektierte Überdruck $p(t)$ aus einer Luftstoßwelle in Abhängigkeit von der Zeit t . Die Verschiebung der Frontplatte ist $u(t)$. Der Schaumstoff wird mit einer starren-ideal-plastischen-starren Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (*rigid-perfectly plastic-locking*, r-p-p-l) modelliert (Abbildung 2.10 rechts). Wenn der reflektierte Überdruck $p(t)$ die Plateauspannung σ_0 übersteigt, dann wird der Schaumstoff von der Belastungsseite anfangend vollständig auf die Dichte $\rho_{f0} = \rho_f / (1 - \varepsilon_D)$ kompaktiert. Auf das Bauteil wirkt, solange der Schaumstoff nicht vollständig kompaktiert ist, nur der Druck σ_0 . Für dieses Modell stellten HANSEN et al. die Differentialgleichung

$$\left[1 + \frac{\rho_f A}{M_1 \varepsilon_D} u \right] \ddot{u} + \frac{\rho_f A}{M_1 \varepsilon_D} \dot{u}^2 + (\sigma_0 - p(t)) \frac{A}{M_1} = 0 \quad (2.36)$$

auf, die die Impulserhaltung des Modells beschreibt. HANSEN et al. lösten diese Differentialgleichung für einen linearen Überdruck-Zeit-Verlauf $p(t)$. Sie gaben an, dass die Bedingung

$$l \geq \frac{I^2}{(M_0 + 2 M_1) p_0 A \varepsilon_D} \left\{ \frac{p_0}{\sigma_0} - \frac{4}{3} \right\} \quad (2.37)$$

für $p_0/\sigma_0 > 2$ eingehalten werden muss, um zu gewährleisten, dass der Schaumstoff nicht vollständig kompaktiert wird, bevor die Belastung abgeklungen ist. Dabei sind $M_0 = \rho A l$ die Masse des Schaumstoffes und $I = \frac{1}{2} p_0 t_0 A$ der Impuls des linearen Überdruck-Zeit-Verlaufs mit dem Spitzenüberdruck p_0 und der Belastungsdauer t_0 . Wenn diese Bedingung nicht eingehalten wird, dann wird der Schaumstoff vollständig kompaktiert, bevor die Luftstoßwellenbelastung zurückgegangen ist. Das hat zur Folge, dass der Druck auf das Bauteil sich von σ_0 auf den verbleibenden Druck aus der Luftstoßwellenbelastung erhöhen wird.

In den Experimenten stellten HANSEN et al. eine überraschende Erhöhung der auf ein Pendel übertragenen Energie und des übertragenen Impulses fest. HANSEN et al. kamen zu der (zweifelhaften) Schlussfolgerung:

„Since the impulse transferred to the main structure is equal with or without a sacrificial layer, this implies that the global response cannot be reduced by use of a sacrificial-layer cladding.“

Die Erklärung von HANSEN et al. für die Erhöhung der Energie und des Impulses ist, dass durch die Eindellung der Oberfläche eine Erhöhung der Belastung $p(t)$ stattfindet. NESTERENKO erklärte zusätzlich in [122] die Verstärkung der Energie und des Impulses des Pendels in [71] mit

1. einem größeren Impuls wegen geringerer Masse des Schaums im Vergleich zum Pendel,
2. einem Federeffekt des Schaums.

GALLENMÜLLER untersuchte 2005 vorrangig experimentell die Schutzwirkung von naturfaserverstärktem Polymerbeton bei Nahdetonationen auf Stahlbetonplatten [52, 53]. Als Schutzschicht vor dem Stahlbeton diente Polymerbeton mit einer Frontplatte aus Stahl. Die Schädigungen des Stahlbetons konnten durch die Schutzschicht deutlich reduziert werden.

In einigen Publikationen werden Experimente und/oder numerische Simulationen zum Einfluss von Schaumstoffen auf die Belastung von Luftstoßwellen beschrieben. Beispielsweise werden hier die Veröffentlichungen von KITAGAWA et al. [87] (2006), SEITZ & SKEWS [150] (2006) und [151] (2007), MA & YE [99] (2007), IGRA & JIANG [81] (2009) erwähnt.

KAMBOUCHEV et al. untersuchten 2006 in [84] die Reflexion von Luftstoßwellen an freistehenden Platten unter Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Interaktion (FSI). Sie gaben als Näherung für das Verhältnis des reflektierten Impulses I_p zum einfallenden Impuls I_i die Gleichung

$$\frac{I_p}{I_i} = \gamma_R \left(\frac{C_R f_R}{\gamma_R} \right)^{\beta_s/(1+\beta_s)} \beta_s^{\beta_s/(1-\beta_s)} \quad (2.38)$$

an, wobei C_R der Reflexionsfaktor für die Reflexion an einer starren Oberfläche und γ_R , f_R und β_s die FSI-Parameter sind.

MAIN & GAZONAS gaben in [104] (2008) zunächst einen Rückblick über verwendete Modelle zur Berechnung des Einflusses von Schaumstoffen bei Luftstoßwellen. Anschließend stellten sie ein analytisches Modell zur Berechnung von Verbundelementen auf. Diese Verbundelemente bestehen aus zwei Massen m_1 und m_2 mit einem Schaumstoff der Länge l dazwischen. Anschließend untersuchten sie den Einfluss der Verteilung der Massen auf die Strukturantwort.

W. PENG behandelte in seiner Dissertation aus dem Jahr 2009 [127] unter Anderem die Fluid-Struktur-Interaktion von Luftstoßwellen an frei stehenden Platten. Er berücksichtigte jedoch nur die Masse der Platte (ausgedrückt durch Dichte und Dicke der Platte) und nicht die innere Struktur (Dichte und Steifigkeit). Er kam deshalb auf den Seiten 32 bis 33 seiner Arbeit zu dem Schluss, dass die Reflexion an einer unendlich dicken Platte einer Reflexion an einer starren Wand entspricht.

HARRIGAN et al. verglichen in [72] (2010) verschiedene analytische Lösungen anhand von zwei Beispielen. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass die korrekte Lösung durch die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls erhalten werden kann. Außerdem bemerkten sie, dass Massen-Feder-Modelle wie beispielsweise von LI & MENG [97] nicht geeignet sind, um Diskontinuitäten abzubilden. HARRIGAN et al. gaben für das Energieabsorptionsvermögen die aus den RANKINE-HUGONOT-Sprungbedingungen hergeleitete Gleichung

$$E_V = \frac{1}{2} (\sigma_d + \sigma_p) \varepsilon \quad (2.39)$$

an, wobei σ_d die Spannung im kompaktierten Bereich ist. Der Vergleich mit der Gleichung (2.35) zeigt, dass die Gleichung (2.35) die Fähigkeit der Energieabsorption unterschätzt.

MAZOR et al. [114] (1994) und SEITZ & SKEWS [151] (2007) untersuchten mit analytischen Modellen den Einfluss von nachgiebigen Materialien vor einer Wand auf den reflektierten Druck an der Wand. Dabei betrachteten sie die Wand als starr.

2.3 Einordnung der Arbeit

In den wissenschaftlichen Kontext ordnet sich diese Arbeit wie folgt ein:

Die ersten Untersuchungen zu dieser Thematik habe ich im Jahr 2005 begonnen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurden 2006 in [57] veröffentlicht. Wie ich etwas später herausfand, hatte MONTI bereits in [118] ähnliche Ergebnisse veröffentlicht. Meine Ergebnisse sind unabhängig von MONTI entstanden.

Die Untersuchungen wurden fortgeführt und es wurde ein leichtes, nachgiebiges Material (d. h. ein Material mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit) vor einem Bauteil betrachtet. Die Erhöhung des reflektierten Druckes auf eine starre Wand durch ein leichtes, nachgiebiges Material davor wurde mit meinen Modellen ebenfalls, wie beispielsweise in [114, 150, 151], festgestellt. Darüber hinaus wurde erstmalig festgestellt, dass ein leichtes, nachgiebiges Material vor Stahl deutlich andere Ergebnisse liefert, als wenn sich dieses leichte, nachgiebige Material vor einem starren Material befindet (Abschnitt 4.6). Dies war nicht unbedingt zu erwarten, da der Einfluss von Stahl auf den Druck in einer reflektierten Luftstoßwelle im Vergleich zu einer Reflexion an einer starren Oberfläche sehr gering ist (Abschnitt 4.4). Es wurde untersucht, welchen Einfluss die einzelnen Materialparameter des nachgiebigen Materials auf den Spitzendruck auf das Bauteil besitzen. Es wurden Bereiche ermittelt, in denen der Spitzendruck im Vergleich zur Reflexion direkt am Bauteil reduziert wird. Diese Bereiche besitzen jedoch keine baupraktische Relevanz (Abschnitt 4.6.4).

Die analytischen Untersuchungen wurden ausgeweitet, um den Einfluss von nachgiebigen Materialien auf den gesamten reflektierten Druck-Zeit-Verlauf zu untersuchen. Allgemeine analytische Lösungen zu Luftstoßwellen mit abfallendem Druck-Zeit-Verlauf nach der Stoßfront und deren Reflexionen existieren nicht. Lediglich für Spezialfälle existieren analytische Lösungen [3, 36, 143]. Das Ziel, die analytische Lösung für die Stoßwelle in einem geschlossenen Stoßrohr

(*closed shock tube*) zu finden, wurde nur teilweise erreicht. Bei der Reflexion der Verdünnungswelle an der Stoßrohrwand tritt eine sogenannte *nonsimple wave region* [36] auf. Die Lösung für diesen Bereich wurde nach dem Ansatz von EMANUEL [36] aufgestellt (Abschnitt 5.2). Im Abschnitt 5.3 wurde eine einfachere Stoßwelle als im Abschnitt 5.2 beschrieben. Der Druck-Zeit-Verlauf wurde für diese Stoßwelle mit einem abfallenden Druck-Zeit-Verlauf nach der Stoßfront so weit wie mir möglich analytisch berechnet. Diese Lösung wurde anschließend mit den Ergebnissen einer numerischen Konvergenzstudie verglichen.

Im Auftrag der PEKATEX GmbH wurden im Jahr 2006 an der Wehrtechnischen Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik (WTD 52) Versuche an Fassadensystemen durchgeführt. Diese Versuche wurden in diese Dissertation aufgenommen und ausgewertet. Sie dienen als Beispiel für die baupraktische Relevanz dieser Arbeit. Sie zeigen, dass Fassadensysteme zusätzlich zu ihrer Funktion als Wärmedämmung auch Funktionen des Explosionsschutzes übernehmen können.

Kapitel 3

Grundlagen

3.1 Kinematik

Der *materielle Körper* \mathcal{B} der Kontinuumsmechanik ist eine zusammenhängende Menge materieller Punkte \mathcal{M} (STEIN & BARTHOLD [158]). Die Lage und Bewegung eines materiellen Körpers \mathcal{B} zur Zeit t in der *Momentankonfiguration* wird durch die Abbildung χ mit

$$\mathbf{x}(t) = \chi(\mathcal{M}, t) \quad (3.1)$$

im EUKLIDischen Vektorraum \mathbb{E}^3 [15] beschrieben (Abbildung 3.1). Für die Definition der materiellen Punkte \mathcal{M} wird eine *Referenzkonfiguration* benötigt. Die Lage der materiellen Punkte \mathcal{M} in der Referenzkonfiguration zur Zeit t_0 wird mit \mathbf{X} bezeichnet und ist durch

$$\mathbf{X} = \chi(\mathcal{M}, t_0) = \chi_0(\mathcal{M}) \quad (3.2)$$

definiert.

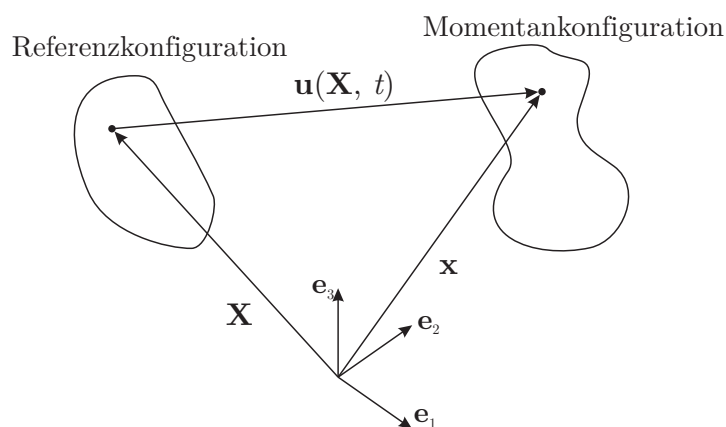


Abbildung 3.1: Kinematik, Referenzzustand und Momentanzustand

Die Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ liefert den mathematischen Zusammenhang

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (3.3)$$

zwischen Referenzkonfiguration und Momentankonfiguration.

3.2 EULERSche und LAGRANGESche Betrachtungsweise

Bei der Beschreibung der Bewegung von Materie sind verschiedene Betrachtungsweisen möglich [158]. Es werden häufig die räumliche bzw. EULERSche Betrachtungsweise für die Beschreibung von Fluiden und die materielle bzw. LAGRANGESche Betrachtungsweise für die Beschreibung von Festkörpern angewendet. Im Folgenden werden beide Betrachtungsweisen erklärt und der mathematische Zusammenhang zwischen ihnen wird angegeben.

3.2.1 EULERSche Betrachtungsweise

Bei der EULERSchen Betrachtungsweise werden die physikalischen Eigenschaften eines materiellen Körpers in Abhängigkeit vom Ort $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ in der Momentankonfiguration und von der Zeit t beschrieben (Abbildung 3.2).

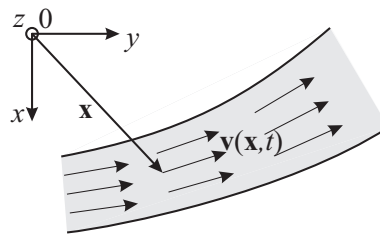


Abbildung 3.2: EULERSche Betrachtungsweise (nach [6])

Physikalische Eigenschaften sind z. B. die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ und die Dichte $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(x, y, z, t)$.

3.2.2 LAGRANGESche Betrachtungsweise

Bei der LAGRANGESchen Betrachtungsweise wird ein materieller Punkt und dessen Bewegung beobachtet (Abbildung 3.3).

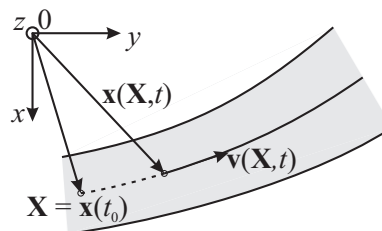


Abbildung 3.3: LAGRANGESche Betrachtungsweise (nach [6])

In Abbildung 3.3 wird der materielle Punkt betrachtet, der durch seine Position $\mathbf{X} = \mathbf{x}(t_0)$ zum Anfangszeitpunkt t_0 definiert ist. Der materielle Punkt \mathbf{X} ist zur Zeit t am Ort $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ und hat die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$.

3.2.3 Zusammenhang

Während bei der LAGRANGESchen Betrachtungsweise ein bestimmter materieller Punkt verfolgt und beschrieben wird, werden bei der EULERSchen Betrachtungsweise die Eigenschaften der materiellen Punkte beschrieben, die im Laufe der Zeit einen bestimmten Ort einnehmen.

Die Funktion Ψ in der Form

$$\Psi = \Psi^m(\mathbf{X}, t) \quad \text{in der materiellen Darstellung bzw.} \quad (3.4)$$

$$\Psi = \Psi^r(\mathbf{x}, t) \quad \text{in der räumlichen Darstellung} \quad (3.5)$$

beschreibt eine physikalische Eigenschaft des Fluids.

Die *materielle Zeitableitung* $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ beschreibt die zeitliche Änderung der physikalischen Eigenschaft Ψ des Fluidteilchens \mathbf{X} .

Die materielle Zeitableitung kann mit dem *vollständigen Differential* [15] in die *lokale Zeitableitung*

$$\begin{aligned} \frac{D\Psi^m(\mathbf{X}, t)}{Dt} &= \frac{d\Psi^r(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \\ &= \frac{\partial\Psi^r(\mathbf{x}(t), t)}{\partial\mathbf{x}(t)} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + \frac{\partial\Psi^r(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \operatorname{grad} \Psi^r(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial\Psi^r(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

überführt werden [158].

3.3 Verzerrungen

Es wird die Bezeichnung

$$\operatorname{Grad}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\mathbf{X}} \quad (3.7)$$

für den Gradienten bezüglich der materiellen Koordinaten \mathbf{X} eingeführt. Damit lässt sich der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \operatorname{Grad} \mathbf{x} \quad (3.8)$$

berechnen. Der Deformationsgradient beschreibt die lineare Abbildung des Differentials $d\mathbf{X}$ (infinitesimales Wegelement in der Referenzkonfiguration) auf das Differential $d\mathbf{x}$ (infinitesimales Wegelement in der Momentankonfiguration)

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad . \quad (3.9)$$

Mit

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{rechter CAUCHY-GREEN-Tensor}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{linker CAUCHY-GREEN-Tensor}) \quad (3.11)$$

lassen sich die Verzerrungstensoren

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{1}] \quad (\text{GREENScher Verzerrungstensor}) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}] \quad (\text{ALMANSIScher Verzerrungstensor}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} [\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{1}] \quad (\text{PIOLAScher Verzerrungstensor}) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{B}] \quad (\text{FINGERScher Verzerrungstensor}) \quad (3.15)$$

berechnen.

Die Verzerrungstensoren \mathbf{E} und \mathbf{e} werden auf die Referenzkonfiguration und die Verzerrungstensoren \mathbf{A} und \mathbf{a} auf die Momentankonfiguration angewendet.

Für ausführlichere Beschreibungen wird auf STEIN & BARTHOLD [158] und HAUPT [73] verwiesen.

3.4 Spannungen

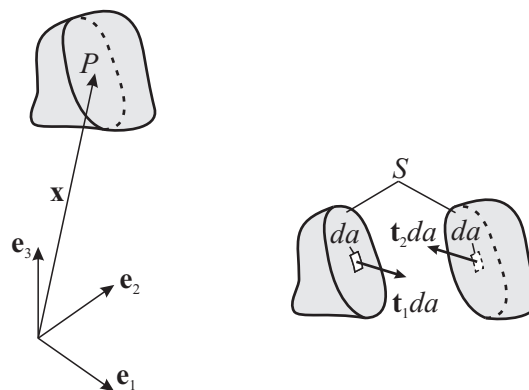


Abbildung 3.4: Spannungen, Definition

Es wird der Punkt P im Inneren eines mechanisch belasteten Körpers \mathcal{B} in der Momentankonfiguration betrachtet (Abbildung 3.4). Um die inneren Kräfte zu bestimmen, wird das EULERSche Schnittprinzip [162] angewendet. Dazu wird der Körper \mathcal{B} gedanklich mit der Schnittfläche S zerschnitten. Auf der Schnittfläche S liegt am Punkt P das Flächenelement Δa , an dem der Kraftvektor $\Delta \mathbf{f}$ angreift. Der CAUCHY-Spannungsvektor \mathbf{t} wird als der Grenzwert

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (3.16)$$

definiert [158].

Zwei Schnittflächen, die durch P gehen und dort die gleiche Tangentialebene besitzen, schneiden dort den gleichen Spannungsvektor \mathbf{t} frei. Dies bedeutet, dass \mathbf{t} zwar von der Orientierung der Tangentialebene in P , jedoch nicht von der Krümmung der Schnittfläche abhängig ist.

Die Spannungsvektoren \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 in Abbildung 3.4 sind betragsmäßig gleich groß, wirken jedoch in die entgegengesetzte Richtung:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) \quad . \quad (3.17)$$

Dabei ist \mathbf{n} der Normalenvektor des differentiellen Flächenelementes *da*.

Der Zusammenhang zwischen \mathbf{t} und \mathbf{n} wird mit

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (3.18)$$

beschrieben. \mathbf{T} wird aufgrund CAUCHYS grundlegender Arbeiten [162] als CAUCHY-Spannungstensor bezeichnet.

Neben dem CAUCHY-Spannungstensor gibt es noch weitere Spannungstensoren, auf die in dieser Arbeit nicht eingegangen wird. Die Grundlagen werden ausführlicher von STEIN & BARTHOLD [158], HAUPT [73] und SCHLEBUSCH [146] behandelt.

3.5 Erhaltungs- und Bilanzsätze

Im Folgenden werden die Erhaltungs- und Bilanzsätze für Masse, Impuls, Drehimpuls, Energie und Entropie aufgeführt. Diese Erhaltungs- und Bilanzsätze sind Erfahrungssätze und werden als *Axiome* betrachtet. Sie sind grundlegend für die Berechnung der dynamischen Vorgänge.

Die Erhaltungsgleichungen können je nach Betrachtungsweise in EULERScher oder in LAGRANGEScher Schreibweise angegeben werden. Zudem ist eine Formulierung in integraler und in differentieller Schreibweise möglich (HIERMAIER [76], Tabelle 3.1). Alle Formulierungen sind gleich bedeutend und können ineinander überführt werden. In den folgenden Abschnitten wird lediglich die differentielle-EULERSche Formulierung angegeben.

Tabelle 3.1: Formulierungen der Erhaltungsgleichungen (nach HIERMAIER [76])

	Finites Kontrollvolumen	Infinitesimales Volumen
Raumfest	Integral, EULER (konservativ)	Differentiell, EULER (konservativ)
Mitbewegt	Integral, LAGRANGE (nicht-konservativ)	Differentiell, LAGRANGE (nicht-konservativ)

Die Erhaltungsgleichungen werden in dieser Arbeit für reibungsfreie Fluide ohne Wärmeleitung aufgestellt, da diese später hauptsächlich Anwendung finden. Diese Erhaltungsgleichungen bezeichnet man auch als EULER-Gleichungen. Wenn Reibung im Fluid berücksichtigt wird, dann werden die Gleichungen als NAVIER-STOKES-Gleichungen bezeichnet. Relativistische Effekte werden vernachlässigt.

3.5.1 Massenerhaltung

In der sogenannten klassischen Mechanik (d.h. ohne relativistische Effekte) wird von der Erhaltung der Masse ausgegangen.

Betrachtet man ein Fluid, welches an der Stelle (x, y, z) zur Zeit t die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} v_1(x, y, z, t) \\ v_2(x, y, z, t) \\ v_3(x, y, z, t) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

und die Dichte $\varrho = \varrho(x, y, z, t)$ besitzt, so wird die Massenerhaltung durch die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.20)$$

beschrieben, welche auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet wird ([1, 24]).

3.5.2 Impulserhaltung

Der Impuls einer in einem beliebigen Volumen V enthaltenen Masse ist

$$\mathbf{I} = \int_V \varrho \mathbf{v} dV \quad (3.21)$$

Für ein reibungsfreies Fluid im dreidimensionalen Raum wird die Impulserhaltung durch die Gleichung

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})(\varrho \mathbf{v}) + \varrho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} p = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

mit dem Druck $p = p(x, y, z, t)$ beschrieben [1].

3.5.3 Drehimpulserhaltung

Der Satz der Drehimpulserhaltung ist nicht gleich zu setzen mit dem Satz der Impulserhaltung; er enthält grundlegende, neue Informationen (SZABÓ [162, Seite 22]).

Der Drehimpulserhaltungssatz hat die Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors zur Folge. Der Drehimpulserhaltungssatz und die Symmetrie des Spannungstensors sind als Axiome gleichwertig (SZABÓ [162, Seite 28]).

3.5.4 Energieerhaltung

Der Satz (besser das Axiom) der Energieerhaltung besagt, dass die Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System konstant ist. Der Satz der Energieerhaltung ist eine allgemeine Form des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik.

Für ein reibungsfreies Fluid im dreidimensionalen Raum wird die Energieerhaltung durch

$$\frac{\partial \left(\varrho e + \frac{1}{2} \varrho |\mathbf{v}|^2 \right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\left(\varrho e + \frac{1}{2} \varrho |\mathbf{v}|^2 + p \right) \mathbf{v} \right) = 0 \quad (3.23)$$

beschrieben [1], dabei ist $e = e(x, y, z, t)$ die spezifische innere Energie. Es werden hier nur mechanische und thermische Energie, nicht chemische, elektrische und sonstige Formen der Energie berücksichtigt.

3.5.5 Entropiebilanz

Die Zustandsgröße *Entropie* S wird in einer etwas anderen Form als die bisher verwendeten Zustandsgrößen definiert [119]. Die Änderung der Entropie S beim Übergang vom Anfangszustand (0) zum Endzustand (1) berechnet sich mit der Gleichung

$$\Delta S = S_1 - S_0 = \int_0^1 \frac{dQ}{T} \quad (3.24)$$

mit der zugeführten Wärme Q und der Temperatur T . Die Entropie S ist eine Zustandsgröße, da das Ergebnis des Integrals nicht vom dem im Prozess durchlaufenen Weg abhängig ist. Eine Besonderheit der Entropie ist, dass nur ihre Änderung, jedoch nicht ihr Absolutwert berechnet werden kann.

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Entropie nicht abnehmen kann. Dies wird durch die Ungleichung

$$\Delta S \geq 0 \quad (3.25)$$

beschrieben [119]. Das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (3.25) gilt für reversible Prozesse, die einen Grenzfall in der Natur darstellen und praktisch nicht auftreten. Bei irreversiblen Prozessen, ist die Änderung der Entropie größer als Null.

Materialmodelle dürfen die Entropiebilanz für beliebige Deformations- und Temperaturprozesse nicht verletzen. Man spricht dann von *thermomechanisch konsistenten* Materialmodellen [77].

3.6 Konstitutive Gleichungen

Die Stoffgesetze zur Beschreibung von Materialien werden auch als konstitutive Gleichungen oder Materialgleichungen bezeichnet [158].

Der Zusammenhang zwischen dem CAUCHY-Spannungstensor und dem GREENSchen Verzerrungstensor wird durch

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (3.26)$$

bzw. mit $\mathbf{T} = \sigma_{ij}$ und $\mathbf{E} = \varepsilon_{kl}$ durch

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.27)$$

beschrieben ($i = 1, 2, 3$). Diese Gleichung ist eine Verallgemeinerung des HOOKEschen Gesetzes, welches besagt, dass sich die Kraft einer Feder proportional zu ihrer Auslenkung verhält [55, 162]. $\mathbf{C} = C_{ijkl}$ ist der vierstufige Elastizitätstensor mit $3^4 = 81$ Elementen. Für den Fall eines linear-elastischen, isotropen Materials lassen sich die 81 Elemente bzw. Materialparameter mit

zwei unabhängigen Materialparametern beschreiben [56]. Diese zwei unabhängigen Materialparameter sind beispielsweise der Elastizitätsmodul E und die Querverformungszahl ν . Andere Materialparameter wie der Schubmodul G oder der Kompressionsmodul K können dann als Funktionen von E und ν angegeben werden.

3.7 Gasketik

Ein Gas kann als ein System vieler kleiner elastischer Teilchen aufgefasst werden. Das System wird durch die mikrophysikalischen Größen

- Teilchenzahl N ,
- Volumen V ,
- Teilchendichte $n = N/V$,
- Teilchenmasse m_M ,
- Teilchengeschwindigkeit v

beschrieben, die mit den thermodynamischen Zustandsgrößen Druck p , Temperatur T , Dichte ρ und innere Energie U im Zusammenhang stehen, wie z.B. $\rho = m_M n$. So hat beispielsweise ein Heliumatom eine Masse von $m_M \approx 4,002620 u \approx 6,646476 \cdot 10^{-27}$ kg. Dabei ist $u = 1,66053886(28) \cdot 10^{-27}$ kg die atomare Masseneinheit [20].

Wenn sich das Gas in einem thermodynamischen Gleichgewicht befindet, dann ist die Dichte überall gleich. Auf mikrophysikalischer Ebene bedeutet dies, dass die Verteilung der Teilchen im zeitlichen Mittel homogen ist. Außerdem wird durch die Verteilung der Teilchengeschwindigkeiten, deren Beträge und Richtungen verschieden sind, keine Richtung bevorzugt; die Geschwindigkeitsverteilung ist isotrop.

3.7.1 MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung

Die MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung

$$w(v) = \sqrt{\frac{8m_M}{\pi k T}} \frac{m_M v^2}{2kT} e^{-\frac{m_M v^2}{2kT}} \quad (3.28)$$

beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchengeschwindigkeit v (Abbildung 3.5). Die Naturkonstante $k = 1,38065... \cdot 10^{-23}$ J/K wird als BOLTZMANN-Konstante bezeichnet. Mit der Gleichung (3.28) wird

$$\int_0^\infty w(v) dv = 1 \quad (3.29)$$

erhalten.

Das Maximum der Verteilungsfunktion tritt bei der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit $v_w = \sqrt{2kT/m_M}$ auf.

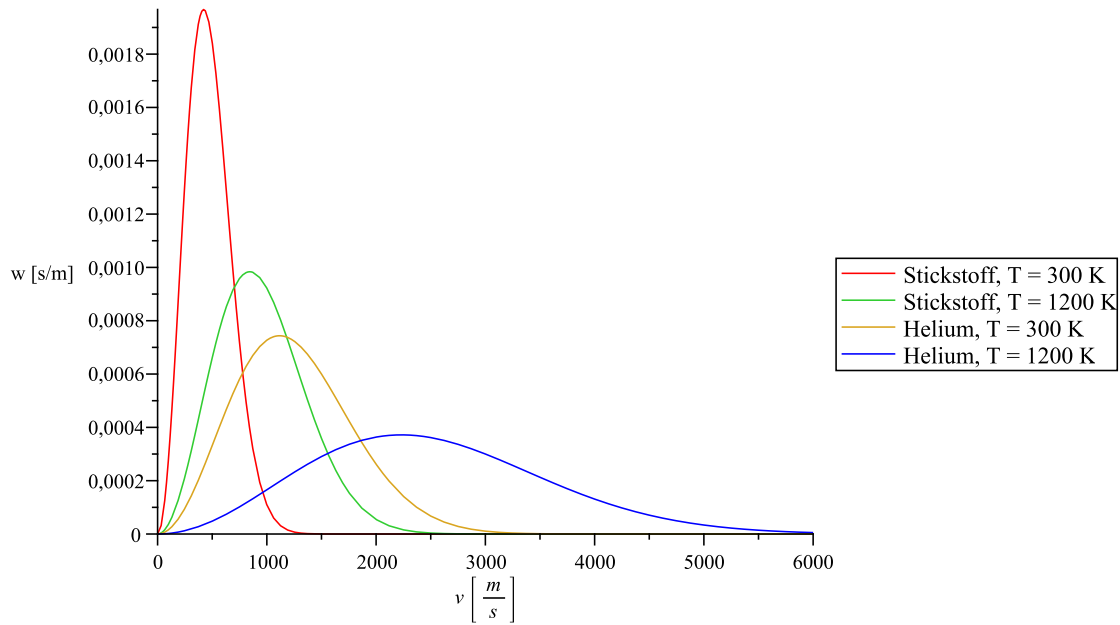


Abbildung 3.5: MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung, Beispielfunktionen für Stickstoff (N_2) und Helium (He) bei Temperaturen von 300 K und 1200 K

Die mittlere Teilchengeschwindigkeit

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} w(v) v \, dv \quad (3.30)$$

hat für die MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung den Wert

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m_M}} \quad (3.31)$$

3.7.2 Druck

Der Druck p auf eine Oberfläche resultiert aus den Kraftstößen der an der Oberfläche reflektierten Teilchen. Der Druck ist die Summe der Kraftstöße (Impulse) bezogen auf die Zeit und die Fläche. Bezugszeit und Bezugsfläche müssen groß genug sein, damit ausreichend viele Teilchen die Fläche treffen. Der Druck wird dann mit

$$p = \frac{1}{3} m_M n \overline{v^2} \quad (3.32)$$

beschrieben (MÜLLER [119]), wobei $\overline{v^2}$ der Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate ist. Mit der Gleichung (3.28) wird $\overline{v^2}$ zu

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} w(v) v^2 \, dv = 3 \frac{k T}{m_M} \quad (3.33)$$

erhalten. Damit folgt für den Druck

$$p = n k T \quad (3.34)$$

Dies ist die mikrophysikalische Beschreibung für die *thermische Zustandsgleichung* $p = \rho R' T$ mit der Dichte $\rho = m_M n$ und der Gaskonstante $R' = k/m_M$.

3.7.3 Gleichverteilungssatz

Wenn die Teilchen eines Gases drei translatorische Freiheitsgrade besitzen, wie z. B. einatomiges Helium, dann ist der Mittelwert der kinetischen Energie eines Teilchens

$$\overline{E_k} = \frac{1}{2} m_M \overline{v^2} = \frac{3}{2} k T \quad . \quad (3.35)$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten in die drei Raumrichtungen x , y und z gilt

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad (3.36)$$

und aufgrund der Isotropie ist

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \quad . \quad (3.37)$$

Damit entfällt auf jeden translatorischen Freiheitsgrad die mittlere Energie

$$\frac{1}{2} m_M \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m_M \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m_M \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} k T \quad . \quad (3.38)$$

Dies ist ein Beispiel für den Gleichverteilungssatz der Gaskinetik (Äquipartitionstheorem), der besagt, dass auf jeden Freiheitsgrad der Bewegung eines Teilchens die mittlere kinetische Energie $kT/2$ entfällt.

Bei mehratomigen Gasen, wie z. B. O_2 , N_2 oder CO_2 , treten neben den translatorischen auch rotatorische Freiheitsgrade auf, so dass die Anzahl der Freiheitsgrade $f > 3$ ist. Beispielsweise hat Sauerstoff O_2 insgesamt 5 Freiheitsgrade, nämlich 3 translatorische und 2 rotatorische. Wenn die Atome in mehratomigen Molekülen auf einer Geraden liegen, so entfällt auf die Rotation um diese Gerade keine Energie.

Für die innere Energie eines Gase ergibt sich

$$U = N \frac{f}{2} k T \quad (3.39)$$

was der kalorischen Zustandsgleichung $U = m c_V T$ mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen $c_V = f k / (2 m_M)$ des idealen Gases entspricht.

3.8 Zustandsgleichungen

Zustandsgleichungen (*equations of state*, EoS) beschreiben den Zusammenhang zwischen drei Zustandsgrößen. Häufig werden dabei die drei Zustandsgrößen Druck p , Dichte ρ und spezifische innere Energie e verwendet. Zustandsgleichungen stellen somit eine Fläche in einem dreidimensionalen Raum dar. Sie erfassen alle möglichen Zustände, die ein Material einnehmen kann. Eine ausführliche Beschreibung über Zustandsgleichungen ist beispielsweise in [77] enthalten.

Die Zustandsgleichung wird zur Lösung der Erhaltungsgleichungen zusätzlich zu den konstitutiven Beziehungen benötigt.

3.8.1 Zustandsgleichung für ideale Gase

Der thermodynamische Zustand eines beliebigen Stoffes wird mit sogenannten *Zustandsgrößen* beschrieben (MÜLLER [119]). Bei konstanter Masse m sind beispielsweise die Temperatur T , der Druck p , das Volumen V und die innere Energie U Zustandsgrößen. Der Zustand eines idealen Gases wird durch zwei unabhängige Zustandsgrößen eindeutig beschrieben [119]. Alle anderen Zustandsgrößen sind damit festgelegt. Für die vier genannten Zustandsgrößen gibt es somit zwei Zustandsgleichungen. Diese sind

$$pV = mR'T \quad (\text{die thermische Zustandsgleichung}) \quad \text{und} \quad (3.40)$$

$$U = mc_V T \quad (\text{die kalorische Zustandsgleichung}), \quad (3.41)$$

wobei R' eine massenbezogene Gaskonstante und c_V die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen sind. Zwischen R' und c_V besteht der Zusammenhang $R' = c_p - c_V$, mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p . Mit der Dichte $\varrho = m/V$ und dem Zusammenhang $R' = c_p - c_V$ ergibt sich aus (3.40)

$$p = \varrho (c_p - c_V) T. \quad (3.42)$$

Weiterhin wird die spezifische innere Energie

$$e = \frac{U}{m} \quad (3.43)$$

eingeführt, wodurch sich aus (3.41)

$$e = c_V T \quad (3.44)$$

ergibt. Das Umstellen von (3.42) und (3.44) in Bezug auf T und Gleichsetzen führt zu

$$\frac{p}{\varrho (c_p - c_V)} = \frac{e}{c_V}, \quad (3.45)$$

woraus

$$p = \frac{c_p - c_V}{c_V} \varrho e \quad (3.46)$$

folgt. Unter Verwendung des Verhältnisses der spezifischen Wärmekapazitäten $\gamma = c_p/c_V$ wird die häufig verwendete Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1) \varrho e \quad (3.47)$$

erhalten [57]. γ wird als Isentropenexponent bezeichnet, da für isentropische Zustandsänderungen von idealen Gasen $pV^\gamma = \text{const}$ gilt. Für Luft im Normzustand (DIN 1343 [32]: $T = 273,15 \text{ K}$, $p = 101325 \text{ Pa}$) ist $\gamma \approx 1,402$.

Im Allgemeinen gilt für ideales Gas

$$\gamma = \frac{f + 2}{f} \quad (3.48)$$

mit der Anzahl der Freiheitsgrade f der Teilchen des Gases. Luft wird hier als ideales Gas betrachtet. Luft besteht zu ca. 99 % Massenanteil aus den zweiatomigen Molekülen Stickstoff (N_2) und Sauerstoff (O_2), die $f = 5$ Freiheitsgrade besitzen. Zusätzlich sind in Luft noch einatomige Teilchen wie Argon (Ar , $f = 3$) oder mehratomige Teilchen wie Wassermoleküle (H_2O , $f = 6$). Unter der Annahme von $f = 5$ für Luft wird der Isentropenexponent mit $\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5+2}{5} = 1,4$ recht gut an den realen Wert $\gamma \approx 1,402$ für Luft im Normzustand angenähert. Bei höheren Temperaturen als im Normzustand werden die Moleküle zu Schwingungen angeregt, die Moleküle können dissoziieren und die Atome können ionisieren. Dies entspricht der Erzeugung von neuen Freiheitsgraden zusätzlich zu den translatorischen und rotatorischen, wodurch der Isentropenexponent kleiner wird [85, 125].

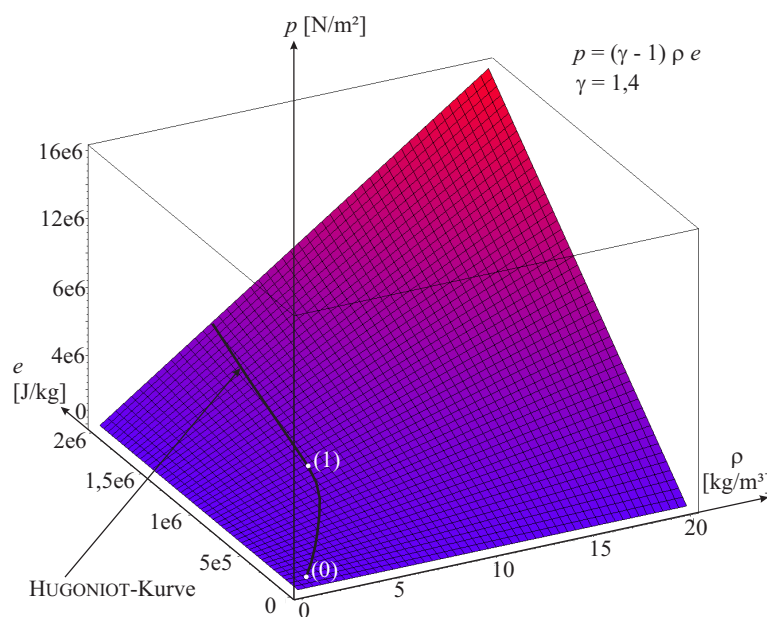


Abbildung 3.6: Zustandsgleichung, Darstellung der Zustandsfläche für ein ideales Gas

Die Abbildung 3.6 zeigt die Zustandsfläche der Zustandsgleichung $p = (\gamma - 1) \rho e$ mit $\gamma = 1,4$ für ein ideales Gas. Der Zustand (0) in der Abbildung kennzeichnet den Ausgangszustand des Gases. Wenn das Gas von diesem Ausgangszustand einen Stoß durchläuft, dann beschreibt die sogenannte HUGONIOT-Kurve [144] alle möglichen Zustände nach dem Stoß, z. B. Zustand (1).

3.8.2 Weitere Zustandsgleichungen

Lineare Zustandsgleichung

Die lineare Zustandsgleichung hat die Form

$$p = K \mu \tag{3.49}$$

mit dem Kompressionsmodul K , der Kompression $\mu = (\varrho/\varrho_0) - 1$ und der Anfangsdichte ϱ_0 . Die spezifische innere Energie e wird hier vernachlässigt.

Polynomische Zustandsgleichung

Die polynomische Zustandsgleichung (*polynomial equation of state*) wird meist durch die Gleichung

$$p = K_1 \mu + K_2 \mu^2 + K_3 \mu^3 + (B_0 + B_1 \mu) \varrho_0 e \quad (3.50)$$

mit der Kompression $\mu = (\varrho/\varrho_0) - 1$ und der Anfangsdichte ϱ_0 beschrieben. Diese Zustandsgleichung gibt den Druck in Abhängigkeit von der Dichte ϱ und von der spezifischen inneren Energie e an. K_1 entspricht dem Kompressionsmodul. In manchen Fällen wird zwischen $\mu < 0$ und $\mu \geq 0$ unterschieden. Beispielsweise wird in ANSYS-AUTODYN [23] die polynomische Zustandsgleichung

$$p = \begin{cases} K_1 \mu + K_2 \mu^2 + K_3 \mu^3 + (B_0 + B_1 \mu) \varrho_0 e & : \mu \geq 0 \\ T_1 \mu + T_2 \mu^2 + B_0 \varrho_0 e & : \mu < 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

verwendet.

v_s - v_1 -Beziehung

Für viele Flüssigkeiten und Feststoffe hat man experimentell den linearen Zusammenhang

$$v_s = c_0 + S v_1 \quad (3.52)$$

zwischen der Stoßwellengeschwindigkeit v_s und der Geschwindigkeit des Materials v_1 festgestellt. Dabei sind c_0 die elastische Wellengeschwindigkeit und S der Anstieg der Geraden.

Diese Gleichung stellt keine Zustandsgleichung dar, sondern ist eine HUGONIOT-Kurve in der v_s - v_1 -Ebene [77, S. 165 ff.].

MIE-GRÜNEISEN-Zustandsgleichung

Die MIE-GRÜNEISEN-Zustandsgleichung beruht auf den Arbeiten von MIE [116] und GRÜNEISEN [66, 67, 68]. GRÜNEISEN ging 1912 in [67] von den Kräften zwischen Atomen und den Atomschwingungen aus. GRÜNEISEN nahm in [67] ebenfalls wie MIE in [116] an, dass die Atomkräfte zu einer Potenz des Abstandes umgekehrt proportional sind. Mit Methoden der statistischen Mechanik gelang ihm eine makroskopische Beschreibung der Materialeigenschaften. Er führte den inzwischen als GRÜNEISEN-Parameter bezeichneten Parameter Γ (in [67]: γ) ein. Er berechnete diesen Parameter für verschiedene Materialien bereits 1908 in [66, Tabelle 1, Spalte 7]. Eine zusammenfassende Herleitung des GRÜNEISEN-Parameters wurde beispielsweise in [77, 115] gegeben.

Die MIE-GRÜNEISEN-Zustandsgleichung wird durch die Gleichung

$$p(V, e) = p_{0K}(V) + \frac{\Gamma(V)}{V} (e - e_{0K}(V)) \quad (3.53)$$

bzw.

$$p(V, e) = p_H(V) + \frac{\Gamma(V)}{V} (e - e_H(V)) \quad (3.54)$$

beschrieben [77]. Die Zustände $(p_{0K}(V), e_{0K}(V))$ bzw. $(p_H(V), e_H(V))$ beschreiben Referenzzustände bei einem spezifischen Volumen V . Der Index $_{0K}$ steht für den Zustand beim absoluten Nullpunkt $T = 0\text{ K}$ und der Index $_H$ für einen Referenzpunkt auf einer HUGONIOT-Kurve. Es können aber auch beliebige andere Zustände als Referenzzustände verwendet werden.

Anmerkung: Bei der Schreibweise der Gleichungen (3.53) und (3.54) ist V das spezifische Volumen, d.h. Volumen pro Masse. Dies bedeutet $\frac{1}{V} = \rho$ mit der Dichte ρ .

HIERMAIER merkte an, dass die MIE-GRÜNEISEN-Zustandsgleichung eine lineare Approximation an die tatsächliche Zustandsgleichung in der Nähe des Referenzzustandes ist [77].

MEYERS [115, Gl. (5.16)] und HIERMAIER [77, Gl. (4.82)] führen die Gleichung

$$\Gamma = V \frac{3\alpha}{c_V K_T} \quad (3.55)$$

für die Berechnung vom GRÜNEISEN-Parameter Γ an. Dabei sind $V = \frac{1}{\rho}$ das spezifische Volumen, α der Wärmeausdehnungskoeffizient bzw. 3α der Volumenausdehnungskoeffizient, c_V die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen und K_T die isotherme Kompressibilität. Die isotherme Kompressibilität K_T darf nicht mit dem Kompressionsmodul K verwechselt werden, wie es teilweise in der Literatur geschieht, sondern sie ist der Kehrwert des Kompressionsmoduls: $K_T = \frac{1}{K}$ [66, S. 399]. Damit kann die Gleichung umgeschrieben werden in:

$$\Gamma = \frac{3\alpha K}{\rho c_V} \quad (3.56)$$

Mit dieser Gleichung kann der GRÜNEISEN-Parameter aus messbaren Größen bestimmt werden. Die Tabelle 3.2 enthält Beispiele für berechnete GRÜNEISEN-Parameter. Für Wasser bei 0°C kann der GRÜNEISEN-Parameter negativ werden [7, S. 423]. Weitere Werte für Γ sind beispielsweise in [66, Tabelle 1, Spalte 7], [67, Tabelle 1] und [115, Tabelle 5.1] aufgelistet.

Tabelle 3.2: Beispiele berechneter GRÜNEISEN-Parameter

Material	ρ [kg/m ³]	K [N/m ²]	α [1/K]	c_V [J/(kg·K)]	Γ [-]
Eisen	7850	$159 \cdot 10^9$	$12 \cdot 10^{-6}$	449	1,6
Kupfer	8930	$138 \cdot 10^9$	$17 \cdot 10^{-6}$	385	2,0
Wasser bei 0°C	1000	$2 \cdot 10^9$	$-20 \cdot 10^{-6}$	4180	-0,03

Wenn Γ als konstant angenommen wird, dann gilt für die polynomische Zustandsgleichung (3.50) die Beziehung $B_0 = B_1 = \Gamma$ [23, 77]. Die polynomische Zustandsgleichung muss gegebenenfalls geändert werden, um den Referenzzustand zu erfassen [77, Gl. (4.86)].

p - α -Zustandsgleichung

Die Kompression poröser Materialien lässt sich anhand der Druck-Dichte-Beziehung in drei Phasen einteilen (Abbildung 3.7). Die Phase I ist charakterisiert durch elastisches Verhalten. Bei Entlastung stellt sich wieder die Ausgangsdichte ϱ_0 ein. In Phase II erfolgt die Kompaktion der Poren. Die Kompressionssteifigkeit ist geringer als in Phase I. Bei Entlastung wird nicht die Ausgangsdichte ϱ_0 erreicht, sondern es bleiben plastische Verformungen zurück. Die Phase III ist durch eine vollständige Kompaktion aller Poren gekennzeichnet. Die Kompressionssteifigkeit steigt wieder an und erreicht größere Werte als im elastischen Bereich.

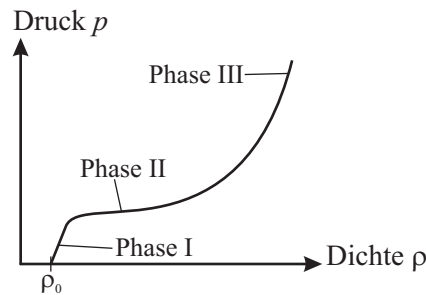


Abbildung 3.7: Poröses Material, Druck-Dichte-Beziehung

Bei der p - α -Zustandsgleichung (HERRMANN [75]) wird für die Beschreibung der Zustandsgleichung des porösen Materials auf die Zustandsgleichung des Grundmaterials (*solid material*) aufgebaut. Wenn

$$p = f(V_s, e) \quad (3.57)$$

die Zustandsgleichung des Grundmaterials ist, dann ist

$$p = f\left(\frac{V}{\alpha}, e\right) \quad (3.58)$$

die Zustandsgleichung für das poröse Material. V ist hier das spezifische Volumen des porösen Materials, und V_s ist das spezifische Volumen des Grundmaterials. V_s entspricht V abzüglich des Volumens der Poren. Die Porosität wird mit

$$\alpha = \frac{V}{V_s} \quad (3.59)$$

beschrieben. Die Funktion f in den Gleichungen (3.57) und (3.58) ist ein und dieselbe Funktion $f(x, y)$. In ANSYS-AUTODYN ist die p - α -Zustandsgleichung in Verbindung mit der linearen, der polynomischen oder der Stoß-Zustandsgleichung für $f(V_s, e)$ möglich.

Um die p - α -Zustandsgleichung zu vervollständigen, muss α als Funktion von p und e

$$\alpha = g(p, e) \quad (3.60)$$

formuliert werden. Da die experimentelle Bestimmung der Abhängigkeit der Porosität α von der spezifischen inneren Energie e kompliziert ist, wird α meist nur als Funktion vom Druck p

$$\alpha = g(p) \quad (3.61)$$

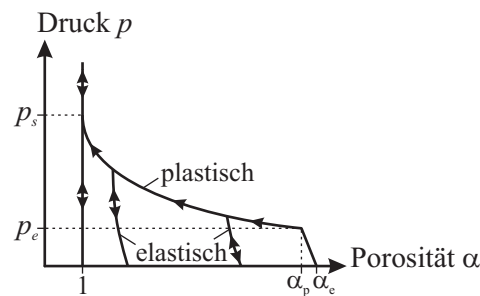


Abbildung 3.8: Poröses Material, postulierte p - α -Beziehung nach [75]

formuliert.

Die Abbildung 3.8 stellt den postulierten Zusammenhang zwischen p und α nach HERRMANN [75] dar. HERRMANN nennt notwendige Bedingungen für $\alpha = g(p)$ und schlägt die Gleichung

$$\alpha = g(p) = 1 + (\alpha_p - 1) \left[\frac{p_s - p}{p_s - p_e} \right]^2 \quad (3.62)$$

als einen möglichen Ansatz für $g(p)$ vor [75, Gleichung (24)].

3.9 Luftstoßwellen

3.9.1 Entstehung von Luftstoßwellen

Da die Druckwellengeschwindigkeit mit höheren Drücken und Temperaturen zunimmt, werden in der Druckwelle die kleineren Drücke von den größeren Drücken eingeholt (Abbildung 3.9). Dabei steilt sich die Wellenfront auf; ein Luftstoß entsteht.

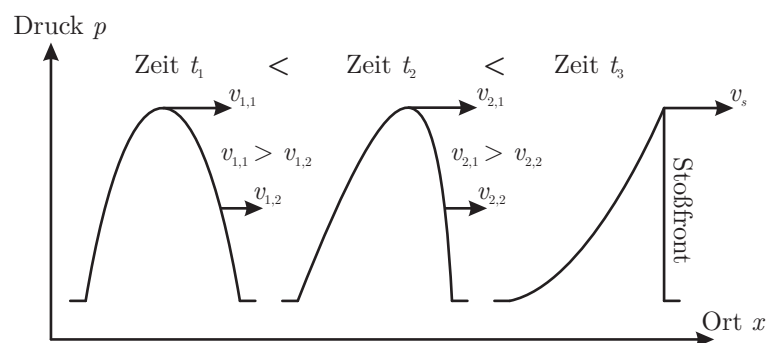


Abbildung 3.9: Luftstoßwellen, Entstehung, anschauliche Darstellung

Die Stoßfront stellt eine Diskontinuität der Größen Druck, Temperatur, Dichte und Geschwindigkeit dar. Die Annahme der Diskontinuität ist eine Idealisierung. In Wirklichkeit wird die Stoßfront durch Viskosität und Wärmeleitung geglättet.

3.9.2 Der senkrechte Verdichtungsstoß

Die Abbildung 3.10 zeigt schematisch eine Stoßfront, die sich in x -Richtung bewegt. In Bewegungsrichtung vor der Stoßfront befindet sich die Luft im Ausgangszustand mit den Zustandsgrößen Druck p_0 , Dichte ϱ_0 und der spezifischen inneren Energie e_0 . Die Geschwindigkeit v_0 sei im Ausgangszustand gleich Null. Hinter der Stoßfront ist die Luft im Zustand (1). Die Zustandsgrößen sind nun p_1 , ϱ_1 und e_1 und die Geschwindigkeit ist v_1 . Die Geschwindigkeit der Stoßfront ist v_{s1} .

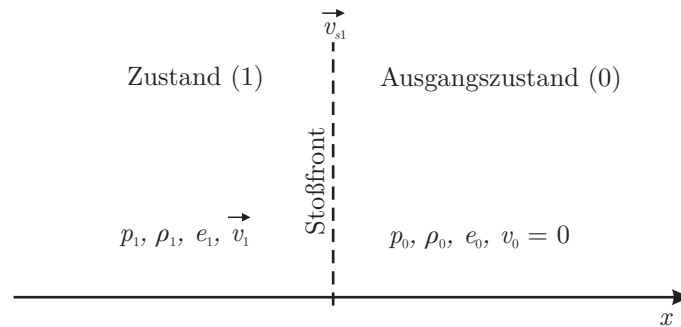


Abbildung 3.10: Senkrechter Verdichtungsstoß, Zustandsgrößen vor und nach der Stoßfront

Wenn vorausgesetzt wird, dass die Größen p_0 , ϱ_0 , v_0 und p_1 bekannt sind, dann ergeben sich fünf Unbekannte (e_0 , v_{s1} , ϱ_1 , e_1 , v_1), die durch fünf Gleichungen zu bestimmen sind.

Beim Sprung vom Ausgangszustand in den Zustand 1 müssen die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie erfüllt sein. Daraus folgen drei Erhaltungsgleichungen. Zusätzlich werden zwei Zustandsgleichungen für die Luft unmittelbar vor und unmittelbar hinter der Stoßfront, die mit (8) bestimmt werden, benötigt. Aus der Massenerhaltung folgt

$$\varrho_1 (v_{s1} - v_1) = \varrho_0 v_{s1} . \quad (3.63)$$

Die Impulserhaltung wird mit

$$\varrho_0 v_{s1} v_1 = p_1 - p_0 \quad (3.64)$$

beschrieben. Die Gleichung für die Energieerhaltung ist

$$p_1 v_1 = \varrho_0 v_{s1} \left[e_1 - e_0 + \frac{1}{2} v_1^2 \right] . \quad (3.65)$$

Mit der Zustandsgleichung für ideale Gase (3.47) ergeben sich für e_0 und e_1

$$e_0 = \frac{p_0}{(\gamma - 1) \varrho_0} \quad (3.66)$$

$$e_1 = \frac{p_1}{(\gamma - 1) \varrho_1} \quad (3.67)$$

und damit wird aus Gleichung (3.65)

$$p_1 v_1 = \varrho_0 v_{s1} \left[\frac{p_1}{(\gamma - 1) \varrho_1} - \frac{p_0}{(\gamma - 1) \varrho_0} + \frac{1}{2} v_1^2 \right] . \quad (3.68)$$

Durch Lösen der Gleichungen (3.63), (3.64) und (3.68) lassen sich die drei Unbekannten ϱ_1 , v_1 und v_{s1} zu

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{p_0 (\gamma + 1) + p_1 (\gamma - 1)} \quad (3.69)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 (p_1 - p_0)^2}{\varrho_0 [p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)]}} \quad (3.70)$$

$$v_{s1} = \sqrt{\frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{2 \varrho_0}} \quad (3.71)$$

bestimmen.

Mit (3.66), (3.67), (3.69), (3.70) und (3.71) sind die erforderlichen Bestimmungsgleichungen für die zuvor genannten fünf Unbekannten gegeben. Die Größen p_1 , p_0 und ϱ_0 wurden als bekannt vorausgesetzt und γ ist der Isentropenexponent mit einem Wert von etwa 1,4 für unsere Umgebungsluft.

3.9.3 Entropiebetrachtung beim Sprung über die Stoßfront

MÜLLER gibt in [119] die Gleichung

$$\Delta S = S_i - S_{i-1} = m c_V \ln \frac{T_i}{T_{i-1}} + m R' \ln \frac{V_i}{V_{i-1}} \quad (3.72)$$

für die Berechnung der Änderung der Entropie eines idealen Gases beim Übergang vom Zustand $(i - 1)$ zum Zustand (i) an. Mit Einführung der spezifischen Entropie $s = S/m$ und mit $R' = c_p - c_V$, $\gamma = c_p/c_V$, $e = c_V T$ und $\varrho = m/V$ folgt aus dieser Gleichung

$$\Delta s = s_i - s_{i-1} = \left[\frac{1}{\gamma} \ln \frac{e_i}{e_{i-1}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \ln \frac{\varrho_{i-1}}{\varrho_i} \right] c_p \quad . \quad (3.73)$$

Tabelle 3.3: Entropiebetrachtung

Zustand	p_i [kPa]	ϱ_i [kg/m ³]	e_i [J/kg]	T_i [K]	$\Delta s = s_i - s_{i-1}$ [J/(kg K)]
Ausgangszustand (0)	101,332	1,225	206800	288	-
verdichteter Zustand (1)	2101,332	5,746	914191	1273	623
isentrop entlasteter Zustand (2)	101,332	0,659	384435	535	0

Die Tabelle 3.3 gibt ein Beispiel für die Änderung der Entropie beim Sprung über die Stoßfront an. Es wird eine Luftstoßwelle mit einem einfallenden Spitzenüberdruck $p_{so} = 2000$ kPa untersucht. Die Luft wird als ideales Gas mit $\gamma = 1,4$ und $c_p = 1005$ J/(kg K) modelliert. Die erste Zeile der Tabelle gibt die Zustandsgrößen Druck p , Dichte ϱ , spezifische innere Energie e und die Temperatur T des Systems im Ausgangszustand (0) an. Die zweite Zeile enthält die berechneten Zustandsgrößen im Zustand (1) nach dem Verdichtungsstoß (Gleichungen (3.67)

und (3.69)). Die Änderung der spezifischen Entropie beträgt $\Delta s = s_1 - s_0 = 623 \text{ J}/(\text{kg K})$. Beim Verdichtungsstoß tritt zwar eine adiabatische Zustandsänderung auf, da kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet, jedoch keine isentrope Zustandsänderung. Da die Entropieänderung größer als Null ist, ist der Prozess irreversibel. „Verdünnungsstöße“ in idealen Gasen würden eine Verringerung der Entropie bedeuten und sind nicht möglich. Die dritte Zeile gibt die Zustandsgrößen im Zustand (2) nach einer isentropen Entlastung aus Zustand (1) auf Umgebungsluftdruck an. Da der Verdichtungsstoß eine Erhöhung der Entropie bewirkt, geht die Temperatur im Zustand (3) nicht mehr auf Umgebungstemperatur $T_0 = 288 \text{ K}$ zurück, sondern ist deutlich wärmer ($T_2 = 535 \text{ K}$).

Eine ausführlichere Beschreibung der Entropieänderung über einen Verdichtungsstoß geben SALAS & IOLLO in [145].

3.9.4 Das RIEMANN-Problem

In diesem Abschnitt wird die Lösung des sogenannten RIEMANN-Problems beschrieben. Das Nachvollziehen und das Verstehen des Lösungsweges ist ein wichtiger Grundstein des Verständnisses von Luftstoßwellen und der Lösung hyperbolischer Systeme partieller Differentialgleichungen. Die hier vorgestellte, exakte Lösung des eindimensionalen RIEMANN-Problems wird ausführlicher von CHORIN & MARSDEN in [24] und von SERRE in [152] beschrieben.

1. Beschreibung der Problemstellung

Es wird hier nur die räumliche Dimension x betrachtet. Gegeben sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie durch die partiellen Differentialgleichungen in EULER-Koordinaten [152, Gleichungen (4.24)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\varrho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + e\varrho\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + e\varrho\right)v\right)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

und die Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1) \varrho e \quad (3.75)$$

mit der Zeit t , der Dichte $\varrho = \varrho(x, t)$, der Geschwindigkeit in x -Richtung $v = v(x, t)$, dem Druck $p = p(x, t)$ und der spezifischen inneren Energie $e = e(x, t)$. Die Erhaltungsgleichungen (3.74) werden auch als EULER-Gleichungen bezeichnet.

Der Zustand des Gases wird durch den Vektor $\mathbf{u} = (\varrho, v, e)$ beschrieben.

Das RIEMANN-Problem ist das Anfangswertproblem für (3.74) mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & : x \leq 0 \\ \mathbf{u}_r & : x > 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

mit $\mathbf{u}_l = (\rho_l, v_l, e_l)$ und $\mathbf{u}_r = (\rho_r, v_r, e_r)$. Bei $x = 0$ besteht eine Unstetigkeit. Der Spezialfall, bei dem die Geschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$ gleich Null sind ($v_l = 0, v_r = 0$) heißt Stoßrohr-Problem (*shock tube problem*). Im Folgenden wird die Lösung dieses Stoßrohr-Problems beschrieben.

Bei einem Variablenwechsel

$$x' \rightarrow Lx, \quad t' \rightarrow Lt, \quad \text{mit } L > 0 \tag{3.77}$$

bleiben sowohl die Form der Gleichungen (3.74) als auch die Anfangsbedingungen (3.76) erhalten. Wenn man annimmt, dass die Lösung eindeutig ist, dann gilt [24]

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x', t') = \mathbf{u}\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{L}\right) = \mathbf{u}\left(\frac{x}{t}, 1\right), \quad \text{mit } t > 0 \quad . \tag{3.78}$$

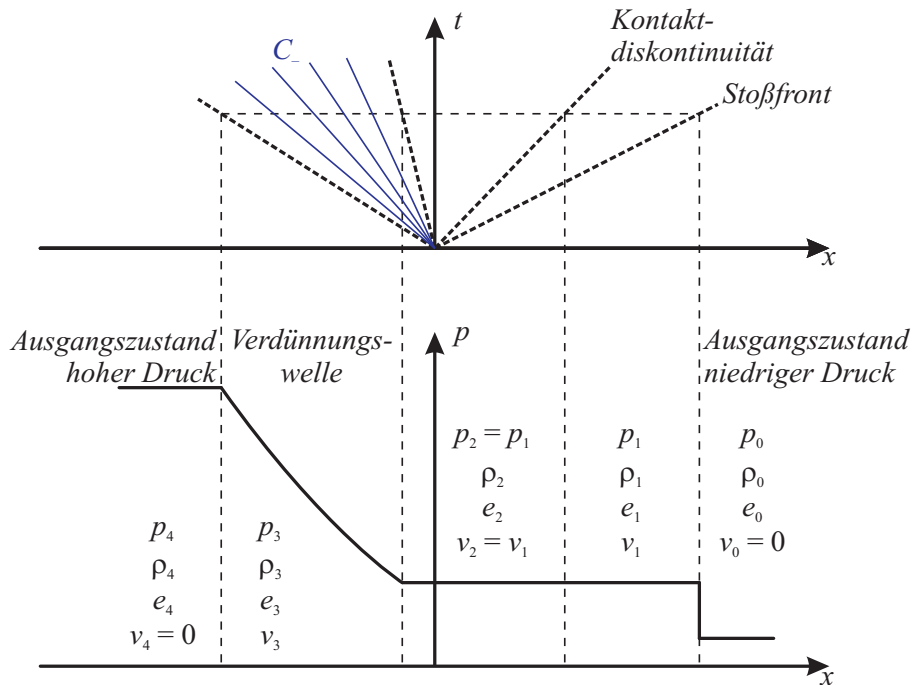


Abbildung 3.11: RIEMANN-Problem, Bereiche 0 bis 4

Daraus folgt, dass die Lösung des Stoßrohr-Problems konstant entlang Geraden ist, die vom Koordinatenursprung ausgehen (Abbildung 3.11 oben). In der Abbildung 3.11 sind die fünf Bereiche 0 bis 4 dargestellt, die sich beim Stoßrohr-Problem ausbilden. Die Bereiche 0 und 4 sind die Bereiche, in denen die Anfangsbedingungen gelten. Die Grenze zwischen Bereich 0 und 1 ist durch eine Stoßfront getrennt. Im Bereich 1 ist das Gas, das sich zur Zeit $t = 0$ bei $x > 0$ befand, und im Bereich 2 ist das Gas, das zur Zeit $t = 0$ bei $x \leq 0$ war. In den Bereichen 1 und 2 sind der Druck und die Geschwindigkeit jeweils gleich. Da die Dichte und die spezifische innere Energie unterschiedlich sein können, bezeichnet man die Grenze zwischen 1 und 2 als Kontaktdiskontinuität. Die Bereiche 2 und 4 werden durch eine Verdünnungswelle getrennt

(Bereich 3).

2. Sprungbedingungen an der Stoßfront

An der Stoßfront, die sich beim Stoßrohr-Problem ausbildet (Abbildung 3.11), gelten die Sprungbedingungen

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{p_0 (\gamma + 1) + p_1 (\gamma - 1)} \quad (3.79)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 (p_1 - p_0)^2}{\varrho_0 [p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)]}} \quad (3.80)$$

$$v_{s1} = \sqrt{\frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{2 \varrho_0}} \quad (3.81)$$

wie sie bereits in Abschnitt 3.9.2 berechnet wurden.

4. Charakteristiken und RIEMANN-Invarianten

Die Abbildung 3.12 zeigt den Verlauf zweier *Charakteristiken* C_- und C_+ [24] im t - x -Raum. Charakteristiken sind – vereinfacht formuliert – Kurven, entlang denen sich Informationen ausbreiten. Der Punkt P in Abbildung 3.12 ist der Schnittpunkt der nach links verlaufenden Charakteristik C_- und der nach rechts verlaufenden Charakteristik C_+ . Der von den beiden Charakteristiken eingeschlossene Bereich der Vergangenheit heißt *Abhängigkeitsbereich*. Die Eigenschaften am Punkt P werden nur von den Eigenschaften des Abhängigkeitsbereiches beeinflusst, nicht von den Eigenschaften oder Ereignissen außerhalb dieses Bereiches.

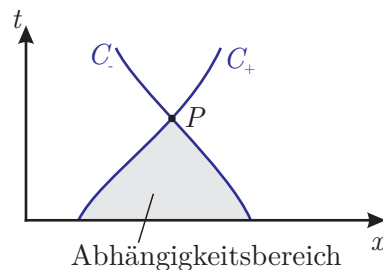


Abbildung 3.12: Charakteristiken

Die Gleichungen (3.74) können unter Berücksichtigung der Gleichung (3.75) auch in der Form

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (3.82)$$

mit

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \\ \frac{1}{2} \varrho v^2 + e \varrho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

und

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varrho v \\ \varrho v^2 + p \\ \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + e\right)v + p v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ (\gamma - 1)u_3 + \frac{3-\gamma}{2} \frac{(u_2)^2}{u_1} \\ \left(\gamma u_3 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(u_2)^2}{u_1}\right) \frac{u_2}{u_1} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

geschrieben werden.

Mit der JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2} \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3-\gamma)\frac{u_2}{u_1} & \gamma-1 \\ (\gamma-1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 - \gamma \frac{u_2 u_3}{(u_1)^2} & \gamma \frac{u_3}{u_1} - \frac{3(\gamma-1)}{2} \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma \frac{u_2}{u_1} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

wird aus Gleichung (3.82)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.86)$$

Die Charakteristiken werden durch die Eigenwerte von \mathbf{J} , also die Nullstellen von $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{1}) = 0$, bestimmt. Die Berechnung ergibt

$$\begin{aligned} C_- : \lambda_1 &= \frac{u_2}{u_1} - \sqrt{(\gamma^2 - \gamma) \frac{u_3}{u_1} - \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2} \\ &= v - \sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho}} = v - c = \frac{dx_{C_-}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$C_0 : \lambda_2 = \frac{u_2}{u_1} = v = \frac{dx_{C_0}(t)}{dt} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} C_+ : \lambda_3 &= \frac{u_2}{u_1} + \sqrt{(\gamma^2 - \gamma) \frac{u_3}{u_1} - \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2} \\ &= v + \sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho}} = v + c = \frac{dx_{C_+}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.89)$$

wobei $c = \sqrt{\gamma p / \varrho} = \sqrt{\gamma(\gamma-1)}e$ die Schallwellengeschwindigkeit ist.

Auf den Charakteristiken C_{\pm} sind die RIEMANN-Invarianten

$$\Gamma_{\pm} = v \pm \int \frac{c(\varrho)}{\varrho} d\varrho = \text{const} \quad (3.90)$$

konstant [24].

Für isentrope Vorgänge, wie sie in der Verdünnungswelle stattfinden, gilt $pV^{\gamma} = \text{const}$ bzw. $\frac{p}{\varrho^{\gamma}} = \text{const}$ also $p = A\varrho^{\gamma}$ mit der Konstanten A . Also gilt in der Verdünnungswelle gemäß Gleichung (3.90)

$$\Gamma_{\pm} = v \pm \int \frac{c(\varrho)}{\varrho} d\varrho = v \pm \int \frac{\sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho}}}{\varrho} d\varrho = v \pm \int \frac{\sqrt{\gamma A \varrho^{\gamma-1}}}{\varrho} d\varrho = v \pm \frac{2c}{\gamma-1} = \text{const} \quad . \quad (3.91)$$

Beim Integral in Gleichung (3.91) ist lediglich eine Stammfunktion gesucht, d.h. es brauchen keine Integrationsgrenzen beachtet zu werden.

5. Lösung für die Bereiche 1 bis 3

In Abbildung 3.11 sind die Bereiche und Größen des Stoßrohr-Problems dargestellt. Die Geschwindigkeiten und Zustandsgrößen für die Bereiche 0 und 4 sind die vorgegebenen Anfangswerte. Für die Bestimmung der acht Unbekannten p_1 , ϱ_1 , e_1 , v_1 , p_2 , ϱ_2 , e_2 und v_2 sind acht Gleichungen notwendig. Es können die Zustandsgleichungen

$$p_1 = (\gamma - 1) \varrho_1 e_1 \quad , \quad (3.92)$$

$$p_2 = (\gamma - 1) \varrho_2 e_2 \quad , \quad (3.93)$$

die Gleichungen für die Sprungbedingungen an der Stoßfront

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{p_0 (\gamma + 1) + p_1 (\gamma - 1)} \quad , \quad (3.94)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 (p_1 - p_0)^2}{\varrho_0 [p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)]}} \quad , \quad (3.95)$$

die Gleichungen für gleichen Druck und gleiche Geschwindigkeit in den Bereichen 1 und 2

$$v_2 = v_1 \quad , \quad (3.96)$$

$$p_2 = p_1 \quad , \quad (3.97)$$

die Gleichung für die isentrope Zustandsänderung beim Übergang von Bereich 4 zu 2

$$\frac{p_4}{\varrho_4^\gamma} = \frac{p_2}{\varrho_2^\gamma} \quad (3.98)$$

und die Gleichung für die RIEMANN-Invarianten

$$v_4 + \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\gamma \frac{p_4}{\varrho_4}} = v_2 + \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\gamma \frac{p_2}{\varrho_2}} \quad (3.99)$$

aufgestellt werden. Mit diesen acht Gleichungen können die acht Unbekannten berechnet werden.

In der Verdünnungswelle (Bereich 3) gilt nach Gleichung (3.91)

$$v_3(x, t) + \frac{2}{\gamma - 1} c_3(x, t) = v_4 + \frac{2}{\gamma - 1} c_4 \quad . \quad (3.100)$$

Da die C_- Charakteristiken vom Koordinatenursprung ausgehende Geraden sind (siehe Abbildung 3.11), gilt

$$v_3(x, t) - c_3(x, t) = \frac{x}{t} \quad . \quad (3.101)$$

Aus den Gleichungen (3.100) und (3.101) lassen sich $u_3(x, t)$ und $c_3(x, t)$ zu

$$v_3(x, t) = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1} c_4 \quad (3.102)$$

$$c_3(x, t) = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1} c_4 \quad (3.103)$$

bestimmen. Mit

$$A = \frac{p_4}{\varrho_4^\gamma} \quad (3.104)$$

$$\varrho_3(x, t) = \left(\frac{c_3(x, t)^2}{\gamma A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.105)$$

$$p_3(x, t) = A \varrho_3^\gamma \quad (3.106)$$

$$e_3(x, t) = \frac{p_3(x, t)}{(\gamma - 1) \varrho_3(x, t)} \quad (3.107)$$

sind alle Zustandsgrößen in der Verdünnungswelle an jedem Ort und zu jeder Zeit bekannt. Damit sind alle Größen in den Bereichen 1, 2 und 3 bestimmt.

6. Beispiel SOD-Shock Tube

SOD stellte in [157] das Testproblem, welches als *SOD-shock tube* bezeichnet wird, mit den Anfangswerten

- $p_l = 1, \varrho_l = 1, e_l = 5/2, v_l = 0$ für $x \leq 0$
- $p_r = 1/10, \varrho_r = 1/8, e_r = 2, v_r = 0$ für $x > 0$

auf.

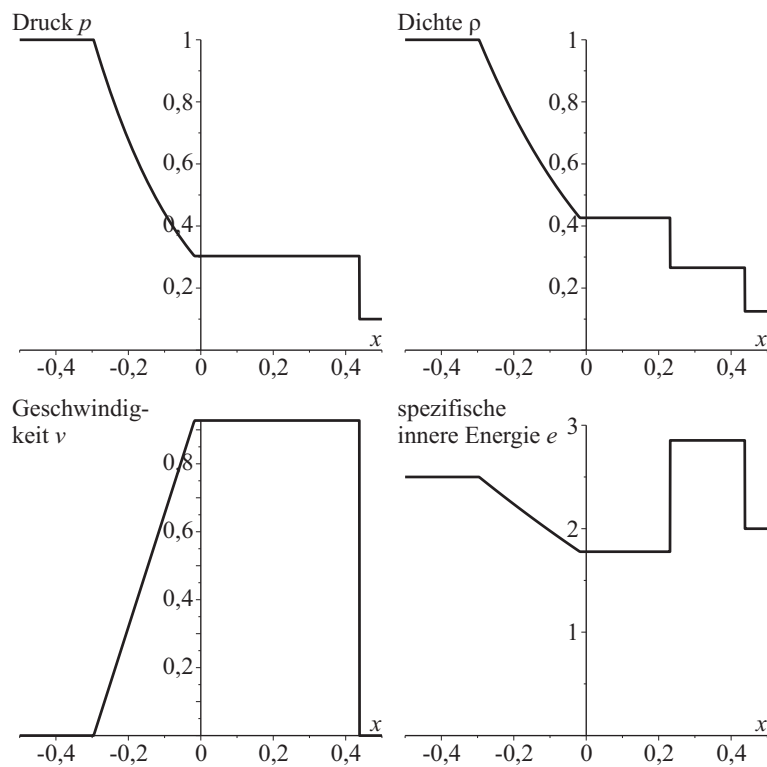


Abbildung 3.13: Riemann-Problem, SOD-shock tube, Lösungen für p, ϱ, v und e zur Zeit $t = 1/4$

Die Lösung für diese Anfangswerte wurde mit den Gleichungen (3.92) bis (3.99) ermittelt und ist $v_1 = v_2 = 0,92745$, $p_1 = p_2 = 0,30313$, $\varrho_1 = 0,2655737$, $\varrho_2 = 0,426319$.

Die Abbildung 3.13 stellt die mit Maple berechnete Lösung des SOD-Shock Tube zur Zeit $t = 1/4$ dar. Zu erkennen ist, dass an der Kontaktdiskontinuität die spezifische innere Energie und die Dichte ihren Wert ändern, jedoch der Druck und die Geschwindigkeit beiderseits der Kontaktdiskontinuität den gleichen Wert besitzen.

3.9.5 Senkrechte Reflexion von Luftstoßwellen an starren Oberflächen

In Abbildung 3.14 ist die Reflexion einer Luftstoßwelle unmittelbar nach dem Auftreffen auf eine starre Oberfläche abgebildet. Wenn die Luft mit der Geschwindigkeit v_1 auf die starre Oberfläche trifft, dann wird sie abrupt gestoppt ($v_2 = 0$) und verdichtet. Es entsteht eine neue Stoßfront, welche sich mit der Geschwindigkeit v_{s2} zurück bewegt. Die Zustandsgrößen p_2 , ϱ_2 und e_2 beschreiben den Zustand 2 der Luft an der starren Oberfläche.

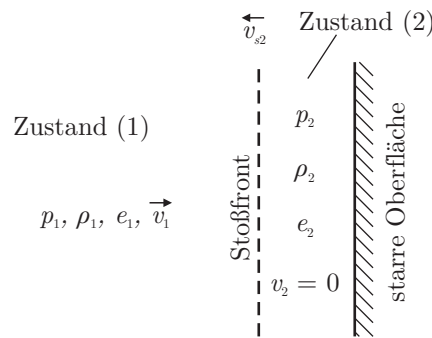


Abbildung 3.14: Reflektierter Luftstoß, senkrechte Reflexion

Es werden wieder die Erhaltungsgleichungen aufgestellt. Für die Massenerhaltung folgt analog zu (3.63)

$$\varrho_1 (v_{s2} + v_1) = \varrho_2 v_{s2} \quad (3.108)$$

mit ϱ_1 und v_1 aus (3.69) und (3.70). Für die Impulserhaltung ergibt sich analog zu (3.64)

$$\varrho_1 (v_{s2} + v_1) v_1 = p_2 - p_1 . \quad (3.109)$$

Für die Energieerhaltung ergibt sich analog zu (3.65)

$$p_1 v_1 = \varrho_2 v_{s2} \left[e_2 - e_1 - \frac{1}{2} v_1^2 \right] \quad (3.110)$$

mit e_1 nach (3.67) und

$$e_2 = \frac{p_2}{(\gamma - 1) \varrho_2} . \quad (3.111)$$

Die verbleibenden unbekanntenen Größen sind v_{s2} , p_2 und ρ_2 . Diese drei Unbekannten können mit den drei Gleichungen (3.108), (3.109) und (3.110) bestimmt werden. Das Ergebnis für den Druck p_2 unmittelbar hinter der reflektierten Stoßfront, der hier als reflektierter Druck bezeichnet wird, ist

$$p_2 = p_1 \frac{p_1 (3\gamma - 1) - p_0 (\gamma - 1)}{p_1 (\gamma - 1) + p_0 (\gamma + 1)} . \quad (3.112)$$

Bei der Annahme von Luft als ideales Gas ist der reflektierte Druck p_2 bei der senkrechten Reflexion nur vom Umgebungsluftdruck p_0 , vom Isentropenexponenten γ und vom einfallenden Druck p_1 und nicht von der Dichte oder von der inneren Energie e (bzw. von der Temperatur T , siehe Gleichung (3.44)) abhängig. Trifft die Luftstoßwelle nicht senkrecht auf eine Oberfläche, so ist der reflektierte Druck auch vom Auftreffwinkel abhängig (siehe Abschnitt 3.9.6).

Der Reflexionsfaktor c_r wird als das Verhältnis vom reflektierten Spitzenüberdruck p_{ro} (*peak reflected overpressure*) zum Spitzenüberdruck der einfallenden Luftstoßwelle p_{so} (*peak side-on overpressure*)

$$c_r = \frac{p_{ro}}{p_{so}} = \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} \quad (3.113)$$

definiert. Einsetzen von (3.112) liefert

$$c_r = \frac{p_1 \frac{p_1 (3\gamma - 1) - p_0 (\gamma - 1)}{p_1 (\gamma - 1) + p_0 (\gamma + 1)} - p_0}{p_1 - p_0} . \quad (3.114)$$

Wird für Luft im Normzustand der Isentropenexponent $\gamma = 1,4$ verwendet, so ergibt sich für diesen Fall aus (3.114)

$$c_r = \frac{8p_1 + 6p_0}{p_1 + 6p_0} . \quad (3.115)$$

Der Reflexionsfaktor ist in Abbildung 3.15 in Abhängigkeit vom einfallenden Überdruck $p_{so} = p_1 - p_0$ mit $p_0 = 101325$ Pa abgebildet. Für sehr kleine Überdrücke gilt $\lim_{p_1 \rightarrow p_0} c_r = 2$ und für sehr große Überdrücke strebt c_r gegen die Asymptote $\lim_{p_1 \rightarrow \infty} c_r = 8$. Dies gilt nur unter der Annahme, dass Luft ein ideales Gas mit einem konstanten Isentropenexponenten $\gamma = 1,4$ ist.

Luft verhält sich aber nur näherungsweise wie ein ideales Gas. Bei hohen Drücken und hohen Temperaturen verringert sich der Isentropenexponent bis auf $\gamma \approx 1,17$ (TM 5-855-1 [31]). Dies hat Einfluss auf den Reflexionsfaktor, der auf $c_r \approx 12,5$ bei einem einfallenden Überdruck von $p_{so} \approx 34,5$ MPa steigt.

Detonationen werden unterschieden in Kontakt-, Nah- und Ferndetonationen. Detonationen mit einem skalierten Abstand $z = R/W^{1/3} > 0,5$ m/kg^{1/3} (R = Abstand, W = Sprengstoffmasse) können als Ferndetonationen betrachtet werden (MAYRHOFER [113]). Dies entspricht einfallenden Überdrücken bis 4 MPa. Dabei beträgt die Abweichung des Reflexionsfaktors bei Berücksichtigung eines veränderlichen im Vergleich zu einem konstanten Isentropenexponenten ungefähr 6 %. Damit ist die Verwendung eines konstanten Isentropenexponenten für Anwendungen im Bereich von Ferndetonationen ausreichend genau. Für Nahdetonationen sollte der Effekt eines erhöhten Reflexionsfaktors berücksichtigt werden.

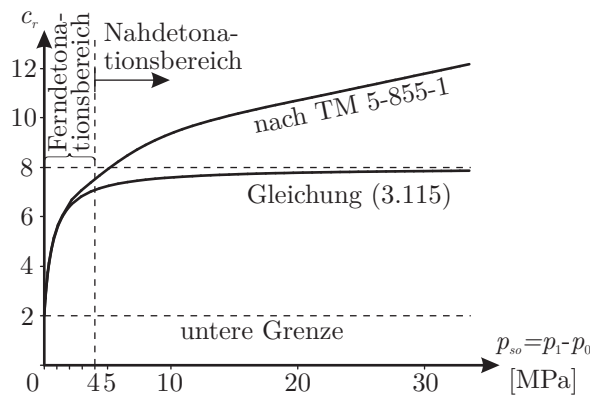


Abbildung 3.15: Reflexionsfaktor, in Abhängigkeit vom einfallenden Überdruck p_{so} mit $p_0 = 101325$ Pa

Durch Umformen der Gleichung (3.112) und Verwenden der Gleichungen (3.69) und (3.70) ergibt sich die interessante Darstellung

$$p_{ro} = 2p_{so} + (\gamma + 1) \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 \quad (3.116)$$

für den reflektierten Spitzenüberdruck. Die Gleichung (3.116) zeigt anschaulich, dass der reflektierte Spitzenüberdruck p_{ro} sich aus dem Doppelten des einfallenden Spitzenüberdrucks p_{so} und dem dynamischen Spitzendruck $\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2$, welcher mit dem Faktor $(\gamma + 1)$ multipliziert wird, zusammensetzt. Der Reflexionsfaktor ist nicht auf einen Maximalwert von 2 begrenzt, da die Geschwindigkeit der Luft hinter der Stoßfront größer als 0 m/s ist.

3.9.6 Reguläre und irreguläre Reflexionen

Reflexionen von Luftstoßwellen, die nicht senkrecht auf eine Oberfläche treffen, unterteilt man im Allgemeinen in reguläre und in irreguläre Reflexionen.

Reguläre Reflexionen bestehen aus zwei Stoßwellen, nämlich aus der einfallenden Stoßwelle und aus der reflektierten Stoßwelle. Beide Stoßwellen treffen sich in einem Punkt, der sich auf der reflektierenden Oberfläche befindet. Andere Konfigurationen von Stoßwellen werden als irreguläre Reflexionen bezeichnet (BEN-DOR [3]), zu denen auch die MACH-Reflexion gezählt wird.

Schiefer Stoß

Die Abbildung 3.16 zeigt schematisch eine Strömung, die mit Überschallgeschwindigkeit v_0 von rechts auf einen Keil mit dem Anstellwinkel θ_w zuströmt. Es sind nur zwei Dimensionen abgebildet, es besteht Verschiebungssymmetrie senkrecht zur dargestellten Ebene.

Da die Überschallströmung in ihrem Fluss gestört wird, bildet sich ein Stoß aus, der die Strömung umlenkt. Zustand (0) und Zustand (1) beschreiben die Zustände vor und nach dem Stoß. Zustandsgrößen sind der Druck p_i , die Dichte ρ_i , die spezifische innere Energie e_i und die Schallgeschwindigkeit c_i , wobei der Index i für den entsprechenden Zustand steht. Bei einem Anstell-

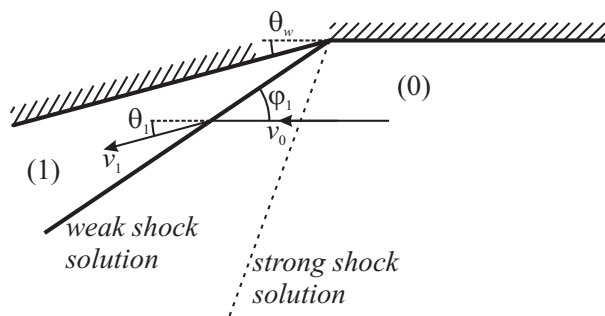


Abbildung 3.16: Schiefer Stoß, Definition der Parameter, schematisch

winkel $\theta_w \leq \theta_{max}(M_0)$ bildet sich ein *schiefer Stoß* aus, d.h. die Stoßfront ist eine Gerade mit dem Anfang im Knickpunkt der Wand. Ist der Anstellwinkel θ_w größer als $\theta_{max}(M_0)$, dann bildet sich eine gekrümmte, abgelöste Stoßfront (*detached bow shock wave*, [3]) aus. Der Grenzwinkel $\theta_{max}(M_0)$ ist der maximale Anstellwinkel, bei dem sich ein schiefer Stoß ausbilden kann, und ist von der MACH-Zahl $M_0(v_0, c_0)$ abhängig. Die Begriffe *weak shock solution* und *strong shock solution* in Abbildung 3.16 werden anhand des Beispiels in Tabelle 3.4 erklärt.

Der Einfallswinkel φ_1 ist der Winkel zwischen der Strömung (0) und der Stoßfront. Beim Durchqueren der Stoßfront wird die Strömung um den Winkel θ_1 abgelenkt. Für die Lösung des Problems werden die Erhaltungsgleichungen aufgestellt. Diese sind

$$\varrho_0 v_0 \sin \varphi_1 = \varrho_1 v_1 \sin(\varphi_1 - \theta_1) \quad (3.117)$$

für die Massenerhaltung,

$$p_0 + \varrho_0 (v_0 \sin \varphi_1)^2 = p_1 + \varrho_1 (v_1 \sin(\varphi_1 - \theta_1))^2 \quad (3.118)$$

für die Impulserhaltung senkrecht zur Stoßfront,

$$\varrho_0 \tan \varphi_1 = \varrho_1 \tan(\varphi_1 - \theta_1) \quad (3.119)$$

für die Impulserhaltung tangential zur Stoßfront [3] und

$$\varrho_0 v_0 \sin \varphi_1 \left(e_0 + \frac{1}{2} v_0^2 \right) + p_0 v_0 \sin \varphi_1 = \varrho_0 v_0 \sin \varphi_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + p_1 v_1 \sin(\varphi_1 - \theta_1) \quad (3.120)$$

für die Energieerhaltung. Die Zustandsgleichung wird mit

$$p_i = (\gamma - 1) \varrho_i e_i \quad (3.121)$$

mit $i = 0, 1$ beschrieben.

Mit den Gleichungen (3.117) bis (3.121) lässt sich das Problem prinzipiell lösen. Wenn beispielsweise die Werte $p_0 = 101,332 \text{ kPa}$, $\varrho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $v_0 = 925 \text{ m/s}$, $\theta_w = \theta_1 = 15^\circ$ und $\gamma = 1,4$ gegeben sind, dann werden zwei mögliche Lösungen erhalten (Tabelle 3.4). Die Lösung

Tabelle 3.4: Beispiel Schiefer Stoß (geg. Werte im Text), Lösungen schwacher und starker Stoß

Größe	schwacher Stoß	starker Stoß
p_1 [kPa]	264,906	846,298
ρ_1 [kg/m ³]	2,373	4,363
v_1 [m/s]	808,181	276,995
φ_1 [°]	34,611	83,777

mit dem kleineren Druck p_1 wird als schwacher Stoß (*weak shock solution*), die andere als starker Stoß (*strong shock solution*) bezeichnet. Die Strömung (1) ist beim schwachen Stoß eine Überschallströmung und beim starken Stoß eine Unterschallströmung. In der Praxis wird sich in den meisten Fällen der schwache Stoß einstellen, wenn nicht besondere Maßnahmen getroffen werden, damit sich der starke Stoß einstellt [3].

Reguläre Reflexion

Wenn eine ebene Stoßfront auf eine starre Ebene trifft, dann wird die Stoßfront reflektiert. Im Fall der regulären Reflexion bewegt sich die Schnittgerade R der einfallenden Stoßfront mit der reflektierten Stoßfront mit der Geschwindigkeit v_R auf der starren Oberfläche (nicht-stationärer Stoß, Abbildung 3.17).

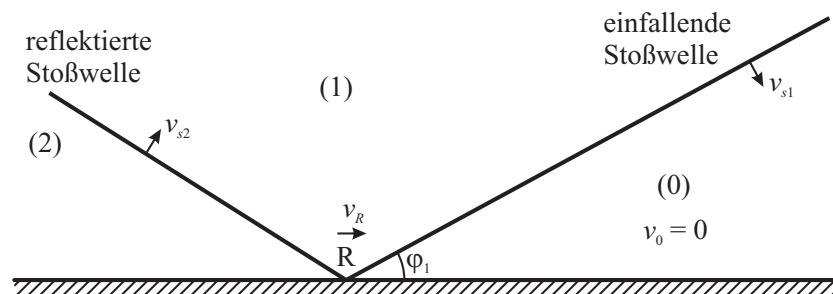


Abbildung 3.17: Reguläre Reflexion, nicht-stationärer Stoß, schematisch

Wenn das Koordinatensystem in einen Punkt der Schnittgeraden R gelegt wird, dann sind die einfallende und die reflektierte Stoßfront in Ruhe in Bezug zum Koordinatensystem. Nur die Luft strömt durch das System (Abbildung 3.18). Dies wird als stationärer Stoß bezeichnet. Die Abbildung 3.18 zeigt schematisch eine zweidimensionale Darstellung des stationären Falls der regulären Reflexion. Es besteht Verschiebungssymmetrie senkrecht zur dargestellten Ebene. Die Luft strömt von rechts parallel zur starren Oberfläche mit der Geschwindigkeit v_0 in die erste Stoßfront mit dem Einfallswinkel φ_1 . Durch den schiefen Stoß wird die Luft um den Winkel θ_1 zur Wand hin abgelenkt. Dadurch entsteht ein zweiter schiefer Stoß, der die Luft wieder parallel zur starren Oberfläche ausrichtet. Die drei Bereiche werden mit (0), (1) und (2) bezeichnet. Die

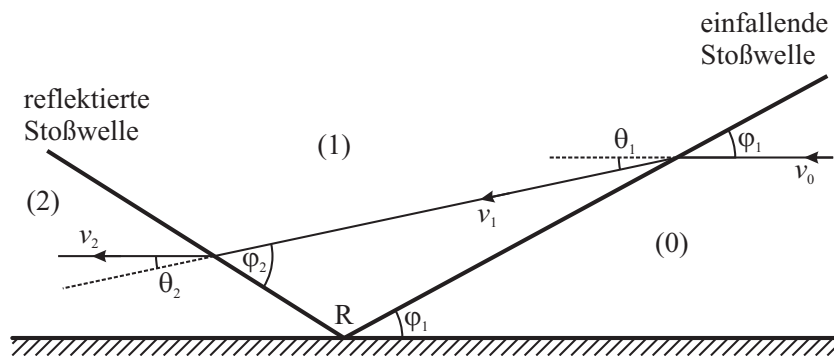


Abbildung 3.18: Reguläre Reflexion, stationärer Stoß, schematisch

drei Bereiche werden jeweils mit den Geschwindigkeiten v_i , den Drücken p_i , den Dichten ρ_i und den spezifischen inneren Energien e_i mit $i = 0, 1, 2$ beschrieben.

Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls (normal und tangential zur Stoßfront) und Energie lauten entsprechend den Gleichungen (3.117) bis (3.120) beim Übergang von Zustand (0) zu Zustand (1)

$$\rho_0 v_0 \sin \varphi_1 = \rho_1 v_1 \sin (\varphi_1 - \theta_1) \quad (3.122)$$

$$p_0 + \rho_0 (v_0 \sin \varphi_1)^2 = p_1 + \rho_1 (v_1 \sin (\varphi_1 - \theta_1))^2 \quad (3.123)$$

$$\rho_0 \tan \varphi_1 = \rho_1 \tan (\varphi_1 - \theta_1) \quad (3.124)$$

$$p_0 v_0 \sin \varphi_1 - p_1 v_1 \sin (\varphi_1 - \theta_1) = \rho_0 v_0 \sin \varphi_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 - e_0 - \frac{1}{2} v_0^2 \right) \quad (3.125)$$

und beim Übergang von Zustand (1) zu Zustand (2)

$$\rho_1 v_1 \sin \varphi_2 = \rho_2 v_2 \sin (\varphi_2 - \theta_2) \quad (3.126)$$

$$p_1 + \rho_1 (v_1 \sin \varphi_2)^2 = p_2 + \rho_2 (v_2 \sin (\varphi_2 - \theta_2))^2 \quad (3.127)$$

$$\rho_1 \tan \varphi_2 = \rho_2 \tan (\varphi_2 - \theta_2) \quad (3.128)$$

$$p_1 v_1 \sin \varphi_2 - p_2 v_2 \sin (\varphi_2 - \theta_2) = \rho_1 v_1 \sin \varphi_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 - e_1 - \frac{1}{2} v_1^2 \right) \quad (3.129)$$

Als Randbedingung gilt

$$\theta_2 = \theta_1 \quad (3.130)$$

da die Strömung (2) so wie die Strömung (0) parallel zur Wand verlaufen muss.

Bei der Annahme eines idealen Gases mit der Zustandsgleichung $p = (\gamma - 1) \rho e$ kann in den Gleichungen (3.125) und (3.129) die spezifische innere Energie durch $e_i = p_i / ((\gamma - 1) \rho_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ ersetzt werden. Damit stehen 13 Unbekannten, nämlich $p_0, \rho_0, v_0, p_1, \rho_1, v_1, p_2, \rho_2, v_2, \varphi_1, \varphi_2, \theta_1$ und θ_2 , den 9 Gleichungen (3.122) bis (3.130) gegenüber. Bei der Vorgabe von 4 Größen kann das Gleichungssystem prinzipiell gelöst werden.

HENDERSON zeigte in [74], dass das Gleichungssystem auf ein Polynom 6. Grades hinausläuft, also insgesamt sechs Lösungen besitzt. Von diesen sechs Lösungen konnte er mit physikalischen

Überlegungen vier Lösungen aussondern, so dass das System zwei mögliche Lösungen besitzt. Diese zwei Lösungen sind die *weak shock solution* und die *strong shock solution*. In der Praxis wird sich in den meisten Fällen die schwache Lösung (*weak shock solution*) einstellen, wenn nicht spezielle Vorkehrungen getroffen wurden, damit sich die starke Lösung (*strong shock solution*) ausbilden kann [3].

Im Folgenden wird die Berechnung des reflektierten Druckes p_2 aus den vorgegebenen Größen Druck p_0 und Dichte ϱ_0 des Ausgangszustandes (0), einfallender Druck p_1 und Einfallswinkel φ_1 beschrieben.

Aus den Gleichungen (3.122) bis (3.125) folgt die Lösung

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho_0 \frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{p_0 (\gamma + 1) + p_1 (\gamma - 1)} \quad , \\ v_0 &= \frac{1}{\sin \varphi_1} \sqrt{\frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{2 \varrho_0}} \quad , \\ v_1 &= v_0 \sqrt{\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_1} \sin \varphi_1\right)^2 - (\sin \varphi_1)^2 + 1} \quad , \\ \theta_1 &= \varphi_1 - \arcsin \left(\frac{\varrho_0 v_0 \sin \varphi_1}{\varrho_1 v_1}\right) \quad . \end{aligned} \quad (3.131)$$

Mit der Lösung für die MACH-Zahl des reflektierten Stoßes M_r von HENDERSON [74] kann der Winkel φ_2 mit

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{M_r}{M_1} \quad (3.132)$$

und mit

$$\begin{aligned} M_r &= \sqrt{\frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{2} \sqrt{C_1^2 - 4 C_0}} \\ C_0 &= 1 - \frac{4 (1 - \xi)^2 \cos^2 \varphi_1}{((\gamma - 1) + (\gamma + 1) \xi)^2} + \frac{((\gamma + 1) + (\gamma - 1) \xi)^2 \cot^2 \varphi_1}{((\gamma - 1) + (\gamma + 1) \xi)^2} \\ C_1 &= 2 + \frac{2 (1 - \xi)^2 \cos^2 \varphi_1}{((\gamma - 1) + (\gamma + 1) \xi)} + \frac{((\gamma + 1) + (\gamma - 1) \xi)^2 \cot^2 \varphi_1}{2 \gamma ((\gamma - 1) + (\gamma + 1) \xi)} \\ \xi &= \frac{p_0}{p_1} \\ M_1 &= \frac{v_1}{c_1} \\ c_1 &= \sqrt{\gamma \frac{p_1}{\varrho_1}} \end{aligned} \quad (3.133)$$

berechnet werden. Mit φ_2 ist die Lösung für den reflektierten Druck mit

$$p_2 = \frac{2 (v_1 \sin \varphi_2)^2 \varrho_1 + p_1 (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (3.134)$$

bekannt.

Die Lösung für den Reflexionsfaktor c_r im Bereich der regulären Reflexion ist in Abbildung 3.21 dargestellt.

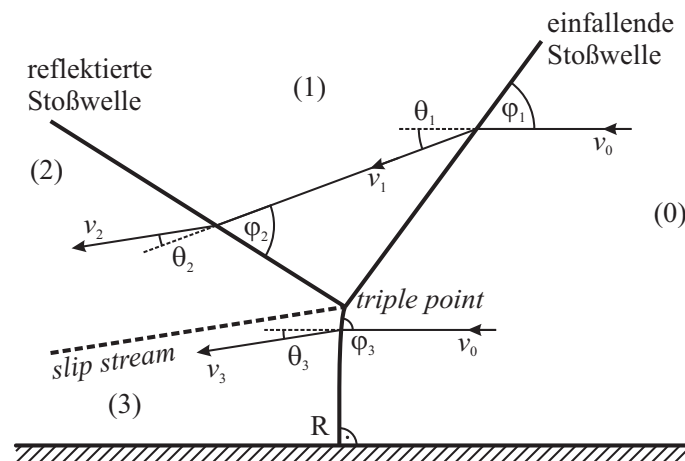


Abbildung 3.19: MACH-Reflexion, schematisch

Irreguläre Reflexion

Oft wird die irreguläre Reflexion als MACH-Reflexion bezeichnet. Dies ist jedoch nicht exakt, da verschiedene Arten der irregulären Reflexion unterschieden werden:

- MACH-Reflexion,
- VON NEUMANN-Reflexion,
- VASILEV-Reflexion,
- GUDERLEY-Reflexion.

Die MACH-Reflexion besteht selbst wieder aus verschiedenen Unterarten. BEN-DOR beschreibt in [3] die verschiedenen Arten von Reflexionen ausführlicher.

In Abbildung 3.19 ist eine irreguläre Reflexion und zwar die MACH-Reflexion schematisch dargestellt. Es besteht Verschiebungssymmetrie senkrecht zur dargestellten Ebene.

Im Gegensatz zur regulären Reflexion befindet sich bei der irregulären Reflexion der Schnittpunkt der einfallenden und der reflektierten Stoßfront nicht auf der reflektierenden Oberfläche. Eine zusätzliche Stoßfront, der sogenannte MACH-Stamm, verbindet die reflektierende Oberfläche und diesen Schnittpunkt, den sogenannten *triple point*. Bei der irregulären Reflexion existieren die vier Bereiche (0), (1), (2) und (3). Bereich (0) beschreibt den Ausgangszustand und Bereich (1) den Zustand in der einfallenden Stoßwelle. Diese beiden Bereiche sind durch die einfallende Stoßfront getrennt. Die Bereiche (1) und (2) sind durch die reflektierte Stoßfront, die Bereiche (0) und (3) durch den MACH-Stamm und die Bereiche (2) und (3) durch den sogenannten *slip stream* getrennt. Die vier Bereiche werden jeweils mit den Geschwindigkeiten v_i , den Drücken p_i , den Dichten ρ_i und den spezifischen inneren Energien e_i mit $i = 0, 1, 2, 3$ beschrieben.

Die Luft strömt von rechts mit der Geschwindigkeit v_0 und dem Einfallswinkel φ_1 in die einfallende Stoßfront. Die Luft wird durch den Winkel θ_1 abgelenkt und strömt durch die reflektierte

Stoßfront und wird durch den Winkel θ_2 abgelenkt. Im Gegensatz zur regulären Reflexion kann die Strömung im Bereich (2) jedoch nicht mehr parallel zur reflektierenden Oberfläche ausgerichtet werden.

Der MACH-Stamm ist eine gekrümmte Stoßfront. Am *triple point* strömt die Luft mit dem Einfallswinkel φ_3 durch die Stoßfront. An der reflektierenden Oberfläche bilden der MACH-Stamm und die Oberfläche einen rechten Winkel.

Die Bereiche (2) und (3) sind durch den *slip stream* getrennt. Auf beiden Seiten direkt neben dem *slip stream* fließen die Ströme (2) und (3) parallel zum *slip stream* und haben den gleichen Druck.

Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls (normal und tangential zur Stoßfront) und Energie sind wie bei Gleichungen (3.117) bis (3.120) beim Übergang von Zustand (0) zu Zustand (1)

$$\varrho_0 v_0 \sin \varphi_1 = \varrho_1 v_1 \sin (\varphi_1 - \theta_1) \quad (3.135)$$

$$p_0 + \varrho_0 (v_0 \sin \varphi_1)^2 = p_1 + \varrho_1 (v_1 \sin (\varphi_1 - \theta_1))^2 \quad (3.136)$$

$$\varrho_0 \tan \varphi_1 = \varrho_1 \tan (\varphi_1 - \theta_1) \quad (3.137)$$

$$p_0 v_0 \sin \varphi_1 - p_1 v_1 \sin (\varphi_1 - \theta_1) = \varrho_0 v_0 \sin \varphi_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 - e_0 - \frac{1}{2} v_0^2 \right) \quad (3.138)$$

und beim Übergang von Zustand (1) zu Zustand (2)

$$\varrho_1 v_1 \sin \varphi_2 = \varrho_2 v_2 \sin (\varphi_2 - \theta_2) \quad (3.139)$$

$$p_1 + \varrho_1 (v_1 \sin \varphi_2)^2 = p_2 + \varrho_2 (v_2 \sin (\varphi_2 - \theta_2))^2 \quad (3.140)$$

$$\varrho_1 \tan \varphi_2 = \varrho_2 \tan (\varphi_2 - \theta_2) \quad (3.141)$$

$$p_1 v_1 \sin \varphi_2 - p_2 v_2 \sin (\varphi_2 - \theta_2) = \varrho_1 v_1 \sin \varphi_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 - e_1 - \frac{1}{2} v_1^2 \right) \quad (3.142)$$

und beim Übergang von Zustand (0) zu Zustand (3) über den MACH-Stamm

$$\varrho_0 v_0 \sin \varphi_3 = \varrho_3 v_3 \sin (\varphi_3 - \theta_3) \quad (3.143)$$

$$p_0 + \varrho_0 (v_0 \sin \varphi_3)^2 = p_3 + \varrho_3 (v_3 \sin (\varphi_3 - \theta_3))^2 \quad (3.144)$$

$$\varrho_0 \tan \varphi_3 = \varrho_3 \tan (\varphi_3 - \theta_3) \quad (3.145)$$

$$p_0 v_0 \sin \varphi_3 - p_3 v_3 \sin (\varphi_3 - \theta_3) = \varrho_0 v_0 \sin \varphi_3 \left(e_3 + \frac{1}{2} v_3^2 - e_0 - \frac{1}{2} v_0^2 \right) \quad (3.146)$$

Als Randbedingungen gelten

$$p_2 = p_3 \quad (3.147)$$

da der Druck über den *slip stream* konstant ist und

$$\theta_1 \pm \theta_2 = \theta_3 \quad (3.148)$$

da die Strömungen (2) und (3) am *slip stream* parallel verlaufen. Die Gleichung (3.148) lässt zwei Gleichungen zu, wobei die Gleichung

$$\theta_1 - \theta_2 = \theta_3 \quad (3.149)$$

zur sogenannten "standard" three-shock theory und die Gleichung

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_3 \quad (3.150)$$

zur sogenannten "nonstandard" three-shock theory gehört [3].

Bei der Annahme eines idealen Gases kann die spezifische innere Energie durch $e_i = p_i / ((\gamma - 1) \rho_i)$ mit $i = 0, 1, 2, 3$ ersetzt werden. Unter Vorgabe der Größen p_0, ρ_0, p_1 und φ_1 gibt es 14 Unbekannte, nämlich $v_0, \rho_1, v_1, \theta_1, \varphi_2, \theta_2, p_2, \rho_2, v_2, \varphi_3, \theta_3, p_3, \rho_3$ und v_3 , die mit Hilfe der 14 Gleichungen prinzipiell gelöst werden können.

KINNEY & GRAHAM [86] stellen eine Näherungslösung vor, die auf der Annahme beruht, dass sich die Höhe des MACH-Stamms nur langsam ändert. Damit kann näherungsweise

$$v_0 = \frac{v_{s1}}{\sin \varphi_1} = \frac{1}{\sin \varphi_1} \sqrt{\frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{2 \rho_0}} \quad (3.151)$$

angenommen werden, und der reflektierte Druck p_3 wird wie bei einem senkrechten Stoß durch Umstellung der Gleichung (3.71) zu

$$p_3 = \frac{2 (v_0)^2 \rho_0 - p_0 (\gamma - 1)}{\gamma + 1} = \frac{p_0 (\gamma - 1) (1 - \sin^2 \varphi_1) + p_1 (\gamma + 1)}{(\gamma + 1) (\sin \varphi_1)^2} \quad (3.152)$$

berechnet.

Grenze zwischen regulärer und irregulärer Reflexion

Für die Berechnung der Grenze zwischen regulärer und irregulärer Reflexion wurden mehrere Ansätze bzw. Kriterien vorgeschlagen [3]:

- *detachment criterion*,
- *mechanical-equilibrium criterion*,
- *sonic criterion*,
- *length-scale criterion*.

Für weitere Erläuterungen zu diesen Ansätzen siehe beispielsweise [3, 74, 86].

Die Abbildung 3.20 stellt die Grenze zwischen der regulären und der irregulären Reflexion unter Annahme des *detachment criterion*, d.h. $\theta_2 = \theta_{2,max}$, dar. Die Grenze ist als Funktion des Grenzeinfallswinkels $\varphi_{1,grenz}$ in Abhängigkeit von der MACH-Zahl $M_x = v_{s1}/c_0$ des einfallenden Stoßes abgebildet. Für Einfallswinkel $\varphi_1 \leq \varphi_{1,grenz}$ findet eine reguläre Reflexion statt und für $\varphi_1 > \varphi_{1,grenz}$ findet eine irreguläre Reflexion statt. Für sehr kleine Überdrücke p_{so} gilt $\lim_{M_x \rightarrow 1} \varphi_{1,grenz} = 90^\circ$. Der Grenzeinfallswinkel fällt mit steigendem M_x ab und erreicht ein Minimum von $\varphi_{1,grenz}(M_x \approx 2,482) \approx 39,2315^\circ$. Dann steigt die Funktion wieder leicht an und strebt gegen die Asymptote $\lim_{M_x \rightarrow \infty} \varphi_{1,grenz} \approx 39,9706^\circ$.

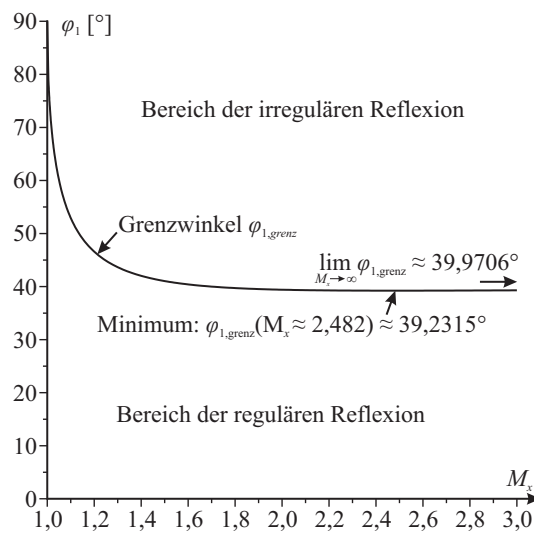


Abbildung 3.20: Reguläre und irreguläre Reflexion, Grenzeinfallswinkel zwischen beiden Reflexionen

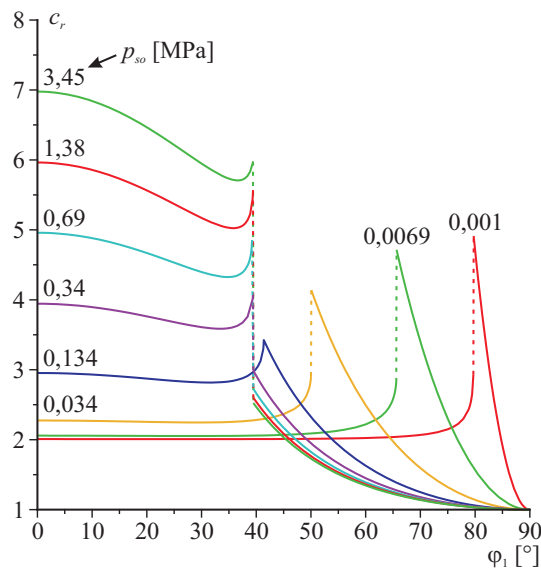


Abbildung 3.21: Reflexionsfaktor für reguläre und irreguläre Reflexion in Abhängigkeit vom einfallenden Spitzenüberdruck und vom Einfallswinkel (Gleichungen (3.134) und (3.152), $\gamma = 1,4$, $p_0 = 101,332 \text{ kPa}$)

Reflexionsfaktor

Die Abbildung 3.21 zeigt den Reflexionsfaktor in Abhängigkeit vom Einfallswinkel φ_1 und von ausgewählten einfallenden Spitzenüberdrücken p_{so} . Die Berechnung der Kurven erfolgte mit den Gleichungen (3.134) und (3.152), mit einem Isentropenexponenten $\gamma = 1,4$ und einem Umgebungsluftdruck von $p_0 = 101,332 \text{ kPa}$. Es ist ein Abfallen des Reflexionsfaktors von einem

Einfallswinkel $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha \approx 40^\circ$ im Bereich der regulären Reflexion zu erkennen. Danach erfolgt ein Anstieg, der ebenfalls im Bereich der regulären Reflexion liegt. Beim Übergang zur irregulären Reflexion befindet sich gemäß den Gleichungen (3.134) und (3.152) eine Unstetigkeitsstelle, ausgenommen bei einem Spitzenüberdruck von $p_{so} \approx 0,134$ MPa, wo beim Übergang von der regulären Reflexion zur irregulären Reflexion keine Unstetigkeit auftritt. An der Unstetigkeitsstelle fällt der Reflexionsfaktor bei $p_{so} \lesssim 0,134$ MPa und steigt sprunghaft an bei $p_{so} \gtrsim 0,134$ MPa. Die Unstetigkeitsstelle stellt die Grenze zwischen regulärer und irregulärer Reflexion dar.

Der Einfluss des Auftreffwinkels einer Luftstoßwelle auf den reflektierten Spitzenüberdruck kann gezielt genutzt werden, um mit Formgebung einer Baustruktur die Belastung aus der Luftstoßwelle zu reduzieren [58, 59].

3.10 Hydrocodes

Dieser Abschnitt beruht auf den Arbeiten von BENSON [4], HIERMAIER [77], HIRSCH [78], GODUNOV [61, 62], ZALESK [179] und dem AUTODYN – Theory Manual [23].

Die ersten Hydrocodes wurden in den 1940er Jahren im militärischen Bereich entwickelt (z. B. die 1949 eingereichte Arbeit von VON NEUMANN & RICHTMYER [123]). Dazu wurden die hydrodynamischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie gelöst. Hydrocodes werden auch als Wave-Propagation-Codes bezeichnet. Ihr Anwendungsbereich hat sich über den ursprünglichen Anwendungsbereich hinaus entwickelt. Sie werden gegenwärtig beispielsweise für die Berechnung von astrophysikalischen Ereignissen, wie dem Kollaps von Sternen, Impaktvorgängen im Automobil- und Flugzeugbau und im Herstellungsprozess von Bauteilen eingesetzt. Für die Lösung der Erhaltungsgleichungen werden verschiedene Methoden angewendet. Diese Methoden sind beispielsweise:

- Finite Differenzen Methode (FDM),
- Finite Elemente Methode (FEM),
- Finite Volumen Methode (FVM),
- Smooth Particle Hydrodynamics (SPH).

Diese Liste der Methoden ist nicht vollständig. Einen ausführlicheren Überblick geben beispielsweise BENSON [4], HIERMAIER [77] und HIRSCH [78].

3.10.1 Zeitintegration

Für die numerische Zeitintegration werden explizite und implizite Verfahren unterschieden. Wenn Vorwärtsdifferenzen (FDM) für die Zeitdiskretisierung verwendet werden, dann wird die explizite Zeitintegration erhalten [77, S. 233]. Bei der expliziten Zeitintegration sind die zu berechnenden Werte des Zeitschrittes $n + 1$ nur von den bekannten Werten des Zeitschrittes n abhängig.

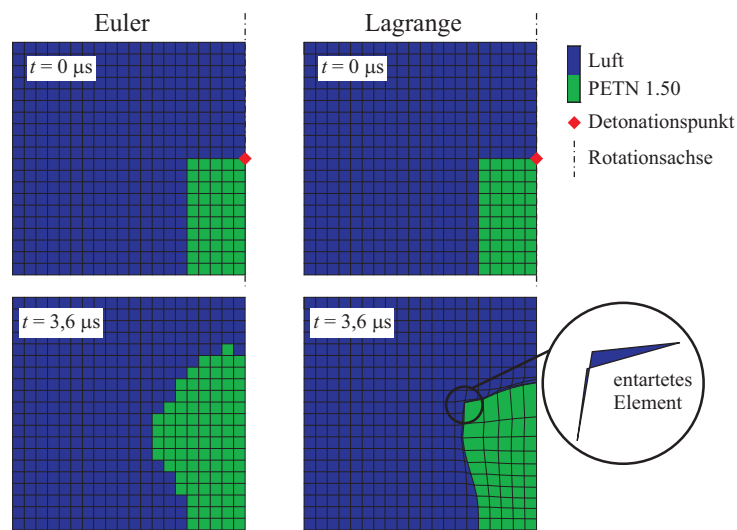


Abbildung 3.22: EULER- und LAGRANGE-Berechnungsmethoden, Vergleich der Methoden, Simulationen einer Detonation mit ANSYS-AUTODYN

Explizite Verfahren sind nur bedingt stabil. Stabilität ist nur gegeben, wenn das CFL-Kriterium nach COURANT, FRIEDRICHS & LEWY [30] eingehalten wird. Dies bedeutet, dass der gewählte Zeitschrittweite Δt kleiner oder gleich als ein Grenzwert Δt_{CFL} sein muss:

$$\Delta t \leq \Delta t_{CFL} \approx \frac{\Delta x}{v} . \quad (3.153)$$

Dabei sind Δx die räumliche Schrittweite und v die Wellengeschwindigkeit.

Wenn Rückwärtsdifferenzen für die Zeitdiskretisierung verwendet werden, dann wird die implizite Zeitintegration erhalten. Bei der impliziten Zeitintegration sind die zu berechnenden Werte des Zeitschrittes $n + 1$ von anderen unbekanntenen Werten des Zeitschrittes $n + 1$ abhängig. Dies führt zu einem Gleichungssystem, welches gelöst werden muss. Dies ist numerisch deutlich aufwendiger als beim expliziten Verfahren. Jedoch hat das implizite Verfahren den Vorteil, dass das Verfahren stabil ist, ohne besondere Bedingungen erfüllen zu müssen. Dieser Vorteil geht jedoch oft verloren, wenn bei der Berechnung von Wellenausbreitungen eine hohe zeitliche Auflösung und damit kleine Zeitschrittweiten erforderlich sind. Deshalb werden in Hydrocodes oft explizite Zeitintegrationen verwendet.

3.10.2 EULERSche und LAGRANGESche Methoden

Zwei häufig verwendete numerische Methoden in Hydrocodes sind die sogenannten EULERSche und LAGRANGESche Methoden. Der Hauptunterschied zwischen diesen beiden Methoden besteht in der Elementierung. Bei den LAGRANGESchen Methoden wird das Material fest den Elementen zugeordnet und die Elemente bewegen sich mit dem Material. Bei den EULERSchen Verfahren wird ein fest stehendes Netz aus Elementen erzeugt, durch das sich das Material hindurch bewegt. In der Abbildung 3.22 ist die unterschiedliche Herangehensweise bei EULER-Berechnungsmethoden und LAGRANGE-Berechnungsmethoden verdeutlicht. Die Berechnungen wurden mit ANSYS-

AUTODYN Version 12.1, das im Folgenden kurz als AUTODYN bezeichnet wird, durchgeführt. Die Abbildung stellt die Materialposition und die Elementierung bei der Detonation von 31,8 g PETN zum Beginn ($t = 0 \mu\text{s}$) und zur Zeit $t = 3,6 \mu\text{s}$ dar. Das Modell ist zweidimensional mit Rotationssymmetrie. Auf der linken Seite sind die EULER-Netze und auf der rechten Seite die LAGRANGE-Netze dargestellt. Bei den EULER-Netzen bleibt das Netz fest am Ort und das Material bewegt sich durch das Netz hindurch. Bei LAGRANGE-Netzen ist das Material an die Elemente gebunden und das Netz bewegt sich mit dem Material. Bei großen Verformungen kann es dabei zu stark verformten Elementen kommen, wie es in der Abbildung rechts unten zu sehen ist. Das abgebildete entartete Element (*bow tie element*, [4]) führt zu einem Fehler und zum Abbruch der Berechnung. Im Allgemeinen sind LAGRANGE-Berechnungsmethoden besser für Feststoffe und EULER-Berechnungsmethoden besser für Fluide geeignet.

Es gibt eine Vielzahl an verschiedenen EULER und LAGRANGE Methoden [78]. In den Abschnitten 3.10.3 und 3.10.4 werden die Verfahren EULER-GODUNOV und EULER-FCT beschrieben, mit denen in den Kapiteln 5 und 6 gerechnet wird.

3.10.3 EULER-GODUNOV

GODUNOV arbeitete an dem nach ihm benannten Verfahren von 1953 bis 1969 [62]. Gemäß HIRSCH [78, S. 443 ff.] wird beim GODUNOV-Verfahren die Lösung als stückweise konstant über die einzelnen Zellen zu bestimmten Zeiten $t = n \Delta t$ betrachtet. An den Grenzen zwischen den Zellen sind zwei Zustände von Fluiden voneinander getrennt. Dies entspricht je einem RIEMANN-Problem. Wie in Abschnitt 3.9.4 beschrieben wurde, kann das RIEMANN-Problem exakt gelöst werden. Jede Lösung des RIEMANN-Problems besteht aus einer Stoßfront, einer Kontaktdiskontinuität und einer Verdünnungswelle. Die neue stückweise konstante Lösung zur Zeit $t = (n+1) \Delta t$ wird durch Mitteln der verschiedenen Wellen erhalten. HIRSCH gibt in [78] drei Schritte zur Berechnung der Lösung zur Zeit $t = (n+1) \Delta t$ an:

1. Definiere eine stückweise konstante Näherung der Lösung zur Zeit $t = n \Delta t$.
2. Berechne die Lösung für das lokale RIEMANN-Problem an den Grenzen zwischen den Zellen.
3. Mittle die Zustandsgrößen nach dem Zeitintervall Δt .

Da die stückweise konstante Näherung eine Näherung der Lösung über die Zellgröße Δx ist, ist der räumliche Fehler in der Ordnung von Δx . Damit hat das Verfahren eine Genauigkeit erster Ordnung im Raum.

Der zweite Schritt ist der physikalische Schritt des Verfahrens. Das ursprüngliche GODUNOV-Verfahren basierte auf der exakten Lösung des RIEMANN-Problems. Alternativ können approximative RIEMANN-Löser, wie beispielsweise der von ROE [141], angewendet werden.

Das Zeitintervall Δt sollte so begrenzt werden, dass sich die Wellen der Lösungen der RIEMANN-Probleme nicht überschneiden. Dies führt zu dem CFL-Kriterium $|a_{max}| \Delta t < \Delta x/2$, wobei $|a_{max}|$ die maximale Wellengeschwindigkeit ist.

Der erste und der zweite Schritt sind numerischer Natur und unabhängig vom zweiten, physikalischen Schritt. Sie können verändert werden, ohne den physikalischen Schritt zu beeinflussen. Beispielsweise kann statt der stückweisen konstanten Näherung eine stückweise lineare Näherung verwendet werden, um ein Verfahren zweiter Ordnung zu erhalten [78, 93, 94].

In der Theoriebeschreibung von AUTODYN [23] wird das verwendete GODUNOV-Verfahren nicht detailliert erklärt. Es wird darin lediglich angegeben, dass das implementierte GODUNOV-Verfahren aufbauend auf die Arbeiten von VAN LEER [93, 94], die wiederum auf die Arbeiten von GODUNOV [61] basieren, entwickelt wurde.

3.10.4 EULER-FCT

Ein weiteres EULER-Verfahren, das in AUTODYN enthalten ist, ist das Verfahren EULER-FCT (*flux-corrected transport*). In der Theoriebeschreibung von AUTODYN [23] wird angegeben, dass dieses Verfahren auf dem von ZALESK [179] entwickelte Verfahren basiert. Die Arbeit [179] von ZALESK baute auf die Arbeiten von BORIS & BOOK [11, 12, 13] auf.

ZALESK beschreibt FCT folgendermaßen: Er geht von Erhaltungsgleichungen der Form

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (3.154)$$

aus, wobei im eindimensionalen, reibungsfreien Fall die Vektorfunktionen \mathbf{w} und \mathbf{f} der unabhängigen Variablen x und t die Form

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v E + p v \end{pmatrix} \quad (3.155)$$

annehmen. Dabei sind ρ die Dichte, v die Geschwindigkeit, p der Druck und E die spezifische totale Energie. Er bezeichnet eine Finite-Differenzen-Approximation der Gleichung (3.154) in einer *flux*-Form zu sein, wenn die Approximation in der Form

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \Delta x_i^{-1} [F_{i+(1/2)} - F_{i-(1/2)}] \quad (3.156)$$

geschrieben werden kann. Dabei sind w und f an den räumlichen Gitterpunkten x_i und an den Zeitschritten t^n definiert. Es gilt $\Delta x_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})$. Die $F_{i\pm(1/2)}$ sind *transportive fluxes* und Funktionen von f bei einem oder mehreren Zeitschritten t^n .

Er schreibt weiter: Es ist wohlbekannt, dass Verfahren höherer Ordnung (Ordnung 2 und höher) für die numerische Integration der Gleichung (3.154) unter Oszillationen leiden, besonders an steilen Gradienten in w . Verfahren geringer Ordnung, wie beispielsweise *donor cell* oder LAX-FRIEDRICHS, produzieren keine Oszillationen sondern leiden unter starker numerischer Diffusion. FCT ist eine Technik, die die Vorteile dieser beiden Welten ausnutzt. FCT wendet in Bereichen mit einem glatten Lösungsverlauf eine Diskretisierung hoher Ordnung an und überblendet diese im Bereich von Unstetigkeitsstellen mit einer Methode niedriger Ordnung [117]. Dazu besteht FCT aus zwei Hauptteilen, dem konvektiven Teil und dem antidiffusiven bzw. *corrective* Teil. Der zweite, antidiffusive Teil korrigiert die numerischen Fehler, die im ersten, konvektiven Teil verursacht wurden [12].

Kapitel 4

Der Einfluss nachgiebiger Materialien auf den Reflexionsfaktor

4.1 Einleitung

Dieses Kapitel soll die Frage beantworten, in welchem Maße sich der Reflexionsfaktor durch die Wahl unterschiedlicher Materialien und unterschiedlicher Bauteildicken beeinflussen lässt.

Bezüglich des Reflexionsfaktors gibt es Klärungsbedarf. So wurde beispielsweise in [21] geschrieben: „Die Größe des Reflexionsfaktors ist von der Steifigkeit der druckbeaufschlagten Struktur abhängig. Eine starre Struktur führt zu einem Reflexionsfaktor von 2. Eine nachgiebige Struktur führt zu einem Reflexionsfaktor kleiner als 2.“ Dazu lässt sich festhalten, wie es schon in [57] beschrieben ist:

- Der Reflexionsfaktor ist nicht maßgebend von der Steifigkeit der Struktur, wie der Biegesteifigkeit einer Platte, abhängig, sondern von den Materialeigenschaften (Abschnitte 4.4 und 4.4.6).
- Der Reflexionsfaktor bei der senkrechten Reflexion einer Luftstoßwelle an einer starren Oberfläche ist größer als 2 (Abschnitt 3.9.5).
- Auch bei der senkrechten Reflexion von Luftstoßwellen an nachgiebigen Materialien treten Reflexionsfaktoren größer als 2 auf (Abschnitt 4.4).

Für die Berechnung des Reflexionsfaktors an nachgiebigen Materialien wird in Abschnitt 4.2 die verwendete Zustandsgleichung für das nachgiebige Material beschrieben. Der Abschnitt 4.3 beschreibt Stoßwellen in dem Material, und Abschnitt 4.4 beschreibt die Berechnung des Reflexionsfaktors von Luftstoßwellen an nachgiebigen Materialien und diskutiert die Ergebnisse.

Der Reflexionsfaktor an nachgiebigen Materialien wurde vom Autor im Aufsatz [57] hergeleitet. Erst nach der Veröffentlichung dieses Aufsatzes wurde entdeckt, dass MONTI bereits 1970 in [118] ähnliche Berechnungen durchführte. Der Aufsatz [57] entstand jedoch unabhängig davon. MONTI deutete in [118] bereits an, dass der reflektierte Druck bei der Reflexion einer Luftstoßwelle an der starren Wand mit einem nachgiebigen Material davor größer sein kann als ohne

dem nachgiebigen Material. Auch [114] und [151] untersuchen mit analytischen Modellen den Einfluss von nachgiebigen Materialien vor einer Wand auf den reflektierten Druck an der Wand. Alle bekannten Veröffentlichungen, die diesen Druck an der Grenze vom nachgiebigen Material zur Wand berechnen, idealisieren die Wand als starr. In Abschnitt 4.5 wird der reflektierte Druck zwischen einem nachgiebigen Material und einer starren Wand analytisch berechnet. In Abschnitt 4.6 wird über die Annahme einer starren Wand hinausgegangen und die Wand mit einem nachgiebigen Material modelliert. Es wird gezeigt, dass dies einen erheblichen Einfluss auf den reflektierten Druck an der Oberfläche der Wand hat. Dies ist die erste bekannte Untersuchung dieser Art.

Für die Untersuchungen in diesem Kapitel werden nur Ferndetonationen betrachtet. Gemäß MAYRHOFER [113] können Einwirkungen aus Explosionen mit einem skalierten Abstand von $z \geq 0,5$ als Ferndetonationen betrachtet werden. Dies entspricht einfallenden Überdrücken bis zu $p_{so} \lesssim 4$ MPa. In diesem Kapitel wird ein konstanter Isentropenexponent $\gamma = 1,4$ für Luft verwendet, da dies, wie in Abschnitt 3.9.5 gezeigt wurde, für baupraktische Anwendungen im Bereich des Ferndetonationsschutzes ausreichend genau ist.

4.2 Zustandsgleichung für den Feststoff

Für die folgenden Untersuchungen wird die polynomische Zustandsgleichung (3.50):

$$p = K_1 \mu + K_2 \mu^2 + K_3 \mu^3 + (B_0 + B_1 \mu) \varrho_0 e \quad (4.1)$$

mit der Kompression $\mu = \varrho/\varrho_0 - 1$ für die gewählten nachgiebigen Materialien, die im Folgenden auch als Feststoffe bezeichnet werden, verwendet.

In diesem Kapitel werden nur Stoßwellen mit $\mu > 0$ betrachtet.

Die Parameter K_1 , K_2 und K_3 werden mit

$$\begin{aligned} K_1 &= \varrho_0 c_0^2 \\ K_2 &= \varrho_0 c_0^2 [1 + 2(S - 1)] \\ K_3 &= \varrho_0 c_0^2 [2(S - 1) + 3(S - 1)^2] \end{aligned} \quad (4.2)$$

[77, S. 176] berechnet, wobei K_1 der Kompressionsmodul des Materials ist. Diese Beziehungen werden mit der Annahme erhalten, dass dem Material eine lineare v_s - v_1 -Beziehung mit der Steigung S zu Grunde liegt. Wenn der GRÜNEISEN-Parameter Γ bekannt ist, dann kann die Steigung S der v_s - v_1 -Beziehung mit der Näherung

$$\Gamma \approx 2S - 1 \quad (4.3)$$

berechnet werden [115, Gl. (5.17)].

Zwischen B_0 , B_1 und dem GRÜNEISEN-Parameter Γ besteht der Zusammenhang

$$\Gamma(V) = \frac{B_0 + B_1 \mu}{1 + \mu} \quad (4.4)$$

[23], so dass für $B_0 = B_1$ die Gleichung

$$\Gamma = B_0 = B_1 = \text{const} \quad (4.5)$$

gilt [77, S. 177]. Damit können B_0 und B_1 bestimmt werden, wenn Γ bekannt ist.

Die Zustandsgleichung (4.1) ist keine allgemein gültige Zustandsgleichung, sondern wurde hier lediglich gewählt, um die Abhängigkeit des Reflexionsfaktors von Materialparametern wie Dichte und Steifigkeit rechnerisch aufzuzeigen. Phänomene wie die Kompaktion von porösen Materialien oder Phasenübergänge werden von dieser Zustandsgleichung nicht beschrieben. Dennoch ist diese Zustandsgleichung für die Beschreibung von Reflexionsfaktoren an Beton im Bereich von Ferndetonationen geeignet, da bei den dabei auftretenden Drücken von ≈ 28 MPa noch keine Kompaktion des Betons erfolgt.

Bei der Untersuchung des Reflexionsfaktors in [57] wurden HUGONIOT-Kurven anstelle von Zustandsgleichungen verwendet. Diese verwendeten HUGONIOT-Kurven sind für die folgenden Berechnungen nicht geeignet, da HUGONIOT-Kurven nur die Zustände bei einem einzelnen Stoß beschreiben. Hier wird zusätzlich zum ersten Stoß durch die Luftstoßwelle noch ein zweiter Stoß im Feststoff bei der Reflexion an der starren Oberfläche bzw. an einem weiteren Material untersucht. Deswegen wird hier eine allgemeinere Zustandsgleichung verwendet, die den Zusammenhang zwischen Druck, Dichte und spezifischer innerer Energie beschreibt. Aus dieser Zustandsgleichung können über die Erhaltungsgleichungen beim Sprung über die Stoßfront die HUGONIOT-Kurven berechnet werden. Dies wird im Abschnitt 4.3 gezeigt.

Im Folgenden wird der Nachweis geführt, dass die Zustandsgleichungen (3.47) für die Luft und (4.1) für den Feststoff für die Berechnungen von Stoßwellen in diesem Kapitel geeignet sind. BETHE stellte in [7] die hinreichenden Bedingungen

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_S > 0 \quad (4.6)$$

$$\Gamma = V \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_V > -2 \quad (4.7)$$

für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Stoßfront auf. Er nimmt an, dass für alle Stoffe ohne Phasenübergänge die Bedingung (4.7) erfüllt ist, wenn die Bedingung (4.6) erfüllt ist. Er gibt für die Stabilität der Stoßfront die hinreichende Bedingung

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_e < 0 \quad (4.8)$$

an.

4.2.1 Nachweis der Stoßbedingungen für die Zustandsgleichung für ideales Gas

Die Luft wird als ideales Gas angenommen. Für sie wird die Zustandsgleichung für ideales Gas

$$p = (\gamma - 1) \varrho e \quad (4.9)$$

verwendet. Für den Nachweis der Bedingung (4.8) ergibt sich

$$\begin{aligned} p &= (\gamma - 1) \varrho e = (\gamma - 1) \frac{m}{V} e \\ \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_e &= -(\gamma - 1) \frac{m}{V^2} e < 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Diese Ungleichung ist für $\gamma > 1$, $m > 0$, $V > 0$ und $e > 0$ erfüllt.

Es folgt nun der Nachweis der Bedingung (4.6). Für eine isentrope Zustandsänderung ($S = \text{const}$) kann p in Abhängigkeit von V berechnet werden. Dies wird hier über

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -p \quad (4.11)$$

(eine Beziehung aus der Thermodynamik siehe [125], [77, Gl. (2.258)] oder auch [7, Gl. (11)]) hergeleitet. Aus der Zustandsgleichung wird mit $\varrho = \frac{m}{V}$ und $e = \frac{U}{m}$ die Zustandsgleichung $p = (\gamma - 1) \frac{U}{V}$ und daraus

$$U = \frac{pV}{\gamma - 1} \quad . \quad (4.12)$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^{p(V)}V}{dV} = -p(V) \quad (4.13)$$

ergibt die Lösung

$$p(V) = C_1 V^{-\gamma} \quad , \quad (4.14)$$

welches der bekannte Zusammenhang für isentrope Zustandsänderungen für ideale Gase ist. Da sowohl $p > 0$ als auch $V > 0$ sind, muss auch $C_1 > 0$ sein. Mit dieser Lösung ergibt sich

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_S = C_1 V^{-\gamma-2} \gamma(\gamma - 1) > 0 \quad (4.15)$$

mit $V > 0$, $C_1 > 0$ und $\gamma > 1$. Damit wurde gezeigt, dass die Bedingung (4.6) erfüllt ist.

4.2.2 Nachweis der Stoßbedingungen für die Zustandsgleichung (4.1)

Die Bedingung (4.8) ergibt für (4.1)

$$p = K_1 \mu + K_2 \mu^2 + K_3 \mu^3 + (B_0 + B_1 \mu) \varrho_0 e \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} &= K_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) + K_2 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^2 + K_3 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^3 \\ &\quad + \left(B_0 + B_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) \right) \frac{e}{V_0} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_e &= -\frac{1}{V^2} \left(K_1 V_0 + 2 K_2 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) V_0 + 3 K_3 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^2 V_0 + B_1 V_0 \frac{e}{V_0} \right) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

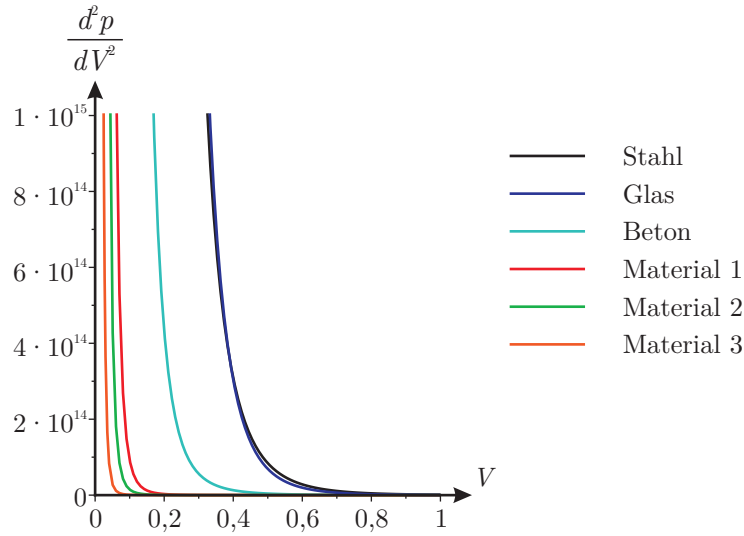


Abbildung 4.1: Zustandsgleichung (4.1), Nachweis der Bedingung (4.6), Verlauf von $\left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_S$

Für $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $K_3 > 0$, $B_1 > 0$, $V_0 > 0$, $0 < V < V_0$ und $e > 0$ ist die Ungleichung (4.18) erfüllt und somit der Nachweis der Bedingung erbracht.

Der Nachweis der Bedingung (4.6) wird wie im vorangegangenen Abschnitt mit Hilfe der Beziehung $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -p$ für isentrope Zustandsänderungen geführt. Aus der Zustandsgleichung

$$p = K_1 \mu + K_2 \mu^2 + K_3 \mu^3 + (B_0 + B_1 \mu) \varrho_0 e \quad (4.19)$$

mit $\varrho = \frac{m}{V}$, $\varrho_0 = \frac{m}{V_0}$, $\mu = \frac{\varrho}{\varrho_0} - 1 = \frac{V_0}{V} - 1$ und $e = \frac{U}{m}$ folgt

$$p = K_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) + K_2 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^2 + K_3 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^3 + \left(B_0 + B_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) \right) \frac{U}{V_0} \quad (4.20)$$

$$U = \frac{V_0 \left(p - K_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) - K_2 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^2 - K_3 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^3 \right)}{B_0 + B_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)} \quad (4.21)$$

Damit wird

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -p(V) = \frac{d \frac{V_0 \left(p(V) - K_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) - K_2 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^2 - K_3 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^3 \right)}{B_0 + B_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)}}{dV} \quad (4.22)$$

für isentrope Zustandsänderungen erhalten. Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialglei-

chung wurde mit MAPLE [105] ermittelt und ist

$$\begin{aligned}
p(V) = & \left(\int -V_0 \left(K_1 V^3 B_0 + 2 K_2 V_0 V^2 B_0 + K_2 V_0^2 V B_1 - 2 K_2 V_0 V^2 B_1 \right. \right. \\
& - 2 K_2 V^3 B_0 + K_2 V^3 B_1 + 3 K_3 V_0^2 B_0 V - 6 K_3 V_0^2 B_1 V - 6 K_3 V_0 V^2 B_0 \\
& + 6 K_3 V_0 V^2 B_1 + 3 K_3 V^3 B_0 - 2 K_3 V^3 B_1 \\
& \left. \left. + 2 K_3 V_0^3 B_1 \right) V^{B_1-3} e^{\frac{V(B_0-B_1)}{V_0}} (B_0 V + B_1 V_0 - B_1 V)^{-2} dV \right. \\
& \left. + C_1 \right) \left(V^{-B_1} B_0 + V_0 V^{-B_1-1} B_1 - V^{-B_1} B_1 \right) e^{-\frac{V(B_0-B_1)}{V_0}} . \quad (4.23)
\end{aligned}$$

C_1 ist eine Konstante, die durch den Zustand des Materials im Ausgangszustand bestimmt wird. Mit Gleichung (4.23) ist nun $p(V)$ für isentrope Zustandsänderungen bekannt. Mit dieser Gleichung wurde $\left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_S$ für die Materialien aus Tabelle 4.1 mit der Zustandsgleichung (4.1) und für $p_0 = 101332 \text{ Pa}$ berechnet. Die Abbildung 4.1 stellt die berechneten Kurven dar. Alle Kurven liegen im positiven Bereich. Damit ist die Bedingung (4.6) erfüllt. Dies ist zwar kein mathematisch strenger Beweis, jedoch für die Zwecke dieser Arbeit ausreichend.

Anmerkung: Im Rahmen dieser Dissertation wurden die Berechnungen dieses Kapitels zunächst mit der vereinfachten Zustandsgleichung

$$p = K \mu + B \varrho_0 e \quad (4.24)$$

durchgeführt. Die Berechnungen lieferten grundsätzlich ähnliche Ergebnisse, wie sie in diesem Kapitel enthalten sind. Da man aufgrund der Linearität dieser Zustandsgleichung vermuten könnte, dass die Stoßbedingungen nicht erfüllt sind, wurden die Nachweise der Stoßbedingungen für diese vereinfachte Zustandsgleichung dieser Dissertation im Anhang A beigefügt.

4.3 Planare Stoßwelle im Feststoff

In diesem Abschnitt werden die Sprungbedingungen einer eindimensionalen, planaren Stoßwelle in einem Feststoff beschrieben. Die Abbildung 4.2 stellt schematisch die Bewegung der Stoßfront (gestrichelte Linie) und die Größen Dichte ϱ , spezifische innere Energie e , Geschwindigkeit v und die Spannung in x -Richtung σ_{xx} im Ausgangszustand (0) und im verdichteten Zustand (1) dar. Es besteht Verschiebungssymmetrie in y - und in z -Richtung. Die Ausbreitung der Stoßwelle erfolgt in x -Richtung mit der Stoßwellengeschwindigkeit $v_{s,1}$. Der Pfeil über den Geschwindigkeiten definiert die Richtung der Bewegung. Der Index s steht für die Stoßfront. Der Index m kennzeichnet den Feststoff. Die Indizes 0 und 1 geben den Ausgangszustand bzw. den verdichteten Zustand an.

Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie beim Sprung über die Stoßfront werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho_{m,0} v_{s,1} &= \varrho_{m,1} (v_{s,1} - v_{m,1}) \\
\varrho_{m,0} v_{s,1} v_{m,1} &= -(\sigma_{m,xx,1} - \sigma_{m,xx,0}) \\
-\sigma_{m,xx,1} v_{m,1} &= \varrho_{m,0} v_{s,1} \left(e_{m,1} - e_{m,0} + \frac{1}{2} v_{m,1}^2 \right) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

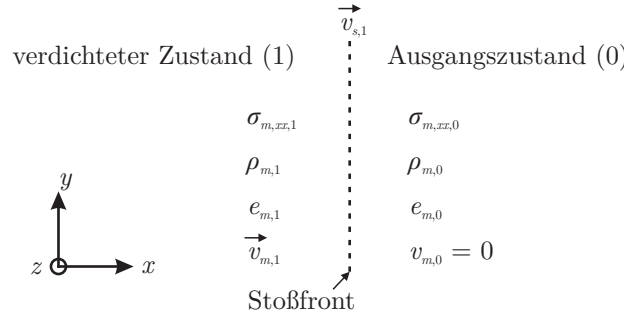


Abbildung 4.2: Planare Stoßwelle im Feststoff, Zustandsgrößen

beschrieben. Die Zustandsgleichung für den Feststoff ist

$$p_{m,i} = K_{1,m} \mu_{m,i} + K_{2,m} \mu_{m,i}^2 + K_{3,m} \mu_{m,i}^3 + (B_{0,m} + B_{1,m} \mu_{m,i}) \varrho_{m,0} e_{m,i} \quad (4.26)$$

mit $\mu_{m,i} = \varrho_{m,i}/\varrho_{m,0} - 1$ und $i = 0, 1$.

Diese Zustandsgleichung beschreibt den Druck $p_{m,i}$, während in den Erhaltungsgleichungen die Spannung $\sigma_{m,xx,i}$ verwendet wird. Es wird also noch eine Gleichung benötigt, die den Zusammenhang zwischen $p_{m,i}$ und $\sigma_{m,xx,i}$ beschreibt. Aus dem Materialgesetz

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_2 \\ E_2 & E_1 & E_2 \\ E_2 & E_2 & E_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

(z. B. RUPPERT [142]) mit $E_1 = \frac{E_m(1-\nu_m)}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}$ und $E_2 = \frac{E_m\nu_m}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}$ folgt mit $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E_1 \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = E_2 \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \frac{E_2}{E_1} \sigma_{xx} = \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \sigma_{xx} \quad . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Der Druck berechnet sich zu

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad . \quad (4.29)$$

Damit wird der Zusammenhang zwischen $p_{m,i}$ und $\sigma_{m,xx,i}$ durch die Gleichung

$$p_{m,i} = p_{m,0} - \frac{1}{3} (\sigma_{m,xx,i} - \sigma_{m,xx,0}) \left(1 + \frac{2\nu_m}{1-\nu_m} \right) \quad (4.30)$$

beschrieben. Diese Gleichung berücksichtigt eine Überlagerung mit dem Umgebungsdruck $p_{m,0} = -\sigma_{m,xx,0} = -\sigma_{m,yy,0} = -\sigma_{m,zz,0}$ im Ausgangszustand.

Die Lösung der Gleichungen erfolgt für das beschriebene Materialmodell mit den Materialparametern $E_m = 210000 \text{ N/mm}^2$, $\nu_m = 0,28$, $\varrho_{m,0} = 7850 \text{ kg/m}^3$, $p_{m,0} = 101332 \text{ Pa}$. Dies entspricht einem Stahl ohne Fließen bei Umgebungsdruck. In [106] ist für Stahl der GRÜNEISEN-Parameter $\Gamma_m = 1,69$ angegeben. Mit Gleichung (4.5) folgt $B_{0,m} = B_{1,m} = 1,69$.

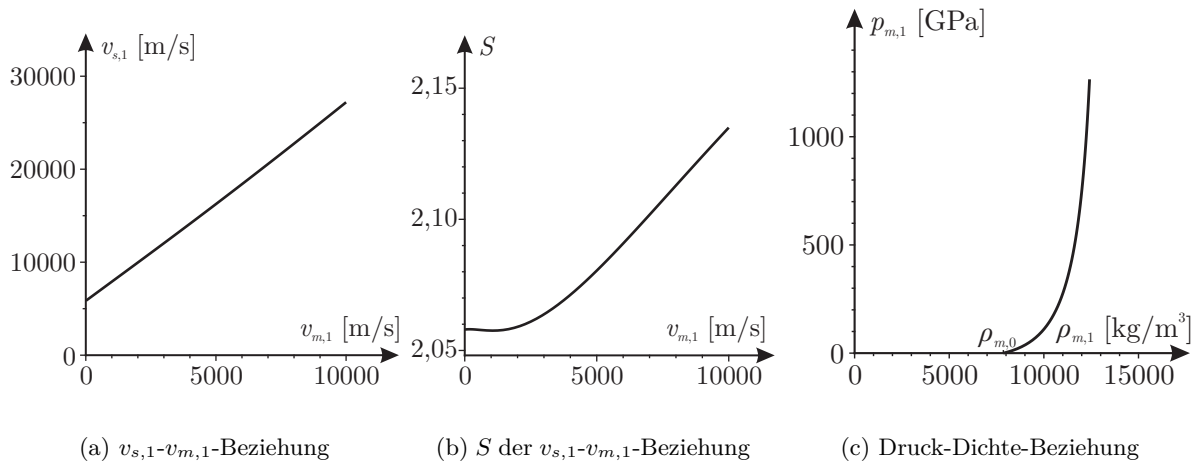


Abbildung 4.3: Planare Stoßwelle in einem Feststoff, Lösungen der Sprungbedingungen an der Stoßfront mit $p_{m,0} = 101332$ Pa

Es wird hier davon ausgegangen, dass $p_{m,0} = -\sigma_{m,xx,0}$, $\varrho_{m,0}$, $v_{m,0} = 0$ und $v_{m,1}$ gegeben sind. Damit verbleiben sechs Unbekannte, nämlich $e_{m,0}$, $p_{m,1}$, $\sigma_{m,xx,1}$, $\varrho_{m,1}$, $e_{m,1}$ und $v_{s,1}$. Für die Lösung dieser sechs Unbekannten stehen sechs Gleichungen zur Verfügung, nämlich die drei Erhaltungsgleichungen (4.25), die Zustandsgleichung (4.26) je für den Zustand (0) und für den Zustand (1) und die Gleichung (4.30).

Die Lösung dieser Gleichungen wurde mit der Mathematiksoftware MAPLE [105] ermittelt (Anhang B.1). Ausgewählte Lösungen der Problemstellung sind in der Abbildung 4.3 für $p_{m,0} = 101332$ Pa dargestellt.

Die Abbildung 4.3(a) stellt die berechnete Stoßwellengeschwindigkeit $v_{s,1}$ in Abhängigkeit von der gegebenen Geschwindigkeit $v_{m,1}$ dar. Diese sogenannte Stoßwellengeschwindigkeits-Partikelgeschwindigkeits-Beziehung wird oft anstelle einer Zustandsgleichung verwendet. Für viele Metalle, wie beispielsweise Stahl, wird ein linearer Verlauf der Form

$$v_s = c_0 + S v_1 \quad (4.31)$$

angenommen. Das Diagramm in Abbildung 4.3(a) bestätigt, dass die Annahme eines linearen Verlaufes gerechtfertigt ist. Die Abbildung 4.3(b) verdeutlicht jedoch, dass diese Annahme für das gewählte Materialmodell nur eine Näherung ist. Der Parameter $S = \frac{v_s - c_0}{v_1}$ ist keine Konstante, sondern ändert sich mit $v_{m,1}$ leicht. Der Wertebereich $0 \text{ m/s} \leq v_{m,1} \leq 10000 \text{ m/s}$ ist in Abbildung 4.3(b) sehr groß gewählt worden, um die Nichtlinearität der Stoßwellengeschwindigkeits-Partikelgeschwindigkeits-Beziehung zu zeigen und geht über den Ferndetonationsbereich hinaus. Es ist erwähnenswert, dass c_0 vom Umgebungsdruck $p_{m,0}$ abhängig ist. Für $p_{m,0} = 0$ Pa entspricht c_0 der Longitudinalwellengeschwindigkeit: $c_0(p_{m,0} = 0 \text{ Pa}) = c_{L,m} = \sqrt{L_m / \varrho_{m,0}} \approx 5848,032 \text{ m/s}$ mit dem Longitudinalwellenmodul $L_m = \frac{E_m(1-\nu_m)}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}$. Für den Umgebungsdruck $p_{m,0} = 101332$ Pa steigt c_0 auf $5848,037 \text{ m/s}$. Dies entspricht einer Erhöhung um $0,00009\%$.

Die Abbildung 4.3(c) stellt die berechnete Druck-Dichte-Beziehung dar, die ebenfalls oft anstelle einer Zustandsgleichung verwendet wird. Der abgebildete Bereich entspricht der Geschwindigkeit $v_{m,1}$ von 0 m/s bis 10000 m/s. Die Stoßwellengeschwindigkeits-Partikelgeschwindigkeits-Beziehung und die Druck-Dichte-Beziehung können über die Erhaltungsgleichungen ineinander umgerechnet werden. Sie enthalten jedoch weniger Informationen als die verwendete Zustandsgleichung (4.1). Die Druck-Dichte-Funktion stellt eine Projektion der HUGONIOT-Kurve auf der Zustandsfläche auf die Druck-Dichte-Ebene dar (Abbildung 3.6).

4.4 Der Reflexionsfaktor an nachgiebigen Materialien

4.4.1 Beschreibung der Problemstellung

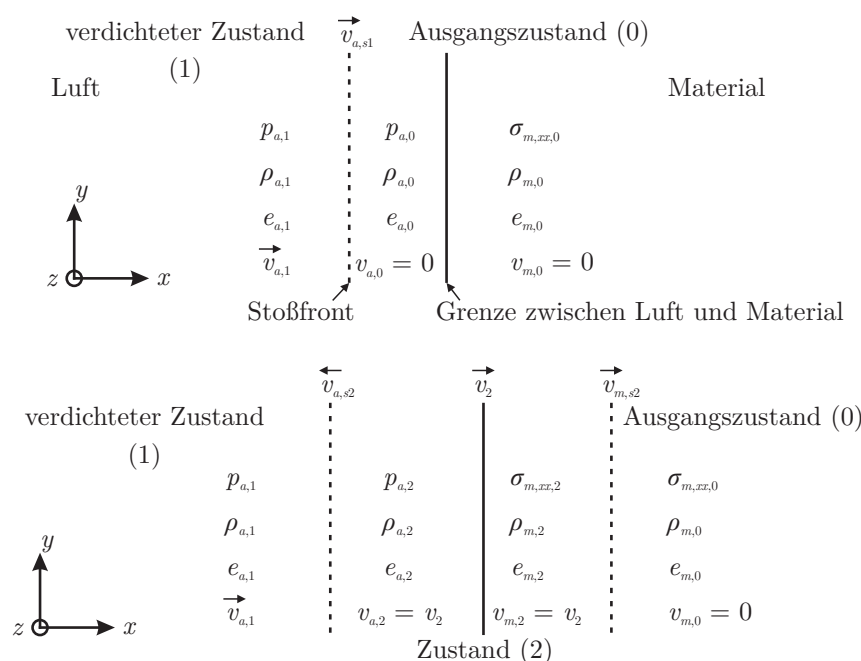


Abbildung 4.4: Reflexion der Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material (schematisch), Zustände vor (oben) und nach (unten) dem Auftreffen der Luftstoßwelle auf das Material

Die Abbildung 4.4 stellt schematisch die Reflexion einer planaren Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material dar. Die einfallende Luftstoßwelle bewegt sich in x -Richtung und trifft senkrecht auf die Oberfläche des Materials. Die Luft und das Material sind in dieser Betrachtung in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnt. Es sind die Größen Druck p , Spannung in x -Richtung σ_{xx} , Dichte ρ , spezifische innere Energie e und die Geschwindigkeit v angegeben. Die Indizes a und m stehen für Luft (*air*) und für das nachgiebige Material. Die Indizes 0, 1 und 2 geben den Zustand an.

Die Größen des Ausgangszustandes (0) und des Zustandes (1) der einfallenden Luftstoßwelle sind bekannt. Die Luft und das Material sind im Ausgangszustand in Ruhe ($v_{a,0} = v_{m,0} = 0$).

Die Stoßfront ist durch eine gestrichelte Linie dargestellt. Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_{a,s1}$.

Nach dem Auftreffen der einfallenden Luftstoßwelle wird eine Luftstoßwelle reflektiert, die sich mit der Geschwindigkeit $v_{a,s2}$ zurück bewegt (Abbildung 4.4 unten). Im Feststoff wird eine Stoßwelle erzeugt, die sich mit der Geschwindigkeit $v_{m,s2}$ in x -Richtung bewegt. Zwischen der reflektierten Stoßwelle und der Materialgrenze befindet sich die Luft im Zustand (2) mit den Zustandsgrößen $p_{a,2}$, $\varrho_{a,2}$ und $e_{a,2}$ und der Geschwindigkeit $v_{a,2}$. Zwischen der Materialgrenze und der Stoßwelle im Feststoff befindet sich der Feststoff im Zustand (2) mit den Zustandsgrößen $\varrho_{m,2}$ und $e_{m,2}$, der Spannung $\sigma_{m,xx,2}$ und der Geschwindigkeit $v_{m,2}$.

Die Aufgabe besteht nun darin, die unbekanntenen Größen im Zustand (2) zu berechnen.

4.4.2 Aufstellen der Gleichungen

Für die Berechnung der unbekanntenen Größen werden die Erhaltungsgleichungen aufgestellt. Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie sind

$$\begin{aligned}
 \varrho_{a,1} (v_{a,s2} + v_{a,1}) &= \varrho_{a,2} (v_{a,s2} + v_{a,2}) \\
 \varrho_{m,0} v_{m,s2} &= \varrho_{m,2} (v_{m,s2} - v_{m,2}) \\
 \varrho_{a,1} (v_{a,s2} + v_{a,1}) v_{a,1} &= p_{a,2} - p_{a,1} + \varrho_{a,1} (v_{a,s2} + v_{a,1}) v_{a,2} \\
 \varrho_{m,2} (v_{m,s2} - v_{m,2}) v_{m,2} &= -(\sigma_{m,xx,2} - \sigma_{m,xx,0}) \\
 p_{a,1} v_{a,1} - p_{a,2} v_{a,2} &= \varrho_{a,1} (v_{a,s2} + v_{a,1}) \left(e_{a,2} - e_{a,1} + \frac{1}{2} (v_{a,2}^2 - v_{a,1}^2) \right) \\
 p_{a,2} v_{a,2} &= \varrho_{m,0} v_{m,s2} \left(e_{m,2} - e_{m,0} + \frac{1}{2} v_{m,2}^2 \right) .
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Die Erhaltungsgleichungen sind jeweils getrennt für die Luft und das Material formuliert.

Die Geschwindigkeit der Luft und des Materials müssen gleich sein, also gilt

$$v_{a,2} = v_{m,2} = v_2 \quad . \tag{4.33}$$

Außerdem muss der Druck in x -Richtung an der Materialgrenze gleich sein:

$$p_{a,2} = -\sigma_{m,xx,2} \quad . \tag{4.34}$$

Die Zustandsgleichung für Luft ist

$$p_{a,2} = (\gamma - 1) \varrho_{a,2} e_{a,2} \quad . \tag{4.35}$$

Die Zustandsgleichung für das Material ist

$$p_{m,2} = K_{1,m} \mu_{m,2} + K_{2,m} \mu_{m,2}^2 + K_{3,m} \mu_{m,2}^3 + (B_{0,m} + B_{1,m} \mu_{m,2}) \varrho_{m,0} e_{m,2} \tag{4.36}$$

mit $\mu_{m,2} = \varrho_{m,2} / \varrho_{m,0} - 1$.

Aus Gleichung (4.30) folgt

$$p_{m,2} = p_{m,0} - \frac{1}{3} (\sigma_{m,xx,2} - \sigma_{m,xx,0}) \left(1 + \frac{2v_{m,2}}{1 - v_{m,2}} \right) \quad . \tag{4.37}$$

Es gibt insgesamt elf Unbekannte ($p_{a,2}$, $\varrho_{a,2}$, $e_{a,2}$, $v_{a,2}$, $v_{a,s2}$, $\sigma_{m,xx,2}$, $p_{m,2}$, $\varrho_{m,2}$, $e_{m,2}$, $v_{m,2}$, $v_{m,s2}$), die mit den elf Gleichungen (4.32) bis (4.37) berechnet werden können.

4.4.3 Materialparameter

Für die Berechnung des Reflexionsfaktors an nachgiebigen Materialien werden hier die Materialien Stahl, Beton und Glas sowie drei theoretische Materialien mit frei gewählten Materialparametern untersucht. Die Materialparameter dieser Materialien sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Die Materialparameter sind die Ausgangsdichte $\varrho_{m,0}$, der Elastizitätsmodul E_m , die Querverformungszahl ν_m und der GRÜNEISEN-Parameter Γ_m . Die Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_{L,m}$ ist kein Eingangsparameter, sondern ist von $\varrho_{m,0}$, E_m und ν_m abhängig und wird nur als zusätzliche Information angezeigt.

Tabelle 4.1: Materialparameter

Material	$\varrho_{m,0}$ [kg/m ³]	E_m [N/mm ²]	ν_m [-]	Γ_m [-]	$c_{L,m}$ [m/s]
Stahl	7850	210000	0,28	1,69	5848
Glas	2230	63007	0,187	2,72	5560
Beton	2350	33000	0,2	1,204	3850
Material 1	1000	225	0,2	1,2	500
Material 2	10	36	0,2	1,2	2000
Material 3	10	2,25	0,2	1,2	500

Für Stahl werden die Ausgangsdichte $\varrho_{m,0} = 7850 \text{ kg/m}^3$, der Elastizitätsmodul $E_m = 210000 \text{ N/mm}^2$ und die Querverformungszahl $\nu_m = 0,28$ angenommen. Daraus folgt der Longitudinalwellenmodul $L_m = \frac{E_m(1-\nu_m)}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}$ und die Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_{L,m} = \sqrt{\frac{L_m}{\varrho_{m,0}}} \approx 5848 \text{ m/s}$. In [106] ist für Stahl der GRÜNEISEN-Parameter $\Gamma_m = 1,69$ angegeben. Mit Gleichung (4.5) folgt $B_{0,m} = B_{1,m} = 1,69$.

Für Beton werden die Materialparameter $\varrho_{m,0} = 2350 \text{ kg/m}^3$, $E_m = 33000 \text{ N/mm}^2$, $\nu_m = 0,2$ und $\Gamma_m = 1,204$ angenommen [65, 148, 180].

Eine v_s - v_1 -Beziehung für ein Glas ist in [106, „GLASS, Pyrex“] enthalten. Die Dichte wird mit $\varrho_{m,0} = 2230 \text{ kg/m}^3$ angegeben. Die Steigung S_m wird durch lineare Interpolation zwischen den Werten $v_s(v_1 = 0 \text{ m/s}) = 3879 \text{ m/s}$ und $v_s(v_1 = 565 \text{ m/s}) = 4931 \text{ m/s}$ zu $S_m = 1,86$ ermittelt. Der Bereich $0 \text{ m/s} \leq v_1 \leq 565 \text{ m/s}$ ist für die hier durchgeführten Berechnungen ausreichend. Aus $\varrho_{m,0} = 2230 \text{ kg/m}^3$, $c_{G,m} = 3450 \text{ m/s}$, $c_{K,m} = c_{B,m} = 3879 \text{ m/s}$ und $c_{L,m} = 5560 \text{ m/s}$ [106] folgen $\nu_m = 0,187$ und $E_m = 63007 \text{ N/mm}^2$. Gemäß der Näherung $\Gamma_m \approx 2 S_m - 1$ [115, Gl. (5.17)] gilt $\Gamma_m \approx 2 \cdot 1,86 - 1 = 2,72$.

Die Materialien 1, 2 und 3 sind theoretische Materialien mit frei gewählten Materialkenngrößen. Sie besitzen folgende Eigenschaften: Material 1 hat eine relativ hohe Dichte aber eine geringe Longitudinalwellengeschwindigkeit bzw. Steifigkeit (z. B. Polyethylen, low density (PE-LD)). Material 2 hat eine geringe Dichte aber eine hohe Steifigkeit (z. B. Aluminiumschaum). Material 3 hat eine geringe Dichte und eine geringe Steifigkeit (z. B. weicher Polyurethanschaum oder

Polystyrolschaum). Die innere Struktur der Materialien wird hier nicht berücksichtigt; die Materialeigenschaften wie Elastizitätsmodul und Dichte werden als homogen verteilt angenommen. Für die Luft im Ausgangszustand werden

$$\begin{aligned} p_{a,0} &= 101332 \text{ Pa} \\ \varrho_{a,0} &= 1,225 \text{ kg/m}^3 \\ \gamma &= 1,4 \end{aligned} \tag{4.38}$$

in diesem Kapitel verwendet.

4.4.4 Lösung des Gleichungssystems

Das nichtlineare Gleichungssystem wurde mit MAPLE [105] gelöst. Es wurde zwar keine geschlossene Lösung gefunden, jedoch kann mit MAPLE das Gleichungssystem für vorgegebene Werte numerisch gelöst werden (mit dem MAPLE-Befehl *fsolve*, Anhang B.2). Die Lösung ist für die angegebenen Materialien in Tabelle 4.2 für einfallende Überdrücke $p_{so} = p_{a,1} - p_{a,0}$ im Bereich von $0 \text{ MPa} \leq p_{so} \leq 4 \text{ MPa}$ zusammengefasst. Mit diesen einfallenden Überdrücken ist der Bereich der Ferndetonation abgedeckt.

Tabelle 4.2: Reflexionsfaktoren für gewählte Materialien

Material	$\lim_{p_{so} \rightarrow 0} c_r$	$c_r(p_{so} = 0,1 \text{ MPa})$	$c_r(p_{so} = 0,5 \text{ MPa})$	$c_r(p_{so} = 1 \text{ MPa})$	$c_r(p_{so} = 2 \text{ MPa})$	$c_r(p_{so} = 4 \text{ MPa})$
ideal starr	2	2,7414	4,481	5,510	6,429	7,096
Stahl	1,99998	2,7413	4,480	5,509	6,427	7,092
Glas	1,99993	2,7411	4,479	5,506	6,421	7,082
Beton	1,99991	2,7410	4,478	5,505	6,418	7,077
Material 1	1,998	2,735	4,436	5,412	6,244	6,798
Material 2	1,959	2,585	3,661	4,019	4,145	4,087
Material 3	1,857	2,290	2,915	3,144	3,291	3,366

Wenn man den Grenzwert $\lim_{p_{so} \rightarrow 0} c_r$ betrachtet, dann stellt man fest, dass für alle Materialien der Grenzwert kleiner als zwei ist, während für die starre Oberfläche der Grenzwert genau zwei ist. Dies ist durch die Nachgiebigkeit des Materials begründet, auch wenn diese teilweise nur sehr klein ist.

Bei den Materialien Stahl, Beton und Glas weist der Reflexionsfaktor nur geringe Unterschiede im Vergleich zur starren Oberfläche auf. Es ist also gerechtfertigt, für diese Materialien den Reflexionsfaktor für starre Oberflächen anzuwenden.

Deutlich größere Unterschiede zeigen sich bei den Materialien 1 bis 3. Für diese Materialien gilt, je geringer die Dichte und je geringer die Longitudinalwellengeschwindigkeit bzw. der Longitudinalwellenmodul ist, desto geringer ist der Reflexionsfaktor. Interessant ist, dass die Funktionen

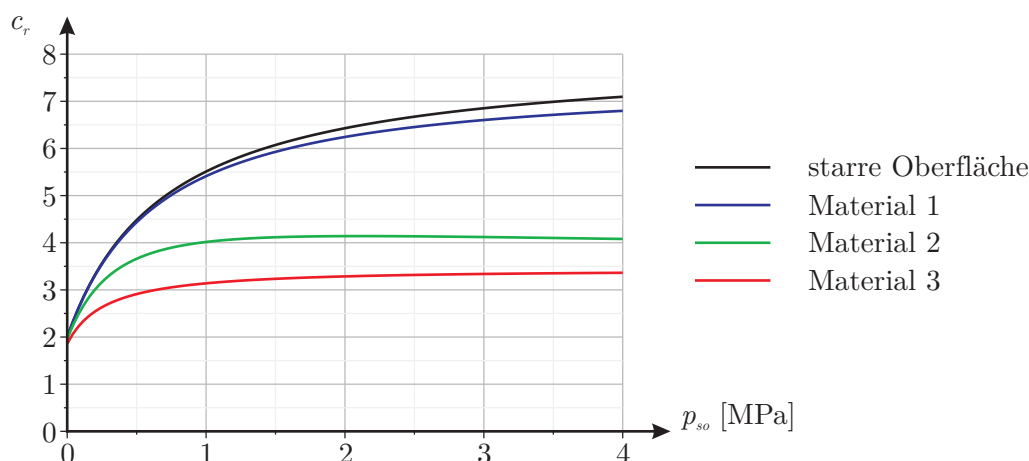


Abbildung 4.5: Reflexion an nachgiebigen Materialien, Reflexionsfaktor c_r

$c_r(p_{so})$ nicht monoton steigend sind wie bei der Reflexion an der starren Oberfläche. So ist beim Material 2 der Reflexionsfaktor bei $p_{so} = 2$ MPa größer als bei $p_{so} = 4$ MPa. Dieses Phänomen tritt auch bei den anderen Materialien auf, jedoch erst bei größeren einfallenden Überdrücken. Die Ergebnisse für die Materialien 1 bis 3 sind in der Abbildung 4.5 grafisch dargestellt.

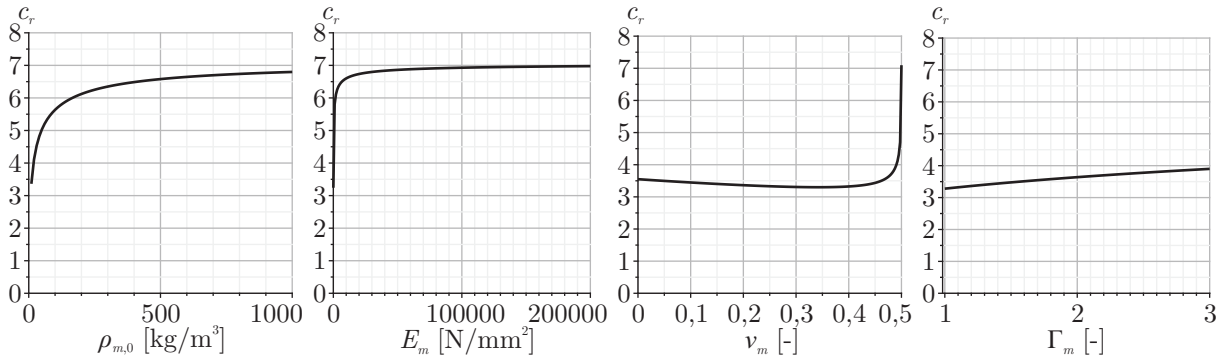
4.4.5 Einfluss der Materialparameter auf den Reflexionsfaktor

Die Abbildung 4.6 verdeutlicht den Einfluss der einzelnen Materialparameter auf den Reflexionsfaktor c_r . Wie bereits aus den Ergebnissen in Tabelle 4.2 ersichtlich wurde, wird der Reflexionsfaktor mit abnehmender Dichte $\rho_{m,0}$ und mit abnehmender Steifigkeit E_m kleiner. Werden Dichte oder Steifigkeit unendlich groß, so nähert sich der Reflexionsfaktor dem Wert einer Reflexion an einer starren Oberfläche an. Ein Grenzwert für Dichte oder Steifigkeit gegen Null kann mit dem beschriebenen Ansatz nicht angegeben werden, da dann die aufgestellten Erhaltungsgleichungen nicht mehr gültig sind. Es tritt dann eine Verdünnungswelle statt einer reflektierten Stoßwelle auf.

Der Einfluss der Querverformungszahl ν_m ist im Bereich $0 \leq \nu_m \leq 0,4$ relativ gering. Es ist jedoch zu beachten, dass bei $\nu_m = 0,5$ das Material inkompressibel ist und sich wie ein starres Material verhält. Auch der GRÜNEISEN-Parameter Γ_m hat im Bereich $1 \leq \Gamma_m \leq 3$ nur einen geringen Einfluss auf den Reflexionsfaktor. Die Größe des Bereichs von Γ_m wurde so gewählt, dass die in [106, Table II] angegebenen GRÜNEISEN-Parameter erfasst werden.

4.4.6 Einfluss der Bauteildicke und Bauteillagerung auf den Reflexionsfaktor

In den vorigen Abschnitten wurde der Einfluss der Materialparameter auf den Reflexionsfaktor untersucht. Haben die Bauteildicke und die Bauteillagerung auch einen Einfluss auf den Reflexionsfaktor?



(a) Einfluss von $\rho_{m,0}$, $10 \text{ kg/m}^3 \leq \rho_{m,0} \leq 1000 \text{ kg/m}^3$
 (b) Einfluss von E_m , $2,25 \text{ N/mm}^2 \leq E_m \leq 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
 (c) Einfluss von ν_m , $0 \leq \nu_m \leq 0,5$
 (d) Einfluss von Γ_m , $1 \leq \Gamma_m \leq 3$

Abbildung 4.6: Reflexion an nachgiebigen Materialien, Einfluss der Materialeigenschaften auf den Reflexionsfaktor (soweit nicht anders angegeben: $p_{so} = 4 \text{ MPa}$, $\rho_{m,0} = 10 \text{ kg/m}^3$, $E_m = 2,25 \text{ N/mm}^2$, $\nu_m = 0,2$, $\Gamma_m = 1,2$)

Bei den bisherigen Berechnungen dieses Kapitels wurde angenommen, dass die Anstiegszeit der Stoßfront und damit auch die Dicke der Stoßfront gleich Null ist. Damit konnten die Erhaltungsgleichungen aufgestellt werden, ohne die Dicke eines Bauteils berücksichtigen zu müssen. In der Realität führen Viskosität und Wärmeleitung der Luft zu einer Ausrundung der Stoßfront. Die Stoßfront hat somit eine Dicke d , welche von TAYLOR in [164] mit

$$d = \frac{10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}}{v_1} \quad (4.39)$$

angegeben wurde. Aus der Dicke der Stoßwellenfront berechnet sich die Anstiegszeit

$$t_a = \frac{d}{v_{s1}} = \frac{10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}}{v_1 v_{s1}}. \quad (4.40)$$

Bei Überdrücken in der einfallenden Luftstoßwelle von $0,1 \text{ MPa} \leq p_{so} \leq 4 \text{ MPa}$ liegt die Anstiegszeit im Bereich von $3 \cdot 10^{-11} \text{ s} \leq t_a \leq 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ (mit v_1 und v_{s1} nach Gleichungen (3.70) und (3.71)). Bei Stoßwellengeschwindigkeiten im Feststoff bis zu 17000 m/s [115, Tab. 2.2] pflanzt sich die Stoßwelle bis zu $0,022 \text{ mm}$ im Bauteil fort, bis der maximale reflektierte Überdruck erreicht ist. Da Bauteile in der Baupraxis gewöhnlich dicker als $0,022 \text{ mm}$ sind, wird der maximale reflektierte Überdruck und damit auch der Reflexionsfaktor weder von der Bauteildicke noch von der Bauteilsteifigkeit bzw. von den Auflagern beeinflusst [57].

4.4.7 Zusammenfassung

Zusammenfassend lassen sich für diesen Abschnitt folgende Punkte festhalten:

- Die meisten Konstruktionsmaterialien (z. B. Stahl, Beton, Glas) haben einen vernachlässigbaren Einfluss auf den Reflexionsfaktor.
- Materialien mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit reduzieren den Reflexionsfaktor bzw. den reflektierten Spitzenüberdruck.
- Die Bauteildicke und die Bauteillagerung beeinflussen den Reflexionsfaktor nicht.

Es kann jedoch nicht pauschal die Aussage getroffen werden, dass mit leichten und weichen Materialien (d. h. Materialien mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit und demzufolge geringer akustischer Impedanz) die Belastung aus Luftstoßwellen auf Baustrukturen reduziert werden kann. Die Gründe dafür werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

4.5 Reflexion der Stoßwelle im Feststoff an starrer Wand

4.5.1 Beschreibung der Problemstellung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass leichte und weiche Materialien den reflektierten Spitzenüberdruck reduzieren. Daraus zu schließen, dass solche Materialien unbedingt geeignet sind, um die Belastungen aus Luftstoßwellen auf Baustrukturen zu reduzieren, ist falsch. Denn der Druck aus einer Luftstoßwelle kann zwischen dem nachgiebigen Material und der Baustruktur größer sein, als wenn die Luftstoßwelle direkt auf die Baustruktur wirken würde. Dies wird in diesem Abschnitt rechnerisch nachgewiesen.

MONTI deutete bereits 1970 in [118] an, dass der reflektierte Druck zwischen einem nachgiebigen Material und einer starren Wand größer sein kann, als bei der Reflexion der Luftstoßwelle ohne dem nachgiebigen Material an der gleichen starren Wand. SKEWS et al. schrieben in [155], dass GELFAND et al. als Erste in [60] die Drücke an der Wand für unterschiedliche Schaumstoffe, MACH-Zahlen und Schaumstofflängen experimentell untersuchten. GELFAND et al. erklärten die Druckerhöhung mit dem Impuls, der auf den Schaumstoff übertragen und an die Wand weitergegeben wird.

Für die Untersuchung des Phänomens wird folgendes Beispiel untersucht. Ein nachgiebiges Material wird direkt vor einer starren Wand platziert (Abbildung 4.7). Ebenso wie im vorigen Abschnitt wird eine eindimensionale, planare Problemstellung untersucht, d.h. die Luft und das nachgiebige Material sind in y - und in z -Richtung unendlich ausgedehnt. Die physikalischen Größen wie Druck p , Spannung σ , Dichte ρ , spezifische innere Energie e und Geschwindigkeit v sind im Ausgangszustand (0) in den jeweiligen Bereichen konstant. Eine Luftstoßwelle bewegt sich in x -Richtung auf das nachgiebige Material zu (Abbildung 4.7 oben). Die physikalischen Größen der einfallenden Luftstoßwelle sind hinter der Stoßfront konstant, d.h. es wird kein abfallender Druck hinter der Stoßfront untersucht. Die Luftstoßwelle trifft auf das Material im Ausgangszustand (0) (Abbildung 4.7 Mitte). Sie wird reflektiert und im Material wird dadurch eine Stoßwelle erzeugt (Zustand (2)). Anschließend trifft die Stoßwelle im Material auf die starre Wand und wird an ihr reflektiert (Zustand (3), Abbildung 4.7 unten).

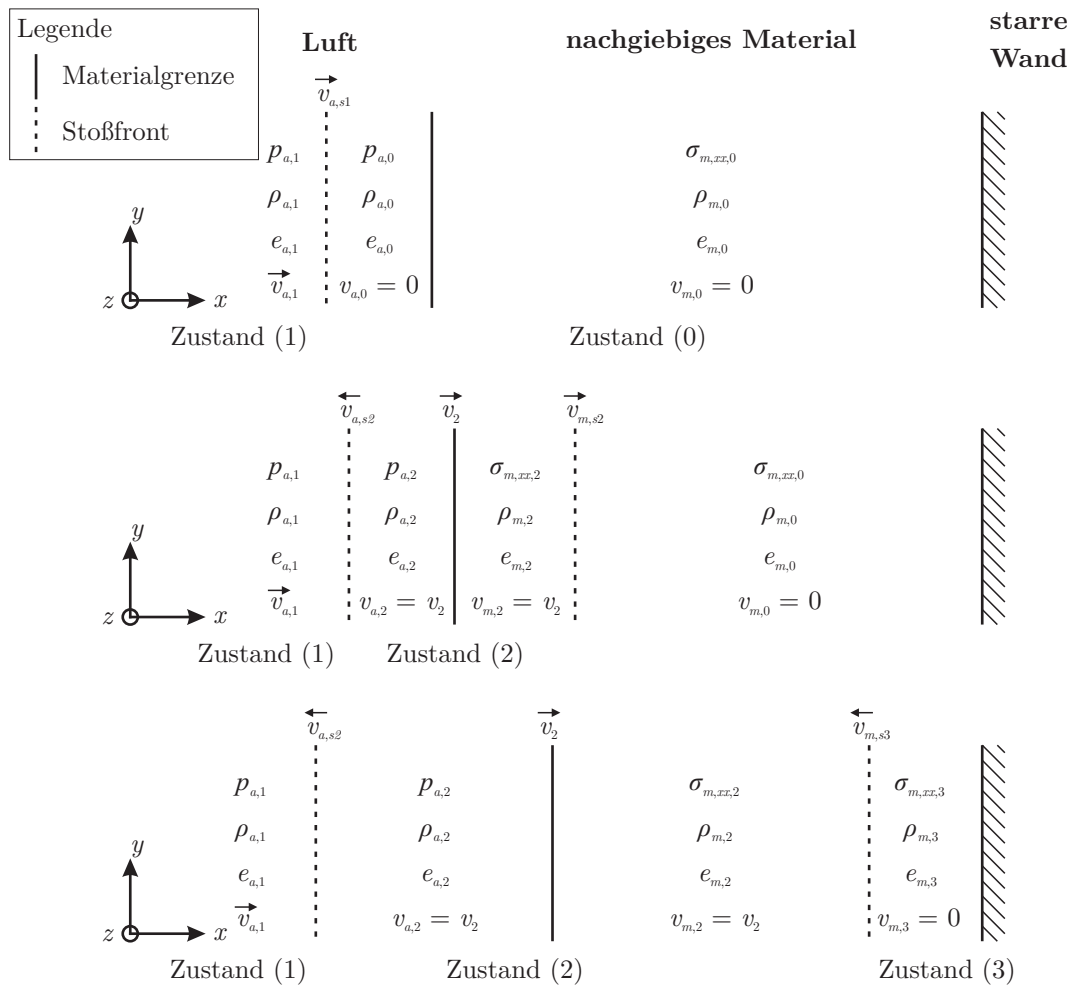


Abbildung 4.7: Reflexion einer Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material vor einer starren Wand, schematische Darstellung

Im vorigen Abschnitt wurde die Reflexion der Luftstoßwelle am nachgiebigen Material bereits berechnet. Damit sind die Größen des Zustandes (2) bekannt. Die Größen des Zustandes (3) werden nun gesucht.

4.5.2 Aufstellen der Gleichungen

Für die Berechnung der Reflexion der Stoßwelle an der starren Wand werden die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie aufgestellt:

$$\begin{aligned}
 \varrho_{m,2} (v_{m,s3} + v_{m,2}) &= \varrho_{m,3} v_{m,s3} \\
 \varrho_{m,2} (v_{m,s3} + v_{m,2}) v_{m,2} &= -(\sigma_{m,xx,3} - \sigma_{m,xx,2}) \\
 -\sigma_{m,xx,2} v_{m,2} &= \varrho_{m,3} v_{m,s3} \left(e_{m,3} - e_{m,2} - \frac{1}{2} v_{m,2}^2 \right) .
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

In diesen Erhaltungsgleichungen wurde bereits berücksichtigt, dass die Geschwindigkeit des Feststoffs an der starren Wand gleich Null sein muss ($v_{m,3} = 0$), da die starre Wand in Ruhe ist.

Die Zustandsgleichung für das Material ist

$$p_{m,3} = K_{1,m} \mu_{m,3} + K_{2,m} \mu_{m,3}^2 + K_{3,m} \mu_{m,3}^3 + (B_{0,m} + B_{1,m} \mu_{m,3}) \varrho_{m,0} e_{m,3} \quad (4.42)$$

mit $\mu_{m,3} = \varrho_{m,3} / \varrho_{m,0} - 1$.

Aus Gleichung (4.30) folgt

$$p_{m,3} = p_{m,0} - \frac{1}{3} (\sigma_{m,xx,3} - \sigma_{m,xx,0}) \left(1 + \frac{2\nu_m}{1 - \nu_m} \right) \quad (4.43)$$

In den fünf Gleichungen (4.41) bis (4.43) gibt es fünf Unbekannte ($\sigma_{m,xx,3}$, $\varrho_{m,3}$, $e_{m,3}$, $v_{m,3}$, $p_{m,3}$). Die Größen $\sigma_{m,xx,2}$, $\varrho_{m,2}$, $e_{m,2}$ und $v_{m,2}$ sind aus den Berechnungen des vorigen Abschnittes bekannt. Mit diesen fünf Gleichungen können die fünf unbekanntenen Größen berechnet werden.

4.5.3 Lösung des Gleichungssystems

Die Lösung für das nichtlineare Gleichungssystem wurde numerisch mit MAPLE berechnet (Anhang B.3).

Um die verschiedenen Reflexionsfaktoren in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels voneinander zu unterscheiden, werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

Der Reflexionsfaktor der Reflexion der Luftstoßwelle am nachgiebigen Material ist

$$c_{r,1} = \frac{p_{a,2} - p_{a,0}}{p_{a,1} - p_{a,0}} \quad (4.44)$$

Der Reflexionsfaktor der Reflexion der Stoßwelle im nachgiebigen Material an der Wand ist

$$c_{r,2} = \frac{-\sigma_{m,xx,3} - p_{a,0}}{-\sigma_{m,xx,2} - p_{a,0}} \quad (4.45)$$

Der gesamte Reflexionsfaktor ist das Verhältnis des Überdruckes $-\sigma_{m,xx,3} - p_{a,0}$, der auf die Wand wirkt, zum einfallenden Überdruck der Luftstoßwelle:

$$c_{r,ges} = \frac{-\sigma_{m,xx,3} - p_{a,0}}{p_{a,1} - p_{a,0}} = c_{r,1} c_{r,2} \quad (4.46)$$

Der Faktor $c_{r,ges}$ ist das Produkt aus $c_{r,1}$ und $c_{r,2}$. Dieser Faktor ist für die Wand entscheidend, da er die Belastung auf die Wand beschreibt.

Die Abbildung 4.8 stellt die berechnete Lösung für einfallende Überdrücke im Bereich $0 \text{ MPa} \leq p_{so} \leq 4 \text{ MPa}$ dar. Durch die grüne Kurve ist der Reflexionsfaktor $c_{r,1}$ der Luftstoßwelle am nachgiebigen Material 3 dargestellt (Abschnitt 4.4). Die rote Kurve gibt den Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ der reflektierten Stoßwelle an der starren Wand an. Die schwarze Kurve gibt zum Vergleich den Reflexionsfaktor $c_{r,1}$ der Luftstoßwelle an der starren Wand ohne einem nachgiebigen Material davor an.

Es ist zu erkennen, dass die Drücke, die auf die starre Wand wirken, größer sind, wenn das Material 3 davor ist, als wenn kein Material davor ist. Der Reflexionsfaktor wird verstärkt. Dies ist der

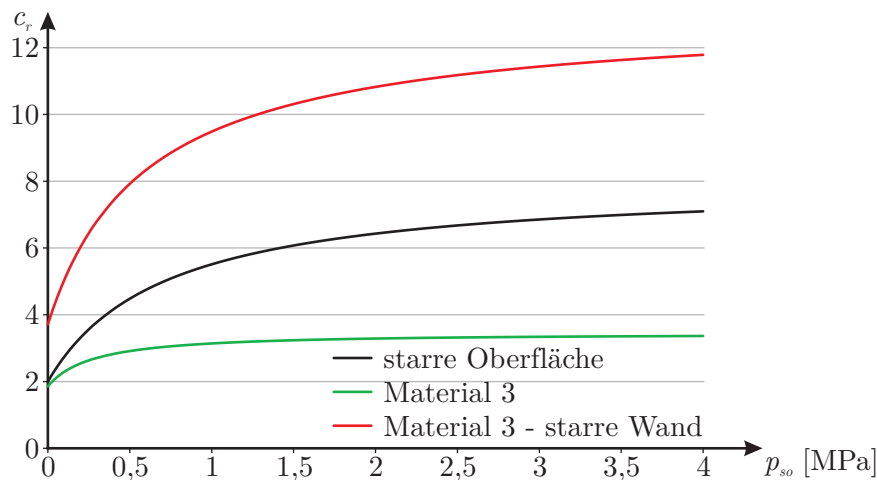


Abbildung 4.8: Reflexion der Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material vor einer starren Wand, Reflexionsfaktoren c_r

Effekt, der in Experimenten beobachtet wurde. Wie lässt sich dieser Effekt erklären? Zunächst erfolgt eine Reflexion der Luftstoßwelle am nachgiebigen Material. Es wird ein Reflexionsfaktor $c_{r,1} \gtrsim 2$ erhalten. Die im Feststoff erzeugte Stoßwelle trifft dann auf die starre Wand und wird dort erneut reflektiert. Der zugehörige Reflexionsfaktor beträgt $c_{r,2} \geq 2$. Der Grenzwert von $c_{r,2}$ für kleine Überdrücke ist $\lim_{\sigma_{m,xx,2} \rightarrow \sigma_{m,xx,0}} c_{r,2} = 2$. Der gesamte Reflexionsfaktor c_r wird dann aus der Multiplikation der einzelnen Reflexionsfaktoren

$$c_r = c_{r,1} c_{r,2} \quad (4.47)$$

erhalten. Insgesamt wird damit ein Reflexionsfaktor erhalten, der größer ist, als wenn die Luftstoßwelle direkt auf die starre Wand trifft.

Eine andere Vorstellungsweise der Erhöhung des Reflexionsfaktor im Vergleich zur Reflexion der Luftstoßwelle direkt an der starren Wand ist folgende: Durch die Verformung des leichten und weichen Materiales wird Energie von der Luft auf das Material übertragen. Diese übertragene Energie führt zu einem zusätzlichen dynamischen Druck, der zur Erhöhung des Reflexionsfaktors führt.

In Abbildung 4.8 ist nur das Ergebnis für das Material 3 vor der starren Wand abgebildet. Ähnliche Ergebnisse werden auch für Stahl, Glas und Beton und für die Materialien 1 und 2 vor einer starren Wand erhalten.

Es wurde in diesem Abschnitt gezeigt, dass die Druckerhöhung auf eine starre Wand durch ein nachgiebiges Material bereits mit relativ einfachen Materialmodellen erklärt werden kann. Maßgeblich für die Druckerhöhung sind die Dichte und Steifigkeit des Materials. Porosität und Kompaktion von Schaumstoffen wurden hier nicht berücksichtigt.

Es ist klar, dass die Annahme einer starren Wand eine Idealisierung ist. Bei Experimenten in Stoßrohren ist die Wand jedoch nicht starr, sondern besteht beispielsweise aus Stahl. Wie sich dies auf die berechneten Ergebnisse auswirkt, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

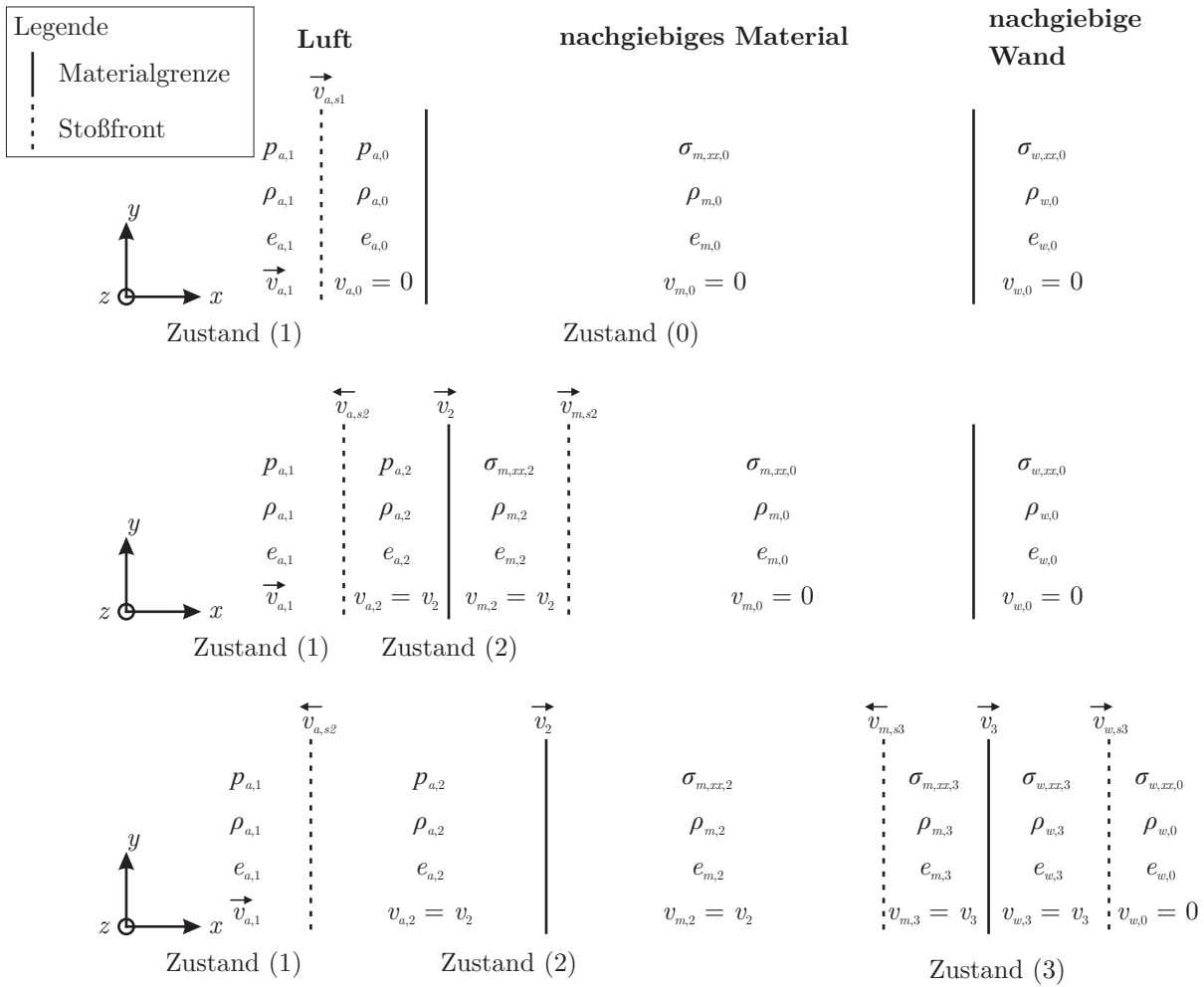


Abbildung 4.9: Reflexion einer Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material vor einer nachgiebigen Wand, schematische Darstellung

4.6 Reflexion der Stoßwelle im Feststoff an nachgiebiger Wand

4.6.1 Beschreibung der Problemstellung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Einfluss eines nachgiebigen Materials vor einer starren Wand auf den Reflexionsfaktor untersucht. An dieser Stelle soll nun untersucht werden, ob die Annahme einer ideal-starren Wand gerechtfertigt ist. In allen bekannten Veröffentlichungen, wie z. B. [114, 118, 151], wurde bei der analytischen Berechnung von einer starren Wand ausgegangen. Es ist keine Veröffentlichung bekannt, die bisher diesen Einfluss an einer nachgiebigen Wand anstatt an einer starren Wand untersucht hat.

Die Abbildung 4.9 stellt schematisch die Konfiguration der Problemstellung dar. Ein nachgiebiges Material wird direkt vor einer nachgiebigen Wand platziert. Die physikalischen Größen wie Druck p , Spannung σ , Dichte ρ , spezifische innere Energie e und Geschwindigkeit v sind im

Ausgangszustand (0) in den jeweiligen Bereichen konstant. Eine eindimensionale, planare Luftstoßwelle bewegt sich in x -Richtung auf das nachgiebige Material zu (Abbildung 4.9 oben). Es wird hier nur der eindimensionale Fall betrachtet, in y - und z -Richtung ist das Modell unendlich ausgedehnt. Die physikalischen Größen der einfallenden Luftstoßwelle sind hinter der Stoßfront (gestrichelte Linie) konstant. Die Luftstoßwelle trifft auf das nachgiebige Material und wird reflektiert (Abbildung 4.9 Mitte). Dadurch wird im nachgiebigen Material eine Stoßwelle eingeleitet. Diese Stoßwelle trifft auf die nachgiebige Wand und wird dort reflektiert (Abbildung 4.9 unten).

Im Abschnitt 4.4 wurde die Reflexion der Luftstoßwelle am nachgiebigen Material bereits berechnet. Die Größen des Zustandes (2) sind somit bekannt. Es werden nun die Größen des Zustandes (3) gesucht.

4.6.2 Aufstellen der Gleichungen

Für die Berechnung der Reflexion der Stoßwelle im nachgiebigen Material an der nachgiebigen Wand werden die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie aufgestellt:

$$\begin{aligned}
\varrho_{m,2} (v_{m,s3} + v_{m,2}) &= \varrho_{m,3} (v_{m,s3} + v_{m,3}) \\
\varrho_{w,0} v_{w,s3} &= \varrho_{w,3} (v_{w,s3} - v_{w,3}) \\
\varrho_{m,2} (v_{m,s3} + v_{m,2}) v_{m,2} &= -(\sigma_{m,xx,3} - \sigma_{m,xx,2}) + \varrho_{m,2} (v_{m,s3} + v_{m,2}) v_{m,3} \\
\varrho_{w,3} (v_{w,s3} - v_{w,3}) v_{w,3} &= -(\sigma_{w,xx,3} - \sigma_{w,xx,0}) \\
-(\sigma_{m,xx,2} v_{m,2} - \sigma_{m,xx,3} v_{m,3}) &= \varrho_{m,2} (v_{m,s3} + v_{m,2}) \left(e_{m,3} - e_{m,2} + \frac{1}{2} (v_{m,3}^2 - v_{m,2}^2) \right) \\
-\sigma_{m,xx,3} v_{m,3} &= \varrho_{w,0} v_{w,s3} \left(e_{w,3} - e_{w,0} + \frac{1}{2} v_{w,3}^2 \right) . \tag{4.48}
\end{aligned}$$

An der Grenze zwischen dem nachgiebigen Material und der nachgiebigen Wand gelten die Bedingungen

$$v_{m,3} = v_{w,3} = v_3 \tag{4.49}$$

und

$$\sigma_{m,xx,3} = \sigma_{w,xx,3} . \tag{4.50}$$

Die Zustandsgleichungen sind gemäß Gleichung (4.1)

$$\begin{aligned}
p_{m,3} &= K_{1,m} \mu_{m,3} + K_{2,m} \mu_{m,3}^2 + K_{3,m} \mu_{m,3}^3 + (B_{0,m} + B_{1,m} \mu_{m,3}) \varrho_{m,0} e_{m,3} \quad \text{und} \\
p_{w,3} &= K_{1,m} \mu_{w,3} + K_{2,m} \mu_{w,3}^2 + K_{3,m} \mu_{w,3}^3 + (B_{0,m} + B_{1,m} \mu_{w,3}) \varrho_{w,0} e_{w,3} \tag{4.51}
\end{aligned}$$

mit $\mu_{m,3} = \varrho_{m,3}/\varrho_{m,0} - 1$ und $\mu_{w,3} = \varrho_{w,3}/\varrho_{w,0} - 1$. Aus Gleichung (4.30) folgen

$$\begin{aligned}
p_{m,3} &= p_{m,0} - \frac{1}{3} (\sigma_{m,xx,3} - \sigma_{m,xx,0}) \left(1 + \frac{2\nu_m}{1-\nu_m} \right) \quad \text{und} \\
p_{w,3} &= p_{w,0} - \frac{1}{3} (\sigma_{w,xx,3} - \sigma_{w,xx,0}) \left(1 + \frac{2\nu_w}{1-\nu_w} \right) . \tag{4.52}
\end{aligned}$$

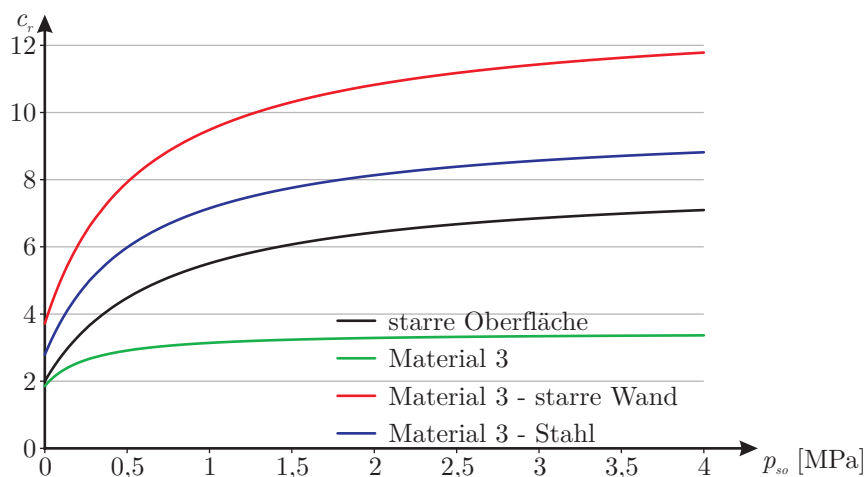


Abbildung 4.10: Reflexion einer Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material vor einer nachgiebigen Wand, Reflexionsfaktoren c_r

Insgesamt gibt es zwölf Unbekannte, nämlich $\sigma_{m,xx,3}$, $\varrho_{m,3}$, $e_{m,3}$, $v_{m,3}$, $v_{m,s3}$, $p_{m,3}$, $\sigma_{w,xx,3}$, $\varrho_{w,3}$, $e_{w,3}$, $v_{w,3}$, $v_{w,s3}$ und $p_{w,3}$. Diese zwölf Unbekannten können mit den zwölf Gleichungen (4.48) bis (4.52) berechnet werden.

4.6.3 Lösung des Gleichungssystems

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgte mit MAPLE (Anhang B.4).

Die Abbildung 4.10 stellt die berechneten Reflexionsfaktoren für die Reflexion einer Luftstoßwelle mit einfallenden Überdrücken im Bereich von $0 \text{ MPa} \leq p_{so} \leq 4 \text{ MPa}$ an einer Wand mit und ohne nachgiebigem Material davor dar. Die schwarze Kurve gibt den Reflexionsfaktor $c_{r,1}$ für die Reflexion einer Luftstoßwelle an einer starren Oberfläche an. Die grüne Kurve stellt den Reflexionsfaktor $c_{r,1}$ einer Luftstoßwelle am Material 3 dar. Die rote Kurve ist der Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ an einer starren Wand mit dem Material 3 davor. Die blaue Kurve stellt den Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ an einer Wand aus Stahl mit dem Material 3 davor dar.

In dem Abschnitt 4.4 wurde gezeigt, dass bei der Reflexion von Luftstoßwellen an Stahl näherungsweise der Stahl als starr angenommen werden kann. Die Abweichungen betragen bei einem einfallenden Überdruck von $p_{so} = 4 \text{ MPa}$ lediglich 0,056 % (Tabelle 4.2). In dem hier betrachteten Fall mit einem leichten, weichen Material vor einer Wand ist $c_{r,ges}$ bei einer starren Wand (rote Kurve) bei $p_{so} = 4 \text{ MPa}$ ungefähr 34 % größer als bei der genaueren Betrachtung mit einer Wand aus Stahl (blaue Kurve). Der Stahl sollte demzufolge nicht bedenkenlos als starr angenommen werden, da die Abweichungen relativ groß sind.

Die Annahme eines starren Materials für den Stahl bei einem leichten, weichen Material davor liefert zwar zu große reflektierte Überdrücke im untersuchten Ferndetonationsbereich, diese liegen jedoch für die Bemessung von Baustrukturen auf der sicheren Seite. Für die Bemessung einer Baustruktur gegen Explosionen ist diese Annahme also zulässig. Wenn jedoch Experimente im

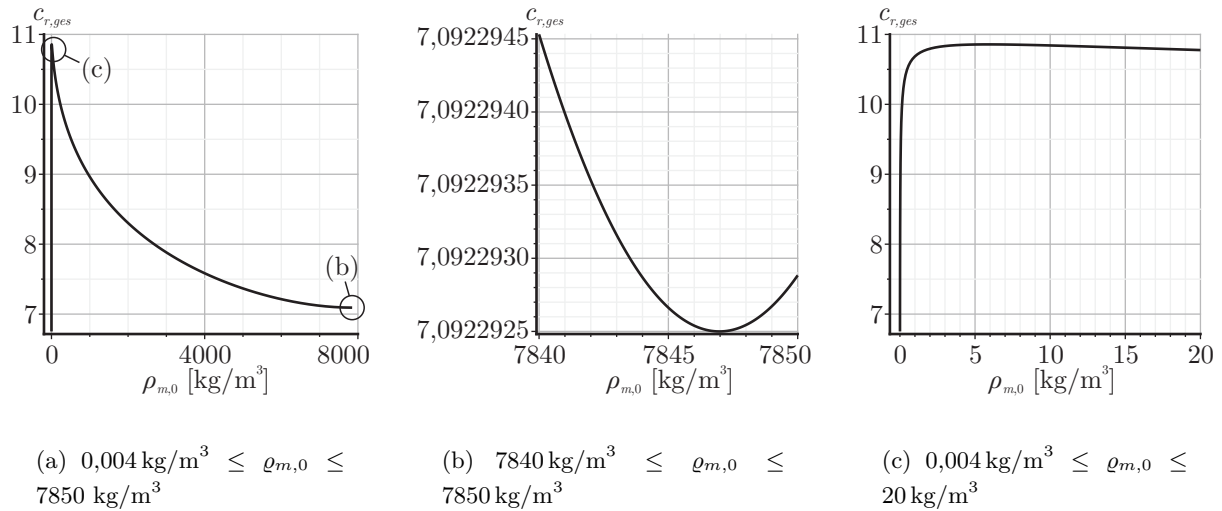


Abbildung 4.11: Reflexion einer Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material vor einer nachgiebigen Wand, Einfluss der Dichte des nachgiebigen Materials $\varrho_{m,0}$

Stoßrohr numerisch oder analytisch berechnet werden, dann sollte diese Annahme einer starren Wand nicht mehr verwendet werden. Je nach Anwendungsbereich muss entschieden werden, ob die Annahme zulässig ist oder nicht.

4.6.4 Untersuchung des Einflusses der Materialparameter

Einfluss der Dichte

Auf den Reflexionsfaktor $c_{r,1}$ von Luftstoßwellen an nachgiebigen Materialien haben Dichte und Steifigkeit der Materialien einen maßgebenden Einfluss (Abschnitt 4.4). Der Einfluss von Dichte und Steifigkeit eines Materials vor einer Wand aus Stahl auf den Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ wird im Folgenden untersucht.

Die Abbildung 4.11 stellt den Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ bei der Reflexion einer Luftstoßwelle an einem Feststoff vor einer Wand aus Stahl dar. Der Feststoff besitzt die gleichen Materialeigenschaften wie der Stahl (Tabelle 4.1), lediglich die Dichte $\varrho_{m,0}$ wird verändert. Der Überdruck der einfallenden Luftstoßwelle beträgt $p_{so} = 4 \text{ MPa}$. In der linken Abbildung 4.11(a) wird die Dichte im Bereich $0,01 \text{ kg/m}^3 \leq \varrho_{m,0} \leq 7850 \text{ kg/m}^3 = \varrho_{w,0}$ variiert. Es ist zu erkennen, dass der Reflexionsfaktor mit abnehmender Dichte nicht kleiner wird – wie es bei der Reflexion an nachgiebigen Materialien der Fall ist (Abbildung 4.6(a)) – sondern in Teilbereichen ansteigt.

Interessant ist der Bereich $7845 < \varrho_{m,0} \leq 7850 \text{ kg/m}^3$ (Abbildung 4.11(b)). Für $\varrho_{m,0} = 7850 \text{ kg/m}^3$ entspricht $c_{r,ges}$ exakt dem Reflexionsfaktor $c_{r,1}$ an Stahl. Von $\varrho_{m,0} = 7850 \text{ kg/m}^3$ nach $\varrho_{m,0} \approx 7847 \text{ kg/m}^3$ verringert sich $c_{r,ges}$ leicht, um erst bei noch kleiner werdenden Dichten anzusteigen. Diese Verringerung des Reflexionsfaktors ist jedoch zu gering (0,0000054 %), als dass sie eine baupraktische Relevanz hätte.

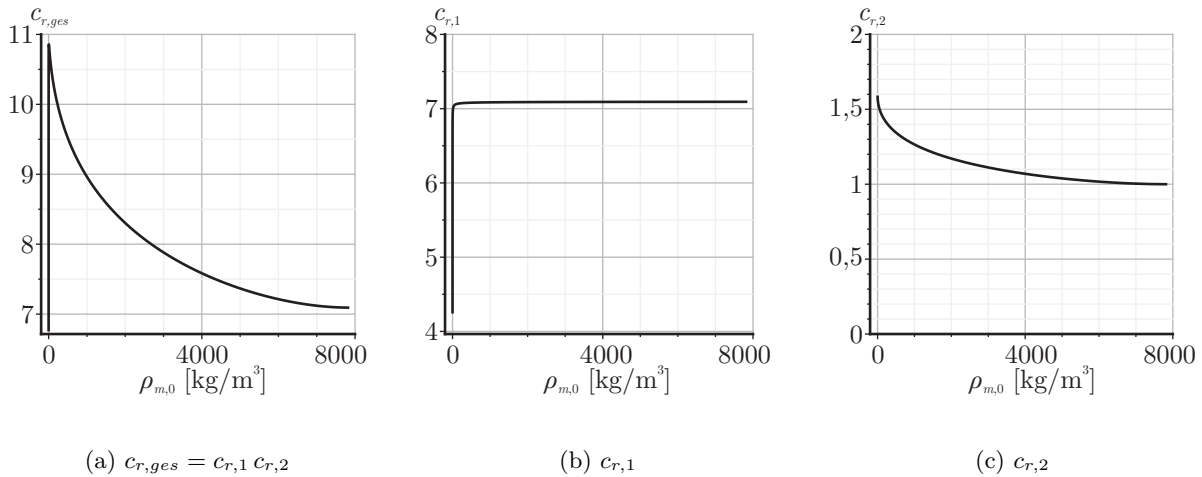


Abbildung 4.12: Reflexion einer Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material vor einer nachgiebigen Wand, Aufspaltung von c_r in $c_{r,1}$ und $c_{r,2}$

Bei $\rho_{m,0} \approx 6 \text{ kg/m}^3$ hat die Funktion $c_{r,ges}(\rho_{m,0})$ ein Maximum von $c_{r,ges} \approx 10,857$ (Abbildung 4.11(c)). Bei kleiner werdenden Dichten fällt $c_{r,ges}$ stark ab. Warum fällt $c_{r,ges}$ bei $\rho_{m,0} \lesssim 6 \text{ kg/m}^3$ so stark ab? Der Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ setzt sich aus der Reflexion der Luftstoßwelle am nachgiebigen Material ($c_{r,1}$) und aus der Reflexion der Stoßwelle im nachgiebigen Material an der Stahlwand ($c_{r,2}$) zusammen (Abbildung 4.12). Der Reflexionsfaktor $c_{r,1}$ fällt im Bereich $0,004 \leq \rho_{m,0} \approx 6 \text{ kg/m}^3$ stärker, als der Reflexionsfaktor $c_{r,2}$ ansteigt. Insgesamt fällt damit auch $c_{r,ges}$.

Bei $\rho_{m,0} \lesssim 0,005 \text{ kg/m}^3$ wird der Reflexionsfaktor kleiner als bei der direkten Reflexion an Stahl. Dennoch ist es fraglich, ob dieser Bereich ausgenutzt werden kann. Denn für das nachgiebige Material beträgt der Elastizitätsmodul $E_m = 210000 \text{ N/mm}^2$, die Querverformungszahl $\nu_m = 0,28$ und der Longitudinalwellenmodul $L_m = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \approx 268466 \text{ N/mm}^2$. Bei einer Dichte von $\rho_{m,0} = 0,005 \text{ kg/m}^3$ würde die Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_{L,m} = \sqrt{L/\rho_{m,0}} \approx 7 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ betragen. Es ist kein Material bekannt, das eine solch große Longitudinalwellengeschwindigkeit im Normzustand besitzt. Das Material mit der größten, bekannten Longitudinalwellengeschwindigkeit ist Diamant mit $c_L \approx 17000 \text{ m/s}$ [115, Tab. 2.2].

Bei noch kleineren Dichten wird, wenn $c_{r,1} = 1$ erreicht wird, der Gültigkeitsbereich der aufgestellten Gleichungen verlassen. Die Gleichungen wurden für Stoßwellen aufgestellt, jedoch treten bei $c_{r,1} < 1$ nicht nur Stoßwellen, sondern auch Verdünnungswellen auf.

Einfluss des Elastizitätsmoduls

Die Abbildung 4.13 zeigt den berechneten Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ einer Luftstoßwelle an einem Feststoff vor einer Wand aus Stahl. Der Feststoff besitzt die gleichen Eigenschaften wie Stahl (Tabelle 4.1), lediglich der Elastizitätsmodul E_m wird variiert. Es ist zu erkennen, dass der

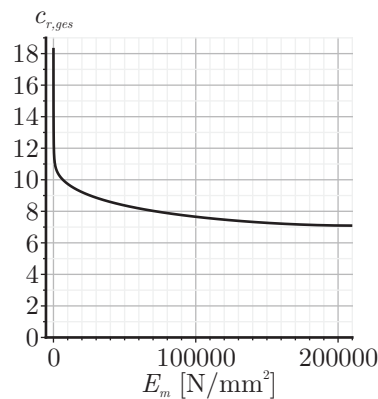


Abbildung 4.13: Reflexion einer Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material vor einer nachgiebigen Wand, Einfluss des Elastizitätsmoduls E_m des nachgiebigen Materials

Reflexionsfaktor stark vom Elastizitätsmodul abhängig ist. Je kleiner der Elastizitätsmodul ist, d.h. je geringer die Steifigkeit des Materials ist, desto größer wird der Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$.

Einfluss der Querverformungszahl und des GRÜNEISEN-Parameters

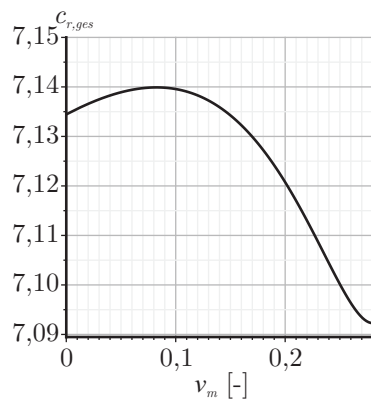
Die Abbildung 4.14(a) stellt den Einfluss der Querverformungszahl ν_m im Bereich $0 \leq \nu_m < 0,28$ dar. Der Einfluss ist relativ gering. Für $\nu_m \rightarrow \nu_w = 0,28$ strebt $c_{r,ges}$ gegen $c_{r,1}$. Für $\nu_m > 0,28$ wird der Gültigkeitsbereich der aufgestellten Erhaltungsgleichungen verlassen. Dann wird $v_{m,s3} < -v_{m,3}$ erhalten, was physikalisch nicht sinnvoll ist.

Der Einfluss des GRÜNEISEN-Parameters Γ_m auf den Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ ist in dem Bereich $1 \leq \Gamma_m \leq 3$ gering (Abbildung 4.14(b)). Dieser Bereich wurde so gewählt, dass er die in [106, Table II] angegebenen GRÜNEISEN-Parameter beinhaltet.

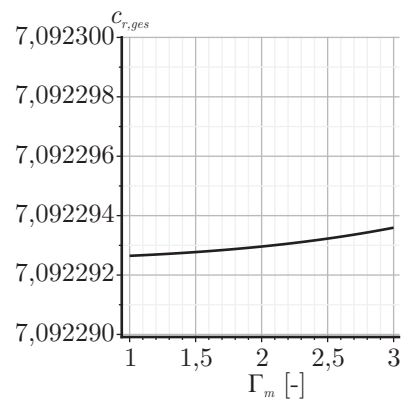
4.6.5 Zusammenfassung

Die Auswertungen der Einflüsse der Dichte und des Elastizitätsmoduls waren insgesamt überraschend. Es war zwar aus den Veröffentlichungen mit Experimenten an nachgiebigen Materialien abzusehen, dass der Reflexionsfaktor ungünstig beeinflusst wird, jedoch hatten die Untersuchungen zum Reflexionsfaktor an nachgiebigen Materialien Anlass zur Vermutung gegeben, dass es Bereiche gibt, in denen der Reflexionsfaktor geringer als bei der Reflexion an der starren Oberfläche ist. Diese Bereiche gibt es zwar auch, jedoch haben die gefundenen Bereiche keinen praktischen Einfluss.

Die aufgestellten Gleichungen sind nichtlinear und vielschichtig in ihren Lösungen. Für eine vollständige Untersuchung der Einflüsse der Materialparameter müsste der Reflexionsfaktor $c_{r,ges}$ in Abhängigkeit von $\rho_{m,0}$, E_m , ν_m , Γ_m und p_{so} berechnet und dargestellt werden. Insbesondere die gesamte Darstellung im 6-dimensionalen Raum ist nicht einfach umzusetzen. Deshalb wurde in diesem Abschnitt jeweils nur ein Materialparameter herausgegriffen, variiert und dessen Einfluss auf $c_{r,ges}$ dargestellt.



(a) Einfluss von ν_m
($0 \leq \nu_m < 0,28$)



(b) Einfluss von Γ_m
($1 \leq \Gamma_m \leq 3$)

Abbildung 4.14: Reflexion einer Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material vor einer nachgiebigen Wand, Einfluss von ν und Γ

Die Lösungen der Gleichungen können mit beliebiger Genauigkeit angegeben werden. Die Ergebnisse eignen sich somit als Vergleich für Konvergenzstudien für numerische Untersuchungen. Für die Belastung auf Bauteile ist nicht nur der Reflexionsfaktor bzw. der reflektierte Spitzenüberdruck entscheidend, sondern der gesamte Überdruck-Zeit-Verlauf. Die genaue Untersuchung der Einflüsse der Materialparameter auf den gesamten Überdruck-Zeit-Verlauf ist eine ungelöste Problemstellung für zukünftige Forschungen. Es kommt dann noch ein weiterer Parameter – der hier vernachlässigt werden konnte – hinzu: die Dicke des nachgiebigen Materials.

Die Untersuchungen dieses Abschnittes zeigten, dass der reflektierte Spitzenüberdruck durch nachgiebige Materialien fast nur vergrößert wird. Das lässt die Frage aufkommen, ob nachgiebige Materialien überhaupt geeignet sind, die Belastung aus Explosionen zu verringern. In diesem Abschnitt wurden nur elastische Materialien untersucht. Als Schlussfolgerung kommen nur plastisch verformbare Materialien für den Explosionsschutz in Frage. Diese sollen die Energie, die zusätzlich durch die Nachgiebigkeit der Materialien eingeleitet wurde, absorbieren.

Zusammenfassend lassen sich folgende Punkte festhalten:

- Das Gleichungssystem und die Lösungen sind nichtlinear und vielschichtig.
- Die Lösungen der Gleichungen können als Vergleichswerte für numerische Konvergenzstudien angewendet werden.
- Durch nachgiebige Materialien vor Bauteilen kann der Druck aus der Luftstoßwelle auf das Bauteil erhöht werden.
- Trotz vereinfachter Materialmodelle konnte das Phänomen der Druckerhöhung aus den Experimenten gut wiedergegeben werden.

- Die Annahme einer starren Oberfläche führt bei nachgiebigen Materialien davor zu deutlichen Abweichungen. Diese Annahme ist nicht in jedem Fall gerechtfertigt.

4.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Einfluss von nachgiebigen Materialien auf den Reflexionsfaktor bzw. auf den reflektierten Spitzenüberdruck untersucht. Zunächst wurden für die verwendeten Zustandsgleichungen die Nachweise erbracht, dass die Bedingungen für die Ausbildung von Stößen erfüllt sind.

Der Reflexionsfaktor wurde für die Reflexion von Luftstoßwellen an nachgiebigen Materialien berechnet. Der Einfluss der Materialparameter auf den Reflexionsfaktor wurde untersucht. Die meisten Konstruktionsmaterialien, wie Stahl, Beton oder Glas, können für die Bestimmung des reflektierten Spitzenüberdruckes vereinfachend als starr angenommen werden. Nachgiebige Materialien mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit reduzieren den Reflexionsfaktor. Die Bauteildicke und die Bauteillagerung beeinflussen den Reflexionsfaktor nicht.

Anschließend wurde berechnet, wie der Druck aus einer Luftstoßwelle auf eine Wand beeinflusst wird, wenn ein nachgiebiges Material vor der Wand ist. Zunächst wurde die Wand als starr angenommen. Der Druck auf die Wand ist größer, wenn ein nachgiebiges Material vor der Wand ist, als wenn die Luftstoßwelle direkt auf die Wand trifft. In einem weiteren Schritt wurden die Materialeigenschaften der Wand berücksichtigt. Wenn die Wand als starr angenommen wird, dann werden deutlich größere Drücke an der Wand erhalten, als wenn die Materialeigenschaften der Wand erfasst werden. Der Einfluss der Materialparameter auf die Drücke an der Wand wurde untersucht. Den größten Einfluss besitzen Dichte und Steifigkeit des nachgiebigen Materials. Es gibt zwar Bereiche für die Dichte des nachgiebigen Materials, bei denen der Reflexionsfaktor im Vergleich zur Reflexion an der Wand ohne dem nachgiebigen Material reduziert wird, jedoch haben diese Bereiche keine baupraktische Relevanz.

Für die Berechnungen des Reflexionsfaktors wurden die Erhaltungsgleichungen aufgestellt und gelöst. Die Ergebnisse lassen sich mit beliebiger Genauigkeit angeben. Sie können damit als Vergleichswerte für numerische Konvergenzstudien angewendet werden.

Kapitel 5

Analytische Lösungen zu Luftstoßwellen

5.1 Einleitung

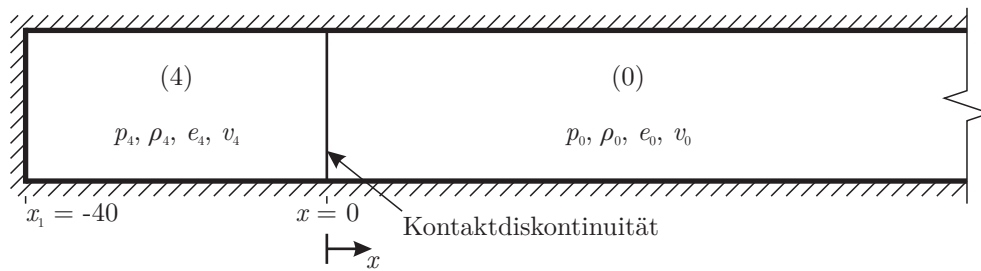
Im Kapitel 4 wurde der Einfluss von Materialeigenschaften auf den Reflexionsfaktor bzw. den reflektierten Spitzenüberdruck untersucht. Für die Belastung einer Baustruktur ist jedoch nicht allein der reflektierte Spitzenüberdruck maßgebend, sondern der gesamte (Über-)Druck-Zeit-Verlauf. Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, eine analytische Lösung für den reflektierten Überdruck-Zeit-Verlauf zu finden, um den Einfluss der Materialeigenschaften zu beschreiben.

Das Ziel wurde aufgrund der Schwierigkeit der Problemstellung zwar nicht vollständig erreicht, der aktuelle Stand der Arbeit wird hier aber dennoch vorgestellt. Dieses Kapitel kann möglicherweise dem einen oder anderen Leser interessante Anregungen geben.

5.2 Stoßrohr mit abschließender Wand

Dieser Abschnitt baut auf das RIEMANN-Problem aus dem Abschnitt 3.9.4 auf. Beim RIEMANN-Problem wird ein eindimensionaler Bereich $-\infty < x < \infty$ betrachtet. Zum Anfangszeitpunkt befindet sich ein Gas mit konstanten Eigenschaften im Bereich $x \leq 0$. Ein weiteres Gas mit anderen, konstanten Eigenschaften befindet sich im Bereich $x > 0$. Grundsätzlich können in den beiden Bereichen zwei verschiedene Gase sein, wie z. B. Helium und Luft. Im Folgenden wird jedoch nur ein Gas betrachtet, das sich in den beiden Bereichen lediglich durch die gegebenen Anfangswerte bezüglich der Zustandsgrößen unterscheidet.

Anders als beim RIEMANN-Problem, wird in diesem Abschnitt ein Problem betrachtet, bei dem sich an der Stelle $x_1 < 0$ ein abschließende, starre Wand befindet. Diese Problemstellung ist gleichbedeutend mit dem Fall, bei dem das System in positiver und in negativer x -Richtung unendlich ausgedehnt ist, wobei Spiegelsymmetrie zu x_1 besteht.

Abbildung 5.1: Geschlossenes Stoßrohr, Konfiguration zur Zeit $t = 0$

5.2.1 Problembeschreibung

Es wird die Konfiguration in einem geschlossenen Stoßrohr (*closed shock tube* [178]) zur Zeit $t = 0$ betrachtet (Abbildung 5.1). Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 3.9.4 betrachteten Problem, das sich auf $-\infty < x < \infty$ erstreckte, wird hier das Gebiet durch eine starre Wand bei $x_1 = -40$ begrenzt. Im gesamten Stoßrohr befindet sich ein Gas mit einem Isentropenexponenten $\gamma = \frac{7}{5}$. Die Zustandsgrößen Druck $p(x, t)$, Dichte $\varrho(x, t)$ und spezifische innere Energie $e(x, t)$ sind in den Bereichen (0) und (4) jeweils konstant. Die Bezeichnung (4) wurde in Anlehnung an den Abschnitt 3.9.4 gewählt. Der Druck und die Dichte des Gases sind im Bereich (4) größer als im Bereich (0) (Tabelle 5.1). Die Geschwindigkeit $v(x, t)$ ist zur Zeit $t = 0$ überall gleich Null.

Tabelle 5.1: Eigenschaften der Gase zur Zeit $t = 0$

Eigenschaft	Bereich (4): $-40 < x \leq 0$	Bereich (0): $x > 0$
Isentropenexponent γ	$\gamma = \frac{7}{5}$	$\gamma = \frac{7}{5}$
Dichte ϱ	$\varrho_4 = \frac{1}{100}$	$\varrho_0 = \frac{1225}{1000000}$
spezifische innere Energie e	$e_4 = 250000$	$e_0 = 206800$
Druck $p = (\gamma - 1) \varrho e$	$p_4 = 1000$	$p_0 = \frac{101332}{1000}$
Geschwindigkeit v	$v_4 = 0$	$v_0 = 0$

Maßeinheiten werden hier nicht berücksichtigt – es wird ein rein mathematisches Problem betrachtet. Das System wird durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial(\varrho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + e \varrho \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + e \varrho \right) v \right)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial x} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

für die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie und die Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1) \varrho e \tag{5.2}$$

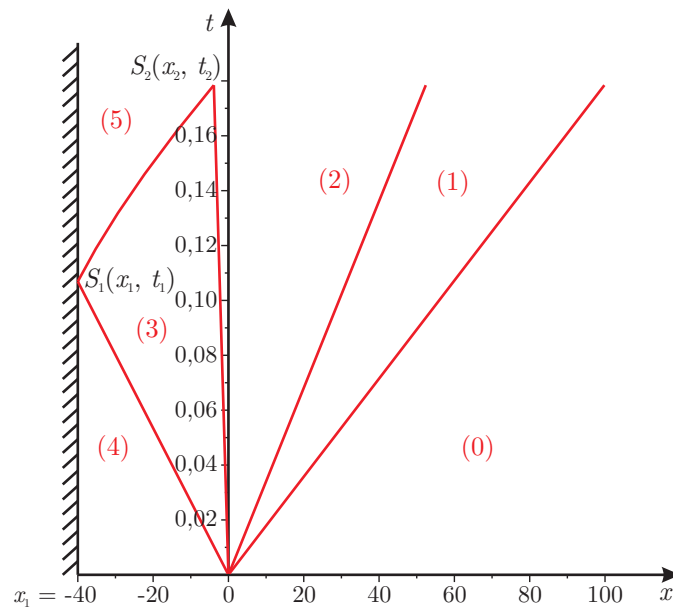


Abbildung 5.2: LAGRANGE-Diagramm, Bereiche (0) bis (5)

beschrieben.

Der Druck $p(x, t)$ wird gesucht.

5.2.2 Problemlösung für die Bereiche (1) bis (3)

In realen Stoßrohren werden die Gase mit unterschiedlichen Eigenschaften durch eine Membran getrennt. Durch das Zerstören der Membran wird die Ausbildung der Stoßwelle ermöglicht. Die Membran wird hier nicht explizit behandelt, sondern es wird von der idealisierten Ausgangskonfiguration in Abbildung 5.1 ausgegangen.

Zur Zeit $t = 0$ beginnt eine Stoßfront sich nach rechts zu bewegen. Diese Stoßfront ist durch die Grenze zwischen den Bereichen (0) und (1) im sogenannten LAGRANGE-Diagramm in Abbildung 5.2 gekennzeichnet. Die Grenze zwischen den Bereichen (1) und (2) bildet die Kontaktdiskontinuität zwischen den Gasen, die sich zur Zeit $t = 0$ in den Bereichen (0) bzw. (4) befanden. In den Bereichen (1) und (2) sind die Geschwindigkeiten und die Drücke gleich. Die Dichten und die spezifischen inneren Energien sind im Allgemeinen unterschiedlich, so wie in diesem Beispiel. In den Bereich $x < 0$ (ursprünglich Bereich (4)) bewegt sich eine Verdünnungswelle (3) hinein. Das linke Ende der Verdünnungswelle breitet sich mit der Schallgeschwindigkeit des Bereiches (4) nach links aus. Die Bereiche (0) bis (4) entsprechen den Bereichen (0) bis (4) aus dem Abschnitt 3.9.4. Wenn die Verdünnungswelle an der starren Wand bei $x_1 = -40$ reflektiert wird, dann entsteht der Bereich (5). Dieser Bereich wird als *nonsimple wave region* bezeichnet [36]. Die Tabelle 5.2 gibt einen Überblick über die Bereiche.

Tabelle 5.2: Übersicht der Bereiche (0) bis (5)

Bereich	Beschreibung	Eigenschaften
(0)	gegebene Anfangswerte	Größen sind gegeben und konstant
(1)	konstante Strömung	Größen sind konstant
(2)	konstante Strömung	Größen sind konstant
(3)	zentrierte Verdünnungswelle	Größen sind abhängig von x, t
(4)	gegebene Anfangswerte	Größen sind gegeben und konstant
(5)	reflektierte Verdünnungswelle	Größen sind abhängig von x, t

Die Lösung der Bereiche (1) bis (3) (Abbildung 5.2) erfolgt auf dem Weg, wie er in Abschnitt 3.9.4 beschrieben wurde. Die Zustandsgrößen für die Bereiche (1) und (2) können mit den Gleichungen (3.92) bis (3.99) berechnet werden. Mit diesen Gleichungen werden die konstanten Werte

$$\begin{aligned}
 p_1 = p_2 &= 302,595 \dots \\
 \varrho_1 &= 0,00257878 \dots \\
 e_1 &= 293350,7 \dots \\
 v_1 = v_2 &= 293,684 \dots \\
 \varrho_2 &= 0,00425781 \dots \\
 e_2 &= 177670,2 \dots
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

erhalten.

Der Bereich (3) wird mittels der Gleichungen (3.102) und (3.107) vollständig beschrieben:

$$\begin{aligned}
 v_3(x, t) &= \frac{5}{6} \frac{x}{t} + \frac{250}{3} \sqrt{14} \\
 c_3(x, t) &= -\frac{1}{6} \frac{x}{t} + \frac{250}{3} \sqrt{14} \\
 A &= \frac{p_4}{\varrho_4^\gamma} \\
 \varrho_3(x, t) &= \left(\frac{(c_3(x, t))^2}{\gamma A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
 p_3(x, t) &= A (\varrho_3(x, t))^\gamma \\
 e_3(x, t) &= \frac{p_3(x, t)}{(\gamma - 1) \varrho_3(x, t)} \quad .
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die abschließende, linke Wand des Stoßrohres an der Stelle $x_1 = -40$ wird von der Verdünnungswelle zur Zeit

$$t_1 = -\frac{x_1}{c_4} = -\frac{-40}{\sqrt{\frac{7}{5} \frac{1000}{1/100}}} = \frac{\sqrt{14}}{35} = 0,106904 \dots \tag{5.5}$$

erreicht (Schnittpunkt $S_1(x_1, t_1)$ in Abbildung 5.2).

Die Grenze $x_{35}(t)$ von Bereich (5) zu Bereich (3) wird durch die Charakteristik

$$C_{3+} : \frac{dx_{35}(t)}{dt} = v_3(x_{35}(t), t) + c_3(x_{35}(t), t) \quad (5.6)$$

beschrieben (Abschnitt 3.9.4). Daraus wird mit (5.4):

$$\begin{aligned} \frac{dx_{35}(t)}{dt} &= \frac{2}{3} \frac{x_{35}(t)}{t} + \frac{500}{3} \sqrt{14} \quad , \\ x_{35}(t) &= 500 \sqrt{14} t + C_{35} t^{2/3} \quad . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mit der Randbedingung $x_{35}(t_1) = x_1$ wird C_{35} berechnet:

$$\begin{aligned} x_1 &= 500 \sqrt{14} t_1 + C_{35} t_1^{2/3} \quad , \\ C_{35} &= \frac{x_1 - 500 \sqrt{14} t_1}{t_1^{2/3}} = -\frac{120}{7} 490^{2/3} \quad . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$x_{35}(t) = 500 \sqrt{14} t - \frac{120}{7} 490^{2/3} t^{2/3} \quad (5.9)$$

für die Grenze zwischen den Bereichen (3) und (5).

Der Punkt, an dem die Bereiche (2), (3) und (5) zusammen treffen, wird mit $S_2(x_2, t_2)$ bezeichnet (Abbildung 5.2). Dabei sind $t_2 = 0,178436\dots$ und $x_2 = -3,87999\dots$.

5.2.3 Problemlösung für den Bereich (5)

Die Lösung für den Bereich (5) ist deutlich komplizierter als die soeben beschriebene Lösung für den Bereich (3). Denn im Bereich (3) sind die C_- -Charakteristiken gerade, im Bereich (5) sind sowohl die C_+ - als auch die C_- -Charakteristiken gekrümmt. Während der Arbeit an dieser Dissertation habe ich verschiedene Wege versucht, eine Lösung für diesen Bereich zu finden, jedoch zunächst ohne Erfolg. Beispielsweise ging ich von der Vermutung aus, die Geschwindigkeit v_5 sei linear von x abhängig, so wie im Bereich (3). Diese Vermutung wurde zunächst durch Ergebnisse numerischer Berechnungen gestützt, bei denen der v_5 - x -Verlauf scheinbar linear aussah, so wie es scheinbar auch in Abbildung 5.3 der Fall ist. Bei meinen analytischen Berechnungen, die auf dieser Vermutung basierten, traten jedoch Widersprüche in den Ergebnissen auf, so dass diese Vermutung falsch sein muss. Da die Vermutung falsch ist, wird dieser Ansatz hier nicht weiter betrachtet.

Im Jahr 2010 veröffentlichte WITTEVEEN die Arbeit [178], in der er numerisch eine Lösung für das geschlossene Stoßrohr (*closed shock tube*) berechnet. Auf Nachfrage teilte er mir mit, dass eine analytische Lösung für den Bereich (5) von EMANUEL in [36] beschrieben wird. Dieser Bereich wird in [36] als *nonsimple wave region* bezeichnet. Die Lösung von EMANUEL beruht teilweise auf der Arbeit [91] von LANDAU & LIFSHITZ.

Die folgende Lösung baut auf die von EMANUEL beschriebene analytische Lösung auf. Die Lösung von EMANUEL wird hier nicht im Einzelnen wiedergegeben, da sie zu umfangreich ist. An relevanten Stellen wird auf EMANUEL [36] verwiesen.

Es wird zunächst der Parameter

$$n = \frac{1}{2} \frac{3 - \gamma}{\gamma - 1} \quad (5.10)$$

[36, Gl. (12.193)] eingeführt. Für $\gamma = 7/5 = 1,4$ wird $n = 2$ erhalten. Mit $n = 2$ und der Gleichung [36, (12.255)] wird die RIEMANN-Funktion

$$R_2(x, y; \xi, \eta) = \left(\frac{y - x}{\eta - \xi} \right)^2 \left[1 - 2 \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(\eta - \xi)(y - x)} \right] \quad (5.11)$$

[36, Gl. (12.258c)] erhalten. Dabei sind ξ und η die RIEMANN-Invarianten, die im Abschnitt 3.9.4 mit Γ_+ und Γ_- bezeichnet wurden. Um diese Berechnung anhand [36] einfach nachvollziehen zu können, wurden die Bezeichnungen von EMANUEL [36] übernommen. Mit der Gleichung [36, (12.274)] wird die abhängige Variable ψ_2 zu

$$\begin{aligned} \psi_2(\xi, \eta) &= - \int_{-(2n+1)}^{\eta} R_2(-y, y; \xi, \eta) dy \\ &= - \frac{\eta^4 - 2\xi\eta^3 - 625 + 50\xi\eta}{(\eta - \xi)^3} \end{aligned} \quad (5.12)$$

erhalten. Die Funktion $\psi_2(\xi, \eta)$ wird mit

$$\begin{aligned} \xi &= w + (2(2n+1)h)^{\frac{1}{2}} \\ \eta &= w - (2(2n+1)h)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

[36, Gl. (12.194)] in $\psi_2(w, h)$ überführt:

$$\psi_2(w, h) = - \frac{\left(625 - 50w^2 + 500h + w^4 - 60w^2h + 80w\sqrt{10}h^{3/2} - 300h^2 \right) \sqrt{10}}{800h^{3/2}} \quad (5.14)$$

Dabei sind $w = v_5/c_4$ die dimensionslose Geschwindigkeit und $h = \frac{c_5^2}{\gamma-1} \frac{1}{c_4^2}$ die dimensionslose Enthalpie.

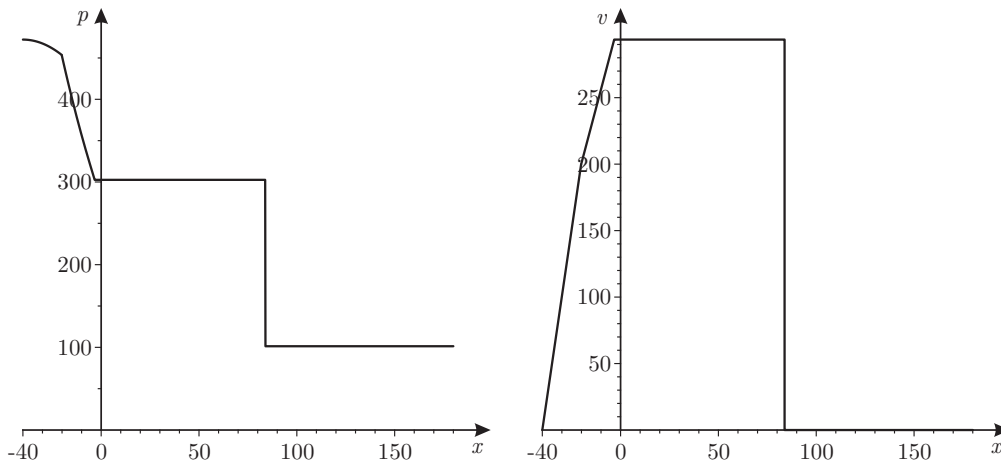
Die dimensionslose Zeit $\tau = t/t_1$ und die dimensionslose Koordinate $X = x/x_1$ werden mit der Gleichung [36, (12.178b)] zu

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\partial \psi_2(w, h)}{\partial h} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{1600} \frac{500h - 60w^2h + 300h^2 + 1875 - 150w^2 + 3w^4}{h^{5/2}} \\ X &= w \frac{\partial \psi_2(w, h)}{\partial h} - \frac{\partial \psi_2(w, h)}{\partial w} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{1600} \frac{300wh - 52w^3h + 60wh^2 + 1875w - 150w^3 + 3w^5 + 160h^{5/2}\sqrt{10}}{h^{5/2}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

bestimmt.

Für den Druck p_5 im Bereich (5) folgt nun aus Gleichung [36, (12.212)]:

$$\begin{aligned} p_5 &= p_4 \left(\frac{2h}{2n+1} \right)^{\frac{2n+3}{2}} \\ &= p_4 \left(\frac{2h}{5} \right)^{\frac{7}{2}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Abbildung 5.3: Druck $p(x, t)$ und Geschwindigkeit $v(x, t)$ zur Zeit $t = 0,15$

Mit den Gleichungen (5.15) und (5.16) ist die Lösung prinzipiell bekannt. Der p - x -Verlauf und der v - x -Verlauf sind in der Abbildung 5.3 für die Zeit $t = 0,15$ dargestellt. Die Berechnung erfolgte mit MAPLE. Sie ist im Anhang C angegeben.

5.2.4 Problemlösung für den Bereich (6)

Das LAGRANGE-Diagramm in Abbildung 5.4 stellt die Bereiche wie in Abbildung 5.2 dar, geht jedoch über die Zeit t_2 hinaus.

Der Bereich (5) in Abbildung 5.4 wird für $t \geq t_2$ durch die C_- -Charakteristik, die vom Punkt (x_2, t_2) ausgeht, begrenzt. Diese Charakteristik trifft zur Zeit t_3 auf die starre Wand bei $x_1 = -40$. Oberhalb von (x_1, t_3) liegt der Bereich (6). Zwischen den Bereichen (2) und (6) liegt der Bereich (7). Die Bereiche (2) und (7) bzw. (6) und (7) werden durch die C_+ -Charakteristiken, die von (x_2, t_2) bzw. (x_1, t_3) ausgehen, getrennt. Die gestrichelten Linien in Abbildung 5.4 stellen die Grenzen von weiteren Bereichen dar. Diese Grenzen wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht berechnet und werden deshalb durch die gestrichelten Linien nur angedeutet.

Im Bereich (6) ist das Gas in Ruhe ($v_6 = 0$) [36]. Mit $v_6 = 0$ kann die Schallgeschwindigkeit c_6 über die RIEMANN-Invariante Γ_- (Gleichung (3.91)) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \Gamma_- = v_2 - \frac{2}{\gamma - 1} c_2 &= v_6 - \frac{2}{\gamma - 1} c_6 \quad , \\ c_6 &= c_2 - \frac{\gamma - 1}{2} v_2 \quad . \end{aligned} \tag{5.17}$$

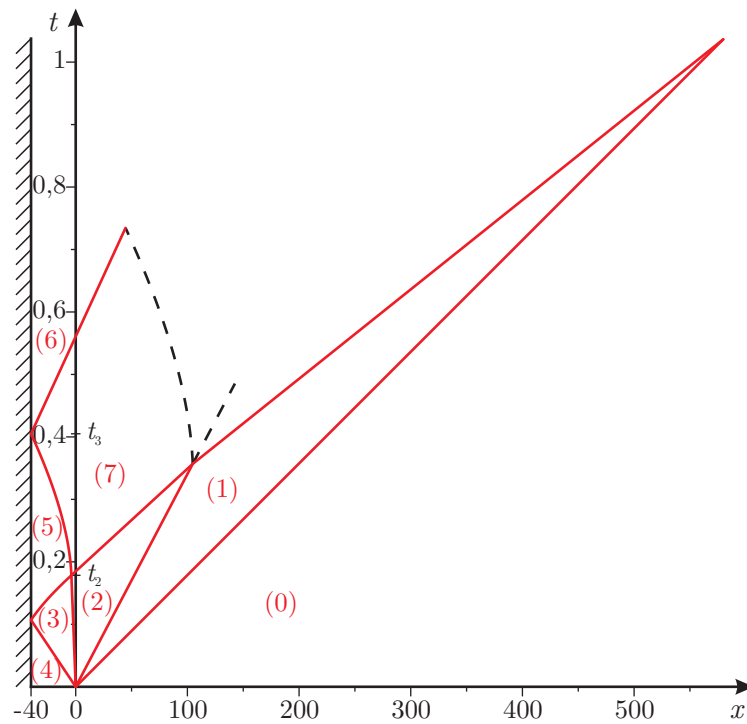


Abbildung 5.4: LAGRANGE-Diagramm, Bereiche (0) bis (7)

Damit lassen sich die Größen des Bereiches (6) zu

$$\begin{aligned}
 c_6 &= 256,6919\dots \\
 A &= \frac{p_4}{\varrho_4^\gamma} \\
 \varrho_6 &= \left(\frac{c_6^2}{\gamma A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0,001519641\dots \\
 p_6 &= A \varrho_6^\gamma = 71,52168\dots \\
 e_6 &= \frac{p_6}{(\gamma-1)\varrho_6} = 117662,0\dots
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

ermitteln.

Die Zeit t_3 , zu der die Bereiche (5) und (6) zusammentreffen, wird mit

$$\begin{aligned}
 h_{56} &= \frac{5}{2} \left(\frac{p_6}{p_4} \right)^{\frac{2}{7}} \\
 \tau_{56} &= \frac{\sqrt{2}}{1600} \frac{500 h_{56} + 1875 + 300 h_{56}^2}{h_{56}^{5/2}}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

zu

$$t_3 = \frac{\tau_{56}}{t_1} = 0,405016\dots \tag{5.20}$$

berechnet.

5.2.5 Bereich (7)

EMANUEL beschrieb in [36] die Lösung für Bereich (5). Für Bereich (7) gab er an, dass dies wieder eine einfache Welle (*simple wave region*) ist, jedoch keine zentrierte Verdünnungswelle (*centered rarefaction wave*) sondern eine nichtzentrierte Verdünnungswelle (*noncentered rarefaction wave*, beschreibbar durch einen beschleunigten Kolben). Für den Bereich (7) wurde in dieser Arbeit keine Lösung ermittelt, da die Geschwindigkeit auf der C_- -Charakteristik zwar für einzelne Punkte angegeben werden kann (Anhang C), jedoch keine geschlossene Lösung gefunden wurde.

5.2.6 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt 5.2 wurde die analytische Lösung für die Reflexion der Verdünnungswelle bei einem Stoßrohr mit abschließender Wand vorgestellt. Bei der Reflexion der Verdünnungswelle tritt eine *nonsimple wave region* auf, deren Lösung von EMANUEL beschrieben wurde. Die analytische Lösung brachte zwar keine wesentlichen neuen Erkenntnisse, sie wurde trotzdem in diese Arbeit mit aufgenommen. Erstens, weil sie sehr lehrreich zum Verständnis der Lösung solcher Probleme ist. Zweitens, weil die analytische Lösung nicht allgemein bekannt ist und sie möglicherweise dem einen oder anderen Leser dieser Arbeit hilfreich ist.

In der Abbildung 5.4 ist erkennbar, dass die Lösung für die Problemstellung durch die Ausbildung einer Vielzahl von Bereichen kompliziert wird. Um die Anzahl der Bereiche zu reduzieren, wird im folgenden Abschnitt 5.3 eine Problemstellung vorgestellt, bei der sich eine Luftstoßwelle ausbildet, ohne dass so viele Bereiche auftreten.

5.3 Konstruktion einer einfachen Stoßwelle

Um dem Ziel näherzukommen, eine analytische Lösung für die Reflexion einer Luftstoßwelle an einem nachgiebigen Material zu finden, wird in diesem Abschnitt eine relativ einfache Stoßwelle beschrieben. Die Stoßwelle besitzt, um das Problem nicht zu kompliziert zu haben, keine Sogphase.

Tabelle 5.3: Eigenschaften der Gase zur Zeit $t = 0$

Eigenschaft	Bereich (0): $x > 40$	Bereich (1): $0 \leq x \leq x_1 = 40$
Isentropenexponent γ	$\gamma = 7/5$	$\gamma = 7/5$
Dichte ϱ	$\varrho_0 = \frac{1225}{1000000}$	aus Sprungbedingungen
spezifische innere Energie e	$e_0 = 206800$	aus Sprungbedingungen
Druck $p = (\gamma - 1) \varrho e$	$p_0 = \frac{101332}{1000}$	$p_1 = 4000$
Geschwindigkeit v	$v_0 = 0$	aus Sprungbedingungen

In Anlehnung an das RIEMANN-Problem (Abschnitt 3.9.4) wird von zwei Gasen mit konstanten Zuständen zur Zeit $t = 0$ ausgegangen. Der Ausgangszustand wird durch die Werte in Ta-

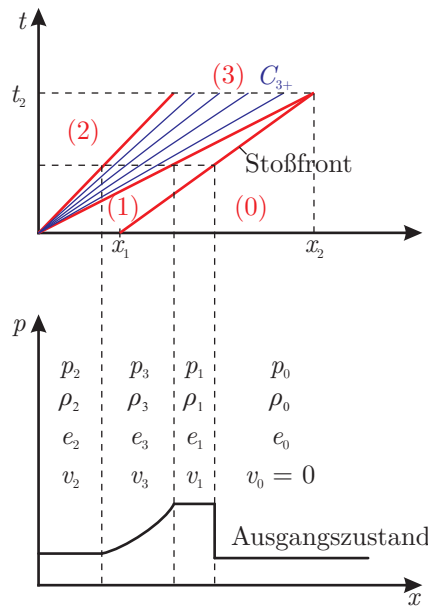


Abbildung 5.5: LAGRANGE-Diagramm (oben), $p-x$ -Verlauf (unten)

belle 5.3 beschrieben. Es wird im Folgenden ohne Maßeinheiten gerechnet – es wird ein rein mathematisches Problem betrachtet (Anmerkung zur Abbildung 5.8). Bei $x = 0$ befindet sich eine starre Wand. Das System wird durch die partiellen Differentialgleichungen (5.1) und die Zustandsgleichung (5.2) beschrieben.

Die Größen v_1 , ρ_1 und e_1 werden mit den Sprungbedingungen (3.69) bis (3.71) an der Stoßfront (RANKINE-HUGONIOT-Gleichungen) und der Zustandsgleichung (3.67) berechnet:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \rho_0 \frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{p_0 (\gamma + 1) + p_1 (\gamma - 1)} = 0,006407157\dots \\
 e_1 &= \frac{p_1}{(\gamma - 1) \rho_1} = 1560754,4\dots \\
 c_1 &= \sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} = 934,8917\dots \\
 v_1 &= \sqrt{\frac{2 (p_1 - p_0)^2}{\rho_0 [p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)]}} = 1604,400\dots \\
 v_{s1} &= \sqrt{\frac{p_0 (\gamma - 1) + p_1 (\gamma + 1)}{2 \rho_0}} = 1983,661\dots \quad .
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Dabei ist v_{s1} die Stoßwellengeschwindigkeit.

Die Abbildung 5.5 zeigt im LAGRANGE-Diagramm (oben) die Bereiche der Stoßwelle. In der Abbildung unten ist zum besseren Verständnis ein zugehöriger $p-x$ -Verlauf dargestellt. Rote Zahlen in Klammern bezeichnen die einzelnen Bereiche. Im Bereich (0) befindet sich das Gas im Ausgangszustand gemäß Tabelle 5.3. Im Bereich (1) hat das Gas den gegebenen Druck p_1 und die aus den Sprungbedingungen berechneten Zustandsgrößen. Das Gas bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_1 . Im Bereich (2) ist die Geschwindigkeit gleich Null ($v_2 = 0$) aufgrund der

Randbedingung der starren Wand. Im Bereich (3) tritt eine Verdünnungswelle auf, die die Bereiche (1) und (2) verbindet. Im Bereich (3) sind die C_{3+} -Charakteristiken Geraden, die sich im Punkt $(x = 0, t = 0)$ schneiden. Man spricht deshalb von einer zentrierten Verdünnungswelle (*centered rarefaction wave*, [36, Abbildung 12.11(a)]).

5.3.1 Problemlösung für den Bereich (2)

Im Bereich (2) lässt sich mit der RIEMANN-Invariante Γ_- (Gleichung (3.91)) und mit der Randbedingung $v_2 = 0$ die Schallgeschwindigkeit c_2 im Bereich (2) zu

$$\Gamma_- = v_2 - \frac{2}{\gamma - 1} c_2 = v_1 - \frac{2}{\gamma - 1} c_1 \quad (5.22)$$

$$c_2 = c_1 - \frac{\gamma - 1}{2} v_1 \quad (5.23)$$

berechnen. Mit

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\varrho_1^\gamma} &= \frac{p_2}{\varrho_2^\gamma} \\ c_2 &= \sqrt{\gamma \frac{p_2}{\varrho_2}} \\ e_2 &= \frac{p_2}{(\gamma - 1) \varrho_2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

werden

$$\begin{aligned} \varrho_2 &= \left(\frac{c_2^2 \varrho_1^\gamma}{\gamma p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 0,0007829644 \dots \\ p_2 &= \frac{c_2^2}{\gamma} \varrho_2 = 210,8469 \dots \\ e_2 &= 673232,7 \dots \end{aligned} \quad (5.25)$$

für den Bereich (2) erhalten.

5.3.2 Problemlösung für den Bereich (3)

Aus der Charakteristik

$$C_{3+} : v_3 + c_3 = \frac{x}{t} \quad (5.26)$$

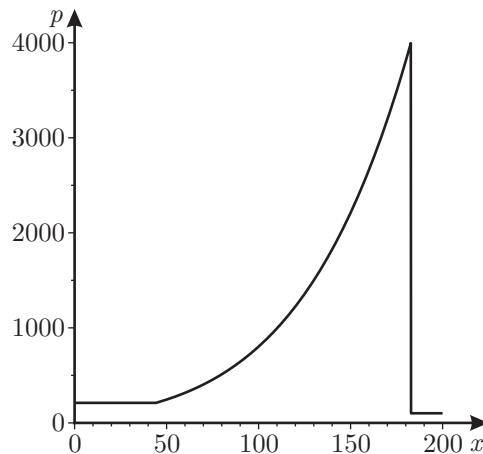
und der RIEMANN-Invarianten

$$\Gamma_{3-} = v_3 - \frac{2}{\gamma - 1} c_3 = v_1 - \frac{2}{\gamma - 1} c_1 \quad (5.27)$$

und der Gleichung (5.23) werden

$$v_3 = \frac{v_1}{(c_1 + v_1 - c_2) t} (x - c_2 t) \quad (5.28)$$

$$c_3 = \frac{x}{t} - v_3 \quad (5.29)$$

Abbildung 5.6: Druckverlauf $p(x, t)$ zur Zeit $t = t_2 = 0,07199 \dots$

erhalten. Da in der Verdünnungswelle eine isentrope Zustandsänderung stattfindet, lässt sich die Konstante

$$A = \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \quad (5.30)$$

bestimmen. Mit der Konstanten A können die Zustandsgrößen

$$\rho_3 = \left(\frac{c_3^2}{\gamma A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5.31)$$

$$p_3 = A \rho_3^\gamma \quad (5.32)$$

$$e_3 = \frac{p_3}{(\gamma - 1) \rho_3} \quad (5.33)$$

in der Verdünnungswelle angegeben werden.

Zur Zeit $t_2 = \frac{x_1}{c_1 + v_1 - v_s} = 0,07199 \dots$ treffen die Verdünnungswelle und die Stoßfront am Ort $x_2 = x_1 + v_{s1} t_2 = 182,804 \dots$ zusammen (Abbildung 5.5). Mit den ermittelten Gleichungen ist der Verlauf der Stoßwelle im Zeitbereich $0 \leq t \leq t_2$ bestimmt. Die Abbildung 5.6 stellt den Druckverlauf $p(x, t)$ zur Zeit $t = t_2$ dar. Der Druckverlauf $p_3(x, t)$ zur Zeit t_2 wird durch ein Polynom 7. Grades beschrieben. Der Druck $p_3(x, t)$ fällt in der Verdünnungswelle bis auf den Druck p_2 . Interessant ist, dass der Druck in der Verdünnungswelle auf nahezu Umgebungsluftdruck p_0 fällt, aber nicht vollständig, sondern etwas größer als der Umgebungsluftdruck bleibt ($p_2 > p_0$). Die Differenz $p_2 - p_0$ ist abhängig vom Spitzendruck p_1 . Die Erklärung dafür ist, dass beim Sprung über die Stoßfront eine Entropieerhöhung stattfindet. Dadurch herrscht im Bereich (2) ein etwas höherer Druck als im Bereich (0).

5.3.3 Problemlösung für den Bereich (4)

Nach dem Zusammentreffen der Verdünnungswelle des Bereiches (3) mit der Stoßfront, entsteht ein weiterer Bereich (4) aus der Interaktion der Verdünnungswelle mit der Stoßfront (Abbil-

dung 5.7). Bisher konnte ich keine exakte, analytische Lösung für diesen Bereich ermitteln. Probleme, die bei der Lösung dieses Bereiches auftreten, sind:

1. Der Bereich (4) ist zwar isentrop, aber nicht homentrop. Homentrop bedeutet, dass die Entropie sowohl zeitlich als auch räumlich gleich verteilt ist. In dem Bereich (4) ist die Entropie aber nicht räumlich gleich verteilt. Da der Bereich nicht homentrop ist, kann der Lösungsweg nach [36] aus Abschnitt 5.2.3 nicht angewendet werden.
2. An der Stoßfront sind die Zustandsgrößen nicht konstant wie im Bereich (1), sondern veränderlich. Damit wird die Beschreibung der Grenze des Bereiches (4) zum Bereich (0) komplizierter.

Die analytische Lösung für diesen Bereich ist ein mögliches Ziel für zukünftige Forschungsarbeiten.

5.3.4 Vergleich der analytischen Lösung mit numerischen Berechnungen

Die analytischen Berechnungen haben den Vorteil, dass sie als Referenz für Konvergenzstudien numerischer Berechnungen herangezogen werden können. In diesem Abschnitt wird die analytische Lösung der Problemstellung (Tabelle 5.3) mit numerischen Ergebnissen verglichen. Die numerischen Berechnungen wurden mit AUTODYN Version 12.1 [23] durchgeführt. Für die Berechnungen wurden die Lösungsverfahren EULER-GODUNOV (Abschnitt 3.10.3) und EULER-FCT (Abschnitt 3.10.4) in der dreidimensionalen Variante verwendet.

Der Bereich $0 \leq x \leq 480$ wurde mit Zellen verschiedener Zelllängen ΔL im Bereich $0,1 \leq \Delta L \leq 40$ modelliert. In y - und z -Richtung wurde nur eine Zelle modelliert. Es wurde ohne *flow out*-Randbedingungen gerechnet, d.h. die Ränder sind starre Oberflächen. Die Zellen wurden mit den Werten aus Tabelle 5.3 gefüllt. Die Berechnung wurde bis zur Zeit $t_3 = 0,202935$ durchgeführt. An der Stelle $x_2 = 182,804274$ wurde ein Messpunkt (*gauge*) eingefügt, an dem der Druck-Zeit-Verlauf ausgewertet wurde.

Es bedarf an dieser Stelle noch einer Erklärung, warum für den Ort x_2 die analytische Lösung für den Zeitbereich $0 \leq t \leq t_3$ bekannt ist: Für die Bereiche (0) und (1) sind die Anfangswerte gegeben. Die Werte für die Bereiche (2) und (3) wurden in den vorigen Abschnitten berechnet. Die Lage der einzelnen Bereiche ist im LAGRANGE-Diagramm in Abbildung 5.7 gekennzeichnet. Die Grenze zwischen den Bereichen (3) und (4) wird durch die Charakteristik

$$C_{3-} : \frac{dx_{34}(t)}{dt} = v_3(x_{34}(t), t) - c_3(x_{34}(t), t) \quad (5.34)$$

beschrieben (Abschnitt 3.9.4). Da in (x_2, t_2) die Geschwindigkeit v_3 größer als die Schallgeschwindigkeit c_3 ist, verläuft die Charakteristik C_{3-} von (x_2, t_2) zunächst in die positive x -Richtung. Erst wenn auf der Charakteristik v_3 kleiner als c_3 wird, dann verläuft diese Charakteristik mit zunehmendem t in die negative x -Richtung. Zur Zeit t_3 schneidet diese Charakteristik wieder den Ort x_2 . Damit ist die analytische Lösung am Ort x_2 bis zur Zeit t_3 bekannt.

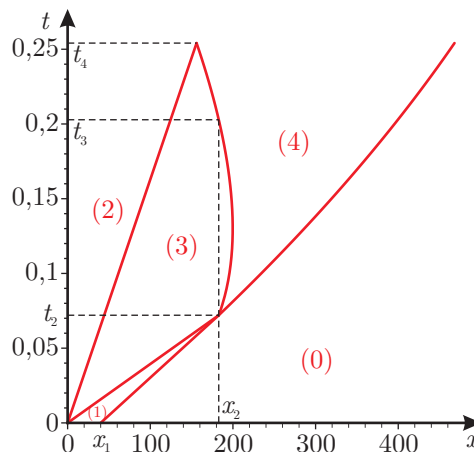


Abbildung 5.7: LAGRANGE-Diagramm, Kennzeichnung der Bereiche (0) bis (4)

Aus Gleichung (5.34) lässt sich x_{34} zu

$$x_{34}(t) = \left(-\frac{20}{42177331} \sqrt[3]{t} \left(2000 \sqrt{4031993} - 974667 \sqrt{2} \right) \sqrt{6025333} + C_{34} \right) t^{2/3} \quad (5.35)$$

berechnen. Mit

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{34}(t_2) = \left(-\frac{20 \sqrt[3]{t_2}}{42177331} \left(2000 \sqrt{4031993} - 974667 \sqrt{2} \right) \sqrt{6025333} + C_{34} \right) t_2^{2/3} \\ C_{34} &= \frac{24000}{42177331} \frac{14^{5/6} \sqrt{575999} \sqrt[3]{5} 6025333^{2/3}}{\sqrt[3]{500 \sqrt{14} \sqrt{575999} - 575999}} \end{aligned} \quad (5.36)$$

ist $x_{34}(t)$ vollständig bestimmt. Mit $x_{34}(t_3) = x_2$ wird $t_3 = 0,202935 \dots$ erhalten.

Da die analytische Lösung an der Stelle x_2 bis zur Zeit t_3 bekannt ist, kann an dieser Stelle der bis zur Zeit t_3 auftretende Impuls

$$I_{t_3} = \int_{t_2}^{t_3} p_3(x_2, t) - p_0 dt = 128,4384 \dots \quad (5.37)$$

berechnet werden.

Der Bereich (3) endet zu der Zeit t_4 , wenn die Bereiche (2) und (4) zusammentreffen. Mit $c_2 t_4 = x_{34}(t_4)$ lässt sich $t_4 = 0,254113 \dots$ bestimmen.

Die Ergebnisse der mit AUTODYN durchgeführten Konvergenzstudie sind in Abbildung 5.8 dargestellt. Im linken Diagramm ist der berechnete maximale Druck p_{max} abgebildet. Auf der Abszisse ist die Anzahl der Elemente über eine Länge $L = 40$ aufgetragen. Mit EULER-FCT wird eine scheinbare Konvergenz erreicht, jedoch nicht gegen das exakte Ergebnis von $p_{max} = 4000$ (gestrichelte Linie), sondern gegen einen größeren Wert bei ungefähr 4570. Dass der exakte Wert übertroffen wird, liegt an den bei EULER-FCT auftretenden Oszillationen, die bei Abbildung 5.9 noch deutlich werden. Die Ergebnisse bei EULER-GODUNOV konvergieren zwar deutlich langsamer, scheinen sich aber der exakten Lösung anzunähern.

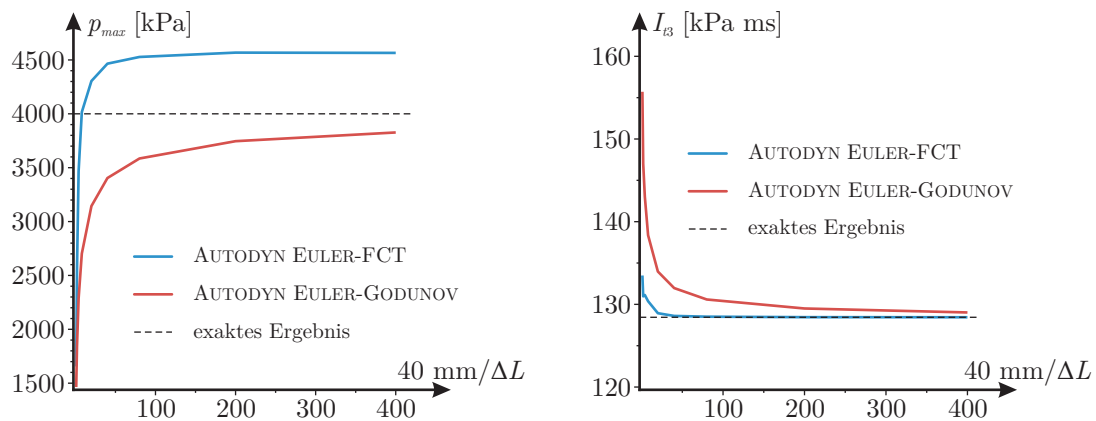


Abbildung 5.8: Konvergenzstudie, links: Auswertung des maximalen Drucks p_{max} , rechts: Auswertung des Impulses I , Anmerkung: Im Text wurde ohne Maßeinheiten gerechnet, so wie es in der Problembeschreibung in Abschnitt 5.3 angegeben wurde. Wenn das Einheitensystem [mm, mg, ms] verwendet wird, dann ergibt sich für den Druck die Maßeinheit kPa.

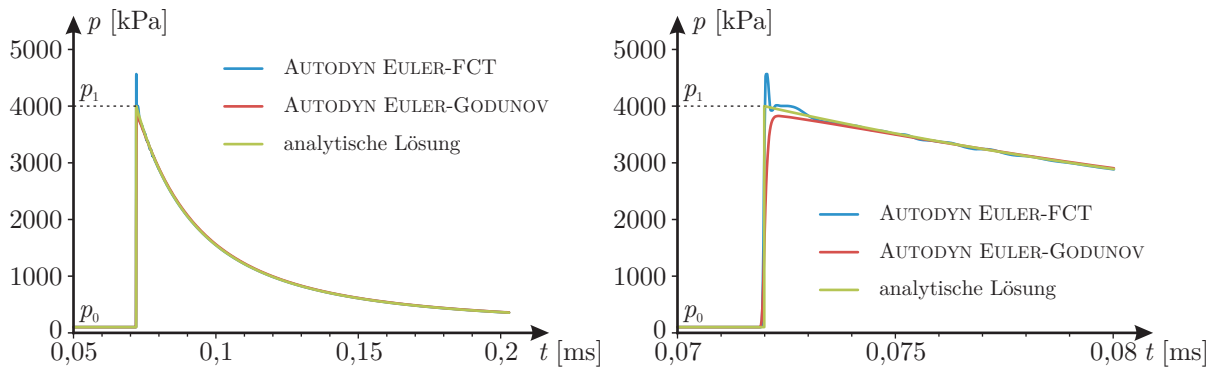


Abbildung 5.9: Druck-Zeit-Verlauf bei x_2 , Vergleich der exakten Lösung mit der mit AUTODYN ermittelten Lösungen, Anmerkung zur Abbildung 5.8 hier auch gültig

Im rechten Diagramm ist der Impuls I_{t_3} gemäß Gleichung (5.37) dargestellt. Auch hier ist erkennbar, dass EULER-GODUNOV langsamer als EULER-FCT konvergiert, aber beide scheinen gegen das exakte Ergebnis von $I_{t_3} = 128,4384\dots$ zu konvergieren.

In der Abbildung 5.9 werden die mit AUTODYN ermittelten Lösungen für den Druck-Zeit-Verlauf an der Stelle x_2 mit der in diesem Kapitel ermittelten exakten, analytischen Lösung verglichen. Die dargestellten Druck-Zeit-Verläufe für EULER-FCT und EULER-GODUNOV wurden mit dem feinsten Netz ($\Delta L = 0,1$) aus der Konvergenzstudie (Abbildung 5.8) berechnet. Im linken Diagramm sind die Druck-Zeit-Verläufe für den Zeitbereich $0,05 \leq t \leq t_3$ dargestellt. Insgesamt stimmen die Verläufe gut überein, lediglich im Bereich der Stoßfront treten deutliche Abweichungen auf. Dieser Bereich ist im rechten Diagramm noch einmal genauer dargestellt ($0,07 \leq t \leq 0,08$). Deutlich sind die bereits erwähnten Oszillationen an der Stoßfront bei

EULER-FCT zu erkennen. Diese führen dazu, dass der Spitzendruck übertroffen wird. Dies kann auch durch eine feinere Vernetzung nicht vermieden werden. Der Druck-Zeit-Verlauf von EULER-GODUNOV schmiegt sich mit feinerer Vernetzung immer besser an den exakten Druck-Zeit-Verlauf an.

Anhand dieses Vergleichs der exakten, analytischen Lösung mit den numerischen Ergebnissen einer Konvergenzstudie mit zwei EULER-Verfahren, lassen sich die Vorteile einer analytischen Lösung gut erkennen. Mit Hilfe der analytischen Lösung kann man deutlich machen, ob eine scheinbare Konvergenz auch eine Konvergenz gegen die richtige Lösung ist (Abbildung 5.8 links). Mittels einer analytischen Lösung kann man nicht nur eine Konvergenz des Spitzendrucks überprüfen, sondern auch des Impulses (Abbildung 5.8 rechts).

Mit exakten, analytischen Lösungen lassen sich Einflüsse von Materialparametern untersuchen, die mit den vorgestellten numerischen Verfahren aufgrund ihrer Ungenauigkeiten nicht untersucht werden können. Als Beispiel hierfür seien die Berechnungen aus Kapitel 4 genannt, bei denen Genauigkeiten auf mehrere Dezimalstellen erforderlich waren.

Im Kapitel 4 wurde nur der Spitzendruck untersucht, nicht der gesamte Druck-Zeit-Verlauf. Es ist deshalb wünschenswert, die Untersuchungen zu analytischen Lösungen fortzuführen, um die Einflüsse von Materialparametern auf den gesamten reflektierten Überdruck-Zeit-Verlauf angeben zu können.

5.4 Zusammenfassung

Die ursprüngliche Motivation für die Arbeiten in diesem Kapitel bestand darin, die Untersuchungen aus dem Kapitel 4 fortzusetzen und die Einflüsse von Materialparametern auf den gesamten reflektierten Überdruck-Zeit-Verlauf zu untersuchen. Dazu sollten die Differentialgleichungen für die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie für den eindimensionalen Fall für gegebene Anfangswerte gelöst werden. Die analytische Lösung dieser Differentialgleichungen für den gesamten Überdruck-Zeit-Verlauf war jedoch selbst im eindimensionalen Fall sehr kompliziert.

Leider konnte das ursprüngliche Ziel nicht vollständig erreicht werden. Die durchgeführten Arbeiten und Ergebnisse zu den analytischen Lösungen wurden dennoch in diese Dissertation aufgenommen. Ich hoffe, dass dieses Kapitel dem einen oder anderen Leser ein Gewinn ist, da die Lösungen, wie beispielsweise für den *nonsimple wave*-Bereich (Abschnitt 5.2.3, [36]), grundlegend für das Verständnis solcher Probleme und trotzdem nicht allgemein bekannt sind.

Für eine relativ einfache Stoßwelle wurde die Lösung so weit wie mir möglich aufgestellt (Abschnitt 5.3) und anschließend mit den Ergebnissen einer Konvergenzstudie numerischer Berechnungen verglichen (Abschnitt 5.3.4).

Kapitel 6

Versuche an Wärmedämmverbundsystemen

6.1 Einleitung

Im Jahr 2006 wurden an der Wehrtechnischen Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik (WTD 52) Versuche an Wärmedämmverbundsystemen unter Explosionsbeanspruchung durchgeführt [139]. Die Versuche wurden von der PEKATEX GmbH in Auftrag gegeben. Anschließend bekamen GEBBEKEN & DÖGE den Auftrag, die Versuche auszuwerten.

Die Versuche werden in diese Dissertation aufgenommen, da sie ein Beispiel dafür sind, dass Wärmedämmverbundsysteme (WDVS) zusätzlich zu ihrer Funktion als Wärmedämmung auch die Funktion des Explosionsschutzes übernehmen können. Die vorgestellten Versuche dienen als Beispiel für die baupraktische Relevanz der theoretischen Untersuchungen in den beiden vorangegangenen Kapiteln. Sie zeigen, dass die theoretischen Überlegungen auch einen praktischen Bezug besitzen.

Besonderer Dank gebührt Herrn Wintermantel von der PEKATEX GmbH für die freundliche Genehmigung, die Versuchsergebnisse in dieser Dissertation aufnehmen zu dürfen.

6.2 Beschreibung der Versuche

Im Rahmen der durchgeführten Versuche [139] wurden drei Systeme auf ihre Schutzwirkung vor Explosionen untersucht:

1. Wärmedämmverbundsystem auf Polystyrolschaumbasis,
2. Wärmedämmverbundsystem auf Mineralwollebasis,
3. PEKATEX[®]-Fassadenverbundsystem.

Die Systeme wurden je auf eine Stahlplatte mit den Abmessungen 2000 mm · 2000 mm · 20 mm gebaut (Abbildung 6.1). Die Systeme hatten einen Durchmesser von ca. 2000 mm. Ihr Aufbau ist in Tabelle 6.1 angegeben.



Abbildung 6.1: Fotos der Versuchskörper [139], links: Polystyrolschaum-WDVS, mittig: Mineralwolle-WDVS, rechts: PEKATEX®

Tabelle 6.1: Aufbau der Versuchskörper [139]

Schicht	Material	Dicke [mm]	Masse [kg/m ²]
Polystyrolschaum-WDVS			
Fassadenputz mit Armiergewebe	Terratherm 300 mit Terratherm 310	10	16,5
Wärmedämmschicht	Terratherm 320 EPS Platte	100	1,5
Klebemörtel	Terratherm 300	3	6
Haftbrücke	Ardex P82	Filmschicht	0,1
Stahlplatte	Stahl S235	20	157
Mineralwolle-WDVS			
Fassadenputz mit Armiergewebe	Terratherm 300 mit Terratherm 310	10	16,5
Wärmedämmschicht	Terratherm 330 MF Lamelle	100	9
Klebemörtel	Terratherm 300	3	6
Haftbrücke	Ardex P82	Filmschicht	0,1
Stahlplatte	Stahl S235	20	157
PEKATEX®			
Fassadenputz mit Armiergewebe	Terragrund 110 mit Synteen Typ 3500 8x8	23	39,1
PEKATEX®	REF 10208-35	105	6,8
Klebemörtel	ARDEX ARDURIT X7G Plus	4	4
Haftbrücke	Ardex P82	Filmschicht	0,1
Stahlplatte	Stahl S235	20	157

Die Versuche fanden an der WTD 52 untertage in einem Stollen mit einer Länge von 50 m und einem Durchmesser von 2 m statt. Dieser Stollen wird von der WTD 52 als Stoßrohr bezeich-

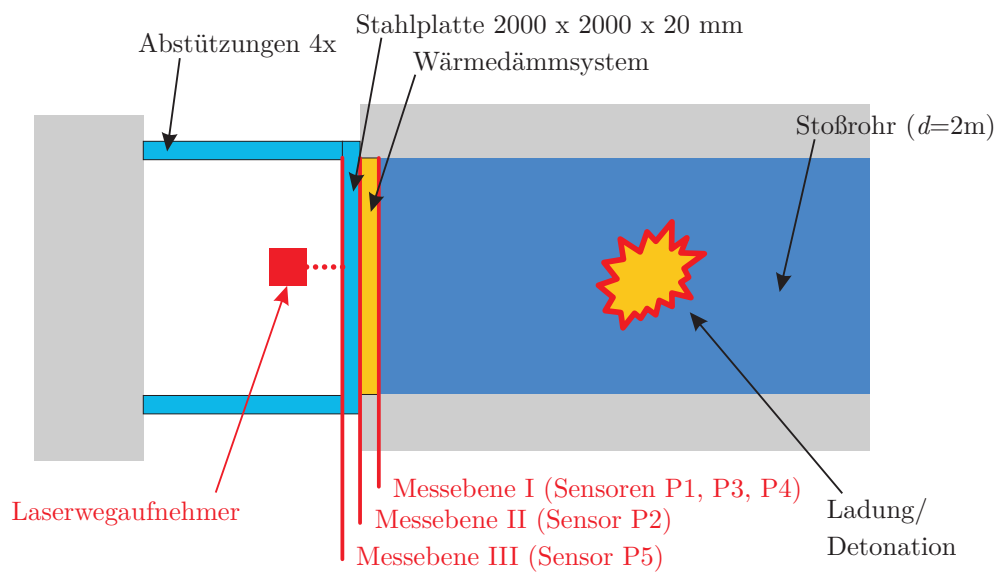


Abbildung 6.2: Skizze des Versuchsaufbaus (nach [139])

net [139]. Eine Skizze des Versuchsaufbaus ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Die Stahlplatten mit den Verbundsystemen wurden für jeden Anspannvorgang einzeln am Eingang des Stollens aufgebaut. Die Verbundsysteme zeigten jeweils in den Stollen hinein. Die Stahlplatten wurden durch vier Stahlträger an einer Felswand gegenüber des Stolleneinganges abgestützt. Die Drücke wurden in drei Messebenen gemessen. Die Messebene I befand sich an der Oberfläche des Verbundsystems, die Messebene II an der Grenze zwischen Verbundsystem und Stahlplatte und die Messebene III an der Rückseite (gegenüberliegend des Verbundsystems) der Stahlplatte. An der Rückseite der Stahlplatte wurde durch einen Laserwegaufnehmer die Verformung der Stahlplattenmitte gemessen. Die Fotos in Abbildung 6.3 geben den Versuchsaufbau wieder.



Abbildung 6.3: Fotos des Versuchsaufbaus [139]

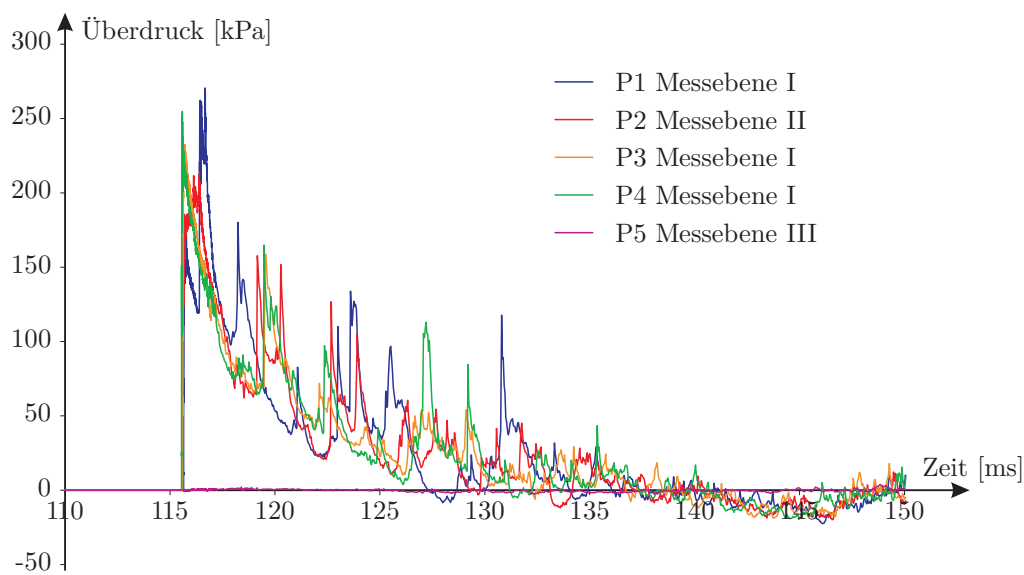


Abbildung 6.4: Überdruck-Zeit-Verläufe, Referenzplatte, 270 g PETN in 5,6 m Entfernung

Die Versuchskörper wurden mit Luftstoßwellen im Ferndetonationsbereich belastet. Die Versuchskörper wurden mit zwei Sprengladungen getestet. Der erste Versuch wurde mit 140 g PETN in einem Abstand von 14 m und der zweite Versuch mit 270 g PETN in einem Abstand von 5,6 m durchgeführt. Dies entspricht Belastungen von ungefähr 100 kg TNT in 25 m Entfernung bzw. 100 kg TNT in 15 m Entfernung bei Freifelddetonationen mit hemisphärischer Ausbreitung der Stoßwelle.

Zum Vergleich des Einflusses der drei Systeme auf das dynamische Verhalten der Stahlplatte wurde eine Stahlplatte ohne zusätzliche Aufbauten ebenfalls getestet. Diese Stahlplatte wird im Folgenden als Referenzplatte bezeichnet.

6.3 Ergebnisse der Versuche

Das Diagramm in Abbildung 6.4 zeigt die gemessenen Überdruck-Zeit-Verläufe für die Referenzplatte bei einer Belastung mit 270 g PETN in einem Abstand von 5,6 m. Die gemessenen Überdruck-Zeit-Verläufe für die weiteren Versuche sind im Anhang D.1 enthalten.

Bei der Referenzplatte liegt die Messebene I in derselben Ebene wie die Messebene II, da bei der Referenzplatte kein Fassadensystem vorhanden ist. Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass die Überdruck-Zeit-Verläufe in der Messebene I recht unterschiedlich sind. Eine ideale, planare Stoßwelle ist nicht vorhanden, da die Luftstoßwellen mehrfach an der Wand des Stollens reflektiert werden. Diese Reflexionen und ihre Auswirkungen auf die Überdruck-Zeit-Verläufe werden im Abschnitt 6.4.2 noch genauer diskutiert.

In der Abbildung 6.4 ist erkennbar, dass die in der Messebene III gemessenen Überdrücke im Vergleich zu den Überdrücken in den anderen Messebenen vernachlässigbar sind. Die Überdrücke in der Messebene III werden im Folgenden nicht weiter berücksichtigt.

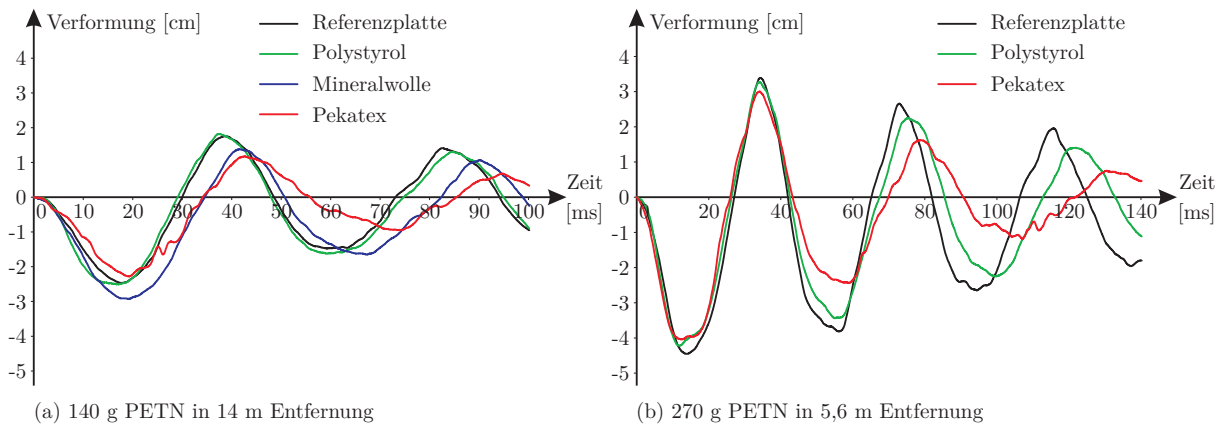


Abbildung 6.5: Verformungs-Zeit-Verläufe

Die Impuls-Zeit-Verläufe – als Integral des Überdrucks über die Zeit – werden im Anhang D.2 angegeben. Eine Auswertung und Zusammenfassung der Überdrücke und Impulse erfolgt im Abschnitt 6.4.1.

Die Abbildung 6.5 stellt die gemessenen Verformungs-Zeit-Verläufe dar. Auf diese Verformungen wird im Abschnitt 6.4.5 eingegangen.

Mit dem Mineralwolle-WDVS wurde kein zweiter Versuch mit 270 g PETN in einem Abstand von 5,6 m durchgeführt, da der Versuchskörper bereits im ersten Versuch zerstört wurde. Die Mineralwolle war zusammen mit Putz von der Stahlplatte abgerissen worden. Bei dem Polystyrolschaum-WDVS gab es nach dem ersten Versuch keine augenscheinlichen Schäden. Beim PEKATEX[®]-System hatte sich der Putz im oberen Bereich des Aufbaus leicht gelöst, befand sich aber noch am Versuchskörper. Sowohl das Polystyrolschaum-WDVS als auch das PEKATEX[®]-System wurden beim 2. Versuch zerstört. Beim Polystyrolschaum-WDVS war der Polystyrolschaum zusammen mit dem Putz von der Stahlplatte abgerissen worden. Beim PEKATEX[®]-System hatte sich der Putz vom PEKATEX[®] abgelöst. Das PEKATEX[®] blieb jedoch an der Stahlplatte haften.

6.4 Diskussion der Versuchsergebnisse

6.4.1 Auswertung der Ergebnisse

Die gemessenen Überdruck-Zeit-Verläufe weisen im Bereich der Stoßfront starke Oszillationen auf. Diese Oszillationen beruhen auf Messungenauigkeiten und sind in der abgebildeten Form nicht realistisch. Diese Oszillationen treten in mehr oder weniger ausgeprägter Form bei allen gemessenen Überdruck-Zeit-Verläufen auf. Wenn der Maximalwert der gemessenen Überdruck-Zeit-Verläufe als Spitzenüberdruck angenommen würde, dann würde der Spitzenüberdruck überschätzt werden. Eine Methode, die Oszillationen auszugleichen, besteht darin, im Bereich der Stoßfront eine Ausgleichsgerade in den abfallenden Ast zu legen und damit den Spitzenüberdruck zu bestimmen.

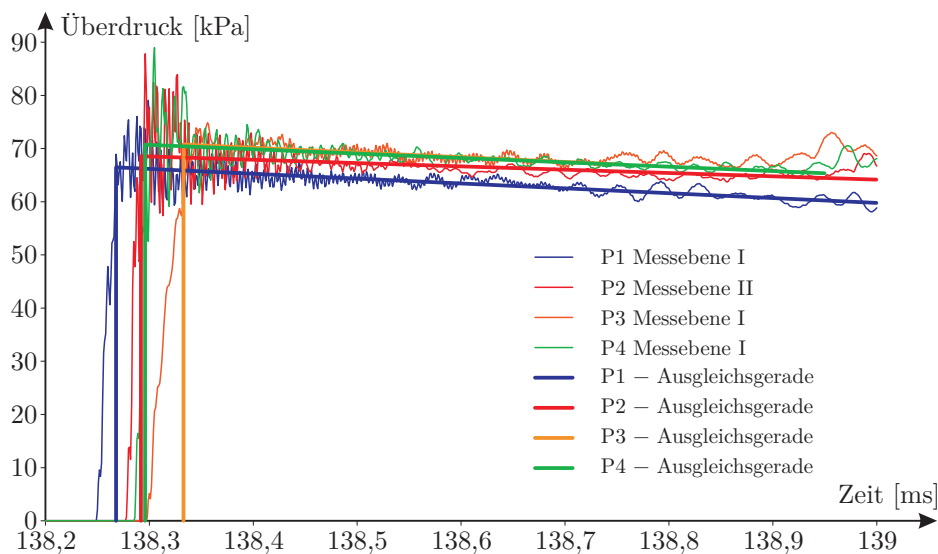


Abbildung 6.6: Überdruck-Zeit-Verläufe, Referenzplatte, 140 g PETN in 14 m Entfernung, Ausgleichsgeraden

Die Abbildung 6.6 verdeutlicht das Vorgehen anhand der Überdruck-Zeit-Verläufe der Referenzplatte mit 140 g PETN in 14 m Entfernung. Die Lage der Ausgleichsgeraden wurde mit der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Die Bereiche $138,268 \leq t \leq 139,000$, $138,292 \leq t \leq 139,000$, $138,333 \leq t \leq 138,750$ und $138,296 \leq t \leq 138,950$ dienten als Wertebereiche für die Ausgleichsgeraden der Sensoren P1, P2, P3 bzw. P4. Der erste Wert für t wurde dorthin gelegt, wo die Messkurven den Spitzenüberdruck der Ausgleichsgeraden erreichen. Der letzte Wert der Bereiche wurde so gewählt, dass die Kurve durch eine Ausgleichsgerade gut angepasst werden konnte. Der Spitzenüberdruck wurde nun durch den Maximalwert der Ausgleichsgerade ermittelt. Für die anderen Versuchskörper wurden die Spitzenüberdrücke in gleicher Weise ermittelt.

Die Tabelle 6.2 gibt die ermittelten Spitzenüberdrücke p_{ro} für die Sensoren P1 bis P4 in den Messebenen I und II an, wobei bei der Referenzplatte die Messebene II in der gleichen Ebene wie die Messebene I liegt. Die Streuungen der Spitzenüberdrücke in der Messebene I der jeweiligen Versuche sind deutlich erkennbar. Es treten Abweichungen bis zu ungefähr 20 % auf.

Die Tabelle 6.3 gibt die Mittelwerte der Spitzenüberdrücke aus Tabelle 6.2 an, wobei für die Referenzplatte die Messebene II mitberücksichtigt wurde, da sie mit der Messebene I identisch ist. Die Tabelle 6.3 enthält ebenfalls die Mittelwerte der maximalen Impulse. Die maximalen Impulse sind die Maximalwerte der Impuls-Zeit-Verläufe aus Anhang D.2.

6.4.2 Einfluss der Reflexionen an den Stoßrohrwänden

In der Tabelle 6.2 sind deutliche Abweichungen in den Spitzenüberdrücken in den einzelnen Messebenen zu erkennen. Was ist der Grund für diese Abweichungen? Dies wird im Folgenden

Tabelle 6.2: Spitzenüberdrücke, Sensoren P1 bis P4

Versuch	p_{ro} P1 [kPa]	p_{ro} P2 [kPa]	p_{ro} P3 [kPa]	p_{ro} P4 [kPa]
Stahlplatte 140 g PETN / 14 m	67	69	71	71
Polystyrol 140 g PETN / 14 m	75	-	81	78
Mineralwolle 140 g PETN / 14 m	71	-	80	72
PEKATEX [®] 140 g PETN / 14 m	77	8	80	75
Stahlplatte 270 g PETN / 5,6 m	257	213	233	228
Polystyrol 270 g PETN / 5,6 m	225	-	215	233
PEKATEX [®] 270 g PETN / 5,6 m	215	20	226	226

Tabelle 6.3: Spitzenüberdrücke und maximale Impulse, Messebene I, Mittelwerte

Versuch	p_{ro} [kPa]	I_{max} [Pa.s]
Stahlplatte 140 g PETN / 14 m	69	553
Polystyrol 140 g PETN / 14 m	78	585
Mineralwolle 140 g PETN / 14 m	74	570
PEKATEX [®] 140 g PETN / 14 m	77	570
Stahlplatte 270 g PETN / 5,6 m	233	988
Polystyrol 270 g PETN / 5,6 m	224	945
PEKATEX [®] 270 g PETN / 5,6 m	222	944

erläutert.

Die Abbildung 6.7 stellt die numerisch berechneten Druckverteilungen im Stoßrohr zu verschiedenen Zeiten t dar. Die numerischen Berechnungen wurden mit AUTODYN durchgeführt. Das Stoßrohr wurde zweidimensional mit Rotationssymmetrie modelliert. Die Berechnungen erfolgten mit EULER-FCT. Die Kantenlänge der Zellen betrug 10 mm. Zunächst wurde der Detonationsvorgang mit einem feiner vernetzten Modell (EULER-Multimaterial, Kantenlänge 0,5 mm) bis zu einer Zeit von $t = 0,63$ ms berechnet. Die Zündung des Sprengstoffes erfolgte zur Zeit $t = 0$ ms. Der Sprengstoff befand sich in der Mitte des Stoßrohres. Die berechneten Größen wurden auf das 2D-Modell übertragen (*remapping*). Die Wände des Stoßrohres wurden vereinfachend als starr angenommen.

Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass die Stoßwellen an der Mantelfläche des kreiszylinderartigen Stoßrohres reflektiert werden. Die Stoßwellen laufen wieder ins Innere des Stoßrohres und führen besonders nahe der Symmetrieachse zu großen Drücken. Dies resultiert aus den zusammenlaufenden Stoßwellen (*converging shock*). Auf die Probekörper trifft keine ideale, planare

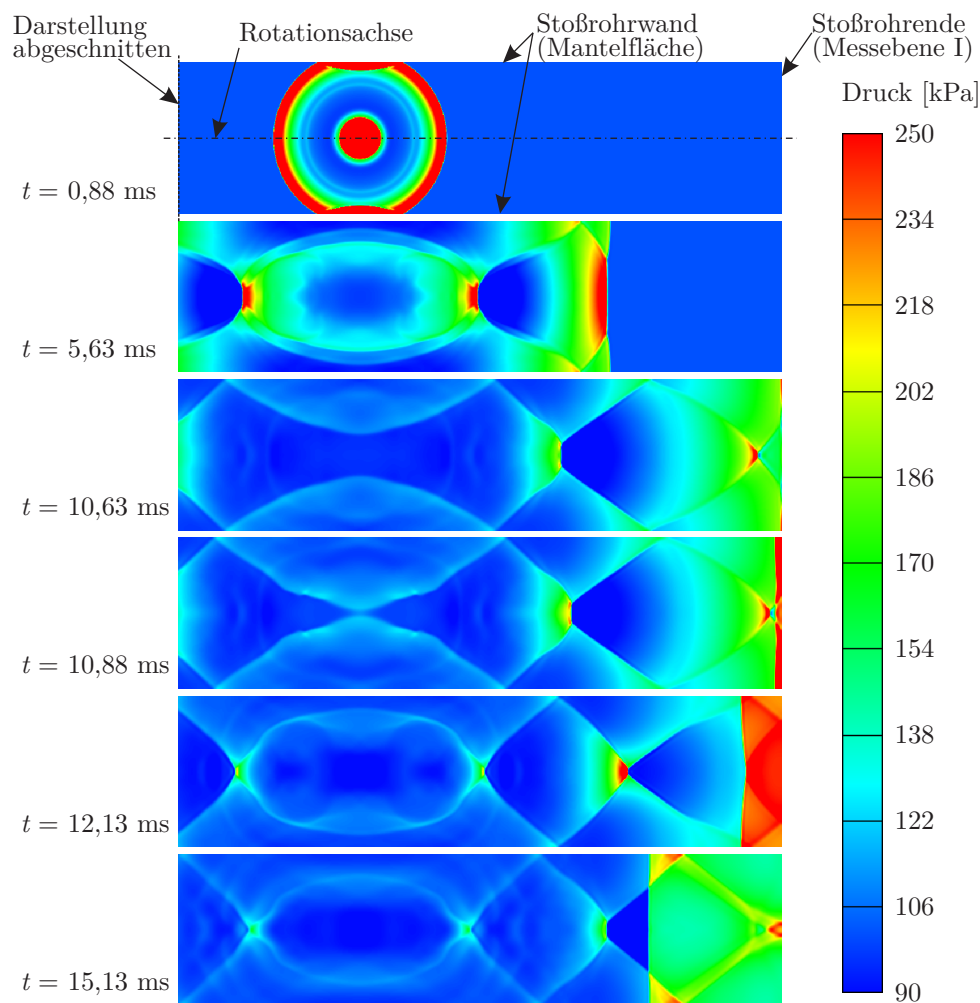


Abbildung 6.7: Stößrohr, numerische Berechnung der Druckausbreitung, 270 g PETN in 5,6 m Entfernung

Stoßwelle. Im realen Stößrohr werden die gleichen Effekte wie in der numerischen Berechnung auftreten, auch wenn in der Realität nicht alles so ideal symmetrisch angeordnet ist. Diese Effekte sind bei der Belastung von 270 g PETN in einer Entfernung von 5,6 m stärker ausgeprägt als bei der Belastung von 140 g PETN in einer Entfernung von 14 m. Je nach Position der Sensoren werden unterschiedliche Überdruck-Zeit-Verläufe gemessen. Dies ist also eine Begründung für die unterschiedlichen Spitzenüberdrücke in der Tabelle 6.2. Natürlich gibt es auch andere Gründe für die unterschiedlichen Spitzenüberdrücke, wie z. B. Messungenauigkeiten.

In der Abbildung 6.7 ist zu erkennen, dass durch die Reflexionen an der Mantelfläche zahlreiche Stoßfronten ausgebildet werden, die nacheinander auf die Messebene I treffen. Dadurch besteht der Überdruck-Zeit-Verlauf nicht nur aus einer Stoßfront mit einem monoton abfallenden Verlauf bis zur Unterdruckphase, sondern aus einer Vielzahl von sich überlagernden Stoßwellen (Abbildung 6.4).

Die numerische Berechnung in Abbildung 6.7 diente nicht dem Ziel, die Überdruck-Zeit-Verläufe

exakt nachzurechnen, sondern den Einfluss der Reflexionen an der Mantelfläche des Stoßrohrs zu zeigen. Dies wurde mit der numerischen Berechnung erreicht. Eine weitergehende Konvergenzstudie war nicht erforderlich.

6.4.3 Einfluss der Materialeigenschaften auf den reflektierten Spitzenüberdruck

Mit Blickrichtung auf den Abschnitt 4.4, in dem der Einfluss der Materialeigenschaften auf den reflektierten Spitzendruck untersucht wurde, ist eine Betrachtung des Spitzenüberdruckes an dieser Stelle erforderlich. Kann ein Einfluss der Materialeigenschaften auf den reflektierten Spitzenüberdruck festgestellt werden? Dies ist aus den folgenden drei Gründen nicht möglich:

1. Der Unterschied des reflektierten Spitzenüberdruckes an Stahl bzw. Fassadenputz ist zu gering. Dies wird deutlich, wenn die Reflexionsfaktoren an Stahl und Beton in Tabelle 4.2 verglichen werden, wobei der Reflexionsfaktor für Fassadenputz ähnlich wie für Beton ist.
2. Wie in Abschnitt 6.4.2 beschrieben wurde, liegt keine ideale, planare Stoßwelle vor. Deshalb gibt es Abweichungen zwischen den reflektierten Spitzenüberdrücken der einzelnen Sensoren (Tabelle 6.2).
3. Die Genauigkeit der Messungen ist nicht ausreichend.

Wegen der genannten Gründe ist mit den Versuchsergebnissen keine Validierung der Ergebnisse aus Abschnitt 4.4 möglich.

6.4.4 Einfluss der Materialeigenschaften auf den Druck an der Grenze Fassade zur Stahlplatte

Im Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, dass der Druck an der Grenze zwischen einem leichten und weichen Material (d. h. ein Material mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit) und der Tragstruktur durch die Materialeigenschaften des leichten, weichen Materials maßgebend beeinflusst wird. Der Druck an der Grenze kann durch die leichten, weichen Materialien vor der Tragstruktur im Vergleich zur direkten Reflexion der Luftstoßwelle an der Tragstruktur sogar erhöht werden. Im Abschnitt 4.6 wurde festgestellt, dass die Materialeigenschaften der Tragstruktur ebenfalls einen entscheidenden Einfluss auf den Druck an der Grenzschicht haben.

In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, wie durch die Fassadensysteme die Belastung auf die Stahlplatte im Vergleich zur Referenzplatte verändert wird.

Leider liegen bei den Fassadensystemen die Versuchsergebnisse der Messebene II nur für die PEKATEX[®]-Versuchskörper vor (Abbildungen D.5 und D.6). Die Aussagekraft dieser beiden Messkurven muss kritisch hinterfragt werden. Der Grund für diesen Zweifel ist der geringe maximale Impuls im Vergleich zur Messebene I (Abbildungen D.12 und D.13). Die maximalen Impulse der Messebene II der PEKATEX[®]-Probekörper betragen 145 Pa.s bzw. 316 Pa.s. Dies entspricht 25 % bzw. 33 % der Mittelwerte der maximalen Impulse der Messebene I (Tabelle 6.3).

Bei den PEKATEX[®]-Versuchskörpern beträgt der Anteil der Masse/Fläche der Stahlplatte mit 157 kg/m^2 ca. 76 % an der Gesamtmasse/Fläche (Tabelle 6.1). In dieser Größenordnung sollte auch der Anteil des auf die Stahlplatte übertragenen Impulses liegen. Das bedeutet, dass die gemessenen 25 % bzw. 33 % zu gering sind.

Ein weiterer Punkt, der Zweifel an der Aussagekraft der Messergebnisse in Messebene II aufkommen lässt, wird deutlich, wenn man sich die Abbildung 6.1 rechts betrachtet. Es sind deutlich die Stege beim PEKATEX[®]-System zu erkennen, die die Fassadenputzschicht mit dem tragenden System verbinden. Je nachdem, ob der Sensor direkt unter einem Steg oder zwischen den Stegen positioniert wurde, sind unterschiedliche Messkurven zu erwarten. Da die genaue Lage des Sensors nicht bekannt ist, kann eine genaue Auswertung der Messergebnisse nicht erfolgen. Eine Validierung der theoretischen Ergebnisse der Abschnitte 4.5 und 4.6 kann mit den vorliegenden Versuchsergebnissen leider nicht erfolgen.

6.4.5 Schutzwirkung der Fassadensysteme

Abschließend wird hier die Frage untersucht, ob eine Schutzwirkung der Fassadensysteme zu erkennen ist.

Diese Frage lässt sich beantworten, wenn die Verformungs-Zeit-Verläufe in der Abbildung 6.5 betrachtet werden. Die Tabelle 6.4 fasst die maximalen Verformungen der Versuche zusammen.

Tabelle 6.4: Maximale Verformungen der Stahlplatte (Absolutwerte)

Versuchskörper	140 g PETN / 14 m	270 g PETN / 5,6 m
Referenzplatte	2,47 cm	4,45 cm
Polystyrolschaum-WDVS	2,51 cm	4,22 cm
Mineralwolle-WDVS	2,93 cm	–
PEKATEX [®]	2,28 cm	4,04 cm

Die größten Verformungen im ersten Versuch mit 140 g PETN in einem Abstand von 14 m traten beim Mineralwolle-WDVS auf. Die maximale Verformung war 19 % größer als bei der Referenzplatte. Dies ist ein Beispiel, dass durch die falsche Wahl von Materialien die Wirkung von Explosionen verstärkt statt vermindert wird. Das Mineralwolle-WDVS versagte bereits beim ersten Versuch. Es ist für die Belastung des ersten Versuches das ungeeigneteste System der untersuchten Systeme.

Das Polystyrolschaum-WDVS wies im ersten Versuch größere Verformungen und beim zweiten Versuch geringere Verformungen als bei der Referenzplatte auf. Eine Schutzwirkung ist zumindest im ersten Versuch nicht zu erkennen. Da keine Materialdaten zu dem verwendeten Polystyrolschaum vorlagen, kann nicht festgestellt werden, ob und wann eine Kompaktion und somit eine Energieabsorption erfolgte.

Beim PEKATEX[®]-System traten sowohl im ersten als auch im zweiten Versuch geringere Verformungen als bei der Referenzplatte auf. Ein Vorteil des PEKATEX[®]-Systems ist, dass die

Putzschicht dicker als bei den anderen beiden Systemen war. Die dickere Putzschicht führt zu einer größeren Masse und damit zu einer geringeren übertragenen Energie (Abschnitt 2.2). Nach Aussage von Herrn Wintermantel von der PEKATEX GmbH ist es ein Vorteil von PEKATEX[®], dass es relativ große Lasten bis 88 kg/m^2 tragen kann. Somit kann es z. B. auch mit einer Fassade aus Klinker versehen werden. Diese großen Lasten können gezielt für den Explosionsschutz genutzt werden. Das PEKATEX[®]-System scheint von den untersuchten Systemen die größte Schutzwirkung zu besitzen. Das Tragverhalten des PEKATEX[®]-Systems bei Luftstoßwellenbelastung sollte zukünftig genauer untersucht werden.

6.5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wurden Versuche an Wärmedämmverbundsystemen (WDVS) vorgestellt. Die Versuche wurden an der WTD 52 im Auftrag der PEKATEX GmbH durchgeführt. Es wurde mir gestattet, die Daten für diese Dissertation zu verwenden. Mit den Daten der Versuche konnten die theoretischen Ergebnisse aus dem 4. Kapitel dieser Dissertation nicht validiert werden. Diese Versuche wurden trotzdem in diese Dissertation aufgenommen, da sie zeigen, dass Fassadensysteme zusätzlich zu ihrer Funktion als Wärmedämmung einen Schutz vor Explosionen bieten können. Es ist zu beachten, dass bei der falschen Wahl von Materialien kein Schutz sondern das Gegenteil erreicht wird. Für zukünftige Arbeiten auf diesem Gebiet geben diese Versuche einen Anhaltspunkt, wie zukünftige Versuche durchgeführt werden können und was dann beachtet werden muss.

Bei zukünftigen Versuchen sollten die Materialdaten erfasst werden. Dann können Materialien in der Planungsphase der Versuche so ausgewählt werden, dass die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen geeignet sind, um möglichst viel Energie aus der Luftstoßwelle zu absorbieren. Mit den Materialdaten besteht dann auch die Möglichkeit, die Versuche numerisch zu berechnen. Das Tragverhalten des PEKATEX[®]-Systems bei Luftstoßwellenbelastung sollte in Zukunft genauer untersucht werden, z. B. durch numerische Berechnungen oder Versuche in Stoßrohren.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Reflexion von Luftstoßwellen an nachgiebigen Materialien und Baustrukturen untersucht. Bei der Untersuchung der Reflexion von Luftstoßwellen an diesen Materialien hat sich gezeigt, dass der Einfluss der Materialparameter auf den Reflexionsfaktor beträchtlich ist. Es wurden Experimente an Fassadensystemen ausgewertet. Es zeigte sich, dass Fassadensysteme, die für Zwecke der Wärmedämmung verwendet werden, einen zusätzlichen Schutz vor Explosionen bieten können.

Zunächst wurde im 2. Kapitel dieser Arbeit ein Überblick über den Stand der Forschung gegeben. Dabei wurde ein bis in das 17. Jahrhundert reichender Rückblick auf die Entwicklung der wissenschaftlichen Erkenntnisse zu den Luftstoßwellen erstellt. Dieser Rückblick war für mich sehr lehrreich, und es ist empfehlenswert für alle Wissenschaftler, sich die Originalliteratur zu beschaffen und darin zu lesen.

Nachdem im Kapitel 3 die wichtigsten Grundlagen, die für diese Arbeit notwendig sind, angegeben wurden, wurde im 4. Kapitel der Einfluss der Materialeigenschaften auf die Reflexion von Luftstoßwellen untersucht. Es wurde gezeigt, dass Materialien mit geringer Dichte und geringer Steifigkeit zwar den reflektierten Druck in der reflektierten Luftstoßwelle reduzieren, aber der Druck auf Bauteile in manchen Fällen erhöht wird. Materialien wie Stahl, Glas oder Beton haben kaum einen Einfluss auf die Spitzendrücke in der Luftstoßwelle, weshalb sie bei der Berechnung der Reflexion von Luftstoßwellen oft als starr angenommen werden. Es wurde jedoch in dieser Arbeit erstmals gezeigt, dass die Materialeigenschaften von Stahl einen deutlichen Einfluss auf den Spitzendruck an der Grenze vom Stahl zum Material mit geringer Dichte und Steifigkeit haben. Wenn in diesem Fall der Stahl als starr angenommen wird, dann werden erheblich abweichende Ergebnisse mit Abweichungen bis über 30% erhalten. Dies sollte bei zukünftigen Untersuchungen berücksichtigt werden. Die durchgeführten analytischen Berechnungen ermöglichen beliebig genaue Ergebnisse für die gesuchten Größen. Diese Ergebnisse dienen damit als Referenz für numerische Konvergenzstudien.

Im Kapitel 5 wurden die analytischen Berechnungen auf den gesamten Überdruck-Zeit-Verlauf ausgeweitet. Für eine einfache Stoßwelle wurde die analytische Lösung auch für den abfallenden

Druck nach dem Spitzenüberdruck so weit wie möglich berechnet. Diese Lösung wurde mit einer numerischen Konvergenzstudie verglichen.

Im 6. Kapitel wurden Versuche an Wärmedämmverbundsystemen aus Mineralwolle, Polystyrolschaum und PEKATEX[®] ausgewertet. Diese Versuche sind ein Beispiel für die baupraktische Relevanz dieser Arbeit. Sie zeigen zum Einen, dass durch die falsche Wahl von Materialien die Wirkung von Explosionen verstärkt statt vermindert wird und zum Anderen, dass Fassadensysteme zusätzlich zu ihrer Funktion als Wärmedämmung auch einen Schutz vor Explosionen bieten können.

7.2 Ausblick

Diese Arbeit ist ein kleiner Schritt vorwärts von den unzählig vielen Schritten, die die Wissenschaft voranbringen. Es bleiben noch genügend Aufgaben offen. Die folgenden, abschließenden Gedanken zeigen einige offene Probleme auf, die im Zusammenhang mit dieser Arbeit stehen.

Im 4. Kapitel wurde der Einfluss der Materialeigenschaften auf den reflektierten Spitzenüberdruck in der Luftstoßwelle untersucht. Entscheidend ist jedoch nicht nur der reflektierte Spitzenüberdruck, sondern der gesamte reflektierte Überdruck-Zeit-Verlauf. Die analytischen Untersuchungen können dahin ausgeweitet werden, wie die Materialeigenschaften den gesamten Überdruck-Zeit-Verlauf beeinflussen.

Solche Untersuchungen sind auch für den Druck-Zeit-Verlauf an der Grenze eines Materials mit geringer Dichte und Steifigkeit zu einem Bauteil notwendig. Dabei ist die Dicke des nachgiebigen Materials zu berücksichtigen.

Um solche analytischen Berechnungen durchführen zu können, sind noch allgemeine analytische Lösungen der hyperbolischen Systeme partieller Differentialgleichungen für die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie notwendig.

Die Untersuchungen sollten auf kompaktierbare, poröse Materialien ausgeweitet werden. Dabei sollten die unterschiedlichen Komponenten von Schäumen, nämlich die festen und die gasförmigen Phasen, berücksichtigt werden. Dazu bieten sich mesomechanische, numerische Berechnungen an.

Es können weitere Experimente und Vergleiche mit den Ergebnissen der analytischen und numerischen Berechnungen durchgeführt werden. Hierfür sind besonders Experimente in Stoßrohren geeignet.

Ein Ziel ist auch die Konstruktion von Fassadensystemen, die optimal die Funktionen Wärmedämmung und Explosionsschutz kombinieren. Dabei muss auf die Planung und Abstimmung der Abmessungen und Materialeigenschaften mit der möglichen Explosionsbelastung geachtet werden.

Da das PEKATEX[®]-Fassadensystem in den angeführten Versuchen die besten Ergebnisse lieferte, ist eine genaue numerische Modellierung und Berechnung dieses Fassadensystems unter Luftstoßwellenbelastung interessant. Ein besonderes Augenmerk sollte auf die genaue Modellierung des Glasfasergitters gelegt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Ansorge, R.; Oberle, H. J.: *Mathematik für Ingenieure, Band 2*. Wiley-VCH, 2003.
- [2] Becker, R.: Stoßwelle und Detonation. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Bd. 8(1): S. 321–362, 1922.
- [3] Ben-Dor, G.: *Shock wave reflection phenomena*. Springer Verlag, 2007.
- [4] Benson, D. J.: Computational methods in lagrangian and eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 99(2-3): S. 235–394, 1992.
- [5] Bernoulli, D.: *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. Dulsecker, 1738.
- [6] Bestle, D.: *Technische Mechanik III: Schwingungen und Hydromechanik – Arbeitsunterlagen zur Vorlesung*. Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, 2009.
- [7] Bethe, H. A.: On the Theory of Shock Waves for an Arbitrary Equation of State. In Johnson, J. N.; Chéret, R. (Hg.), *Classic Papers in Shock Compression Science*, S. 421–492. Springer, 1942.
- [8] Boltzmann, L.: Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien*, Bd. 58: S. 517–560, 1868.
- [9] Boltzmann, L.: Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien*, Bd. 66: S. 275–370, 1872.
- [10] Boltzmann, L.: Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respective den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien*, Bd. 76: S. 373–435, 1877.
- [11] Book, D. L.; Boris, J. P.; Hain, K.: Flux-corrected transport II: Generalizations of the method. *Journal of Computational Physics*, Bd. 18(3): S. 248–283, 1975.

- [12] Boris, J. P.; Book, D. L.: Flux-corrected transport. I. SHASTA, A fluid transport algorithm that works. *Journal of Computational Physics*, Bd. 11(1): S. 38–69, 1973.
- [13] Boris, J. P.; Book, D. L.: Flux-corrected transport. III. Minimal-error FCT algorithms. *Journal of Computational Physics*, Bd. 20(4): S. 397–431, 1976.
- [14] Boyle, R.: *The Philosophical Works of the Honourable Robert Boyle Esq. Vol. II.* printed for W. and J. Innys; and J. Osborn, and T. Longman, London, 1725.
- [15] Bronstein, I.; Semendjajew, K.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 4. Aufl., 1999.
- [16] Brown, R.: A brief Account of Microscopical Observations made in the Month of June, July, and August 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies. *Edinburgh new Philosophical Journal*, S. 358–371, 1828.
- [17] Brush, S. G.: *Kinetic theory. Vol. 1. The nature of gases and of heat.* Pergamon Press, 1965.
- [18] Brush, S. G.: *The kind of motion we call heat. Book 1: Physics and the Atomists.* North Holland, 1976.
- [19] Brush, S. G.: *The kind of motion we call heat. Book 2: Statistical physics and irreversible processes.* North Holland, 1976.
- [20] Bureau International des Poids et Mesures: *Le Système international d'unités / The International System of Units.* STEDI Media, Paris, 8. Aufl., 2006. ISBN 92-822-2213-6.
- [21] Burmeister, A.; Rahm, H.; Ramm, E.: Dynamisches Verhalten von Bauteilen unter kurzzeitigen Einwirkungen. In *Baustatik-Baupraxis 9*, S. 97–108. TU Dresden, 2005.
- [22] Carnot, S.: *Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers.* Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 37, Reprint der Bände 37, 180 und 99. Verlag Harri Deutsch, 1. Aufl., 2003.
- [23] Century Dynamics Inc.: *Autodyn – Theory Manual - Revision 4.3.* Century Dynamics Inc., 2005.
- [24] Chorin, A.; Marsden, J.: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.* Springer, 1990.
- [25] Clausius, R.: Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. *Annalen der Physik und Chemie*, Bd. 155(3): S. 368–397, 1850.
- [26] Clausius, R.: Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. *Annalen der Physik und Chemie*, Bd. 155(4): S. 500–524, 1850.

- [27] Clausius, R.: Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie. *Annalen der Physik und Chemie*, Bd. 169(12): S. 481–506, 1854.
- [28] Clausius, R.: Ueber die mittlere Länge der Wege, welche bei der Molecularbewegung gasförmiger Körper von den einzelnen Moleculen zurückgelegt werden; nebst einigen anderen Bemerkungen über die mechanische Wärmetheorie. *Annalen der Physik und Chemie*, Bd. 105: S. 239–258, 1858.
- [29] Clausius, R.: Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. *Annalen der Physik und Chemie*, Bd. 201(7): S. 353–400, 1865.
- [30] Courant, R.; Friedrichs, K.; Lewy, H.: Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, Bd. 100(1): S. 32–74, 1928.
- [31] Defense Special Weapons Agency and the Joint Departments of the Army, Air Force, and Navy: *TM 5-855-1, Design and Analysis of Hardened Structures to Conventional Weapons Effects*, 1997.
- [32] DIN 1343: *Referenzzustand, Normzustand, Normvolumen – Begriffe und Werte*, 1990.
- [33] Earnshaw, S.: On the mathematical theory of sound. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Bd. 150: S. 133–148, 1860.
- [34] Einstein, A.: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, Bd. 17: S. 549–560, 1905.
- [35] Einstein, A.: Zur Theorie der Brownschen Bewegung. *Annalen der Physik*, Bd. 19: S. 371–381, 1906.
- [36] Emanuel, G.: *Analytical fluid dynamics*. CRC, 2001.
- [37] Eneström, G.: *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*. Teubner, Leipzig, 1913.
- [38] Euler, L.: Découverte d’un nouveau principe de mécanique. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, Bd. 6: S. 185–217, 1752.
- [39] Euler, L.: Nova methodus motum corporum rigidorum degerminandi. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Bd. 20: S. 208–238, 1776.
- [40] Euler, L.: *Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper*. Crusius, Leipzig, 1806.
- [41] Euler, L.: Neue Methode, die Bewegung starrer Körper zu bestimmen. In Wolfers, J. P. (Hg.), *Leonhard Euler’s Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper*, S. 571–595. 1853.

- [42] Euler, L.: *Opera Omnia, Ser. III, Bd. 1*. Teubner, 1926.
- [43] Euler, L.: *Opera Omnia, Ser. II, Bd. 12*. Orell Füssli, 1954.
- [44] Euler, L.: *Opera Omnia, Ser. II, Bd. 13*. Orell Füssli, 1955.
- [45] Evans, A.; Hutchinson, J.; Ashby, M.: Multifunctionality of cellular metal systems. *Progress in Materials Science*, Bd. 43(3): S. 171–221, 1999.
- [46] Fefferman, C. L.: Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. *The millennium prize problems*, S. 57–67, 2006.
- [47] Fellmann, E. A.: *Leonhard Euler*. Birkhäuser, 2007.
- [48] Fox, R.: *The Caloric Theory of Gases from Lavoisier to Regnault*. Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [49] Galilei, G.: *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, erster und zweiter Tag (1638)*. Aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von Arthur von Oettingen. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 11. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1890.
- [50] Galilei, G.: *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, dritter und vierter Tag (1638)*. Aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von Arthur von Oettingen. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 24. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1891.
- [51] Galilei, G.: *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, fünfter und sechster Tag (1638)*. Aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von Arthur von Oettingen. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 25. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1891.
- [52] Gallenmüller, M.: *Naturfaserverstärkter Polymerbeton - Entwicklung, Eigenschaften und Anwendung*. Dissertation, Fraunhofer EMI, Freiburg, 2006.
- [53] Gallenmüller, M.; Thoma, K.; Mayrhofer, C.: A new energy absorbing material protecting against blast loading. In *12th International Symposium on Interaction of the Effects of Munitions with Structures, New Orleans*. 2005.
- [54] Gay-Lussac, J.: Untersuchungen über die Ausdehnung der Gasarten und der Dämpfe durch die Wärme. In *Das Ausdehnungsgesetz der Gase*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 44. Verlag Harri Deutsch, 1997.
- [55] Gebbeken, N.: *Eine Fliessgelenktheorie höherer Ordnung für räumliche Stabtragwerke (zugleich ein Beitrag zur historischen Entwicklung)*. Dissertation, Institut für Statik der Universität Hannover, 1988.

- [56] Gebbeken, N.: *Zur Untersuchung des linearen Tragverhaltens von Faserverbundkonstruktionen mittels numerischer Methoden*. Habilitationsschrift, Universität der Bundeswehr München, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 96/1, 1996.
- [57] Gebbeken, N.; Döge, T.: Der Reflexionsfaktor bei der senkrechten Reflexion von Luftstoßwellen an starren und an nachgiebigen Materialien. *Bauingenieur*, Bd. 81(11): S. 496–503, 2006.
- [58] Gebbeken, N.; Döge, T.: Explosion protection—architectural design, urban planning and landscape planning. *International Journal of Protective Structures*, Bd. 1(1): S. 1–22, 2010.
- [59] Gebbeken, N.; Döge, T.; Larcher, M.: Sicherheit bei terroristischen Bedrohungen im öffentlichen Raum durch spezielle bauliche Lösungen. *Bautechnik*, Bd. 88(10): S. 668–676, 2011.
- [60] Gelfand, B. E.; Gubin, S. A.; Kogarko, S. M.; Popov, O. E.: Investigation of the special characteristics of propagation and reflection of pressure waves in a porous medium. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki (russisch)*, Bd. 6: S. 74–77, 1975.
- [61] Godunov, S. K.: Differenzenmethode zur numerischen Berechnung von diskontinuierlichen Lösungen hydrodynamischer Gleichungen. *Mat. Sb.*, Bd. 47: S. 271–306, 1959. (in Russisch).
- [62] Godunov, S. K.: Reminiscences about difference schemes. *Journal of Computational Physics*, Bd. 153: S. 6–25, 1999.
- [63] Gombosi, T.: *Gaskinetic theory*. Cambridge University Press, 1994.
- [64] Gottwald, S.: *Lexikon bedeutender Mathematiker*. Verlag Harri Deutsch, 1990.
- [65] Greulich, S.: *Zur numerischen Simulation von Stahlbeton- und Faserbetonstrukturen unter Detonationsbeanspruchung*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2004.
- [66] Grüneisen, E.: Zusammenhang zwischen Kompressibilität, thermischer Ausdehnung, Atomvolumen und Atomwärme der Metalle. *Annalen der Physik*, Bd. 331(7): S. 393–402, 1908.
- [67] Grüneisen, E.: Theorie des festen Zustandes einatomiger Elemente. *Annalen der Physik*, Bd. 344(12): S. 257–306, 1912.
- [68] Grüneisen, E.: Zustand des festen Körpers. In Geiger, H.; Scheel, K. (Hg.), *Handbuch der Physik*, Bd. X, S. 1–59. Springer, 1926.
- [69] von Guericke, O.: *Neue „magdeburgische“ Versuche über den leeren Raum (1672)*. Ostwald’s Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 59. Akademische Verlagsgesellschaft mbH, Leipzig, 1936.

- [70] von Guericke, O.: *Neue (sogenannte) Magdeburger Versuche über den leeren Raum*. VDI-Verlag, 1968.
- [71] Hanssen, A. G.; Enstock, L.; Langseth, M.: Close-range blast loading of aluminium foam panels. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 27(6): S. 593–618, 2002.
- [72] Harrigan, J. J.; Reid, S. R.; Yaghoubi, A. S.: The correct analysis of shocks in a cellular material. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 37(8): S. 918–927, 2010.
- [73] Haupt, P.: *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer, 2002.
- [74] Henderson, L. F.: Exact expressions for shock reflexion transition criteria in a perfect gas. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 62(6): S. 258–261, 1982.
- [75] Herrmann, W.: Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials. *Journal of Applied Physics*, Bd. 40(6): S. 2490–2499, 1969.
- [76] Hiermaier, S.: *Numerik und Werkstoffdynamik der Crash- und Impaktvorgänge*. Habilitationsschrift, Fraunhofer-Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut, Freiburg, 2003.
- [77] Hiermaier, S.: *Structures Under Crash and Impact: Continuum Mechanics, Discretization and Experimental Characterization*. Springer, 2008.
- [78] Hirsch, C.: *Numerical computation of internal and external flows*, Bd. 2 Computational methods for inviscid and viscous flows. John Wiley & Sons, 1990.
- [79] Hugoniot, H.: Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits. *Journal de l'École Polytechnique*, Bd. 57: S. 3–97, 1887.
- [80] Hugoniot, H.: Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits. *Journal de l'École Polytechnique*, Bd. 58: S. 1–125, 1889.
- [81] Igra, O.; Jiang, J. P.: Simulation of shock wave interaction with porous compressible foam. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, Bd. 223(3): S. 297–306, 2009.
- [82] Johnson, J. N.; Chéret, R.: *Classic papers in shock compression science*. Springer, 1998.
- [83] Joule, J. P.; Thomson, W.: On the Thermal Effects of Fluids in Motion – Part II. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Bd. 144: S. 321–364, 1854.
- [84] Kambouchev, N.; Noels, L.; Radovitzky, R.: Nonlinear compressibility effects in fluid-structure interaction and their implications on the air-blast loading of structures. *Journal of Applied Physics*, Bd. 100: S. 063519, 2006.
- [85] Kim, I. H.; Hong, S. H.; Jhung, K. S.; Oh, K.-H.; Yoon, Y. K.: Relationship among shock-wave velocity, particle velocity, and adiabatic exponent for dry air. *Journal of Applied Physics*, Bd. 70: S. 1048–1050, 1991.

- [86] Kinney, G. F.; Graham, K. J.: *Explosive Shocks in Air*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [87] Kitagawa, K.; Yasuhara, M.; Takayama, K.: Attenuation of shock waves propagating in polyurethane foams. *Shock Waves*, Bd. 15(6): S. 437–445, 2006.
- [88] Klein, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Chelsea Publishing Company, 1967.
- [89] Krehl, P. O. K.: *History of Shock Waves, Explosions and Impact: A Chronological and Biographical Reference*. Springer, 2009.
- [90] Lagrange, J.-L.: Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. In Serret, J.-A. (Hg.), *Ouvres de Lagrange*, Bd. 1, S. 151–332. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973.
- [91] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M.: *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [92] Laplace, P.-S.: Sur la Vitesse du Son dans l'air et dans l'eau. *Annales des Chimie et de Physique*, Bd. 3: S. 238–241, 1816.
- [93] van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*, Bd. 23(3): S. 276–299, 1977.
- [94] van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, Bd. 32(1): S. 101–136, 1979.
- [95] Lenihan, J. M. A.: Mersenne and Gassendi: An early chapter in the history of sound. *Acustica*, Bd. 1(2): S. 96–99, 1951.
- [96] Lenihan, J. M. A.: The velocity of sound in air. *Acustica*, Bd. 2(5): S. 205–212, 1952.
- [97] Li, Q. M.; Meng, H.: Attenuation or enhancement—a one-dimensional analysis on shock transmission in the solid phase of a cellular material. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 27(10): S. 1049–1065, 2002.
- [98] Lipkens, B.: Book review: Classic papers in shock compression science. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 111(3): S. 1143–1144, 2002.
- [99] Ma, G.; Ye, Z.: Energy absorption of double-layer foam cladding for blast alleviation. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 34(2): S. 329–347, 2007.
- [100] Mach, E.: Über den Verlauf der Funkenwellen in der Ebene und im Raume. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien*, Bd. 77: S. 819–838, 1878.
- [101] Mach, E.: *Die Mechanik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1976.

- [102] Mach, E.; Salcher, P.: Photographische Fixirung der durch Projectile in der Luft eingeleiteten Vorgänge. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien*, Bd. 95: S. 764–780, 1887.
- [103] Mach, E.; v. Weltrubský, J.: Über die Formen der Funkenwellen. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien*, Bd. 78: S. 551–560, 1879.
- [104] Main, J.; Gazonas, G.: Uniaxial crushing of sandwich plates under air blast: Influence of mass distribution. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 45(7-8): S. 2297–2321, 2008.
- [105] Maplesoft: *Maple 13.02*. Waterloo Maple Inc., 1981-2009.
- [106] Marsh, S. (Hg.): *LASL Shock Hugoniot Data*. University of California Press, Berkeley, 1980.
- [107] Maxwell, J.: Illustrations of the dynamical theory of gases. Part I. On the motions and collisions of perfectly elastic spheres. *Philosophical Magazine*, Bd. 19(124): S. 19–32, 1860.
- [108] Maxwell, J.: Illustrations of the dynamical theory of gases. Part II. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another. *Philosophical Magazine*, Bd. 20(130): S. 21–37, 1860.
- [109] Mayer, J. R.: Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. *Annalen der Chemie und Pharmacie*, Bd. 42(2): S. 233–240, 1842.
- [110] Mayer, J. R.: *Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel: Ein Beitrag zur Naturkunde*. Verlag der C. Drechsler'schen Buchhandlung, Heilbronn, 1845.
- [111] Mayer, J. R.: *Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme*. Verlag von Johann Ulrich Landherr, Heilbronn, 1851.
- [112] Mayer, J. R.: *Die Mechanik der Wärme*. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 180, Reprint der Bände 37, 180 und 99. Verlag Harri Deutsch, 1. Aufl., 2003.
- [113] Mayrhofer, C.: Methoden der dynamischen Grenztragfähigkeitsberechnung. In Thoma, K.; Gebbeken, N.; Thünemann, H. (Hg.), *Workshop "Bau-Protect" Bauliche Strukturen unter Belastung durch Impakt und Sprengwirkung*, S. 169 – 184. Fraunhofer-Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut, Freiburg, 2004.
- [114] Mazor, G.; Ben-Dor, G.; Igra, O.; Sorek, S.: Shock wave interaction with cellular materials – Part I: analytical investigation and governing equations. *Shock Waves*, Bd. 3(3): S. 159–165, 1994.

- [115] Meyers, M.A.: *Dynamic behavior of materials*. John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [116] Mie, G.: Zur kinetischen Theorie der einatomigen Körper. *Annalen der Physik*, Bd. 316(8): S. 657–697, 1903.
- [117] Möller, M.: *Hochauflösende FEM-FCT-Verfahren zur Diskretisierung von konvektionsdominanten Transportproblemen mit Anwendung auf die kompressiblen Eulergleichungen*. Diplomarbeit, Universität Dortmund, 2003.
- [118] Monti, R.: Normal shock wave reflection on deformable solid walls. *Meccanica*, Bd. 5(4): S. 285–296, 1970.
- [119] Müller, P. (Hg.): *Übungsbuch Physik*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 1996.
- [120] Navier, C. L. M. H.: Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des sciences*, Bd. 6: S. 389–440, 1823.
- [121] Nesterenko, V.: *Dynamics of Heterogeneous Materials*. Springer, 2001.
- [122] Nesterenko, V.: Shock (Blast) Mitigation by "Soft" Condensed Matter. In *MRS Symp. Proc., vol. 759, Pittsburgh, PA*. 2003.
- [123] von Neumann, J.; Richtmyer, R. D.: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, Bd. 21: S. 232–237, 1950.
- [124] Newton, I.: *Mathematische Principien der Naturlehre*. Oppenheim, Berlin, 1872.
- [125] Oertel, H.: *Stossrohre*. Springer-Verlag, 1966.
- [126] Parry, W. E.; Hooker, W. J.: *Appendix to Captain Parry's journal of a second voyage*. John Murray, 1825.
- [127] Peng, W.: *Modeling and simulation of interactions between blast waves and structures for blast wave mitigation*. Dissertation, University of Nebraska at Lincoln, 2009.
- [128] Perelman, G.: The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *Arxiv preprint math/0211159*, 2002.
- [129] Perelman, G.: Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. *Arxiv preprint math/0307245*, 2003.
- [130] Perelman, G.: Ricci flow with surgery on three-manifolds. *Arxiv preprint math/0303109*, 2003.
- [131] Planck, M.: Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Annalen der Physik*, Bd. 309(3): S. 553–563, 1901.

- [132] Poisson, S. D.: Mémoire sur la théorie du son. *Journal de l'École Polytechnique*, Bd. 14(7): S. 319–392, 1808.
- [133] Poisson, S. D.: On the Caloric of Gases and Vapours. *Philosophical Magazine*, Bd. 62: S. 328–338, 1823.
- [134] Poisson, S. D.: Sur la Chaleur des gaz et des vapeurs. *Annales des Chimie et de Physique*, Bd. 23: S. 337–352, 1823.
- [135] Rankine, W. J. M.: On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Bd. 160: S. 277–288, 1870.
- [136] Rayleigh, L.: Aerial plane waves of finite amplitude. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, Bd. 84(570): S. 247–284, 1910.
- [137] Reichenbach, H.: Contributions of Ernst Mach to fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Bd. 15(1): S. 1–28, 1983.
- [138] Reid, S. R.; Peng, C.: Dynamic uniaxial crushing of wood. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 19(5–6): S. 531–570, 1997.
- [139] Richter, R.: *Ansprengen von Fassadenelementen*. Techn. Ber., WTD 52, Oberjettenberg, 2006.
- [140] Riemann, B.: Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. *Abhandlungen der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1860.
- [141] Roe, P. L.: Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, Bd. 43(2): S. 357–372, 1981.
- [142] Ruppert, M.: *Zur numerischen Simulation von hochdynamisch beanspruchten Betonstrukturen*. Dissertation, Berichte des Konstruktiven Ingenieurbaus 00/4, Universität der Bundeswehr München, 2000.
- [143] Sachdev, P. L.: *Shock waves and explosions*, Bd. 132 von *Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [144] Salas, M. D.: The curious events leading to the theory of shock waves. *Shock Waves*, Bd. 16(6): S. 477–487, 2007.
- [145] Salas, M. D.; Iollo, A.: Entropy jump across an inviscid shock wave. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Bd. 8(5): S. 365–375, 1996.
- [146] Schlebusch, R.: *Theorie und Numerik einer oberflächenorientierten Schalenformulierung*. Dissertation, Technische Universität Dresden, Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke, Heft 3, 2005.

- [147] Schlote, K.-H.: *Chronologie der Naturwissenschaften*. Verlag Harri Deutsch, 2002.
- [148] Schneider, K.-J.: *Bautabellen für Ingenieure*. Werner Verlag, Düsseldorf, 15. Aufl., 2002.
- [149] Schott, C.: *Mechanica hydraulico-pneumatica*. Schönwetter, Francofurti, 1657.
- [150] Seitz, M. W.; Skews, B. W.: Effect of compressible foam properties on pressure amplification during shock wave impact. *Shock Waves*, Bd. 15(3): S. 177–197, 2006.
- [151] Seitz, M. W.; Skews, B. W.: An analytical model for shock wave impact on compressible open-cell foam. *Shock Waves*, Bd. 16(4): S. 287–298, 2007.
- [152] Serre, D.: *Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*. Cambridge University Press, 1999.
- [153] Skews, B. W.: The reflected pressure field in the interaction of weak shock waves with a compressible foam. *Shock Waves*, Bd. 1(3): S. 205–211, 1991.
- [154] Skews, B. W.; Atkins, M. D.; Seitz, M. W.: The impact of a shock wave on porous compressible foams. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 253: S. 245–265, 1993.
- [155] Skews, B. W.; Levy, A.; Levi-Hevroni, D.: Shock wave propagation in porous media. In Ben-Dor, G.; Igra, O.; Elperin, T. (Hg.), *Handbook of Shock Waves*, Bd. 2, S. 545–596. Academic Press, 2001.
- [156] von Smoluchowski, M.: Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. *Annalen der Physik*, Bd. 21: S. 756–780, 1906.
- [157] Sod, G.: A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, Bd. 27(1): S. 1–31, 1978.
- [158] Stein, E.; Barthold, F.-J.: Elastizitätstheorie. In Mehlhorn, G. (Hg.), *Der Ingenieurbau, Grundwissen: Werkstoffe, Elastizitätstheorie*, S. 165–428. Ernst & Sohn, 1997.
- [159] Stokes, G. G.: On a difficulty in the theory of sound. *Philosophical Magazine*, Bd. 33: S. 349–356, 1848.
- [160] Stokes, G. G.: On a difficulty in the theory of sound. *Mathematical and Physical Papers*, Bd. 2: S. 51–55, 1966.
- [161] Stokes, G. G.: On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. *Mathematical and Physical Papers*, Bd. 1: S. 75–129, 1966.
- [162] Szabó, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*. Birkhäuser Verlag, 1987.

- [163] Taylor, G. I.: The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases. In Batchelor, G. K. (Hg.), *The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, Vol III*, S. 1–6. Cambridge University Press, Cambridge, 1963.
- [164] Taylor, G. I.: The Propagation and Decay of Blast Waves. In Batchelor, G. K. (Hg.), *The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, Vol III*, S. 221–235. Cambridge University Press, Cambridge, 1963.
- [165] Thomson, W.: On an Absolute Thermometric Scale founded on Carnot’s Theory of the Motive Power of Heat, and calculated from Regnault’s Observations. *Philosophical Magazine*, Bd. 33: S. 313–317, 1848.
- [166] Thomson, W.: On the Dynamical Theory of Heat, with numerical results deduced from Mr. Joule’s equivalent of a Thermal Unit, and M. Regnault’s observations on Steam. *Philosophical Magazine*, Bd. 4: S. 105–117, 1852.
- [167] Thomson, W.: On the Dynamical Theory of Heat, with numerical results deduced from Mr. Joule’s equivalent of a Thermal Unit, and M. Regnault’s observations on Steam. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, Bd. 20: S. 261–288, 1853.
- [168] Thomson, W.: On the Dynamical Theory of Heat. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, Bd. 21: S. 123–171, 1857.
- [169] Thomson, W.: *Über die dynamische Theorie der Wärme*. Ostwald’s Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 193. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1914.
- [170] Toepler, A.: *Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode*. Max Cohen & Sohn, Bonn, 1864.
- [171] Toepler, A.: *Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode*. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 157. Engelmann, Leipzig, 1906.
- [172] Truesdell, C. A.: Zur Geschichte des Begriffes „innerer Druck“. *Physikalische Blätter*, Bd. 12, 1956.
- [173] Truesdell, C. A.: *Essays in the history of mechanics*. Springer, 1968.
- [174] Truesdell, C. A.: Rückwirkungen der Geschichte der Mechanik auf die moderne Forschung. *Humanismus und Technik*, Bd. 13(1): S. 1–25, 1969.
- [175] Webster, C.: Richard Towneley and Boyle’s Law. *Nature*, Bd. 197: S. 226–228, 1963.
- [176] Weyl, H.: Shock Waves in Arbitrary Fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Bd. 2(2-3): S. 103–122, 1949.
- [177] Wilson, D. B.: *The Correspondence between Sir George Gabriel Stokes and Sir William Thomson, Baron Kelvin of Largs, Volume 2: 1870-1901*. Cambridge University Press, 1990.

-
- [178] Witteveen, J. A. S.: Second order front tracking for the Euler equations. *Journal of Computational Physics*, Bd. 229(7): S. 2719–2739, 2010.
- [179] Zalesak, S. T.: Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *Journal of Computational Physics*, Bd. 31(3): S. 335–362, 1979.
- [180] Zilch, K.; Zehetmaier, G.: *Bemessung im konstruktiven Betonbau nach DIN 1045-1 und DIN EN 1992-1-1*. Springer, 2006.

Anhang A

Nachweis der Stoßbedingungen

Die Bedingung (4.8) ergibt für

$$p = K \mu + B \varrho_0 e \quad (\text{A.1})$$

mit $\mu = \frac{\varrho}{\varrho_0} - 1$, $\varrho = \frac{m}{V}$, $\varrho_0 = \frac{m}{V_0}$

$$p = K \mu + B \varrho_0 e = K \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) + B \varrho_0 e \quad (\text{A.2})$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_e = -\frac{K V_0}{V^2} < 0 \quad (\text{A.3})$$

Die Ungleichung (A.3) ist mit $K > 0$, $V_0 > 0$ und $V > 0$ erfüllt. Damit ist der Nachweis der Bedingung (4.8) erbracht.

Der Nachweis der Bedingung (4.6) wird mit Hilfe der Beziehung

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -p \quad (\text{A.4})$$

für isentrope Zustandsänderungen geführt.

Aus der Zustandsgleichung

$$p = K \mu + B \varrho_0 e \quad (\text{A.5})$$

mit $\varrho = \frac{m}{V}$, $\varrho_0 = \frac{m}{V_0}$, $\mu = \frac{\varrho}{\varrho_0} - 1 = \frac{V_0}{V} - 1$ und $e = \frac{U}{m}$ folgt

$$p = K \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) + B \frac{U}{V_0} \quad (\text{A.6})$$

$$U = \frac{V_0}{B} \left(p - K \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) \right) \quad (\text{A.7})$$

Damit folgt für isentrope Zustandsänderungen

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -p(V) = \frac{\partial \left(\frac{V_0}{B} \left(p(V) - K \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) \right) \right)}{\partial V} \quad (\text{A.8})$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung wurde mit MAPLE ermittelt und ist

$$p(V) = \left(K B \left(\frac{V_0 e^{\frac{BV}{V_0}}}{BV} + \text{Ei} \left(1, -\frac{BV}{V_0} \right) \right) + C_1 \right) e^{-\frac{BV}{V_0}} \quad (\text{A.9})$$

mit der Integralexponentialfunktion

$$\text{Ei} \left(1, -\frac{BV}{V_0} \right) = -\frac{BV}{V_0} \int_0^1 \int_0^1 e^{\frac{BV t_1 t_2}{V_0}} dt_1 dt_2 - C - \ln \left(-\frac{BV}{V_0} \right) \quad (\text{A.10})$$

und mit der EULERSchen Konstanten $C = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt = 0,5772156649 \dots$, womit

$$p(V) = \left(K B \left(\frac{V_0 e^{\frac{BV}{V_0}}}{BV} - \frac{BV}{V_0} \int_0^1 \int_0^1 e^{\frac{BV t_1 t_2}{V_0}} dt_1 dt_2 - C - \ln \left(-\frac{BV}{V_0} \right) \right) + C_1 \right) e^{-\frac{BV}{V_0}} \quad (\text{A.11})$$

für isentrope Zustandsänderungen erhalten wird. C_1 ist eine Konstante, die durch den Zustand des Materials im Ausgangszustand bestimmt wird.

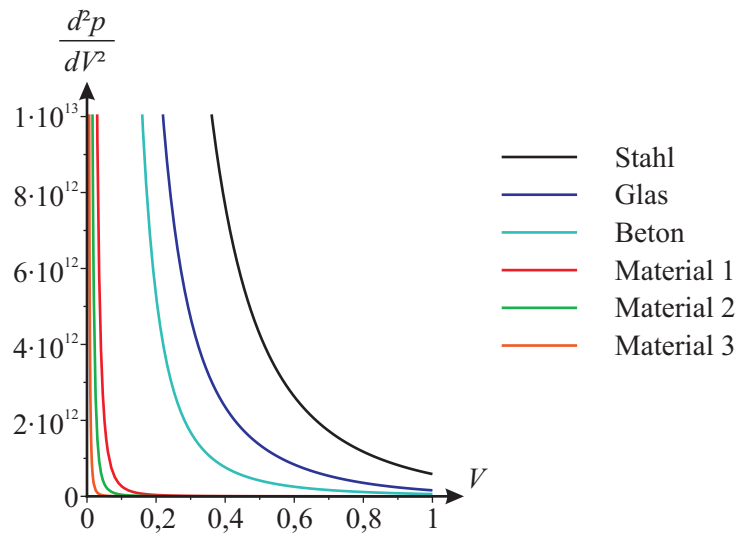


Abbildung A.1: Zustandsgleichung (A.1), Nachweis der Bedingung (4.6), Verlauf von $\left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_S$

Die Abbildung A.1 stellt $\left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_S$ für die Zustandsgleichung (A.1) mit den Materialparametern aus Tabelle 4.1 und für $p_0 = 101332 \text{ Pa}$ dar. Es ist erkennbar, dass alle Werte größer als Null sind und damit die Bedingung (4.6) erfüllt ist.

Anhang B

Berechnungen zum Reflexionsfaktor

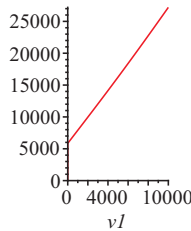
B.1 Planare Stoßwelle im Feststoff

Im folgenden wird die MAPLE-Berechnung aus Abschnitt 4.3 dargestellt.

```

> restart : Digits := 20 :
> G11 := q0·vs = q1·(vs - v1) :
> G12 := q0·vs·v1 = -(αxx1 - αxx0) :
> G13 := -αxx1·v1 = q0·vs·(e1 - e0 + 1/2·v1²) :
> e0 := p0/B :
> μ1 := q1/q0 - 1 :
> e1 := (p1 - (K1·μ1 + K2·μ1² + K3·μ1³)) / (B0 + B1·μ1) :
> p0 := -αxx0 : p1 := p0 - 1/3·(αxx1 - αxx0)·(1 + 2·v / (1 - v)) :
> vs := solve(G11, vs);
vs := - q1 v1 / (q0 - q1) (1)
> q1 := solve(G12, q1);
q1 := - q0 (-αxx1 + αxx0) / (q0 v1² + αxx1 - αxx0) (2)
> q0 := 7850 : E := 210000000000 : v := 28/100 : L := E·(1 - v) / ((1 + v)·(1 - 2·v)) : cL0 := sqrt(L/q0) :
K := E / (3·(1 - 2·v)) :
> B := 169/100 : B0 := B : B1 := B : K1 := K : S1 := (B + 1) / 2 : K2 := (1 + 2·(S1 - 1))·K : K3 := (2·(S1 - 1) + 3·(S1 - 1)²)·K :
> αxx0 := -101332 :
> tempvs := vs :
> unassign('vs') : αxx1 := solve(vs = tempvs, αxx1);
αxx1 := -7850 vs v1 - 101332 (3)
> vs := solve(G13, vs) :
> plot(vs, v1 = 0 .. 10000);

```



B.2 Der Reflexionsfaktor an nachgiebigen Materialien

Im Folgenden wird die MAPLE-Berechnung zum Abschnitt 4.4 dargestellt.

```

> restart : Digits := 40 :
> e1 :=  $\frac{p1}{(\gamma L - 1) \cdot q1}$  :
> e0 :=  $\frac{p0}{(\gamma L - 1) \cdot q0}$  :
> ME :=  $q1 \cdot (vs1 - v1) - q0 \cdot (vs1 - v0)$  :
> IE :=  $p1 - p0 - q0 \cdot (vs1 - v0) \cdot (v1 - v0)$  :
> EE :=  $e1 + \frac{p1}{q1} - e0 - \frac{p0}{q0} + \frac{(vs1 - v1)^2}{2} - \frac{vs1^2}{2}$  :
> v0 := 0 :
> #v1 := solve(IE = 0, v1);
> v1 :=  $\frac{p1 - p0}{q0 \cdot vs1}$  :
> #q1 := solve(ME = 0, q1);
> q1 :=  $\frac{q0^2 \cdot vs1^2}{q0 \cdot vs1^2 - p1 + p0}$  :
> #solve(EE = 0, vs1);
> vs1 :=  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{q0 \cdot (p0 \cdot \gamma L - p0 + p1 + p1 \cdot \gamma L)}}{q0}$  :
> #Reflexion
> e2 :=  $\frac{p2}{(\gamma L - 1) \cdot q2}$  :
> ME21 :=  $q2 \cdot (vs2 + v2) - q1 \cdot (vs2 + v1)$  :
> ME22 :=  $qm2 \cdot (vsm - v2) - vsm \cdot qm0$  :
> IE21 :=  $p2 - p1 + (vs2 + v2) \cdot q2 \cdot v2 - q1 \cdot (vs2 + v1) \cdot v1$  :
> IE22 :=  $p2 - p0 - qm2 \cdot (vsm - v2) \cdot v2$  :
> EE21 :=  $p1 \cdot v1 - p2 \cdot v2 - q1 \cdot (vs2 + v1) \cdot \left( e2 - e1 + \frac{(v2^2 - v1^2)}{2} \right)$  :
> EE22 :=  $qm0 \cdot vsm \cdot \left( em2 - em0 + \frac{1}{2} \cdot v2^2 \right) - p2 \cdot v2$  :
> pm0 := p0 : em0 :=  $\frac{pm0}{B \cdot qm0}$  :
> pm2 :=  $pm0 + \frac{1}{3} \cdot (p2 - pm0) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot v}{1 - v} \right)$  :  $\mu2 := \frac{qm2}{qm0} - 1$  : em2
:=  $\frac{pm2 - (K1 \cdot \mu2 + K2 \cdot \mu2^2 + K3 \cdot \mu2^3)}{(B0 + B1 \cdot \mu2) \cdot qm0}$  :
> qm0 := 10 : cL := 500 : L :=  $cL^2 \cdot qm0$  : v :=  $\frac{2}{10}$  : E :=  $\frac{L \cdot (1 + v) \cdot (1 - 2 \cdot v)}{(1 - v)}$  : K
:=  $\frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot v)}$  :
> B :=  $\frac{12}{10}$  : B0 := B : B1 := B : K1 := K : S :=  $\frac{B + 1}{2}$  : K2 :=  $(1 + 2 \cdot (S - 1)) \cdot K$  : K3

```

```

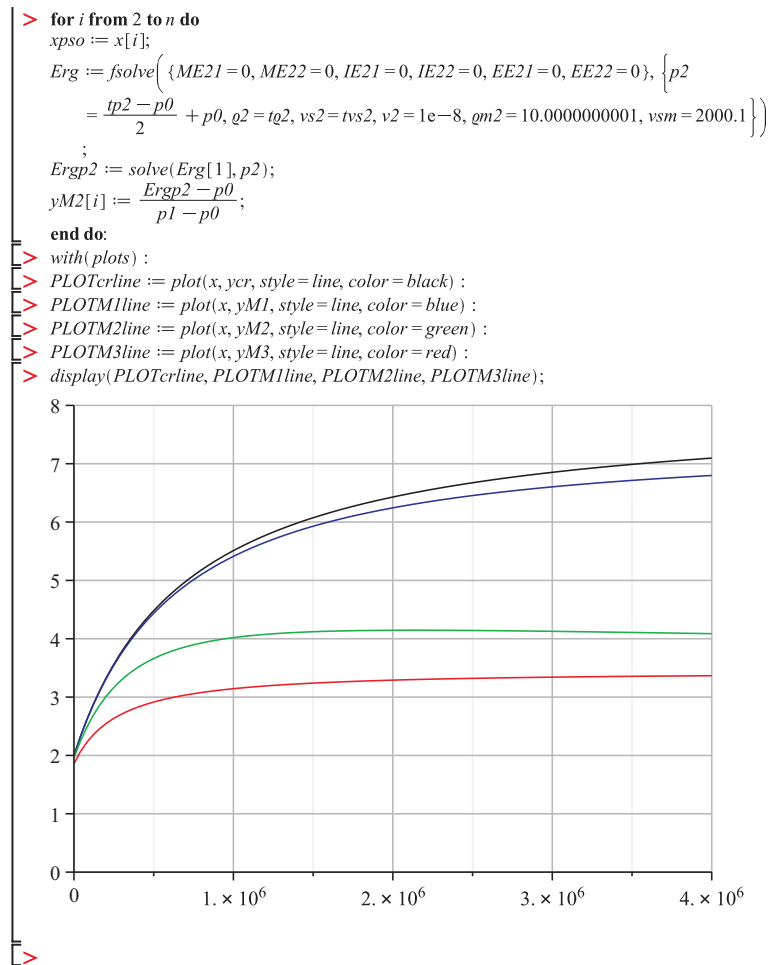
:= (2·(S-1) + 3·(S-1)2)·K :
> p0 := 101332 : q0 :=  $\frac{1225}{1000}$  :  $\gamma_L := \frac{7}{5}$  : p1 := xps0 + p0 :
:=
> tp2 :=  $p1 \cdot \frac{p1 \cdot (3 \cdot \gamma_L - 1) - p0 \cdot (\gamma_L - 1)}{p1 \cdot (\gamma_L - 1) + p0 \cdot (\gamma_L + 1)}$  :
> tq2
:=  $(q0 \cdot (p1 \cdot p0 \cdot \gamma_L - tp2 \cdot p0 \cdot \gamma_L + tp2 \cdot p0 - p1 \cdot p0 - tp2 \cdot p1 \cdot \gamma_L + p1^2 \cdot \gamma_L - tp2 \cdot p1 + p1^2)) / ((2 \cdot p0^2 + p1 \cdot p0 \cdot \gamma_L - tp2 \cdot p0 \cdot \gamma_L - 3 \cdot p1 \cdot p0 - tp2 \cdot p0 + p1^2 \cdot \gamma_L - tp2 \cdot p1 \cdot \gamma_L + tp2 \cdot p1 + p1^2))$  :
> tvs2
:=  $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{q0 \cdot (p0 \cdot \gamma_L - p0 + p1 + p1 \cdot \gamma_L) \cdot (-p1 + p0) - tp2 \cdot p0 \cdot \gamma_L - 3 \cdot p1 \cdot p0 - tp2 \cdot p0 + p1^2 \cdot \gamma_L - tp2 \cdot p1 \cdot \gamma_L + tp2 \cdot p1 + p1^2}} \sqrt{2}$  :
with(LinearAlgebra) :
> n := 101 : x := Vector(n) : yM3 := Vector(n) : ycr := Vector(n) :
> xa := 0 : xe := 4000000 :
> for i from 1 to n do x[i] := xa + (i-1) ·  $\frac{xe - xa}{n-1}$  end do :
> ycr[1] := 2 : yM3[1] := 1.8573435230764 :
> for i from 2 to n do
xps0 := x[i];
Erg := fsolve({ME21=0, ME22=0, IE21=0, IE22=0, EE21=0, EE22=0}, {p2
=  $\frac{tp2 - p0}{2} + p0$ , q2 = tq2, vs2 = tvs2, v2 = 47, qm2 = 10.8, vsm = 620});
Ergp2 := solve(Erg[1], p2);
yM3[i] :=  $\frac{Ergp2 - p0}{p1 - p0}$ ;
ycr[i] :=  $\frac{8 \cdot p1 + 6 \cdot p0}{p1 + 6 \cdot p0}$ ;
end do :
> #Material 1
> qm0 := 1000 : cL := 500 : L := cL2·qm0 : v :=  $\frac{2}{10}$  : E :=  $\frac{L \cdot (1+v) \cdot (1-2 \cdot v)}{(1-v)}$  : K
:=  $\frac{E}{3 \cdot (1-2 \cdot v)}$  :
> B :=  $\frac{12}{10}$  : B0 := B : B1 := B : K1 := K : S :=  $\frac{B+1}{2}$  : K2 := (1+2·(S-1))·K : K3
:= (2·(S-1) + 3·(S-1)2)·K :
> p0 := 101332 : q0 :=  $\frac{1225}{1000}$  :  $\gamma_L := \frac{7}{5}$  : unassign('xps0') : p1 := xps0 + p0 :
> tp2 :=  $p1 \cdot \frac{p1 \cdot (3 \cdot \gamma_L - 1) - p0 \cdot (\gamma_L - 1)}{p1 \cdot (\gamma_L - 1) + p0 \cdot (\gamma_L + 1)}$  :
> tq2

```

```

:= (q0*(p1*p0*gamma - tp2*p0*gamma + tp2*p0 - p1*p0 - tp2*p1*gamma + p1^2*gamma - tp2*p1
+ p1^2)) / (2*p0^2 + p1*p0*gamma - tp2*p0*gamma - 3*p1*p0 - tp2*p0 + p1^2*gamma - tp2*p1*gamma + tp2*p1
+ p1^2) :
> tvs2
:= 1/2 * 1 / (sqrt(q0*(p0*gamma - p0 + p1 + p1*gamma) * (-p1 + p0) * (2*p0^2 + p1*p0*gamma
- tp2*p0*gamma - 3*p1*p0 - tp2*p0 + p1^2*gamma - tp2*p1*gamma + tp2*p1 + p1^2) * sqrt(2))) :
> yMI := Vector(n) :
> yMI[1] := 1.99833537345313 :
> for i from 2 to n do
  xps0 := x[i];
  Erg := fsolve({ME21=0, ME22=0, IE21=0, IE22=0, EE21=0, EE22=0}, {p2
    = (tp2 - p0) / 2 + p0, q2 = tq2, vs2 = tvs2, v2 = 1e-8, qm2 = 1000.0000000001, vsm = 500.44}
  );
  Ergp2 := solve(Erg[1], p2);
  yMI[i] := (Ergp2 - p0) / (p1 - p0);
end do;
> #Material 2
> qm0 := 10 : cL := 2000 : L := cL^2 * qm0 : v := 2/10 : E := (L * (1 + v) * (1 - 2 * v)) / (1 - v) : K
:= E / (3 * (1 - 2 * v)) :
> B := 12/10 : B0 := B : B1 := B : K1 := K : S := (B + 1) / 2 : K2 := (1 + 2 * (S - 1)) * K : K3
:= (2 * (S - 1) + 3 * (S - 1)^2) * K :
> p0 := 101332 : q0 := 1225/1000 : gamma := 7/5 : unassign('xps0') : p1 := xps0 + p0 :
> tp2 := p1 * (p1 * (3 * gamma - 1) - p0 * (gamma - 1)) / (p1 * (gamma - 1) + p0 * (gamma + 1)) :
> tq2
:= (q0 * (p1 * p0 * gamma - tp2 * p0 * gamma + tp2 * p0 - p1 * p0 - tp2 * p1 * gamma + p1^2 * gamma - tp2 * p1
+ p1^2)) / (2 * p0^2 + p1 * p0 * gamma - tp2 * p0 * gamma - 3 * p1 * p0 - tp2 * p0 + p1^2 * gamma - tp2 * p1 * gamma + tp2 * p1
+ p1^2) :
> tvs2
:= 1/2 * 1 / (sqrt(q0 * (p0 * gamma - p0 + p1 + p1 * gamma) * (-p1 + p0) * (2 * p0^2 + p1 * p0 * gamma
- tp2 * p0 * gamma - 3 * p1 * p0 - tp2 * p0 + p1^2 * gamma - tp2 * p1 * gamma + tp2 * p1 + p1^2) * sqrt(2))) :
> yM2 := Vector(n) :
> yM2[1] := 1.959384848879 :

```



B.3 Reflexion der Stoßwelle im Feststoff an starrer Wand

Im Folgenden wird die MAPLE-Berechnung zum Abschnitt 4.5 dargestellt.

```

> restart : Digits := 40 :
> e1 :=  $\frac{p1}{(\gamma L - 1) \cdot q1}$  :
> e0 :=  $\frac{p0}{(\gamma L - 1) \cdot q0}$  :
> ME :=  $q1 \cdot (vs1 - v1) - q0 \cdot (vs1 - v0)$  :
> IE :=  $p1 - p0 - q0 \cdot (vs1 - v0) \cdot (v1 - v0)$  :
> EE :=  $e1 + \frac{p1}{q1} - e0 - \frac{p0}{q0} + \frac{(vs1 - v1)^2}{2} - \frac{vs1^2}{2}$  :
> v0 := 0 :
> #v1 := solve(IE = 0, v1);
> v1 :=  $\frac{p1 - p0}{q0 \cdot vs1}$  :
> #q1 := solve(ME = 0, q1);
> q1 :=  $\frac{q0^2 \cdot vs1^2}{q0 \cdot vs1^2 - p1 + p0}$  :
> #solve(EE = 0, vs1);
> vs1 :=  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{q0 \cdot (p0 \cdot \gamma L - p0 + p1 + p1 \cdot \gamma L)}}{q0}$  :
> #Reflexion
> e2 :=  $\frac{p2}{(\gamma L - 1) \cdot q2}$  :
> ME21 :=  $q2 \cdot (vs2 + v2) - q1 \cdot (vs2 + v1)$  :
> ME22 :=  $qm2 \cdot (vsm - v2) - vsm \cdot qm0$  :
> IE21 :=  $p2 - p1 + (vs2 + v2) \cdot q2 \cdot v2 - q1 \cdot (vs2 + v1) \cdot v1$  :
> IE22 :=  $p2 - p0 - qm2 \cdot (vsm - v2) \cdot v2$  :
> EE21 :=  $p1 \cdot v1 - p2 \cdot v2 - q1 \cdot (vs2 + v1) \cdot \left( e2 - e1 + \frac{(v2^2 - v1^2)}{2} \right)$  :
> EE22 :=  $qm0 \cdot vsm \cdot \left( em2 - em0 + \frac{1}{2} \cdot v2^2 \right) - p2 \cdot v2$  :
> pm0 := p0 : em0 :=  $\frac{pm0}{B \cdot qm0}$  :
> pm2 :=  $pm0 + \frac{1}{3} \cdot (p2 - pm0) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot v}{1 - v} \right)$  :  $\mu2 := \frac{qm2}{qm0} - 1$  : em2
:=  $\frac{pm2 - (K1 \cdot \mu2 + K2 \cdot \mu2^2 + K3 \cdot \mu2^3)}{(B0 + B1 \cdot \mu2) \cdot qm0}$  :
> qm0 := 10 : cL := 500 : L :=  $cL^2 \cdot qm0$  : v :=  $\frac{2}{10}$  : E :=  $\frac{L \cdot (1 + v) \cdot (1 - 2 \cdot v)}{(1 - v)}$  : K
:=  $\frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot v)}$  :
> B :=  $\frac{12}{10}$  : B0 := B : B1 := B : K1 := K : S :=  $\frac{B + 1}{2}$  : K2 :=  $(1 + 2 \cdot (S - 1)) \cdot K$  : K3

```

```

:= (2·(S-1) + 3·(S-1)2)·K :
> p0 := 101332 : q0 :=  $\frac{1225}{1000}$  :  $\gamma_L := \frac{7}{5}$  : p1 := 3400000 + p0 :
> tp2 :=  $p1 \cdot \frac{p1 \cdot (3 \cdot \gamma_L - 1) - p0 \cdot (\gamma_L - 1)}{p1 \cdot (\gamma_L - 1) + p0 \cdot (\gamma_L + 1)}$  :
> tq2
:=  $(q0 \cdot (p1 p0 \gamma_L - tp2 p0 \gamma_L + tp2 p0 - p1 p0 - tp2 p1 \gamma_L + p1^2 \gamma_L - tp2 p1 + p1^2)) / (2 p0^2 + p1 p0 \gamma_L - tp2 p0 \gamma_L - 3 p1 p0 - tp2 p0 + p1^2 \gamma_L - tp2 p1 \gamma_L + tp2 p1 + p1^2)$  :
> tvs2
:=  $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{q0 \cdot (p0 \gamma_L - p0 + p1 + p1 \gamma_L) (-p1 + p0) - tp2 p0 \gamma_L - 3 p1 p0 - tp2 p0 + p1^2 \gamma_L - tp2 p1 \gamma_L + tp2 p1 + p1^2} \sqrt{2}}$  :
> Ergebnis := fsolve({ME21=0, ME22=0, IE21=0, IE22=0, EE21=0, EE22=0}, {p2
=  $\frac{(tp2 - p0)}{2} + p0$ , q2 = tq2, vs2 = tvs2, v2 = 0.00000001, qm2 = 10.0000000001, vsm
= 542.758});
Ergebnis := {p2 = 1.150345781856982151671693091642619352258 107, v2
= 657.4630639325795619245132933834953535180, vs2
= 23.14360035848945413728903576795745397150, vsm
= 1734.261047361143912446515494715882349155, q2
= 14.03698830389232800257162072712321122975, qm2
= 16.10572339520169795666632770533150079964}
> p2 := solve(Ergebnis[1], p2) : cr :=  $\frac{p2 - p0}{p1 - p0}$  :
>  $\alpha_{x2} := -p2 : qm2 := solve(Ergebnis[6], qm2) : v2$ 
:=  $\sqrt{2 \cdot (-\alpha_{x2} \cdot \frac{qm2 - qm0}{qm0 \cdot qm2} + em0 - em2)}$  :
> #Reflexion an starrer Wand
> EM3 := qm2·(vsm3 + v2) - qm3·vsm3 :
> EI3 := qm2·(vsm3 + v2)·v2 + ( $\alpha_{x3} - \alpha_{x2}$ ) :
> EE3 := qm3·vsm3·( $em3 - em2 - \frac{1}{2} \cdot v2^2$ ) +  $\alpha_{x2} \cdot v2$  :
>  $\alpha_{x0} := -pm0$  :
>  $pm3 := pm0 - \frac{1}{3} \cdot (\alpha_{x3} - \alpha_{x0}) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot v}{1 - v}\right)$  :
>  $\mu3 := \frac{qm3}{qm0} - 1 : em3 := \frac{pm3 - (K1 \cdot \mu3 + K2 \cdot \mu3^2 + K3 \cdot \mu3^3)}{(B0 + B1 \cdot \mu3) \cdot qm0}$  :
> Erg := fsolve({EM3, EI3, EE3}, {vsm3=1400,  $\alpha_{x3} = 2.5 \cdot \alpha_{x2}$ , qm3=19});
Erg := {vsm3 = 1988.810085910560828307404749740209474849,  $\alpha_{x3} =$ 
-3.952462787011669790935695144885316320720 107, qm3
= 21.42997145954711009398501721201708831622}
>  $\alpha_{x3} := Re(solve(Erg[2], \alpha_{x3}))$  :
>  $crm := \frac{\alpha_{x3} - \alpha_{x0}}{\alpha_{x2} - \alpha_{x0}} : evalf(crm)$  :
>  $cr2 := \frac{-\alpha_{x3} - p0}{p1 - p0} : evalf(cr2)$  :
11.59508702062255820863439748495681270800

```

(1)

(2)

(3)

B.4 Reflexion der Stoßwelle im Feststoff an nachgiebiger Wand

Im Folgenden wird die MAPLE-Berechnung zum Abschnitt 4.6 dargestellt.

```

> restart : Digits := 40 :
> e1 :=  $\frac{p1}{(\gamma L - 1) \cdot q1}$  :
> e0 :=  $\frac{p0}{(\gamma L - 1) \cdot q0}$  :
> ME :=  $q1 \cdot (vs1 - v1) - q0 \cdot (vs1 - v0)$  :
> IE :=  $p1 - p0 - q0 \cdot (vs1 - v0) \cdot (v1 - v0)$  :
> EE :=  $e1 + \frac{p1}{q1} - e0 - \frac{p0}{q0} + \frac{(vs1 - v1)^2}{2} - \frac{vs1^2}{2}$  :
> v0 := 0 :
> #v1 := solve(IE = 0, v1);
> v1 :=  $\frac{p1 - p0}{q0 \cdot vs1}$  :
> #q1 := solve(ME = 0, q1);
> q1 :=  $\frac{q0^2 \cdot vs1^2}{q0 \cdot vs1^2 - p1 + p0}$  :
> #solve(EE = 0, vs1);
> vs1 :=  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{q0 \cdot (p0 \cdot \gamma L - p0 + p1 + p1 \cdot \gamma L)}}{q0}$  :
> #Reflexion
> e2 :=  $\frac{p2}{(\gamma L - 1) \cdot q2}$  :
> ME21 :=  $q2 \cdot (vs2 + v2) - q1 \cdot (vs2 + v1)$  :
> ME22 :=  $qm2 \cdot (vsm - v2) - vsm \cdot qm0$  :
> IE21 :=  $p2 - p1 + (vs2 + v2) \cdot q2 \cdot v2 - q1 \cdot (vs2 + v1) \cdot v1$  :
> IE22 :=  $p2 - p0 - qm2 \cdot (vsm - v2) \cdot v2$  :
> EE21 :=  $p1 \cdot v1 - p2 \cdot v2 - q1 \cdot (vs2 + v1) \cdot \left( e2 - e1 + \frac{(v2^2 - v1^2)}{2} \right)$  :
> EE22 :=  $qm0 \cdot vsm \cdot \left( em2 - em0 + \frac{1}{2} \cdot v2^2 \right) - p2 \cdot v2$  :
> pm0 := p0 : em0 :=  $\frac{pm0}{B \cdot qm0}$  :
> pm2 :=  $pm0 + \frac{1}{3} \cdot (p2 - pm0) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot v}{1 - v} \right)$  :  $\mu2 := \frac{qm2}{qm0} - 1$  : em2
:=  $\frac{pm2 - (K1 \cdot \mu2 + K2 \cdot \mu2^2 + K3 \cdot \mu2^3)}{(B0 + B1 \cdot \mu2) \cdot qm0}$  :
> qm0 := 10 : cL := 500 : L :=  $cL^2 \cdot qm0$  : v :=  $\frac{2}{10}$  : E :=  $\frac{L \cdot (1 + v) \cdot (1 - 2 \cdot v)}{(1 - v)}$  : K
:=  $\frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot v)}$  :
> B :=  $\frac{12}{10}$  : B0 := B : B1 := B : K1 := K : S :=  $\frac{B + 1}{2}$  : K2 :=  $(1 + 2 \cdot (S - 1)) \cdot K$  : K3

```

```

:= (2·(S-1) + 3·(S-1)2)·K:
> p0 := 101332 : q0 :=  $\frac{1225}{1000}$  :  $\gamma_L := \frac{7}{5}$  : p1 := 4000000 + p0 :
> tp2 :=  $p1 \cdot \frac{p1 \cdot (3 \cdot \gamma_L - 1) - p0 \cdot (\gamma_L - 1)}{p1 \cdot (\gamma_L - 1) + p0 \cdot (\gamma_L + 1)}$  :
> tq2
:= (q0·(p1 p0  $\gamma_L$  - tp2 p0  $\gamma_L$  + tp2 p0 - p1 p0 - tp2 p1  $\gamma_L$  + p12  $\gamma_L$  - tp2 p1
+ p12)) / (2 p02 + p1 p0  $\gamma_L$  - tp2 p0  $\gamma_L$  - 3 p1 p0 - tp2 p0 + p12  $\gamma_L$  - tp2 p1  $\gamma_L$  + tp2 p1
+ p12) :
> tvs2
:=  $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{q0 \cdot (p0 \gamma_L - p0 + p1 + p1 \gamma_L) \cdot (-p1 + p0) - tp2 p0 \gamma_L - 3 p1 p0 - tp2 p0 + p1^2 \gamma_L - tp2 p1 \gamma_L + tp2 p1 + p1^2} \sqrt{2}}$  :
> Ergebnis1 := fsolve({ME21=0, ME22=0, IE21=0, IE22=0, EE21=0, EE22=0}, {p2
=  $\frac{tp2 - p0}{2} + p0$ , q2 = tq2, vs2 = tvs2, v2 = 10, qm2 = 10.1, vsm = 501});
Ergebnis1 := {p2 = 1.356715655437491128531258240452297547875 107, v2
= 722.8422036809098919406006638317276105201, vs2
= 5.411391757018056806041360869185367048343, vsm
= 1862.899604616782952358215945004801543257, q2
= 14.39611994760674850790910243392916124276, qm2
= 16.34040183492102033624009438724507579627}
> p2 := solve(Ergebnis1[1], p2) : cr :=  $\frac{p2 - p0}{p1 - p0}$  :
#Reflexion an Stahl
> EMm3 := qm32·(vsm33 + vm32) - qm33·(vsm33 + v3) :
> EMm4 := qm40·vsm43 - qm43·(vsm43 - v3) :
> EIm3 := qm32·(vsm33 + vm32)·(vm32 - v3) + (αxx3 - αxx2) :
> EIm4 := qm40·vsm43·v3 + (αxx3 - αxx0) :
> EEm3 := -(αxx2·vm32 - αxx3·v3) - qm32·(vsm33 + vm32)·(em33 - em32 +  $\frac{1}{2}$ ·(v32
- vm322)) :
> EEm4 := -αxx3·v3 - qm40·vsm43·(em43 - em40 +  $\frac{1}{2}$ ·v32) :
> qm30 := qm0 : cLm3 := cL : Lm3 := cLm32·qm30 : vm3 := v : Em3
:=  $\frac{Lm3 \cdot (1 + vm3) \cdot (1 - 2 \cdot vm3)}{(1 - vm3)}$  : Km3 :=  $\frac{Em3}{3 \cdot (1 - 2 \cdot vm3)}$  : Bm3 := B :
> Bm30 := Bm3 : Bm31 := Bm3 : Km31 := Km3 : Sm3 :=  $\frac{Bm3 + 1}{2}$  : Km32 := (1 + 2·(Sm3
- 1))·Km3 : Km33 := (2·(Sm3 - 1) + 3·(Sm3 - 1)2)·Km3 :

```

(1)

```

>  $\alpha_{x0} := -p0 : pm30 := -\alpha_{x0} : em30 := \frac{pm30}{Bm3 \cdot qm30} : pm32 := pm30 + \frac{1}{3} \cdot (-\alpha_{x2} - pm30)$ 
   $\cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot vm3}{1 - vm3} \right) : \mu m32 := \frac{qm32}{qm30} - 1 : em32$ 
   $:= \frac{pm32 - (Km31 \cdot \mu m32 + Km32 \cdot \mu m32^2 + Km33 \cdot \mu m32^3)}{(Bm30 + Bm31 \cdot \mu m32) \cdot qm30} :$ 
=
>  $\alpha_{x2} := -p2 :$ 
=
>  $qm32 := solve(Ergebnis1[6], qm2) :$ 
=
>  $vm32 := solve(Ergebnis1[2], v2) :$ 
>  $\mu m33 := \frac{qm33}{qm30} - 1 : em33 := \frac{-\alpha_{x3} - (Km31 \cdot \mu m33 + Km32 \cdot \mu m33^2 + Km33 \cdot \mu m33^3)}{(Bm30 + Bm31 \cdot \mu m33) \cdot qm30} :$ 
=
>  $qm40 := 7850 : Em4 := 210000000000 : vm4 := \frac{28}{100} : Lm4 := \frac{Em4 \cdot (1 - vm4)}{(1 + vm4) \cdot (1 - 2 \cdot vm4)} :$ 
   $cLm4 := \sqrt{\frac{Lm4}{qm40}} : Km4 := \frac{Em4}{3 \cdot (1 - 2 \cdot vm4)} : Bm4 := \frac{169}{100} :$ 
=
>  $Bm40 := Bm4 : Bm41 := Bm4 : Km41 := Km4 : Sm4 := \frac{Bm4 + 1}{2} : Km42 := (1 + 2 \cdot (Sm4$ 
   $- 1)) \cdot Km4 : Km43 := (2 \cdot (Sm4 - 1) + 3 \cdot (Sm4 - 1)^2) \cdot Km4 :$ 
=
>  $pm40 := -\alpha_{x0} : pm43 := pm40 + \frac{1}{3} \cdot (-\alpha_{x3} - pm40) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot vm4}{1 - vm4} \right) : em40$ 
   $:= \frac{pm40}{Bm4 \cdot qm40} : em43 := \frac{pm43 - Km4 \cdot \left( \frac{qm43}{qm40} - 1 \right)}{Bm4 \cdot qm40} : \mu m43 := \frac{qm43}{qm40} - 1 : em43$ 
   $:= \frac{pm43 - (Km41 \cdot \mu m43 + Km42 \cdot \mu m43^2 + Km43 \cdot \mu m43^3)}{(Bm40 + Bm41 \cdot \mu m43) \cdot qm40} :$ 
=
>  $Ergebnis2 := fsolve(\{EMm3=0, EMm4=0, EIm3=0, EIm4=0, EEm3=0, EEm4=0\}, \{\alpha_{x3}$ 
   $= -7.36 \cdot 10^5, vsm43=1.02 \cdot cLm4, qm33=12.9, qm43=7850.01, vsm33=279.6, v3=0.01\}$ 
   $\};$ 
 $Ergebnis2 := \{v3=0.7679438839311255594735140855035697152051, vsm33$ 
   $=1124.585779022363832748753192169205714240, vsm43$ 
   $=5849.617464793749779850429112998496731538, \alpha_{x3}=$ 
   $-3.536492895008669222724469636485715279568 \cdot 10^7, qm33$ 
   $=26.82509062171793181655500939616987042480, qm43$ 
   $=7851.030691500492150341371783411386224308\}$ 
=
>  $\alpha_{x3} := solve(Ergebnis2[4], \alpha_{x3}) :$ 
>  $cr := \frac{-\alpha_{x3} - p0}{p1 - p0} ;$ 
   $cr := 8.815899237521673056811174091214288198920$ 
=
>

```

(2)

(3)

Anhang C

Berechnung Stoßrohr mit abschließender Wand

Im folgenden wird die MAPLE-Berechnung zum Abschnitt 5.2 dargestellt.

```
> restart : with(plots) : with(LinearAlgebra) : Digits := 40 :
```

▼ Bereiche (1) bis (3)

```
> Equ1 := p1 = (gamma - 1) * q1 * e1 :
> Equ2 := p2 = (gamma - 1) * q2 * e2 :
> Equ3 := q1 = q0 * (p0 * (gamma - 1) + p1 * (gamma + 1)) / (p0 * (gamma + 1) + p1 * (gamma - 1)) :
> Equ4 := v1 = sqrt(2 * (p1 - p0)^2 / (q0 * (p0 * (gamma - 1) + p1 * (gamma + 1)))) :
> Equ5 := v2 = v1 :
> Equ6 := p2 = p1 :
> Equ7 := (p4 / q4^gamma) = (p2 / q2^gamma) :
> Equ8 := v4 + (2 / (gamma - 1)) * sqrt(gamma * (p4 / q4)) = v2 + (2 / (gamma - 1)) * sqrt(gamma * (p2 / q2)) :
> q0 := 1225 / 1000000 : e0 := 206800 : v0 := 0 : gamma := 7 / 5 : p0 := (gamma - 1) * q0 * e0 : c0 := sqrt(gamma * p0 / q0) :
> q4 := 1 / 100 : e4 := 250000 : v4 := 0 : p4 := (gamma - 1) * q4 * e4 :
> fsolve({Equ1, Equ2, Equ3, Equ4, Equ5, Equ6, Equ7, Equ8}, {e1 = 3.7e5, e2 = 3.4e5, p1 = 513, p2 = 513, v1 = 466, v2 = 466, q1 = 0.0035, q2 = 0.0038});
{e1 = 2.933507513964294654507329112200252167576 10^5, e2 = 1.776702834731936743948921983582751578611 10^5, p1 = 302.5950038238046200535774087731255506828, p2 = 302.5950038238046200535774087731255506828, v1 = 293.6844486760718915078766320395343641046, v2 = 293.6844486760718915078766320395343641046, q1 = 0.002578781564248344307476368244000080928075, q2 = 0.004257816753433885145983769697943952881022}
> e1 := 2.933507513964294654507329112200252167576 10^5 : e2 := 1.776702834731936743948921983582751578611 10^5 : p1
```

(1.1)

$$\begin{aligned}
& := 302.5950038238046200535774087731255506828 : p_2 := p_1 : v_1 \\
& := 293.6844486760718915078766320395343641046 : v_2 := v_1 : Q_1 \\
& := 0.002578781564248344307476368244000080928075 : Q_2 \\
& := 0.004257816753433885145983769697943952881022 : \\
> c_2 := c_4 - \frac{\gamma' - 1}{2} \cdot v_2 : c_4 := \sqrt{\gamma' \cdot \frac{p_4}{Q_4}} : c_1 := \sqrt{\frac{\gamma' \cdot p_1}{Q_1}} : \\
> A := \frac{p_4}{Q_4^{\gamma'}} : c_3 := -\frac{\gamma' - 1}{\gamma' + 1} \cdot \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma' + 1} \cdot c_4 : v_3 := \frac{2}{\gamma' + 1} \cdot \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma' + 1} \cdot c_4 : Q_3 \\
& := \left(\frac{c_3^2}{\gamma' \cdot A} \right)^{\frac{1}{\gamma' - 1}} : p_3 := A \cdot Q_3^{\gamma'} : e_3 := \frac{p_3}{(\gamma' - 1) \cdot Q_3} : \\
> v_s := \sqrt{\frac{p_0 \cdot (\gamma' - 1) + p_1 \cdot (\gamma' + 1)}{2 \cdot Q_0}} : \\
> x_1 := -40 : \\
> t1 := \frac{x_1}{-c_4} : evalf(t1); \\
& \quad 0.1069044967649697538738213923519014086216 \quad (1.2) \\
> v_3 + c_3; \\
& \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{t} + \frac{500}{3} \sqrt{14} \quad (1.3) \\
> dsolve(diff(x35(t), t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x35(t)}{t} + \frac{500}{3} \sqrt{14}, x35(t)); \\
& \quad x35(t) = 500 \sqrt{14} \cdot t + t^{2/3} \cdot _C1 \quad (1.4) \\
> solve(x_1 = 500 \sqrt{14} \cdot t1 + (t1)^{2/3} \cdot _C1, _C1); \\
& \quad -\frac{120}{7} \cdot 35^{2/3} \cdot 14^{2/3} \quad (1.5) \\
> x_{35} := 500 \sqrt{14} \cdot t + t^{2/3} \left(-\frac{120}{7} \cdot 35^{2/3} \cdot 14^{2/3} \right); \\
> t2 := fsolve(x_{35} = (v_2 - c_2) \cdot t, t = 0.135); x_2 := evalf((v_2 - c_2) \cdot t2); \\
& \quad t2 := 0.1784365400833469658216881261792467735689 \\
& \quad x_2 := -3.87999554967169715212433237320069958744 \quad (1.6)
\end{aligned}$$

▼ Bereich (5)

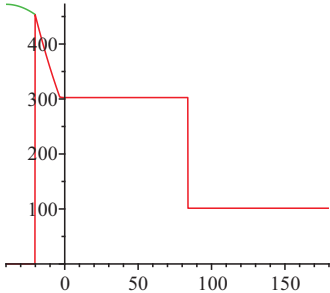
$$\begin{aligned}
> \tau := \frac{c_4 \cdot t}{-x_1} : \\
> v_3; \\
& \quad (2.1)
\end{aligned}$$

(2.1)

```

> w1 := 0 : w2 := -evalf  $\left( \frac{\frac{5}{6} \frac{x}{t} + \frac{250}{3} \sqrt{14}}{c_4} \right)$  :
> h := RootOf  $\left( \tau = \frac{1}{1600} \frac{\sqrt{2} \sqrt{5} (500 h - 60 w^2 h + 300 h^2 + 1875 - 150 w^2 + 3 w^4)}{h^{5/2}}$ ,
    h, 2.5 ) :
> X
    :=  $\frac{1}{1600} \frac{1}{h^{5/2}} (\sqrt{2} \sqrt{5} (300 w h - 52 w^3 h + 60 w h^2 + 1875 w - 150 w^3$ 
    +  $3 w^5 + 160 h^{5/2} \sqrt{2} \sqrt{5}))$  :
> n := 2 : p5 := evalf  $\left( p_4 \cdot \left( \frac{2 \cdot h}{2 \cdot n + 1} \right)^{\frac{2 \cdot n + 3}{2}} \right)$  :
> Druck := piecewise (t ≤ t1, piecewise (x < -c4 · t, p4, x < (v2 - c2) · t, p3, x < v2 · t, p2, x
    < vs · t, p1, p0), piecewise (x < x35, 0, x < (v2 - c2) · t, p3, x < v2 · t, p2, x < vs · t, p1,
    p0)) :
> Geschwindigkeit := piecewise (t ≤ t1, piecewise (x < -c4 · t, v4, x < (v2 - c2) · t, v3, x < v2
    · t, v2, x < vs · t, v1, v0), piecewise (x < x35, 0, x < (v2 - c2) · t, v3, x < v2 · t, v2, x < vs · t,
    v1, v0)) :
> t :=  $\frac{15}{100}$  : plot ([ [x, Druck, x = -40 .. 180], [X · x1, p5, w = w2 .. w1] ]);

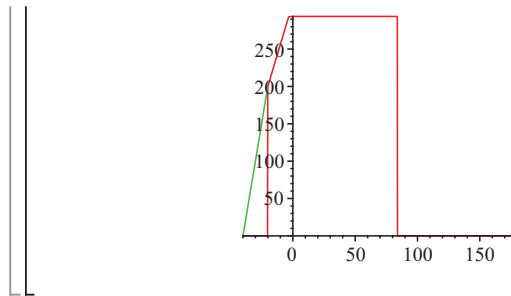
```



```

> plot ([ [x, Geschwindigkeit, x = -40 .. 180], [X · x1, -c4 · w, w = w2 .. w1] ]); unassign('t') :

```



▼ Bereich (6)

$$\begin{aligned} > c_6 := c_2 - \frac{\gamma^l - 1}{2} \cdot v_2 : \text{evalf}(c_6); \\ & 256.6919592069653819552242204158411845338 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} > A := \frac{p_4}{(\varrho_4)^{\gamma^l}} : \\ > \varrho_6 := \left(\frac{(c_6)^2}{\gamma^l \cdot A} \right)^{\frac{1}{\gamma^l - 1}} : \text{evalf}(\varrho_6); \\ & 0.001519641812568774564120900094269666147582 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} > p_6 := A \cdot (\varrho_6)^{\gamma^l} : \text{evalf}(p_6); \\ & 71.52168348424401757721298718864916250243 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} > h56 := \left(\frac{p_6}{p_4} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{5}{2} : \tau56 := \frac{1}{1600} \frac{\sqrt{2} \sqrt{5} (500 h56 + 1875 + 300 h56^2)}{h56^{5/2}} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > t3 := \frac{\tau56 \cdot (-x_1)}{c_4} : \text{evalf}(t3); \\ & 0.4050160977944602748466584296733874668838 \end{aligned} \quad (3.4)$$

▼ Lagrange-Diagramm

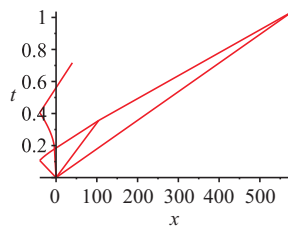
$$\begin{aligned} > \text{Plot1} := \text{implicitplot}([x_{35} = x], x = x_1 .. x_2, t = t1 .. t2, \text{gridrefine} = 4, \text{crossingrefine} = 4, \\ & \text{resolution} = 1000) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{Plot2} := \text{plot} \left(t3 + \frac{x - x_1}{c_6}, x = x_1 .. 40 \right) : \end{aligned}$$


```

> t71 := solve(v2*t = (v2 + c2) * (t - t2) + x2, t) : x71 := v2*t71 : Plot3 := plot(
    (x - x2) / (v2 + c2) + t2, x = x2 .. x71) :
> t09 := solve(v_s*t = (v1 + c1) * (t - t71) + x71, t) : x09 := v_s*t09 : Plot4 := plot(
    (x - x71) / (v1 + c1) + t71, x = x71 .. x09) :
> Plot5 := plot(x/v_s, x = 0 .. x09) :
> Plot6 := plot(x/v2, x = 0 .. x71) :
> Plot7 := plot(x/(v2 - c2), x = x2 .. 0) :
> Plot8 := plot(x/(-c4), x = x1 .. 0) :
> M2 := evalf(v2/c2) : xi_c := (2*n + 1) * (1 - M2 / (2*n + 1)) / (1 + M2 / (2*n + 1)) :
> Punkte := 40 : Vektort := Vector(Punkte) : Vektorx := Vector(Punkte) :
> for i from 1 to Punkte do Vektort[i] := evalf(t2 + (i - 1) * (t3 - t2) / (Punkte - 1)) end do :
> for i from 1 to Punkte do
    unassign('w');
    t := Vektort[i];
    w := fsolve(w + (2 * (2*n + 1) * h)^1/2 = xi_c, w);
    Vektorx[i] := Re(evalf(X*x1));
end do :
> unassign('t') : Plot9 := plot(Vektorx, Vektort, style = line, color = red) :
> display(Plot1, Plot2, Plot3, Plot4, Plot5, Plot6, Plot7, Plot8, Plot9);

```



Anhang D

Ergebnisse der Versuche an Wärmedämmverbundsystemen

In diesem Anhang werden die Ergebnisse der Versuche aus Kapitel 6 angegeben.

D.1 Überdruck-Zeit-Verläufe

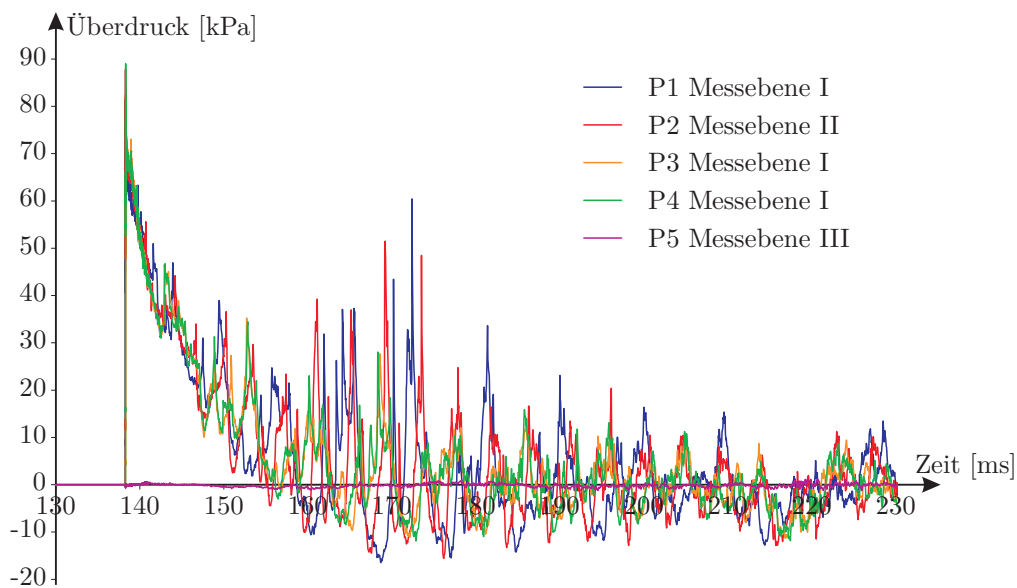


Abbildung D.1: Überdruck-Zeit-Verlauf, Referenzplatte, 140 g PETN in 14 m Entfernung

Anmerkung: Der Überdruck-Zeit-Verlauf für die Referenzplatte mit 270 g PETN in 5,6 m Entfernung wird in Abbildung 6.4 dargestellt.

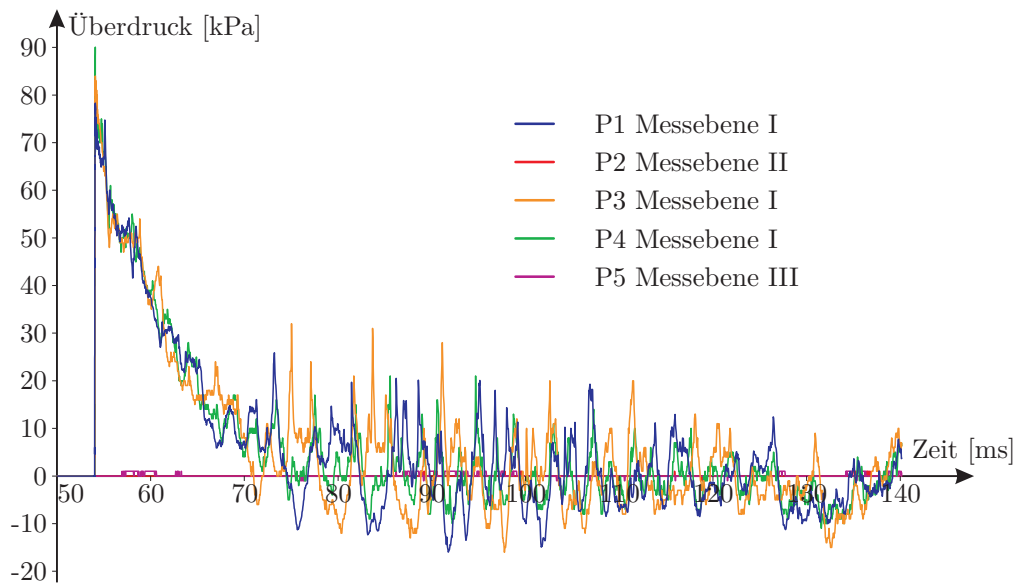


Abbildung D.2: Überdruck-Zeit-Verlauf, Polystyrolschaum-WDVS, 140 g PETN in 14 m Entfernung

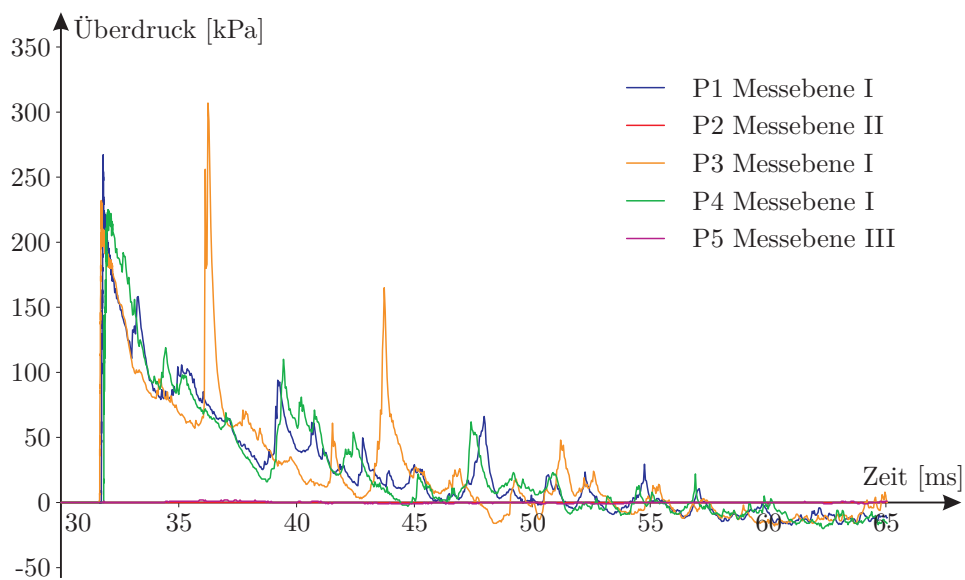


Abbildung D.3: Überdruck-Zeit-Verlauf, Polystyrolschaum-WDVS, 270 g PETN in 5,6 m Entfernung

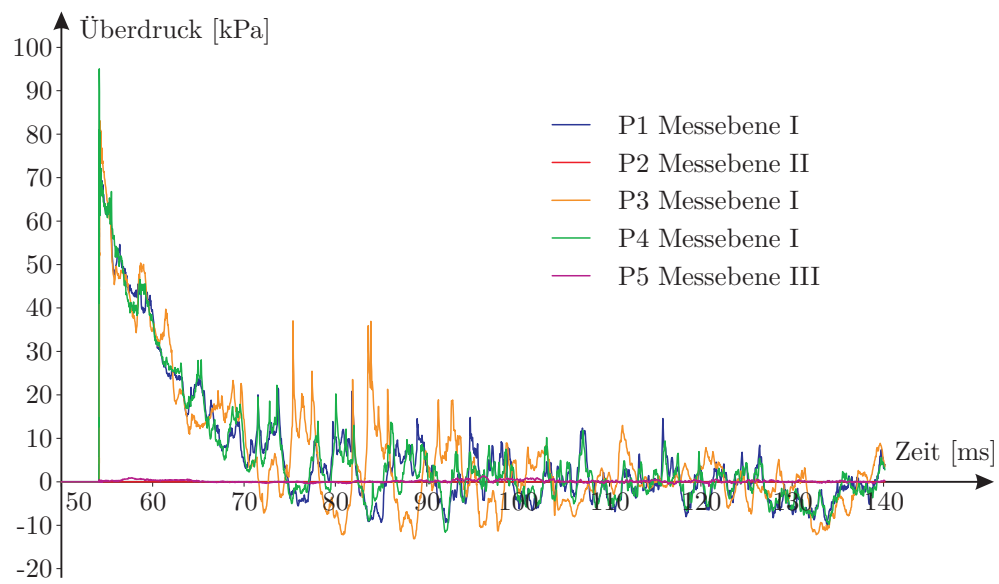
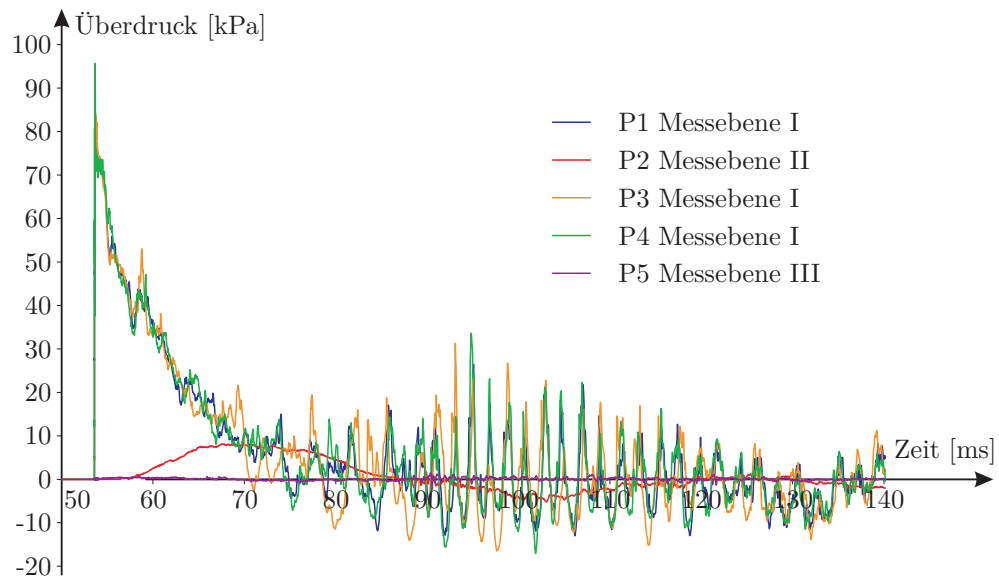
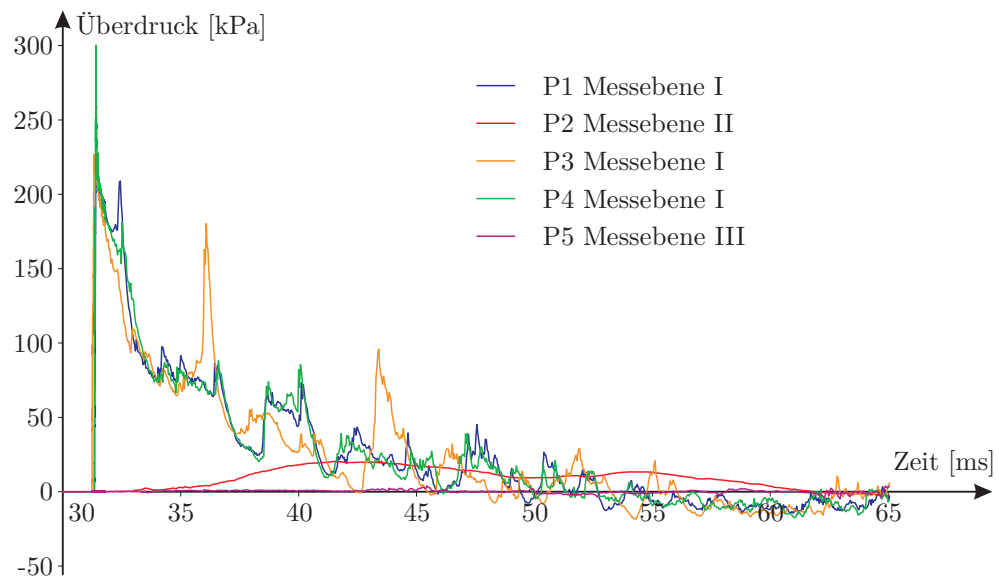


Abbildung D.4: Überdruck-Zeit-Verlauf, Mineralwolle-WDVS, 140 g PETN in 14 m Entfernung

Anmerkung: Der Versuch mit 270 g PETN in 5,6 m Entfernung wurde bei dem Mineralwolle-WDVS nicht durchgeführt, da der Versuchskörper bereits beim 1. Versuch zerstört wurde.

Abbildung D.5: Überdruck-Zeit-Verlauf, PEKATEX[®], 140 g PETN in 14 m EntfernungAbbildung D.6: Überdruck-Zeit-Verlauf, PEKATEX[®], 270 g PETN in 5,6 m Entfernung

D.2 Impuls-Zeit-Verläufe

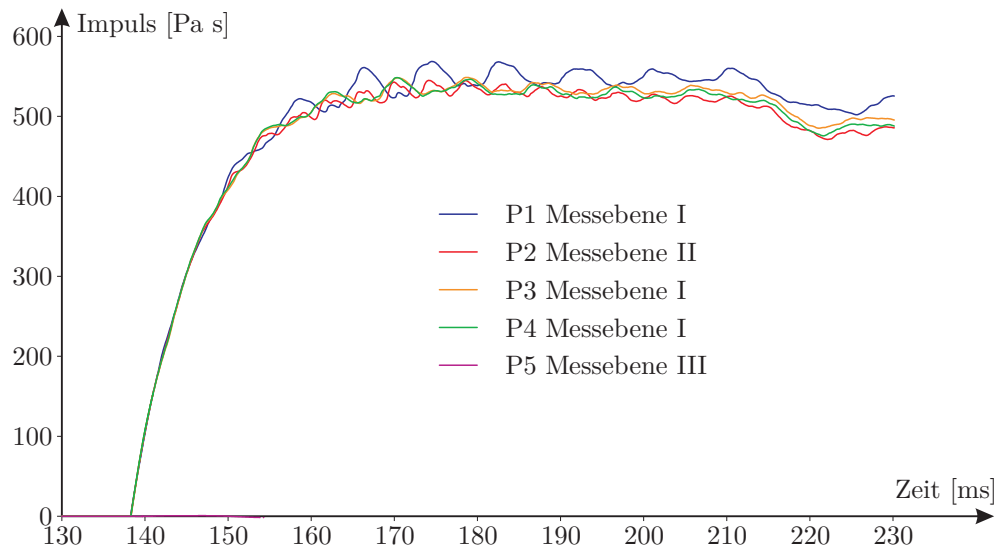


Abbildung D.7: Impuls-Zeit-Verlauf, Referenzplatte, 140 g PETN in 14 m Entfernung

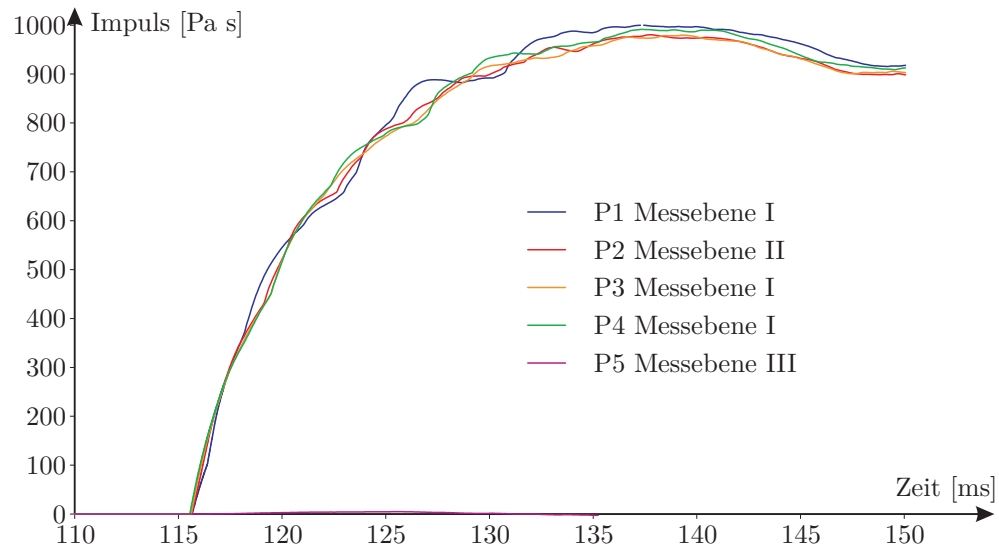


Abbildung D.8: Impuls-Zeit-Verlauf, Referenzplatte, 270 g PETN in 5,6 m Entfernung

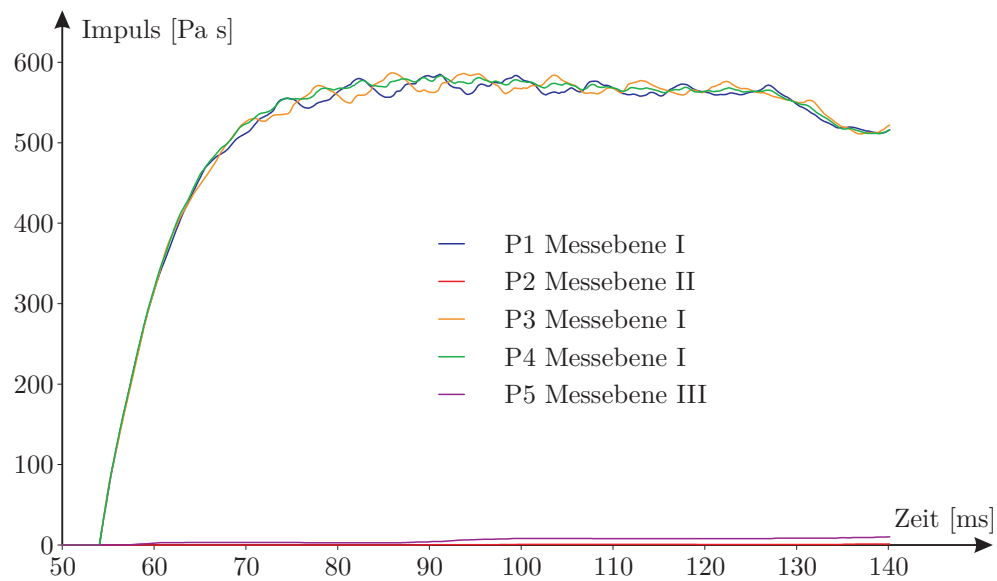


Abbildung D.9: Impuls-Zeit-Verlauf, Polystyrolschaum-WDVS, 140 g PETN in 14 m Entfernung

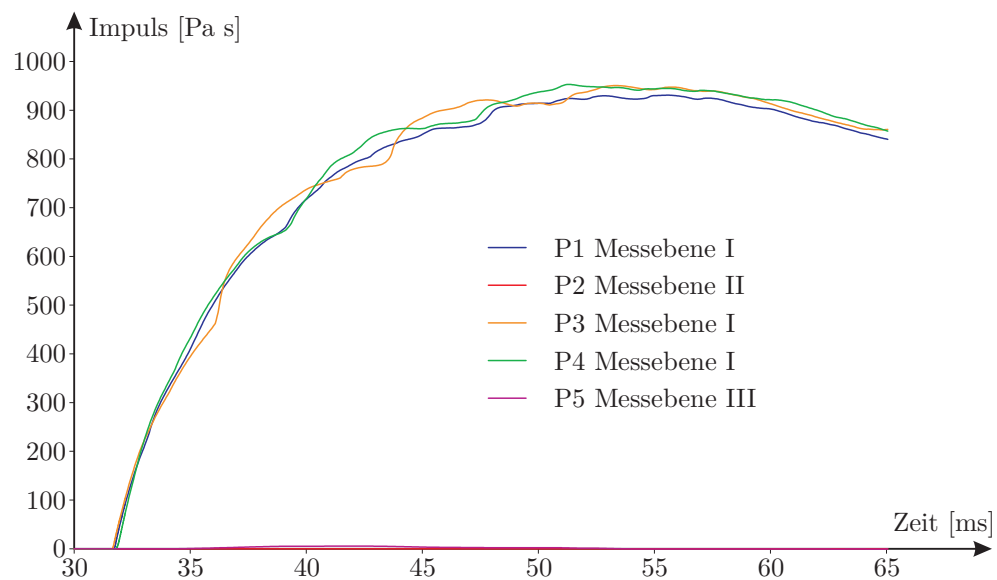


Abbildung D.10: Impuls-Zeit-Verlauf, Polystyrolschaum-WDVS, 270 g PETN in 5,6 m Entfernung

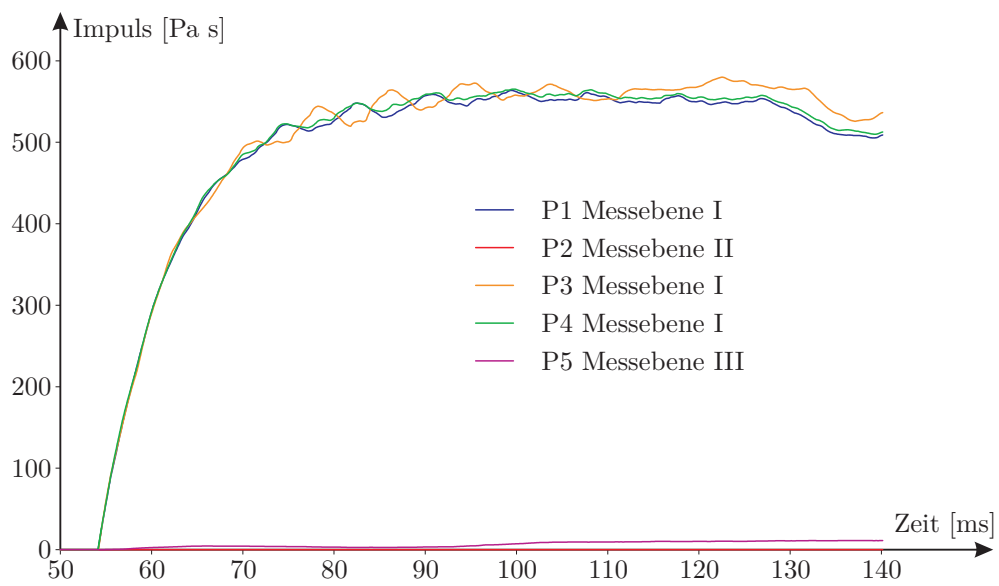
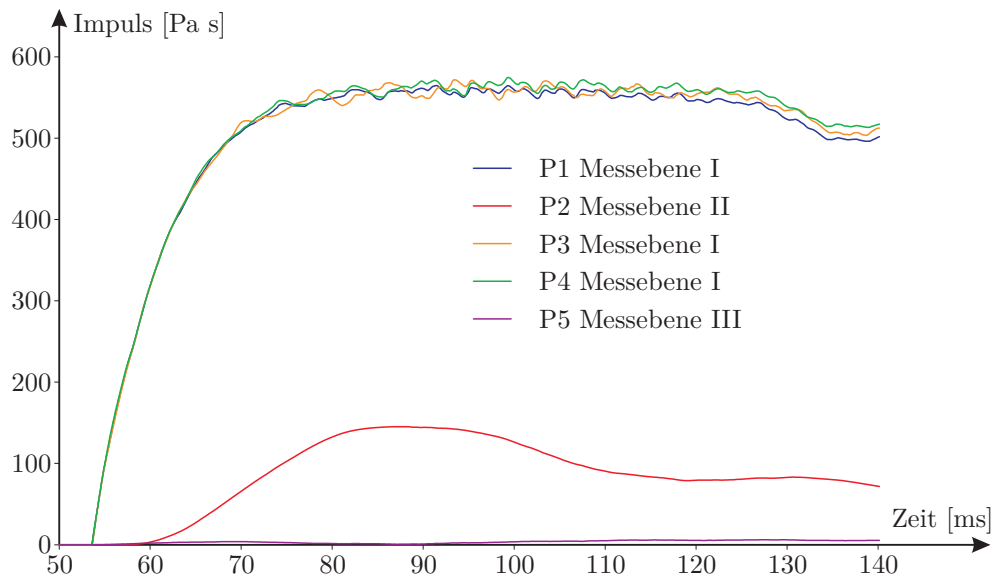
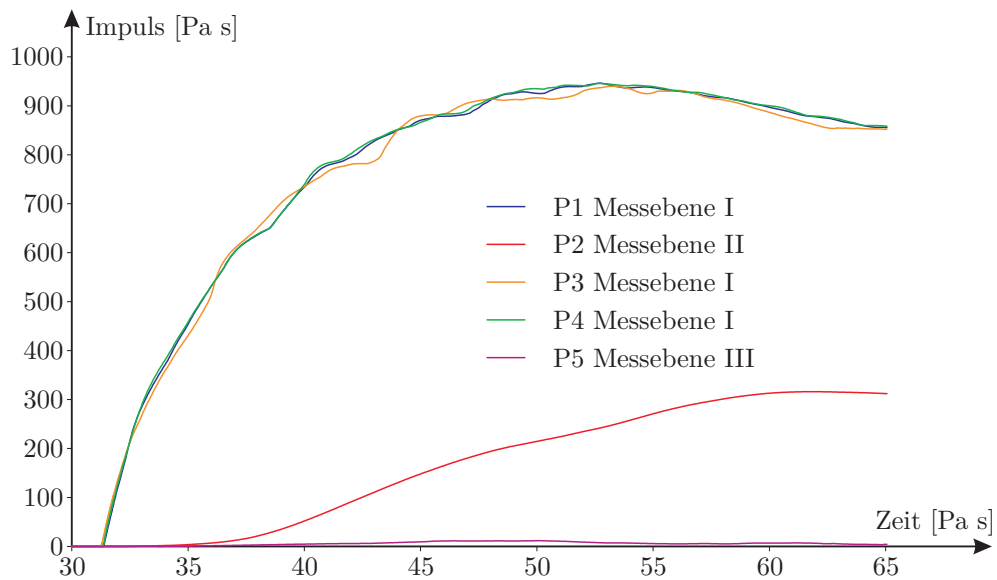


Abbildung D.11: Impuls-Zeit-Verlauf, Mineralwolle-WDVS, 140 g PETN in 14 m Entfernung

Anmerkung: Der Versuch mit 270 g PETN in 5,6 m Entfernung wurde bei dem Mineralwolle-WDVS nicht durchgeführt, da der Versuchskörper bereits beim 1. Versuch zerstört wurde.

Abbildung D.12: Impuls-Zeit-Verlauf, PEKATEX[®], 140 g PETN in 14 m EntfernungAbbildung D.13: Impuls-Zeit-Verlauf, PEKATEX[®], 270 g PETN in 5,6 m Entfernung

Index

- Abhängigkeitsbereich, 53
Aluminiumschaum, 27, 83
Aristoteles, 4
- Becker, Richard, 24
Bernoulli, Daniel, 8
Bernoulli, Johann, 8
Bethe, Hans Albrecht, 25
Boltzmann, Ludwig, 20
Boltzmann-Konstante, 40
Boyle, Robert, 7
Brown, Robert, 14
Brush, Stephen G., 3, 8
- Carnot, Nicolas Léonard Sadi, 13
CFL-Kriterium, 69
Charakteristiken, 53, 54, 103, 109
Clausius, Rudolf Julius Emanuel, 18
closed shock tube, 100, 103
- Drehimpulserhaltung, 11, 38
- Einstein, Albert, 14
Energie, 15, 18, 21, 38
Energieerhaltung, 14, 17, 38
Eneström, Gustaf, 9
Enthalpie, 104
Entropie, 18, 39, 50
equations of state, 42
Euler, Leonhard, 9
Euler-FCT, 71, 111
Euler-Gleichungen, 11, 16, 37, 51
Euler-Godunov, 70, 111
Eulersche Konstante, 144
Freiheitsgrade, 42, 44
- Galilei, Galileo, 4
Gay-Lussac, Joseph Louis, 12
Grüneisen-Parameter, 45, 74, 83, 96
Guericke, von, Otto, 5
- homentrop, 111
Hooke, Robert, 7
Hugoniot-Kurve, 44–46, 81
- Impedanz, 87
Impulserhaltung, 10, 17, 21, 38
isentrop, 51, 110, 111
Isentropenexponent, 11–13, 43, 58, 74, 100
- Jacobi-Matrix, 54
- Kelvin, Lord, *siehe* Thomson, William
Klein, Felix, 3
Kompressibilität, 46
Kompression, 45, 74
Kompressionsmodul, 40, 45, 46, 74
- Lagrange, Joseph-Louis, 11
Laplace, Pierre-Simon, 13
- Mach, Ernst, 22
Mach-Stamm, 64
Mariotte, Edme, 7
Massenerhaltung, 38
Maxwell, James Clerk, 18
Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung, 40
Mayer, Julius Robert, 14
Mersenne, Marin, 4
Mineralwolle, 115
- Navier, Claude Louis Marie Henri, 13
Newton, Isaac, 7

- nonsimple wave region, 103
 Normzustand, 43
 Pascal, Blaise, 5
 PEKATEX, 115
 Planck, Max, 21
 Polystyrolschaum, 84, 115
 Porosität, 47, 90
 Power, Henry, 7
 Rankine, William John Macquorn, 17, 21
 Rankine-Hugoniot-Gleichungen, 17, 21, 108
 Rayleigh, John William Strutt, Baron, 23
 Reflexion
 irreguläre, 59, 64
 Mach-, 64
 reguläre, 59, 61
 senkrechte, 57
 Reflexionsfaktor, 58
 Riemann, Bernhard, 19
 Riemann-Funktion, 104
 Riemann-Invarianten, 19, 54, 104
 Riemann-Problem, 51
 Saint-Venant, Adhémar-Jean-Claude Barré
 de, 16
 Schallgeschwindigkeit, 4, 8, 12, 13, 24, 101
 Schott, Caspar, 7
 shock tube problem, 52
 slip stream, 64
 Smoluchowski, von, Marian, 14
 Spannungstensor, 37–39
 Stokes, George Gabriel, 15
 Stoß
 schiefer, 60
 schwacher, 61
 senkrechter, 49
 starker, 61
 Stoßbedingungen, 24, 25, 75
 Stoßrohr, 90, 100, 116
 Stoßrohr-Problem, 52
 strong shock solution, 60, 63
 Szabó, István, 3, 9
 Taylor, Geoffrey Ingram, 23
 Temperatur, absolute, 17, 46
 Thomson, William, Lord Kelvin, 17
 Toepler, August, 19
 Torricelli, Evangelista, 5
 Towneley, Richard, 7
 triple point, 64
 Truesdell, Clifford Ambrose, 3, 8
 Verzerrungstensor, 36, 39
 Viviani, 5
 Wärmeausdehnungskoeffizient, 46
 Wärmedämmverbundsystem, 115
 Wärmekapazität, 12, 42, 43, 46
 weak shock solution, 60, 63
 Wellengeschwindigkeit, 8, 45, 48, 69, 83, 95
 Weyl, Hermann, 25
 Zustandsgleichung, 42
 p - α , 47
 ideales Gas, 43, 75, 100
 lineare, 44
 Mie-Grüneisen, 45
 polynomische, 45, 46, 74, 76
 Zustandsgrößen, 43

Verzeichnis der in dieser Schriftenreihe erschienenen Hefte

- 96/1 Gebbeken, N.:** *Zur Untersuchung des linearen Tragverhaltens von Faserverbundkonstruktionen mittels numerischer Methoden*
- 97/1 Rötzer, J.:** *Ein Beitrag zur Berechnung von Stahlbetontragwerken unter hohen Dehnungsgeschwindigkeiten und hohen Drücken*
- 97/2 Gebbeken, N.; Wanzek, T.; Petersen, C.:** *„Semi-rigid“ Verbindungen – Versuche an „T-stubs“. Versuchsbericht*
- 97/3 Jian, Y.:** *Tragverhalten dünner rechteckiger Stahlplatten mit großen Verformungen unter Berücksichtigung der Membranwirkung*
- 97/4 Reif, F.:** *Mittels geregelter harmonischer Endpunktverschiebung induzierte räumliche Seilschwingungen.*
- 97/5 Wei, Y.:** *Influences of Creep, Shrinkage and Steel Relaxation on Structural Behaviour.*
- 97/6 Wurzer, O.:** *Zur Tragfähigkeit von Betondübeln.*
- 97/7 Wanzek, T.:** *Zu Theorie, Numerik und Versuchen verformbarer Anschlusskonstruktionen.*
- 97/8 Gebbeken, N.; Rothert, H.; Wanzek, T.:** *Zur Theorie und Finite-Element-Berechnung des Tragverhaltens von verformbaren (semi-rigid) Anschlusskonstruktionen im Stahlbau.*
- 99/1 Böge, G.:** *MAKROS – Pre- und Postprozessing für Finite Elemente – AutoCAD-Erweiterung zur Generierung von FE-Modellen.*
- 00/1 Gebbeken, N.:** *Beiträge zur Begabungs-, Bildungs- und Hochschulpolitik.*
- 00/2 Bettin, I.; Urrutia Galicia, J.C.; Gebbeken, N.:** *On the analysis of vertical circular cylindrical tanks under earthquake excitation at its base.*
- 00/3 Gebbeken, N.:** *Wörterbuch Bauwesen Englisch-Deutsch Deutsch-Englisch.*
- 00/4 Ruppert, M.:** *Zur numerischen Simulation von hochdynamisch beanspruchten Betonstrukturen.*
- 00/5 Sauer, M.:** *Adaptive Kopplung des netzfreien SPH-Verfahrens mit finiten Elementen zur Berechnung von Impaktvorgängen.*
- 01/1 Zapfe, C.:** *Trag- und Verformungsverhalten von Verbundträgern mit Betondübeln zur Übertragung der Längsschubkräfte.*
- 01/2 Urrutia-Galicia, J. L.:** *Contributions to Applied Mathematics in Engineering*
- 01/3 Gebbeken, N.:** *Wörterbuch Bauwesen Englisch-Deutsch Deutsch-Englisch ergänzte und überarbeitete 2. Auflage*
- 02/1 Matias León, J.C.:** *Ein Beitrag zur Wirkung von Wellen und Schockwellen in Tragwerken*
- 02/2 Bosl, R.:** *Zum Nachweis des Trag- und Verformungsverhaltens von Wandscheiben aus Brettlagenholz*
- 02/3 Fischer, O.; Heinen, A.H.; Thalheim, J.-U.:** *Nichtlineare räumliche Seilschwingungen*

- 02/4 Paulke, S.:** *Ein Beitrag zur Herleitung und Lösung nichtlinearer, thermomechanisch gekoppelter Grundgleichungen für Schalenträgerwerke*
- 02/5 Mangerig, I.; Zapfe, C.:** *Nachweisverfahren und Sanierungsmöglichkeiten für Stahlträgerdecken mit Betonausfachung*
- 03/1 Gebbeken, N.:** *Wörterbuch Bauwesen Englisch-Deutsch Deutsch-Englisch erheblich ergänzte Auflage, 3. Auflage*
- 03/2 Urrutia-Galicia, J.L.:** *„The Best Manifold Theory“, In Frequency Interpretation of Time Dependent Functions, An Application To Seismic Engineering.*
- 03/3 Gebbeken, N.; Bletzinger, K.-U.; Rothert, H.:** *Hrsg. Aktuelle Beiträge aus Baustatik und Computational Mechanics*
- 03/4 Gebbeken, N.; Dittrich, G.; Mueller-Hagen, S.:** *Zur Verwendung und Berechnung von Fahnenblechanschlüssen*
- 04/1 Weiß, J.:** *Vereinfachte Integration von Fachwissen in Computerprogramme am Beispiel eines Planungssystems für die Bauindustrie*
- 04/2 Thalheim, J.-U.:** *Nichtlineare Seilschwingungen und Stabilitätsanalysen für Seilbewegungen*
- 04/3 Gebbeken, N.:** *Wörterbuch Bauwesen Englisch-Deutsch Deutsch-Englisch ergänzte Auflage, 4. Auflage*
- 04/4 Greulich, S.:** *Zur numerischen Simulation von Stahlbeton- und Faserbetonstrukturen unter Detonationsbeanspruchung.*
- 04/5 Ehrlich, I.:** *Impactverhalten schwach gekrümmter Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen*
- 05/1 Lichte, U.:** *Klimatische Temperatureinwirkungen und Kombinationsregeln bei Brückenbauwerken*
- 05/2 Petersen, C.:** *Studien zum Einsatz von Erdbebenschutzsystemen*
- 06/1 Kustermann, A.; Keuser, M.; Zimbelmann R. K.; Grimm, R.:** *Hochfeste Bindemittel und Zuschlagstoffe für hochfeste Betone unterschiedlicher Güte“ für Schutzanlagen der militärischen Sonderinfrastruktur*
- 06/2 Bludau, Ch.; Keuser, M.; Kustermann, A.; Thienel K.-Ch.:** *Schutzplatten aus hochfestem Beton (Abschlussbericht)*
- 06/3 Purainer, R.; Keuser, M.:** *Versuche an Stahlbetonscheiben und –platten unter Zugbeanspruchung*
- 06/4 Gebbeken, N.; Keuser, M.; Klaus, M.; Mangerig, I.; Thoma, K. (Hrsg.):** *2. Workshop „BAU-PROTECT“ Sicherheit der baulichen Infrastruktur vor außergewöhnlichen Einwirkungen*
- 07/1 Gollwitzer, T.:** *Finite Stabelemente für mehrteilige nachgiebige Verbundquerschnitte zur Berechnung von Brettrippenschalen*
- 08/1 Urrutia-Galicia, J.L.:** *Contributions to Applied Mathematics in Engineering*
- 08/2 Gebbeken, N.; Thoma, K. (Hrsg.):** *3. Workshop „BAU-PROTECT“ Sicherheit der baulichen Infrastruktur vor außergewöhnlichen Einwirkungen*
- 09/1 Hartmann, T.:** *Zur mesomechanischen Modellierung von Beton und ihrer Anwendung zur makromechanischen Modellbildung*

- 10/1 Baumhauer, A.:** *Beurteilung geschädigter Brückenbauwerke unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerkparameter*
- 10/2 Bierbrauer, K.:** *Ein Beitrag zur Ermittlung der Biegetragfähigkeit bestehender Stahlbetonbrücken unbekannter Eigenschaften*
- 10/3 Rüdiger, L.:** *Tragverhalten von Stahlbetonplatten unter Berücksichtigung der Steifigkeitsänderung im gerissenen Zustand*
- 10/4 Fuchs, M.:** *Stahlbetonbauteile nach außergewöhnlichen Einwirkungen – Schadensquantifizierung und Instandsetzung*
- 10/5 Braml, T.:** *Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit von Massivbrücken auf der Grundlage der Ergebnisse von Überprüfungen am Bauwerk*
- 10/6 Festschrift** zum 60. Geburtstag von Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ingbert Mangerig
- 10/7 Seel, U.:** *Der konzeptionelle Entwicklungswandel von Flughafenterminalgebäuden in der Gegenüberstellung zur Entstehungsgeschichte des Flughafens München*
- 11/1 Retze, U.:** *Beispielhafte Untersuchung zum Einsatz von Monitoringmethoden an einer Brücke*
- 11/2 Burger, S.:** *Untersuchungen zum Ermüdungsverhalten von Betondübeln im Verbundbau*
- 11/3 Kroyer, R.:** *Instationäres Temperatur- und Strukturverhalten von Stabwerkstrukturen*
- 11/4 Urrutia-Galicia, J. L.:** *Contributions to Applied Mathematics in Engineering III*
- 11/5 Köck, B.:** *Barocke Dachwerke: Konstruktion und Tragverhalten*
- 12/1 Teich, M.:** *Interaktionen von Explosionen mit flexiblen Strukturen*
- 12/2 Beucher, S.:** *Zur aktiven Temperierung von Brückenfahrbahnen*