

UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN

-Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen-

Institut für Mechanik und Statik

Univ.-Prof. Dr.-Ing. A.H. Heinen

*der Bundeswehr*



Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur zum Thema:

**Parametererregte und Regen-Wind-induzierte  
Seilschwingungen**

von

Hauptmann Dipl.-Ing.(univ.) Thomas Gilow

aus Berlin

März 2012



# UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN

-Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen-

Institut für Mechanik und Statik

Thema der Dissertation:

Parametererregte und Regen-Wind-induzierte Seilschwingungen

Verfasser: Dipl.-Ing. Thomas Gilow

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Apel

1. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Heinen

2. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Adam

Tag der Prüfung: 13.06.2012

Mit der Promotion erlangter akademischer Grad: Dr.-Ing.

Neubiberg, den .....



---

# KURZFASSUNG

Aufbauend auf einer in [H1] und [T2] vorgestellten Seiltheorie werden in dieser Arbeit parametererregte und Regen-Wind-induzierte Seilschwingungen simuliert. Der gewählte Ansatz, gültig im Rahmen kleiner Seillängsverzerrungen, aber großer Knotenverschiebungen, basiert auf kontinuumsmechanischen Grundlagen und verwendet statt der klassischen Ingenieurdehnung die GREENSchen Längsverzerrungen. Nach der Ortsdiskretisierung mittels Differenzenverfahren entsteht ein Differentialgleichungssystem in der Zeit, das ohne Abbrüche oder Reihenentwicklungen maximal kubische Nichtlinearitäten enthält. Die numerische Umsetzung mit einem selbst erstellten Berechnungsprogramm erfolgt in *MatLab*.

Zur Überprüfung des Modells und der Programmierung werden zunächst parametererregte Seilschwingungen untersucht. Dabei werden sehr gute Übereinstimmungen des gesamten Schwingungsverhaltens mit der Literatur und mit Versuchen festgestellt.

Die Einarbeitung der Anregung durch Regen und Wind führt auf zwei mehrfach gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungssysteme: eines für das Seil und eines für die sich auf der Seiloberfläche bewegenden Rinnsale. Die Interaktion zwischen Wind, den beiden Rinnsalen und dem Seil führt zu selbsterregten Schwingungen. Das Grundmodell mit unveränderlichen Rinnsalquerschnitten führt zu Schwingungsformen, die mit den Beobachtungen gut übereinstimmen, jedoch zu kleine Amplituden liefern. Die starre Querschnittsgeometrie der Rinnsale steht im Einklang mit den Versuchen zur Ermittlung der aerodynamischen Beiwerte mit starren Rinnsalen. Bei der Modifizierung eines Kopplungsterms beider Gleichungssysteme übersteigen die berechneten Amplituden die Beobachtungen oder es tritt der Fall auf, dass Teile des oberen Rinnsals am Seilquerschnitt abrutschen. Es zeigt sich jedoch, dass die Verformung der Rinnsale in künftigen Berechnungen berücksichtigt werden sollte.

Bei weiterer Verwendung aerodynamischer Beiwerte sollten diese neben der Abhängigkeit von den Rinnsalpositionen auch von der Anströmgeschwindigkeit abhängig gemacht werden. Zur hinreichend genauen Simulation Regen-Wind-induzierter Schwingungen werden weiterhin genauere Beobachtungen oder bessere Messungen einiger Eingangswerte benötigt. Bedingt durch die Nichtlinearitäten und Kopplungen innerhalb der Differentialgleichungssysteme ist die Lösung sehr aufwendig. Die Lösungsverfahren müssen deshalb bei der numerischen Umsetzung deutlich optimiert werden, um die Simulationszeit bei ausreichender Ortsdiskretisierung in überschaubaren Grenzen zu halten.

---

# DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich mich außerordentlich für die Ermöglichung dieser Arbeit und die sehr gute und intensive fachliche Betreuung, auch nach seiner aktiven Dienstzeit, bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. A.H. Heinen bedanken. Seine Ratschläge und Hinweise zu auftretenden Fragen bereicherten diese Arbeit. Es war ihm stets ein großes Anliegen, mir durch ausführliche Gespräche an kritischen Stellen auf dem Weg der Problemlösung zur Seite zu stehen.

Weiterhin möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Adam für die bereitwillige Übernahme der Zweitkorrektur bedanken.

Darüber möchte ich Herrn Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Apel für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes sowie die hervorragende Organisation und den reibungslosen Prüfungsablauf meinen besonderen Dank aussprechen.

Ein großer Dank gilt den Diplomanden, insbesondere Herrn Ampunant und Herrn Weingartner, für ihre im Institut geleistete Arbeit und ihre ausdauernde Einsatzbereitschaft.

Ich bedanke mich bei allen Mitarbeitern des Instituts für Mechanik und Statik und des Institutes für Mathematik und Bauinformatik für das jederzeit offene Ohr und die Unterstützung sowohl bei Fragestellungen zu angrenzenden Themenbereichen als auch bei Computerproblemen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>5</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>9</b>
1.1 Motivation . . . . .	10
1.2 Zielsetzung . . . . .	11
1.3 Gliederung . . . . .	12
<b>2 Das Phänomen Regen-Wind-induzierte Schwingungen</b>	<b>15</b>
2.1 Auftreten Regen-Wind-induzierter Schwingungen . . . . .	15
2.1.1 Allgemeiner Überblick . . . . .	15
2.1.2 Regen-Wind-induzierte Schwingungen an der Erasmus-Brücke . . . . .	17
2.2 Erklärung der Anregungsmechanismen . . . . .	18
2.2.1 Windinduzierte Schwingungen . . . . .	18
2.2.2 Stör- bzw. resonanzinduzierte Schwingungen . . . . .	19
2.2.3 Selbst- bzw. bewegungsinduzierte Schwingungen . . . . .	21
2.2.4 Regen-Wind-induzierte Schwingungen . . . . .	25
2.3 Zusammenfassung der Anregungsmechanismen . . . . .	27
2.4 Konstruktive Dämpfungsmaßnahmen . . . . .	28
<b>3 Regen-Wind-induzierte Schwingungen: Modelle und Einflussgrößen</b>	<b>31</b>
3.1 Modelle in der Literatur . . . . .	31
3.1.1 Das Modell von YAMAGUCHI (1990) . . . . .	32
3.1.2 Weiterentwicklung durch XU und WANG (2003) . . . . .	33
3.1.3 Die Modelle von PEIL und NAHRATH (2003) . . . . .	34
3.1.4 Das Berechnungsmodell von DREYER (2004) . . . . .	35
3.1.5 Das Galloping-Modell von GEURTS und VAN STAALDUINEN (1999) . . . . .	35
3.1.6 Die Modelle von ROBRA (2003) . . . . .	36
3.1.7 Das empirische Modell von SCHWARZKOPF (2004) . . . . .	38
3.1.8 Das Modell von SEIDEL und DINKLER (2004) . . . . .	39

3.1.9	Zusammenfassung und Übersicht über die vorgestellten Modelle	40
3.2	Übersicht über den Einfluss verschiedener Parameter	41
3.2.1	Regenintensität	41
3.2.2	Rinnsalgröße und -form	42
3.2.3	Windgeschwindigkeit	43
3.2.4	Windanströmwinkel	44
3.2.5	Neigungswinkel des Bauteils	45
3.2.6	Oberflächenbeschaffenheit des Seils	46
3.2.7	Turbulenz des Windes	46
3.2.8	Seildämpfung	48
3.2.9	Amplituden, Frequenzen und Eigenformen	52
<b>4</b>	<b>Darstellung der verwendeten Seiltheorie</b>	<b>53</b>
4.1	Die Kinematik des Einzelseils	54
4.2	Verfahren der Ortsdiskretisierung	57
4.2.1	Die Finite-Elemente-Methode	58
4.2.2	Die Ortsdiskretisierung mittels zentralem Differenzenverfahren	59
<b>5</b>	<b>Die numerische Umsetzung</b>	<b>65</b>
5.1	Programmaufbau	65
5.2	Lösung der Zeitdifferentialgleichungssysteme	67
<b>6</b>	<b>Anwendung der Seiltheorie auf parametererregte Seilschwingungen</b>	<b>73</b>
6.1	Auftreten parametererregter Seilschwingungen	74
6.2	Parametererregte Schwingungen beim pulsierend belasteten Druckstab	75
6.3	Parametererregung bei Seilen	78
6.4	Einarbeitung des Lastfalls Parametererregung	81
6.5	Ergebnisse der parametererregten Seilschwingungen	82
6.5.1	Eingabeparameter des berechneten Seiles	82
6.5.2	Ergebnisauswertung	84
6.5.3	Betrachtungen zur Stabilitätsuntersuchung	91
<b>7</b>	<b>Modellierung der Windkräfte und der Rinnsalschwingungen</b>	<b>95</b>
7.1	Allgemeine Modellierungsgrundsätze	96
7.2	Anwendung auf Regen-Wind-induzierte Schwingungen	99
7.2.1	Systemgrenzen und Zustandsgrößen	99



7.2.2	Umwelteinflüsse und deren Folgen für die Modellierung . . . . .	100
7.3	Modellierung der Windkräfte . . . . .	101
7.4	Modellierung des dynamischen Rinnsalverhaltens . . . . .	107
7.4.1	Erläuterungen zum gewählten Ansatz . . . . .	107
7.4.2	Bestimmung der Rinnsalkräfte . . . . .	109
7.5	Einarbeitung in MatLab . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Eingangsdaten für das Berechnungsbeispiel Erasmusbrücke</b>	<b>113</b>
8.1	Rinnsaleigenschaften . . . . .	113
8.1.1	Rinnsallänge . . . . .	113
8.1.2	Rinnsalmasse . . . . .	114
8.1.3	Rinnsaldämpfung . . . . .	115
8.1.4	Zusammenfassung der Rinnsaldaten . . . . .	124
8.2	Seildaten und Anströmung . . . . .	125
8.2.1	Seileigenschaften . . . . .	125
8.2.2	Umweltbedingungen . . . . .	127
8.3	Übersicht relevanter Parameter und Eingangsgrößen . . . . .	127
<b>9</b>	<b>Berechnungen zur Erasmusbrücke</b>	<b>129</b>
9.1	Übersicht . . . . .	129
9.2	Bestimmung der Anfangswerte . . . . .	131
9.2.1	Die statische Seilposition unter Eigengewicht und Vorspannung .	132
9.2.2	Die statischen Gleichgewichtslagen der Rinnsale . . . . .	136
9.2.3	Der Anfangszustand des Seiles vor der Simulation . . . . .	138
9.3	Schwingungen infolge Regen und Wind . . . . .	139
9.3.1	Berechnungen mit dem Grundmodell . . . . .	139
9.3.2	Modifizierung des Modells . . . . .	146
9.3.3	Schwinggeschwindigkeiten und deren Folgen auf die relative Umströmung . . . . .	159
9.3.4	Auswirkungen auf die Seilkraft . . . . .	164
9.3.5	Folgen der Modifizierung . . . . .	165
9.4	Parametererregte Seilschwingungen an der Erasmusbrücke . . . . .	166
9.4.1	Motivation und Eingangsdaten . . . . .	166
9.4.2	Ergebnisse für die Parametererregung . . . . .	166
9.4.3	Zusammenfassung der Parametererregung . . . . .	171

<b>10 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>173</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>182</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>183</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>185</b>

# Symbolverzeichnis

## 1. Matrizen

$\mathbf{M}, \mathbf{M}_\Phi$	Massenmatrix des Seils bzw. der Rinnsale
$\mathbf{D}, \mathbf{D}_\Phi$	Dämpfungsmatrix des Seils bzw. der Rinnsale
$\mathbf{C}, \Delta\mathbf{C}, \overset{\text{NL}}{\mathbf{C}}_\Phi$	lineare, nichtlineare Steifigkeitsmatrix des Seils bzw. nichtlineare Steifigkeitsanteile der Rinnsale
$\mathbf{P}, \mathbf{P}_\Phi$	Lastvektor des Seils bzw. der Rinnsale
$\mathbf{W}, \mathbf{R}$	Vektor der Wind- bzw. der Rinnsalkräfte

## 2. Koordinatensysteme

$x^i$ ( $i=1,2,3$ )	raumfestes, kartesisches Koordinatensystem
$\vec{e}_i$ ( $i=1,2,3$ )	zugehörige orthogonale Einheitsvektoren
$\vec{a}_i^*$ ( $i=1,2,3$ )	Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins
$x, y, z$	Richtungen des begleitenden Dreibeins

## 3. Geometrie und Eigenschaften des Seils

$L_0$	ungedehnte, spannungslose Länge im Az
$L$	Seillänge infolge Eigengewichtsbelastung
$\mu_0$	auf $L_0$ bezogene Massenbelegung
$A_0$	auf $L_0$ bezogene (metallische) Querschnittsfläche
$E$	Elastizitätsmodul (E-Modul) des Seiles
$D$	Seildurchmesser
$d$	Dämpfungskonstante
$\xi, \Lambda$	LEHRsches Dämpfungsmass, logarithmisches Dämpfungsdekrement
$\delta$	Seilneigung
$f_i, \omega_i$	Eigenfrequenzen, Eigenkreisfrequenzen

#### 4. Seiltheorie

$\Theta^1$	körperfeste, krummlinige Koordinate ( $0 \leq \Theta^1 \leq L_0$ ) → LAGRANGEScher Kurvenparameter
$\kappa, \lambda$	Parameter zur Bestimmung der statischen Seillinie
(...)	statischer Zustand infolge Eigengewichtsbelastung (Ez)
$\overset{\circ}{(\dots)}$	Momentan- oder Grundbewegungszustand (Mz)
$(\dots)_{,1}$	partielle Ableitung nach $\Theta^1$
$\vec{r}$	Ortsvektor zum Schwerpunkt der Querschnittsfläche
$\vec{v}$	Verschiebungs- bzw. Störverschiebungsvektor der Seilachse
$\delta_i^k$	KRONECKER-Delta
$\gamma = \gamma_{11}$	GREENSche Längsverzerrungen
$\vec{T} = \mathbf{T} = T\vec{a}_1$	Seilkraft im Ez
$\vec{S} = \mathbf{S} = S\vec{a}_1$	Seilkraft im Mz
$\Delta\vec{S} = \vec{S} - \vec{T}$	Seilkraftzuwachs bei Übergang von Ez → Mz
$n$	Anzahl der Elemente bei der Ortsdiskretisierung
$\Delta l$	Länge eines Seilelements

#### 5. Parametererregung

$\Delta u$	vorgegebene Auflageramplitude
$\Delta u_b$	vorgegebene Bezugsamplitude
$\Omega$	Erregerkreisfrequenz

#### 6. Rinnsaleigenschaften

$\varphi_1, \varphi_2$	Rinnsalposition des oberen bzw. unteren Rinnsals bezogen auf das begleitende Dreibein
$\alpha_1, \alpha_2$	Rinnsalposition des oberen bzw. unteren Rinnsals bezogen auf die relative Anströmung $U_{rel}$
$\mu_{R1}, \mu_{R2}$	Massenbelegung des oberen bzw. des unteren Rinnsals
$d_{\varphi 1}, d_{\varphi 2}$	Dämpfungsvariable des oberen bzw. des unteren Rinnsals zur Beschreibung der Scherwirkung zwischen Seil und Rinnsal
$\tilde{d}_{\varphi}$	massenunabhängige Dämpfungsvariable aus den Versuchen von DREYER

## 7. Regen-Wind-induzierte Schwingungen

$F_D, F_L$	Windkräfte (D $\rightarrow$ Drag (Widerstand) bzw. L $\rightarrow$ Lift (Auftrieb))
$M_{\varphi 1}, M_{\varphi 2}$	Moment auf die Rinnsale aus der Windbelastung
$C_D, C_L, C_{M1}, C_{M2}$	Windkraft- und -momentenbeiwerte
$U_0$	bodenparallele Windgeschwindigkeit des natürlichen Windfeldes
$U$	effektive, senkrechte Windgeschwindigkeit
$U_{rel}$	Anströmgeschwindigkeit des Seils unter Berücksichtigung der Strukturgeschwindigkeiten
$U_{rel,1}, U_{rel,2}$	Anströmgeschwindigkeit der Rinnsale unter Berücksichtigung der Strukturgeschwindigkeiten
$\gamma$	bodenparalleler Anströmwinkel zwischen Seil und Windfeld
$\beta$	Winkel zur Berechnung der effektiven Anströmung
$\alpha_v, \alpha_{v1}, \alpha_{v2}$	Anströmwinkel unter Berücksichtigung der Strukturgeschwindigkeiten
$\rho$	Dichte der Luft
$\chi$	Modifizierungsfaktor zur Berücksichtigung deformierbarer Rinnsale

Weitere Bezeichnungen sind unmittelbar im Text erklärt.

Entsprechend den Regeln der Indexschreibweise durchlaufen lateinische Indizes die Zahlen 1,2,3, griechische die Zahlenwerte 1 und 2. Bei gegenständigen Indizierungen ist die Summenkonvention von EINSTEIN anzuwenden.



# 1 Einleitung

Im Zeitalter immer schneller werdender Netzwerke und leistungstärkerer Rechnersysteme gibt es auch im vielseitigen Spektrum der Architektur und des Bauingenieurwesens immer extremere Konstruktionen getreu dem Motto: "höher, weiter, größer". Beispiele dafür sind z.B. das im Jahr 2010 in Dubai eröffnete höchste Gebäude der Welt *Burj Khalifa*" (ehemals *Burj Dubai*) mit einer Höhe von 828 m oder die seit 2009 im Bau befindliche längste und höchste Hängebrücke der Welt über die *Straße von Messina*, die ab dem Jahr 2016 das italienische Festland mit der vorgelagerten Insel Sizilien verbinden soll. Dabei sehen die Planungen - dieses auch politisch umstrittenen Projektes mit geschätzten Baukosten von etwa 6 Milliarden Euro - eine Turmhöhe von 382,60 m und eine Hauptspannweite von 3300 m vor. Aufgrund dieser Dimensionen ist man dabei gezwungen, den Eigengewichtsanteil möglichst gering zu halten. In vielen anderen Projekten wird und wurde in den letzten Jahrzehnten aus ästhetischen Gründen eine sehr filigrane und schlanke Bauweise realisiert.

Ein großer Nachteil dabei ist die hohe Schwingungsanfälligkeit dieser Konstruktionen. Auch wenn die statischen Lasten mit ausreichender Sicherheit abgetragen werden, so belasten die dynamischen Einwirkungen Tragwerke teilweise um ein Vielfaches stärker. Im Falle der ersten *Tacoma Narrows Bridge* im US-Bundesstaat Washington wurden beispielsweise die Grenzen der Tragfähigkeit infolge Windeinwirkung sogar überschritten, was am 07. November 1940 nur vier Monate nach ihrer Eröffnung zum Einsturz der Brücke führte. Neben der Schlankheit<sup>1</sup> mit geringer Steifigkeit begünstigte die aerodynamisch ungünstige Form des Fahrbahnträgers die Ausbildung von Torsions-Flatterschwingungen. Der entstehende Selbstanregungsmechanismus führte letztlich zum Versagen der Tragkonstruktion und zum spektakulären Einsturz der Brücke.

In anderen Fällen wurden Brücken wegen starker Schwingungen des gesamten Brückenüberbaus oder einzelner Bauteile zeitweise gesperrt. Die numerische Untersuchung zweier möglicher Ursachen für starke Seilschwingungen stellen den Schwerpunkt dieser Ar-

---

<sup>1</sup> $b / l = 1 / 72$       und       $h / l = 1 / 350$

beit dar. Dabei werden unter Verwendung einer Seiltheorie auf der Basis kontinuumsmechanischer Grundlagen die Parametererregung, die den fremderregten Schwingungen zuzuordnen ist, ausführlicher als in der Literatur und erstmals die Regen-Wind-induzierten Schwingungen aus der Gruppe der selbstinduzierten Schwingungen analysiert und an ausgewählten Beispielen validiert.

Am Beispiel der *Erasmusbrücke* in Rotterdam wird der Einfluss der Bewegung des Brückenüberbaus untersucht und gezeigt, dass die Auswirkungen auf die Seilschwingungen gravierend sind und im Gegensatz zur Literatur nicht als vernachlässigbar angesehen werden dürfen, da die berechneten Schwingungen hinsichtlich Schwingungsform und Amplituden gut mit den Beobachtungen übereinstimmen, die allerdings nicht der Parametererregung, sondern der Regen-Wind-Anregung zugeschrieben werden.

Bei den Regen-Wind-induzierten Schwingungen wird die relative Anströmgeschwindigkeit  $U_{rel}$  an jedem Diskretisierungspunkt ermittelt und als Verbesserung zu vielen Veröffentlichungen konsequent eingerechnet. Diese Arbeit zeigt, dass sich die Strömungsverhältnisse während des Schwingungsprozesses stark ändern, was diese Berücksichtigung unbedingt erforderlich macht. Bei den Rinnsalen wird erstmalig eine winkelgeschwindigkeitsabhängige Rinnsaldämpfung  $d_\varphi(\dot{\varphi})$  zur Abbildung der Scherwirkung zwischen Seil und Rinnsal eingeführt. Zur Berücksichtigung der Rinnsalverformung wird in einem modifizierten Fluid-Struktur-Struktur-Interaktionsmodell ein Deformationsfaktor  $\chi$  eingeführt, um die Regen-Wind-induzierten Schwingungen realitätsnäher beschreiben zu können.

### 1.1 Motivation

An den Seilen mehrerer Schrägseilbrücken und an den Hängern von Bogenbrücken sowie an Seilen abgespannter Masten sind in den achziger Jahren starke Schwingungen bei gleichzeitigem Auftreten von Regen und Wind beobachtet worden, die keinem zu dieser Zeit bekannten Anregungsmechanismus zugeordnet werden konnten. Über diese sogenannten Regen-Wind-induzierten Schwingungen berichtete als erster HIKAMI im Jahre 1986 von der *Meiko-Nishi-Brücke* (siehe Bild 1.1) in Japan.

In der Folgezeit sind zahlreiche wissenschaftliche Publikationen entstanden, in denen sich die Autoren einerseits mit der Klärung der Anregungsmechanismen auseinandersetzen und andererseits verschiedene Modelle entwickeln, um die notwendigen Schwingungsgleichungen aufzustellen und konkrete Ergebnisse ermitteln zu können. Darüber





Bild 1.1: Die Meiko-Nishi-Brücke in Japan [14]

hinaus sind auch diverse Windkanalversuche mit dem Ziel durchgeführt worden, aerodynamische Beiwerte als Grundlage der Berechnungen zu bestimmen. Die Modelle lassen sich in zwei Kategorien einteilen, wobei die erste auf der Streifenmethode unter Verwendung eines ebenen Ersatzsystems basiert und die zweite Kategorie das gesamte Seil über eine nichtlineare Seiltheorie in die Betrachtungen mit einbezieht.

Auch wenn zahlreiche vielversprechende Ansätze in der Literatur zu finden sind, ist es bisher jedoch keinem Autor gelungen, die komplexen Zusammenhänge dieses selbstinduzierten Schwingungsmechanismus hinreichend genau abzubilden.

Die Modelle auf Basis der Streifentheorie fassen das Seil über ein ebenes Ersatzsystem in einem Massenpunkt zusammen, der federnd und dämpfend gelagert ist. Aussagen zum gesamten Seil und den zugehörigen Schwingungsformen sind mit dieser Theorie nur bedingt möglich, da diese durch die Wahl von Parametern vorgegeben werden. Das erste Modell, das auf einer nichtlinearen Seiltheorie basiert, wurde im Jahr 2004 von DREYER veröffentlicht. Bei seinen Berechnungen erhielt er für die gewählten Berechnungsbeispiele ohne Turbulenz stets Schwingungen ausschließlich in der ersten Eigenform, obwohl an diesen Brücken für die Anregung durch Regen und Wind stets die zweite und dritte Eigenform beobachtet wurden.

## 1.2 Zielsetzung

Um das gesamte Schwingungsverhalten der Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen hinreichend genau erfassen zu können, wird eine in [H1] und [T2] veröffentlichte Seiltheorie verwendet. Die nichtlinearen Differentialgleichungen enthalten maximal kubi-

sche Nichtlinearitäten und sind den klassischen Gleichungen der Literatur (z.B. PETERSEN [P4]) mechanisch gleichwertig, aber einfacher strukturiert. Das ist auf die - in der Kontinuumsmechanik übliche - Verwendung der GREENSchen Verzerrungen zurückzuführen, siehe hierzu [H1] und [T2]. Im Gegensatz zu [T2] werden die partiellen Differentialgleichungen in dieser Arbeit unter Verwendung des Differenzenverfahrens in ein Zeitdifferentialgleichungssystem überführt.

Vor der Anwendung auf die selbsterregten Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen wird die modifizierte Seiltheorie zunächst auf die Parametererregung angewendet. Da zur Lösung ein selbst entwickeltes Programm verwendet wird, ist dieser Schritt notwendig, um zum einen die Seiltheorie und zum anderen das in *MatLab* geschriebene Programm zu überprüfen. Dazu werden für ein ausgewähltes Anwendungsbeispiel die wesentlichen Instabilitätsbereiche untersucht und in einer vollständig nichtlinearen Analyse die maßgebenden Schwingungsformen, Amplituden und Grenzzyklen ermittelt. Soweit möglich werden Versuchsbeobachtungen mit vorhandenen Literaturergebnissen verglichen.

Nach der Einarbeitung des Lastfalls Regen und Wind werden konkrete Berechnungen für ein Seil der *Erasmusbrücke* durchgeführt. Bei den Schwingungsuntersuchungen werden die von DREYER in Windkanalversuchen ermittelten aerodynamischen Beiwerte verwendet. Die Ergebnisse werden mit Beobachtungen an der *Erasmusbrücke* sowie mit erzielten Berechnungsergebnissen der Literatur [D2],[N1] und [R4] verglichen.

### 1.3 Gliederung

Im folgenden Kapitel wird zunächst das Phänomen der Regen-Wind-induzierten Schwingungen und deren Anregungsmechanismus erläutert. Dabei werden weitere winderregte Seilschwingungen beschrieben und Ähnlichkeiten sowie Unterschiede zu den Schwingungen infolge Regen und Wind aufgezeigt, da in einigen Literaturquellen der Versuch erfolgt, Regen-Wind-induzierte Schwingungen mit Hilfe bekannter Modelle, in erster Linie des *Gallopings*, zu simulieren. Dieses Kapitel endet mit der Vorstellung konstruktiver Maßnahmen zur Reduzierung Regen-Wind-induzierter Seilschwingungen.

Im dritten Kapitel werden einige der wichtigsten Modelle aus der Literatur sowohl nach der Streifentheorie unter Verwendung eines ebenen Ersatzsystems als auch auf Basis einer Seiltheorie kurz vorgestellt und bewertet. Weiterhin werden wesentliche Einfluss-

parameter zur Berechnung von Regen-Wind-induzierten Schwingungen vorgestellt. Die aus Beobachtungen und in Laborversuchen erzielten Ergebnisse für diese Größen werden zusammengefasst.

Nach der Vorstellung der in dieser Arbeit verwendeten Seiltheorie und deren Übergang von einem partiellen in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem über eine Ortsdiskretisierung mit Hilfe des Differenzenverfahrens im vierten Kapitel erfolgt im fünften Kapitel zunächst ein Exkurs zur Lösung von Differentialgleichungen in der Zeit sowie eine Erläuterung des im Mathematikprogramm *MatLab* verwendeten Lösers *ode45*. Weiterhin ist in diesem Kapitel der verwendete Programmaufbau erläutert.

Das sechste Kapitel wird den parametererregten Seilschwingungen und den Grundlagen der Stabilität gewidmet. Es werden Berechnungen für ein Seil durchgeführt und die Ergebnisse mit denen der Literatur [T2],[R1] und [T5] verglichen. Dabei wird in Anlehnung an durchgeführte Großversuche eine Parameterstudie über den Erregerfrequenzbereich durchgeführt, die über die in der Literatur verfügbaren Angaben deutlich hinausgeht und Aussagen über den Zusammenhang zwischen Stabilitätsproblemen und Schwingungsformen auch höherer Ordnung zulässt. In [T2] wurden aus dem Erregerfrequenzbereich der Versuche aus [R1] lediglich drei Punkte mit Schwingungen ähnlich der ersten Eigenform herausgegriffen und nachgerechnet. In dieser Arbeit wird der gesamte von REIF durch Versuche erfasste Bereich untersucht. Bei den Berechnungen wird man zwangsläufig auf das aus der nichtlinearen Differentialanalyse bekannte *Sprungphänomen* geführt. In Abhängigkeit der Anfangswerte können bei sonst gleichen Parametern unterschiedliche Grenzyklen durch das schwingende System eingenommen werden.

Im siebten Kapitel wird zunächst kurz der Modellbildungsprozess im Allgemeinen erläutert, bevor dann das verwendete Modell zur Simulation der Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen dargestellt wird. Dabei werden die Ansätze für die Wind- und Rinn-salkräfte erläutert und für die numerische Lösung aufbereitet.

Das Berechnungsmodell berücksichtigt eine Interaktion zwischen 3 Medien. Die umströmende Luft wird dabei als Fluid betrachtet; das schräg gespannte Seil als Struktur. Für die Rinnsale sind je nach Betrachtung verschiedene Ansätze möglich. In dieser Arbeit werden Rinnsale mit konstanter Querschnittsgeometrie betrachtet, um den Versuchen zur Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte mit starren Störkörpern zu entsprechen. Diese Rinnsale können sich an jedem Punkt des Seiles unabhängig voneinander, vergleichbar einem Pendel, auf der Seiloberfläche bewegen. Durch die Starrheit im

Querschnitt werden die Rinnsale in der 2D-Betrachtung als Struktur angesehen, so dass daraus eine Fluid-Struktur-Struktur-Interaktion resultiert. Die aufwendige Berücksichtigung der Querschnittsverformung der Rinnsale - Betrachtung als Fluid - würde folglich auf eine Fluid-Fluid-Struktur-Interaktion führen.

Bedingt durch die schwingenden Rinnsale auf der Seiloberfläche entstehen zwei gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungssysteme, eines für das Seil und eines für die beiden Rinnsale. Nach der Ortsdiskretisierung werden die gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Zeit durch ein selbst erstelltes *MatLab*-Programm gelöst.

Das achte Kapitel behandelt die Eingangswerte. Dabei werden die in der Literatur verfügbaren Daten zu den Rinnsalen und zum gewählten Berechnungsbeispiel des Seils 13 der *Erasmusbrücke* ausgewertet. Aufgrund der Auswertung eines Versuches von DREYER wird erstmals eine winkelgeschwindigkeitsabhängige Rinnsaldämpfung zur Beschreibung der Scherwirkung zwischen Seil und Rinnsal eingeführt.

Nach der Berechnung des Anfangszustands werden im neunten Kapitel die Ergebnisse für die Regen-Wind-induzierten Schwingungen mit dem Grundmodell vorgestellt und bewertet. Nach dem Vergleich mit der Literatur und den Beobachtungen wird eine Modifikation des Modells vorgenommen, da die bis dahin erzielten Ergebnisse im Vergleich mit den der Regen-Wind-Anregung zugeordneten Beobachtungen zu kleine Amplituden liefern. Diese Abwandlung geht in Richtung eines Ansatzes unter Berücksichtigung auch im Querschnitt deformierbarer Rinnsale, bei der die Rinnsale als Flüssigkeit angesehen werden. Um die Gültigkeit der aerodynamischen Beiwerte zu bewahren, bleibt das grundsätzliche Modell bestehen. Lediglich die Wirkung der Seilbeschleunigungen auf die Rinnsale wird durch einen Deformationsfaktor  $\chi$  reduziert.

Eine Alternative zur Erklärung der beobachteten Schwingungsphänomene an der *Erasmusbrücke* bietet die Parametererregung. Eine in der Literatur für diese Brücke dokumentierte Bewegung des Brückenüberbaus wird als Lastfall in die Seilgleichung eingearbeitet und es werden die daraus resultierenden Schwingungen berechnet.

Abschließend wird die Arbeit im zehnten Kapitel zusammengefasst. Die wesentlichen Erkenntnisse für die Simulation parametererregter und Regen-Wind-induzierter Schwingungen werden zusammengefasst und auf dieser Basis Vorschläge für Laboruntersuchungen gemacht, die bessere Eingangsdaten für künftige Berechnungen liefern. Abgeschlossen wird diese Arbeit mit einem Ausblick auf mögliche Erweiterungen des vorgestellten Modells.

## 2 Das Phänomen Regen-Wind-induzierte Schwingungen

### 2.1 Auftreten Regen-Wind-induzierter Schwingungen

#### 2.1.1 Allgemeiner Überblick

Der Japaner Y. HIKAMI (vgl. [H4]) beobachtete 1986 dieses Phänomen an der *Meiko-Nishi-Brücke* bei Nagoya und sprach erstmals 1987 auf der 7th International Conference on Wind Engineering in Aachen offiziell darüber. Er untersuchte die Brücke genauer und führte über einen Zeitraum von fünf Monaten Messungen durch, die Ergebnisse und Erkenntnisse über Windgeschwindigkeit, Windrichtung, Schwingungsamplitude und Dämpfung lieferten. Er kam zu der Erkenntnis, dass es sich bei diesen Schwingungen um einen neuen Anregungsmechanismus handeln müsse.

Nach ihrem Bekanntwerden sind diese Schwingungen auch in Amerika (z.B. *Fred-Hartman-Brücke* in Houston, Texas) und Europa aufgefallen. In [L2] konnten im Jahr 1993 erstmals Regen-Wind-induzierte Schwingungen an sehr steilen Hängern einer Bogenbrücke nachweisen. Die *Elbebrücke* bei Dömitz ist Deutschlands bekanntestes Beispiel, bei der die starken Regen-Wind-induzierten Schwingungen etwa zwei Jahre nach der Inbetriebnahme der Brücke zu Ermüdungsrissen an den Hängeranschlüssen führten. Durch eine Messeinrichtung, welche die angenommene Dämpfung bestätigen sollte, wurden die extremen Schwingungen als singuläre Ereignisse entdeckt und genauer untersucht. Im Laufe der Untersuchungen konnte man die Schwingungen dem neuen Anregungsmechanismus Regen-Wind-induzierter Schwingungen zuordnen. Diese führten im Resonanzfall zu beträchtlichen Amplituden, die im Bereich des zwei- bis vierfachen Seildurchmessers lagen. So wurden bei großen Schrägseilbrücken wie beispielsweise der *Öresundbrücke* (siehe Bild 2.1) zwischen Dänemark und Schweden Amplituden von bis zu 1,20 m registriert. Schwingungen mit 0,80 m großen Auslenkungen führten 1996 zu einer Sperrung der *Erasmusbrücke* in den Niederlanden. An allen Schrägseilen der Brücke traten heftige Schwingungen auf, welche erst durch das Abspannen der einzelnen Kabel untereinander sowie zum Unterbau unterbunden werden konnten [R4]. Auch



Bild 2.1: Die Öresundbrücke zwischen Dänemark und Schweden [N3]

hier wurden die Schwingungen durch die Kombination von Regen und Wind hervorgerufen. Videoaufzeichnungen sowie temporäre und dauerhafte Messungen sollten weitere Erkenntnisse über das Problem liefern.

Da reine Beobachtungen und Messungen nicht ausreichen, um dieses neuentdeckte Phänomen ausreichend genau zu beschreiben, versuchten viele Wissenschaftler, diese Art der Schwingungsanregung in Windkanalversuchen zu simulieren, um den Einfluss von Parametern wie Windanströmungswinkel, Windgeschwindigkeiten und Regenintensitäten genauer untersuchen zu können.

Nach dem aktuellen Stand der Forschung gibt es noch kein Rechenmodell, mit dem die Regen-Wind-induzierten Schwingungen hinsichtlich Schwingungsform und Amplituden hinreichend genau berechnet werden können. Zu den einzelnen Parametern lassen sich zwar grundsätzliche Aussagen zum Gefährdungspotenzial treffen, aber ob und unter welchen genauen Umständen diese Bedingungen zu einem Aufschaukelprozess führen, ist noch nicht abschließend geklärt. Dass es sich nicht um reine winderregte Schwingungen handeln kann, zeigen Beobachtungen und Versuche, bei denen sich die großen Amplituden unter gleichbleibenden Windverhältnissen erst bei einsetzendem Regen einstellten. Versuche dazu wurden u.a. am Stahlbauinstitut der RWTH Aachen durchgeführt.

Die Verhinderung Regen-Wind-induzierter Schwingungen lässt sich dagegen in der Praxis verhältnismäßig einfach realisieren, auch wenn die eigentlichen Seilschwingungen nicht berechnet werden können. Als praktikable Maßnahmen zur Dämpfung haben sich neben handelsüblichen Schwingungsdämpfern, wie Dosen- oder Kolbendämpfern, auch Stör- und Abspannseile oder profilierte Seiloberflächen als wirkungsvoll herausgestellt.

### 2.1.2 Regen-Wind-induzierte Schwingungen an der Erasmus-Brücke

Im September des Jahres 1996 wurde die *Erasmusbrücke* in Rotterdam durch die niederländische Königin eröffnet. Diese Schrägseilbrücke mit einer Spannweite von 280 m wird durch je 16 Seile in zwei Seilebenen gehalten, die wiederum an einem Hauptpylon befestigt sind, siehe Abbildung 2.2. Die verwendeten Schrägseile bestehen jeweils aus einer Gruppe von vier Einzelseilen, die von einem PE-Hüllrohr ummantelt sind.



Bild 2.2: Die Erasmus-Brücke in Rotterdam [14]

Am 4. November des gleichen Jahres traten unerwartet große Schwingungen an den Brückenseilen auf, so dass die Brücke zwischenzeitlich geschlossen werden musste. Als Ursache der Schwingungen konnte ein leichter Regen und Wind mit Geschwindigkeiten von etwa 14 m/s ausgemacht werden. Nach Zeugenberichten begannen die Schwingungen am Seil 13. Kurze Zeit später schwangen alle 32 Hauptseile. Die größten geschätzten Amplituden der Seile 9 bis 13 lagen mit etwa 80 cm in etwa beim vierfachen Seildurchmesser. Die Frequenz der Seilschwingungen konnte zwischen 0,75 und 1,2 Hz festgestellt werden. In einer ersten Notmaßnahme wurden die Schrägseile durch Polypropylenseile, sogenannte "Cross-Ties", mit dem Brückendeck verbunden. Zur weiteren Untersuchung wurde versucht, mit Hilfe von Videoaufnahmen die Schwingungsformen und die zugehörigen maximalen Amplituden zu ermitteln. Die Seile 13 bis 16 wurden während

der Aufnahmen bereits durch die beschriebene Notmaßnahme bedämpft. Dabei stellten sich in den wenigen dokumentierten Beobachtungen Schwingungen in der zweiten und dritten Eigenform ein. Die maximalen Schwingungsamplituden erreichten dabei Werte bis zum dreifachen Seildurchmesser:

Seil	Frequenz	Amplitude
Seil 9	1,25 Hz	$1,5D - 2D = 0,33 - 0,44$ m
Seil 11	0,70 Hz	$3D = 0,67$ m
Seil 12	0,83 Hz	$2,5D = 0,55$ m

Tab. 2.1: Beobachtete Schwingungsamplituden nach [G1]

Während der Beobachtungen wurde ebenfalls Wert auf die Dokumentation der Interaktion zwischen Brückendeck und Seilbewegung gelegt. Die Autoren in [G1] vertreten die Auffassung, dass trotz einer Schwingungsamplitude des Brückendecks von 50 mm (siehe [R2]) und der zugehörigen Frequenz von etwa 0,8 Hz in [G1] kein signifikanter Interaktionseffekt besteht, so dass dieser Mechanismus für die großen Bewegungsamplituden der Seile ausgeschlossen wurde.

Zur dauerhaften Lösung wurden nach intensiver Untersuchung und dem Abwägen verschiedener Möglichkeiten hydraulische Dämpfungselemente an den Schrägseilen installiert, siehe Kap. 2.4.

## 2.2 Erklärung der Anregungsmechanismen

Um das Phänomen Regen-Wind-induzierter Seilschwingungen besser zu verstehen, wird im folgenden Abschnitt versucht, den Anregungsmechanismus durch Regen und Wind für Abspannseile zu erläutern.

### 2.2.1 Windinduzierte Schwingungen

Nach DIN-Fachbericht 103 werden die Regen-Wind-induzierten Schwingungen den wind-erregten Schwingungen zugeordnet. Darin geht es jedoch nicht um die Seilschwingungen an sich, sondern um eine Nachweismöglichkeit für Hängeranschlüsse aus Stahl mit Hilfe



eines Ersatzlastverfahrens, da es zur Zeit noch keine bessere Möglichkeit der praktischen Berechnung gibt. Erstrebenswert ist allerdings eine auf physikalischen Grundlagen basierende Berechnung, wozu diese Arbeit ein weiterer Schritt sein soll.

Regen-Wind-induzierte Schwingungen werden durch die Fluidkräfte des Strömungsfeldes, das einen Körper umströmt, zu Schwingungen angeregt. Es findet wie bei allen windinduzierten Schwingungen ein Energieeintrag aus der umgebenden Luftströmung in das System statt. Grundsätzlich lassen sich die winderregten Schwingungen in resonanzinduzierte und selbstinduzierte Schwingungen aufteilen. Da der Anregungsmechanismus der Regen-Wind-induzierten Schwingungen lange nicht genau erklärt werden konnte, versuchten einige Autoren bekannte Anregungsmechanismen zur Erklärung und Berechnung dieses Phänomens heranzuziehen.

### 2.2.2 Stör- bzw. resonanzinduzierte Schwingungen

Kennzeichen für diese Arten der Schwingungsanregung ist die Eigenschaft, dass besonders dann große Amplituden auftreten, wenn die Frequenz der störinduzierten Kräfte nahe der Eigenfrequenz des erregten Systems liegt. Diese äußeren Störkräfte werden kaum durch die Bewegung des Bauteils beeinflusst. Somit kann der Lastvektor der Schwingungsdifferentialgleichung in aller Regel allein zeitabhängig dargestellt werden. Auch wenn bei Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen Resonanzeffekte eine Rolle spielen, lassen sie sich mit keiner der folgenden Anregungsarten erklären.

#### 2.2.2.1 Wirbelerregung

Bei der Wirbelerregung löst sich die zunächst glatte Strömung rhythmisch und wechselseitig in den sogenannten KÁRMÁNschen Wirbeln von den Flanken des (wind-) umströmten Profils ab. Die so entstehende Änderung des lateralen Drucks führt zwangsläufig auf eine Sogwirkung [P4] und damit zur Seilbewegung quer zur Anströmrichtung. Sie ist abhängig von der Oberflächenrauigkeit, der Anströmgeschwindigkeit  $v$  und vom Durchmesser  $d$  des Profils. Falls die Ablösefrequenz  $f_a$  der Wirbel

$$f_a = St \cdot \frac{v}{d} \tag{2.1}$$

im Bereich der Eigenfrequenz des Seiles liegt, kommt es zu Resonanzerscheinungen. Dabei steht  $St$  für die STROUHAL- Zahl und ist für Kreisquerschnitte etwa  $St \cong 0,2$  (siehe [D2]). Da die größten Amplituden für dieses Phänomen bei etwa 4 m/s in der ersten und zweiten Eigenform beobachtet wurden, kommt diese Anregungsform zur Erklärung der Regen-Wind-induzierten Schwingungen nicht in Frage.

Eine weitere mögliche Möglichkeit mit ähnlicher Anregung publizierte MATSUMOTO im Jahr 1999. Das so genannte *High-speed vortex-shedding* trat vor allem bei Windgeschwindigkeiten um 8 m/s an geneigten Seilen auf. Schwingungen dieser Art werden durch vergrößerte Ablösewirbel hervorgerufen, die in ganzzahligen Abständen zu den KÁRMÁNSchen Wirbeln auftreten. Auch diese Anregungen durch wechselseitige Ablösung der laminaren Strömung scheidet als Anregungsmechanismus für Regen-Wind-induzierte Schwingungen aus, da der Windgeschwindigkeitsbereich dieser Anregung dort endet, wo Regen-Wind-induzierte Schwingungen hauptsächlich beginnen, vgl. Abb. 2.10. Darüber hinaus fehlt bei beiden genannten Anregungsvarianten der Bezug zur Wechselwirkung zwischen Regen und Wind.

### 2.2.2.2 Böenerregung

Schwingungen infolge Böenerregung resultieren aus der Änderung der Windgeschwindigkeit und bewirken somit einen stetig veränderlichen Winddruck. Die Größe der Amplituden sind vor allem abhängig von der Profilform, der Windstärke und der Regelmäßigkeit der Anregung. Da Böen meist unregelmäßig und stoßartig einsetzen, kommt es praktisch nur durch hohe Windgeschwindigkeiten zu großen Auslenkungen. Diese sind fast ausschließlich in Anströmrichtung orientiert. Im Gegensatz dazu sind die großen Amplituden der Regen-Wind-induzierten Schwingungen vor allem quer zur Anströmrichtung vorhanden und treten bei gleichmäßiger Anströmung auf. Damit scheidet die Böenanregung als Erklärung der Regen-Wind-induzierten Schwingungen aus.

### 2.2.2.3 Interferenzschwingungen

Dieser Effekt tritt auf, wenn einem Bauteil ein anderes Objekt in Strömungsrichtung vorgelagert ist. Entsteht an dem vorherigen Objekt ein turbulenter Nachlauf aufgrund der bereits aufgeführten Anregungsmechanismen, so kann diese Turbulenz das Bauteil zu Schwingungen anregen. Dieser Effekt führte beispielsweise im November 1965 in

Ferrybridge, England, zum spektakulären Einsturz von 3 Kühltürmen.

Da Seile aufgrund relativ großer Abstände zueinander und kleiner Durchmesser nur sehr geringe Auswirkungen auf die Turbulenz haben, kann auch der Interferenzeffekt nicht zur Erklärung Regen-Wind-induzierter Seilschwingungen beitragen.

### 2.2.3 Selbst- bzw. bewegungsinduzierte Schwingungen

Im Gegensatz zu den störinduzierten Schwingungen wird diese Art der Schwingungen durch die Bewegung eines Körpers in einem Strömungsfeld selbst hervorgerufen und angefacht. Es handelt sich hierbei stets um Fluid-Struktur-Interaktionen. Der Lastvektor der Schwingungsdifferentialgleichung ist eine Funktion der Position, der Geschwindigkeit und den Beschleunigungswerten der sich bewegenden Struktur. Ein Bauteil kann durch eine Anfangsstörung zu Schwingungen angeregt werden, die durch einen Energieeintrag aus den Fluidkräften vergrößert werden. Die Schwingungsamplituden vergrößern sich, bis die anfachende Energie ebenso groß wie die dissipierte Dämpfungsenergie ist. Auch die bewegungs- oder selbstinduzierten Schwingungen von Seilen unterteilen sich in verschiedene Anregungsarten. Da recht schnell erkannt wurde, dass es sich bei den Regen-Wind-induzierten Schwingungen um selbsterregte handelt, gibt es Literaturquellen (z.B. [G1] und [R4]), die versuchen, Regen-Wind-induzierte Schwingungen mit bekannten Anregungsmechanismen dieser Gruppe zu erklären.

#### 2.2.3.1 Galloping

Das Phänomen des Galloping ist schon länger bekannt und wurde erstmals 1936 in [D1] beschrieben. Die ersten Beobachtungen machte man an vereisten Freileitungen. Diese Vereisung hatte eine Veränderung des zylindrischen Seilquerschnitts zur Folge, welche letztendlich für die Schwingungsanregung verantwortlich ist. An diesem unsymmetrischen Gesamtquerschnitt kann die Umströmung nicht mehr symmetrisch erfolgen und somit können sich die Ablösepunkte nicht mehr um das gleiche Maß an Ober- und Unterseite verschieben. Daraus entsteht eine unsymmetrische Druckverteilung, welche eine quer zur Windrichtung gerichtete Kraft erzeugt.

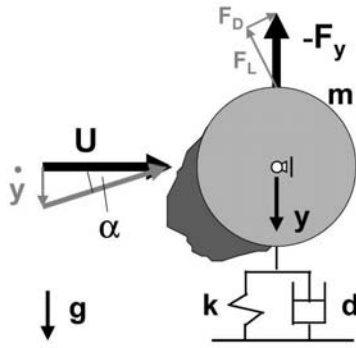


Bild 2.3: 1-FHG-Galloping-Modell [N1]

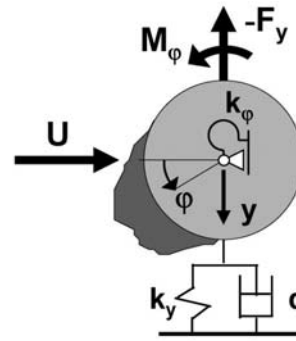


Bild 2.4: 2-FHG-Galloping-Modell[N1]

Für die Beschreibung des klassischen Galloping senkrecht zur Anströmrichtung ist meist ein zweidimensionales Modell mit einem Freiheitsgrad ausreichend. Unter Vernachlässigung der mechanischen Dämpfung entwickelte DEN HARTOG das Kriterium

$$\left( \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D \right) < 0 \quad (2.2)$$

für das Einsetzen der Galloping-Instabilität (siehe dazu auch die Ausführungen in [P4]), mit dessen Hilfe sich kritische Einsetzgeschwindigkeiten ermitteln lassen. Dieser Ansatz besitzt Gültigkeit für kleine relative Verschiebungswinkel  $\alpha$  zwischen stationärer und relativer Anströmung, wie in Abb. 2.3 dargestellt.  $C_L$  und  $C_D$  sind die Windkraftbeiwerte für Auftrieb (**L**ift) und Widerstand (**D**rag).

Die sich bei Regen bildenden Rinnsale an den Schrägseilen sind für die Umströmung bzw. für die Ablösepunkte der laminaren Strömung von ihrer Wirkung her vergleichbar mit einer Vereisung, können jedoch nicht mit der starren Störung des 1-FHG- oder 2-FHG-Galloping (siehe Abb. 2.3 und 2.4) verglichen werden, da sich die Rinnsale auf der Seiloberfläche relativ frei bewegen können.

Das Galloping mit nur einem Freiheitsgrad (siehe Bild 2.3) reicht in der Regel für die überschlägige Analyse von vereisten Überland- oder Abspannseilen aus. Berücksichtigt man den zweiten Freiheitsgrad der Torsion des umströmten Profils (siehe Bild 2.4) führt dies zu Kopplungseffekten beider Freiheitsgrade. Es stellen sich je nach Verdrehung instationäre Luftkräfte ein, die letztlich zu Flatterschwingungen führen können. Der Rechenaufwand bei dieser Variante erhöht sich jedoch deutlich.

Im Modell von GEURTS und VAN STAALDUINEN [G1] werden die Anregungsmechanismen des Galloping auf Regen-Wind-induzierte Schwingungen projiziert. Bei Wahl ge-

eigneter Eingangsparameter erhält man nach der Streifenmethode (siehe Kapitel 3.1.9) auch entsprechende Amplituden. Physikalisch gesehen entspricht der Anregungsmechanismus jedoch nicht oder nur teilweise dem der Regen-Wind-induzierten Schwingungen. Auch ROBRA, siehe [R4], verwendet in seinen Berechnungen u.a. Modelle mit unbeweglichem Rinnsal. Bei Vergleichsrechnungen mit fixem und beweglichem Rinnsal stellt er fest, dass nur die Modelle mit beweglichem Rinnsal zur Ausbildung des für Regen-Wind-induzierte Schwingungen typischen Grenzyklus einer flachen, leicht geneigten Ellipse führen.

### 2.2.3.2 Spiralseilflattern

Das Schwingungsverhalten von spiralförmig profilierten Seilen wird stark beeinflusst durch eine Anströmung im kritischen Bereich. Aufgrund der unterschiedlichen Anstellwinkel der Profilierung auf der Ober- und Unterseite, die aus der Schrägstellung des Seils resultieren, ergeben sich verschiedene Ablösepunkte und somit schaukeln sich die Schwingungsamplituden auf [N1]. Es treten bei einer Anfachung sowohl Seilbewegungen quer zur Anströmrichtung als auch in Anströmrichtung auf. Größere Amplituden werden bei Schwingungen in Windrichtung erreicht. Da Regen-Wind-induzierte Schwingungen an unprofilierten Seilen mit größeren Amplituden quer zur Anströmung auftreten, kommt das Spiralseilflattern nicht als Erklärung in Frage. Durch die Profilierung wird die Bildung von ablaufenden Regenrinnsalen gestört und die Regen-Wind-induzierten Schwingungen eher verhindert als hervorgerufen.

### 2.2.3.3 Drag instability oder Drag crisis

Merkmal dieser Schwingungsart ist das Absinken des aerodynamischen Widerstandsbeiwertes  $C_D$  bei Seilen mit Kreisprofil. Dies geschieht, wenn die REYNOLDS-Zahl einen kritischen Bereich erreicht. Die REYNOLDS-Zahl lässt sich mit Hilfe der Anströmgeschwindigkeit  $U$ , der kinematischen Zähigkeit  $\nu$  des strömenden Fluids und dem umströmten Kreisdurchmesser  $d$  berechnen, siehe [P4] oder [N1]:

$$Re = \frac{U \cdot d}{\nu} \tag{2.3}$$

Ab einer gewissen Windgeschwindigkeit befindet sich die REYNOLDS-Zahl im kritischen Bereich, was ein Schwingen des Seils in Anströmrichtung bewirkt, da der von der Rauigkeit abhängige Widerstand plötzlich stark absinkt, siehe Bild 2.5. Durch diese Bewegung erhöht sich die relative Anströmgeschwindigkeit und somit auch die REYNOLDS-Zahl. Diese Erhöhung verursacht ein weiteres Absinken des Widerstandsbeiwertes  $C_D$ . Der Schwingungsprozess in Anströmrichtung facht sich selbst an. Für das Diagramm 2.5 aus [N1] am Beispiel eines glatten Zylinders gilt für den Widerstandsbeiwert:  $C_{drag} = C_D$ .

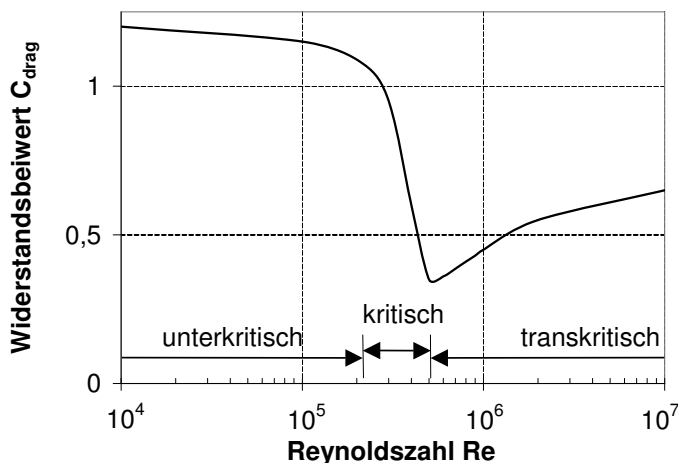


Bild 2.5: Widerstandsbeiwert eines glatten Kreiszylinders [N1]

Da Regen-Wind-induzierte Schwingungen hauptsächlich bei Windgeschwindigkeiten bis 15 m/s auftreten, ist der Einfluss der REYNOLDS-Zahl nach [N1] vernachlässigbar klein, da diese meist mit  $Re = 7 \cdot 10^4$  im unterkritischen Bereich liegt. In [R4] sind für durch Regen-Wind-induzierte Schwingungen betroffene Brücken durchaus auch Werte bis  $Re = 2,05 \cdot 10^5$  verzeichnet, die dem kritischen Bereich sehr nahe kommen. Die Einteilung der Bereiche für den Widerstandsbeiwert in Abb. 2.5 gilt für ungestörte Kreisprofile. In [E1] wird gezeigt, dass bei gestörten Kreisprofilen (z.B. durch Regenrinnale auf dem Seil) der Effekt des Absinkens der Beiwerte bei sonst gleicher Rauigkeit schon bei eigentlich niedrigeren REYNOLDS-Zahlen eintritt, wie es auch am Beispiel des PRANDTLschen Stolperdrahtes im Kapitel 2.2.4 beschrieben wird.

Wegen der hauptsächlich Schwingungen in Anströmrichtung und nicht quer dazu kann dieser Effekt bei Berücksichtigung der Relativbewegungen die Regen-Wind-induzierten Schwingungen verstärken, jedoch wohl nur bedingt erklären.

### 2.2.4 Regen-Wind-induzierte Schwingungen

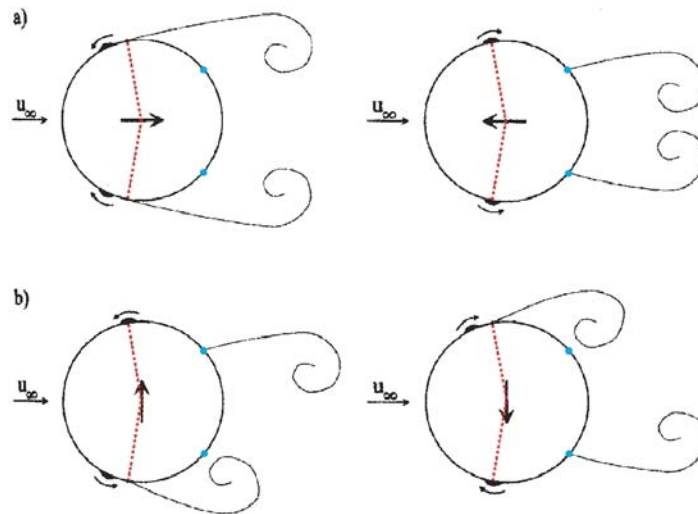
Nach der Entdeckung Regen-Wind-induzierter Schwingungen durch HIKAMI folgten weitere, gezielte Beobachtungen dieses neuentdeckten Phänomens wie z.B. an der *Farø-Brücke* (Bild 2.6) in Dänemark, der *Elbebrücke* bei Dömitz oder der *Köhlbrandbrücke* in Deutschland.



Bild 2.6: Farø-Brücke, Dänemark [I3]

Die Forscher vermuteten zunächst einen Anregungsmechanismus ähnlich dem des Galloping. Durch die beweglichen Rinnsale sind die physikalischen Zusammenhänge allerdings wesentlich komplexer, auch wenn die Ursache tatsächlich ähnlich ist. In [N1] wird festgestellt, dass Regen-Wind-induzierte Schwingungen den selbsterregten Schwingungen zuzuordnen sind.

Bei Regen bildet sich an geneigten Schrägseilen ein frei bewegliches Regenrinnsal zunächst an der Unterseite, in dem das Regenwasser abläuft. Ab einer Windgeschwindigkeit von etwa 5 m/s ist die Stützwirkung der Windkräfte groß genug, so dass sich ein zweites Rinnsal an der Oberseite des Seiles halten kann. Die beiden Rinnsale schwingen bei Windeinwirkungen hauptsächlich zwischen 6 m/s und 15 m/s um eine gewisse statische Ruhelage. Abhängig von der äußeren Einwirkung können die Rinnsale gleichgerichtet oder in entgegengesetzter Richtung schwingen, was nach [S4] entweder zu Schwingungen in oder quer zur Anströmrichtung führt (siehe Abb. 2.7).



Ablösepunkte nach DINKLER

Bild 2.7: Schwingungsmöglichkeiten bei 2 Rinnsalen [S4]

Bei dieser Bewegung durchschreiten sie in regelmäßigen Abständen die Ablösepunkte der laminaren Strömung. Dadurch löst sich die laminare Strömung vor dem eigentlichen Ablösepunkt ab, legt sich allerdings kurz danach wieder an und reißt erst wesentlich später erneut vom Querschnitt ab, was zu einer deutlichen Reduktion des Widerstandsbeiwertes führt. Dieses Phänomen wurde schon 1914 von PRANDTL entdeckt. Er befestigte damals an einer Kugel mit dem Durchmesser von 30 cm einen etwa 1 mm starken Draht knapp vor dem Ablösepunkt. Das Strömungsverhalten änderte sich gravierend (siehe Abb. 2.8 und 2.9).



Bild 2.8: Kugel ohne Stolperdraht aus [S4]

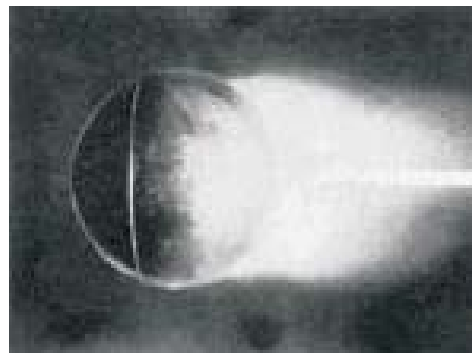


Bild 2.9: Kugel mit Stolperdraht aus [S4]



Bei den Regen-Wind-induzierten Schwingungen kommt es durch die Bewegung der Rinnsale also permanent zu einem Wechsel zwischen unterkritischem und überkritischem Strömungsverhalten. Da dies an der Ober- und Unterseite der Seile zu unterschiedlichen Zeitpunkten geschieht, bewirkt die daraus resultierende Druckverteilung einen permanenten Energieeintrag in das System, der schließlich in erster Linie zu Vertikalschwingungen führt. Somit handelt es sich um einen selbsterregten, bewegungs-induzierten Anregungsmechanismus, der erst durch die Kopplung der Rinnsal- und Seilschwingung hervorgerufen wird. Die Regen-Wind-induzierten Schwingungen sind auf eine komplizierte Fluid-Fluid-Struktur-Interaktion zurückzuführen. Das Schrägseil schwingt dreidimensional in einer Luftströmung. Auf dem Seil selbst schwingen zwei Regenrinnsale. In Abhängigkeit der Position und der Geschwindigkeit des Seils und der Rinnsale ändert sich die Wirkung des umströmenden Windes hinsichtlich der aerodynamischen Beiwerte und der relativen Anströmgeschwindigkeit.

## 2.3 Zusammenfassung der Anregungsmechanismen

Neben den neu entdeckten Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen wurden in diesem Kapitel weitere Anregungsmechanismen von Seilen aufgezeigt, die bereits durch Modelle berechnet werden können. Keines dieser Modelle kann die komplexen Zusammenhänge bei den Regen-Wind-induzierten Schwingungen hinreichend genau erfassen. Es handelt sich um eine Anregung, die teilweise dem Galloping ähnelt, durch die sich bewegenden Rinnsale jedoch deutlich komplizierter zu beschreiben ist und mehr Wechselwirkungen beinhaltet.

Wie Bild 2.10 aus [N1] zeigt, können Regen-Wind-induzierte Schwingungen im Vergleich zu anderen Anregungsarten sehr große Schwingungsamplituden zur Folge haben. Die im Bild 2.10 gestrichelt markierten Linien sind Schwingungen in Windrichtung, die vollen Linien sind Schwingungen quer zur Anströmrichtung. Wegen der möglicherweise großen Amplituden und den daraus resultierenden Folgen wird auf dem Gebiet der Regen-Wind-induzierten Schwingungen sehr rege geforscht, um die Schwingungen rechnerisch bestimmen zu können und um schon beim Bau von Seilkonstruktionen gezielte Gegenmaßnahmen zur Schwingungsdämpfung einbauen zu können, siehe Kap. 2.4.

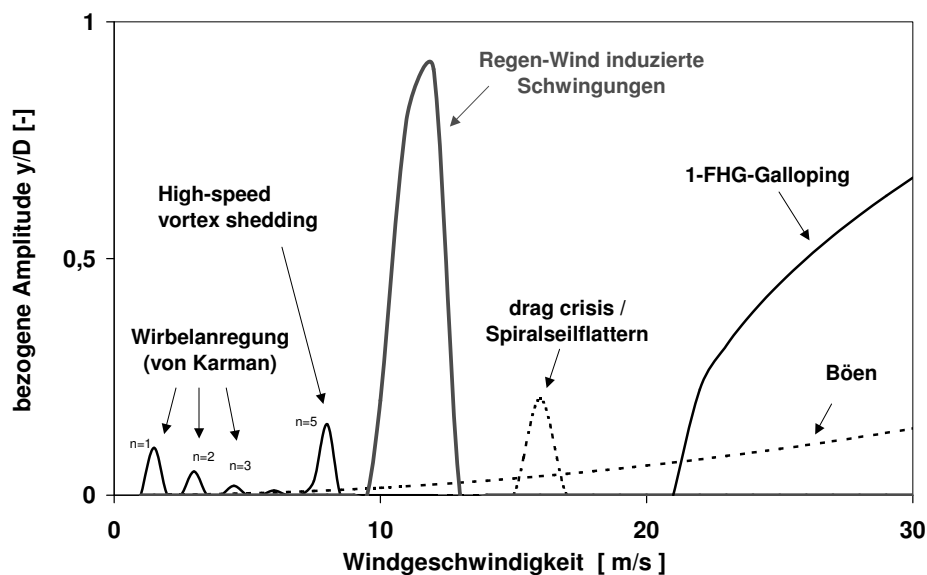


Bild 2.10: Überblick über Anregungsmechanismen bei Seilen [N1]

## 2.4 Konstruktive Dämpfungsmaßnahmen

Da Seile eine sehr geringe innere Dämpfung aufweisen, sind gerade lange Seile, wie z.B. bei Schrägseilbrücken, sehr schwingungsanfällig. Wie sich gezeigt hat, ist es relativ einfach, durch konstruktive Maßnahmen den Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen entgegenzuwirken, während die hinreichend genaue Berechnung dieses Phänomens noch Probleme bereitet.

Die durchgeführten Maßnahmen lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Entweder wird durch gezielte Oberflächenprofilierungen der Schrägseile die Bildung von Rinnsalen verhindert, so dass der Selbstanregungsprozess Regen-Wind-induzierter Schwingungen nicht entsteht. Oder die entstehenden Schwingungen werden durch Dämpfer oder Verspannungen unterbunden oder minimiert.

Als wirksame Profilierungsformen haben sich die in Abb. 2.11 dargestellten Möglichkeiten der Längsrillen, der Spiralerillen oder der Noppen herausgestellt. Eine weitere, auch nachrüstbare Möglichkeit, um die Bildung von Rinnsalen zu verhindern, sind sogenannte Abtropfringe. Ein Ring ist schematisch in Abb. 2.12 dargestellt. Die Profile sollten nach [R4] zwischen 1 % und 4% des Seildurchmessers hoch sein. Bei Spiralerillen, Noppen und Abtropfringen sollte der Abstand der Störprofile zueinander in Seillängs-

richtung etwa das 1,5-fache des Seildurchmessers betragen. Die Längsrillen unterbinden zwar wirksam Regen-Wind-induzierte Schwingungen, jedoch besteht die Gefahr, dass die starren Störkörper Schwingungen infolge Galloping hervorrufen können.

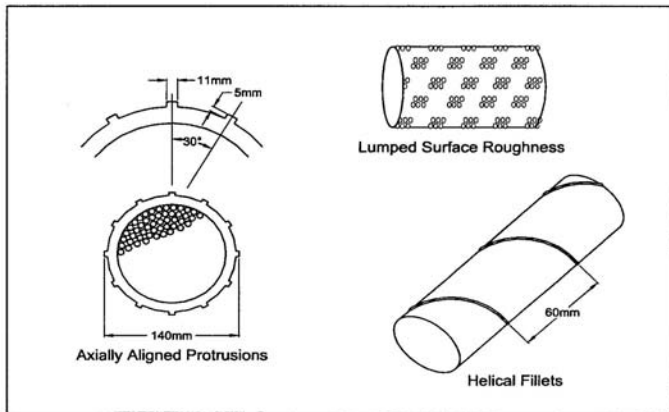


Bild 2.11: mögliche Oberflächenprofilierungen [K2]

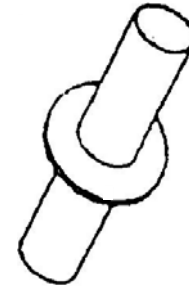


Bild 2.12: Abtropfring [R4]

Eine weitere Maßnahme, um die Seilschwingungen zu reduzieren sind Seilverspannungen. In der einfachsten Variante werden hochdämpfende Polypropylenseile entweder mit anderen Brückenseilen oder mit dem Brückenüberbau verbunden. Diese Methode eignet sich vor allem als Sofortmaßnahme bei unerwartet auftretenden Schwingungen, wie zum Beispiel am 04. November 1996 an der *Erasmusbrücke* in Rotterdam. Als dauerhafte Lösung werden sogenannte "Cross-Ties" [R2], wie in Abb. 2.13 beispielhaft dargestellt, verwendet, die entweder in einer Reihe oder auch kreuzweise angeordnet werden können.

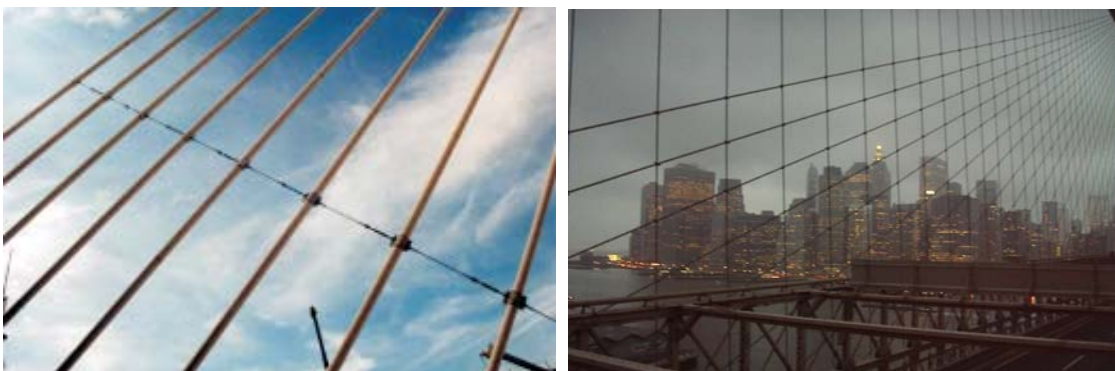


Bild 2.13: Cross-Ties: links: Fred-Hartman-Brücke [K2]; rechts: Brooklyn-Bridge [G3]

Um Schäden infolge von Seilschwingungen an den Auflagern zu verhindern, wie an der *Elbebrücke* Dömitz, gibt es die Möglichkeit bereits in der Planungsphase die Seile mit Ankerdämpfern an die Brücke anzuschließen, siehe Abb. 2.14. Um die Seilschwingungen selbst zu reduzieren, werden entweder Kolbendämpfer in der Nähe der Auflager oder Dämpfertöpfe verwendet. Beide Möglichkeiten der externen Dämpfung lassen sich nachträglich installieren. Die Einstellung der Dämpfer sollte so erfolgen, dass die Seildämpfung nach [R2] und [G2] auf Minimalwerte von 0,5%, besser 0,8% erhöht wird. Als dauerhafte Lösung an der *Erasmusbrücke* wurde die in Abb. 2.15 dargestellte Lösung mit zwei hydraulischen Kolbendämpfern je Seil ausgeführt. Die Dämpfer des Seil 1 und der Seile 14 bis 16 haben charakteristische Werte von je 30 kNs/m, die Dämpfer der übrigen Seile je 25 kNs/m [G2]. Diese hydraulischen Dämpfer erfordern zwar einen erhöhten Wartungsaufwand, sind im Gegensatz zu viskosen Dämpfern jedoch weniger temperaturanfällig.



Bild 2.14: Ankerdämpfer [K2]



Bild 2.15: Kolbendämpfer (Erasmusbrücke) [R2]

## **3 Regen-Wind-induzierte Schwingungen: Modelle und Einflussgrößen**

In den Jahren nach der Entdeckung gab es eine ganze Reihe verschiedener Versuche und Messungen, anhand derer das Phänomen der Regen-Wind-induzierten Schwingungen näher untersucht wurde. Mit den Erkenntnissen aus diesen Untersuchungen versuchten verschiedene Wissenschaftler Modelle zu entwickeln, die diese Art der Schwingungen beschreiben bzw. erklären können. Nachfolgend werden ausgewählte Modelle näher erläutert und anschließend wird ein Überblick über die wichtigsten Einflussparameter gegeben. Es gibt mehr als die hier aufgeführten Berechnungsmodelle für Regen-Wind-induzierte Schwingungen. Es sind in dieser Arbeit die wichtigsten Verfahren herausgegriffen worden, so dass ein möglichst großes Spektrum verschiedener Modellansätze dargestellt wird.

### **3.1 Modelle in der Literatur**

Die Modelle zur Simulation Regen-Wind-induzierter Seilschwingungen lassen sich zunächst in verschiedene Gruppen einteilen. Jeweils zwei unterschiedliche Ansätze gibt es bei der Modellierung der Seile und der Rinnsale. Für die Seile gibt es Modelle auf Basis der Streifenmethode und Modelle auf Basis einer Seiltheorie, die das gesamte Seil erfassen. Bei den Modellen der Streifenmethode wird die Seilmasse eines Seilstreifens mithilfe eines ebenen Ersatzsystems in einem Massenpunkt zusammengefasst, der dann je nach Modellierungsgenauigkeit in ein oder zwei Richtungen ausschließlich federnd oder federnd und dämpfend gelagert wird. Modelle dieser Art vernachlässigen die Seillängsrichtung in jeder Hinsicht. Somit können Eigenformen nicht dargestellt werden. Diese gehen lediglich bei der Bestimmung der Dämpfungs- und Federeigenschaften über einen Beiwert in die Berechnung ein. Modelle der Streifentheorie führen direkt auf gewöhnliche Differentialgleichungen in der Zeit.

Modelle, die auf einer Seiltheorie basieren, liefern wegen der zusätzlichen Ortsabhängigkeit partielle Differentialgleichungssysteme. Somit können diese Modelle verschiedene Seileigenformen darstellen und über die Seillänge veränderliche Seileigenschaften richtig abbilden. Nachteil dieser Modelle ist ein stark erhöhter Rechenaufwand, da es sich um gekoppelte, nichtlineare, partielle Differentialgleichungssysteme handelt.

Bei den Rinnsalen unterscheiden sich die zwei Gruppen hinsichtlich der möglichen Querschnittsänderung der Rinnsale. Die eine Gruppe betrachtet die Rinnsale als im Querschnitt unveränderliche Starrkörper (Struktur), während die andere Gruppe ein Rinnsal betrachtet, das sich aus einem Wasserfilm heraus bildet und sich in der Querschnittsgeometrie permanent verändern kann (Fluid).

### 3.1.1 Das Modell von YAMAGUCHI (1990)

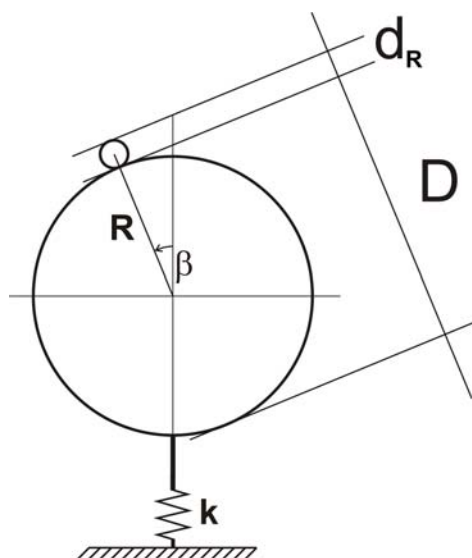


Bild 3.1: Das mechanische Modell von Yamaguchi (1990) [Y1]

YAMAGUCHI stellt im Jahr 1990 ein erstes einfaches 2-Freiheitsgrad (FHG)-Modell auf der Basis der Streifentheorie vor. Es besteht aus einem federnd gestützten Seilquerschnitt mit einem beweglichen, oberen kreisförmigen Rinnsal mit einem unrealistischen Größenverhältnis von  $d_R/D = 0,1$ . Das Rinnsal bewegt sich vergleichbar einer Pendelbewegung auf der Seiloberfläche. Dämpfungseinflüsse bleiben in diesem einfachen Modell unberücksichtigt. Angeregt wird dieses System durch eine Luftkraft auf den Seilquerschnitt und eine Momentenwirkung auf das Rinnsal, für deren Bestimmung er

in Laborversuchen mit starrem Störkörper erste Windkraftbeiwerte in Abhängigkeit der Position des Rinnsals bestimmt hat. Für die auf das Seil wirkenden Kräfte verwendet er die bekannte Beziehung, dass die Windkraft dem Produkt aus Staudruck und aerodynamischen Beiwert entspricht. Ausgehend vom kinetischen Kräfte- und Momentengleichgewicht stellt YAMAGUCHI stark vereinfachte, linearisierte Bewegungsgleichungen auf. Mit ihnen ist eine hinreichend genaue Erfassung der realen Bewegungen von Seil und Rinnsal nicht möglich. Das Modell, das den bewegungsinduzierten Anregungsmechanismus aufgreift, liefert die Grundlage für diverse Weiterentwicklungen.

### 3.1.2 Weiterentwicklung durch XU und WANG (2003)

Zur Verbesserung des Modells von YAMAGUCHI implementieren XU und WANG 2003 [X1] die Zeitschrittintegration mittels RUNGE-KUTTA-Verfahren. Bei ihren Berechnungen werden die von YAMAGUCHI am Querschnitt mit künstlichem Rinnsal ermittelten Windkraftbeiwerte zugrunde gelegt. Wie beim Grundmodell von YAMAGUCHI stimmt auch beim Modell von XU und WANG die rechnerisch ermittelte Ruhelage des Rinnsals kaum mit der Realität überein. Trotzdem ermitteln sie Schwingungsamplituden der untersuchten Seile, die eine relativ gute Übereinstimmung mit gemessenen Werten liefern (siehe Abb. 3.2 und 3.3).

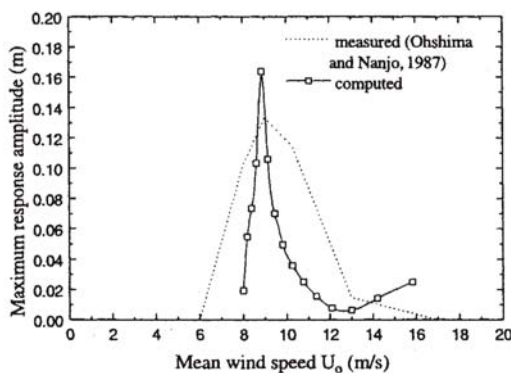


Bild 3.2: Vergleich der berechneten Amplituden mit Messungen von OHSHIMA [W1]

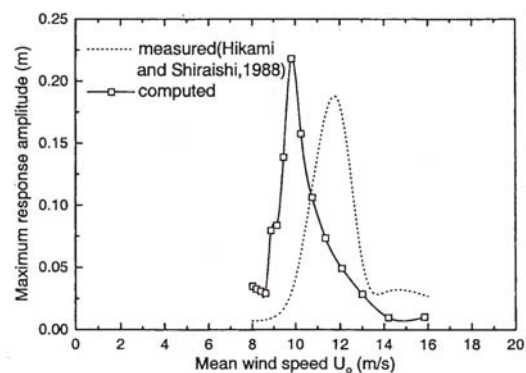


Bild 3.3: Vergleich der berechneten Amplituden mit Messungen von HIKAMI [W1]

### 3.1.3 Die Modelle von PEIL und NAHRATH (2003)

Die Überlegungen von YAMAGUCHI greifen PEIL und NAHRATH im Jahr 2001 auf und erweitern das Modell in [N1] auch unter Verwendung eines ebenen Ersatzsystems. Sie modellieren einen Dreimassenschwinger mit 2 Rinnsalen und 4 Freiheitsgraden (siehe Abb. 3.4). Das Seil kann sich quer zur und in Windrichtung translatorisch bewegen. Die Seilmasse  $m$  ist nichtlinear federnd gestützt und viskos gedämpft. Um die Gleitreibung des Rinnsals auf der Seiloberfläche abzubilden, führen sie einen Dämpfer am Rinnsal ein, der Dämpfungsmomente proportional zur Winkelgeschwindigkeit liefert. Mit ihrem Modell ermitteln sie zunächst mögliche Rinnsalruhelagen und untersuchen diese auf ihre Stabilität mit Hilfe der Verzweigungstheorie [N1]. Die Windanströmung erfolgt schräg

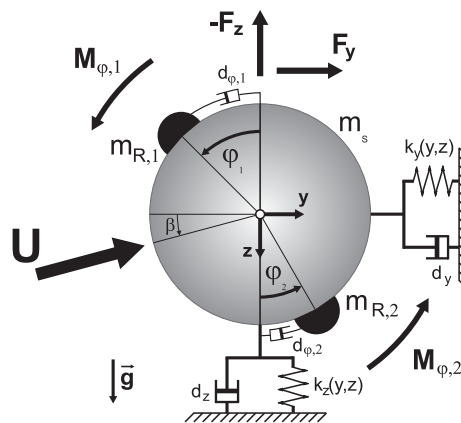


Bild 3.4: Das mechanische Modell von PEIL und NAHRATH (2001) [N1]

unter dem Winkel  $\beta$  bei einer Seilneigung  $\delta$  (siehe Bild 3.8).

Aus den beiden translatorischen Freiheitsgraden des Seils und den Bewegungen der Rinnsale ergeben sich vier nichtlineare gekoppelte Bewegungsgleichungen. Kopplungsterme und Nichtlinearitäten in den aerodynamischen Kräften sind enthalten. PEIL und NAHRATH gehen von geringen Strukturgeschwindigkeiten aus und setzen deswegen  $U_{rel} \cong U$ . Die nichtlinearen und gekoppelten Bewegungsgleichungen 2. Ordnung werden in ein System nichtlinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung umgeformt, welche dann mit der Verzweigungs- und Stabilitätstheorie untersucht werden.

Die Schwingungsamplituden stimmen mit den beobachteten größenordnungsmäßig gut überein. Durch die Verwendung der Streifenmethode werden Parameter in den Differentialgleichungen vorgegeben, die zu einer bestimmten Schwingungsform gehören.



### 3.1.4 Das Berechnungsmodell von DREYER (2004)

Aufbauend auf [Y1], [P2] und [N1] wird in dem Modell von DREYER in [D2] aus dem Jahr 2004 erstmals das Seil mit seinen dreidimensionalen Bewegungsmöglichkeiten in die Berechnung einbezogen. Hierbei nutzt er die teilweise linearisierte Seiltheorie nach PETERSEN [P4]. Unter Verwendung vereinfachter 2-dimensionaler NAVIER-STOKES-Gleichungen modelliert er die Entstehung der Regenrinnale aus einem Wasserfilm auf der Seiloberfläche und deren Bewegungsverhalten unter Windeinfluss. Damit wird das Rinnsal als Fluid, nicht als Starrkörper, modelliert. Aussagen zum Rinnsalverhalten über die Seillänge werden nicht getroffen. Auch in seinem Modell wird die relative Anströmgeschwindigkeit  $U_{rel}$  durch die wirksame Geschwindigkeit  $U$  angenähert.

DREYER führt umfangreiche Parameterstudien durch, die Untersuchungen zu Windgeschwindigkeiten, Anström winkeln und zum Turbulenzgrad beinhalten. Mit dem um wichtige Einflüsse erweiterten Modell kann DREYER die bei Regen und Wind auftretenden Schwingungen berechnen. Dabei kommt es zu guten Übereinstimmungen zu beobachteten Schwingungsamplituden. Als Schwingungsform jedoch wird ohne Berücksichtigung von Turbulenzen ausschließlich die erste Eigenform berechnet, obwohl für die von ihm gewählten Beispiele stets Schwingungen in der 2. und 3. Eigenform beobachtet wurden. Diese nicht unerheblichen Unterschiede treten sowohl an der *Erasmusbrücke* (Niederlande) als auch an der *Fred-Hartman-Brücke* (USA) auf. Schwingungen des Seils in der dritten Eigenform berechnet DREYER nur unter Berücksichtigung von Turbulenz, siehe Kap. 3.2.7. Zu den Schwingungsformen der Rinnsale in Seillängsrichtung sind keine Informationen enthalten.

### 3.1.5 Das Galloping-Modell von GEURTS und VAN STAALDUINEN (1999)

Wegen beobachteter starker Schwingungen der Schrägseile an der *Erasmusbrücke* in Rotterdam im Jahre 1996 entwickeln GEURTS und VAN STAALDUINEN ein Modell zur Berechnung der Schwingungen, um daraus notwendige Dämpfungsmaßnahmen ableiten zu können (siehe [G1]). Dieses Modell basiert auf der Grundlage der Galloping-Theorie (siehe Kapitel 2.2.3.1) und beinhaltet einen Einmassenschwinger mit nur einem Freiheitsgrad, an dem das Rinnsal fest angebracht ist. Die einzige Bewegungsrichtung, die abgebildet wird, ist die Bewegung quer zur Anströmrichtung. Somit spiegelt dieses einfache Berechnungsmodell basierend auf der Streifentheorie nicht den komplexen be-

wegungsinduzierten Anregungsmechanismus vollständig wider.

Für ihre Berechnungen nutzen die Autoren die Luftkraftbeiwerte von MATSUMOTO, welche zur Vereinfachung durch ein Polynom dritten Grades annähert werden. Das Rinnsal wird zur Berechnung an einer Position als fest angenommen. Das erläuterte Modell von GEURTS und VAN STAALDUINEN [G1] ist -aufgrund des nicht korrekt eingearbeiteten Anregungsmechanismus- nicht in der Lage, den begrenzten, instabilen Windgeschwindigkeitsbereich abzubilden. Die Berechnungen liefern bei steigenden Windgeschwindigkeiten immer steigende Amplituden, obwohl dies weder mit Beobachtungen noch mit Messungen übereinstimmt. Modelle mit beweglichen Rinnsalen liefern den beobachteten, begrenzten Windgeschwindigkeitsbereich von selbst.

Auf einem internationalen Workshop an der Universität Strathclyde im April 2008 wurden die Gemeinsamkeiten zwischen Galloping-Anregung und Regen-Wind-induzierten Schwingungen charakterisiert und Vorschläge für Modellverbesserungen eingebracht.

#### **3.1.6 Die Modelle von ROBRA (2003)**

Aufbauend auf den Modellen von YAMAGUCHI, GEURTS und VAN STAALDUINEN stellt ROBRA in [R4] insgesamt 4 verschiedene Modelle vor. Ziel seiner Analysen ist die Bestimmung der maximalen Amplituden, um für diesen Fall geeignete bauliche Gegenmaßnahmen zu treffen. Modell A und B beschreiben flacher geneigte Abspannseile; während Modell C und D eher steilere Konstruktionen, wie z.B. bei Bogenbrücken, abbilden.

Im Modell A werden ein oberes und ein unteres Rinnsal angenommen, während im Modell B nur das sich erst bildene untere Rinnsal berücksichtigt wird. In der numerischen Simulation wird beim Modelltyp A nur das obere Rinnsal eingearbeitet, da sich das untere Rinnsal bei Versuchen als eher dämpfend herausgestellt hat. Die Modelle A und B werden jeweils mit 2 verschiedenen Verhaltensweisen der Rinnsale betrachtet. Mit beweglichen Rinnsalen beschreibt man die Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen. Berechnungen mit fixem Rinnsal entsprechen der Herangehensweise von GEURTS und VAN STAALDUINEN und damit dem Galloping. Die realen physikalischen Gegebenheiten am Schrägseil werden dabei - wie in Kap. 2.2.3.1 bereits dargelegt - nicht korrekt erfasst. Die numerischen Untersuchungen mit beweglichem Rinnsal liefern bei ROBRA deutlich realistischere Ergebnisse. Der beobachtete, für Regen-Wind-induzierte Schwingungen typische Grenzyklus einer geneigten Ellipse stellt sich nur ein, wenn die Rinnsale als beweglich angenommen werden. Seine Berechnungen basieren auf einem 3-

FHG-Modell nach der ebenen Streifentheorie (siehe Abb. 3.5), welches ihn letztendlich zu einem System mit drei gekoppelten Differentialgleichungen führt. Vereinfacht werden seine numerischen Berechnungen dadurch, dass er eine Amplitudenübertragungsfunktion einführt, die Rinnsalamplituden und die Amplituden des Seiles mit einer gewissen Phasenverschiebung koppelt. Ausgehend von beobachteten Rinnsalamplituden nach [H5] und [F1] lassen sich bei ihm nach Wahl einer Amplitudenübertragung und einer Phasenverschiebung die noch unbekanntenen Freiwerte der Rinnsaleigenfrequenz und der Rinnsaldämpfung bestimmen. Die Rinnsaleigenfrequenz stellt sich somit nicht mehr aufgrund physikalischer Bedingungen am System ein. Letztlich führt dieser Ansatz zu einer Reduktion der Freiheitsgrade durch eine vorgegebene Kopplung zwischen Rinnsal- und Seilschwingung. Der typische Selbstanregungsmechanismus Regen-Wind-induzierter Schwingungen wird durch Vorgabe der Rinnsaleigenfrequenz beeinflusst oder gar gesteuert. Weiterhin wird zur Vereinfachung von kleinen Rinnsalamplituden  $\varphi$  und -geschwindigkeiten  $\dot{\varphi}$  ausgegangen.

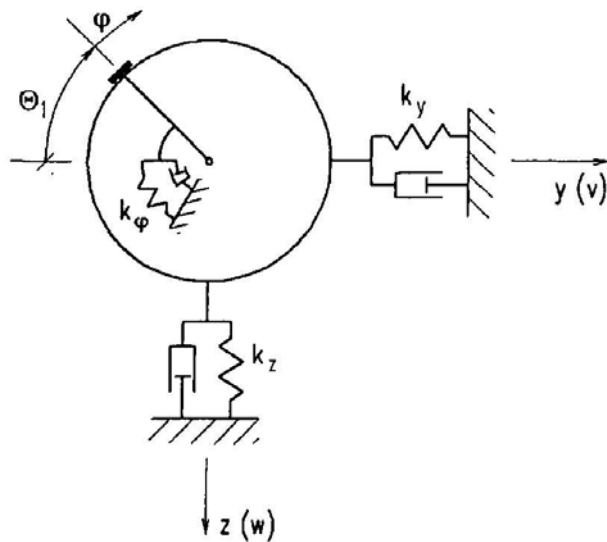


Bild 3.5: 3-FHG-Modell nach Robra [R4]

Für die Simulation verwendet ROBRA die Luftkraftbeiwerte von MATSUMOTO. Bei den Berechnungen stellen sich für den Modelltyp A deutlich größere Amplituden ein als beim Typ B. Die Analysen liefern relativ gute Übereinstimmungen mit beobachteten Schwingungsamplituden, z.B. an der *Erasmusbrücke* in Rotterdam. Aussagen zu Seileigenformen sind wegen der Streifenmethode wiederum nur schwer möglich.

Die Modelle C und D mit je 2 Rinnsalen, siehe Abb. 3.6, basieren auf den Untersuchungen von RUSCHEWEYH und entsprechen qualitativ dem Modell von DINKLER (siehe Bild 2.7). Im Modell C bewegen sich die Rinnsale gegenläufig und rufen somit Schwingungen quer zur Anströmung hervor. Im Fall D schwingen die Rinnsale symmetrisch, so dass sich Seilschwingungen in Anströmrichtung ausbilden. Zu diesen beiden Anregungstypen werden keine numerischen Untersuchungen durchgeführt.

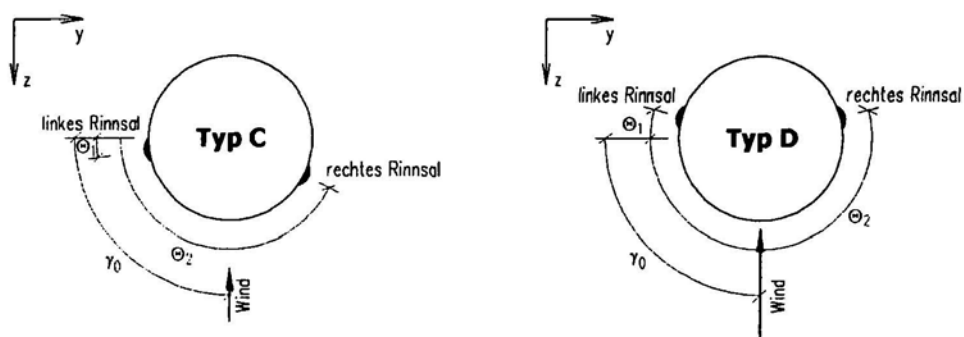


Bild 3.6: Die Anregungstypen C und D nach ROBRA [R4]

### 3.1.7 Das empirische Modell von SCHWARZKOPF (2004)

Zielsetzung von SCHWARZKOPF [S3] war es, dem Ingenieur ein zuverlässiges Berechnungsmodell an die Hand zu geben, welches es erlaubt, abhängig von verschiedenen Parametern die Amplituden von Regen-Wind-induzierten Schwingungen bereits in der Planungsphase von Bauwerken vorherzusagen. Für die Berechnung sind lediglich Strukturdaten des Seils, wie Neigungswinkel, Eigenfrequenz, Durchmesser und SCROUTON-Zahl notwendig. Die von ihm entwickelten, relativ einfachen Berechnungsansätze für die maximalen Schwingungsamplituden basieren auf Grundlagen von Stabschwingungen. Sie berücksichtigen nicht die komplizierten Wechselwirkungen zwischen dem Wind, den Rinnsalen und dem Seil. Bei Vergleichen seiner Simulationen kommt er den Beobachtungen teilweise nahe. Dennoch ist bei diesem Berechnungsverfahren eine gewisse Skepsis angesagt, da sein Modell nicht die komplexen Bewegungsabläufe und Anregungsmechanismen berücksichtigt.

### 3.1.8 Das Modell von SEIDEL und DINKLER (2004)

Ausgehend von Erläuterungen zum PRANDTL'schen Stolperdraht entwickeln SEIDEL und DINKLER [S4] 2004 ein neues Modell. Vor allem bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen der Rinnsale haben sie Erkenntnisse aus der Tropfenphysik und den Einfluss der Strömungsgrenzschicht auf der Grundlage der PRANDTL'schen Grenzschichttheorie berücksichtigt. Auch in diesem Modell -basierend auf der ebenen Streifentheorie- wird die Elastizität des Seiles durch ein Federmodell abgebildet. In Bild 3.7 ist das mechanische Modell dargestellt, welches als Grundlage für die Bewegungsgleichungen dient. Für den dargestellten Dreimassenschwinger formulieren sie sechs miteinander gekoppelte Differentialgleichungen zur Beschreibung der ebenen Seilbewegung, der Relativbewegungen der Rinnsale bezüglich des Seilquerschnittes und zweier mitgeführter Zwangsgrößen  $N_z$  und  $T_z$  (siehe Abb. 3.7). Jedoch lassen sich die Differentialgleichungen wegen der Kopplungen und Nichtlinearitäten nur mit großem numerischen Aufwand lösen [S4]. Aus diesem Grund beschränken sich SEIDEL und DINKLER in ihrer Arbeit zunächst auf die beiden Sonderfälle der ausgeprägten Schwingung in Windrichtung bzw. quer zur Anströmung, um Vereinfachungen der Gleichungen treffen zu können.

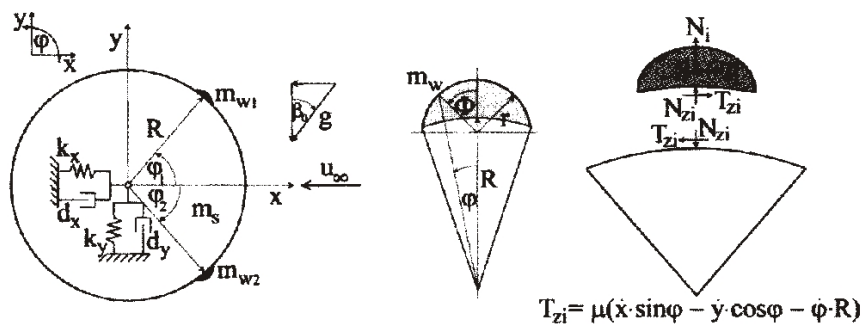


Bild 3.7: Das mechanische Modell nach SEIDEL und DINKLER [S4]

Zur Erfassung der Windlasten werden aerodynamische Widerstands- und Auftriebswerte angesetzt, die einen abschnittsweise konstanten Verlauf aufweisen und im Bereich der Ablösepunkte schlagartige Änderungen der Druckverteilung berücksichtigen. Mithilfe tangentialer Beiwerte wird die Bewegungsgleichung der Rinnsale aufgestellt.

Numerische Untersuchungen für Kabel der *Farø-Brücke* in Dänemark zeigen gute Übereinstimmungen zwischen simulierten und beobachteten Schwingungen.

## 3.1.9 Zusammenfassung und Übersicht über die vorgestellten Modelle

Berücksichtigte Effekte	Yama- guchi	Nahrath und Peil	Dreyer und Peil	Geurts et al.	Robra	Schwarz- kopf	Seidel und Dinkler
Modell auf Basis der Streifentheorie*	+	+	-	+	+	+	+
Modell auf Basis der Seiltheorie	-	-	+	-	-	-	-
Kopplungseffekte Rinnsal-Seiloberfläche	-	+	+	-	+	-	+
Freiheitsgrad für die Rinnsale	+	+	+	-	+/- **	-	+
Rinnsalformen	-	-	+	-	-	-	-
Nichtlinearitäten	-	o+	o+	-	o	o	o+
Windturbulenz	-	-	+	-	-	+	-
Freiheitsgrade	2	4	5	1	3	1	4
Anzahl Rinnsale	1	2	2	1	1	2	2
aerodynamische Beiwerte	+	+	+	+	+	+	+
Herkunft Beiwerte	eigen	eigen	eigen	Matsu- moto	Matsu- moto	eigen	eigen

Tab. 3.1: Übersicht der vorgestellten Modelle

Legende: + = wird verwendet bzw. berücksichtigt  
o+ = wird größtenteils verwendet bzw. berücksichtigt  
o = wird teilweise verwendet bzw. berücksichtigt  
- = wird nicht verwendet bzw. berücksichtigt

\*) unter Verwendung eines ebenen Ersatzsystems

\*\*) Beim Modell mit beweglichem Rinnsal: +, beim Modell mit fixem Rinnsal: -

## 3.2 Übersicht über den Einfluss verschiedener Parameter

Wie aus den Windkanalversuchen und Beobachtungen deutlich wird, existieren viele verschiedene Größen, welche Einfluss auf die Regen-Wind-induzierten Schwingungen von Seilen oder Hängern nehmen. Diese Einflussgrößen erschweren eine exakte Beschreibung der neuen Anregungsform, da sie nicht alle gleichzeitig auftreten müssen, um die Schwingung auszulösen. Verschiedene Kombinationsmöglichkeiten und unterschiedliche Intensitäten können jedesmal maßgebend für solche Schwingungen sein. Mittels vieler Versuche konnten immer neue Erkenntnisse über diese Einflussgrößen gewonnen werden. Da die Regen-Wind-induzierten Schwingungen bis heute noch nicht hinreichend genau berechnet werden können, gibt es auch bei den Einflussgrößen Widersprüche in verschiedenen Veröffentlichungen. Es bedarf daher noch weiterer Forschung, um die Gesamtheit und die genauen Zusammenhänge dieser Größen darzustellen. Dennoch werden die verschiedenen Einflussgrößen, welche in Windkanalversuchen und Simulationen untersucht worden sind oder bei Beobachtungen und Messungen ermittelt wurden, auf den folgenden Seiten zusammengefasst.

### 3.2.1 Regenintensität

Eine zwingende Voraussetzung, um Regen-Wind-induzierte Schwingungen entstehen zu lassen, ist der Regen. Dadurch entstehen am Seil herabfließende Regenrinnale, welche aufgrund der Adhäsion zwischen Bauteiloberfläche und dem Wasser am Seil haften bleiben. Die Wassermenge beeinflusst demnach die Form und Größe der Rinnsale. In den meisten Veröffentlichungen wird beschrieben, dass die größten Amplituden bei mäßigem Regen mit Niederschlagsmengen zwischen  $0,05 \text{ mm/min}$  und  $0,50 \text{ mm/min}$  auftreten [D2]. Die Ergebnisse von GU & DU zeigen bei  $0,34$  bis  $0,39 \text{ mm/min}$  die größten Amplituden auf. SCHWARZKOPF berichtet von einer kritischen Menge zwischen  $0,2$  und  $0,4 \text{ l/min}$  [S3]. Er betont auch, dass größere Wassermengen dämpfend auf das Bauteil wirken und die Amplituden abnehmen. DREYER berichtet hingegen von beachtlichen Schwingungen auch bei starkem Regen, mit der Einschränkung, dass diese weit seltener beobachtet wurden als solche bei mäßigen Niederschlägen. Ab einer gewissen Menge kann das Wasser nicht mehr auf dem Querschnitt gehalten werden und wird durch die Schwingungen des Seils von diesem abgespritzt.

### 3.2.2 Rinnsalgröße und -form

Die Rinnsale bewirken eine Querschnittsänderung des Bauteils und wirken wie Ablösekanten für die Strömung. Es ergibt sich eine ungleichmäßige Umströmung und somit kommt es zu einer unsymmetrischen Druckverteilung, was die Schwingungen sowohl in als auch senkrecht zur Anströmung auslöst. Durch die Bewegung des Seils und durch die Windkräfte beginnen sich die Rinnsale ebenfalls zu bewegen.

Untersuchungen zur genauen Form des Rinnsals und dessen Einfluss hat SCHWARZKOPF in seiner Dissertation durchgeführt [S3]. Er kommt darin zu dem Schluss, dass die qualitative Rinnsalform immer gleich ist. Grob kann das Rinnsal in zwei Teile zerlegt werden; zum einen in die benetzte Breite, welche als Film am Bauteil hinunterläuft, und zum anderen der Wulst, einer Verdickung an einer bestimmten Stelle des Films. Die Lage des Wulstes hängt von Parametern ab, die auch während des Schwingungsvorganges variieren, während die Geometrie des Wulstes von diesen Parametern nahezu unabhängig ist.

Die Modelle zur Simulation Regen-Wind-induzierter Schwingungen lassen sich - ausgehend von dieser Beschreibung - in zwei Gruppen unterteilen:

- Modelle mit unveränderlicher Querschnittsgeometrie der Rinnsale  
→ Fluid-Struktur-Struktur-Ansatz (Luft - starrer Rinnsalquerschnitt - Seil)
- Modelle, bei denen sich das Rinnsal aus einem Wasserfilm als Folge der Umströmung bildet und dessen Form und Größe Ergebnis von numerischen Berechnungen ist → Fluid-Fluid-Struktur-Ansatz (Luft - Rinnsal - Seil)

NAHRATH führt Versuche zur Bestimmung aerodynamischer Beiwerte mit unterschiedlichen Störprofilen durch und erhält bei verschiedenen, unverformbaren und unbeweglichen Profilen qualitativ und quantitativ ähnliche Verläufe. Dieser Starrkörperansatz sollte sich damit auch in der Rinnsalmodellierung wiederfinden, damit die aerodynamischen Beiwerte ihre Gültigkeit sicher behalten. Der daraus folgende Fluid-Struktur-Struktur-Ansatz wird auch in den Quellen [B4] und [M3] verfolgt. Auch in neueren Veröffentlichungen, wie z.B. in [R3] werden Strömungsuntersuchungen mit starren Rinnsal durchgeführt.

DREYER berechnet das Rinnsalverhalten mittels vereinfachter NAVIER-STOKES-Gleichungen. Diesen aufwendig zu modellierenden Ansatz unter Berücksichtigung der Fluid-Fluid-Struktur-Interaktion verfolgen u.a. ebenfalls COSENTINO in [C2] sowie GU



und DU in [G5] und WANG in [W2].

Wie SCHWARZKOPF kommen auch NAHRATH in [N1] und DREYER in [D2] zu der Erkenntnis, dass nur die Lage der Rinnsale einen maßgebenden Einfluss auf die aerodynamischen Beiwerte hat. Damit stimmen die Folgerungen bezüglich der Rinnsalform aus beiden Ansätzen weitestgehend überein.

Die Größe der Rinnsale variiert in Abhängigkeit der Regenintensität, der Seilneigung und der Oberflächenrauigkeit. Am Beispiel der *Erasmusbrücke* variieren die Literaturangaben zur Rinnsalmasse zwischen  $\mu = 60 \text{ g/m}$  und  $\mu = 120 \text{ g/m}$ . Die Form und die Größe der Rinnsale scheint jedoch nach bisherigen Erkenntnissen von untergeordneter Bedeutung zu sein, solange die Verhältniswerte zwischen Seil- und Rinnsalgröße vergleichbar bleiben.

Aus den genannten Gründen wird in dieser Arbeit kein numerischer Aufwand in die Berechnung der Rinnsalform und -größe investiert. Es wird der Fluid-Struktur-Struktur-Ansatz mit unveränderlicher Rinnsalgeometrie gewählt. In einem modifizierten Modell wird ein Deformationsfaktor  $\chi$  eingeführt, der die Rinnsale im Modell zwar weiterhin im Querschnitt als starr ansieht, jedoch die Interaktion zwischen Seil und Rinnsal wegen der Verformung des Rinnsals reduziert, siehe Kap. 9.3.2. In beiden Modellvarianten bewegen sich die Rinnsale vergleichbar einem federnd und dämpfend gelagerten Pendel an jedem Diskretisierungspunkt auf der Seiloberfläche. In Seillängsrichtung kann die Rinnsalposition variieren. Die aerodynamischen Beiwerte werden als Funktion der beiden Rinnsalpositionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sowie der relativen Anströmung ausgewertet.

### 3.2.3 Windgeschwindigkeit

Regen-Wind-induzierte Schwingungen beginnen erst ab einer gewissen Windgeschwindigkeit, der sogenannten Einsetzgeschwindigkeit. Nach SCHWARZKOPF kann es schon bei kleinen Geschwindigkeiten von etwa  $3 \text{ m/s}$  zu leichten Schwingungen kommen. Der Anregungsbereich ist für jedes Bauwerk verschieden und umfasst meist nur einen recht kleinen Geschwindigkeitsbereich, da bei höheren Geschwindigkeiten die Rinnsale vom Seil abgeblasen werden und somit keine weitere Anregung stattfindet. Grundsätzlich lässt sich sagen, dass der Großteil der Schwingungen an Bauwerken sowie in den Versuchen bei Windgeschwindigkeiten zwischen  $8 \text{ m/s}$  und  $15 \text{ m/s}$  auftraten. In Ausnahmefällen wurden Regen-Wind-induzierte Schwingungen bis  $20 \text{ m/s}$  beobachtet, an steileren Hängern von Bogenbrücken sogar bis  $30 \text{ m/s}$ . Diese Werte werden von den

Brückenbauwerk	Windgeschwindigkeit $U_0$ [m/s]
Meiko-Nishi-Brücke (Japan)	7 bis 13,1
Farø-Brücke (Dänemark)	10 bis 15
Tenpozan-Brücke (Japan)	8 bis 12
Tsurumi-Tsubasa-Brücke (Japan)	8,8 bis 13,1
Erasmusbrücke (Niederlande)	14
Fred-Hartman-Brücke (USA)	6,3 bis 13,5

Tab. 3.2: Beobachtete Windgeschwindigkeiten an Brücken [R4]

meisten Autoren bestätigt. ROBRA führt in seiner Arbeit [R4] eine sehr ausführliche Auflistung von 33 Bauwerken auf, bei denen alle wichtigen Daten, darunter auch die Windgeschwindigkeit, aus Beobachtungen und Messungen eingetragen sind. Tabelle 3.2 zeigt einen kleinen Ausschnitt einiger Brücken mit den beobachteten Windgeschwindigkeiten. Von größeren Windgeschwindigkeiten berichten unter anderem VERWIEBE und RUSCHEWEYH, die bei ihren Windkanalversuchen Regen-Wind-induzierte Schwingungen bis  $30 \text{ m/s}$  beobachteten. Ebenso stellen LÜESSE et al. in ihren Windkanalversuchen für die Hänger der *Elbebrücke* bei Dömitz fest, dass Anströmgeschwindigkeiten zwischen  $8,8 \text{ m/s}$  und  $25 \text{ m/s}$  zu Regen-Wind-induzierten Schwingungen führen.

### 3.2.4 Windanströmwinkel

Zum Winkelbereich der Anströmung machen die Forscher unterschiedliche Aussagen, so dass über den Anströmwinkel keine genauen Angaben gemacht werden können, da sich hier verschiedene Parameter beeinflussen. Die Angaben in der Literatur beziehen sich entweder auf einen Winkel  $\gamma$  (siehe Abb. 3.8), der die Anströmung des natürlichen Windfeldes  $U_0$  zum geneigten Kabel beschreibt, oder auf einen Winkel  $\beta$ , mit dem sich die effektive Anströmung unter zusätzlicher Berücksichtigung der Seilneigung  $\delta$  abbilden lässt.

BODGIANNI et al. [B4], ROBRA [R4] und DREYER [D2] geben an, dass eine Anfälligkeit für Regen-Wind-induzierte Schwingungen für Seile an Schrägseilbrücken besonders bei einer Anströmung von  $0^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ$  gegeben ist. SCHWARZKOPF berichtet, dass er bei seinen Versuchen die größten Amplituden bei  $30^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$ , verbunden mit dem Auftreten von zwei Rinnsalen, beobachtet hat [S3]. Bei anderen Beobachtungen werden

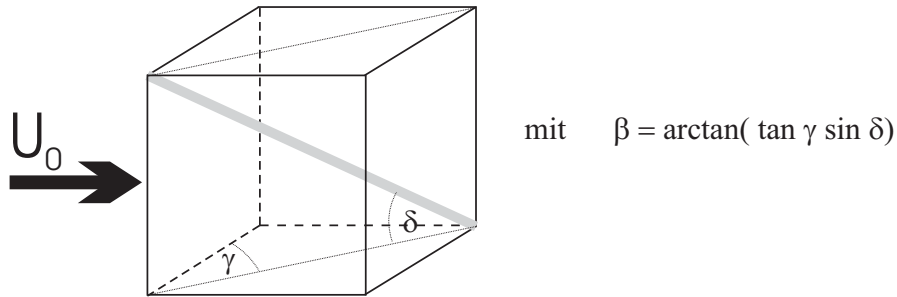


Bild 3.8: Anströmwinkel

jedoch auch größere Winkel  $\gamma$  festgestellt, die zu Regen-Wind-induzierten Schwingungen führen. In Versuchen von VERWIEBE [V1] werden Schwingungen bis zu einem Winkel von  $\gamma = 90^\circ$  gemessen. Auch NAHRATH fasst seine und frühere Versuche zusammen und gibt einen Anströmungswinkel  $20^\circ \leq \gamma \leq 80^\circ$  an, betont aber, dass es schon bei einem Winkel von  $\gamma = 0^\circ$  zu Anregungen kommen kann [N1]. Bei stark geneigten Hängern verschiebt sich laut SCHWARZKOPF der Winkel  $\beta$  immer weiter zu  $90^\circ$ . Bei einigen Messungen, z.B. an der *Fred-Hartman-Brücke*, wurden sogar Anströmwinkel im negativen Bereich gemessen, bei denen Regen-Wind-induzierte Schwingungen auftraten. NAHRATH schreibt, dass Schwingungen bei negativem Anströmwinkel nur in Verbindung mit starken Regenfällen auftreten.

### 3.2.5 Neigungswinkel des Bauteils

Im Bezug auf den Neigungswinkel  $\delta$  des Einzelseils machen die einzelnen Autoren ähnliche Angaben. Der Bereich, in dem Regen-Wind-induzierte Schwingungen am häufigsten vorkommen, liegt zwischen  $20^\circ$  und  $50^\circ$  ([D2], [R4]). SCHWARZKOPF gibt an, dass bei Winkeln im Bereich zwischen  $45^\circ \leq \delta \leq 60^\circ$  die größten Amplituden auftreten.

Abweichende Angaben werden lediglich zu den Hängern von Bogenbrücken gemacht, die deutlich größere Neigungswinkel aufweisen. Regen-Wind-induzierte Schwingungen können auch bei nahezu vertikalen Hängern mit Neigungswinkeln  $\delta \cong 70^\circ$  auftreten. Diese Schwingungen führten an der *Elbebrücke* bei Dömitz schon nach einem Jahr zu Ermüdungsrissen der Hängeranschlüsse. Dieser Fall führte in den Folgejahren zu Normungsversuchen dieses Lastfalls. Im neuen DIN-Fachbericht 103 erfolgt eine erste Normung mittels eines statischen Ersatzlastverfahrens. Die physikalischen Gegebenheiten

werden hierbei nur unzureichend berücksichtigt.

### 3.2.6 Oberflächenbeschaffenheit des Seils

Die Oberflächenbeschaffenheit der Seile ist von großer Bedeutung, da sie einen starken Einfluss auf die Bildung und somit auf die Größe der Rinnsale hat. Viele Beobachtungen und Windkanalversuche (z.B. FLAMAND [F1]) haben deutlich gemacht, dass zur Bildung von Rinnsalen eine relativ glatte Seiloberfläche notwendig ist. Diese glatte Oberfläche ist bei den Mitte der 80er Jahre eingeführten, mit Kunststoff ummantelten Brückenseilen vorhanden. Diese Kunststoffbeschichtung besteht aus HDPE (*High Density Poly Ethylene*). Da sich an den fabrikneuen, sehr glatten und nahezu wasserabweisenden Seilen keine Rinnsale bilden können, musste überprüft werden, warum es an Seilen bei realen Bauwerken dennoch zu Schwingungen kam. Der Grund dafür sind Verschmutzungen, welche sich bereits nach kurzer Betriebsdauer durch Witterungseinflüsse wie Beregnung und UV-Strahlung einstellen und somit die Bildung von Rinnsalen ermöglichen.

Frühere vollverschlossene Spiralseile hatten schraubenförmig verlaufende Rillen und haben dadurch die Bildung von Rinnsalen unterbunden [R4]. Diese Profilierung zwingt die Rinnsale in vorgegebene Bahnen, so dass diese nicht mehr frei schwingen können. Somit konnten Regen-Wind-induzierte Schwingungen bis Mitte der 80er Jahre kaum auftreten, da die Oberflächenbeschaffenheit der Seile eine Rinnsalbildung nicht zuließ. Bei kunststoffummantelten Brückenseilen muss die Oberfläche ausreichend glatt, aber nicht wasserabweisend sein, um die Bildung von herablaufenden Rinnsalen zu ermöglichen.

### 3.2.7 Turbulenz des Windes

Da der Turbulenzgrad maßgebend durch die Bodenrauigkeit (umstehende Gebäude, Bäume etc.) beeinflusst wird, entstehen gerade im bodennahen Bereich turbulente Strömungen. Viele Brücken, an denen Regen-Wind-induzierte Schwingungen auftreten, sind relativ freistehend. Sie stehen oft an Flüssen und haben meist Bauhöhen, die über diese Turbulenzen weitestgehend hinausgehen. Somit sind oft nur geringe Turbulenzgrade vorhanden.

Auch bei diesem Einflussparameter für die Schwingungen decken sich die meisten Aussagen. Es lassen sich zwei wesentliche Erkenntnisse zusammenfassen:

- Größere Amplituden werden bei geringen Turbulenzen erreicht.
- Höhere Turbulenzen lassen den instabilen Windgeschwindigkeitsbereich kleiner werden.

Ursache für diese beiden Aussagen ist der recht lange und empfindliche Einschwingvorgang bei Regen-Wind-induzierten Schwingungen. Zu diesem Schluss kommen SAITO et al. bereits im Jahr 1994 durch ihre Windkanalversuche (siehe [S1]). Laut SCHWARZKOPF weckt eine turbulente Umströmung geringere aerodynamische Kräfte. Daraus resultierend ergeben sich entweder kleinere Amplituden (siehe Bild 3.9) oder die eingetragene Energie reicht nicht aus, um überhaupt einen Aufschaukelprozess hervorzurufen. Mit steigendem Turbulenzgrad wird der Windgeschwindigkeitsbereich, in dem Regen-Wind-induzierte Schwingungen auftreten können, immer kleiner.

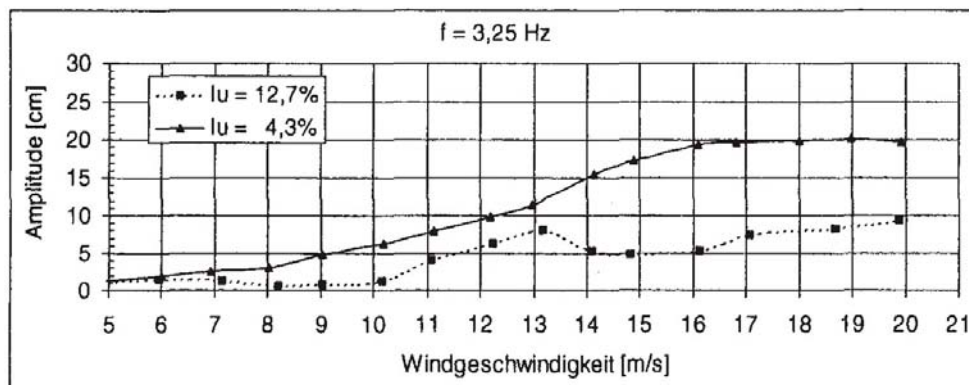


Bild 3.9: Einfluss des Turbulenzgrades  $I_u$  auf die Schwingungsamplitude [S3]

Ähnliche Erkenntnisse liefern DREYERS Berechnungen mit verschiedenen Turbulenzgraden. Dabei wird die mittlere Anströmgeschwindigkeit mit einer stochastischen Schwankung belegt. Diese ist zeitlich veränderlich und abhängig vom Abstand zum Boden und dessen angenommener Rauigkeit, definiert durch einen Profilexponenten, siehe [D2]. Die Turbulenz nimmt mit zunehmender Höhe ab. Der Turbulenzgrad  $I_u$  ist das Verhältnis zwischen der Standardabweichung der Windgeschwindigkeit und der ungestörten Windgeschwindigkeit.

In [D2] sind für mehrere Turbulenzintensitäten Karten mit aerodynamischen Beiwerten

erstellt worden; die jedoch nicht verwendet werden. In die Berechnungen von DREYER gehen die aerodynamischen Beiwerte der turbulenzfreien Messungen ein. Dafür erfolgt die Berechnung der relativen Windgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der Turbulenz. Die turbulenzfreien Simulationen in [D2] mit laminarer Anströmung liefern bei allen betrachteten Seilen Schwingungen in der ersten Eigenform; unter Berücksichtigung der Turbulenz ergeben sich bei DREYER Schwingungen in der dritten Eigenform. Da Regen-Wind-induzierte Schwingungen bei den von ihm betrachteten Seilen in der zweiten und dritten Eigenform beobachtet wurden, decken sich an dieser Stelle Beobachtung und Berechnung nur teilweise.

#### 3.2.8 Seildämpfung

Bei der Bestimmung des Dämpfungseinflusses ist man zwangsläufig auf Näherungen angewiesen. In den bei Schrägseilbrücken verwendeten, ummantelten Litzenseilen wirken verschiedene Dämpfungsmechanismen.

Die *Material- oder Baustoffdämpfung* beschreibt die Energiedissipation im Innern eines fugenlosen Elementes. Für kleine Schwingungsamplituden bzw. geringe Schwinggeschwindigkeiten hat sich gezeigt, dass diese Art der Dämpfung näherungsweise proportional zur Geschwindigkeit angesetzt werden kann. Die viskose Dämpfungskraft ergibt sich damit zu  $F_{d1} = d \cdot \dot{x}$ . Der Proportionalitätsfaktor  $d$  ist ein Stoffwert, der z.B. über Ausschwingversuche ermittelt werden kann. Allgemeine Aussagen für die Größe der Dämpfungskonstanten sind nur schwer möglich, da sowohl die verwendeten Materialien als auch die Art des Aufbaus die Dämpfung beeinflussen.

Die *Systemdämpfung* bildet die Energieverluste des schwingenden Systems durch Lagerbewegungen bzw. Reibungsverluste an Lagern oder sonstigen Kontaktflächen ab. Versuche haben gezeigt, dass die verwendeten Litzenseile größere Dämpfungswerte aufweisen als zum Beispiel Spiralseile, da es durch die Reibung der einzelnen Stahllitzen aneinander zu höheren inneren Reibungsverlusten kommt. Diese sogenannte COULOMBSche Reibungsdämpfung ist ohne Schmierung nahezu von der Bewegungsgeschwindigkeit unabhängig und liefert dementsprechend im Modellansatz konstante Reibungskräfte, die in ihrer Richtung jedoch stets der Bewegung entgegen gerichtet sind. Mathematisch lässt sich dies durch die Signumfunktion  $F_{d2} = r \cdot \operatorname{sgn}\dot{x}$  beschreiben, wobei  $r$  eine Systemkonstante darstellt.

Die *Abstrahlungsdämpfung* entspricht bei Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen einer aerodynamischen Dämpfung. Durch die Fluid-Struktur-Interaktion wird ein Teil der Schwingungsenergie des Seiles an das umgebende Medium Luft abgegeben. Bei Fluiden mit geringen Zähigkeiten entstehen durch die Bewegung Wirbel, so dass man in diesem Fall auch von *Turbulenzdämpfung* spricht. Vergleichbar mit dem Staudruck verhalten sich die Dämpfungskräfte proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Die Richtung ist auch hierbei stets der Bewegung entgegengerichtet:  $F_{d3} = q \cdot \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x}$ . In die Berechnung der Systemkonstanten  $q$  gehen unter anderem die Viskosität des umgebenden Mediums und Formeigenschaften des sich bewegenden Körpers ein.

Die reale Gesamtdämpfung ergibt sich als Summe der beschriebenen Dämpfungseinflüsse. In den Modellierungen der Literatur wird vereinfachend die viskose Dämpfung verwendet, da sie für geringe Schwinggeschwindigkeiten gute Übereinstimmungen mit Versuchen liefert.

Bei dieser häufig verwendeten, geschwindigkeitsproportionalen (viskosen) Dämpfung wird der dimensionslose Dämpfungskoeffizient  $\xi$  (LEHRsches Dämpfungsmaß) eingeführt, der dem Verhältnis zwischen vorhandener und kritischer Dämpfung entspricht, vgl. [M1]. Desweiteren sind in Gl. 3.1 die Masse  $m$  und die Schwingungsfrequenz  $f$  enthalten.

$$\xi = \frac{d}{d_{krit}} = \frac{d}{2 \cdot m \cdot \omega} = \frac{d}{2 \cdot m \cdot 2\pi \cdot f} \quad (3.1)$$

Den in dieser Arbeit verwendeten Dämpfungsparameter  $d$  erhält man somit aus:

$$d = \xi \cdot d_{krit} = 2 \cdot \xi \cdot m \cdot \omega = 4\pi \cdot \xi \cdot m \cdot f \quad (3.2)$$

Dieser Ansatz entspricht der massenproportionalen RAYLEIGH-Dämpfung. Da die Dämpfungsmatrix bei Mehrmassenschwingern oft nicht bekannt ist, kann diese alternativ in allgemeiner Form vereinfachend als Linearkombination der Massen- und/oder der Steifigkeitsmatrix dargestellt werden, vgl. [M1]:

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{C} \quad (3.3)$$

Der große Vorteil dieser Darstellung liegt in der Orthogonalität des gesamten dynamischen Systems, so dass die Schwingungsformen des ungedämpften Systems auch unter Berücksichtigung der Dämpfung erhalten bleiben, weshalb die Bezeichnung *modale Dämpfung* ebenso zutreffend ist. Da die Massen- und Steifigkeitsmatrix ohnehin berechnet werden, lässt sich die RAYLEIGH-Dämpfung relativ leicht implementieren, so dass die Annahme in Gleichung (3.3) in [M1] als *Bequemlichkeitshypothese* bezeichnet wird. Die beiden freien Proportionalitätskoeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  in (3.3) lassen sich über Ausschwingversuche zweier Eigenformen (z.B.  $j = 1, 2$ ) ermitteln:

$$\xi_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_j} + \beta \omega_j \right) \quad (3.4)$$

In der Praxis wird häufig auf Mess- oder Erfahrungswerte der ersten Eigenform zurückgegriffen. Für höhere Schwingungsformen werden dann weiterführende Annahmen einer konstanten (strukturellen) oder einer proportionalen (viskosen) Dämpfung getroffen, siehe hierzu [M1]. In der Literatur sind die getroffenen Annahmen bzw. die Ermittlung der Dämpfungswerte besonders für höhere Schwingungsformen nur unzureichend dokumentiert. Es finden sich für die untersuchten Seile meist mehrere Angaben, die oft sehr große Streuungen beinhalten. Erschwerend kommt bei der Modellierung der Dämpfung hinzu, dass die Dämpfungsparameter in gewissen Grenzen schwingungs- bzw. amplitudenabhängig und nicht konstant sind. Aus den genannten Gründen ist der Dämpfungsansatz in der Berechnung von Seilschwingungen von vornherein mit gewissen Unsicherheiten behaftet.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird wegen des gewählten massenproportionalen Ansatzes mit  $\beta = 0$  auch für höhere Schwingungsformen die strukturelle Dämpfungskonstante  $d$  gewählt. Für diese soll nach [M1] gelten:  $d = d_1 = d_j$  mit  $j = 2, 3 \dots n$ .

Der proportionale, eigenformabhängige Dämpfungswert würde sich aus dem rein steifigkeitsproportionalen Ansatz mit  $\alpha = 0$  ergeben.

Alternativ lässt sich das LEHRsche Dämpfungsmaß auch mit Hilfe des logarithmischen Dämpfungsdekrementes  $\Lambda$  oder über die SCRUTON-Zahl darstellen. Die Art der Darstellung ändert jedoch nichts an den Unsicherheiten in der Berechnung. Für das logarithmische Dämpfungsdekrement  $\Lambda$  gilt bei zwei aufeinander folgenden, gemessenen Amplituden  $x_n$  und  $x_{n+1}$ :

$$\Lambda = \ln \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \frac{2 \cdot \pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cong 2 \cdot \pi \cdot \xi \quad (3.5)$$



Der zweite Teil von Gleichung (3.5) gilt für kleine Dämpfungsgrade. Die zu untersuchenden Seile haben ausnahmslos eine sehr geringe innere Dämpfung und werden daher meist schon durch kleine Energieeinträge zu Schwingungen angeregt.

DREYER beschreibt in [D2], dass etwa ab einem Dämpfungskoeffizienten  $\xi \geq 0,005$  kei-

Brücke	Dämpfungsgrad $\xi$ [-]	Logarithmisches Dekrement $\Lambda$ [-]	SCRUTON- Zahl [-]
Erasmusbrücke Rotterdam	0,001 bis 0,003	0,006 bis 0,019	14 bis 42
Donaustadtbrücke Wien	0,0019	0,012	40
Fred-Hartman-Brücke Houston	0,0015	0,009	36
Meikonishi-Brücke Nagoya	0,001 bis 0,0044	0,007 bis 0,028	21
Tsurumi-Tsubasa-Brücke	0,0004 bis 0,0008	0,0025 bis 0,005	18 bis 35
Elbebrücke Dömitz	0,0002	0,001	12

Tab. 3.3: Dämpfungswerte ausgewählter Brückenseile nach [R2], [D2] und [R4]

ne Regen-Wind-induzierten Schwingungen mehr auftreten. Messungen von PERSON und NOORLANDER [P3] an der *Erasmusbrücke* in Rotterdam bestätigen dies. Sie geben die Grenze mit  $\xi \geq 0,008$  an. Auch SCHWARZKOPF zeigt mit seinen Versuchen, dass die Schwingungsamplituden durch Erhöhung der Masse und Dämpfung verringert werden [S3]. Da in manchen Texten die Dämpfung durch die SCRUTON-Zahl  $Sc$  ausgedrückt wird, ist diese zur Vergleichbarkeit mit der Literatur in Gleichung (3.6) angegeben. Sie ist von der Massenbelegung  $\mu$ , der Luftdichte  $\rho_L$ , dem Durchmesser  $D$  und der Dämpfungszahl  $\xi$  bzw.  $\Lambda$  abhängig.

$$Sc = \frac{2 \cdot \mu \cdot \Lambda}{\rho_L \cdot D^2} = \frac{4\pi \cdot \mu \cdot \xi}{\rho_L \cdot D^2} \quad (3.6)$$

ROBRA widerlegt die Aussage von MAIN und JONES, es käme ab einer SCRUTON-Zahl  $Sc \geq 10$  nicht mehr zu Regen-Wind-induzierten Schwingungen. Für die von ihm aufgelisteten Beobachtungen ermittelt er SCRUTON-Zahlen bis etwa  $Sc = 40$  (siehe [R4] und Tabelle 3.3).

### 3.2.9 Amplituden, Frequenzen und Eigenformen

Bei den leicht geneigten elliptischen Umlaufbahnen hauptsächlich quer zur Anströmrichtung kommt es teilweise zu beträchtlichen Amplituden, die meist im Bereich des zwei- bis vierfachen Seildurchmesser liegen. Extremwerte mit Doppelamplituden von etwa 2 m wurden von MATSUMOTO an der *Tenpozan-Brücke* in Japan beobachtet.

Die Eigenfrequenzen der durch Regen- und Windwirkung angeregten Schrägseile liegen im Bereich  $0,5 \text{ Hz} \leq f \leq 3,0 \text{ Hz}$ . VERWIEBE stellt bei den fast vertikalen Hängern der *Elbebrücke* Dömitz Frequenzen von bis zu 6,0 Hz fest. Die meist monofrequenten Schwingungen treten in den Eigenformen auf, welche in dem angegebenen Frequenzbereich liegen. Dies entspricht der ersten bis vierten Eigenform. In Ausnahmefällen kann

Brückenbauwerk	Frequenzbereich f [Hz]	Schwingungsform
Meikonishi-Brücke (Japan)	1 bis 3	1 bis 4
Farø Brücke (Dänemark)	0,7 bis 1,9	1 teilweise 2
Tenpozan-Brücke (Japan)	0,56 bis 1,12	1 und 2
Tsurumi-Tsubasa-Brücke (Japan)	0,48 bis 2,96	1 bis 6
Erasmusbrücke (Niederlande)	0,8 bis 1,2	2 teilweise höher
Fred-Hartman-Brücke (USA)	1 bis 3	1 bis 4

Tab. 3.4: Regen-Wind-induzierte Schwingungsformen und -frequenzen [R4]

es auch bis zur sechsten oder siebten Eigenform gehen. Normalerweise kommt es nur zur Ausbildung einer Schwingungsform. Es wurde aber auch schon beobachtet, dass mehrere Eigenformen an der Schwingung beteiligt waren. Eine Erklärung dafür wurde bis heute noch nicht gefunden [D2]. In Tabelle 3.4 sind verschiedene Brückenbauwerke mit den zugehörigen Frequenzbereichen und Eigenformen aufgeführt, bei denen Regen-Wind-induzierte Schwingungen beobachtet wurden.

## 4 Darstellung der verwendeten Seiltheorie

Die hier verwendete - aus kontinuumsmechanischer Sicht modifizierte - Seiltheorie wird in der Dissertation von THALHEIM [T2] ausführlich erläutert. In [T2] dienen die nichtlinearen Seilgleichungen dieser Theorie zur Untersuchung parametererregter Schwingungsphänomene. Diese im Vergleich zur klassischen Seiltheorie, siehe z.B. [P4], hinsichtlich ihrer Nichtlinearitäten einfacher strukturierte Seiltheorie ist der klassischen Theorie mechanisch gleichwertig, wie in [T2] und [H1] gezeigt wird.

Entsprechend der Vorgehensweise in der Kontinuumsmechanik werden in dieser Seiltheorie Seilkräfte verwendet, die auf nichtnormierte Tangentenvektoren des Momentanzustandes bezogen sind. Bei Wahl eines solchen Bezuges müssen den Seilkräften die GREENSchen Längsverzerrungen zugeordnet werden. Der Einbau der daraus resultierenden konstitutiven Gleichung in die nichtlinearen Bewegungsgleichungen führt zu partiellen Differentialgleichungen, die maximal kubische Nichtlinearitäten in den drei Verschiebungskomponenten aufweisen.

Im Gegensatz dazu enthalten die klassischen Seilgleichungen wegen der notwendigen Verwendung der Ingenieurdehnungen kompliziertere Wurzelausdrücke, die meist durch Reihenentwicklungen vereinfacht werden. Durch den Reihenabbruch bedingt entstehen Näherungen, auf die bei der in dieser Arbeit verwendeten Seiltheorie verzichtet werden kann.

Im Weiteren wird in diesem Kapitel die Ortsdiskretisierung des Seiles mit Hilfe des Differenzenverfahrens durchgeführt.

Anschließend werden dann in den folgenden Kapiteln je nach Lastfall entweder die Wind- und Rinnsalkräfte oder bei der Parametererregung die aus der Auflagerverschiebung resultierenden Kräfte eingearbeitet. Es entsteht für das Seil in beiden Fällen schließlich ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung in der Zeit, dessen Lösung im nächsten Kapitel behandelt wird.

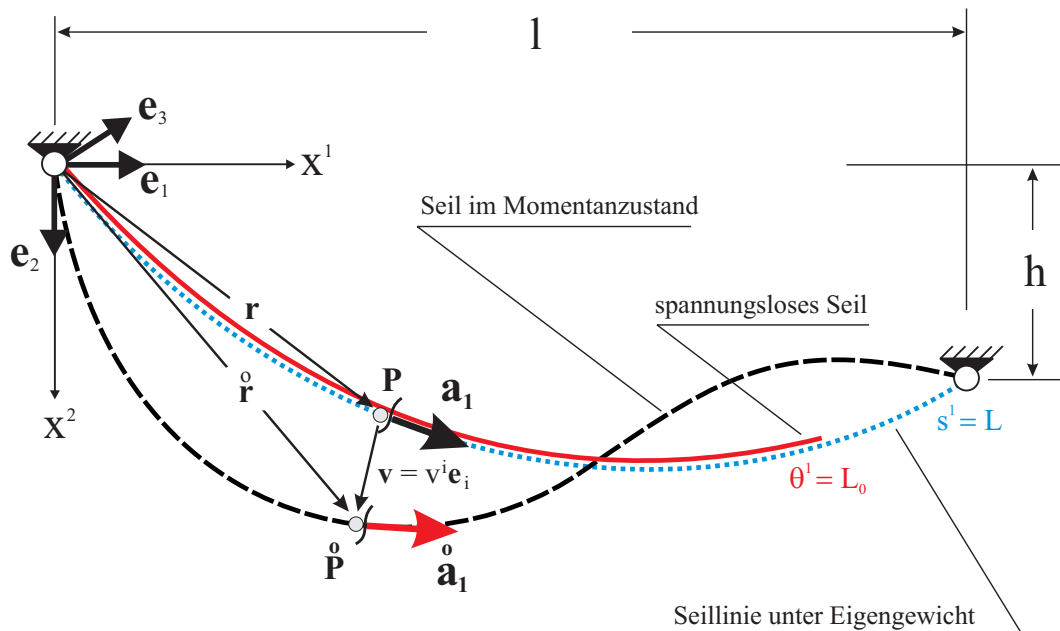


Bild 4.1: Die Kinematik des Einzelseils [T2]

## 4.1 Die Kinematik des Einzelseils

Grundlage der Betrachtungen ist ein ideal biegeweiches, zunächst spannungsloses Seil der Länge  $L_0$  und der Massenbelegung  $\mu_0$ . Entlang der ungedehnten Seillinie läuft der LAGRANGESche Kurvenparameter  $\Theta^1$ . Dieses Seil wird zwischen zwei feste Auflagerepunkte gehängt. Weiterhin werden in den Auflagerepunkten gelenkige Anschlüsse unterstellt. Wegen der großen Seillängen ist dieser Ansatz gerechtfertigt, da mögliche Randeinspannungseffekte infolge der Biegeweichheit der Seile sehr schnell verschwinden. Eine Torsion des Seiles wird im Modell ausgeschlossen.

Zunächst wird das Seil dem Eigengewicht und einer statischen Vorspannung ausgesetzt. In der entstehenden, vertikal ausgerichteten Seilebene im Eigengewichtszustand liegen die Basisvektoren  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$ , die zu einem ortsfesten Koordinatensystem mit orthonormierten Vektoren in einem der Befestigungspunkte gehören (siehe Bild 4.1). In der vorliegenden Arbeit sind Vektoren und Matrizen durch Fettdruck gekennzeichnet. Alle Punkte des Seiles im Eigengewichtszustand  $Ez$  werden durch die Ortsvektoren  $\mathbf{r}(\Theta^1) = x(\Theta^1)^\alpha \mathbf{e}_\alpha$  mit  $\alpha = 1, 2$  eindeutig beschrieben, wobei gemäß der EINSTEINSchen Summenkonvention über gegenständige Indizes zu summieren ist. Schwingungen infolge zeitveränderlicher Einwirkungen erfolgen um die statische Gleichgewichtslage. Für

beliebige Verschiebungszustände werden vom Eigengewichtszustand aus Verschiebungsvektoren  $\mathbf{v}(\Theta^1, t) = v(\Theta^1, t)^k \mathbf{e}_k$  mit  $k = 1, 2, 3$  definiert, mit deren Hilfe sich alle räumlichen Bewegungen der Seilpunkte beschreiben lassen. Bild 4.1 veranschaulicht die Kinematik des Seils mit seinen Orts- und Tangentenvektoren, wobei der augenblickliche Bewegungszustand, auch Momentanzustand Mz genannt, durch einen aufgesetzten Kreis gekennzeichnet ist. Für die die Seillinie beschreibenden Ortvektoren gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\Theta^1) & \quad \dots \text{ Ortsvektor zum Punkt } P \text{ des Seiles im Eigengewichtszustand (Ez)} \\ \mathring{\mathbf{r}}(\Theta^1, t) & \quad \dots \text{ Ortsvektor zum Punkt } \mathring{P} \text{ des Seiles im Momentanzustand (Mz)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die daraus resultierenden Tangentenvektoren lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{,1} = x_{,1}^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (\alpha=1,2) & \quad \dots \text{ Tangentenvektor im Ez} \\ \mathring{\mathbf{a}}_1 = (\mathbf{r} + \mathbf{v})_{,1} = (x_{,1}^\alpha + v_{,1}^\alpha) \mathbf{e}_\alpha + v_{,1}^3 \mathbf{e}_3 & \quad \dots \text{ Tangentenvektor im Mz} \end{aligned} \quad (4.2)$$

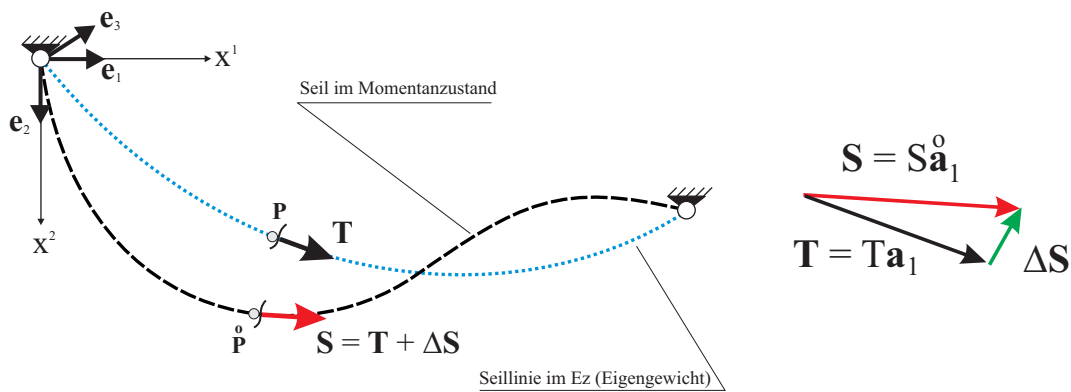


Bild 4.2: Die Aufspaltung der vektoriellen Seilkraft [T2]

Wegen der idealisierten Biegeweichheit der Seile wirkt die Seilkraft stets tangential. Die Seilkraft  $\mathbf{S}$  im Mz setzt sich zusammen aus der statischen Seilkraft  $\mathbf{T}$  im Ez und einem Seilkraftzuwachs  $\Delta \mathbf{S}$ . Die Seilkraftkomponenten des zeitveränderlichen Vektors  $\mathbf{S}(t)$  und des statischen Vektors  $\mathbf{T}$  im Eigengewichtszustand lassen sich mit Hilfe der zugehörigen Tangentenvektoren  $\mathring{\mathbf{a}}_1$  und  $\mathbf{a}_1$  eindeutig beschreiben, siehe Bild 4.2.

Es wird am Seilelement das räumliche Kräftegleichgewicht unter Berücksichtigung der Trägheits- und Dämpfungskräfte aufgestellt, wie in Bild 4.3 verdeutlicht. Nach Abspaltung des -für sich im Gleichgewicht befindlichen- Eigengewichtszustandes  $\mathbf{T} = \mu g d \Theta^1$

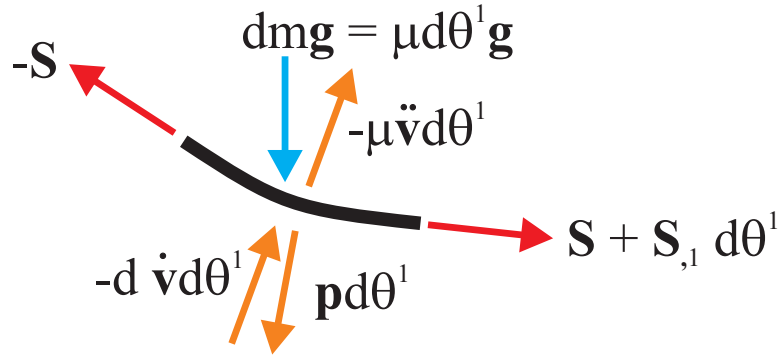


Bild 4.3: Kräfte am Seilelement (nach [T2])

von der vektoriellen Bewegungsgleichung des Momentanzustandes verbleibt die folgende partielle Differentialgleichung für die Bewegungen um die statische Ruhelage herum, wobei die Koordinaten  $x^\alpha$  mit  $(\alpha = 1, 2)$  die Ortsvektoren eines Punktes im Ez in der Seilebene bezüglich der Basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sind:

$$\boxed{[\Delta \mathbf{S}(\Theta^1, t)]_{,1} + \mathbf{p}(\Theta^1, t) = \mu_0 \ddot{\mathbf{v}}(\Theta^1, t) + d \dot{\mathbf{v}}(\Theta^1, t)} \quad (4.3)$$

$$\text{mit} \quad \Delta \mathbf{S} = \mathbf{S} - \mathbf{T} = S \mathbf{a}_1 - T \mathbf{a}_1 = [(S - T) x_{,1}^\alpha + S v_{,1}^\alpha] \mathbf{e}_\alpha + S v_{,1}^3 \mathbf{e}_3 \quad (4.4)$$

Die aufgesetzten Punkte in Gleichung (4.3) kennzeichnen die erste bzw. zweite Zeitableitung des Verschiebungsvektors  $\mathbf{v}$ . Der Ausdruck  $(\dots)_{,1}$  bedeutet die erste Ableitung nach dem LAGRANGESchen Kurvenparameter  $\Theta^1$  und entspricht der Änderung der jeweiligen Größe in Seillängsrichtung. Die Größe  $d$  stellt die Dämpfungskonstante dar, die im Gegensatz zu Gl. (3.2) durch die Elementlänge dividiert wird. Sie erhält somit nicht die Masse  $m$ , sondern die Massenbelegung  $\mu_0$  des ungedehnten Zustands. Vereinfachend wird die in der Literatur häufig verwendete, geschwindigkeitsproportionale Dämpfung eingeführt. Mit einem solchen Dämpfungsansatz kann man zwar nicht die realen Dämpfungsmechanismen erfassen, jedoch hat sich gezeigt, dass sich die amplitudenabhängige Dämpfung mit dem in Kapitel 3.2.8 vorgestellten Strukturansatz näherungsweise beschreiben lässt.

Der Vektor  $\mathbf{p}$  ist ein orts- und zeitabhängiger Lastvektor, in den z.B. bei den Regenwind-induzierten Schwingungen die Wind- und Rinnsalkräfte eingearbeitet werden.

Aus der Vektorgleichung (4.3) folgen 3 Komponentengleichungen für die unbekannt

Verschiebungen  $v^k$  ( $k=1,2,3$ ) in Richtung der raumfesten Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$ , wenn man zuvor die konstitutive Gleichung für die Seilkraft eingebaut hat. Verwendet wird ein elastisches Stoffgesetz, das für kleine Verzerrungen, aber große Verschiebungen (geometrische Nichtlinearität) gültig ist, siehe [T2]. Es lautet:

$$S = T + EA_0\gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \gamma_{11} = \frac{1}{2} (\overset{\circ}{a}_{11} - a_{11}) = v_{\alpha,1}x_{,1}^\alpha + \frac{1}{2}v_{,1}^k v_{k,1} \quad (4.5)$$

Da ideale Seile keine Schub- oder Biegeeinwirkungen, sondern ausschließlich Kräfte in Seillängsrichtung aufnehmen können, verbleiben von den GREENSchen Verzerrungen  $\gamma_{ik}$  in Gleichung (4.5) nur die Längsverzerrungen  $\gamma_{11} = \gamma$ , die im Mz einer Seilkraft  $S$  zugeordnet sind, die nicht auf Einheitsvektoren basiert und manchmal als sogenannte "nicht-physikalische" Seilkraft bezeichnet wird. Durch Zusammenfassen der Gleichungen (4.3) bis (4.5) ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen in Richtung der raumfesten Basisvektoren, zusammengefasst mit Hilfe von Summationsindizes (EINSTEINSche Summenkonvention), so dass sich gegenüber dem ausgeschriebenen Differentialgleichungssystem eine kompaktere Darstellung ergibt (vgl. [T2]):

$\left\{ EA_0\gamma \left[ x_{,1}^\alpha \delta_\alpha^k + v_{,1}^k \right] + T v_{,1}^k \right\}_{,1} + p^k = \mu_0 \ddot{v}^k + d\dot{v}^k$	(4.6)
mit $\gamma = v_{\alpha,1}x_{,1}^\alpha + \frac{1}{2}v_{,1}^k v_{k,1}$ ; $(k=1,2,3; \alpha=1,2)$ ; $v^k = v_k$	

Ebenfalls aufgeführt sind die GREENSchen Längsverzerrungen mit den Komponenten des Eigengewichtszustandes  $x^\alpha$  und den unbekanntem Verschiebungskomponenten  $v^k$ . Gleichung (4.6) enthält maximal kubische Nichtlinearitäten in den unbekanntem Verschiebungskomponenten  $v^k = v_k$ .

## 4.2 Verfahren der Ortsdiskretisierung

Zur Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems (4.6) wird zunächst eine Ortsdiskretisierung durchgeführt. Das entstehende gewöhnliche Zeitdifferentialgleichungssystem wird dann anschließend durch *MatLab* gelöst. Für die Ortsdiskretisierung wird neben dem Differenzenverfahren zu Vergleichszwecken auch die Finite-Elemente-Methode (FE-Methode) verwendet. In beiden Fällen wird das Seil in  $n$  gleiche Elemente der Länge  $\Delta l$  aufgeteilt.

## 4.2.1 Die Finite-Elemente-Methode

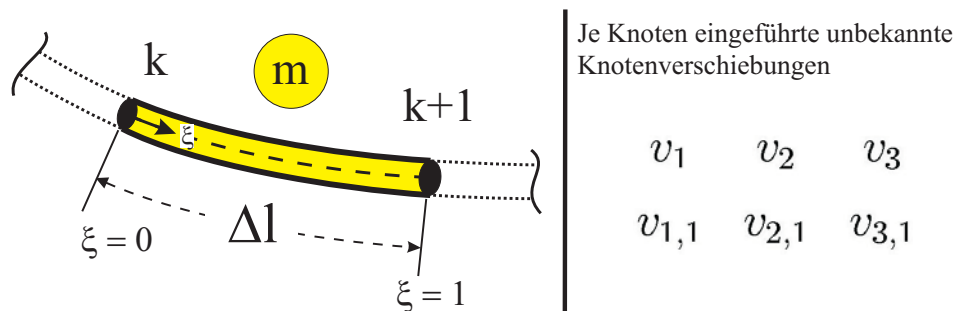


Bild 4.4: Das finite Seilelement [T2]

Bei der Definition des finiten Seilelementes nach [T2] wurden neben den drei räumlichen Verschiebungskomponenten jedes Seilknotens auch deren Ortsableitungen nach dem LAGRANGESchen Kurvenparameter  $\Theta_1$  eingeführt (siehe Abb. 4.4), so dass in jedem Knoten auch die Seilneigungen übereinstimmen.

Für die FE-Methode werden die Bewegungsgleichungen (4.6) durch Multiplikation mit einem virtuellen Verschiebungsvektor und anschließender Integration in die schwache Form einer Arbeitsgleichung überführt. Hierbei ist die Summe der erhaltenen inneren Arbeit und der Arbeitsbeiträge der Dämpfungs- und Trägheitskräfte gleich der äußeren Arbeit. Zur Bestimmung der einzelnen Arbeitsanteile werden im Rahmen der Ortsdiskretisierung die Knotenverschiebungen und -verdrehungen durch *Hermite*-Polynome mit den Verschiebungen im Elementinneren verknüpft. Aus diese Weise ergeben sich schließlich gewöhnliche Zeitdifferentialgleichungen, dargestellt in Matrizenform:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{F}^{NL} = \mathbf{P} \quad (4.7)$$

In (4.7), siehe auch [T2], sind die Trägheits-, Dämpfungs- und Steifigkeitsanteile sowie ein beliebiger zeitabhängiger Lastvektor der rechten Seite vollständig enthalten. Die nichtlinearen Beiträge - quadratisch und kubisch in den Verschiebungen - sind im Vektor  $\mathbf{F}^{NL}$  zusammengefasst. Abweichend von [T2] wird hier eine andere Darstellungsweise gewählt, die - wie sich an späterer Stelle zeigen wird - einige Vorteile aufweist. Der Vektor  $\mathbf{F}^{NL}$  lässt sich wie folgt darstellen:

$$\mathbf{F}^{NL} = \Delta \mathbf{C} \cdot \mathbf{V} \quad (4.8)$$



In der Steifigkeitsmatrix  $\Delta \mathbf{C}$  sind somit unbekannte Verschiebungsanteile von maximal quadratischer Ordnung enthalten. Damit ergibt sich das zu lösende Zeitdifferentialgleichungssystem mit dem Vektor  $\mathbf{V}$  der unbekanntenen Knotenverschiebungen vom Eigengewichtszustand zum Momentanzustand in folgender Form:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{V} = \mathbf{P} \quad (4.9)$$

#### 4.2.2 Die Ortsdiskretisierung mittels zentralem Differenzenverfahren

Die Ausgangsgleichung (4.6) -dargestellt in ausdifferenzierter Form- enthält die ersten und zweiten Ortsableitungen nach  $\Theta_1$ :

$$EA_0\gamma_{,1} \cdot [x_{,1}^\alpha \delta_\alpha^k] + EA_0\gamma \cdot [x_{,11}^\alpha \delta_\alpha^k + v_{,11}^k] + T_{,1}v_{,1}^k + Tv_{,11}^k + p^k - \mu_0\ddot{v}^k - d\dot{v}^k = 0 \quad (4.10)$$

Dabei ist  $\gamma$  das GREENSche Verzerrungsmaß nach Gl. (4.6). Der Ausdruck  $\gamma_{,1}$  ist die Ableitung nach dem Ort und ergibt sich zu:

$$\gamma_{,1} = v_{\alpha,11}x_{,1}^\alpha + v_{\alpha,1}x_{,11}^\alpha + v_{k,1}v_{,11}^k \quad ; \quad (k=1,2,3; \alpha=1,2) \quad ; \quad v^k = v_k \quad (4.11)$$

Bedingt durch die Verwendung des Differenzenverfahrens mit geraden Seilelementen wird an den Seilknoten nicht mehr gefordert, dass die Verschiebungsableitungen übereinstimmen. Damit halbiert sich gegenüber der FE-Methode die Anzahl der Freiheitsgrade. Die Auswertung der Zeitdifferentialgleichungen wird deutlich beschleunigt. Nach Aufteilung des Seils in  $n$  Elemente der Länge  $\Delta l$  lassen sich ausgehend vom Ez für jeden Knoten Verschiebungsvektoren zum Mz einführen. Ersetzt man die Ableitungen nach dem Ort durch die bekannten Differenzenquotienten, dann gilt für das  $i$ -te Element:

$$v_{,1}^k = \frac{\partial v_k^i}{\partial \Theta^1} = \frac{v_k^{i+1} - v_k^{i-1}}{2 \cdot \Delta l} \quad (4.12)$$

Die zweite Ortsableitung wird ersetzt durch:

$$v_{,11}^k = \frac{\partial^2 v_k^i}{(\partial \Theta^1)^2} = \frac{\partial^2 v_k^i}{\partial \Delta l^2} = \frac{v_k^{i+1} - 2 \cdot v_k^i + v_k^{i-1}}{\Delta l^2} \quad (4.13)$$

Ausgehend von (4.6) unter Beachtung von (4.5) werden die Verzerrungen  $\dot{\gamma}^i$ , die Verzerrungsableitungen  $\dot{\gamma}_{,1}^i$ , die Seilkraft  $\dot{S}^i$  und deren Ortsableitung  $\dot{S}_{,1}^i$  durch entsprechende Differenzenquotienten ausgedrückt. Es entsteht ein Differentialgleichungssystem in der Zeit, in dem ohne Linearisierungen und Abbruch von Reihenentwicklungen maximal kubische Verschiebungsvektoren  $\dot{\mathbf{v}}^i(t)$  enthalten sind. Das nach Multiplikation mit  $\Delta l$  entstehende Gleichungssystem lautet in Matrizenform:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C})\mathbf{V} = \mathbf{P} \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{C} = \Delta\mathbf{C}^I + \Delta\mathbf{C}^{II} \quad (4.14)$$

In (4.14) sind der Beschleunigungsvektor  $\ddot{\mathbf{V}}$ , der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{V}}$  und der Verschiebungsvektor  $\mathbf{V}$  Spaltenvektoren der Größe  $3(n-1)$ , in denen für alle Knoten die Verschiebungen, Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen der drei Raumrichtungen knotenweise zusammengefasst sind. Bei Regen-Wind-induzierten Schwingungen enthält der Lastvektor  $\mathbf{P}$  beispielsweise Wind- und Rinnsalkräfte, siehe Kapitel 7:

$$\mathbf{P} = \mathbf{W} + \mathbf{R} \quad (4.15)$$

Die verschiebungsunabhängigen, quadratischen Diagonalmatrizen  $\mathbf{M}$  (Massenmatrix) und  $\mathbf{D}$  (Dämpfungsmatrix) haben die Größe  $3(n-1)$  auf  $3(n-1)$ .

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_0 \cdot \Delta l & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \cdot \Delta l & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_0 \cdot \Delta l & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_0 \cdot \Delta l \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d \cdot \Delta l & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d \cdot \Delta l & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d \cdot \Delta l & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \cdot \Delta l \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

In beiden Matrizen ist die Massenbelegung  $\mu_0$ , vgl. Kap. 4.1, und die Länge eines Seilelementes  $\Delta l$  enthalten. Der Dämpfungsparameter  $d$  berechnet sich dem massenproportionalen Ansatz der konstanten Strukturdämpfung nach Kap. 3.2.8 folgend aus:

$$d = 4\pi \cdot \xi \cdot \mu_0 \cdot f_1 \quad (4.18)$$

Dabei entspricht  $\xi$  dem Prozentsatz der kritischen Dämpfung und  $f_1$  der Frequenz der ersten Eigenform. Die in (4.14) enthaltene, verschiebungsunabhängige Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  weist nach [H3] eine Bandstruktur um die Hauptdiagonale auf (siehe (4.19)). Dabei ist jedem Knoten mit seinen drei Verschiebungskomponenten ein Steifigkeitselement der Größe 3 mal 3 zugeordnet. Bis auf die Hauptdiagonale sind die Elemente der dritten Zeile und Spalte in  $\mathbf{C}$  unbesetzt, da die Seilebene im Eigengewichtszustand ausschließlich durch die Basisrichtungen  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  und die zugehörigen Komponenten  $x^\alpha$  beschrieben wird. Die Größe  $EA_0$  ist die Dehnsteifigkeit des Seils im Ausgangszustand.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \overset{1}{B_{11+G}} & \overset{1}{B_{21}} & 0 & \overset{1}{C_{11+H}} & \overset{1}{C_{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \overset{1}{B_{12}} & \overset{1}{B_{22+G}} & 0 & \overset{1}{C_{12}} & \overset{1}{C_{22+H}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \overset{1}{G} & 0 & 0 & \overset{1}{H} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \overset{2}{A_{11+F}} & \overset{2}{A_{21}} & 0 & \overset{2}{B_{11+G}} & \overset{2}{B_{21}} & 0 & \overset{2}{C_{11+H}} & \overset{2}{C_{21}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \overset{2}{A_{12}} & \overset{2}{A_{22+F}} & 0 & \overset{2}{B_{12}} & \overset{2}{B_{22+G}} & 0 & \overset{2}{C_{12}} & \overset{2}{C_{22+H}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \overset{2}{F} & 0 & 0 & \overset{2}{G} & 0 & 0 & \overset{2}{H} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \overset{3}{A_{11+F}} & \overset{3}{A_{21}} & 0 & \overset{3}{B_{11+G}} & \overset{3}{B_{21}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \overset{3}{A_{12}} & \overset{3}{A_{22+F}} & 0 & \overset{3}{B_{12}} & \overset{3}{B_{22+G}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{3}{F} & 0 & 0 & \overset{3}{G} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\text{mit } \overset{i}{A}_{\alpha\beta} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( -\frac{\overset{i+1}{x^\alpha} - \overset{i-1}{x^\alpha}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{x^\beta} - \overset{i-1}{x^\beta}}{\Delta l} + \frac{\overset{i+1}{x^\alpha} - 2 \cdot \overset{i}{x^\alpha} + \overset{i-1}{x^\alpha}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{x^\beta} - \overset{i-1}{x^\beta}}{\Delta l} + \frac{\overset{i+1}{x^\alpha} - \overset{i-1}{x^\alpha}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{x^\beta} - 2 \cdot \overset{i}{x^\beta} + \overset{i-1}{x^\beta}}{\Delta l} \right)$$

$$\overset{i}{B}_{\alpha\beta} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( + 2 \cdot \frac{\overset{i+1}{x^\alpha} - \overset{i-1}{x^\alpha}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{x^\beta} - \overset{i-1}{x^\beta}}{\Delta l} \right)$$

$$\overset{i}{C}_{\alpha\beta} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( -\frac{\overset{i+1}{x^\alpha} - \overset{i-1}{x^\alpha}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{x^\beta} - \overset{i-1}{x^\beta}}{\Delta l} - \frac{\overset{i+1}{x^\alpha} - 2 \cdot \overset{i}{x^\alpha} + \overset{i-1}{x^\alpha}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{x^\beta} - \overset{i-1}{x^\beta}}{\Delta l} - \frac{\overset{i+1}{x^\alpha} - \overset{i-1}{x^\alpha}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{x^\beta} - 2 \cdot \overset{i}{x^\beta} + \overset{i-1}{x^\beta}}{\Delta l} \right)$$

$$\overset{i}{F} = \frac{1}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( -\overset{i-1}{T} - 4 \cdot \overset{i}{T} + \overset{i+1}{T} \right)$$

$$\text{und } \overset{i}{G} = \frac{1}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( + 8 \cdot \overset{i}{T} \right)$$

$$\overset{i}{H} = \frac{1}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( + \overset{i-1}{T} - 4 \cdot \overset{i}{T} - \overset{i+1}{T} \right)$$

Die verschiebungsabhängigen Steifigkeitsanteile in (4.14), die lineare ( $\Delta^I \mathbf{C}$ ) und quadratische ( $\Delta^{II} \mathbf{C}$ ) Verschiebungskomponenten  $v$  enthalten, werden nach [H3] in der Matrix  $\Delta \mathbf{C}$  zusammengefasst und anschließend mit dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{V}$  multipliziert. Auch in dieser Matrix stellt sich wegen des Differenzenverfahrens ausschließlich die Kopplung zu den benachbarten Seilknoten ein. Es gilt:

$$\Delta^I \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{I,1}{B_{11}+G} & \frac{I,1}{B_{21}} & 0 & \frac{I,1}{C_{11}+H} & \frac{I,1}{C_{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{I,1}{B_{12}} & \frac{I,1}{B_{22}+G} & \frac{I,1}{C_{12}} & \frac{I,1}{C_{22}+H} & \frac{I,1}{C_{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{I,1}{G} & 0 & 0 & \frac{I,1}{H} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{I,2}{A_{11}+F} & \frac{I,2}{A_{21}} & 0 & \frac{I,2}{B_{11}+G} & \frac{I,2}{B_{21}} & 0 & \frac{I,2}{C_{11}+H} & \frac{I,2}{C_{21}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{I,2}{A_{12}} & \frac{I,2}{A_{22}+F} & 0 & \frac{I,2}{B_{12}} & \frac{I,2}{B_{22}+G} & 0 & \frac{I,2}{C_{12}} & \frac{I,2}{C_{22}+H} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{I,2}{F} & 0 & 0 & \frac{I,2}{G} & 0 & 0 & \frac{I,2}{H} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I,3}{A_{11}+F} & \frac{I,3}{A_{21}} & 0 & \frac{I,3}{B_{11}+G} & \frac{I,3}{B_{21}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I,3}{A_{12}} & \frac{I,3}{A_{22}+F} & 0 & \frac{I,3}{B_{12}} & \frac{I,3}{B_{22}+G} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I,3}{F} & 0 & 0 & \frac{I,3}{G} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$A_{\alpha\beta}^{I,i} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( -\frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\Delta l} + 0.5 \cdot \frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - 2 \cdot x^{\beta} + x^{\gamma}}{\Delta l} \right)$$

mit 
$$B_{\alpha\beta}^{I,i} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( + 2 \cdot \frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\Delta l} \right)$$

$$C_{\alpha\beta}^{I,i} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( -\frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\Delta l} - 0.5 \cdot \frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - 2 \cdot x^{\beta} + x^{\gamma}}{\Delta l} \right)$$

$$F = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( -\frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\Delta l} + \frac{v^{\alpha} - 2 \cdot v^{\beta} + v^{\gamma}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\Delta l} + \frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - 2 \cdot x^{\beta} + x^{\gamma}}{\Delta l} \right)$$

und 
$$G = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( + 2 \cdot \frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\Delta l} \right)$$

$$H = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( -\frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\Delta l} - \frac{v^{\alpha} - 2 \cdot v^{\beta} + v^{\gamma}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\Delta l} - \frac{v^{\alpha} - v^{\beta}}{\Delta l} \cdot \frac{x^{\alpha} - 2 \cdot x^{\beta} + x^{\gamma}}{\Delta l} \right)$$

Nur bei den Elementen  $F$ ,  $G$  und  $H$  sind gegenständige Indizes vorhanden, die eine Summation über den Index erforderlich machen. Selbiges gilt für die Elemente  $F$ ,  $G$

und  $\overset{II,i}{H}$ , die quadratisch von den Verschiebungskomponenten  $v$  abhängen und alleine die Steifigkeitsmatrix  $\overset{II}{\Delta C}$  bilden. Diese ist somit nur noch auf den Diagonalen der Untermatrizen der zugehörigen angrenzenden Elemente besetzt:

$$\overset{II}{\Delta C} = \begin{bmatrix} \overset{II,1}{G} & 0 & 0 & \overset{II,1}{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \overset{II,1}{G} & 0 & 0 & \overset{II,1}{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \overset{II,1}{G} & 0 & 0 & \overset{II,1}{H} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \overset{II,2}{F} & 0 & 0 & \overset{II,2}{G} & 0 & 0 & \overset{II,2}{H} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \overset{II,2}{F} & 0 & 0 & \overset{II,2}{G} & 0 & 0 & \overset{II,2}{H} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \overset{II,2}{F} & 0 & 0 & \overset{II,2}{G} & 0 & 0 & \overset{II,2}{H} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \overset{II,3}{F} & 0 & 0 & \overset{II,3}{G} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{II,3}{F} & 0 & 0 & \overset{II,3}{G} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{II,3}{F} & 0 & 0 & \overset{II,3}{G} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\overset{II,i}{F} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( + \frac{\overset{i+1}{v_k} - \overset{i-1}{v_k}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{v^k} - 2 \cdot \overset{i}{v^k} + \overset{i-1}{v^k}}{\Delta l} - 0.5 \cdot \frac{\overset{i+1}{v_k} - \overset{i-1}{v_k}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{v^k} - \overset{i-1}{v^k}}{\Delta l} \right)$$

mit 
$$\overset{II,i}{G} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( + \frac{\overset{i+1}{v_k} - \overset{i-1}{v_k}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{v^k} - \overset{i-1}{v^k}}{\Delta l} \right)$$

$$\overset{II,i}{H} = \frac{EA_0}{4 \cdot \Delta l} \cdot \left( - \frac{\overset{i+1}{v_k} - \overset{i-1}{v_k}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{v^k} - 2 \cdot \overset{i}{v^k} + \overset{i-1}{v^k}}{\Delta l} - 0.5 \cdot \frac{\overset{i+1}{v_k} - \overset{i-1}{v_k}}{\Delta l} \cdot \frac{\overset{i+1}{v^k} - \overset{i-1}{v^k}}{\Delta l} \right)$$



## 5 Die numerische Umsetzung

### 5.1 Programmaufbau

Bei dem folgend beschriebenen Berechnungsschema zur Simulation von Seilschwingungen sowohl für Parametererregung als auch für Anregung durch Regen und Wind handelt es sich um ein in *MatLab* selbst erstelltes Programm. Im Rahmen einer Diplomarbeit im Institut für Mathematik und Bauinformatik wurden in [A1] zunächst die von THALHEIM untersuchten parametererregten Seilschwingungen mit einer Ortsdiskretisierung mittels FE-Methode nachgerechnet. Im Anschluss erfolgte ein erster Versuch der Anwendung auf Regen-Wind-induzierte Schwingungen. Die mechanischen Ansätze dafür wurden von der Professur für Baumechanik der Universität der Bundeswehr München bereitgestellt. Die Ergebnisse mit der FE-Methode nach [T2] lieferten dabei keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Jedoch konnten Teile der in [A1] verwendeten Ein- und Ausgabefunktionen sowie das Auslesen der aerodynamischen Beiwerte aus einer Datei in diesem Programm übernommen werden.

Ausgehend vom *Hauptprogramm* werden zunächst in der Funktion *Eingabedaten* alle wesentlichen Parameter für das zu untersuchende Seil definiert. Für die spätere Ortsdiskretisierung mit dem Differenzenverfahren wird der Nutzer vom Programm aufgefordert, die gewünschte Elementanzahl  $n$  einzugeben. Dabei sollte es sich um eine gerade, durch vier teilbare Zahl handeln, da so für die ersten drei Eigenformen die Daten des Diskretisierungspunktes mit den größten Amplituden in Seilmitte oder im Viertelpunkt vorliegen. Darüber hinaus wird in der Funktion *Eingabedaten* für die Parameterschwingungen die Auflagerbewegung hinsichtlich Richtung, Amplitudengröße und Erregerfrequenz bestimmt. Bei den Regen-Wind-induzierten Schwingungen werden in dieser Funktion sowohl die Rinnsaleigenschaften als auch die Winddaten festgelegt.

In der folgenden Funktion *belegeMDC* werden die zeitunabhängige Massen-, Dämpfungs- und die lineare Steifigkeitsmatrix des Seils bestimmt. Dabei wird die statische Seillinie unter Eigengewicht und Vorspannung, beschrieben durch die Variablen  $\kappa$  und  $\lambda$ , nach einem von IRVINE entwickelten Prinzip mittels Sekantenverfahren berechnet, siehe Ka-

pitel 9.2.1. Mit Hilfe der Massen- und der Steifigkeitsmatrix lassen sich die Eigenformen und Eigenfrequenzen angeben, die in der Unterfunktion *berechneEigenvektorenUndEigenwerte* berechnet werden. Ausgehend von diesen zeitunabhängigen Basisuntersuchungen werden anschließend die Lastfälle eingearbeitet.

Bei Anregung durch Regen und Wind wird im Anschluss die zeitunabhängige Massmatrix der beiden Rinnsale in der Funktion *belegeMPhi* ermittelt. In der Funktion *Anfangswerte* werden die statischen Rinnsalpositionen für die gewählte Anströmung sowie die statische Gleichgewichtslage des Seiles unter Regen und einer konstanten Windlast bestimmt. Im Anschluss daran beginnt die eigentliche Simulation der Seilschwingungen, siehe Kapitel 5.2. Dabei werden in jedem Zeitschritt, der durch die automatische Zeitschrittsteuerung des Lölers *ode45* vorgegeben wird, die zeitveränderlichen Matrizen durch die Funktion *belegeNL* bestimmt. Hierzu zählen u.a. die nichtlineare Steifigkeitsmatrix des Seiles  $\Delta \mathbf{C}$ , die neu eingeführte geschwindigkeitsabhängige Dämpfungsmatrix der Rinnsale  $\mathbf{D}_\Phi$  (siehe Kap. 8.1.3), die Steifigkeitsanteile der Rinnsale  $\mathbf{C}_\Phi^{\text{NL}}$  sowie die entsprechenden Windkraft- und Windmomentenvektoren. Die Bestimmung der drei aerodynamischen Beiwerte in Abhängigkeit der beiden Rinnsalpositionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sowie der relativen Anströmung  $U_{rel}$  erfolgt über weitere Unterfunktionen. Dieses Ablaufschema ist in Abb. 5.1 veranschaulicht.

Die Einarbeitung des Lastfalles für parametererregte Schwingungen ist in Kapitel 6.4 beschrieben.

Um die zu speichernden Datenmengen zu begrenzen und auszuwerten, werden die Ergebnisse der Simulation in Zeitintervallen von  $\Delta t = 0,1s$  gespeichert, die dann zur Ausgabe aufbereitet werden können. Die jeweils gespeicherten Daten eines Zeitschritts sind dann gleichzeitig die Eingangsdaten für das folgende Zeitintervall. Nach Erreichen der vorgegebenen Endzeit findet die *Ausgabe* der gewünschten Größen statt. Hierbei werden zwei verschiedene Ausgabedarstellungen gewählt. Es werden die berechneten Daten des Diskretisierungspunktes mit den vermutlich größten Amplituden über den gesamten Zeitbereich dargestellt, um den Aufschaukelprozess und das Erreichen des Grenzzyklus darzustellen. Weiterhin soll das Verhalten des Seils oder der Rinnsale über die Seillänge, also die Ausbildung der Schwingungsformen, verdeutlicht werden. Der Übersichtlichkeit wegen werden alle Diskretisierungspunkte des Seiles für die letzten 10 gespeicherten Zeitschritte des Simulationsbereiches abgebildet.



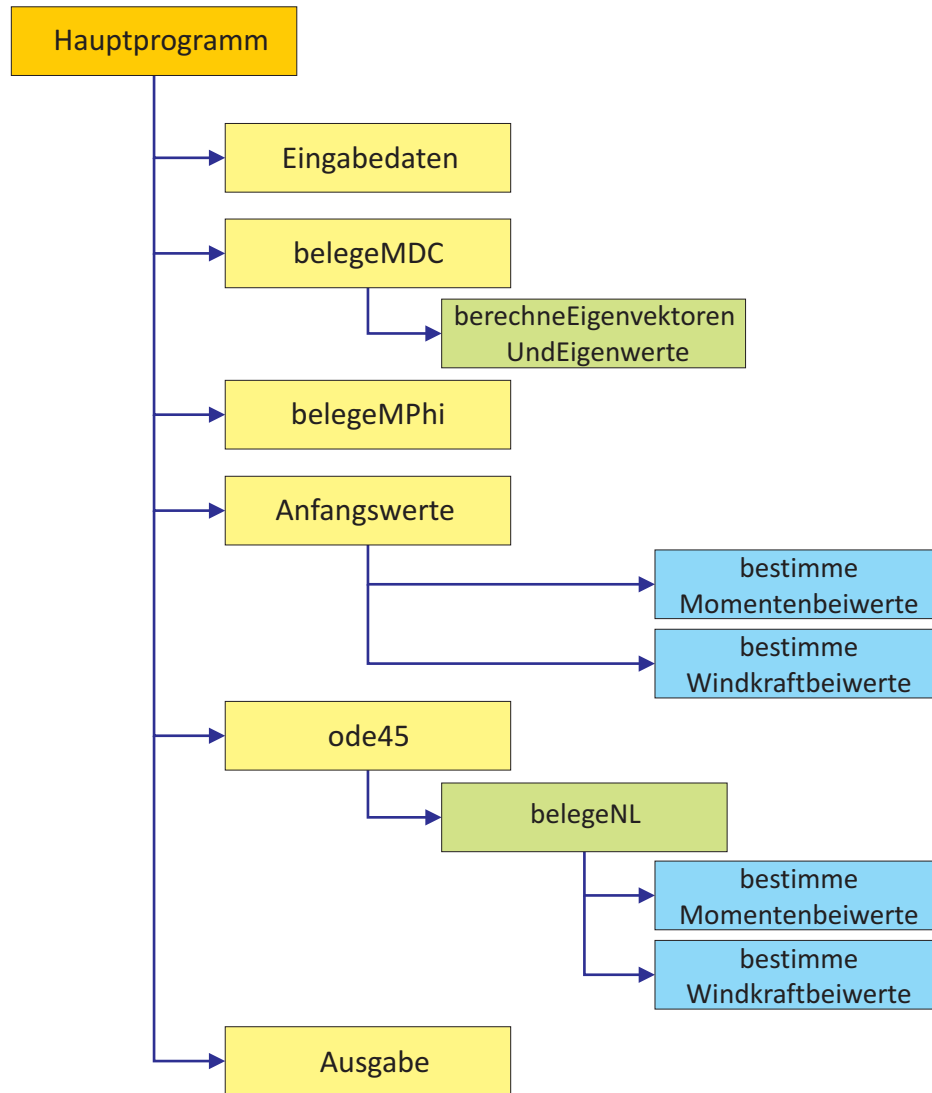


Bild 5.1: Programmbaum zur Berechnung Regen-Wind-induzierter Schwingungen

## 5.2 Lösung der Zeitdifferentialgleichungssysteme

Bei den Gleichungssystemen der parametererregten Seilschwingungen (6.9) und der Regen-Wind-induzierten Schwingungen (7.15) und (7.16) handelt es sich, wie in den folgenden Kapiteln gezeigt wird, um nichtlineare, gekoppelte, gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Grades. In dieser Arbeit wird ein numerisches Lösungsverfahren verwendet, bei dem die Näherungslösung innerhalb einer bestimmten Genauigkeitsschranke berechnet werden soll.

In der Literatur, z.B. [K1] und [B2], sind für diese Probleme mehrere Lösungsmöglich-

keiten angegeben und untersucht worden. Unterschiede zwischen den Verfahren werden deutlich, wenn man Rechenaufwand und Genauigkeit, also Minimierung des Diskretisierungsfehlers, betrachtet. Weitere Unterscheidungsmerkmale ergeben sich durch die Berücksichtigung von Steifheit oder numerischer Stabilität.

Ziel einer jeden Berechnung sollte es sein, mit möglichst geringem Aufwand ein ausreichend genaues Ergebnis zu erzielen. Indikator dafür ist die Konvergenzordnung des gewählten Verfahrens. Bei dem hier gegebenen Anfangswertproblem ist grundsätzlich zwischen expliziten und impliziten Verfahren zu unterscheiden. Explizite Verfahren berechnen die Lösung zum Zeitpunkt  $t = t_0 + \Delta t$ , indem eine gewisse Anzahl von definierten Funktionsauswertungen der Anfangskonfiguration des Systems  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$  durchgeführt wird. Die gefundene Approximation dient dann wiederum als Anfangswert für den nächsten Zeitschritt. Implizite Verfahren hingegen beziehen zur Berechnung des folgenden Näherungswertes bei  $\mathbf{y}(t_0 + \Delta t)$  auch Funktionsauswertungen dieses Punktes  $\mathbf{y}(t_0 + \Delta t)$  selbst mit ein. Dadurch muss in jedem Zeitschritt ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden, was einen erheblich höheren Rechenaufwand zur Folge hat. Dieser Nachteil wird allerdings durch bessere Stabilitätseigenschaften im Allgemeinen wieder ausgeglichen. Da sich bei expliziten Verfahren die Genauigkeit durch einfache Schrittweitenverkleinerung bei gleicher Konvergenzordnung erhöhen lässt, wird im Folgenden ein explizites Verfahren angewendet. Vergrößert sich der Diskretisierungsfehler allerdings so stark, dass extrem kleine Schrittweiten  $\Delta t$  nötig werden, handelt es sich um ein steifes Problem. Dann müsste man auf implizite Verfahren zurückgreifen. Nichtsteife Anwendungen hingegen können sehr effizient mit expliziten Verfahren gelöst werden. Diese lassen sich in mehrere Kategorien aufteilen, vgl. [K1]:

- Einschrittverfahren (z.B. RUNGE-KUTTA)
- Extrapolationsverfahren (z.B. GRAGG-BULIRSCH-STOER)
- Mehrschrittverfahren (z.B. ADAMS-BASHFORD)

Für die weiteren Berechnungen wird auf die Klasse von Einschrittverfahren nach RUNGE-KUTTA zurückgegriffen. Dabei wird ein gewichtetes Mittel von Approximationen der Steigung aus mehreren Zwischenlösungen im Intervall  $[\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}]$  bestimmt, so dass Linearkombinationen der Zwischenlösungen in möglichst vielen Punkten mit den Differentialen in der TAYLORentwicklung übereinstimmen. Mit der gewonnenen Steigung wird

anschließend ein Zeitschritt der Länge  $\Delta t$  ausgeführt, siehe [K1]:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i v_i \tag{5.1}$$

$$\text{mit } v_i = f \left( t + c_i \Delta t, y_k + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} v_j \right) \quad \text{für } j = 1, \dots, s$$

Dabei sind  $b_i$  die Wichtungskennzahlen,  $a_{ij}$  und  $c_i$  frei zu wählende Koeffizienten zur Erfüllung des Gleichungssystems und  $v_i$  sind die Stufenlösungen. Bei Verwendung von  $s$  Zwischenlösungen handelt es sich um ein  $s$ -stufiges Verfahren. Da die beim TAYLOR-Abgleich entstehenden Gleichungen nichtlinear in den Parametern sind, kann ein  $s$ -stufiges Verfahren höchstens die Konvergenzordnung  $s$  haben kann.

Konvergenzordnung $p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nötige Stufen $s$	1	2	3	4	6	7	9	10	11	12

Tab. 5.1: Zusammenhang zwischen der Stufenzahl  $s$  und der Konvergenzordnung  $p$  [K1]

Durch Bestimmung eines freien Parameters ergibt sich eine Lösungsschar, die übersichtlich im BUTCHER-Tableau dargestellt werden kann (siehe Tab. 5.2). Bei expliziten Verfahren entsteht eine untere Dreiecksmatrix. Ist dies nicht der Fall, liegt ein implizites Lösungsverfahren vor. Das klassische RUNGE-KUTTA-Verfahren ist ein 4-stufiges Verfahren mit den Wichtungsfakoren  $b_1 = \frac{1}{6}$ ,  $b_2 = \frac{1}{3}$ ,  $b_3 = \frac{1}{3}$  und  $b_4 = \frac{1}{6}$ . Damit das numerische Verfahren stabil läuft, muss die Schrittweite entsprechend klein gewählt werden. Andererseits sollte die Schrittweite  $\Delta t$  auch nicht zu klein sein, damit der

0					
$c_2$	$a_{21}$				
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$c_s$	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\dots$	$a_{s,s-1}$	
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{s-1}$	$b_s$

Tab. 5.2: Das BUTCHER-Tableau [K1]

Rechenaufwand und die Kosten nicht zu groß werden. Führt man nun zwei Integrationsschritte mit der halben Schrittweite aus, lässt sich der Diskretisierungsfehler im Vergleich zur vollen Schrittweite abschätzen.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (*ODE - Ordinary Differential Equations*), können sich die Eigenschaften im Verlauf der Berechnung ändern. Aus diesem Grund würden bei Wahl einer konstanten, der kleinsten nötigen Schrittweite in großen Teilen zu viele Rechenschritte durchgeführt, so dass die gewünschte Effizienz nicht erreicht würde. Deshalb sollte die Zeitschrittweite in jedem Integrationsschritt angepasst werden. Dazu wird das jeweilige Fehlerglied auf seine Genauigkeit untersucht. Liegt die Abweichung innerhalb einer gewissen Toleranz, kann die Rechnung fortgeführt werden. Bei zu großen Abweichungen wird die Zeitschrittweite verkleinert und erneut überprüft. Ist der erhaltene Fehler weit unterhalb der Toleranzgrenze, wird die Zeitschrittweite zur Effizienzsteigerung vergrößert. Dieses Verfahren zur Schrittweitensteuerung nennt man RICHARDSON-Extrapolation. Wendet man ein  $s$ -stufiges Verfahren sowohl auf die ganze als auch auf die halbe Schrittweite an, ergeben sich insgesamt  $(3s - 1)$  Funktionsauswertungen. Mit deutlich weniger Rechenaufwand kommen *eingebettete* RUNGE-KUTTA-Verfahren aus. Diese sind nach demselben Schema aufgebaut, liefern jedoch ohne zusätzliche Funktionsauswertungen eine zweite Näherungslösung mit. Dabei wird von einem  $s$ -stufigen Verfahren mit der Konvergenzordnung  $p$  ausgegangen. Bei Verwendung einer zweiten Approximation  $\tilde{y}_{k+1}$  (siehe Gleichung (5.2)) mit einer um eins höheren oder niedrigeren Konvergenzordnung  $p$  erhält man über die Differenz beider Lösungen  $\bar{y}_{k+1} - y_{k+1}$  nach [K1] eine Näherung für den lokalen Diskretisierungsfehler:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + \Delta t \sum_{i=1}^s \tilde{b}_i v_i \quad (5.2)$$

$$\text{mit} \quad v_i = f \left( t + c_i \Delta t, y_k + \Delta t \sum_{j=1}^{l-1} a_{ij} v_j \right) \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, s$$

Im BUTCHER-Tableau stellt sich das folgendermaßen dar:

0					
$c_2$	$a_{21}$				
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$c_s$	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\dots$	$a_{s,s-1}$	
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{s-1}$	$b_s$
	$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_2$	$\dots$	$\tilde{b}_{s-1}$	$\tilde{b}_s$

Tab. 5.3: Das BUTCHER-Tableau für eingebettete Verfahren [K1]

Um die Effizienz weiter zu steigern, kann man durch geschickte Koeffizientenwahl die erste Steigung des  $(k + 1)$ -ten Schritts im  $k$ -ten Schritt mitberechnen. Diese hocheffizienten Verfahren, bei denen man eine Funktionsauswertung der rechten Seite einspart, heißen *FSAL-Verfahren* (*First evaluation of  $\mathbf{f}$  for the next step same as last of the current step*), siehe [K1].

DORMAND und PRINCE entwickelten im Jahr 1980 eines dieser Verfahren mit den Konvergenzordnungen 4 und 5. Um mögliche Fehlerquellen zu minimieren und ein weitestgehend optimiertes Verfahren zur Lösung der Zeitdifferentialgleichungen anzuwenden, wird die Mathematik-Software *MatLab* verwendet. Dabei ist mit dem Löser *ode45* ein Werkzeug mit automatischer Schrittweitensteuerung gegeben, um gewöhnliche, nichtsteife Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme der Form  $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$  mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$  zu lösen. Bei den zu lösenden Matrizendifferentialgleichungen handelt es sich um ein System 2. Ordnung, welches zunächst durch Substitution in ein System 1. Ordnung überführt werden muss.

Damit entstehen bei den parametererregten Schwingungen 2 gekoppelte Differentialgleichungssysteme für zwei Zustandsgrößen des Seiles; bei den Regen-Wind-induzierten Schwingungen ergeben sich insgesamt 4 gekoppelte Differentialgleichungssysteme: je 2 für die Zustandsgrößen des Seiles und die sich bewegenden Rinnsale.



## 6 Anwendung der Seiltheorie auf parametererregte Seilschwingungen

Periodische oder auch aperiodische Bewegungen oder Lasten bewirken erzwungene Schwingungen. Für bestimmte Verhältnisse zwischen der Erregerfrequenz und den Eigenfrequenzen kann es zu Querschwingungen der Systeme mit teils beträchtlichen Auslenkungen kommen. So können beispielsweise Brückenüberbauten, Brückenpylone oder Masten infolge Wind, Verkehrslast oder Erdbebeneinwirkung zu schwingen beginnen. Diese Schwingungen übertragen sich durch die Kopplung im Auflager auf das Seil. Für den Fall der Parameterresonanz, bei der die Erregerkreisfrequenz  $\Omega$  den doppelten Wert der ersten Eigenkreisfrequenz  $\omega$  des schwingenden Seils annimmt, können schon kleine Anregungen zu großen Amplituden führen.



Bild 6.1: Alex-Fraser-Bridge in Kanada [N3]

## 6.1 Auftreten parametererregter Seilschwingungen

Im Jahr 1988 wurden noch während der Montage der in Abb. 6.1 dargestellten *Alex-Fraser-Bridge* in der Nähe von Annacis (Kanada) an den Schrägkabeln der Brücke Schwingungen mit Amplituden von bis zu 30 cm beobachtet. Diese Schwingungen waren eindeutig auf eine harmonische Bewegung des unteren Seilendpunktes (Brückendeck) zurückzuführen. Das Brückendeck selbst wurde unter moderaten Windverhältnissen zu Flatterschwingungen angeregt.

Eine weitere Brücke, die im Zusammenhang mit parametererregten Schwingungen immer wieder genannt wird, ist die belgische Brücke *Pont-de-Ben-Ahin* (siehe Bild 6.2), bei der Doppelamplituden von über 2 m beobachtet wurden. Diese großen Amplituden resultierten hauptsächlich aus harmonischen Pylonbewegungen und/oder Bewegungen der Fahrbahn. Die beschreibenden Differentialgleichungen für die parametererregten Seil-

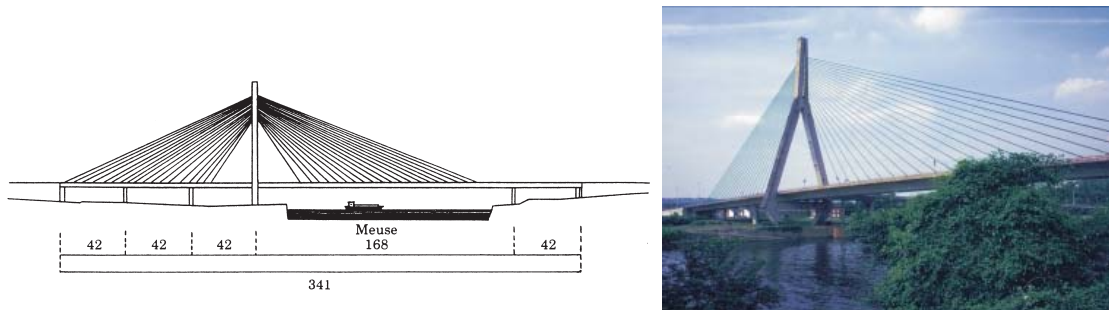


Bild 6.2: Pont-de-Ben-Ahin in Belgien [T2]

schwingungen enthalten periodisch veränderliche Steifigkeitsanteile, die bei bestimmten Verhältnissen von Erreger- zu Eigenfrequenz starke Schwingungen bewirken können. In der vorliegenden Arbeit wird die in Kapitel 4 vorgestellte Seiltheorie unter Verwendung des Differenzenverfahrens im Ort diskretisiert. Nach der Einarbeitung des Lastfalls für die parametererregten Schwingungen werden das Modell und die Programmierung zunächst auf Richtigkeit und Funktionalität überprüft.

Zur Einführung in die Parametererregung wird zunächst das Stabilitätsproblem des pulsierend belasteten Druckstabes behandelt, bei dem parametererregte Biegeschwingungen auftreten können. Im Anschluss erfolgt der Übergang auf Seile. Nach der Vorstellung des Lastmodells werden für ein ausgewähltes Anwendungsbeispiel die wesentlichen Instabilitätsbereiche untersucht und in einer nichtlinearen Analyse die maßgebenden Schwingungsformen, Amplituden und Grenzyklen ermittelt. Die erzielten Ergebnisse



werden mit den Versuchsergebnissen in [T5] und [R1] verglichen. Weiterhin stehen für das untersuchte Seil einige Simulationsergebnisse zu Schwingungen in der ersten Eigenform und Stabilitätsuntersuchungen von THALHEIM [T2] zur Verfügung. In dieser Arbeit werden darüber hinaus auch Bereiche höherer Schwingungsformen untersucht.

## 6.2 Parametererregte Schwingungen beim pulsierend belasteten Druckstab

Eines der am besten untersuchten Probleme der kinetischen Stabilitätstheorie ist der periodisch pulsierend belastete Druckstab, der auf MATHIEUSche Differentialgleichungen führt. Dabei kann es bei bestimmten Anregungen zu Querschwingungen mit beträchtlichen Amplituden kommen. Die zugehörigen fundamentalen Untersuchungen, z.B. nach [B3], [B8] und [H2], werden zur Einführung in die Parametererregung und die Stabilitätstheorie zusammengefasst.

Grundlage der folgenden, konservativen Untersuchungen ist der beidseitig gelenkig gelagerte Stab mit konstanter Biegesteifigkeit  $EI$ . Das HOOKEsche Gesetz und das Ebenbleiben der Querschnitte werden vorausgesetzt [B3]. Weiterhin wird durch die *Normalenhypothese* von BERNOULLI Schubstarrheit angenommen, so dass die Schubverzerrungen ausgeschlossen werden. An dynamischen Termen werden Dämpfungs- und Trägheitsanteile in Querrichtung mitgeführt. In den grundlegenden Betrachtungen werden dagegen die Längsträgheitskräfte und die aus der Querschnittsrotation folgenden Trägheitskräfte vernachlässigt.

Ausgehend vom kinetischen Gleichgewicht am infinitesimalen Stabelement erhält man die folgende partielle Differentialgleichung, siehe z.B. [H2]:

$$EI \cdot w''''(x, t) + P(t) \cdot w''(x, t) + \mu \cdot \ddot{w}(x, t) + d \cdot \dot{w}(x, t) = 0 \quad (6.1)$$

Dabei sind die Ortsableitungen durch Ableitungsstriche und die Zeitableitungen durch aufgesetzte Punkte gekennzeichnet. Im Massenträgheitsterm stellt die Größe  $\mu$  die Massenbelegung pro Meter Stablänge dar. Im geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsterm ist  $d$  die Dämpfungskonstante. Zur Lösung der partiellen Differentialgleichung wird bekanntlich ein Produktansatz in den Eigenschwingungsformen - hier für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab -  $\sin(k\pi x/l)$  und noch unbekanntem Zeitfunktionen  $\hat{w}(t)$

verwendet, der Gl. 6.1 nach [B8] in eine gewöhnliche Zeitdifferentialgleichung überführt:

$$\mu \cdot \ddot{\hat{w}} + d \cdot \dot{\hat{w}} + (P_k - P(t)) \cdot \frac{k^2 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \hat{w} = 0 \quad (6.2)$$

Hierbei entspricht  $P_k$  der  $k$ -ten statischen Knicklast des Stabes der Länge  $l$ . Der Index  $k$  steht für die  $k$ -te Eigenform. Bei Vernachlässigung der Dämpfung und nach Division durch die Massenbelegung wird man bei der Anwendung einer beliebigen periodischen Belastung  $P(t)$  direkt auf die HILLSche Differentialgleichung (siehe [B3] und [C1])

$$\ddot{\hat{w}}(t) + a_k(t) \cdot \hat{w}(t) = 0 \quad (6.3)$$

mit zeitveränderlichen Koeffizienten  $a_k(t)$  geführt. Für  $P(t) = P_0 + P_t \cdot \cos \Omega t$  geht diese in die MATHIEUSche Differentialgleichung über (nach [B3]):

$$\ddot{\hat{w}}(t) + \omega_k^2 (1 - 2\kappa \cdot \cos \Omega t) \cdot \hat{w}(t) = 0 \quad (6.4)$$

Dabei sind  $\omega_k$  die Eigenkreisfrequenzen des belasteten Stabes, und  $\kappa$  ist der sogenannte Erregerparameter, der maßgeblich durch die Last  $P_t$  beeinflusst wird. Die Lösungen dieser linearen Differentialgleichung lassen verschiedene Verhaltensmuster zu. Diese sind unabhängig von den Anfangsbedingungen und werden nur durch die Stab- und Lastkennwerte  $\omega_k$ ,  $\kappa$  und  $\Omega$  beeinflusst. So kann es zu asymptotisch stabilen, periodischen und instabilen Lösungen mit stetig wachsenden Amplituden kommen. Da die charakteristischen Zahlen stetig von den Eingangsgrößen abhängen, trennen periodische Lösungen die stabilen und instabilen Bereiche. Es sind periodische Lösungen für  $\hat{w}(t+T) = \hat{w}(t)$  und sogenannte halbperiodische Lösungen für  $\hat{w}(t+T) = -\hat{w}(t)$  möglich, die mit Hilfe eines FOURIER-Ansatzes dargestellt werden können, siehe [C1]:

$$\hat{w}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n\Omega t}{2} + b_n \cdot \sin \frac{n\Omega t}{2} \right) \quad (6.5)$$

Für alle geraden Zahlen  $n$  folgen die periodischen Lösungen, für alle ungeraden die halbperiodischen. Das gliedweise Differenzieren führt bei dämpfungsfreier Betrachtung nach einem Koeffizientenvergleich in den entsprechenden trigonometrischen Ausdrücken auf jeweils zwei entkoppelte Matrizen für die periodischen und die halbperiodischen Lösungen. Die beiden Lösungen einer Periode begrenzen einen Instabilitätsbereich; zwei

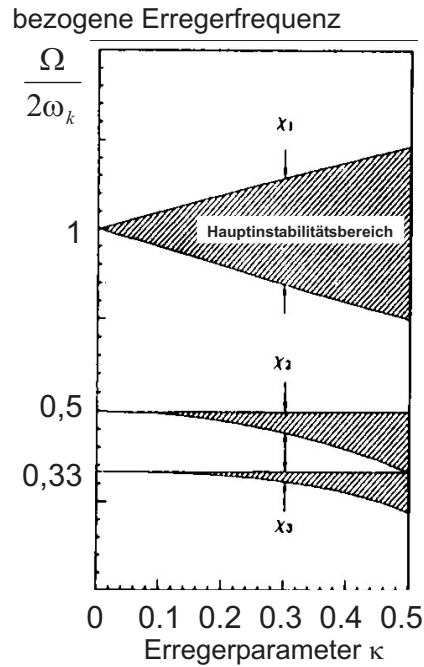


Bild 6.3: Stabilitätskarte des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes [B8]

Lösungen verschiedener Periode einen Bereich asymptotischer Stabilität, so dass Störungen des Grundbewegungszustandes mit der Zeit asymptotisch verschwinden. Für das Lösen der unendlichen Determinanten ist das Verfahren der sukzessiven Approximation geeignet. Die Ergebnisse lassen sich in einer Stabilitätskarte festhalten, bei der das Verhältnis von Erregerkreisfrequenz  $\Omega$  zur Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  über dem Erregerparameter  $\kappa$  aufgetragen wird. Für Erregerparameter, die gegen Null gehen, schneiden sich die beiden Lösungen einer Periode bei:

$$\frac{\Omega}{2\omega_k} = \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.6)$$

Von diesen Punkten ausgehend laufen die beiden Lösungen mit steigendem Erregerparameter auseinander, so dass mit zunehmender Last die Instabilitätsbereiche immer größer werden. Der größte und gefährlichste Instabilitätsbereich jeder Eigenform zeigt sich für  $n = 1$ , also wenn die Erregerfrequenz die doppelte Eigenfrequenz erreicht  $\frac{\Omega}{2\omega_k} = 1$ . Dieser Bereich wird auch Hauptinstabilitätsbereich genannt. Das zugehörige Schwingungsverhalten ist in Abb. 6.4 dargestellt.

Die weiteren Instabilitätsbereiche werden als Nebeninstabilitätsbereiche  $n$ -ter Ordnung bezeichnet. In der Stabilitätskarte 6.3 beginnt der erste Nebeninstabilitätsbereich ( $n=2$ )

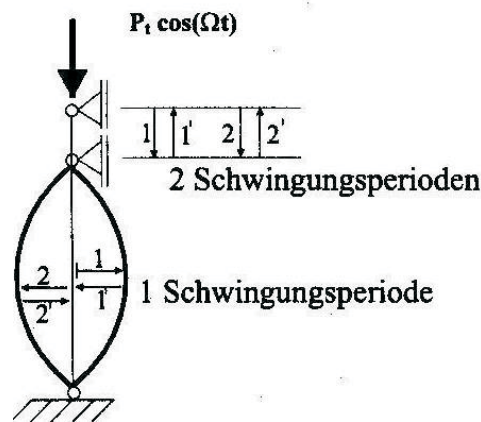


Bild 6.4: Parameterschwingung eines Hauptinstabilitätsbereiches [B8]

für den Fall, dass die Erregerfrequenz genau die Eigenkreisfrequenz erreicht; also beim Verhältnis  $\frac{\Omega}{2\omega_k} = 0,5$ .

Bei Berücksichtigung der Dämpfung beginnen die Instabilitätsbereiche der  $k$ -ten Eigenform erst ab einem bestimmten Schwellwert  $\epsilon_n$ , der zum einen von der Dämpfungskonstanten und zum anderen von der Ordnung  $n$  abhängt:

$$\epsilon_n = \sqrt[n]{\frac{d \cdot \pi}{\omega_k}} \quad (6.7)$$

Da  $(d \cdot \pi / \omega_k) < 1$  ist, steigt der Schwellwert  $\epsilon_n$  mit steigender Ordnung  $n$ , so dass die Nebeninstabilitätsbereiche einer Eigenform immer stärker gedämpft werden als der Hauptinstabilitätsbereich.

### 6.3 Parametererregung bei Seilen

Seile und Seilkonstruktionen sind aufgrund ihrer geringen inneren Strukturdämpfung sehr anfällig für Schwingungen. Durch Wind oder Verkehr werden in den Haupttragwerken von Schrägseilbrücken kleinere Bewegungen hervorgerufen, die dann wiederum zu einer Parametererregung der Schrägseile mit großen Schwingungsamplituden führen können. Bei diesen meist stark gespannten Seilen liegen die Eigenfrequenzen der Seilebene sehr nahe bei den Eigenfrequenzen senkrecht zur Seilebene. Bei bestimmten Werten der Erregerfrequenz können die ursprünglichen Vertikalschwingungen unter Umständen

in ausgeprägte Horizontalschwingungen oder auch Rotationsschwingungen übergehen. Großversuche mit Seilen baupraktischer Abmessungen wurden Ende der 80er Jahre von TONIS und Mitte der 90er Jahre von REIF an der Universität der Bundeswehr durchgeführt, siehe [T5] und [R1]. Dabei wurden bis zu 100 m lange Seile mit verschiedenen Vorspanngraden in verschiedenen Richtungen durch periodische Auflagerbewegungen mit variierenden Amplituden und Frequenzen zum Schwingen angeregt. Während der Versuche wurde die Erregerfrequenz von REIF stufenweise zwischen 0,25 Hz und 2,5 Hz steigend oder fallend bei einer Erregeramplitude von 5 cm variiert. Bei den untersuchten Seilen entsprechen 2,5 Hz etwa der dritten Eigenfrequenz des Seiles. Tatsächlich stellten sich abhängig von der Erregerfrequenz bei den Versuchen die beschriebenen Schwingungen hauptsächlich in den ersten drei Eigenformen mit maximalen Amplituden von 4 m ein. Dabei schlug das relativ flach gespannte Seil während des Versuches teilweise sogar auf den Boden auf. Die erhaltenen Ergebnisse nahm THALHEIM zum Anlass, die Beobachtungen auf der Basis einer nichtlinearen Seiltheorie am Computer zu simulieren. Abweichend von dieser Arbeit wurde die Seiltheorie auf Basis kontinuumsmechanischer Grundlagen in [T2] mit der FE-Methode im Ort diskretisiert.

In [T2] wurden für das Seil aus [R1] zwei Bereiche der Erregerfrequenzen, in denen Schwingungen in und senkrecht zur Seilebene auftraten, untersucht. Dabei konnte THALHEIM die in [R1] dokumentierten Schwingungen in der ersten Eigenform rechnerisch bestätigen. Da REIF in seiner Arbeit primär Wert auf die Angabe der Schwingungsformen, nicht aber genau auf die jeweils zugehörigen Amplituden gelegt hat, konnten die Amplituden aus den Versuchsprotokollen nur unvollständig entnommen und mit den berechneten Ergebnissen verglichen werden. Berechnungen zu den Schwingungen höherer Eigenformen findet man in [T2] nicht.

Ergebnisse von Stabilitätsuntersuchungen aus [T2] sind in Stabilitätskarten, vergleichbar denen des pulsierend belasteten Stabes, in Abb. 6.5 dargestellt. Dabei ist das Verhältnis von Erregerkreisfrequenz zur doppelten Eigenkreisfrequenz über dem Erregerparameter aufgetragen. Dieser kann bei der Parametererregung durch das Verhältnis  $\Delta u / \Delta u_b$  ausgedrückt werden. Dabei ist  $\Delta u_b = 5 \text{ cm}$  eine gewählte Bezugsamplitude und  $\Delta u$  die jeweils bei den Simulationen angesetzte Amplitude des Auflagers im Koordinatenursprung.

Es sind im linken Teil der Hauptinstabilitätsbereich und drei Nebeninstabilitätsbereiche der ersten Eigenform in der Seilebene (in-plane) und im rechten Diagramm die Hauptinstabilitätsbereiche der ersten vier Eigenformen abgebildet. Lediglich für die

erste Eigenform treten Unterschiede in der Seilebene und senkrecht dazu (out-of-plane) auf. Bei den höheren Eigenformen liegen die beiden Eigenfrequenzen so dicht zusammen, dass die Instabilitätsbereiche nahezu deckungsgleich sind.

Zu lösen waren wiederum die für dieses Stabilitätsproblem charakteristischen MATHEUSchen Differentialgleichungen. Auch für Seile stellt sich das für Parametererregung typische Phänomen ein, dass die Hauptinstabilitätsbereiche der einzelnen Eigenformen auftreten, wenn die Erregerfrequenz den doppelten Wert der jeweiligen Eigenfrequenz annimmt und die Nebeninstabilitätsbereiche beginnen, wenn die Erregerfrequenz ganzzahlige Teile der doppelten Eigenfrequenz erreicht. Gut zu erkennen ist auch die dämpfungsbedingte Verkleinerung der Instabilitätsbereiche mit den zugehörigen Schwellwerten für kleine Erregerparameter.

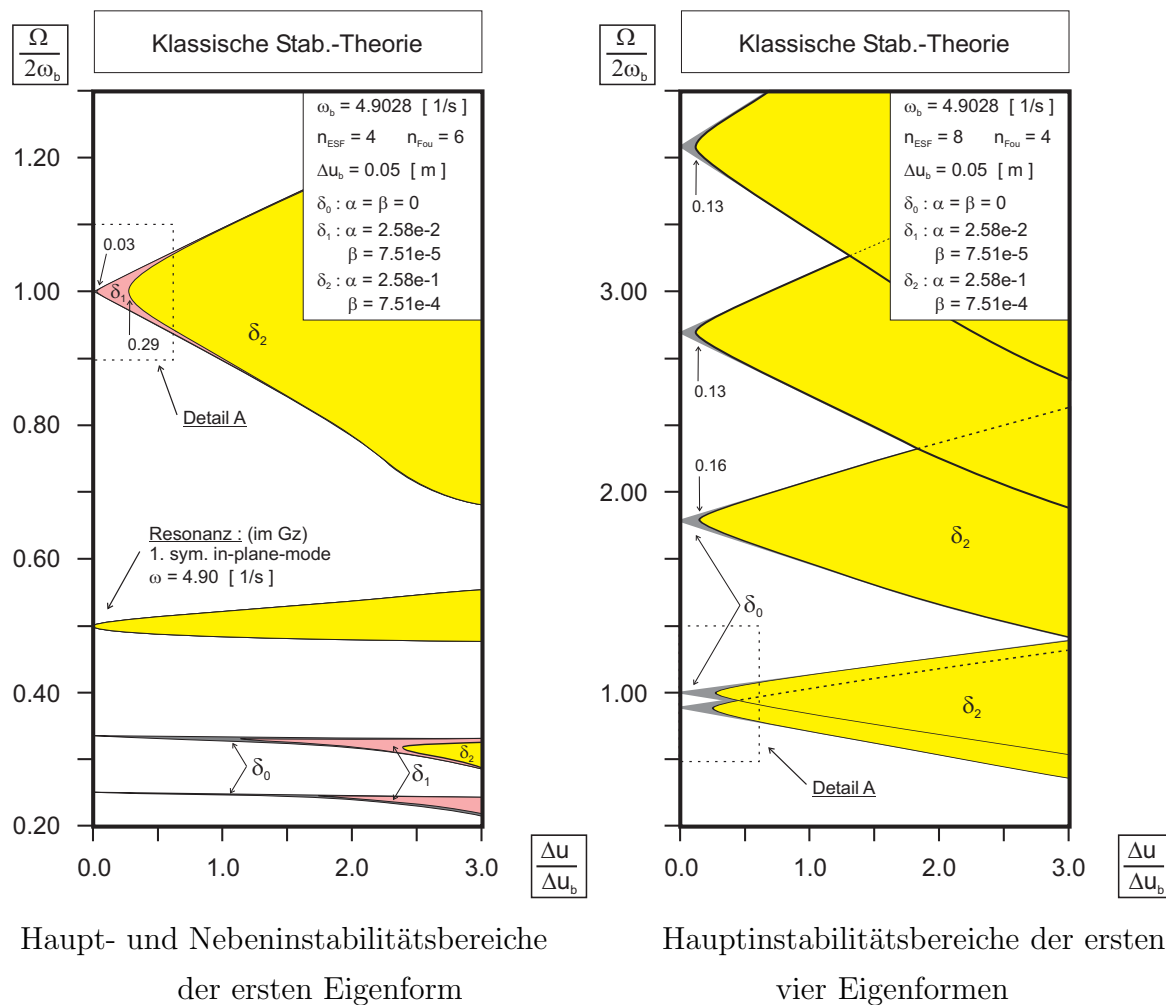


Bild 6.5: Stabilitätskarten eines Seiles mit und ohne Dämpfung [T2]

## 6.4 Einarbeitung des Lastfalls Parametererregung

Bei Seilen werden die Parameterschwingungen durch periodische Bewegungen der Seilbefestigungspunkte hervorgerufen, die dann wiederum zu veränderlichen Seilkräften führen. Wird einer der Befestigungspunkte bewegt, erfährt er nicht nur eine Änderung seiner Position, sondern es werden auch Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in das System eingetragen, die sich durch zusätzliche Trägheits- und Dämpfungsglieder bemerkbar machen.

Eine Lösung dieses Problems liefert [B1]. Bekannte oder vorgeschriebene Kinematiken an beliebigen Punkten werden in den Vektoren  $\mathbf{V}_b$ ,  $\dot{\mathbf{V}}_b$  und  $\ddot{\mathbf{V}}_b$  zusammengefasst. Durch die Vorgabe dieser bekannten Größen lässt sich die Matrizendifferentialgleichung (4.14) auf die folgende Form bringen (siehe [T2]), wobei die Indizes  $u$  für unbekannte und die Indizes  $b$  für bekannte Größen stehen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{M}_{ub} \\ \mathbf{M}_{bu} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{V}}_u \\ \ddot{\mathbf{V}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{uu} & \mathbf{D}_{ub} \\ \mathbf{D}_{bu} & \mathbf{D}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_u \\ \dot{\mathbf{V}}_b \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} + \Delta\mathbf{C}_{uu} & \mathbf{C}_{ub} + \Delta\mathbf{C}_{ub} \\ \mathbf{C}_{bu} + \Delta\mathbf{C}_{bu} & \mathbf{C}_{bb} + \Delta\mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_u \\ \mathbf{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die unbekanntes Verschiebungen an den anderen Knoten lassen sich dann mit dem Matrizendifferentialgleichungssystem (6.8) ermitteln. Abweichend vom pulsierend belasteten Stab wird das Seil durch Verschiebungen der Auflager, nicht durch eine periodisch veränderliche Kraft belastet, so dass der Lastvektor  $\mathbf{P}_u$  der oberen Hälfte auf der rechten Seite verschwindet. Die Auswertung allein der ersten Zeile von Gl. (6.8) liefert, nachdem die aus der Auflagerbewegung resultierenden, bekannten Trägheits-, Dämpfungs- und Federkräfte auf die rechte Seite gebracht wurden:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{V}}_u + \mathbf{D}_{uu} \dot{\mathbf{V}}_u + (\mathbf{C}_{uu} + \Delta\mathbf{C}_{uu}) \mathbf{V}_u = \\ - \left( \mathbf{M}_{ub} \ddot{\mathbf{V}}_b + \mathbf{D}_{ub} \dot{\mathbf{V}}_b + (\mathbf{C}_{ub} + \Delta\mathbf{C}_{ub}) \mathbf{V}_b \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Die Berechnung dieser bekannten, rechten Seite erfolgt in einer Subroutine in der Funktion *belegeNL* automatisch in jedem Zeitschritt, vgl. Abb. 5.1. An dieser Stelle wird der Vorteil der Aufteilung der Nichtlinearitäten deutlich. Im Gegensatz zum Vektor der Nichtlinearitäten  $\mathbf{F}^{NL}$  in [T2] bietet die gewählte Formulierung (6.9) die Möglichkeit, nichtlineare Auswirkungen einer vorgegebenen Auflagerbewegung im Term  $\Delta\mathbf{C}_{ub} \mathbf{V}_b$  auf

der rechten Seite des Gleichungssystems zu beachten. Die vorgestellte Implementierung bietet weiterhin die Möglichkeit, in beliebig vielen Knoten eine zeitabhängige Verschiebung vorzugeben. Im Folgenden soll zunächst nur der Fall untersucht werden, dass ein Auflagerpunkt periodisch bewegt wird. Die mit Gl. (6.9) gegebene Differentialgleichung in Matrizenform wird dazu in ein selbst erstelltes *MatLab*-Programm implementiert und anschließend durch den Löser *ode45* ausgewertet.

Die Lösung liefert sämtliche Kinematiken an den übrigen Punkten. Aus der bislang nicht verwendeten, unteren Hälfte vom Gleichungssystem (6.8) lassen sich dann alle Knotenpunktkräfte nach [B1] ermitteln.

## 6.5 Ergebnisse der parametererregten Seilschwingungen

### 6.5.1 Eingabeparameter des berechneten Seiles

Bei den durchgeführten Simulationen wurde zur Vergleichbarkeit ein Seil gewählt, für das sowohl Experimente als auch numerische Berechnungen durchgeführt wurden. Die Großversuche wurden an der Universität der Bundeswehr, siehe [T5] und [R1], durchgeführt. Dazu spannte REIF ein etwa 100 m langes, offenes Spiralseil mit einem sehr geringen Seilneigungswinkel von etwa  $4,1^\circ$  bei unterschiedlichen Vorspanngraden.

Dieses aus Runddraht bestehende Seil hat einen Nenndurchmesser von 12 mm und besitzt eine metallische Querschnittsfläche von etwa  $0,848 \text{ cm}^2$ . Die daraus resultierende Masse des Seiles beträgt  $0,704 \text{ kg/m}$ . In Abhängigkeit des Abstandes der Befestigungspunkte und der spannungslosen Seillänge  $L_0$  ergibt sich der Eigengewichtszustand, der durch seinen statischen Durchhang und die zugehörige Seilkraft eindeutig bestimmt ist. Im berechneten Fall wurden eine Seillänge  $L_0 = 100,282 \text{ m}$  und ein horizontaler Auflagerabstand von  $100,403 \text{ m}$  gewählt. Dieser Lastfall entspricht der Versuchsreihe, die in [R1] mit dem Vorspanngrad "VSG 7,5" bezeichnet wurde. Bei dem straff gespannten Seil ergibt sich in Seilmitte ein statischer Durchhang von etwa  $51 \text{ cm}$  und eine Seilkraft von etwa  $16,85 \text{ kN}$ . Das Seil verhält sich ähnlich einer gespannten Saite.

Als weitere charakteristische Eigenschaft ist die Nennfestigkeit der Litzen zu nennen, die für das gewählte Seil mit  $1770 \text{ N/mm}^2$  zu beziffern ist. Die rechnerische Bruchlast des Seiles liegt bei  $130,6 \text{ kN}$ . Im Versuch wurden sogar  $145,8 \text{ kN}$  erreicht. Der Elastizitätsmodul des Seiles lässt sich durch Zugversuche bestimmen. Wegen des sogenannten Seilrecks verhält sich das Seil besonders im Bereich kleiner Dehnungen nichtlinear.



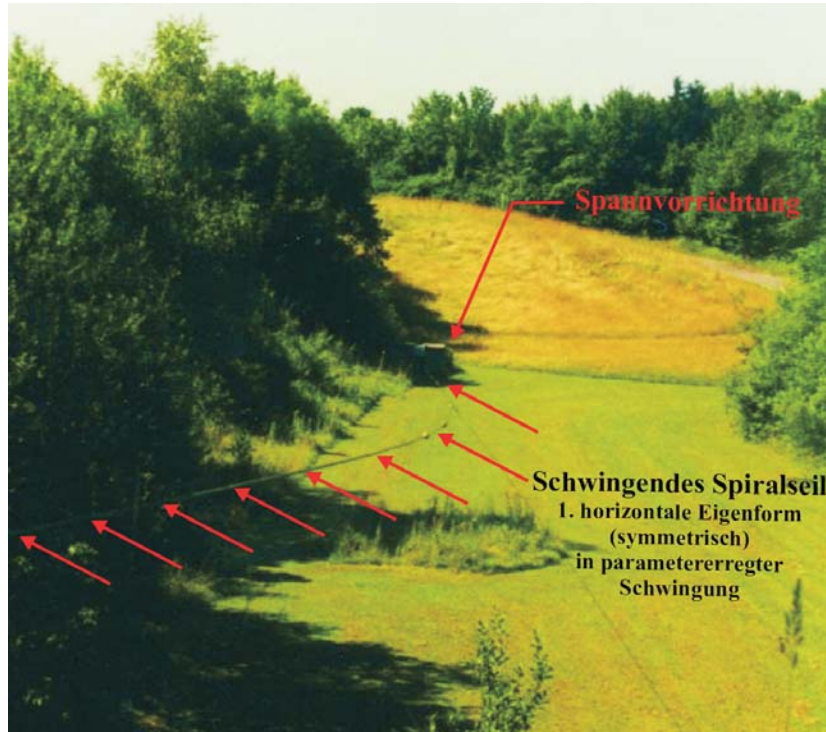


Bild 6.6: Momentanaufnahme des Schwingungsversuches von REIF [R1]

Durch die Abnahme des Seilrecks versteift sich das System im betrachteten Bereich mit steigenden Dehnungen. Für Teilbereiche allerdings konnte in [R1] ein näherungsweise lineares Verhalten festgestellt werden. Die Teilbereiche sind von der im Seil vorhandenen Seilkraft abhängig:

Bereich I:	$3,8 \text{ kN} < S < 10 \text{ kN}$	$\implies$	$E_I = 12902 \text{ kN/cm}^2$
Bereich II:	$10 \text{ kN} < S < 20 \text{ kN}$	$\implies$	$E_{II} = 15556 \text{ kN/cm}^2$
Bereich III:	$20 \text{ kN} < S < 30,6 \text{ kN}$	$\implies$	$E_{III} = 16029 \text{ kN/cm}^2$

In den einzelnen Bereichen wird dabei der Elastizitätsmodul über den Anstieg der Sekanten im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ermittelt. Bei einer Querschnittsfläche von  $A = 0,848 \text{ cm}^2$  ergibt sich das entsprechende, in Abb. 6.7 dargestellte Kraft-Dehnungs-Diagramm mit den drei Bereichen als Auswertung des Zugversuchs aus [R1]. Für das in der Berechnung gewählte Seil ist ausschließlich der Bereich II relevant, da zu keinem Zeitpunkt während der Simulation die Obergrenze der Seilkraft überschritten und/oder die untere Grenze unterschritten wird. Somit darf der Elastizitätsmodul des Seils bei den Simulationen konstant mit  $E = 15556 \text{ kN/cm}^2$  angesetzt werden.

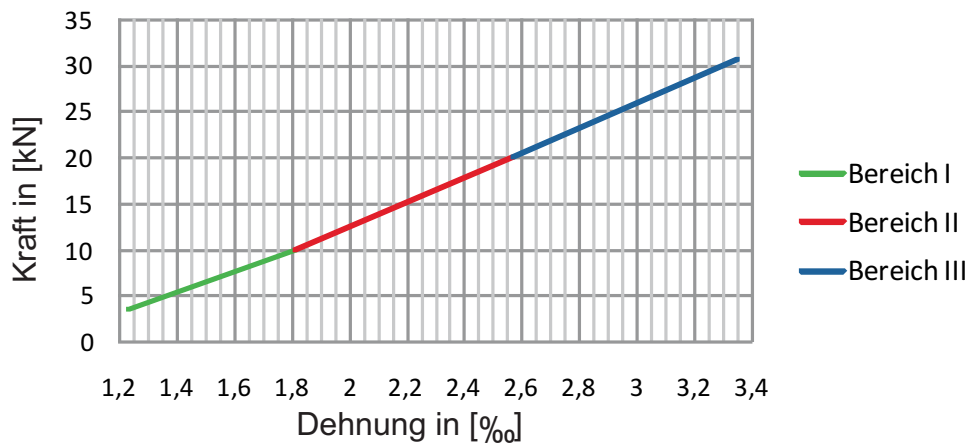


Bild 6.7: Kraft-Dehnungs-Diagramm für das Seil von REIF

### 6.5.2 Ergebnisauswertung

Insgesamt liegen für das gewählte Beispiel vier Ergebnisreihen vor, die miteinander verglichen werden können: zum einen die Versuchsergebnisse in [R1] und [T5] und zum anderen die Simulationsergebnisse mit der FE-Methode nach [T2] bzw. [A1] sowie die eigenen Resultate auf Basis des in dieser Arbeit vorgestellten Ansatzes, der in einer Parameterstudie in [W3] untersucht wurde. Ein Vergleich mit den Ergebnissen nach [R1] kann allerdings fast nur qualitativ erfolgen, da in seinen Versuchsprotokollen zu den einzelnen Versuchen die Amplituden gar nicht oder nur unzureichend dokumentiert wurden. Ein Unterschied zwischen den Versuchen und den Simulationen ist im Versuchsablauf zu sehen.

In [R1] und [T5] wurde für die Versuche die Erregerfrequenz zunächst bis zu einer Grenzfrequenz stufenförmig gesteigert und anschließend wieder bis zum Ausgangswert reduziert. In [T5] wurden weiterhin Versuche durchgeführt, die bei der oberen Grenzfrequenz begannen, die dann stufenförmig reduziert wurde.

Bei den Änderungen der Erregerfrequenzen, unabhängig von der Richtung, reagierten die Seile besonders im Bereich der Eigenfrequenzen stark, so dass die Schwingungsformen der Seile bei zu großen oder zu schnellen Sprüngen zusammenbrachen und der Versuch erneut gestartet werden musste. Die in den Versuchen benötigten, vorsichtigen Frequenzerhöhungen lassen sich in den Simulationen nicht genau umsetzen, da nicht dokumentiert ist, wann genau die Frequenzänderungen durchgeführt wurden. Aus diesem Grund wird in den Simulationen in [T2] und in den eigenen Berechnungen das Seil

für jede Berechnung mit einer konstanten Erregerfrequenz und Auflageramplituden von  $5\text{ cm}$  als Fußpunkterregung im Auflager am Koordinatenursprung angeregt.

Für die Berechnungen in [T2] wurden aus der gewählten Versuchsreihe nach [R1] drei Punkte untersucht. Gewählt wurden eine Erregerfrequenz des stabilen Bereiches und zwei aus den Instabilitätsbereichen. Die beiden dazu gehörenden Grenzyklen der instabilen Bereiche waren zum einen eine ausgeprägte Rotationsschwingung in der ersten Eigenform und zum anderen eine horizontale Parameterschwingung ebenfalls in der ersten Eigenform. Höhere Eigenformen sind in der Arbeit [T2] nicht dokumentiert worden. In der vorliegenden Arbeit wird das gesamte Frequenzband von  $\Omega = 4,4\text{ rad s}^{-1}$  bis  $\Omega = 13,8\text{ rad s}^{-1}$  in Einzelrechnungen mit einer Schrittweite von  $\Delta\Omega = 0,1\text{ rad s}^{-1}$  mit dem Differenzenverfahren untersucht. Dabei wird jedesmal von der statischen Gleichgewichtslage begonnen. Zur Kontrolle erfolgen an einigen Stellen Vergleichsrechnungen mit dem Programm nach [A1] auf der Basis der FE-Methode.

### 6.5.2.1 Vergleich mit den Versuchsergebnissen

In Abbildung 6.8 ist ein Vergleich des Versuchsprotokolls von REIF (oberes Band für steigende Erregerfrequenzen; Mitte für sinkende Erregerfrequenzen) und den eigenen Berechnungen (unteres Band) auf Basis einer Parameterstudie nach [W3] mit dem Differenzenverfahren dargestellt. Darin ist jeweils die zugehörige Schwingungsform zu einer Erregerkreisfrequenz von  $\Omega = 4,4\text{ rad s}^{-1}$  bis  $\Omega = 13,8\text{ rad s}^{-1}$  abgebildet. Die darin enthaltenen, aus [R1] übernommenen Abkürzungen bedeuten:

1vsSF	→ 1. vertikale, symmetrische Schwingungsform (SF)	→ <i>rot</i>
1rSF	→ 1. rotatorische Schwingungsform	→ <i>dunkelblau</i>
1vsSF GP	→ 1. vertikale, symmetrische SF in Gegenphase	→ <i>rot</i>
2vsSF GP	→ 2. vertikale, symmetrische SF in Gegenphase	→ <i>gelb</i>
2rSF	→ 2. rotatorische Schwingungsform	→ <i>dunkelblau</i>
1hPS	→ 1. horizontale Parameterschwingung	→ <i>hellblau</i>
1vPS	→ 1. vertikale Parameterschwingung	→ <i>grün</i>

Da in den Versuchen nach [R1] die Erregerfrequenz sehr vorsichtig und nicht zu festgelegten Zeitpunkten stufenförmig gesteigert werden musste, wäre dieses Vorgehen für die Simulation nur unter gewagten Annahmen möglich. Die eigenen Resultate sind deshalb das Ergebnis von Einzelsimulationen bei bestimmten Erregerfrequenzen.

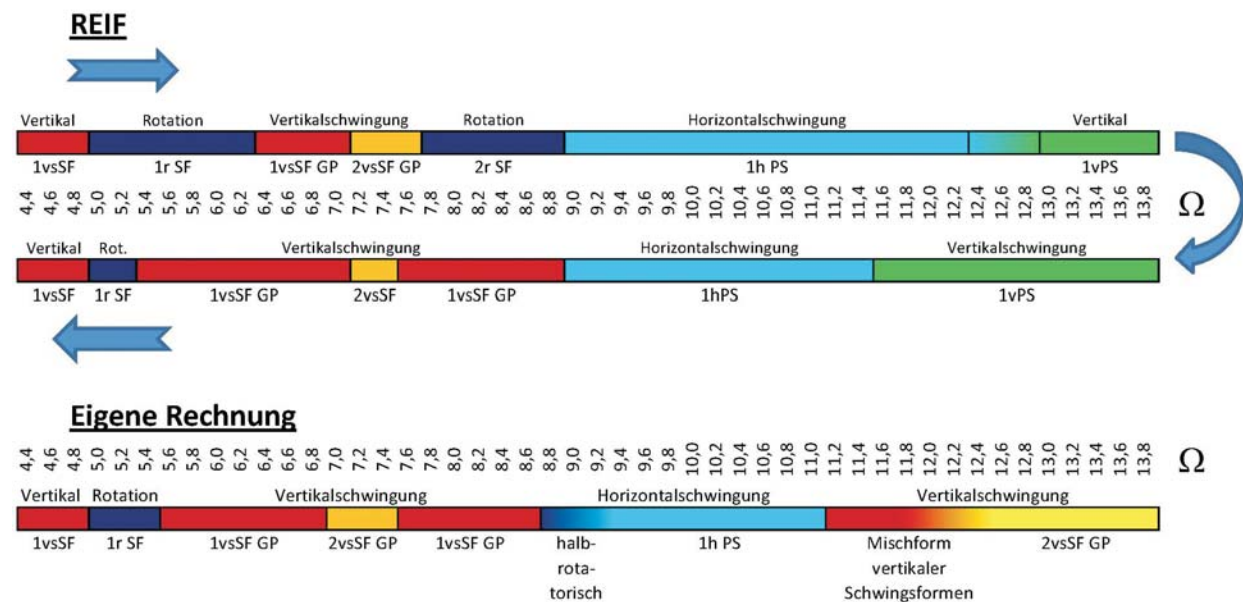


Bild 6.8: Vergleich mit REIF

Auffällig ist, dass die eigenen Berechnungsergebnisse von  $\Omega = 4,4 \text{ rad s}^{-1}$  bis etwa  $11,2 \text{ rad s}^{-1}$  sehr gut mit der Versuchsreihe bei sinkenden Erregerfrequenzen (mittleres Band) übereinstimmen. Es zeigen sich die gleichen qualitativen Ergebnisse zwischen den beiden unteren Skalen in Abb. 6.8. Bei den Vertikalschwingungen konnten sowohl die Schwingungen in Gegenphase als auch ein Bereich in der zweiten symmetrischen Eigenform rechnerisch bestätigt werden. Auch die in [R1] dokumentierte Rotationsschwingung trat in einem vergleichbaren Erregerbereich auf. Die beobachteten Amplituden von 1 bis  $1,5 \text{ m}$  werden in den Simulationen ebenfalls erreicht, siehe Abb. 6.11. Der berechnete Erregerfrequenzbereich für die horizontale Parameterschwingung stimmt mit [R1] weitestgehend überein. Die beobachteten Amplituden von etwa 2 bis  $2,5 \text{ m}$  können auch hier rechnerisch bestätigt werden.

Im Bereich ab einer Erregerkreisfrequenz von etwa  $\Omega = 11,0 \text{ rad s}^{-1}$  treten dann allerdings einige Unterschiede auf. Bei den Versuchen stellte sich ab etwa  $\Omega = 11,5 \text{ rad s}^{-1}$  eine vertikale Parameterschwingung mit sehr großen Amplituden ein, so dass das Seil in einigen Versuchen auf den Boden aufschlug. In den eigenen Berechnungen konnte diese Parameterschwingung nicht erreicht werden. Es stellte sich zwar eine Vertikalschwingung ein; diese schwang jedoch nicht mit der halben Erregerfrequenz wie es für Parametererregung typisch ist, sondern in Resonanz mit der Frequenz der Erregung. Die Ursache für diesen qualitativen Unterschied ist das sogenannte Sprungphänomen.

Im Gegensatz zum linearen Schwinger, bei dem jeder Erregerfrequenz eine bestimmte Schwingung zuzuordnen ist, gibt es bei nichtlinearen Systemen für bestimmte Erregerfrequenzen mehrere Lösungen. Dieses Problem wird in der Verzweigungstheorie näher behandelt. Je nach Struktur der Nichtlinearitäten wird die Federwirkung des Systems versteift oder aufgeweicht. In Abbildung 6.9 ist das Verhalten für kubische Nichtlinearitäten beispielhaft dargestellt.

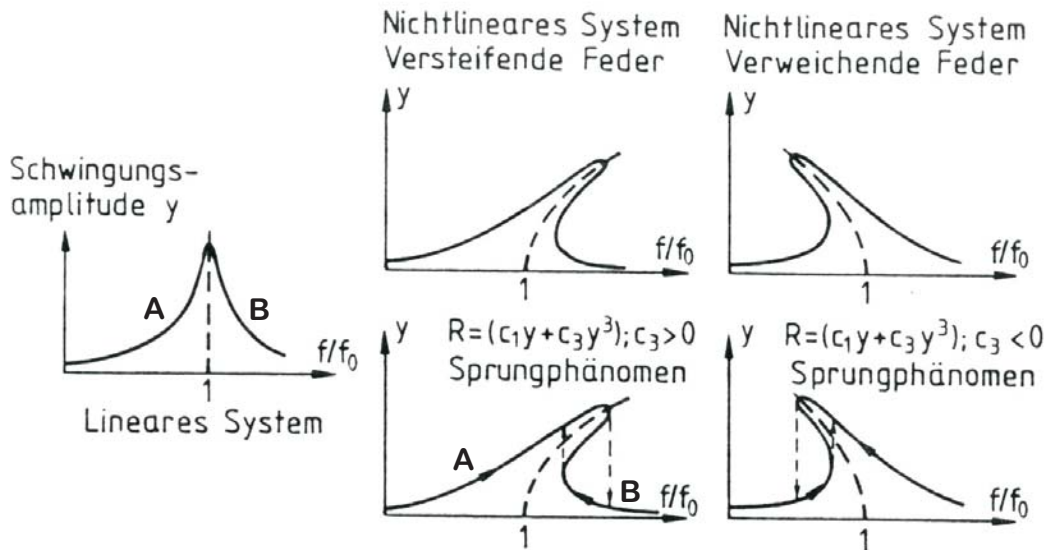


Bild 6.9: Das Sprungphänomen mit versteifender und verweichender Feder [T5]

Bei den untersuchten Seil-schwingungen versteift sich das System, so dass sich bei bestimmten Amplituden trotz eines instabilen Grundzustandes ein Grenzzyklus mit konstanten Amplituden einstellen kann. Abhängig von der Belastungsgeschichte kann es bei gleichen Erregerfrequenzen zur Ausprägung unterschiedlicher Grenzzyklen kommen. Bei bestimmten Frequenzen sind im "Überhangbereich" (siehe [B3]) mehrere stabile Lösungen möglich. Bei steigenden Erregerfrequenzen wird zunächst ein Grenzzyklus A eingenommen, siehe Abb. 6.9. Der Zustand A wird beibehalten bis das System bedingt durch Störungen in einen benachbarten Zustand B springt. Bei sinkenden Erregerfrequenzen wird der Zustand B beibehalten, bis die Tangente an die Amplitudenfunktion  $y$  senkrecht steht. An dieser Stelle springt das System zurück in den Zustand A. Mit dieser Begründung lassen sich auch die unterschiedlichen Ergebnisse in den Versuchen in [R1] bei steigenden und fallenden Erregerfrequenzen erklären, siehe Abb. 6.8. Wegen des sich versteifenden Systems stimmen die simulierten Ergebnisse besser mit der Versuchsreihe

mit sinkenden Erregerfrequenzen überein, da die Berechnungen in aller Regel die stabilste, in Abb. 6.9 unterste Lösung liefert.

Für den Bereich zwischen  $\Omega = 11 \text{ rad s}^{-1}$  und  $\Omega = 14 \text{ rad s}^{-1}$  stellt sich in den Simulationen zwar eine vertikale Schwingung, jedoch keine Parameterschwingung ein. Die Begründung dafür liefert ebenfalls das beschriebene Sprungphänomen. Ab etwa  $\Omega = 11 \text{ rad s}^{-1}$  sind mehrere Grenzyklen möglich. Steigert man die Erregerfrequenz kontinuierlich, verbleibt man zunächst auf dem stabilen Ast A in der Parameterschwingung. Aus der horizontalen wird nach einer Übergangsphase die vertikale Parameterschwingung. Beginnt man den Versuch mit einer höheren Frequenz, kann sich die vertikale Parameterschwingung nicht einstellen, und das System landet in einer weiteren stabilen Lösung B. Das System schwingt in der harmonischen Resonanz mit deutlich kleineren Amplituden. Dieses Phänomen konnte von TONIS [T5] sogar experimentell bestätigt werden. In seiner Versuchsreihe "V-04", siehe Abb. 6.10, wurde die Erregerkreisfrequenz beginnend von  $\Omega = 14 \text{ rad s}^{-1}$  ( $f/f_0 = 2.9$ ) gesenkt. Dabei sind die durchgezogenen Linien die berechneten, möglichen Lösungen und die gestrichelt verbundenen Punkte entsprechen den Versuchsergebnissen.

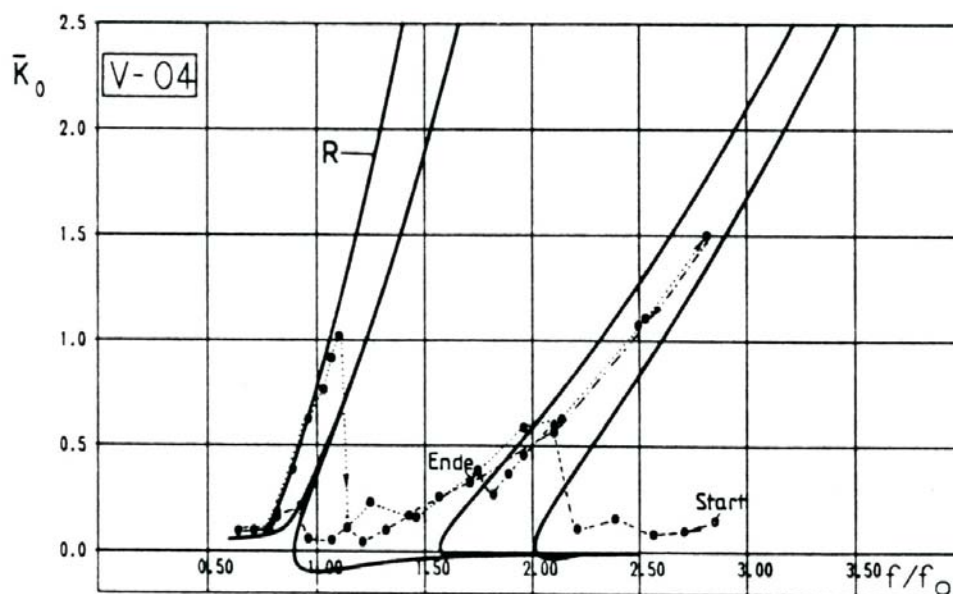


Bild 6.10: Der Versuch "V-04" von TONIS [T5]

Auch hier stellten sich bis zum ersten Sprung zunächst keine Parameterschwingungen, sondern Resonanzschwingungen ein. Bei Erreichen einer Erregerkreisfrequenz von etwa  $\Omega = 11 \text{ rad s}^{-1}$  ( $f/f_0 = 2.2$ ) springt das System plötzlich in den Nachbarzustand der



horizontalen Parameterschwingung. Steigert man dann die Erregerkreisfrequenzen bis nahe  $\Omega = 14 \text{ rad s}^{-1}$  ( $f/f_0 = 2.9$ ), wird die Parameterschwingung auf dem oberen Ast beibehalten. Dann wird die Erregerfrequenz wieder reduziert. Im Bereich der Rotationsschwingung ist ein weiteres Sprungphänomen dokumentiert. Dabei springt das System nicht plötzlich auf den oberen Ast, sondern gelangt nur durch langsame Steigerung der Erregerfrequenzen ab  $f/f_0 = 0.8$  auf diese Lösung. Der Sprung erfolgt hier bei  $f/f_0 = 1.2$  von der oberen auf die untere Lösung.

Es wird in beiden Fällen gezeigt, dass sich bei gleichen Erregerfrequenzen in Abhängigkeit der Belastungsgeschichte verschiedene Grenzzyklen einstellen können.

### 6.5.2.2 Vergleich mit den Ergebnissen der FE-Methode

Beim Vergleich mit Berechnungen der FE-Methode nach [T2] kommt man zu sehr guten Übereinstimmungen. Sowohl bei der Rotationsschwingung als auch bei der horizontalen Parameterschwingung stellen sich die gleichen Grenzzyklen mit vergleichbaren Amplituden ein, siehe Bilder 6.11 und 6.12 in denen die horizontalen und vertikalen Schwingungsamplituden des Seilmittelknotens gegeneinander aufgetragen wurden.

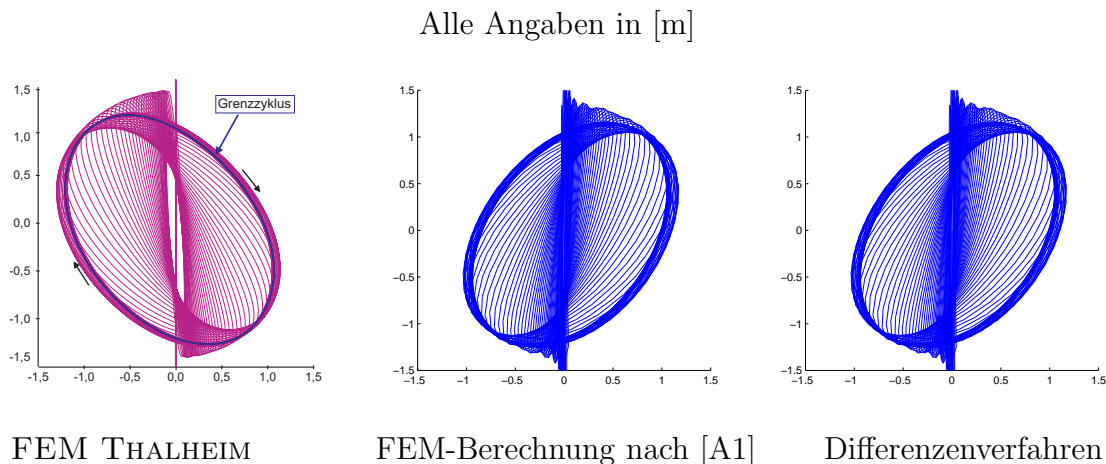
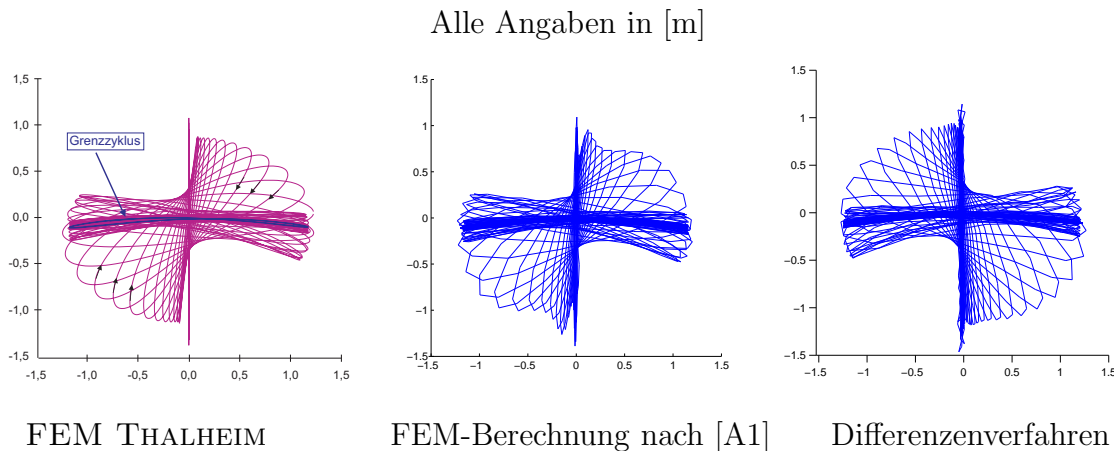


Bild 6.11: Vergleich für die Rotationsschwingung bei  $\Omega = 5,35 \text{ rad s}^{-1}$

Die Orientierung der Ellipse im Grenzzyklus stellt sich bei den Simulationen in Abhängigkeit der Vorzeichen der Eigenformen ein. In den Versuchen in [R1] stellt sich die Schwingungsrichtung zufällig ein. Die zu untersuchende Grundschwingung wird in den Berechnungen in der ersten Eigenform senkrecht zur Seilebene gestört. Geht die kleine Störung

Bild 6.12: Vergleich für die Horizontalschwingung bei  $\Omega = 9,68 \text{ rad s}^{-1}$ 

mit der Zeit asymptotisch gegen Null, liegt ein stabiler Grundzustand vor. Wächst die kleine Störung an und mündet letztlich in einen Grenzyklus mit konstanten Amplituden, schwingt das Seil in einem Nachbarzustand, und der Grundzustand ist für diese Erregerfrequenz als instabil zu betrachten.

Die Rotationsschwingung stellt sich in den Berechnungen mit der FE-Methode nach [A1] und dem Differenzenverfahren bei einer Erregerkreisfrequenz von  $\Omega = 5,35 \text{ rad s}^{-1}$  ein. Die Ergebnisse nach [T2] wurden bei einer Erregerkreisfrequenz von  $\Omega = 5,15 \text{ rad s}^{-1}$  erreicht. Dieser Unterschied ist bedingt durch die Mitnahme der nichtlinearen Terme infolge der Auflagerverschiebung auf der rechten Seite, die in [T2] auf der Lastseite unberücksichtigt blieben, siehe Kapitel 6.4.

Die größten Amplituden in vertikaler Richtung treten für den Fall der Rotationsschwingung auf, siehe Abb. 6.13. Dieses Ergebnis liefert sowohl die Berechnung mit der FE-Methode als auch mit dem Differenzenverfahren. Bei den in Versuchen in [R1] stellen sich die größten Amplituden allerdings für die vertikale Parameterschwingung bei einer Erregerkreisfrequenz von etwa  $\Omega = 14 \text{ rad s}^{-1}$  ein. Bedingt durch das Sprungphänomen können hier keine Übereinstimmungen erzielt werden, siehe Kapitel 6.5.2.1.

Auffällig sind die großen Amplituden in horizontaler Richtung. Bei der horizontalen Parameterschwingung kommt es bei einer Erregerkreisfrequenz  $\Omega = 11,0 \text{ rad s}^{-1}$  zu Amplituden von über  $1,80 \text{ m}$ . Die großen Amplituden sind für die horizontale Parameterschwingung in [R1] ebenfalls dokumentiert.



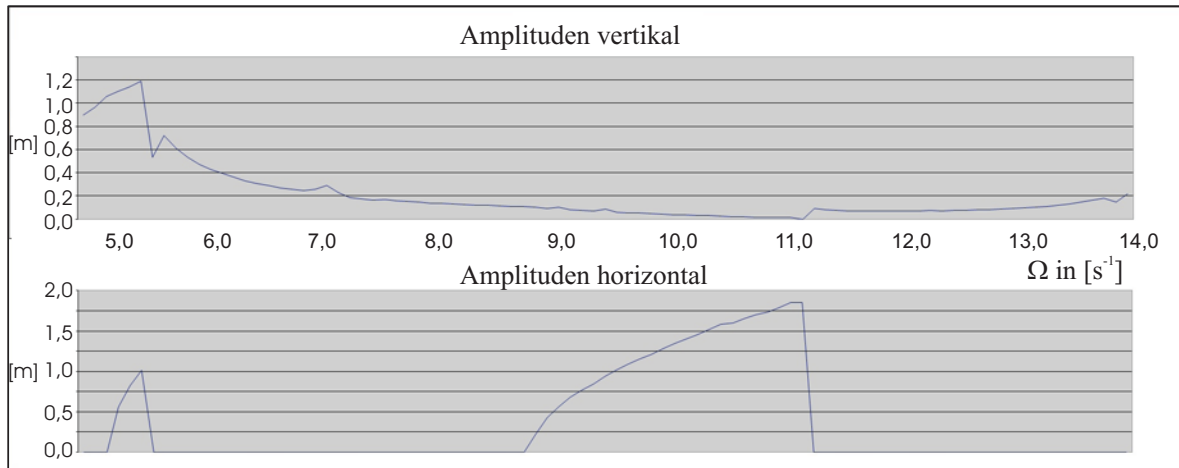


Bild 6.13: Berechnete Amplituden in und senkrecht zur Seilebene

### 6.5.3 Betrachtungen zur Stabilitätsuntersuchung

Ausgangspunkt der Stabilitätsuntersuchungen ist die Berechnung der Eigenkreisfrequenzen. Diese sind in Tab. 6.1 aufgelistet. Es lässt sich feststellen, dass den einzelnen

Nummerierung	Eigenform	Eigenkreisfrequenz [rad/s]	Orientierung	Symmetrie
1	1	4,83	horizontal	1. symmetrische
2	1	5,08	vertikal	1. symmetrische
3	2	9,42	vertikal	1. antimetrische
4	2	9,43	horizontal	1. antimetrische
5	3	14,15	horizontal	2. symmetrische
6	3	14,16	vertikal	2. symmetrische
7	4	18,85	vertikal	2. antimetrische
8	4	18,88	horizontal	2. antimetrische
9	5	22,50	horizontal	3. symmetrische
10	5	22,51	vertikal	3. symmetrische

Tab. 6.1: Die ersten 10 Eigenfrequenzen des Seils aus [R1]

als instabil zu bezeichnenden Schwingungsphänomenen nach Bild 6.8 auch entsprechende Instabilitätsbereiche zugeordnet werden können. Die mit dem Differenzenverfahren

Orien- tierung	Eigen- form	Eigen- kreis- frequenz $rads^{-1}$	Haupt- instabi- litäts- bereich $rads^{-1}$	Neben- instabilitäts- bereich 1. Ordnung $rads^{-1}$	Neben- instabilitäts- bereich 2. Ordnung $rads^{-1}$	Neben- instabilitäts- bereich 3. Ordnung $rads^{-1}$
horizontal	1	4,83	<b>9,66</b>	4,83	3,22	2,42
vertikal	1	5,08	<b>10,16</b>	<b>5,08</b>	3,39	2,54
vertikal	2	9,42	18,84	<b>9,42</b>	6,28	4,71
horizontal	2	9,43	18,86	<b>9,43</b>	6,29	4,71
vertikal	3	14,16	28,32	<b>14,16</b>	<b>9,44</b>	<b>7,08</b>
vertikal	5	22,51	45,02	22,51	15,01	<b>11,25</b>

Tab. 6.2: Übersicht der betroffenen Instabilitätsbereiche

berechneten Ergebnisse werden im Folgenden mit den Instabilitätsbereichen des Seils nach Tab. 6.2 verglichen. Alle betroffenen Bereiche sind in Tab. 6.2 durch Fettdruck hervorgehoben. Die Breite der Instabilitätsbereiche nimmt mit wachsendem Erregerparameter zu. Die Versuche und die Simulationen wurden für den Erregerparameter  $\frac{\Delta u}{\Delta u_b} = 1$  bei Auflageramplituden von  $\Delta u = 5 \text{ cm}$  durchgeführt, siehe Abb. 6.5.

Die Rotationsschwingung "1rSF" (siehe Abb. 6.11<sub>3</sub>) im Bereich von  $5,0 \text{ rad s}^{-1} \leq \Omega \leq 5,4 \text{ rad s}^{-1}$  stimmt nahezu mit dem 1. Nebeninstabilitätsbereich der ersten Eigenfrequenz überein, siehe Tab. 6.2. Die zweite vertikale symmetrische Schwingungsform in Gegenphase "2vsSFGP" entspricht der dritten Eigenform. Diese Schwingungsform liegt im Erregerbereich  $6,9 \text{ rad s}^{-1} \leq \Omega \leq 7,4 \text{ rad s}^{-1}$  und somit genau im dritten Nebeninstabilitätsbereich der dritten oder auch der zweiten symmetrischen, vertikalen Eigenform.

Aus dieser Schwingungsform heraus bildet sich bei REIF bei steigenden Erregerfrequenzen eine Rotationsschwingung "2rSF", bei der sich die ersten horizontalen und vertikalen Instabilitätsbereiche der zweiten Eigenform überlagern. Bei sinkenden Erregerfrequenzen wird diese rotierende Schwingungsform nicht erreicht.

In den eigenen Berechnungen tritt im Bereich der Erregerkreisfrequenz  $\Omega = 9,1 \text{ rad s}^{-1}$  eine halbrotatorische Schwingungsform auf, bei der das Seil horizontal in der ersten Eigenform (Parameterschwingung) und vertikal in der zweiten Eigenform schwingt. Es überlagern sich dort der horizontale Hauptinstabilitätsbereich der ersten Eigenform mit

dem ersten, vertikalen Nebeninstabilitätsbereich der zweiten Eigenform.

Die berechnete horizontale Parameterschwingung "1hPS" (siehe Abb. 6.12<sub>3</sub>) im Frequenzbereich  $8,7 \text{ rad s}^{-1} \leq \Omega \leq 11,0 \text{ rad s}^{-1}$  stimmt weitestgehend mit dem breiten Hauptinstabilitätsbereich der ersten Eigenkreisfrequenz überein, siehe Tab. 6.2. Direkt im Anschluss daran schließt sich ein Bereich vertikaler Schwingungen mit Beteiligung der ersten, zweiten und dritten symmetrischen Eigenform an. Im diesem Bereich von  $11,1 \text{ rad s}^{-1} \leq \Omega \leq 11,3 \text{ rad s}^{-1}$  dominiert die vertikale, dritte symmetrische oder fünfte Eigenform, da in diesem Bereich der dritte Nebeninstabilitätsbereich der fünften Eigenkreisfrequenz liegt, siehe Tab. 6.2. Die zugehörigen Schwingungen unter Beteiligung der ersten Eigenform sind in Abb. 6.14 dargestellt.

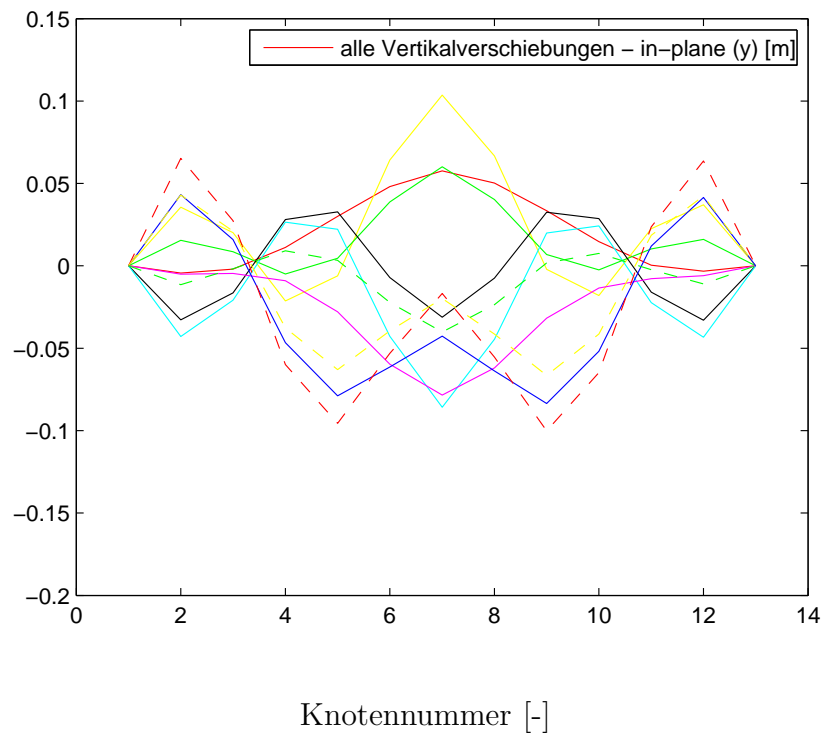


Bild 6.14: Darstellung der Schwingungsformen bei  $\Omega = 11,2 \text{ rad s}^{-1}$

Diese Mischformen gehen mit steigender Erregerkreisfrequenz zunehmend in die dritte Schwingungsform in Gegenphase über, bis ab etwa  $\Omega = 12,6 \text{ rad s}^{-1}$  ausschließlich die Schwingungsform "2vsSF GP" vorliegt, siehe Bild 6.15. In diesem Bereich befindet sich der erste Nebeninstabilitätsbereich der dritten Eigenkreisfrequenz bei  $\Omega = 14,16 \text{ rad s}^{-1}$ .

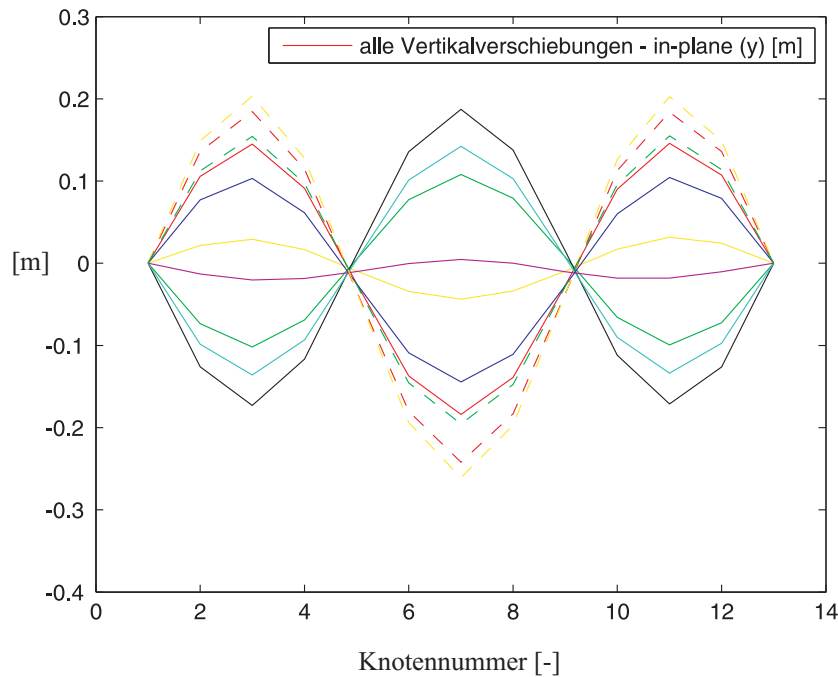


Bild 6.15: Darstellung der Schwingungsform "2vsSFGP" bei  $\Omega = 13,8 \text{ rad s}^{-1}$

Damit lassen sich die berechneten Instabilitäten mit der Stabilitätskarte erklären. Da sich an mehreren Stellen sowohl vertikale und horizontale Hauptinstabilitätsbereiche als auch Nebeninstabilitätsbereiche höherer Eigenfrequenzen überlagern, gelang es bisher nicht, vorherzusagen, welche Schwingungsform sich im Grenzyklus für bestimmte Erregerfrequenzen einstellt. Abweichungen zwischen den Berechnungen und der Stabilitätskarte beruhen auf der Stabilitätsanalyse, die zunächst nur linear durchgeführt wurde. Je nach Mitnahme nichtlinearer Terme wird man auf die sogenannte "Indifferenztheorie" oder eine vollständig nichtlineare Stabilitätsuntersuchung geführt. Allgemein lässt sich sagen, dass unter Mitnahme der Nichtlinearitäten die Instabilitätsbereiche mit steigendem Lastparameter überproportional breiter werden (siehe hierzu [T2]).

## 7 Modellierung der Windkräfte und der Rinnsalschwingungen

Im letzten Kapitel wurde die vorgestellte Seiltheorie auf parametererregte Seilschwingungen angewendet. Die erzielten Ergebnisse entsprechen weitestgehend den Beobachtungen aus realen Versuchen. Trotz dieser Übereinstimmungen muss man sich im Klaren darüber sein, dass die Simulation nicht die Realität ist, sondern bestenfalls das Verhalten des realen Systems gut nachahmt. Um dieses Ziel zu erreichen, muss die Realität vereinfacht und abstrahiert werden. Das Ergebnis dieses Prozesses ist in den meisten Fällen ein computergestütztes Rechenmodell, welches das reale, dynamische Verhalten in der Simulation oft stark zeitgerafft und kostengünstiger abbildet. Besonders im Fall der Resonanzkatastrophe bleiben reale dramatische Konsequenzen der Systemzerstörung aus. Für die Seilschwingungen allgemein existieren in der Literatur mehrere Berechnungsmodelle, die auch an vielen Beispielen bereits validiert wurden. Aus diesem Grund wurde bisher nur die Seilmodellierung vorgestellt und auf den Lastfall der parametererregten Schwingungen angewendet. Für die Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen existieren in der Literatur ebenfalls einige Berechnungsmodelle, siehe Kapitel 3.1, die jedoch bislang die Realität nicht ausreichend genau widerspiegeln. Die ebenen Berechnungsmodelle der Streifenmethode sind nicht in der Lage, das Seilverhalten über die Seillänge abzubilden. Das erste Modell auf der Grundlage einer Seiltheorie von DREYER [D2] liefert für laminare Anströmung Seilschwingungen in der ersten Eigenform, auch wenn für die gewählten Beispiele Schwingungen in der zweiten und dritten Eigenform beobachtet wurden. Unter Berücksichtigung von gewissen Turbulenzgraden erhält DREYER Schwingungen auch in der dritten Eigenform. Aussagen zum Rinnsalverhalten über die Seillänge sind in der Arbeit von ihm nicht dokumentiert. Zur Rinnsalmodellierung verwendet er ein zweidimensionales Modell am Seilquerschnitt auf der Basis vereinfachter NAVIER-STOKES-Gleichungen. Das Verhalten der Rinnsale in Längsrichtung der Seile wird nicht berücksichtigt. Von jedem der betrachteten Seile ist jeweils nur an einer Stelle die Rinnsalschwingung dokumentiert.

Andere Wissenschaftler haben ein deutlich vereinfachtes Modell zur Beschreibung der Rinnsalbewegungen verwendet, bei dem sich die Rinnsale als starres Element vergleichbar einem Pendel auf der Seiloberfläche bewegen. Da zur Modellierung der Windkräfte bislang stets aerodynamische Beiwerte verwendet wurden, die mit Starrkörpern ermittelt wurden, passen die Modelle der Windkräfte und der Rinnsalkräfte zusammen.

Im Folgenden soll das in dieser Arbeit verwendete Modell sowohl für die Windkräfte als auch für die Rinnsalschwingungen qualitativ erläutert und begründet werden. Durch die selbstinduzierte Bewegungsanregung sind die Kopplungen innerhalb der Gleichungssysteme im Vergleich zur Parametererregung ungleich komplexer und entscheidender für den gesamten Schwingungsvorgang, der damit auch numerisch deutlich empfindlicher auf kleine Änderungen im System reagiert.

### 7.1 Allgemeine Modellierungsgrundsätze

Ein Modell dient zur Nachbildung eines realen Systems. In aller Regel wird es nicht möglich bzw. nicht sinnvoll sein, ein "Allzweckmodell", vgl. [B5], zu nutzen. Vor Beginn der Modellierung sollte sich der Nutzer über das Leistungsvermögen im Klaren sein und einen eindeutigen Modellzweck definieren. Darüber hinaus gehende Modellerweiterungen erhöhen die Komplexität, machen das Modell fehleranfälliger und die Berechnungen oder Simulationen langsamer. Da Modelle meist nur bestimmte Eigenschaften der Realität abbilden, sind immer Vereinfachungen enthalten, die unter Nutzung systemwissenschaftlicher Erkenntnisse zwar möglichst objektiv sein sollten, jedoch in Abhängigkeit des Abstraktionsgrades nach [B5] immer subjektive Einflüsse beinhalten. Deshalb gehört zu jeder Modellbildung eine vollständige und nachvollziehbare Dokumentation.

Bei der Modellierung dynamischer Systeme kann entweder das beobachtete Verhalten des Systems nachgeahmt werden oder das Modell bildet die Systemstruktur ab, um damit das beobachtete Verhalten zu erzeugen. Für den ersten Fall, dem verhaltensbeschreibenden Ansatz, ist jeder Modellansatz akzeptabel, der das beobachtete Verhalten innerhalb gewisser Toleranzen hinreichend genau nachbildet. Auf die Wirkung von Rückkopplungen zwischen verschiedenen Systemparametern und inneren Zusammenhängen kann verzichtet werden, wenn sich das beobachtete Verhalten anders erklären lässt. Somit kann das Originalsystem als "Black box" angesehen werden, mit dem versucht wird, einen Zusammenhang zwischen *Input* und *Output* herzustellen. Die-

ses Prinzip wird neben der Systemtheorie in vielen Fällen von Modularisierungen unter anderem auch in der Psychologie bei der Verhaltensforschung benutzt. Die Anwendungsgültigkeit dieser Methode beschränkt sich demzufolge ausschließlich auf Bereiche, für die Beobachtungen oder sonstige Datenreihen vorliegen. Aussagen über zukünftige Ereignisse sind somit nur Trendprognosen, die dann ermittelt werden können, wenn die Zusammenhänge zwischen den analysierten Daten relativ "stabil" erscheinen. Übliche Verfahren dieser Prognosetechniken sind in [B5] aufgeführt:

- Szenario-Technik (Best Case, Worst Case, Most likely Case)
- Die einfache Trendextrapolation
- Methode der gleitenden Durchschnittswerte
- Methode der exponentiellen Glättung
- Regressionsanalyse

Die Qualität dieser Trendprognosen reicht vom qualifizierten Raten bis hin zur aufwendigen statistischen Auswertung - oft nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Modellierungen und Prognosen auf dieser Basis findet man vermehrt bei ökonomischen Fragestellungen oder im Controlling. Alle empirisch ermittelten Formeln aus diversen Bereichen basieren ebenfalls auf diesem Ansatz.

Der wirkungsstrukturtreue Ansatz entwickelt ein deutlich vertieftes Verständnis für das Zustandekommen des Verhaltens. Dabei wird versucht, zwischen sämtlichen Systemparametern Rückkopplungen, Nichtlinearitäten und Verzweigungsmöglichkeiten innerhalb definierter Bereichsgrenzen darzustellen. Je besser dies gelingt, desto präziser und sicherer können vorausschauende Planungen, auch für bislang noch nie beobachtete Ereignisse, durchgeführt werden.

Vor dem Herausarbeiten der Wirkungsstruktur steht jedoch die Systemdefinition und die Abgrenzung des eigentlichen Systems von der Umwelt. Das gesamte System selbst lässt sich durch Zustandsgrößen und Systemparameter definieren. Zustandsgrößen sind all jene zeitveränderliche Größen, die das Verhalten vollständig beschreiben. Am Beginn einer Simulation stehen die Anfangswerte, die eine vorzugebende Konfiguration der Zustandsgrößen darstellen. Konstante Systemparameter beschreiben die zeitunabhängigen Eigenschaften des Systems. Wird das qualitative Verhalten eines Systems durch kleine Änderungen von Parametern stark beeinflusst, so werden diese sensitive oder kritische

Parameter genannt. Die Auswirkungen auf das System werden in Sensitivitätsanalysen identifiziert. Sogenannte Zwischengrößen sind in der Regel abhängige Systemeigenschaften, die sich aus Systemparametern und Zustandsgrößen berechnen lassen. Auf dieses System können von außen systemunabhängige und zeitveränderliche Umwelteinflüsse wirken.

Das Verhalten von dynamischen Systemen wird nun wesentlich durch die Anzahl der Zustandsgrößen (Dimensionalität des Systems) und die Art der Rückkopplungen zwischen diesen bestimmt. Unter Rückkopplung versteht man den Effekt, dass der Systemzustand sich selbst beeinflusst. Dies wird auch als Eigendynamik bezeichnet und ist in vielen Fällen nur schwer mit Zuverlässigkeit einschätzbar. Ab zwei Zustandsgrößen ist ein dynamisches System grundsätzlich in der Lage zu schwingen. Dabei kann es zu konvergierenden oder auch divergierenden Effekten kommen. Kommt es bei einem dynamischen Problem zu Schwingungen, die das gesamte reale System zerstören könnten, spricht man von starker Eigendynamik, siehe [B5]. Kommt es nur zu kleinen Veränderungen der Zustandsgrößen, handelt es sich um ein System mit schwacher Eigendynamik. Bei der Untersuchung dynamischer Entwicklungen wird man direkt auf das Stabilitätsproblem geführt.

Anders als bei linearen Systemen existieren im nichtlinearen Fall mehrere Gleichgewichtslagen oder Fixpunkte, wobei das Stabilitätsverhalten der einzelnen Punkte sich grundsätzlich unterscheiden kann, vgl. hierzu auch Kap. 6.5.2.1. Die möglichen Lösungen für bestimmte Konfigurationen sind in sogenannten Verzweigungs- oder Bifurkationsdiagrammen dargestellt. Von Stabilität spricht man, wenn der Zustand eines Systems nach einer kleinen Störung eines Gleichgewichtszustandes in der Nähe eines Fixpunktes verbleibt oder sich auf diesen zu bewegt, d.h. die Trajektorie wird vom Fixpunkt angezogen [B5]. Entfernt sich der Zustand mit zunehmender Dauer von einem Gleichgewichtspunkt, d.h. der Fixpunkt stößt die Trajektorie ab, spricht man von Instabilität. Das Verhalten eines nichtlinearen Systems wird also zusätzlich vom Ausgangspunkt im Zustandsraum beeinflusst. Eine mögliche Folge davon ist das sogenannte *Sprungphänomen*, das im Rahmen dieser Arbeit bereits in Kapitel 6 behandelt wurde. In aller Regel lässt sich der Zustandsraum nach [B5] in Bereiche mit ähnlichem Verhalten einteilen. Bereiche mit stabilen Fixpunkten werden Attraktorflächen genannt. Kommt es im zweidimensionalen Raum zu geschlossenen Zustandskurven, liegt der Sonderfall der Grenzzyklen vor. In höherdimensionalen Systemen kann es unter Umständen zu Überlagerungen mehrerer Grenzzyklen kommen. Diese Attraktoren nennt man Torus. Ab



drei unabhängigen Zustandsgrößen ist auch chaotisches Verhalten möglich. Das Verhalten dieser Systeme ist nicht mehr vorhersehbar, obwohl auch in diesen Fällen ein völlig deterministisches System vorliegt, vgl. [B5].

## 7.2 Anwendung auf Regen-Wind-induzierte Schwingungen

### 7.2.1 Systemgrenzen und Zustandsgrößen

Ziel der Untersuchungen ist eine Analyse der Schwingungen geneigter Schrägseile unter der Einwirkung von Regen und Wind. Dazu gehört die Berechnung der Schwingungsamplituden der Seile und die Bestimmung der zugehörigen Seilkräfte. Aufbauend auf der in dieser Arbeit vorgestellten Theorie kann unter Berücksichtigung von entsprechenden Biegesteifigkeiten die Erweiterung auf Stabbogenbrücken erfolgen, da es in den letzten Jahren einige Schäden an Hängeranschlüssen solcher Brücken, wie der *Elbebrücke* bei Dömitz gegeben hat.

Da die beiden beweglichen Regenrinnale den Anregungsmechanismus der Regen-Wind-induzierten Schwingungen initiieren, dient die Modellierung der Rinnsalschwingungen allein dazu, die maßgeblichen Kenngrößen (Position und Geschwindigkeit der Rinnsale) als Eingangswerte für die Seilschwingungen zu ermitteln. Andere Kriterien wie Verformungen oder innere Spannungen der Rinnsale liegen nicht im Fokus dieser Arbeit. Trotzdem unterliegen auch die Rinnsalschwingungen physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die sich mit Hilfe von Differentialgleichungen beschreiben lassen. Zur Modellierung von Wind, einem Seil und zwei starrer Rinnsale dient in dieser Arbeit ein Fluid-Struktur-Struktur-Interaktionsansatz.

Aus diesem Ansatz ergeben sich auch die Systemgrenzen. Grundsätzliches System ist ein als ideal biegeweich anzusehendes Schrägseil mit all seinen Eigenschaften wie der Seillänge, der Masse, dem Seildurchmesser, der Seilneigung und der Vorspannung. Auch für diese wesentlichen Eingangsdaten sind in der Literatur für ein und dasselbe Beispiel teilweise verschiedene Angaben gemacht worden. Da Schrägseilbrücken in der Regel mehrere Seile mit unterschiedlichen Eigenschaften besitzen, sind in einigen Literaturquellen die Daten durch unzureichende Recherchen oder ungenaue Dokumentationen scheinbar nicht hinreichend genau erfasst worden. Als positives Beispiel vorbildlicher Dokumentation für die Seildaten sticht die Arbeit von ROBRA hervor. Hier sind für die wichtigsten Brücken jeweils auch für mehrere Seile sowohl Seildaten als auch Schwin-

gungsbeobachtungen aufgeführt.

Um den alleinigen Einfluss des Lastfalls Regen und Wind zu untersuchen, muss das System zwischen zwei feste Auflager gespannt werden, da es ansonsten auch zu Seilschwingungen infolge Parametererregung kommen könnte. Die Momentenwirkung des Windes geht ausschließlich in die Bewegungsgleichung der Rinnsale ein, da die Torsion des Seils im Modell vernachlässigt wird.

Somit verbleiben die folgenden Zustandsgrößen des Systems bei den Regen-Wind-induzierten Schwingungen:

- Die Verschiebungen sämtlicher Seilknoten in die drei Raumrichtungen werden, wie in Kap. 4 dargestellt, im Verschiebungsvektor  $\mathbf{V}$  zusammengefasst.
- Die zugehörigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für die Knotenverschiebungen werden in den Vektoren  $\dot{\mathbf{V}}$  und  $\ddot{\mathbf{V}}$  festgehalten.
- Die Winkelpositionen der Rinnsale werden im Vektor  $\Phi$  mitgeführt.
- Die resultierenden Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen der beiden Rinnsale bilden die Vektoren  $\dot{\Phi}$  und  $\ddot{\Phi}$ .

### 7.2.2 Umwelteinflüsse und deren Folgen für die Modellierung

Auf dieses so definierte System wirken von außen bestimmte Umwelteinflüsse. Für den gewählten Lastfall lassen sich hier die Windgeschwindigkeit und die Regenintensität nennen. Bedingt durch diese beiden Einflüsse bilden sich ab einer gewissen Windgeschwindigkeit zwei Regenrinnsale, die zum einen durch Adhäsionskräfte an der Seiloberfläche haften und zum anderen durch die Erdanziehung am Schrägseil herunterlaufen. Dabei kann sowohl die Biege- als auch die Dehnsteifigkeit der Rinnsale vernachlässigt werden. Durch die Rinnsale verändern sich der Gesamtquerschnitt und damit die aerodynamischen Eigenschaften des Seiles, so dass neben den Quertriebskräften auf das Seil auch Auftriebskräfte hervorgerufen werden, siehe Kapitel 2.2.4. Diese Kräfte scheinen nach Aussage mehrerer Autoren nicht primär von der Größe oder Form der Rinnsale, sondern in erster Linie von der Position der Rinnsale auf der Seiloberfläche abzuhängen. Die Quer- und Auftriebskräfte lassen sich als Produkt aus aerodynamischem Beiwert und Staudruck berechnen, siehe Kapitel 7.3. Darüber hinaus kommt es durch den umströmenden Wind zu einer Momentenwirkung auf die Rinnsale, die durch aerodynami-

sche Momentenbeiwerte beschrieben wird.

Da es sich bei dem zu lösenden Problem um ein mehrfach gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung handeln wird, ist ein möglichst einfaches Modell anzustreben, um die wesentlichen Effekte zu erfassen und dabei den Rechenaufwand in Grenzen zu halten. Deshalb scheint es gerechtfertigt zu sein, dem Ansatz vieler Forscher zu folgen und die Rinnsale vergleichbar einem Pendel auf der Seiloberfläche schwingen zu lassen, da der numerische Aufwand zur Rinnsalmodellierung wie bei DREYER mit vereinfachten NAVIER-STOKES-Gleichungen beträchtlich ist. Weiterhin wurden die aerodynamischen Windkraftbeiwerte mit Starrkörpern bestimmt, so dass bei Verwendung eines Rinnsalmodells mit starren Querschnitten Windkraft- und Rinnsalmodell zusammenpassen.

Damit werden in einem ersten Schritt als Umwelteinflüsse eine konstante, waagerechte Windgeschwindigkeit  $U_0$  des äußeren Windfeldes und eine gleichmäßige Regenintensität angesetzt. Die gewählte Windgeschwindigkeit wird für das Berechnungsbeispiel der *Erasmusbrücke* zunächst in Korrelation mit der Literatur auf  $U_0 = 14$  m/s festgelegt. Allgemein sollte die Windgeschwindigkeit nicht zu groß gewählt werden, da ein Abspritzen des Wassers infolge Wind nicht durch das Modell erfasst wird.

Die Regenintensität wird nicht zahlenmäßig hinterlegt, sondern es wird angenommen, dass die Regenmenge einerseits ausreichend ist, um Rinnsale zu bilden, und andererseits nicht zu groß ist, um ein Abfließen oder Abspritzen der Rinnsale vom Seil hervorzurufen.

### 7.3 Modellierung der Windkräfte

Für lange Seilstrukturen, wie sie bei Schrägeilbrücken fast ausschließlich vorkommen, haben NORTON und HEIDMANN in [N2] gezeigt, dass laminare Windanströmungen nur vernachlässigbar kleine axiale Kraftwirkungen bei verschiedenen Anströmwinkeln auf zylindrische Körper hervorrufen. Für die Windkräfte verbleibt somit ein 2D-Ansatz, der bei Regen-Wind-induzierten Schwingungen in der Literatur üblich ist. Da selbst im 2D-Modell am Querschnitt zum einen die genaue Druckverteilung nicht bekannt ist und zum anderen ihre numerische Integration auch sehr aufwendig wäre, werden im folgenden aerodynamische Beiwerte aus Laborversuchen verwendet, mit denen sich dann entsprechende Kraft- und Momentenbeiträge formulieren lassen. Das Verfahren ist allerdings nur unter der Voraussetzung gültig, dass die Versuche den realen Verhältnissen aerodynamisch ähnlich sind. Der die Verhältnisse beschreibende Faktor ist die

REYNOLDS-Zahl. Die genannten Voraussetzungen sind durch Verwendung ähnlicher Geometrien und Windgeschwindigkeiten (Beobachtungen von 6 m/s bis 15 m/s; Versuch 10 m/s) erreichbar.

Die entstehenden Quertriebskräfte  $F_D$  in Anströmrichtung und die Auftriebskräfte  $F_L$  senkrecht dazu lassen sich als Produkt aus Staudruck und aerodynamischem Kraftbeiwert darstellen. Die Momentenwirkung auf die Rinnsale lässt sich in vergleichbarer Weise mit Hilfe des Momentenbeiwertes und des Staudrucks angeben. Die aerodynamischen Beiwerte sind abhängig von der Position der beiden Regenrinnsale am Seil und der relativen Anströmung  $U_{rel}$ . Mit ihnen erhält man an jedem Knoten:

$$F_D = C_D \cdot \frac{\rho L}{2} \cdot U_{rel}^2 \cdot D$$

$$F_L = C_L \cdot \frac{\rho L}{2} \cdot U_{rel}^2 \cdot D \quad (7.1)$$

$$M_{1,2} = C_{M_{1,2}} \cdot \frac{\rho L}{2} \cdot U_{rel_{1,2}}^2 \cdot D^2$$

Zur Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte in Abhängigkeit der beiden Rinnsalpositionen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  wurden in [D2] Windkanalversuche durchgeführt, die der Professur für Baumechanik der Universität der Bundeswehr München dankenswerterweise zur Verfügung gestellt wurden. Winkeldefinitionen und Richtungen der Kräfte sind Abbildung 7.1 zu entnehmen. Die Messungen wurden im Windkanal der Universität Hannover an einem waagrecht und unbeweglich eingespanntem PVC-Rohr mit einem

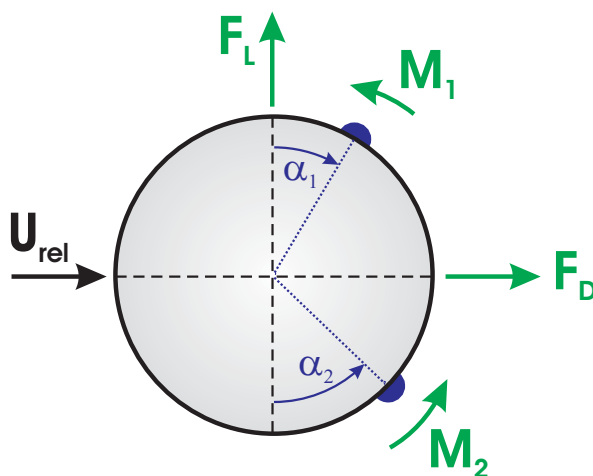


Bild 7.1: Vorzeichendefinitionen bei DREYER

Durchmesser von 100 mm mit künstlichen Rinnsalen bei einer konstanten, orthogonalen Anströmung von 10 m/s mit kalibrierten 5-Komponenten-Waagen durchgeführt. Um die Versuche mit den realen Bedingungen in Einklang zu bringen, ist es zunächst zweckmäßig, ein zusätzliches Koordinatensystem in Form eines begleitenden Dreibeins einzuführen, wobei die  $x$ -Koordinate der Seilachse folgt, siehe Abb. 7.2. Zusätzlich zur  $x$ -Koordinate wird mit Hilfe der  $z$ -Achse die Seilebene im Eigengewichtszustand beschrieben, während die  $y$ -Koordinate orthogonal auf der Seilebene steht. Damit spannen die bodenparallele Windgeschwindigkeit  $U_0$  und die  $y$ -Achse des begleitenden Dreibeins eine zur in Abb. 7.2 grau unterlegten Grundfläche parallele Ebene auf. Der Ver-

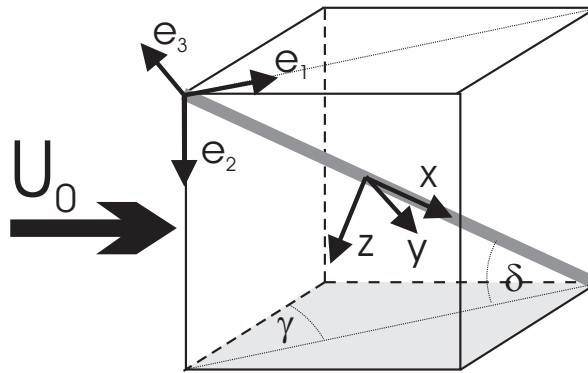


Bild 7.2: Zusammenhang der Koordinatensysteme

suchsaufbau zur Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte war so angelegt, dass die Anströmung immer senkrecht zur Seilachse erfolgte ( $\gamma = 0^\circ$ ), so dass bei der Simulation eine Anpassung an die beobachteten Anströmverhältnisse unter dem Winkel  $\gamma$  notwendig wird.

Es sind bei der Modellierung Regen-Wind-induzierter Seilschwingungen drei Windgeschwindigkeiten zu definieren, um alle Eigenschaften des geneigten und bewegten Seiles unter beliebiger Anströmung erfassen zu können. Die Bezeichnung der Größen und deren Herleitung erfolgt wegen der Vergleichbarkeit in Anlehnung an [N1] und [D2].

- Ausgangspunkt der Berechnung ist eine waagerechte, bodenparallele, konstante Windgeschwindigkeit  $U_0$ .
- Ausgehend von der Windgeschwindigkeit  $U_0$  wird diese in Richtung der Komponenten des begleitenden Dreibeins aufgespalten. Da axiale Windkomponenten einen vernachlässigbaren Einfluss auf das Schwingungsverhalten haben, erhält man die effektive Windgeschwindigkeit  $U$  unter Berücksichtigung der senkrechten

Anströmkomponenten in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Der Winkel zwischen  $U_0$  und  $U$  wird im Folgenden analog zu [N1] als Winkel  $\beta$  bezeichnet. Benötigt werden für diese Transformation der Anströmwinkel  $\gamma$  und der Seilneigungswinkel  $\delta$ .

- Durch die Strukturbewegungen ergibt sich eine relative Windgeschwindigkeit  $U_{rel}$  des Seiles, die die Geschwindigkeit der Seilknoten in  $y$ - und  $z$ -Richtung mit berücksichtigt. Dieser Winkel zwischen  $U$  und  $U_{rel}$  wird  $\alpha_v$  genannt, siehe Abb. 7.4. Für die relative Anströmung der Rinnsale ergeben sich die relativen Anströmwinkel  $\alpha_{v,1}$  und  $\alpha_{v,2}$  unter zusätzlicher Berücksichtigung der Winkelgeschwindigkeiten des jeweiligen Rinnsals.

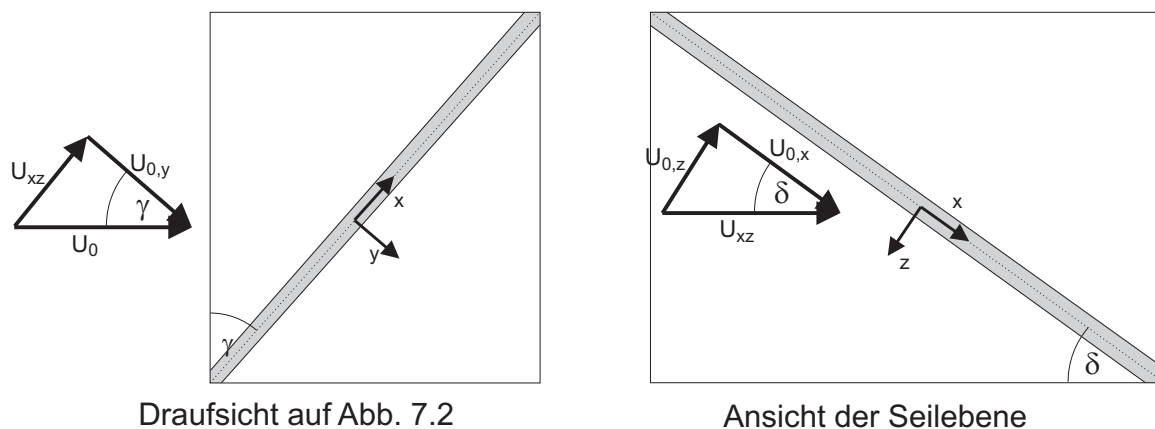


Bild 7.3: Darstellung der effektiven Anströmung

Aufgrund der Seilneigung  $\delta$  und des Windanströmwinkels  $\gamma$  lässt sich die Windgeschwindigkeit  $U_0$  in Komponenten des begleitenden Dreibeins zerlegen, siehe Abb. 7.3, aus denen sich der Winkel  $\beta$  zur Abbildung der senkrechten Anströmgeschwindigkeit  $U$  des Seils im stationären Zustand berechnen lässt, vgl. [N1].

$$\beta = -\arctan\left(\frac{U_{0,z}}{U_{0,y}}\right) \quad \text{und} \quad U = \sqrt{U_{0,y}^2 + U_{0,z}^2} \quad (7.2)$$

$$\text{mit} \quad U_{0,y} = U_0 \cdot \cos \gamma, \quad U_{0,z} = -U_0 \cdot \sin \gamma \cdot \sin \delta$$

Aufgrund der bewegten Strukturen (Seil und Rinnsale) ergibt sich eine geschwindigkeitsabhängige Verschiebung der Anströmung. Die relative Anströmung des Seiles  $U_{rel}$ , die maßgeblichen Einfluss auf die Berechnung der Windkräfte für die Seilbewegung hat, erhält man aus der Windgeschwindigkeit  $U$  und den Geschwindigkeitskomponenten der

Seilknoten  $\dot{y}$  und  $\dot{z}$ . Die Darstellung der einzelnen Windgeschwindigkeiten bezogen auf den Seilquerschnitt ist Abb. 7.4 zu entnehmen. Damit gilt in Anlehnung an [N1] bei der

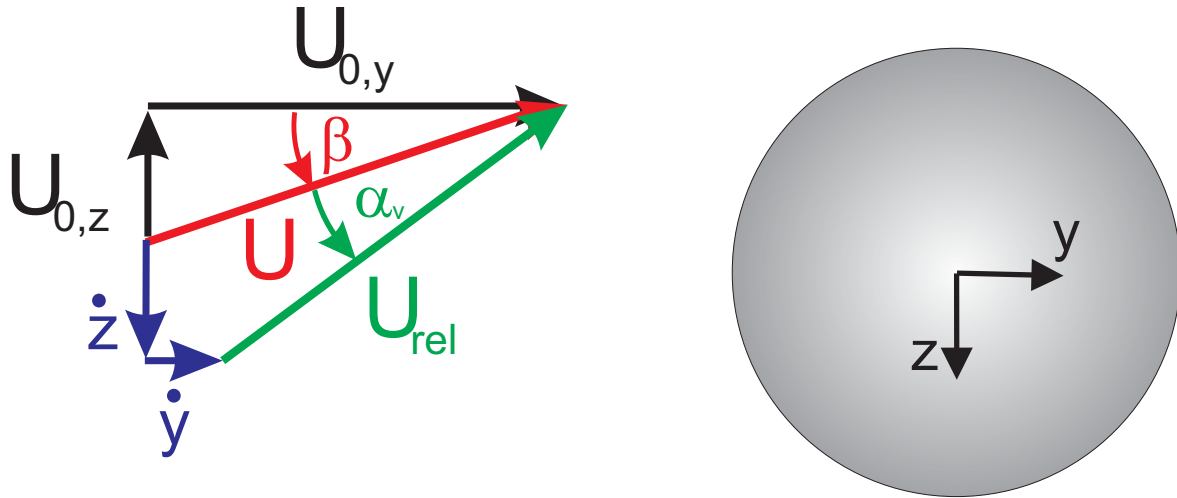


Bild 7.4: Winkel für relative Windanströmung

gewählten Vorzeichenregelung für den Betrag  $U_{rel}$  und die Richtung  $\alpha_v$  der relativen Anströmung des Seiles:

$$U_{rel} = \sqrt{(U_{0,z} + \dot{z})^2 + (U_{0,y} - \dot{y})^2} \quad (7.3)$$

$$\alpha_v = \arctan\left(\frac{U_{0,z} + \dot{z}}{U_{0,y} - \dot{y}}\right) - \beta \quad (7.4)$$

Da die Rinnsale durch die Adhäsionswirkung am Seil haften und sich auf dessen Oberfläche zusätzlich bewegen, ergibt sich die lokale Anströmung der Rinnsale unter zusätzlicher Berücksichtigung der Geschwindigkeitskomponenten der Rinnsale. Für das obere Rinnsal mit der Rinnsalposition  $\varphi_1$  nach Abb. 7.5 gilt beispielhaft :

$$U_{rel,1} = \sqrt{(U_{0,z} + \dot{z} + \dot{\varphi}_1 \cdot r \cdot \sin \varphi_1)^2 + (U_{0,y} - \dot{y} + \dot{\varphi}_1 \cdot r \cdot \cos \varphi_1)^2} \quad (7.5)$$

und

$$\alpha_{v,1} = \arctan\left(\frac{U_{0,z} + \dot{z} + \dot{\varphi}_1 \cdot r \cdot \sin \varphi_1}{U_{0,y} - \dot{y} + \dot{\varphi}_1 \cdot r \cdot \cos \varphi_1}\right) - \beta \quad (7.6)$$

Im Gegensatz zu NAHRATH und DREYER wird in dieser Arbeit die relative Windgeschwindigkeit  $U_{rel}$  nicht durch die effektive Windgeschwindigkeit  $U$  angenähert, sondern konsequent die Richtung und der Betrag der relativen Windgeschwindigkeit an jedem einzelnen Seilknoten mitgeführt. Dadurch kommt es zu weiteren Kopplungseffekten im zu lösenden Differentialgleichungssystem.

Zur Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte können nicht die Rinnsalpositionen des y-z-Koordinatensystems verwendet werden, da die relative Anströmung nicht nur in y-Richtung erfolgt. Somit würden der Versuchsaufbau von DREYER und die Simulation nicht übereinstimmen. Stattdessen muss eine Koordinatentransformation erfolgen, da die aerodynamischen Beiwerte und die zugehörigen Kräfte auf die veränderliche, relative Windgeschwindigkeit  $U_{rel}$  bezogen werden müssen. Damit ergeben sich die Richtung der Auftriebskraft  $F_D$  und der Quertriebskraft  $F_L$  nach Gl. (7.1). Von diesen in Abb. 7.5 in grün dargestellten Richtungen aus sind nun die Positionen der Rinnsale  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  - blau gezeichnet - zu bestimmen. Erst mit diesen Winkeln können die aerodynamischen Beiwerte wie im in den Versuchen von DREYER nach Bild 7.1 ermittelt werden. Der Zusammenhang zwischen den Rinnsalpositionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  im y-z-Koordinatensystem und den Winkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  bezogen auf der Richtungen von  $F_D$  und  $F_L$  ist in Bild 7.5 unter Berücksichtigung der Vorzeichenregelung nach Abb. 7.1 übersichtlich dargestellt.

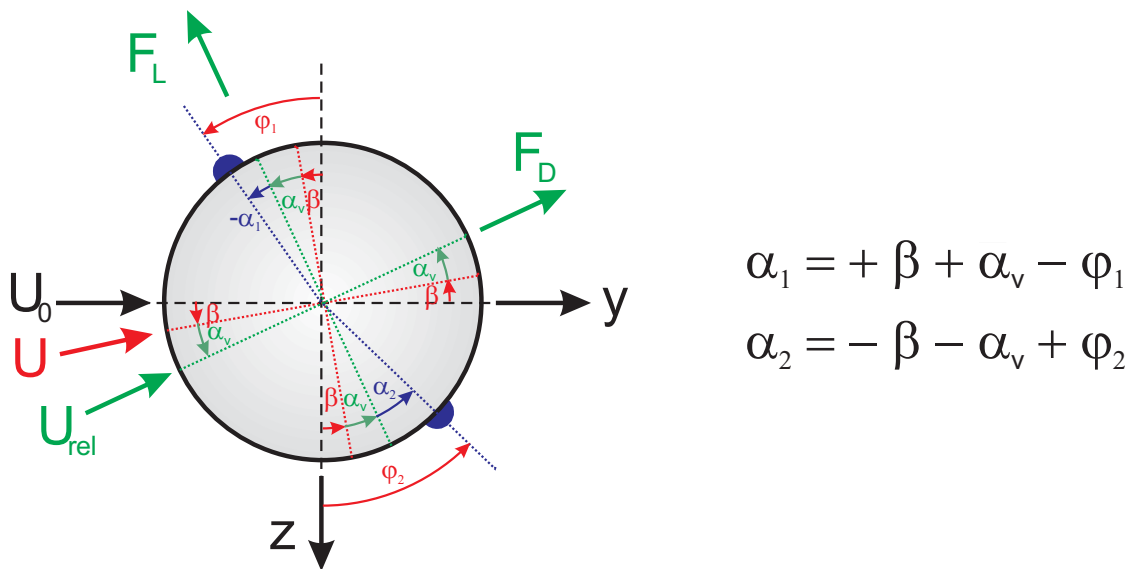


Bild 7.5: Winkelübersicht



Die Windkräfte  $F_D$  und  $F_L$  wirken als äußere Last auf das Schrägseil. Deshalb werden ausschließlich die Eingangswerte  $U_{rel}$  und  $\alpha_v$  des Seils zur Berechnung der Windkräfte benötigt. Die Bestimmung der Lage der Rinnsale erfolgt aufgrund des lokalen Momentengleichgewichtes am Rinnsal im Kap. 7.4.2. Die äußeren Windmomente  $M_1$  und  $M_2$  wirken wegen der vernachlässigten Torsion des Seils ausschließlich auf die Rinnsale, so dass zu deren Bestimmung die jeweilige lokale Anströmung an den Rinnsalen durch Betrag und Richtung verwendet wird (Gl. 7.5 und 7.6).

In das Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Rinnsale können die berechneten Windmomente direkt eingefügt werden, während die Windkräfte vor der Einarbeitung in das Seildifferentialgleichungssystem zuvor transformiert werden müssen. Diese Umwandlung erfolgt in 2 Schritten. Zunächst werden die Kräfte am Seilquerschnitt  $F_D$  und  $F_L$  in Abhängigkeit vom Anströmwinkel  $\gamma$ , der Seilneigung  $\delta$  und den Strukturgeschwindigkeiten -siehe (7.2) und (7.4)- in die lokale  $y$ - und  $z$ -Richtung umgerechnet.

$$\begin{aligned} F_y &= -F_L \cdot \sin(\beta + \alpha_v) + F_D \cdot \cos(\beta + \alpha_v) \\ F_z &= -F_L \cdot \cos(\beta + \alpha_v) - F_D \cdot \sin(\beta + \alpha_v) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Bezieht man (7.7) auf die Basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  des globalen Seilsystems nach Abb. 4.1 ergeben sich folgende Windkraftkomponenten am  $i$ -ten Element, die auf der Lastseite als Windlastvektor  $\mathbf{W}$  in den Lastvektor  $\mathbf{P}$  des Differentialgleichungssystems (4.14) eingesetzt werden:

$${}^i W_1 = - {}^i F_z \cdot \sin \delta, \quad {}^i W_2 = + {}^i F_z \cdot \cos \delta, \quad {}^i W_3 = - {}^i F_y \quad (7.8)$$

## 7.4 Modellierung des dynamischen Rinnsalverhaltens

### 7.4.1 Erläuterungen zum gewählten Ansatz

Bei den Rinnsalen handelt es sich in der Realität um dreidimensionale Gebilde, die sich auf der Seiloberfläche entlang bewegen können, ihren Querschnitt verändern und gleichzeitig die Schrägseile hinab fließen. Im Modell wurden die Rinnsale bei der Berechnung Regen-Wind-induzierter Schwingungen in der Literatur stets als zweidimensionale Objekte dargestellt, welche sich auf der Seiloberfläche bewegen. Das Abfließen in Seillängsrichtung wird nicht berücksichtigt. Die Rinnsalquerschnitte sind je nach Modellansatz

entweder starr oder abhängig von den jeweiligen Druckverhältnissen als Folge einer Fluid-Fluid-Struktur-Kopplung. In dieser Arbeit werden Rinnsale mit unveränderlicher Querschnittsgeometrie unter Berücksichtigung eines Fluid-Struktur-Struktur-Ansatzes gewählt, siehe Kapitel 3.2.2. Die wichtigsten Gründe dafür sind die gegebenen aerodynamischen Beiwerte, die mit Starrkörpern ermittelt wurden, und der geringere Aufwand bei der numerischen Umsetzung.

Wegen der fehlenden Dehn- und Biegesteifigkeit der Rinnsale bewegen sich die Rinnsale nur als Folge der Kräfte senkrecht zur Seilachse und tangential auf der Seiloberfläche. Für die Rinnsale liegt somit auch in dieser Arbeit nur ein zweidimensionaler Ansatz in jedem Seilknoten vor, der bis heute auch in Veröffentlichungen nach dem Fluid-Fluid-Struktur-Ansatz, z.B. in [T1], bei der Modellierung der Rinnsale aus einem Wasserfilm heraus verwendet wird.

Aussagen darüber, wie sich die Rinnsale über die Seillänge an verschiedenen Punkten des Seiles verhalten, sind in der Literatur nur unzureichend vorhanden, so dass nicht erkennbar ist, ob die Rinnsale affin zum Seil schwingen oder ob für das Rinnsal eine einheitliche Rinnsalschwingung über die gesamte Seillänge angenommen wird. Für diese Modellvariante mit konstanter Rinnsalposition sind alle bisherigen Versuche zur Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte ausgelegt. Windkraftbeiwerte mit über die Länge veränderlichen Rinnsalpositionen und mit Rinnsalen mit veränderlichem Querschnitt wurden bislang nicht bestimmt. Auch die in dieser Arbeit verwendeten Windkraftbeiwerte von DREYER gelten streng genommen nur für Rinnsale mit starrer Rinnsalgeometrie (Fluid-Struktur-Struktur-Interaktion) und für eine über die Länge unveränderliche Rinnsalposition, so dass bei der Bestimmung der Windkräfte in dieser Arbeit nach der Ortsdiskretisierung elementweise konstante Rinnsalpositionen angesetzt werden. In dem von DREYER vorgestellten Modell zur Simulation von Regen-Wind-induzierten Schwingungen auf der Basis einer dreidimensionalen Seiltheorie sind keine Ergebnisse des Rinnsalverhaltens über die Seillänge dokumentiert.

Die dynamischen Positionen der beiden Rinnsale auf der Seiloberfläche werden durch Bilden des Momentengleichgewichtes bestimmt. Das Haftenbleiben der Rinnsale am Seil wird durch die Annahme ausreichender Adhäsionskräfte unterstellt, so dass ein Abfallen der Rinnsale vom Modell nicht berücksichtigt wird.

Das dann zu lösende dynamische System enthält neben Eigengewichtsanteilen und Windlasten Dämpfungs- und Trägheitskräfte, die sich durch Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen der Rinnsale formulieren lassen, sowie einen Term, in dem die

Beschleunigungen der Seilknoten vorkommen, da die Rinnsale am Seil haften und somit die Bewegungen des Seiles mitmachen. Da sich die Seilknoten unabhängig voneinander bewegen können, gehen in das Momentengleichgewicht für die Rinnsale über die Seillänge verschiedene Beschleunigungsterme der Seilknoten ein, so dass die Rinnsalposition von einem Seilknoten zum nächsten variieren muss. Damit müssen die Rinnsale in Seillängsrichtung gesehen von den Schwingungsformen her ähnlich zum Seil schwingen. Besonders deutlich wird dies an den festen Auflagern, an denen es lediglich zu Verdrehungen jedoch nicht zu Beschleunigungen der Seilknoten kommen kann, so dass die Rinnsale bei konstanter Anströmung ihre statische Gleichgewichtslage dort nicht verlassen dürften.

Die Berechnung der statischen Gleichgewichtslagen erfolgt durch Streichen der dynamischen Anteile aus Gl. (7.9) in Kapitel 9.2.2.

#### 7.4.2 Bestimmung der Rinnsalkräfte

Sowohl durch das Vorhandensein als auch durch die Bewegung der beiden Rinnsale treten zusätzliche Kräfte auf. Dabei werden die Rinnsale mit einem Modell beschrieben, welches dem eines fußpunkterregten Pendels ähnelt und nur tangentiale Bewegungen auf der Seiloberfläche erlaubt. Es wirken auf jedes Rinnsal bezüglich des eingeführten begleitenden Dreibeins orthogonal zur x-Achse, siehe Abb. 7.6:

- die Erdanziehungskraft unter Berücksichtigung der Seilneigung  $\delta$ ,
- Trägheitskräfte infolge der Rinnsalschwingung in tangentialer Richtung,
- Trägheitskräfte infolge der Seilschwingung in y- und z-Richtung,
- Zentrifugalkräfte in radialer Richtung,
- viskose Dämpfungskräfte, mit denen die Scherkraft zwischen Seil und Rinnsal näherungsweise modelliert werden soll und
- Momente infolge Windströmung.

Die an den Rinnsalen angreifenden Kräfte lassen sich zu einer Resultierenden  $R_y$  in y-Richtung und einer Resultierenden  $R_z$  in z-Richtung zusammenfassen.

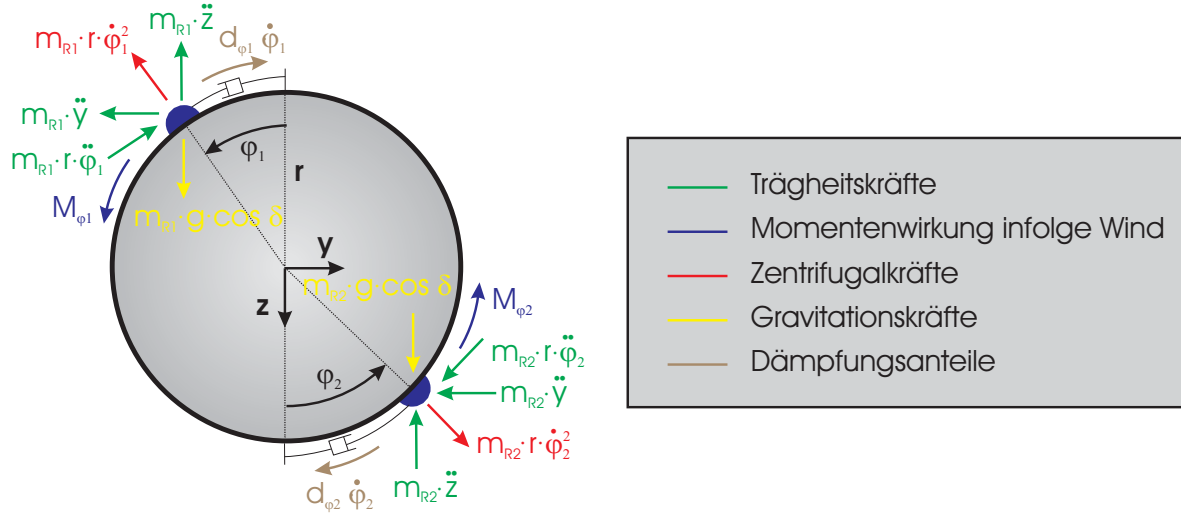


Bild 7.6: Darstellung der Rinnsalkräfte

Nach Transformation dieser Kräfte in das Basiskoordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) erhält man die Rinnsalkräfte  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}
 R_1 &= -R_z \cdot \sin \delta = -(m_{R1} + m_{R2}) \cdot \ddot{v}_1 - (m_{R1} + m_{R2}) \cdot g \cdot \cos \delta \cdot \sin \delta \\
 &\quad + m_{R1} \cdot r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \delta \cdot \dot{\varphi}_1^2 - m_{R2} \cdot r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \delta \cdot \dot{\varphi}_2^2 \\
 &\quad + m_{R1} \cdot r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \delta \cdot \ddot{\varphi}_1 - m_{R2} \cdot r \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \delta \cdot \ddot{\varphi}_2 \\
 R_2 &= +R_z \cdot \cos \delta = -(m_{R1} + m_{R2}) \cdot \ddot{v}_2 + (m_{R1} + m_{R2}) \cdot g \cdot \cos^2 \delta \\
 &\quad - m_{R1} \cdot r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \delta \cdot \dot{\varphi}_1^2 + m_{R2} \cdot r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \delta \cdot \dot{\varphi}_2^2 \\
 &\quad - m_{R1} \cdot r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \delta \cdot \ddot{\varphi}_1 + m_{R2} \cdot r \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \delta \cdot \ddot{\varphi}_2 \\
 R_3 &= -R_y = -(m_{R1} + m_{R2}) \cdot \ddot{v}_3 + \\
 &\quad + m_{R1} \cdot r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 - m_{R2} \cdot r \cdot \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 \\
 &\quad - m_{R1} \cdot r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + m_{R2} \cdot r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Diese Kräfte werden knotenweise im Vektor  $\mathbf{R}$  der Rinnsalkräfte zusammengefasst und in den Lastvektor  $\mathbf{P}$  in (4.14) eingebaut. Man erhält:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\mathbf{V} + \Delta\mathbf{C}^{\text{NL}}\mathbf{V} = \mathbf{P} = \mathbf{W} + \mathbf{R} \tag{7.10}$$

Das kinetische Momentengleichgewicht eines Knotens - wie in [N1] gesondert aufgestellt für das obere und das untere Rinnsal- liefert mit Gleichung (7.1)<sub>3</sub>:

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_1} &= +C_{M1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot d^2 \cdot U_{rel}^2 = m_{R1} \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 - m_{R1} \cdot g \cdot \cos \delta \cdot r \cdot \sin \varphi_1 \\
 &\quad + d_{\varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_1 - m_{R1} \cdot r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{y} + m_{R1} \cdot r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \ddot{z} \\
 M_{\varphi_2} &= +C_{M2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot d^2 \cdot U_{rel}^2 = m_{R2} \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_{R2} \cdot g \cdot \cos \delta \cdot r \cdot \sin \varphi_2 \\
 &\quad + d_{\varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2 + m_{R2} \cdot r \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{y} - m_{R2} \cdot r \cdot \sin \varphi_2 \cdot \ddot{z}
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Die Dämpfung zur Abbildung der Scherwirkung zwischen Seil und Rinnsal wird wie in [N1] als Produkt von Dämpfungswert  $d_\varphi$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  dargestellt. Zur Bestimmung von  $d_\varphi$  wird in Kap. 8.1.3 ein Versuch aus [D2] ausgewertet, der zeigt, dass es sich nicht, wie in der Literatur üblich, um einen konstanten Wert, sondern um eine geschwindigkeitsabhängige Variable handelt. Die Momentengleichungen (7.11) werden in die folgende Differentialgleichung in Matrizenform überführt:

$$\mathbf{M}_\Phi \ddot{\Phi} + \mathbf{D}_\Phi \dot{\Phi} + \mathbf{C}_\Phi^{NL} = \mathbf{P}_\Phi \tag{7.12}$$

Dabei enthalten die quadratischen Diagonalmatrizen  $\mathbf{M}_\Phi$  und  $\mathbf{D}_\Phi$  der Größe  $2(n-1)$  auf  $2(n-1)$  die verschiebungsunabhängigen Massenanteile der Rinnsale und die von den Winkelgeschwindigkeiten der Rinnsale  $\dot{\varphi}$  abhängigen Dämpfungsvariablen. Im Vektor  $\mathbf{C}_\Phi^{NL}$  sind die von den Verdrehungen der Rinnsale  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  abhängigen Terme eingearbeitet, die wiederum mit den Beschleunigungskomponenten des jeweiligen Seilknotens gekoppelt sind. In den Spaltenvektoren  $\ddot{\Phi}$  und  $\dot{\Phi}$  der Größe  $2(n-1)$  sind die Winkelbeschleunigungen bzw. -geschwindigkeiten zusammengetragen. Der Lastvektor  $\mathbf{P}_\Phi$  ergibt sich aus den Momenteneinwirkungen des Windes gemäß (7.1)<sub>3</sub>.

Um die numerische Lösung der mehrfach gekoppelten Gleichungen (7.10) und (7.12) zu vereinfachen, werden aus der Bewegungsgleichung (7.10) des Seiles die im Vektor  $\mathbf{R}$  enthaltenen Winkelbeschleunigungen eliminiert. Dazu werden zunächst die Gleichungen in (7.11) nach den Winkelbeschleunigungen  $\ddot{\varphi}_1$  und  $\ddot{\varphi}_2$  umgestellt und in den Vektor  $\mathbf{R}$  der Rinnsalkräfte - siehe (7.10) mit (7.9) - eingesetzt. Von diesem Vektor lässt sich dann der Beitrag  $\Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{V}}$  abspalten, der alle Beschleunigungen der Seilknoten enthält.

$$\mathbf{R} = \Delta \mathbf{R} - \Delta \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} \tag{7.13}$$

Setzt man (7.13) in (7.10) ein, so ergibt sich:

$$[\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\mathbf{V} + \overset{\text{NL}}{\Delta\mathbf{C}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{W} + \Delta\mathbf{R} \quad (7.14)$$

Um aus (7.12) eine Matrixgleichung zu erhalten, die keine Seilbeschleunigungen mehr enthält, wird (7.14) nach  $\ddot{\mathbf{V}}$  aufgelöst und das Ergebnis in den Vektor  $\overset{\text{NL}}{\mathbf{C}}_{\Phi}$  eingesetzt. Dann entstehen die zu lösenden, gekoppelten Differentialgleichungen (7.15) und (7.16), die nun nicht mehr über die zweiten Ableitungen  $\ddot{\mathbf{V}}$  und  $\ddot{\Phi}$  gekoppelt sind. Die Abhängigkeiten der einzelnen Matrizen vom Vektor  $\mathbf{V}$  der Seilverformungen und vom Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{V}}$  sowie vom Drehvektor  $\Phi$  zur Lagebeschreibung der Rinnsale und vom Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\dot{\Phi}$  sind aus der mit (7.14) identischen Matrixgleichung (7.15) und aus (7.16) ersichtlich.

$$[\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}(\Phi)] \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\mathbf{V} + \overset{\text{NL}}{\Delta\mathbf{C}}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{W}(\dot{\mathbf{V}}, \Phi, \dot{\Phi}) + \Delta\mathbf{R}(\Phi, \dot{\Phi}) \quad (7.15)$$

$$\mathbf{M}_{\Phi} \ddot{\Phi} + \mathbf{D}_{\Phi}(\dot{\Phi}) \dot{\Phi} + \overset{\text{NL}}{\mathbf{C}}_{\Phi}(\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}}, \Phi, \dot{\Phi}) = \mathbf{P}_{\Phi}(\dot{\mathbf{V}}, \Phi, \dot{\Phi}) \quad (7.16)$$

## 7.5 Einarbeitung in MatLab

Um das nun gewöhnliche Differentialgleichungssystem in *MatLab* lösen zu können, muss es in eines erster Ordnung umgewandelt werden. Mit den Substitutionen  $\mathbf{U} = \dot{\mathbf{V}}$  und  $\Psi = \dot{\Phi}$  entstehen vier Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung, die dem Programm *MatLab* zur Lösung übergeben werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{W} + \Delta\mathbf{R} - \mathbf{D}\mathbf{U} - \mathbf{C}\mathbf{V} - \overset{\text{NL}}{\Delta\mathbf{C}} \right) \\ \Psi \\ \mathbf{M}_{\Phi}^{-1} \left( \mathbf{P}_{\Phi} - \mathbf{D}_{\Phi}\Psi - \overset{\text{NL}}{\mathbf{C}}_{\Phi} \right) \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Die numerische Umsetzung zur Lösung des Differentialgleichungssystems ist in Kapitel 5 beschrieben.

## 8 Eingangsdaten für das Berechnungsbeispiel Erasmusbrücke

Vor der Simulation müssen die zeit- und verschiebungsunabhängigen Parameter sowie die Umweltbedingungen festgelegt werden, um mit der Literatur vergleichbare Ergebnisse erzielen zu können. Bei der Recherche ist auffällig, dass für ein und dasselbe Berechnungsbeispiel teilweise große Unterschiede bei den Eingangsdaten gewählt wurden. Im Folgenden sind alle wesentlichen Parameter der Rinnsale, des Seils und der Umwelteinflüsse aus der Literatur zur *Erasmusbrücke* zusammengefasst

### 8.1 Rinnsaleigenschaften

Mit dem gewählten Ansatz zur Modellierung der Rinnsalschwingungen benötigt man für jedes der beiden sich bewegenden Rinnsale genau drei Eigenschaften:

- die Rinnsallängen,
- die Rinnsalmassen und
- Dämpfungsbeiwerte, die die Reibungseinflüsse bzw. den Scherwiderstand zwischen Rinnsal und Seiloberfläche abbilden.

#### 8.1.1 Rinnsallänge

Genaue Aussagen über die Rinnsallängen an Schrägseilen unter der Einwirkung von Regen und Wind findet man in der Literatur nicht. Grundsätzlich muss genug Regen fallen, damit es zur Ausbildung der Rinnsale kommen kann. Bei stärkerem Regen wird es zum Abspritzen bzw. Abtropfen von Teilen des Wassers kommen. Inwiefern sich dies auf die

Ausbildung oder Unterbrechung der Rinnsale auswirkt, ist bislang nur unzureichend untersucht worden. Im Modell wird angenommen, dass nur überschüssiges Wasser, welches nicht mehr durch die Rinnsale gebunden werden kann, abtropft oder abspritzt. Damit bleiben die Rinnsale über die gesamte Seillänge erhalten. Folglich werden über die gesamte Seillänge an jedem Diskretisierungspunkt die zu den Rinnsalpositionen gehörigen Auftriebs- und Quertriebskräfte als Last aufgebracht.

Bei den Berechnungen von NAHRATH für die *Erasmusbrücke* erhält er die mit Videokameras beobachteten Schwingungsamplituden, wenn er Rinnsallängen von 50 % der Seillänge ansetzt. Da bei allen bisherigen Modellen die Rinnsalposition über die Seillänge nur unzureichend oder gar nicht abgebildet wird, ist es schwierig, an jeder Stelle des Seiles die einwirkenden Windkräfte richtig abzubilden. Werden die Windkräfte überschätzt, stellen sich für das schwingende Seil zu große Amplituden ein. Durch die Wahl geeigneter Rinnsallängen können die Energieeinträge in das System und somit die Schwingungsamplituden der Schrägseile in gewissen Grenzen gesteuert werden.

Mangels guter Beobachtungen zu diesem Parameter wird die in dieser Arbeit verwendete Rinnsallänge den meisten Publikationen folgend mit 100 % der Seillänge angenommen.

### 8.1.2 Rinnsalmasse

Zur Modellierung der Rinnsalmasse gibt es in der Literatur unterschiedliche Angaben, die sich jedoch teilweise deutlich unterscheiden. ROBRA geht bei der Modellierung der Rinnsale davon aus, dass die Rinnsale jeweils etwa 1% der Massenbelegung der Schrägseile ausmachen. Dies entspricht bei der *Erasmusbrücke* einer Massenbelegung von etwa 60 g/m.

NAHRATH führt seine aerodynamischen Versuche an einem PVC-Rohr mit einem Außendurchmesser von 110 mm mit künstlichen Rinnsalen durch, die einer Massenbelegung von 60 g/m beim oberen und 80 g/m beim unteren Rinnsal entsprechen. Da das Proberohr deutlich kleiner ist als die zu untersuchenden Seile der *Erasmusbrücke*, vergrößert er die Rinnsale in der Simulation, um ähnliche Strömungsverhältnisse zu gewährleisten. Dieser Schritt ist notwendig um die im Windkanal ermittelten aerodynamischen Beiwerte verwenden zu können. Die gewählten Massen der Rinnsale betragen bei ihm mit diesem Ansatz 100 g/m für das obere und 120 g/m für das untere Rinnsal. ROBERTSON und TAYLOR nehmen in [R3] ein trapezoides, künstliches Rinnsal an. Bei Anwendung auf die *Erasmusbrücke* Rotterdam erhält man eine Massenbelegung für



die Rinnsale von etwa  $95 \text{ g/m}$ .

Die Parameterstudien in [N1] zeigen, dass das phänomenologische Verhalten des Systems auch bei relativ starker Variation dieser Parameter qualitativ immer gleich bleibt. In dieser Arbeit werden im weiteren Verlauf die von NAHRATH angegebenen Massenbelegungen von  $\mu_{R1} = 0,10 \text{ kg/m}$  für das obere Rinnsal und  $\mu_{R2} = 0,12 \text{ kg/m}$  für das untere Rinnsal verwendet, da diese Werte speziell für das gewählte Berechnungsbeispiel ermittelt wurden und die Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte nur für die zugehörigen, ähnlichen Strömungsverhältnisse gültig ist.

### 8.1.3 Rinnsaldämpfung

Für die Dämpfung der Rinnsale auf der Seiloberfläche werden in der Literatur Dämpfungskonstanten angenommen. Da die Modellierung des Rinnsals auf unterschiedliche Weise erfolgt, liegen auch für die Rinnsaldämpfung verschiedene Angaben vor, die sich ineinander überführen lassen. Beispielsweise ist der Dämpfungsparameter zur Berechnung der Scherwirkung zwischen Seil und Rinnsal in [N1] ein von PEIL angegebener Wert  $d_\varphi = 0,025 \text{ Nms/m}$  und in [D2] ein Koeffizient  $\lambda_r = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Beide Angaben wurden experimentell ermittelt. Dabei wurde an einem rotierenden Rohr die Auslenkung des unteren Rinnsals in Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit des Rohres gemessen. Dieser Versuch wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausgewertet. Ein direkter Vergleich der beiden Angaben gestaltet sich jedoch schwierig, da sich einerseits das Rinnsal als beweglicher Starrkörper auf der Seiloberfläche bewegt, während bei DREYER die Modellierung mit Hilfe vereinfachter NAVIER-STOKES-Gleichungen erfolgt.

Die in [N1] verwendete Dämpfungskonstante  $d_\varphi$  ist zugehörig zum Ansatz der Momentengleichgewichte bezogen auf einen Meter Rinnsallänge. Das aus Scherkraft zwischen Seiloberfläche und Rinnsal resultierende Moment ergibt sich proportional zur Winkelgeschwindigkeit:

$$M_D = d_\varphi \cdot \dot{\varphi} \tag{8.1}$$

ROBRA wählt für den Dämpfungsbeiwert einen ähnlichen Ansatz. Überführt man die in [R4] gewählte Darstellung der Rinnsaldämpfung in die Form von (8.1), erhält man

für den Beiwert  $d_\varphi$ :

$$d_\varphi = 2m_r R^2 \zeta_\varphi \omega_\varphi \quad (8.2)$$

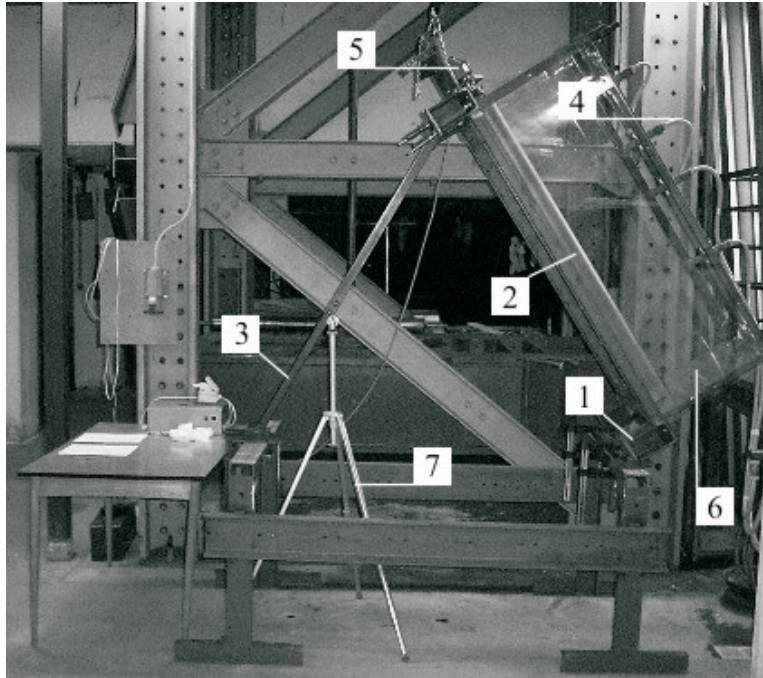
In [R4] erhält man die Dämpfungsvariable  $\zeta_\varphi$  und die Rinnsaleigenkreisfrequenz  $\omega_\varphi$  erst nach der Wahl einer sogenannten Amplitudenübertragung und einer Phasenverschiebung. Für das Seil 13 der *Erasmusbrücke* liefert die Auswertung der Eingangsdaten Dämpfungskonstanten zwischen  $d_\varphi = 0,005 \text{ Nms/m}$  und  $d_\varphi = 0,02 \text{ Nms/m}$ . Im Vergleich zu NAHRATH, bei dem ein konstanter Wert für die Rinnsaldämpfung angesetzt wird, liegen die Werte in [R4] somit zwischen 20 und 80 % unter den in [N1] angegebenen Werten der Rinnsaldämpfung. Die Streubreite für diesen Parameter schwankt somit deutlich.

In dieser Arbeit wird nach Wissen des Autors erstmals ein direkt geschwindigkeitsabhängiger Dämpfungswert eingeführt, da eine Auswertung von Literaturangaben zur Bestimmung des Dämpfungsparameters diesen Zusammenhang zeigt. In Anlehnung an die von NAHRATH gewählte Modellierung lässt sich die Rinnsaldämpfung somit in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit wie folgt darstellen:

$$M_D = d_\varphi(\dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} \quad (8.3)$$

Die Bestimmung dieser neuen Variablen  $d_\varphi(\dot{\varphi})$  erfolgt anhand eines Versuches, der von DREYER durchgeführt wurde. Ein rotierendes Rohr wird dabei beregnet. In Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit des Rohres ändert sich die quasistatische Gleichgewichtslage des sich bildenden Rinnsals. Ohne Rotation oder ohne Reibung würde das Rinnsal der Schwerkraft folgend genau an der Unterseite des Rohres hängen. Je größer die Scherwirkung zwischen Seil und Rinnsal ist, desto weiter wird das Rinnsal nach oben mitgenommen. Diese Scherwirkung ist vergleichbar einer Dämpfung. Obwohl sich bei den Regen-Wind-induzierten Schwingungen die Rinnsale auf der Seiloberfläche bewegen, liefert dieser Versuch zutreffende Dämpfungswerte, da allein die Relativgeschwindigkeit zwischen Rinnsal und Seiloberfläche für die Dämpfung entscheidend ist.

In den dokumentierten 6 Versuchsreihen führt DREYER die Untersuchungen an verschieden geneigten, beschichteten Stahlzylindern und an Polyethylenzylindern durch, siehe Abbildung 8.1. Die Ergebnisse für die Versuche sind in Abbildung 8.2 dargestellt. Dabei sind jeweils für die Seilneigungen  $\delta = 38^\circ, 45^\circ$  und  $52^\circ$  die quasistatischen Auslenkungen der Rinnsale für sieben Rotationsgeschwindigkeiten des Zylinders bei beiden Oberflächenmaterialien ermittelt worden.



1 Einspannvorrichtung; 2 Zylinder; 3 Neigevorrichtung  
 4 Berechnungsanlage; 5 Elektromotor; 6 Plexiglasscheiben; 7 Kamerastativ  
 Bild 8.1: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Rinnsaldämpfung nach [D2]

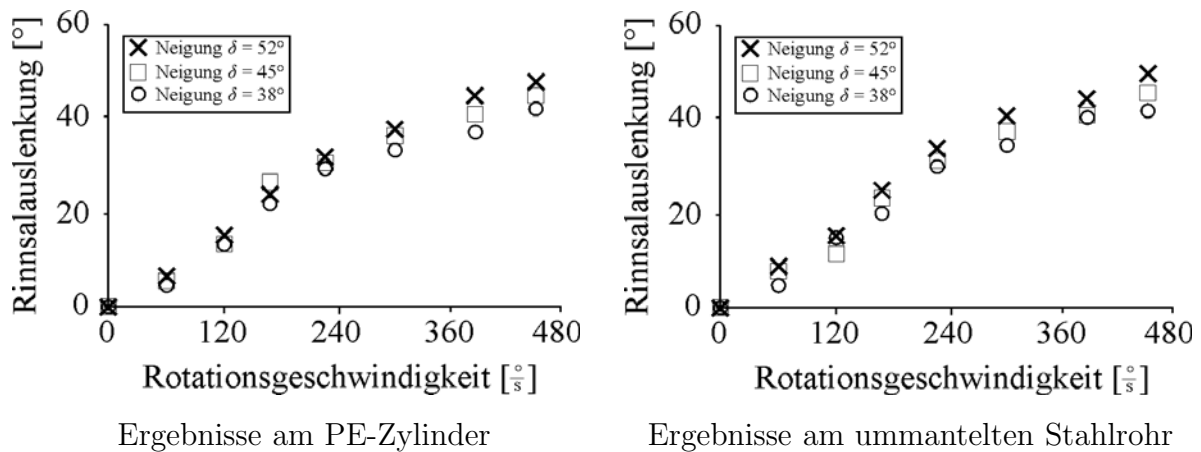


Bild 8.2: Ergebnisse des Versuchs zur Bestimmung der Rinnsaldämpfung nach [D2]

Im Rahmen dieser Arbeit wird dieser Versuch ausgewertet und ein Dämpfungswert  $d_\varphi$  angegeben, der keine Konstante, sondern eine winkelgeschwindigkeitsabhängige Größe sein wird. Da bei vorliegender Versuchsanordnung außer dem rotierenden Zylinder keine weiteren dynamischen Anteile auftreten, stellt sich die Position des Rinnsals als Folge des Gleichgewichts aus Eigengewicht und Reibung zwischen Zylinder und Rinnsal ein. Das Abfließen des Rinnsals in Seillängsrichtung (x-Richtung) wird hierbei vernachlässigt. Damit bleibt das Aufstellen des Gleichgewichtes am Seilquerschnitt in der y-z-Ebene, siehe Abbildung 8.3.

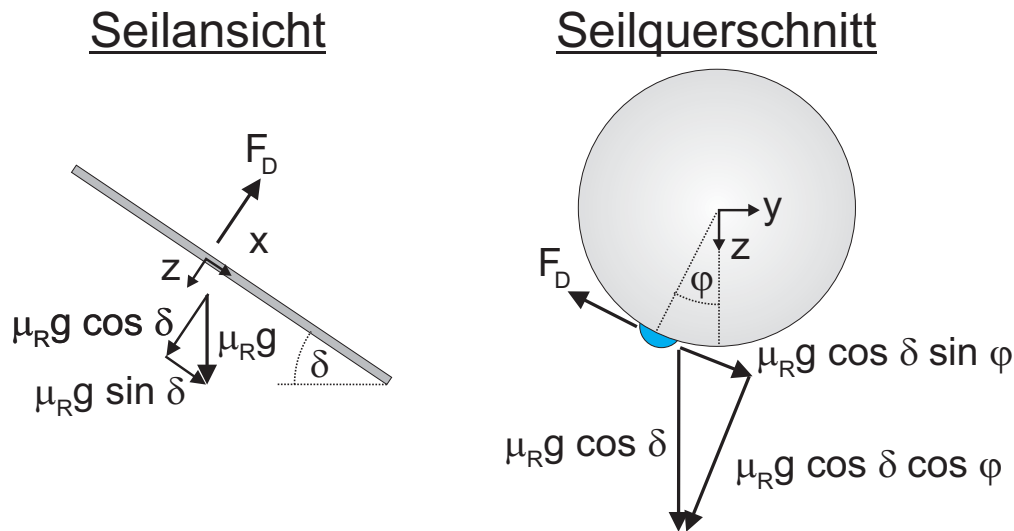


Bild 8.3: Kräftezerlegung zur Bestimmung der Rinnsaldämpfung

Der von DREYER verwendete Versuchszylinder hat einen Durchmesser von  $d^* = 10$  cm. Das Aufstellen des Gleichgewichtes der radialen Kräfte darf an dieser Stelle entfallen, da im Modell vorausgesetzt wird, dass die Adhäsionskräfte während des Versuches das Haftbleiben des Rinnsals an der Seiloberfläche gewährleisten. Da die Höhe des Rinnsals im Vergleich zum Seilradius sehr klein ist, haben die Reibungskraft und die tangentialen Gewichtskraft nahezu den gleichen Hebelarm bezüglich des Seilmittelpunktes. Somit liefert die Betrachtung des Momentengleichgewichtes und des Kräftegleichgewichtes in tangentialer Richtung die gleichen Erkenntnisse. Das Momentengleichgewicht für das Rinnsal liefert mit der Dämpfungs- oder Reibungskraft  $F_D$  und dem Eigengewicht des Rinnsals  $\mu$  bei einer Seilneigung  $\delta$  und dem Seilradius  $r$ :

$$\Sigma M = 0 : \quad F_D \cdot r = \mu_R \cdot g \cdot \cos \delta \sin \varphi \cdot r \quad (8.4)$$

In Gl. (8.4) ist die Dämpfungskraft  $F_D$  eine Streckenlast in  $[N/m]$ . Die Experimentaldaten aus [D2] werden zur Auswertung der Versuche durch \* gekennzeichnet. Unter Verwendung des in Gleichung (3.2) gewählten massenproportionalen Ansatz erhält man aus (8.4) mit der Einführung der neuen Variablen  $\tilde{d}_\varphi = 2 \cdot \xi_\varphi \cdot \omega_\varphi$  und der Umrechnung der relativen Bahngeschwindigkeit  $\dot{v}$  in eine Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ :

$$F_D^* = \tilde{d}_\varphi \cdot \dot{v} = \underbrace{2 \cdot \xi_\varphi \cdot \omega_\varphi \cdot \mu_R^*}_{\tilde{d}_\varphi} \cdot \dot{v} = \tilde{d}_\varphi \cdot \mu_R^* \cdot r^* \cdot \dot{\varphi} = \mu_R^* \cdot g \cdot \cos \delta \sin \varphi \quad (8.5)$$

Der letzte Teil der Gl. (8.5) führt zunächst auf die Dämpfungsgröße  $\tilde{d}_\varphi$ , die neben den konstanten Versuchsgrößen der Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ , dem Seilradius  $r^* = 5 \text{ cm}$  und dem Neigungswinkel des Seils  $\delta$  nur noch die gemessenen Größen  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  enthält.

$$\tilde{d}_\varphi(\dot{\varphi}) = \frac{g \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi}{\dot{\varphi} \cdot r^*} \quad (8.6)$$

Die Anwendung der Dämpfungsvariablen  $\tilde{d}_\varphi$  auf beliebige Seile liefert nach Gl. (8.4) das gesuchte Dämpfungsmoment in folgender Darstellung:

$$M_D = F_D \cdot r = \underbrace{\tilde{d}_\varphi(\dot{\varphi}) \cdot \mu_R \cdot r^2}_{d_\varphi(\dot{\varphi})} \cdot \dot{\varphi} = d_\varphi(\dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} \quad (8.7)$$

Somit ergibt sich die Dämpfungsvariable  $d_\varphi(\dot{\varphi})$  zur Darstellung der Scherwirkung zwischen Seil und Rinnsal zu:

$$d_\varphi(\dot{\varphi}) = \tilde{d}_\varphi(\dot{\varphi}) \cdot \mu_R \cdot r^2 \quad (8.8)$$

In (8.7) und (8.8) sind für die zu untersuchenden Seile die jeweils zugehörigen Massenbelegungen der Rinnsale  $\mu_R$  und der jeweils zu betrachtende Seilradius  $r$  zu verwenden, nicht die durch \* gekennzeichneten Experimentalgrößen aus [D2].

Diese Dämpfungsvariable besitzt streng genommen nur Gültigkeit für die Oberflächeneigenschaften der im Versuch verwendeten Zylinder. Im Versuch zeigen sich keine großen

Unterschiede zwischen Polyethylen- und kunststoffummanteltem Stahlzylinder. Bei rauerer Oberfläche bedingt durch Alterung oder Bewuchs ist dieser Dämpfungseinfluss entsprechend zu erhöhen, siehe Kapitel 3.2.6. Bei neueren Seilen oder glatteren Oberflächenmaterialien sind die Werte abzumindern. Dazu sind weitere Versuche mit verschiedenen Rauigkeiten und Neigungswinkeln der Seile durchzuführen. Da zur Oberflächenbeschaffenheit der Seile der *Erasmusbrücke* keine detaillierten Angaben dokumentiert sind, werden die Simulationen mit den aus dem Versuch von DREYER gewonnenen Erkenntnissen durchgeführt, siehe Tabellen 8.1 bis 8.3.

Die Berechnung von  $\tilde{d}_\varphi$  und  $d_\varphi$  erfolgt für alle Neigungswinkel am Polyethylenzylinder und am beschichteten Stahlzylinder. Für die Berechnung der Dämpfungswerte werden die in Kapitel 8.1.2 angegebenen Rinnsalmassen verwendet. Aus diesem Grund erhält man für das obere und untere Rinnsal verschiedene Kurven. Bei den leichteren, oberen Rinnsalen ist die Rinnsaldämpfung somit kleiner. Die Darstellung dieser Kurven in den Abbildungen 8.4 bis 8.6 erfolgt über Spline-Funktionen.

Die Auswertung der Ergebnisse zeigt, dass die Rinnsaldämpfung in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit variiert. Der Variationsbereich liegt je nach Seilneigung bei den angenommenen Rinnsalmassen zwischen  $d_\varphi = 0,013 \text{ Nms/m}$  und  $d_\varphi = 0,027 \text{ Nms/m}$ , siehe Abb. 8.4 bis 8.6. Damit lassen sich die von NAHRATH und ROBRA angegebenen Werte weitestgehend bestätigen, wenn man davon absieht, dass konstante Rinnsaldämpfungen angesetzt werden. Die Ergebnisse zeigen unabhängig von der Seilneigung, dass bei einer Winkelgeschwindigkeit von etwa  $\dot{\varphi} = 200^\circ/s$  die maximalen Dämpfungswerte auftreten. Die Abnahme der Dämpfungswerte bei größeren Winkelgeschwindigkeiten erklärt sich durch die Ausbildung eines geschlossenen Wasserfilms auf der Seiloberfläche und einer Wulst, siehe Kapitel 3.2.2, so dass die Bewegung der Rinnsale weniger Reibungskräfte hervorruft als vergleichsweise das Rinnsal allein auf der PE-Oberfläche. Der Wasserfilm wirkt als Gleitschicht.

Die Messreihen enden bei einer Rotationsgeschwindigkeit des Probezylinders von  $\dot{\varphi} = 60^\circ/s$ . Aussagen über den Bereich mit Winkelgeschwindigkeiten kleiner als  $60^\circ/s$  sind somit nur schwer möglich, da dort keine weiteren Versuchsergebnisse vorliegen. Von dieser unteren Grenze bis zu einer Winkelgeschwindigkeit von etwa  $\dot{\varphi} = 120^\circ/s$  zeigen sich in Abhängigkeit der Seilneigung qualitativ verschiedene Verhaltensweisen. Bei der flachsten Seilneigung von  $\delta = 38^\circ$  scheinen die Dämpfungswerte mit sinkender Winkelgeschwindigkeit noch kleiner zu werden, während bei steileren Seilen das Verhalten der Dämpfung sich eher konstant andeutet oder gar wieder ansteigende Tendenzen zeigt.

Dämpfungswerte für Rinnsalgeschwindigkeiten kleiner als  $60^\circ/\text{s}$  müssen mangels fehlender Versuchsergebnisse für die einzelnen Seilneigungen angenommen werden.

Winkel- geschwindig- keit $\dot{\varphi}$ [ $^\circ/\text{s}$ ]	PE-Zylinder		ummanteltes Stahlrohr		Mittel- wert $\tilde{d}_\varphi$ [1/s]	oberes Rinnsal $d_{\varphi 1}$ [Nms/m]	unteres Rinnsal $d_{\varphi 2}$ [Nms/m]
	$\varphi$ [ $^\circ$ ]	$\tilde{d}_\varphi$ [1/s]	$\varphi$ [ $^\circ$ ]	$\tilde{d}_\varphi$ [1/s]			
60	5	12,9	5	12,9	12,9	0,014	0,017
120	13,5	17,2	14,5	18,5	17,9	0,020	0,024
170	22,5	19,9	21,5	19,1	19,5	0,022	0,026
225	30	19,7	30	19,7	19,7	0,022	0,026
300	34	16,5	35	16,9	16,7	0,018	0,022
380	37,5	14,2	40	15,0	14,6	0,016	0,019
400	42,5	13,3	42	13,2	13,2	0,015	0,018

Tab. 8.1: Messergebnisse und Rinnsaldämpfungen für die Seilneigung von  $\delta = 38^\circ$

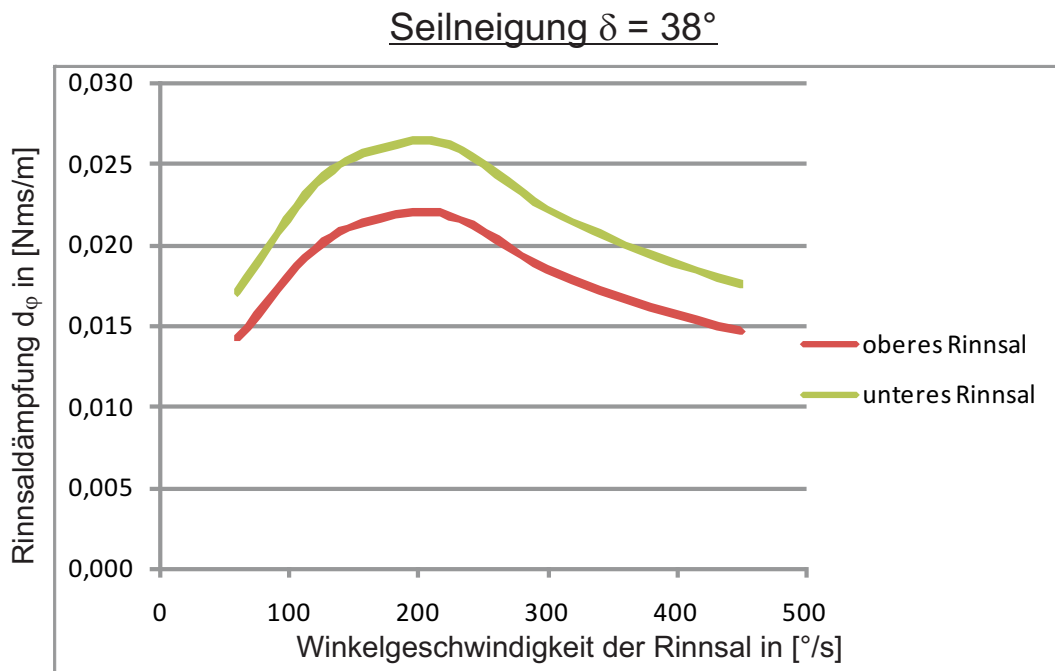
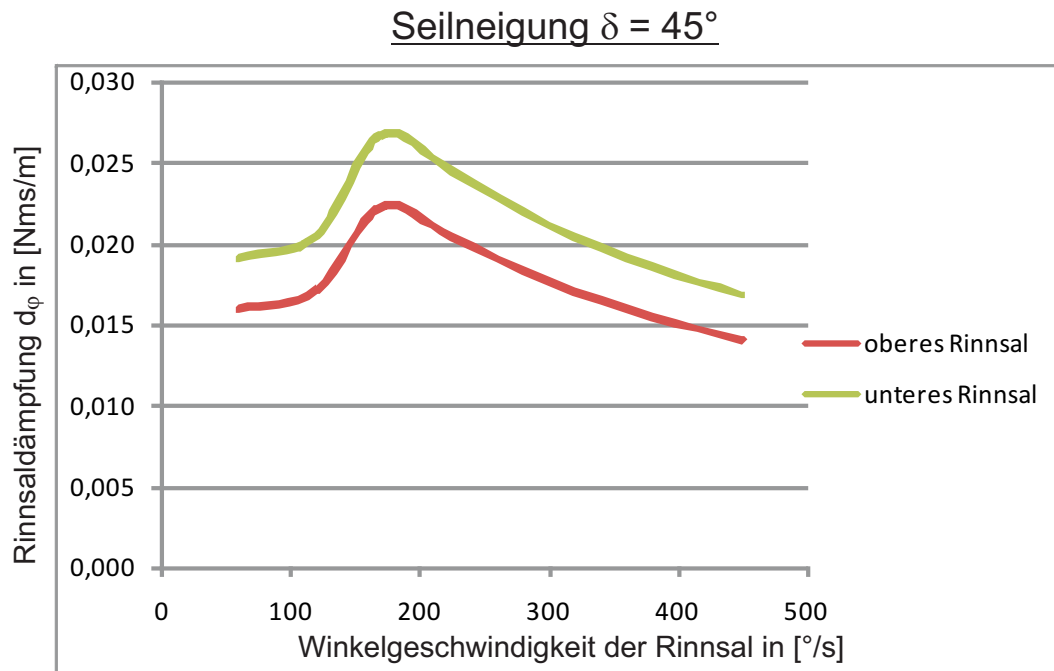


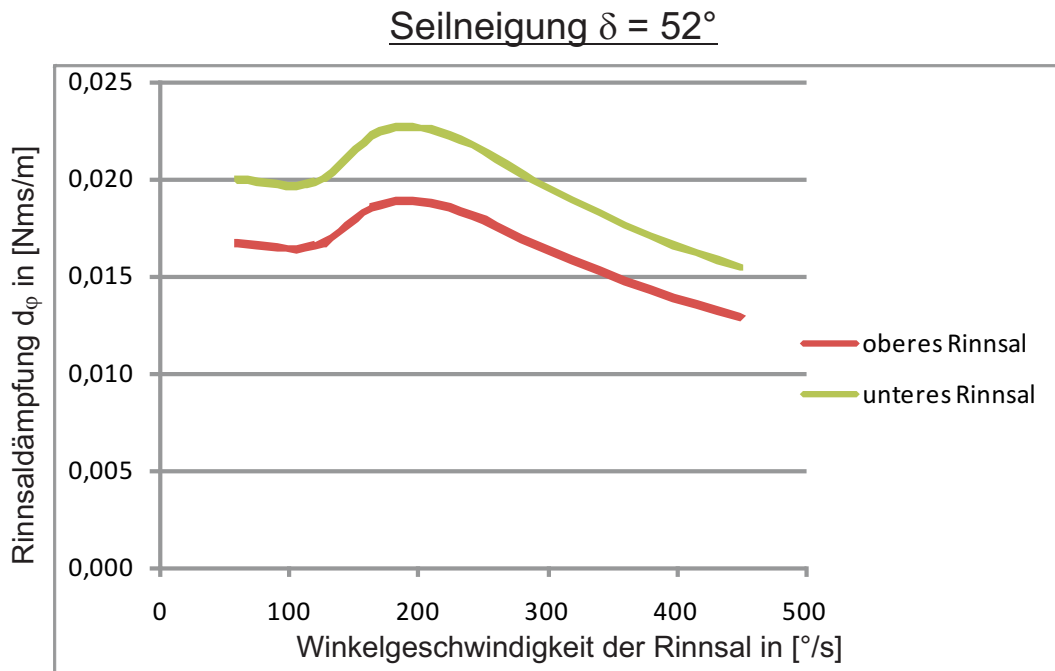
Bild 8.4: Rinnsaldämpfung  $d_\varphi$  für eine Seilneigung von  $\delta = 38^\circ$

Winkel- geschwindig- keit $\dot{\varphi}$ [°/s]	PE-Zylinder		ummanteltes Stahlrohr		Mittel- wert $\tilde{d}_{\varphi}$ [1/s]	oberes	unteres
	$\varphi$ [°]	$\tilde{d}_{\varphi}$ [1/s]	$\varphi$ [°]	$\tilde{d}_{\varphi}$ [1/s]		Rinnsal $d_{\varphi 1}$ [Nms/m]	Rinnsal $d_{\varphi 2}$ [Nms/m]
60	6	13,8	6,5	15,0	14,4	0,016	0,019
120	14	16,0	13	14,9	15,5	0,017	0,020
170	27	21,2	24	19,0	20,1	0,022	0,027
225	31,5	18,5	31,5	18,5	18,5	0,020	0,024
300	36,5	15,8	37,5	16,1	16,0	0,018	0,021
380	42	14,0	42	15,0	14,0	0,015	0,019
400	46	12,7	46	13,2	12,7	0,014	0,014

Tab. 8.2: Messergebnisse und Rinnsaldämpfungen für die Seilneigung von  $\delta = 45^\circ$ Bild 8.5: Rinnsaldämpfung für eine Seilneigung von  $\delta = 45^\circ$



Winkel- geschwindig- keit $\dot{\varphi}$ [°/s]	PE-Zylinder		ummanteltes Stahlrohr		Mittel- wert $\tilde{d}_{\varphi}$ [1/s]	oberes Rinnsal $d_{\varphi 1}$ [Nms/m]	unteres Rinnsal $d_{\varphi 2}$ [Nms/m]
	$\varphi$ [°]	$\tilde{d}_{\varphi}$ [1/s]	$\varphi$ [°]	$\tilde{d}_{\varphi}$ [1/s]		$d_{\varphi 1}$ [Nms/m]	$d_{\varphi 2}$ [Nms/m]
60	7	14,1	8	16,0	15,0	0,017	0,020
120	15	14,9	15	15,0	15,0	0,016	0,020
170	24	16,6	25	17,2	16,9	0,019	0,022
225	32	16,3	34	17,2	16,8	0,018	0,022
300	38,5	14,4	41	15,1	14,8	0,016	0,020
380	45	12,9	45	15,0	12,9	0,014	0,017
400	48,5	11,5	50	11,8	11,7	0,013	0,016

Tab. 8.3: Messergebnisse und Rinnsaldämpfungen für die Seilneigung von  $\delta = 52^\circ$ Bild 8.6: Rinnsaldämpfung für eine Seilneigung von  $\delta = 52^\circ$

Gerade der Bereich kleiner Winkelgeschwindigkeiten, für den keine Messergebnisse vorliegen, ist leider für die Simulation Regen-Wind-induzierter Schwingungen interessant. Durch das harmonische Schwingungsverhalten der Rinnsale wechseln die Rinnsale zweimal pro Schwingungsperiode die Richtung, so dass regelmäßig die Winkelgeschwindigkeiten der Rinnsale betragsmäßig im Bereich um  $\dot{\varphi} = 0^\circ/s$  liegen. Aus diesem Grund sollten weitere Untersuchungen für den Bereich kleiner Winkelgeschwindigkeiten und auch für andere Seilneigungen durchgeführt werden, um das Dämpfungsverhalten zwischen Rinnsal und Seiloberfläche besser beschreiben zu können.

Bei der Simulation werden die Dämpfungswerte des um  $\delta = 38^\circ$  geneigten Seiles verwendet, da es der Seilneigung des Seils 13 der *Erasmusbrücke* am nächsten kommt. Für die Rinnsalgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = 0 \text{ m/s}$  wird ein Dämpfungswert für das obere Rinnsal von  $d_{\varphi 1} = 0,010 \text{ Nms/m}$  angenommen, der sich näherungsweise durch Verlängern des Graphen in Abb. 8.4 ergibt. Für Rinnsalgeschwindigkeiten zwischen den Fixwerten aus den Versuchen wird mittels Spline-Funktionen interpoliert, um die benötigten Dämpfungswerte  $d_\varphi$  für die Rinnsale während der Berechnung zu erhalten.

#### 8.1.4 Zusammenfassung der Rinnsaldaten

Für die drei zu bestimmenden Eigenschaften der Rinnsale gibt es in der Literatur jeweils unterschiedliche Angaben, die sich stark unterscheiden.

- Die Rinnsallänge variiert zwischen 50 und 100% der Seillänge; in der eigenen Simulation wird 100% angenommen.
- Die Rinnsalmassen  $\mu_R$  werden für das Seil 13 der Erasmusbrücke mit Werten zwischen  $60 \text{ g/m}$  und  $120 \text{ g/m}$  angegeben. Angesetzt wird für das obere Rinnsal eine Massenbelegung von  $\mu_{R1} = 100 \text{ g/m}$  und für das untere Rinnsal  $\mu_{R2} = 120 \text{ g/m}$ .
- Die Scherkraft zwischen Seil und Rinnsal wird durch eine Dämpfungskonstante  $d_\varphi$  abgebildet, deren Angaben zwischen  $0,005 \text{ Nms/m}$  und  $0,025 \text{ Nms/m}$  variieren. In die Berechnungen geht erstmals eine geschwindigkeitsabhängige Dämpfung  $d_\varphi(\dot{\varphi})$  ein, wie in Abb. 8.4 dargestellt.

Da es sich bedingt durch die Kopplungen und die Selbstanregung um relativ empfindliche Differentialgleichungssysteme handelt, sind Auswirkungen bei Änderung vieler Ein-

gangsdaten auf die Schwingungen von den Rinnsalen und vom Seil beachtlich. Die Wahl der Parameter hat einen entscheidenden Einfluss auf die Amplituden und auch auf das kinetische Stabilitätsverhalten des schwingenden Seils.

## 8.2 Seildaten und Anströmung

In der Literatur existieren mehrere Berechnungsbeispiele zur *Erasmusbrücke*, deren Ergebnisse miteinander verglichen werden. Dabei wurden jedoch teilweise verschiedene Eingangsdaten verwendet. Beispielsweise wurden die meisten Rechnungen von ROBRA für das Seil 15 durchgeführt, während in [N1] und [D2] die Schwingungen des Seils 13 berechnet wurden.

### 8.2.1 Seileigenschaften

Im Rahmen dieser Arbeit sollen die Schwingungen des Seils 13 der *Erasmusbrücke* untersucht werden, da für dieses Seil die meisten Ergebnisse und Beobachtungen vorliegen. Die angegebene Seillänge in den Quellen [R4], [N1] und [D2] beträgt einheitlich 250 m. Bei allen anderen Seileigenschaften sind die Angaben mit unterschiedlich großen Abweichungen zueinander angegeben. ROBRA gibt für dieses Seil eine Seilneigung von  $24^\circ$  und eine Massenbelegung von  $58 \text{ kg/m}$  an, während NAHRATH und DREYER Eingangswerte von GEURTS übernehmen. Diese weichen bei einer Seilneigung von  $30^\circ$  recht stark und bei einer Massenbelegung von  $60 \text{ kg/m}$  kaum von den Werten nach [R4] ab. Die angegebenen Seildurchmesser variieren mit 21 cm nach [G1] und 20 cm nach [R4] ebenfalls nur in begrenztem Maße, siehe Tab. 8.4.

Angaben zu Querschnittsflächen, Seilvorspannung und Dehnsteifigkeit findet man gut sortiert und vollständig in [R4]. Angaben darüber, welche Kräfte durch die Verfüllung der Seile bzw. durch die Kunststoff-Ummantelung aufgenommen werden, existieren nicht. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit nur die Stahllitzen als tragend angesehen.

Bei der Dämpfung sind die Unterschiede hingegen deutlich größer. Die Angaben in der Literatur zur Eigendämpfung des Seils im LEHRschen Dämpfungsmaß gehen von  $\xi = 0,10\%$  bis  $\xi = 0,30\%$ . Vergleicht man die Eingangsdaten zwischen NAHRATH und DREYER, stellt man fest, dass zwar in beiden Fällen das LEHRsche Dämpfungsmaß ver-

Quelle	Länge [m]	stat. Seilkraft [kN]	Stahl- fläche [m <sup>2</sup> ]	Masse [kg]	Dehn- steifigkeit [N]	Seil- durchmesser [cm]	Seil- neigung [°]
ROBRA	250	2262	0,0066	58	$1,286 \cdot 10^9$	20	24
NAHRATH	250	—	—	60	—	21	30
DREYER	250	—	—	60	—	21	30

Tab. 8.4: Übersicht der allgemeinen Seileigenschaften

wendet wurde, jedoch verschiedenen Frequenzen zugeordnet wurde, so dass sich letztlich nach Gl. (3.2) unterschiedliche Dämpfungskonstanten  $d$  ergeben<sup>1</sup>. Die von NAHRATH angegebene Dämpfungskonstante  $d$  ist beispielsweise mehr als doppelt so groß wie die bei DREYER. Das größte in der Literatur angegebene Dämpfungsmass für die *Erasmusbrücke* ist der in [R2] dokumentierte Wert mit  $\xi = 0,3\%$ , der im zweiten Eigenmodus gemessen wurde. Dabei ist nicht angegeben, an welchem Seil die Messung durchgeführt wurde.

Das qualitative und quantitative Schwingungsverhalten in der Simulation kann bei dieser starken Änderung der Dämpfungswerte gravierend beeinflusst werden. Zur Klärung des tatsächlichen Dämpfungsverhaltens müssten Ausschwingversuche in verschiedenen Schwingungsformen durchgeführt werden.

Quelle	Dämpfung $\xi$ [%]	Frequenz [Hz]	Scruton- -Zahl [-]	Windan- strömwinkel [°]	Windge- schwindigkeit [m/s]
ROBRA	0,10	0,79 (2.EF)	15	25	14
NAHRATH	0,20	0,83 (2.EF)	25	25	14
DREYER	0,15	0,45 (1.EF)	21	25	14
REUSINK	0,30	(2.EF)	-	-	-

Tab. 8.5: Dämpfungswerte und Strömungsverhältnisse

<sup>1</sup>Im Gegensatz zu Gl. (3.2) ist die in der Seilgleichung verwendete Dämpfungskonstante  $d$  nach Division durch die Elementlänge  $\Delta l$  auf einen Meter Länge bezogen.

### 8.2.2 Umweltbedingungen

Die Anströmverhältnisse an der Brücke sind sehr einheitlich in der Literatur dokumentiert. In allen Quellen wird eine Windgeschwindigkeit von  $U_0 = 14 \text{ m/s}$  unter einem Anströmwinkel von  $\gamma = 25^\circ$  angesetzt.

## 8.3 Übersicht relevanter Parameter und Eingangsgrößen

Ausgehend vom Kräftegleichgewicht am Seilelement ist das Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Seilschwingungen und vom Momentengleichgewicht am Seilquerschnitt das Differentialgleichungssystem der Rinnsale aufgestellt worden. Als bestimmende Zustandsgrößen der Regen-Wind-induzierten Schwingungen können somit die Lage der Seilknoten -definiert durch den Verschiebungsvektor  $\mathbf{V}$ - und die Position der Rinnsale  $\Phi$  an den Seilknoten mit den zugehörigen Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{V}}$  und  $\dot{\Phi}$  sowie den Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{V}}$  und  $\ddot{\Phi}$  angegeben werden.

Auf das betrachtete abgeschlossene System wirken von außen als äußere Umwelteinflüsse die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , die Dichte der Luft  $\rho_L = 1,225 \text{ kg/m}^3$ , eine konstante Windgeschwindigkeit  $U_0 = 14 \text{ m/s}$  und eine nicht näher definierte, aber konstante Regenintensität ein, die ausreicht, um während der gesamten Simulationsdauer Rinnsale bilden zu können.

An unabhängigen, konstanten Systemparametern für das Seil 13 werden die Werte von ROBRA verwendet, da sie am nachvollziehbarsten dokumentiert sind:

- die Massenbelegung des Seiles  $\mu = 58 \text{ kg/m}$ ,
- die Massenbelegungen der Rinnsale  $\mu_{R,1} = 0,10 \text{ kg/m}$  und  $\mu_{R,2} = 0,12 \text{ kg/m}$ ,
- die statische Seilkraft in Seilmitte  $T = 2262 \text{ kN}$ ,
- die Seilneigung  $\delta = 24^\circ$ ,
- der Winkel der Windanströmung  $\gamma = 25^\circ$ ,
- der Seildurchmesser  $D = 20 \text{ cm}$ ,
- der Abstand der Auflagerpunkte  $l = 250,00 \text{ m}$ ,
- die Stahlfläche des ungedehnten Seilquerschnitts  $A_0 = 0,0066 \text{ m}^2$ ,

- die Dehnsteifigkeit des Querschnitts  $EA = 1,286 \cdot 10^9 \text{ N}$  und
- für den gewählten Ansatz die Dämpfungskonstante des Seiles im LEHRschen Dämpfungsmaß  $\xi = 0,15\%$

Als sogenannte Zwischengrößen werden all die Größen bezeichnet, die sich zeitveränderlich aus den Zustandsgrößen und den Eingangsparametern ermitteln lassen. Dazu zählen beispielsweise die Rinnsaldämpfung  $d_\varphi$ , die relative Windgeschwindigkeit  $U_{rel}$  und die aerodynamischen Beiwerte  $C_D$ ,  $C_L$  und  $C_M$  zur Bestimmung der Wirkungen des Windes, die sowohl von der Position der Rinnsale als auch von den Strukturgeschwindigkeiten des Seiles und der Rinnsale abhängen. Somit liefern diese Zwischengrößen diverse Kopplungen zwischen der Rinnsal- und der Seilbewegung. Die genannten Variablen müssen wie die zeit- und verschiebungsabhängigen Matrizen in jedem Zeitschritt an jedem Knoten vollständig ermittelt werden.

## 9 Berechnungen zur Erasmusbrücke

### 9.1 Übersicht

In [R4] sind für das Seil 13 der *Erasmusbrücke* Schwingungen in der 2. Eigenform mit Doppellamplituden von bis zu 1,2 m dokumentiert. Für die Seile 9 bis 12 dieser Brücke wurden mit Hilfe von Videoaufnahmen Amplituden von 0,33 m bis 0,67 m in der zweiten und dritten Eigenform, siehe Tab. 2.1, festgestellt. In [R2] sind Schwingungen bis zum 4-fachen Seildurchmesser von etwa 0,80 m verzeichnet.



Bild 9.1: Die Erasmusbrücke in Rotterdam (Niederlande)

Die Berechnungen in dieser Arbeit werden aus Gründen der Vergleichbarkeit für das Seil 13 der *Erasmusbrücke* durchgeführt, da zu diesem Seil Beobachtungen dokumentiert sind und NAHRATH [N1] und DREYER [D2] Simulationen mit verschiedenen Verfahren durchgeführt haben. Aufgrund unterschiedlicher Quellenangaben zu diesem Seil wurden die in dieser Arbeit verwendeten Seildaten im Kapitel 8.3 bereits zusammengefasst. Grundlage für die dynamischen Simulationen ist die Berechnung des Eigengewichtszustandes und der Eigenkreisfrequenzen des betrachteten Seiles im Kapitel 9.2. Danach werden die Untersuchungen zu den Regen-Wind-induzierten Schwingungen mit dem

Grundmodell durchgeführt. Die Ergebnisse werden mit den beobachteten Schwingungen verglichen, da diese in der Literatur der Anregung durch Regen und Wind zugeschrieben werden. Dass möglicherweise auch andere Anregungsarten zu den beobachteten Schwingungen beigetragen haben, wird im Folgenden gezeigt.

Da die Berechnungen der Regen-Wind-induzierten Seilschwingungen mit dem Grundmodell mit Blick auf Angaben in der Literatur zu kleine Amplituden aufweisen, wird einer der Kopplungsparameter in einem modifizierten Modell im Abschnitt 9.3.2 verändert, um sich besser an die beobachteten Amplituden anzunähern. Die Änderung des Modells ist plausibel begründbar, der gewählte Ansatz wird jedoch nicht physikalisch hergeleitet. Da die Rinnsale fluid sind, bewirken die Seilbeschleunigungen nicht ausschließlich Positionsänderungen der Rinnsale, sondern auch Deformationen. Zur Berücksichtigung dieses Umstandes wird ein Reduktionsfaktor  $0 < \chi < 1$  eingeführt, mit dem zwei Grenzbereiche untersucht werden. Ob die Modellierung der Verformungen mit dem Deformationsfaktor  $\chi$  zu ausreichend genauen Ergebnissen führen kann, muss in weiterführenden Arbeiten sowohl mithilfe von Versuchen zur Bestimmung der  $\chi$ -Werte als auch mit Vergleichsberechnungen - beispielsweise unter Einbeziehung der NAVIER-STOKES-Gleichungen - geklärt werden.

Der Bereich kleiner Deformationsfaktoren  $\chi < 0,12$  führt auf zu große Amplituden bei den Seilschwingungen. Die Resultate des zweiten untersuchten Bereiches  $0,75 < \chi < 1$  sind - besonders mit Werten um  $\chi = 0,8$  - scheinbar realistischer.

Dass die beobachteten Schwingungen an den Seilen der *Erasmusbrücke* allein auf eine Anregung durch Regen und Wind hervorgerufen wurden, scheint vor allem unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Kapitel 9.4 nicht mehr gesichert. In diesem Kapitel wird das Seil 13 auf parameterinduzierte Seilschwingungen untersucht, obwohl in [G1] der Einfluss der leichten Bewegung des Brückenüberbaus mit Vertikalamplituden von  $50\text{ mm}$  und einer Erregerfrequenz von  $0,8\text{ Hz}$  als vernachlässigbar angesehen wird und als Anregungsmechanismus für die großen Bewegungsamplituden von GEURTS und VAN STAALDUINEN ausgeschlossen wurde. Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse zu den parametererregten Schwingungen bestätigen diese Aussage nicht. Die berechneten Schwingungen passen hinsichtlich Amplituden und Eigenform gut zu den Beobachtungen. Somit kann die Parametererregung die an der *Erasmusbrücke* beobachteten Schwingungen - durchaus auch zu erheblichen Teilen - mitverursacht haben. Bei künftigen Schwingungsuntersuchungen sollte das mögliche Zusammenwirken beider Anregungsarten berücksichtigt werden.



## 9.2 Bestimmung der Anfangswerte

Wie bei Anfangswertproblemen üblich, müssen die Zustandsgrößen zu Beginn vorgegeben werden. Für deren Bestimmung gibt es im Fall der Regen-Wind-induzierten Schwingungen mehrere Ansatzmöglichkeiten.

- 1. Variante: Das Seil beginnt aus dem Eigengewichtszustand heraus unter gleichzeitig einsetzendem Regen und Wind zu schwingen.
- 2. Variante: Ein nahezu identischer Ansatz wäre, wenn es zunächst regnet und sich ein Gleichgewichtszustand unter Eigengewicht und Regen einstellt und dann der Wind einsetzt.
- 3. Variante: Das Seil befindet sich in einer Gleichgewichtslage unter einer statischen Windlast. Dann beginnt es zu regnen, so dass es zur Bildung von Rinnsalen und zu Regen-Wind-induzierten Schwingungen kommt.
- 4. Variante: Da die Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage stattfinden, ist ein weiterer Ansatz, diese statische Gleichgewichtslage unter Regen und Wind als Ausgangspunkt der Simulation zu nehmen. Nach Aufbringen einer kleinen Störung des Gleichgewichtszustandes kann dann die Stabilität des gewählten Anfangszustandes untersucht werden.

Bei den Varianten 1 bis 3 entsprechen die Anfangswerte nicht den statischen Gleichgewichtslagen, um die die Schwingungen stattfinden. Somit kann nicht mehr von einer kleinen Störung des Anfangszustandes ausgegangen werden. Da dies für Stabilitätsuntersuchungen eine Forderung ist, werden vor Beginn der Simulation die statischen Gleichgewichtslagen sowohl des Seiles als auch der Rinnsale unter der Belastung durch Regen und Wind bestimmt (Variante 4). Die Berechnung erfolgt in drei Abschnitten. Zunächst wird die statische Seilposition unter Eigengewicht und Vorspannung bestimmt. Daraus lassen sich die Eigenkreisfrequenzen und die lineare Steifigkeitsmatrix bestimmen. In einem zweiten Schritt werden für die vorgegebenen Randbedingungen die statischen Gleichgewichtslagen der beiden Rinnsale ermittelt. Abschließend wird die statische Seilposition unter Regen und Wind mit konstanten und aus den statischen Rinnsalpositionen resultierenden Windlasten bestimmt.

## 9.2.1 Die statische Seilposition unter Eigengewicht und Vorspannung

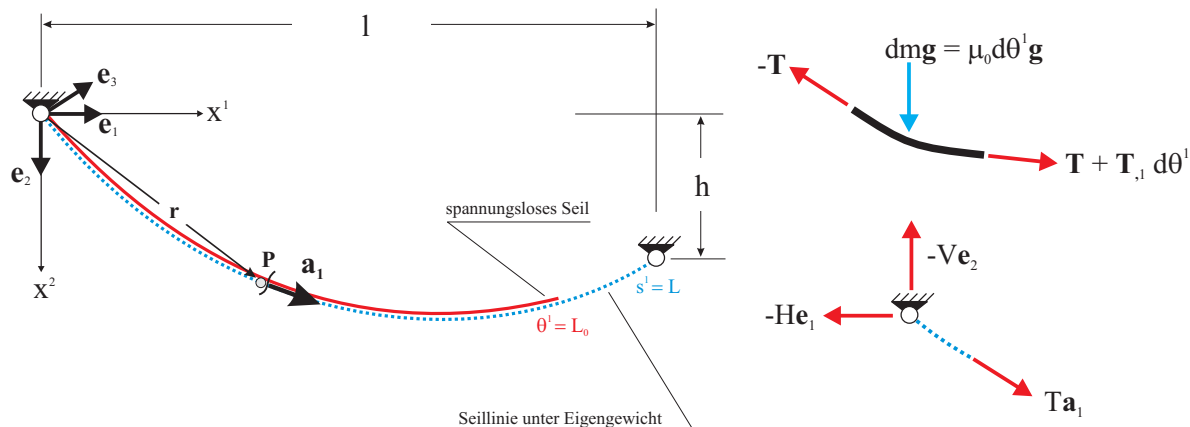


Bild 9.2: Seillinie unter Eigengewicht und Darstellung von Kräftegleichgewichten [T2]

Nach Abspaltung des für sich erfüllten, statischen Eigengewichtszustandes ohne Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteile, wie in Abb. 9.2 dargestellt, erhält man das folgende vektorielle Kräftegleichgewicht nach [T2]:

$$\mathbf{T}_{,1} + \mu_0 \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad [T \mathbf{a}_1]_{,1} = [T \mathbf{r}_{,1}]_{,1} = [T x_{,1}^\alpha \mathbf{e}_\alpha]_{,1} = -\mu_0 g \mathbf{e}_2 \quad (9.1)$$

Ausgehend von Gl. (9.1) erhält man nach Integration die konstante, horizontale Seilkraftkomponente in  $\mathbf{e}_1$ -Richtung und die vom Seilparameter  $\Theta^1$  abhängige, vertikale Seilkraftkomponente in Richtung von  $\mathbf{e}_2$ . Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen am linken Auflager für  $\Theta^1 = 0$  ergeben sich die Integrationskonstanten zu den Auflagerreaktionen in horizontaler und vertikaler Richtung:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 : \quad T x_{,1}^1 &= H \\ \mathbf{e}_2 : \quad T x_{,1}^2 &= -\mu_0 g \Theta^1 + V \end{aligned} \quad (9.2)$$

Die Integration der Gleichung (9.2) liefert die durch  $x^1$  und  $x^2$  beschriebene Seillinie im Eigengewichtszustand. Da die Gleichungen über die von  $\Theta^1$  abhängige Seilkraftkomponente  $T$  gekoppelt sind, handelt es sich um ein transzendentes Gleichungssystem, dessen Lösung sich nur implizit und nicht in analytischer Form finden lässt. Eine auf der physikalischen Seilkraft basierende Näherungslösung fand IRVINE [I1].

Die verwendete Seilkraft  $T$  basiert auf den GREENSchen Längsverzerrungen und bezieht sich auf den ungedehnten Ausgangszustand mit der Seillänge  $L_0$ , während sich die physikalische Seilkraft  $T^*$  aus dem Eigengewichtszustand mit der Seillänge  $L$  darstellen lässt. Somit gilt:

$$\frac{T^*}{ds^1} = \frac{T}{d\Theta^1} \quad (9.3)$$

Über die Normierung des Tangentenvektors  $\mathbf{a}_1$  mittels seines Betrages lassen sich die Seilkräfte ineinander überführen, vgl. [T2]. Aus der anschaulichen Darstellung basierend auf dem Satz von PYTHAGORAS:

$$|\mathbf{a}_1| = \sqrt{(x_{,1}^1)^2 + (x_{,1}^2)^2} = \frac{ds^1}{d\Theta^1} \quad (9.4)$$

folgt

$$T^* = T \frac{ds^1}{d\Theta^1} = T \cdot |\mathbf{a}_1| \quad (9.5)$$

Nach Überführung in die physikalische Seilkraft gilt das bekannte, ausschließlich auf die Längsdehnung reduzierte HOOKESche Werkstoffgesetz:

$$\sigma = E \cdot \epsilon = \frac{F}{A} \quad (9.6)$$

Nach Umstellung und Anwenden auf die statische Seilkraft erhält man die konstitutive Gleichung:

$$T^* = EA_0 \left( \frac{ds^1 - d\Theta^1}{d\Theta^1} \right) \quad (9.7)$$

Die von IRVINE angegebene Lösung für die Seillinie nach der Integration der Gleichgewichtsbedingungen (9.2) mit (9.5) und (9.7) lautet (siehe [I1]):

$$\boxed{\begin{aligned} x^1(\zeta) &= \left[ \frac{G}{EA_0} \zeta + \operatorname{arsh}(\kappa) - \operatorname{arsh} \left( \kappa - \frac{\zeta}{\lambda} \right) \right] \lambda L_0 \\ x^2(\zeta) &= \left[ \frac{G}{EA_0} \zeta (\kappa \lambda - 0.5) + \lambda \left( \sqrt{1 + \kappa^2} - \sqrt{1 + \left( \kappa - \frac{\zeta}{\lambda} \right)^2} \right) \right] L_0 \end{aligned}} \quad (9.8)$$

Unter Berücksichtigung der Lage des zweiten Auflagerpunktes, der durch den horizontalen und vertikalen Auflagerabstand  $h$  und  $l$  definiert ist, siehe Abb. 9.2, ergibt sich die Laufvariable  $\zeta$ , die im Koordinatenursprung den Wert  $\zeta = 0$  und am rechten Seilende die Werte  $x^1(1) = l$  und  $x^2(1) = h$  annimmt. In Gl. (9.8) bedeuten weiterhin  $G = \mu_0 g L_0$ ,  $\lambda = H/G$  und  $\kappa = V/H$ . Da die Auflagerreaktionen  $H$  und  $V$  zunächst unbekannt sind, müssen die gekoppelten transzendenten Gleichungen (9.9) mit den beiden Unbekannten  $\kappa$  und  $\lambda$  gelöst werden.

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{EA_0}{G} \lambda \left[ \operatorname{arsh}(\kappa) - \operatorname{arsh}\left(\kappa - \frac{1}{\lambda}\right) \right] &= \frac{EA_0}{G} \cdot \frac{l}{L_0} \\ \kappa \lambda + \frac{EA_0}{G} \lambda \left[ \sqrt{1 + \kappa^2} - \sqrt{1 + \left(\kappa - \frac{1}{\lambda}\right)^2} \right] &= \frac{EA_0}{G} \cdot \frac{h}{L_0} + 0.5 \end{aligned} \quad (9.9)$$

Nach Lösen von (9.8) und (9.9) erhält man für die vorgegebenen Randbedingungen eine eindeutige Lösung. Zu den einzelnen Seilen der verschiedenen Brücken findet man in der Literatur u.a. die statische Seilkraft (allerdings ohne Angabe an welcher Stelle des Seiles) und eine Längenangabe. Vermutlich entspricht diese Länge dem Auflagerabstand und nicht einer Seillänge. Wenn die ungedehnte Seillänge diesem Abstand entspricht, ergibt sich die statische Seilkraft ausschließlich als Folge des Eigengewichtes. Zusätzliche Vorspannkraft werden durch die Wahl einer kürzeren Seillänge  $L_0$  bei gleichbleibendem Auflagerabstand realisiert. Durch die Ermittlung der richtigen Ausgangslänge  $L_0$  lässt sich die angegebene statische Seilkraft einstellen.

Ausgehend von den berechneten Seilkräften und der daraus resultierenden statischen Seillinie ergibt sich nach der Ortsdiskretisierung zunächst die Steifigkeitsmatrix des Seiles  $\mathbf{C}$ . Die zugehörigen Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  und die Eigenschwingungsformen  $\phi$  der freien ungedämpften Schwingung, darstellbar durch  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ , erhält man durch Lösen des folgenden Eigenwertproblems:

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi = \mathbf{0} \quad (9.10)$$

Am Beispiel des Seiles 13 der *Erasmusbrücke* Rotterdam führt die spannungslose Seillänge  $L_0 = 249,5975 \text{ m}$  unter Vorspannung und Eigengewicht zu einer statischen Seilkraft in Seilmitte von  $2262 \text{ kN}$ . Über die Seillänge gesehen variiert die Seilkraft von  $2293 \text{ kN}$  am oberen und  $2232 \text{ kN}$  am unteren Auflagerpunkt. Gegenüber dem Auflagerabstand von  $250 \text{ m}$  ist die spannungslose Seillänge  $L_0$  um etwa  $40 \text{ cm}$  kürzer. Unter

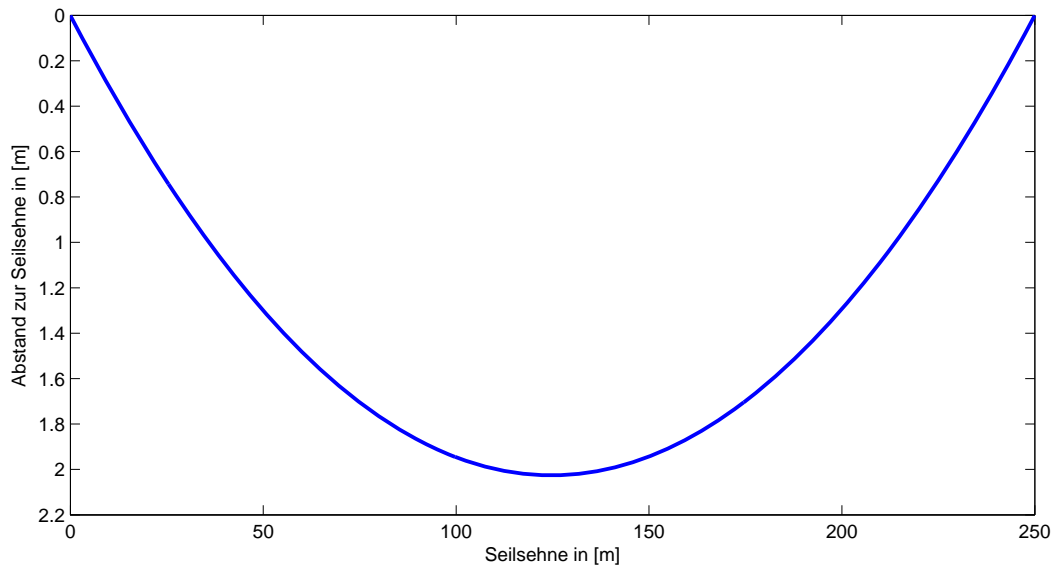


Bild 9.3: Darstellung des statischen Seildurchhangs bezogen auf die Seilsehne

den gegebenen Bedingungen beträgt der in Abb. 9.5 dargestellte, maximale Durchhang in Seilmitte etwa  $2\text{ m}$  von der Seilsehne. Die ersten zehn zu dieser Konfiguration zugehörigen Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen sind in Tab. 9.1 aufgelistet.

Nummerierung	Eigenkreisfrequenz	Eigenfrequenz	Orientierung	Symmetrie
	[1/s]	[Hz]		
1	2,442	0,389	horizontal	symmetrisch
2	2,635	0,419	vertikal	symmetrisch
3	4,883	0,777	vertikal	antimetrisch
4	4,884	0,777	horizontal	antimetrisch
5	7,326	1,166	horizontal	symmetrisch
6	7,333	1,167	vertikal	symmetrisch
7	9,768	1,555	vertikal	antimetrisch
8	9,768	1,555	horizontal	antimetrisch
9	12,211	1,943	horizontal	symmetrisch
10	12,211	1,943	vertikal	symmetrisch

Tab. 9.1: Die ersten 10 Eigenfrequenzen

### 9.2.2 Die statischen Gleichgewichtslagen der Rinnsale

Streicht man in Gleichung (7.12) sämtliche dynamischen Anteile sowohl des Rinnsals als auch des Seils, entkoppeln sich die beiden Differentialgleichungssysteme. In die dennoch nichtlineare Berechnung der statischen Ruhelagen der Rinnsale geht neben den Eigengewichtsanteilen nur noch eine gleichbleibende Momentenwirkung des Windes ein. Es stellt sich eine über die Seillänge konstante, statische Gleichgewichtslage ein. Erwartungsgemäß wird das untere Rinnsal, für das es nur eine stabile Lösung gibt, mit steigender Windgeschwindigkeit immer weiter leewärts gedrückt. Für das obere Rinnsal existieren mathematisch in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit zwischen einer und fünf Lösungen. Diese Lösungen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Stabilität. Das Stabilitätsverhalten der einzelnen Lösungen ist in [N1] ausführlich beschrieben.

Am Beispiel des Seiles 13 der *Erasmusbrücke* sind die statischen Gleichgewichtslagen für verschiedene Windgeschwindigkeiten exemplarisch berechnet worden und die Ergebnisse in Abb. 9.4 abgebildet. Seilneigung und Windanströmwinkel sind in Kapitel 8.3 angegeben. Da für die Rinnsalmassen in Kapitel 8.1.2 lediglich eine Annahme getroffen wurde, soll an dieser Stelle der Einfluss verschiedener Rinnsalmassen untersucht werden. Dazu werden zwei Simulationen mit der kleinsten und größten Rinnsalmasse der Literatur nach Abschnitt 8.1.2 durchgeführt. Bei der späteren Berechnung werden nur die hellblaue und rote Linie aus Abb. 9.4 verwendet. Die dunkelblaue und die orangefarbene Linie sind nur zu Vergleichszwecken dargestellt. Dabei sind die Rinnsalpositionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  von den Vorzeichen wie in Abb. 7.6 definiert. Desweiteren bedeuten:

- gestrichelte Linien                   → instabile Lösungen
- durchgezogene Linien               → stabile Lösungen
- hellblau                               → oberes Rinnsal  $\varphi_1$  mit  $\mu_{R1} = 100$  g/m
- dunkelblau                           → oberes Rinnsal  $\varphi_1$  mit  $\mu_{R1} = 60$  g/m
- rot                                       → unteres Rinnsal  $\varphi_2$  mit  $\mu_{R2} = 120$  g/m
- orange                                 → unteres Rinnsal  $\varphi_2$  mit  $\mu_{R2} = 72$  g/m

Die Untersuchung des Einflusses der Rinnsalmassen zeigt für das untere Rinnsal (orange und rote Linie) keine gravierenden Unterschiede. Für das obere Rinnsal (hell- und

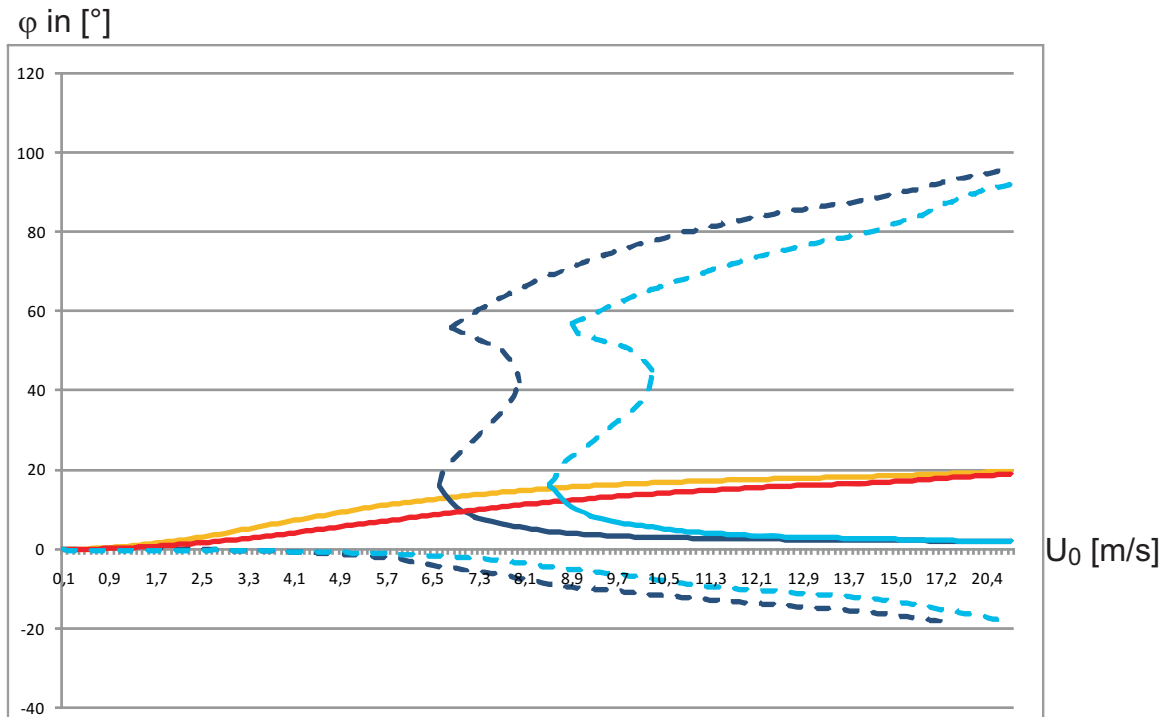


Bild 9.4: Statische Rinnsalpositionen für das Seil 13 der Erasmusbrücke

dunkelblaue Linie) zeigen sich deutliche Unterschiede bei der kritischen Windgeschwindigkeit, ab der sich ein Rinnsal an der Oberseite des Seiles halten kann. Da das obere Rinnsal maßgeblich zum Anregungsmechanismus beiträgt, ist bei leichteren Rinnsalen schon bei niedrigeren Einsetzgeschwindigkeiten mit Regen-Wind-induzierten Schwingungen zu rechnen. Bei steigenden Windgeschwindigkeiten nähern sich die Kurven einander, so dass der Einfluss der Rinnsalmassen mit zunehmender Windgeschwindigkeit abnimmt. Bei der *Erasmusbrücke* mit einer Windgeschwindigkeit  $U_0 = 14 \text{ m/s}$  sind die Rinnsalruhelagen für die verschiedenen Rinnsalmassen nahezu übereinstimmend. Die statischen Rinnsalpositionen unter den gegebenen Windbedingungen lauten für das obere Rinnsal  $\varphi_1 = 2,79^\circ$  und für das untere Rinnsal  $\varphi_2 = 16,63^\circ$ .

Allgemein ergeben sich in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit bis maximal fünf Lösungsmöglichkeiten, eine leeseitige und vier luvseitige, für das obere und nur eine stabile Lösung für das untere Rinnsal. Die berechneten Ergebnisse stimmen qualitativ sehr gut mit denen von NAHRATH überein, vgl. [N1]. Als instabile Lösungen für das obere Rinnsal, gestrichelt dargestellt, sind in Abb. 9.4 alle Lösungen gekennzeichnet, die nach Aufbringen einer kleinen Störung nicht mehr in die Ausgangslage zurückschwingen,

sondern eine andere Gleichgewichtslage einnehmen. Erst ab einer bestimmten Windgeschwindigkeit stellt sich genau eine stabile Lösung, durchgezogene Linie, ein, bei der sich das obere Rinnsal halten kann. Dieser Lösungsbereich wird von NAHRATH mit "D-3" bezeichnet. Die instabilen Lösungen für das obere Rinnsal schwingen nach Aufbringen der Störung entweder in die Lösung "D-3" oder die Rinnsale laufen am Seilquerschnitt ab und fallen mit dem unteren Rinnsal zusammen.

MATSUMOTO, HIKAMI und ROBRA geben ausschließlich die stabilen Rinnsalruhelagen an. Aussagen zu möglichen instabilen Lösungen findet man nicht. Die statische Rinnsalposition wird bei den genannten Autoren mit einem Winkel  $\Theta_1$  angegeben, für den  $\Theta_1 + \varphi_1 = 90^\circ$  gilt. Die dort angegebenen, stabilen Gleichgewichtslagen stimmen bei Anwendung auf die verwendeten Seildaten und Windverhältnisse ansonsten ebenfalls sehr gut mit den eigenen Berechnungen überein.

### 9.2.3 Der Anfangszustand des Seiles vor der Simulation

Nach dem Bestimmen der statischen Rinnsalposition ergeben sich konstante aerodynamischen Kraftbeiwerte, mit denen die Auftriebs- und Quertriebskräfte bestimmt werden. Zum Ermitteln der statischen Gleichgewichtslage des Seiles unter Regen und Wind wird auf den bereits gefundenen Anfangszustand unter Eigengewicht und Vorspannung die konstante, aus den statischen Rinnsalpositionen folgende Windlast aufgebracht. Es erfolgt ein Ausschwingen des Seiles unter einer konstanten Belastung aus Regen und Wind hin zum Anfangszustand des Seiles für die eigentliche Simulation. Bei Annäherung an den statischen Endzustand werden die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten in der Differentialgleichung immer kleiner. Bei einer beliebigen Annäherung an den Anfangszustand kann der Ausschwingvorgang abgebrochen werden. Es wird sich unter einer über die Seillänge konstanten Last für ein beidseitig gelenkig gelagertes Seil immer eine der ersten Eigenform ähnliche Schwingungsform einstellen. Die beobachteten Schwingungen in höheren Eigenformen um diese Gleichgewichtslage herum müssen sich im dynamischen Fall selbst einstellen. Dies kann allerdings nur nach Aufbringen einer kleinen Störung erfolgen. Durch das Abbrechen des Schwingungsvorganges zur Ermittlung des Anfangszustandes ist von Beginn an eine kleine, einmalige Störung der Gleichgewichtslage enthalten, so dass diese für die dynamische Untersuchung nicht gesondert aufgebracht werden muss.



## 9.3 Schwingungen infolge Regen und Wind

### 9.3.1 Berechnungen mit dem Grundmodell

#### 9.3.1.1 Probleme bei den Simulationen Regen-Wind-induzierter Schwingungen

Nach erfolgreichen Testberechnungen für die Parametererregung mit dem auf der Kontinuumsmechanik basierendem Seilmodell, siehe Kapitel 6, bestand die Hoffnung, auch für die Regen-Wind-induzierten Schwingungen zügig zu guten Ergebnissen zu kommen. Durch die Implementierung weiterer Nichtlinearitäten und zusätzlicher Kopplungen zwischen den verschiedenen Zustandsgrößen des Seils als auch der beiden Rinnsale in den Differentialgleichungen nahmen die Berechnungen deutlich mehr Zeit in Anspruch. Einige Simulationen dauerten für eine einzige Konfiguration bei nur 16 Elementen mehr als eine Woche. Auch der Versuch der Parallelisierung und Optimierung der Routinen brachte keine wesentlichen Verbesserungen. Um die Berechnungszeit in Grenzen zu halten, wurden die Simulationen mit 16 Elementen durchgeführt.

Eine weitere Ursache der langen Berechnungen liegt in der zu simulierenden Zeitdauer. Der Grenzyklus wurde in Abhängigkeit der Dämpfungswerte in einigen Fällen erst nach mehr als 7200 Sekunden erreicht, z.B. bei Verwendung der Dämpfungswerte von NAHRATH, siehe Tab. 8.5. Dies widerspricht den Beobachtungen, bei denen sich die Schwingungen innerhalb von 3 bis 10 Minuten nach Einsetzen von Regen und Wind eingestellt haben.

In anderen Fällen wurde das vorgestellte Modell zur Berechnung Regen-Wind-induzierter Schwingungen bei den Berechnungen mit unterschiedlichen Dämpfungswerten an seine Grenzen und teilweise darüber hinaus geführt. Durch das Abrutschen des oberen Rinnsals am Seilquerschnitt an einem oder mehreren Punkten brach die Schwingung des Rinnsals über die Seillänge vollständig zusammen. Eine weitere Anregung fand nicht mehr statt und die Schwingungen des Seils klangen ab. Diese Instabilitäten bei der Rinnsalschwingung traten bei einigen Dämpfungswerten auf und bei weiterer Variation der Parameter verschwanden sie teilweise ebenso plötzlich wieder. Ob dieses vollständige Zusammenbrechen der Rinnsalschwingung auf numerische oder tatsächlich mechanische Ursachen zurückzuführen ist, konnte bislang nicht abschließend geklärt werden.

Weitere Belege für die ausgeprägte Empfindlichkeit der Differentialgleichungssysteme sind die Änderungen der Schwingungsformen bei den Parameteränderungen. So führen teil-

weise kleine Änderungen bei der Dämpfung oder auch der Seilvorspannung zu einem anderen Schwingungsverhalten.

### 9.3.1.2 Berechnungsergebnisse mit dem Grundmodell

Bei der Simulation Regen-Wind-induzierter Schwingungen ergaben sich bei den Berechnungen zunächst keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Zwar stellte sich als Folge der Anregung durch einsetzenden Regen bei konstanter Windanströmung aus der statischen Seilposition heraus meistens eine Schwingungsform vergleichbar der dritten Eigenform automatisch ein, die Amplituden lagen jedoch nur im Zentimeterbereich, siehe Abb. 9.5 und blieben somit deutlich hinter den Beobachtungen zurück. Der für Regen-Wind-induzierte Seilschwingungen charakteristische Grenzzyklus des Seilmittelknotens in Form einer geneigten Ellipse stellt sich bei stabil laufender Berechnung immer ein.

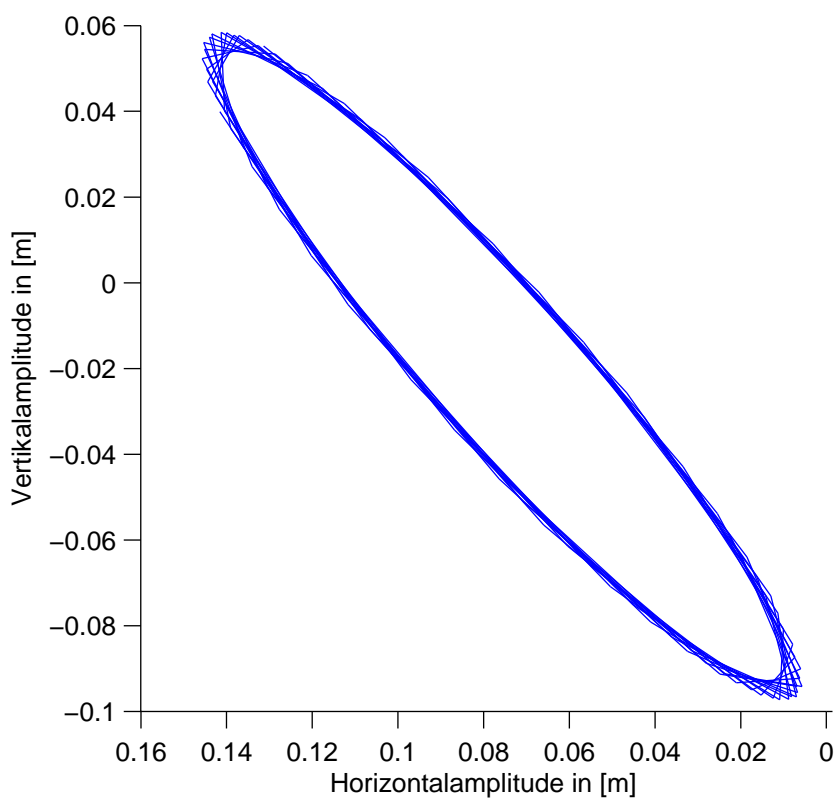


Bild 9.5: Orbit des Mittelknotens

Auch eine Abminderung der Dämpfungswerte des Seiles innerhalb der in der Literatur angegebenen Toleranzen führte nicht zu wesentlichen Verbesserungen der Ergebnisse, also zu größeren Amplituden. Die maximalen Doppelamplituden des mittleren Knotens in der dritten Eigenform lagen bei etwa  $24\text{ cm}$ . Zu Vergleichszwecken mit NAHRATH und DREYER wurden einige Berechnungen mit einer Seilneigung von  $\delta = 30^\circ$  anstatt der von ROBRA angegebenen  $24^\circ$  durchgeführt. Die sich hierfür einstellenden statischen Rinnsalpositionen sind:  $\varphi_1 = 6,34^\circ$  und  $\varphi_2 = 18,82^\circ$ . Bei der Variation der Dämpfungseigenschaften des Seiles und auch der Rinnsale stellten sich für beide Seilneigungen in wenigen Fällen auch Schwingungen in der zweiten, vierten und fünften Schwingungsform ein. Für die Rinnsale ergaben sich sogar Schwingungen in der siebten Schwingungsform. Bei diesen Schwingungen lag aber in nur wenigen Fällen ein instabiler Anfangszustand vor, so dass die Anfangsstörung in den meisten Fällen abklang und der stabile Grundzustand unter Regen und Wind aus Kapitel 9.2.3 wieder erreicht wurde. In diesem Fall, beispielhaft gezeigt für die zweite Schwingungsform am oberen Rinnsal in Abb. 9.6, handelt es sich um einen stabilen Anfangszustand, so dass die Störung nicht zu einem

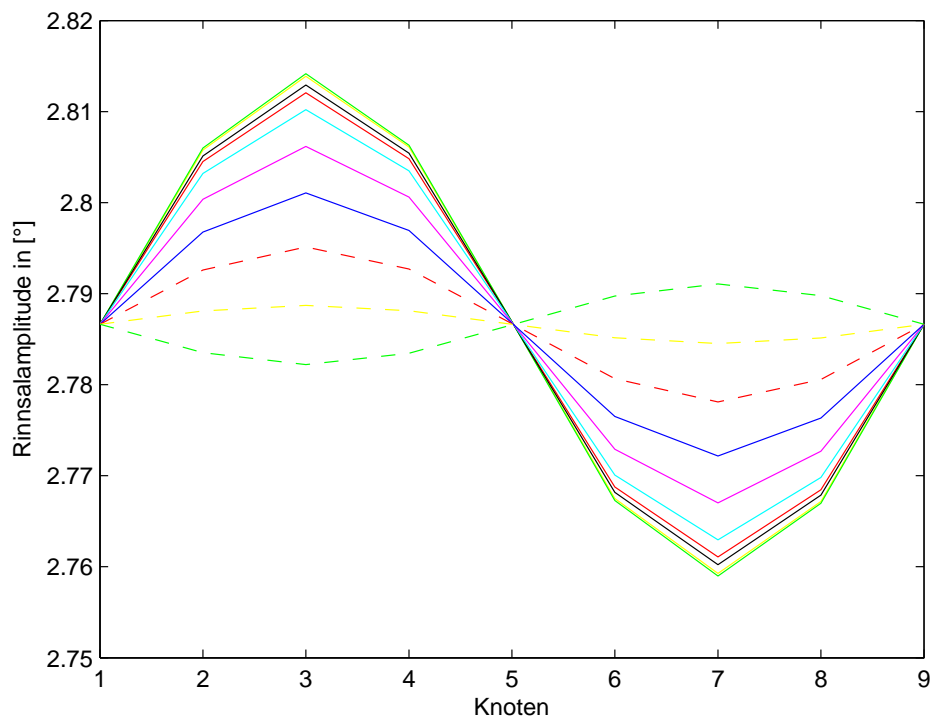


Bild 9.6: Schwingung des oberen Rinnsals in der 2. Eigenform

Aufschaukelprozess führt, sondern die Schwingung bedingt durch die Dämpfung langsam ausklingt und sich asymptotisch dem Gleichgewichtszustand annähert. Dies ist in Abb. 9.7 für die Rinnsalschwinung des oberen Rinnsals am Viertelknoten dargestellt, da in der zweiten Schwingungsform an diesem Knoten die größten Amplituden auftreten.

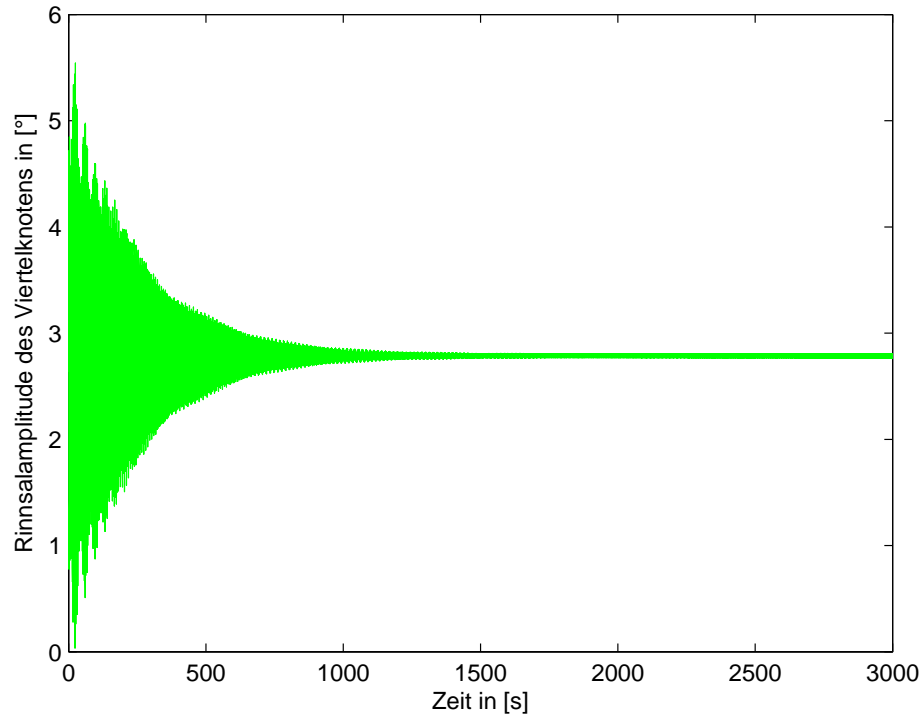


Bild 9.7: Schwingung des oberen Rinnsals am Viertelknoten bei der 2. Schwingungsform

In wenigen Fällen höherer Schwingungsformen lagen instabile Anfangszustände vor, die zu einem Grenzyklus führten. Dabei wurden ausschließlich sehr kleine Amplituden berechnet. Beispielfhaft dafür sind die Ergebnisse des Seiles in Abb. 9.8 und des oberen Rinnsals in Abb. 9.9 in der 5. Schwingungsform für die Seilneigung von  $\delta = 30^\circ$  dargestellt, bei denen Seil und Rinnsal affine Schwingungsformen aufweisen.

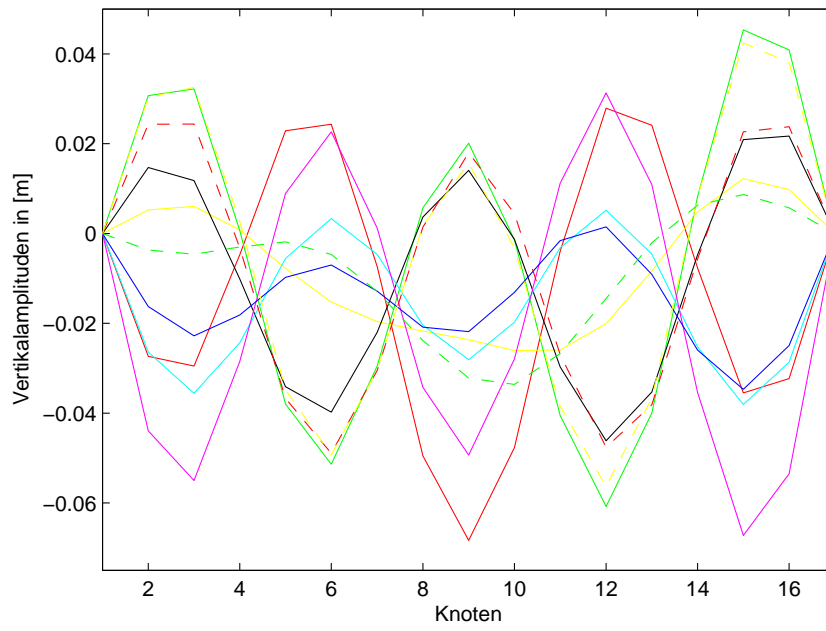


Bild 9.8: Vertikalschwingung des Seils in der 5. Schwingungsform

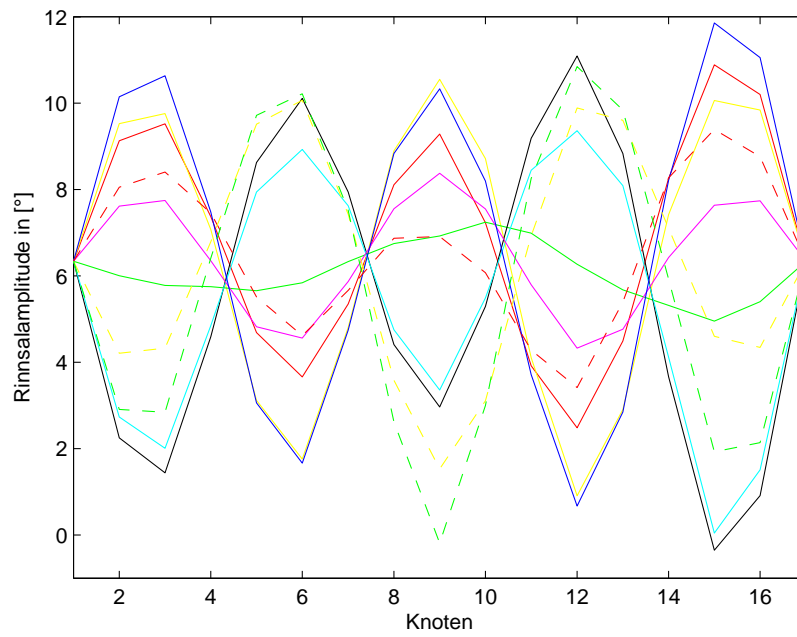


Bild 9.9: Schwingung des oberen Rinnsals in der 5. Schwingungsform

Das Aufschaukeln der Seil- und Rinnsalschwingungen für das Beispiel in der fünften Schwingungsform und das Erreichen des Grenzzyklus ist in den Abb. 9.10 und 9.11 abgebildet. Dargestellt ist dies an der Vertikalschwingung der mittleren Seilknotens und den Schwingungen des oberen Rinnsals am Seilmittelknoten.

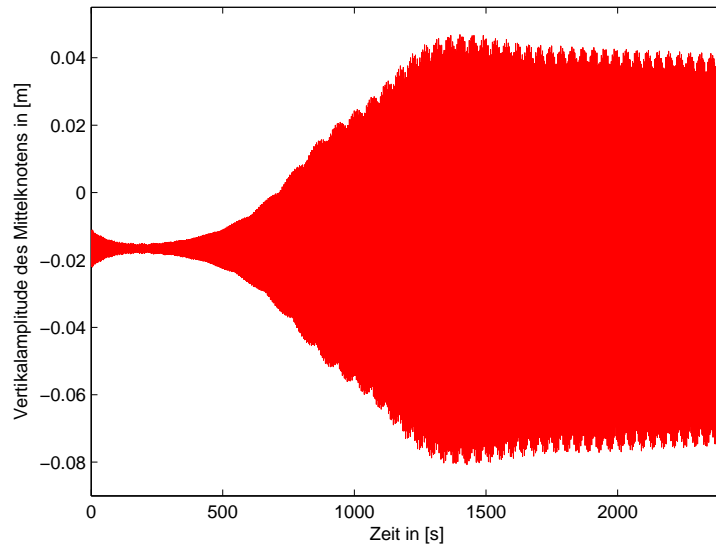


Bild 9.10: Schwingung des Mittelknotens bei der 5. Schwingungsform

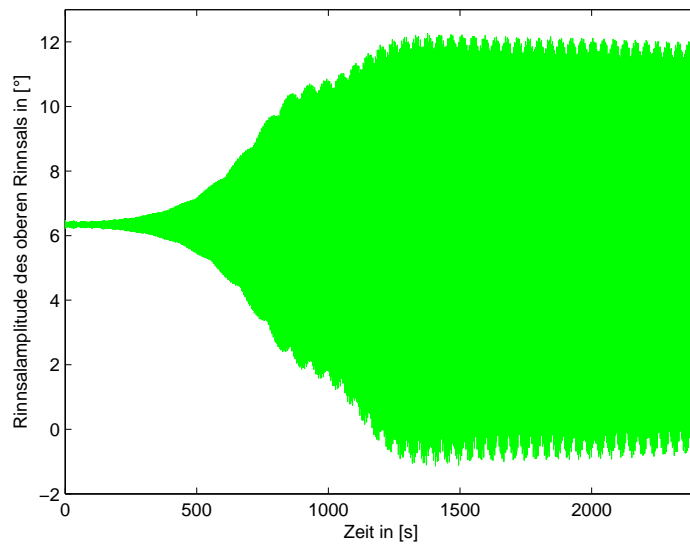


Bild 9.11: Schwingung des oberen Rinnsals am Mittelknoten bei der 5. Schwingungsform

Als Ergebnis dieser Dämpfungsuntersuchung lassen sich erwartungsgemäß zwei Punkte festhalten. Bei Schwingungen in der dritten Schwingungsform vergrößern sich mit sinkenden Dämpfungswerten zum einen in gewissen Grenzen die Amplituden sowohl der Seil- als auch der Rinnsalschwingungen und zum anderen verkürzt sich die Zeit bis zum Erreichen des Grenzzyklus.

Begrenzt wurde die Dämpfungsreduktion und die damit verbundene Amplitudenvergrößerung durch ein anderes Phänomen. Ab einer gewissen Schwingungsamplitude des oberen Rinnsals auf der Seiloberfläche gibt es eine Grenze, bei der das obere Rinnsal während des Aufschaukelprozesses leewärts am Seilquerschnitt herunter läuft und sich mit dem unteren Rinnsal bei etwa  $-180^\circ$  vereinigt, siehe Abb. 9.12.

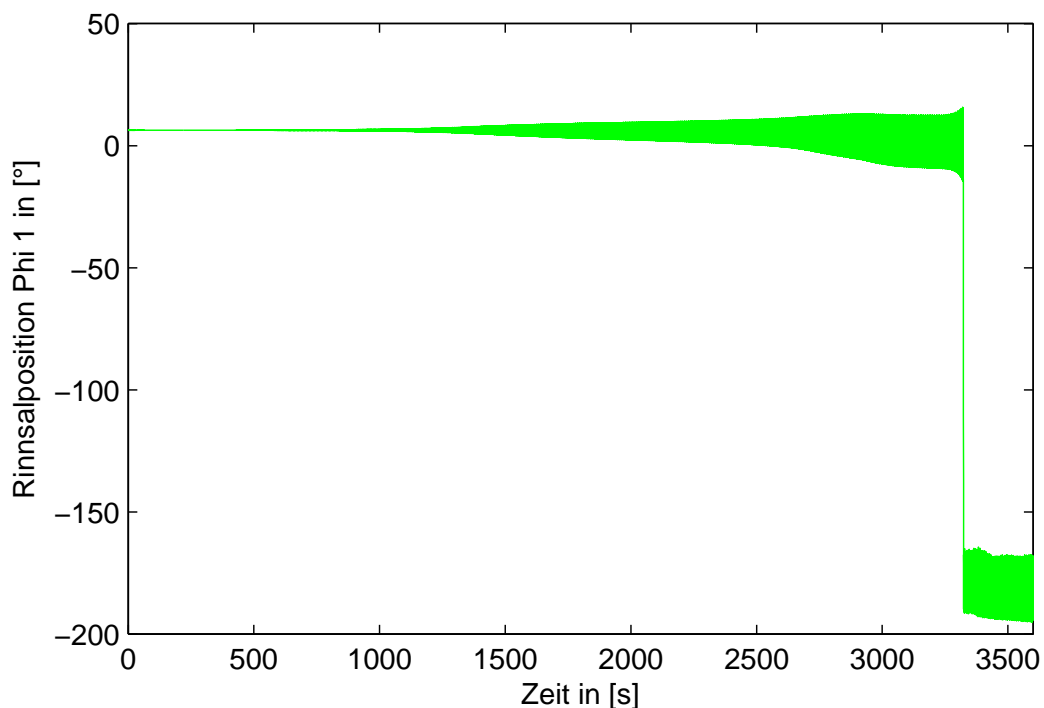


Bild 9.12: Darstellung des herabrutschenden oberen Rinnsals

In Abhängigkeit der sich einstellenden Schwingungsform und der gewählten Dämpfungswerte fällt das obere Rinnsal entweder nur an einem oder an mehreren Diskretisierungspunkten in die untere Position. Ursache für das Abrutschen scheint ein zu geringes stabilisierendes Windkraftmoment  $M_{\varphi_1}$ , so dass das obere Rinnsal nicht mehr in der labilen, oberen Position gehalten wird und der Schwerkraft folgend am Seil abrutscht. Die Amplituden der Seilschwingungen liegen in diesem Moment immer noch deutlich

unter den beobachteten Ausschlägen.

Im dargestellten Beispiel scheint sich für das Rinnsal nach einem Aufschaukelprozess im Simulationsbereich von etwa 3000 s bis 3250 s zunächst ein stabiler Grenzyklus in der dritten Schwingungsform einzustellen. Danach setzt ein weiterer Aufschaukelprozess ein, bei dem das Rinnsal bei etwa 3300 s und Schwingungsamplituden von etwa 15° am Seil herunterfällt. Das in dieser Arbeit beschriebene Modell ist für diesen Fall nicht ausgelegt und liefert damit keine realistischen Ergebnisse mehr, da die Rinnsalposition des oberen Rinnsals den durch die Windkraftbeiwerte definierten Bereich verlässt. Die Schwingung des oberen Rinnsals bricht dann -entweder durch numerische oder mechanische Ursachen bedingt- vollständig über die ganze Seillänge zusammen, auch wenn das Rinnsal zunächst nur an einem oder wenigen Diskretisierungspunkten abrutscht.

### 9.3.2 Modifizierung des Modells

Das Problem, weshalb die beobachteten, großen Schwingungsamplituden des Seils ausbleiben, könnte das beschriebene Abrutschen des oberen Rinnsals am Seil während des Einschwingvorgangs schon bei relativ kleinen Schwingungsamplituden nach Abb. 9.12 sein, so dass der Aufschaukelprozess unterbrochen wird. Die sich stellende Frage lautet, ob und wie das obere Rinnsal auch bei größeren Schwingungsamplituden des Seils stabil auf der Oberseite des Schrägseils schwingen kann. Die Rinnsalposition ergibt sich nach Gl. 7.11 aus dem Momentengleichgewicht an jedem Seilknoten. In dieser Gleichung sind drei Kopplungen zur Seilbewegung enthalten:

- die von den Geschwindigkeiten der Seilknoten abhängige relative Windgeschwindigkeit  $U_{rel}$ ,
- die ebenfalls von den Geschwindigkeiten der Seilknoten abhängigen Windkraftbeiwerte  $C_M$ ,
- und die Beschleunigungswerte der Seilknoten  $\ddot{y}$  und  $\ddot{z}$  nach Gl. (7.11)

Um größere Amplituden bei der Seilschwingung hervorzurufen, muss eine der Kopplungen, abweichend vom ursprünglich gewählten Modell, verändert werden. Für diese Modifizierung sollte es eine physikalische Begründung geben. Die ersten beiden Möglichkeiten enthalten Kopplungen zwischen Seil- und Rinnsalbewegung, jedoch hat die Ände-



rung der dabei betroffenen Parameter sowohl bei der Seil- als auch der Rinnsalgleichung ähnliche Auswirkungen. Die relative Anströmung  $U_{rel}$  geht in beiden Gleichungen gleichermaßen quadratisch in die Bestimmung der Windkräfte ein. Die aerodynamischen Momentenbeiwerte  $C_M$  gehen zwar primär nur in die Differentialgleichung der Rinnsale ein, jedoch sind die Eingangswerte mit denen der aerodynamischen Kraftbeiwerte  $C_D$  und  $C_L$  identisch, so dass diese Werte sich ebenfalls ändern. Aufgrund der Nichtlinearitäten könnte eine Veränderung größere Seilschwingungen bewirken; erscheint aber als nicht sehr wahrscheinlich.

Durch eine Reduzierung des Einflusses der Beschleunigungen des Seils (Punkt 3) sollte es allerdings möglich sein, bei kleineren Schwingungsamplituden der Rinnsale die Amplituden der Schrägseile zu vergrößern, ohne dass das obere Rinnsal am Seilquerschnitt abrutscht. Zu diesem Zweck wird unter Beibehaltung des Grundmodells mit starren Rinnsalquerschnitten in den Rinnsalkräften Gl. (7.9) und in der Momentengleichung der Rinnsale Gl. (7.11) der Faktor  $\chi$  eingeführt (in Gl. 9.11 durch Klammern hervorgehoben), mit dem die Wirkungen durch die Seilbeschleunigungen zwischen 0% und 100% variiert werden können:

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_1} &= +C_{M1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot d^2 \cdot U_{rel}^2 = m_{R1} \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 - m_{R1} \cdot g \cdot \cos \delta \cdot r \cdot \sin \varphi_1 \\
 &\quad + d_{\varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_1 - m_{R1} \cdot r \cdot \cos \varphi_1 \cdot (\chi \cdot \ddot{y}) + m_{R1} \cdot r \cdot \sin \varphi_1 \cdot (\chi \cdot \ddot{z}) \\
 M_{\varphi_2} &= +C_{M2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot d^2 \cdot U_{rel}^2 = m_{R2} \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_{R2} \cdot g \cdot \cos \delta \cdot r \cdot \sin \varphi_2 \\
 &\quad + d_{\varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2 + m_{R2} \cdot r \cdot \cos \varphi_2 \cdot (\chi \cdot \ddot{y}) - m_{R2} \cdot r \cdot \sin \varphi_2 \cdot (\chi \cdot \ddot{z})
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Der Sonderfall ohne Rinnsalverformung  $\chi = 1$  entspricht dem Grundmodell nach Kap. 9.3.1. Die physikalische Begründung dieser Modifizierung ist durch die Deformierung des Rinnsals gegeben. Die aus der Beschleunigung des Seiles folgenden Kräfte und damit Energien werden nicht vollständig in Positionsänderungen der Rinnsale umgesetzt, sondern aufgrund der Tatsache, dass es sich in der Realität nicht um im Querschnitt starre Rinnsale, sondern um solche aus Wasser handelt, wird die Geometrie der Rinnsalquerschnitte verändert. Diese Modifizierung entspricht einem Schritt in Richtung eines Fluid-Fluid-Struktur-Ansatzes, bei der der Rinnsalquerschnitt als verformbare Flüssigkeit angesehen wird und sich dieser als Folge der einwirkenden Druckverhältnisse von Strömung und Seilbewegung einstellt. Die absorbierte Deformationsenergie steht dem Rinnsal dann nicht mehr zur Beschleunigung bzw. zur Bewegung zur Verfügung.

Trotz dieser Modifikation behalten die aerodynamischen Beiwerte ihre Gültigkeit, da die Rinnsale während der Simulation weiterhin als starr betrachtet werden; lediglich die

Beschleunigungswirkung aus der Seilbewegung auf das Rinnsal wird reduziert.

In den Abbildungen 9.13 und 9.14 ist der Schwingungsort des Mittelknotens für 4 Deformationsfaktoren  $\chi$  dargestellt. Alle im folgenden vorgestellten Ergebnisse für die Dämpfungswerte nach Kapitel 8.2.1 führen auf Schwingungen in der dritten Schwingungsform. Die Berechnung für  $\chi = 1,0$  entspricht dem Grundmodell und liefert die bereits beschriebenen zu kleinen Amplituden mit einer vertikal orientierten, leicht geneigten Ellipse im Grenzzyklus. Mit sinkenden Deformationsfaktoren  $\chi$  kippt die Ellipse immer mehr in eine waagerechtere Lage und wird dabei flacher.

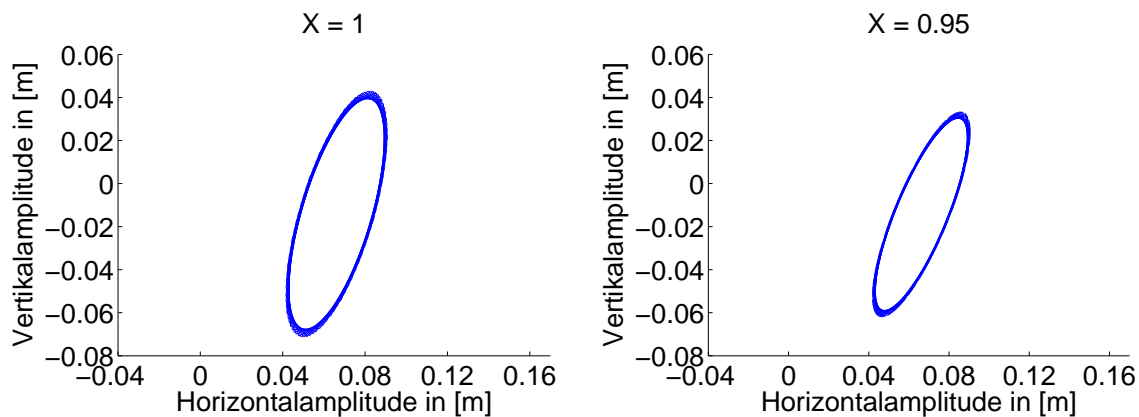


Bild 9.13: Orbit des Mittelknotens für  $\chi = 1,0$  und  $\chi = 0,95$

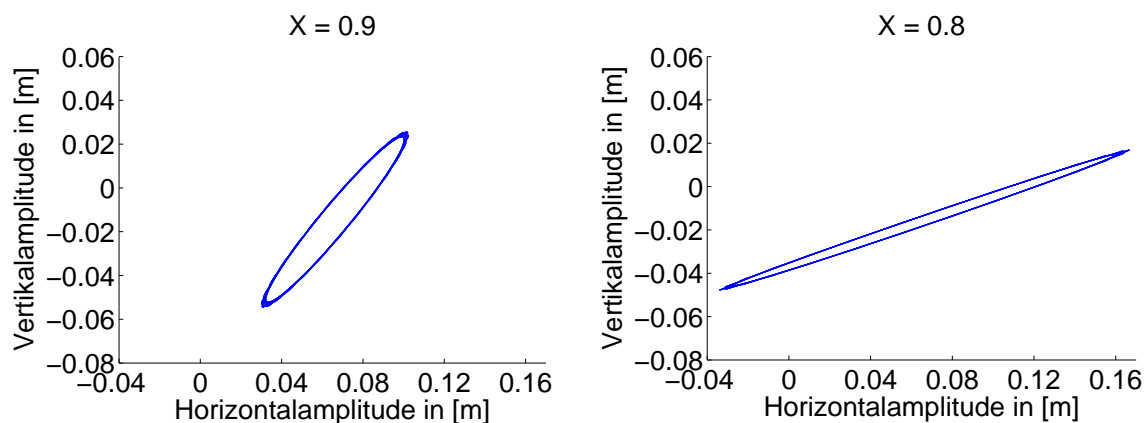


Bild 9.14: Orbit des Mittelknotens für  $\chi = 0,90$  und  $\chi = 0,80$

Die vertikalen Amplituden werden etwas reduziert, während die horizontalen Anteile deutlich anwachsen. Der Vergleich zwischen  $\chi = 1,0$  und  $\chi = 0,8$  ist den Abbildungen 9.15 und 9.16 dargestellt. Auffallend ist weiterhin, dass sich der Grenzzyklus bei

$\chi = 0,8$  nach etwas schnellerem Aufschaukeln nicht mehr so deutlich wie im Grundmodell bei  $\chi = 1,0$  einstellt. Nach 2500 s ist der Aufschaukelprozess nicht vollständig abgeschlossen. Die Amplituden wachsen noch langsam weiter an.

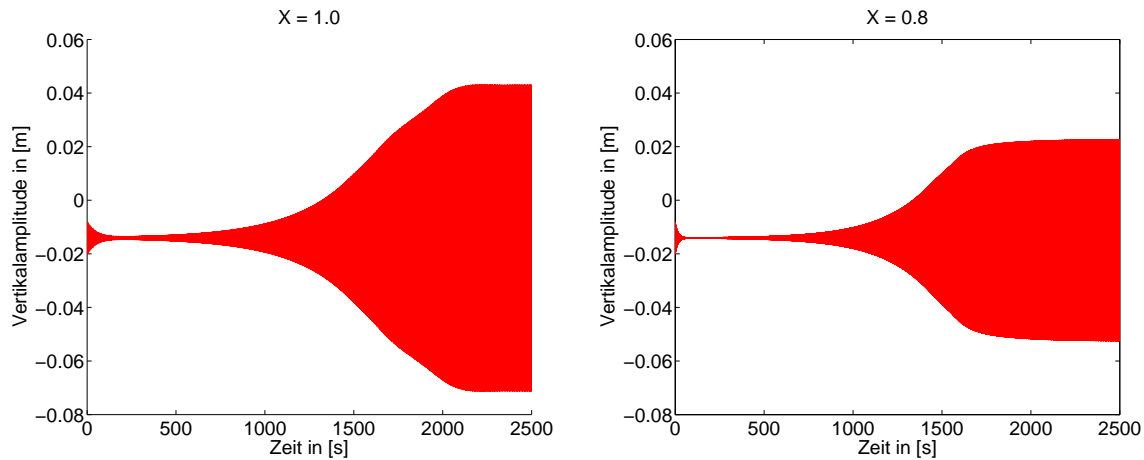


Bild 9.15: Vertikalschwingung des Mittelknotens für  $\chi = 1,00$  und  $\chi = 0,80$

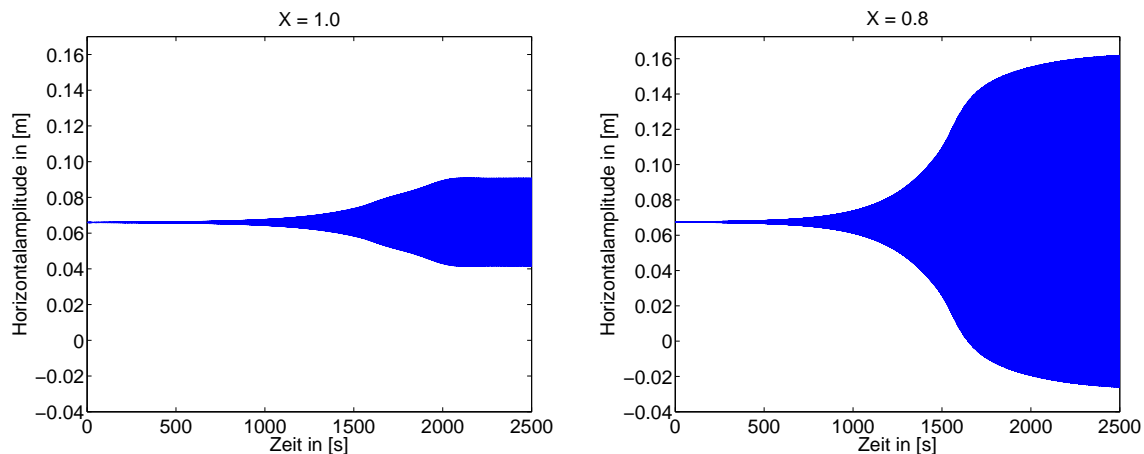


Bild 9.16: Horizontalschwingung des Mittelknotens für  $\chi = 1,00$  und  $\chi = 0,80$

Das leichte Anwachsen der Amplituden nach 2500 s bei  $\chi = 0,8$  ist auch bei der Rinnsalschwingung nachzuvollziehen, wie für das obere Rinnsal in Abbildung 9.17 dargestellt. Es lässt sich anhand der Abbildungen feststellen, dass das Ziel der Modifikation grundsätzlich erreicht wird: größere Schwingungsamplituden des Seils bei kleineren Schwingungsamplituden der Rinnsale, so dass das obere Rinnsal zunächst nicht am Seilquerschnitt abrutscht.

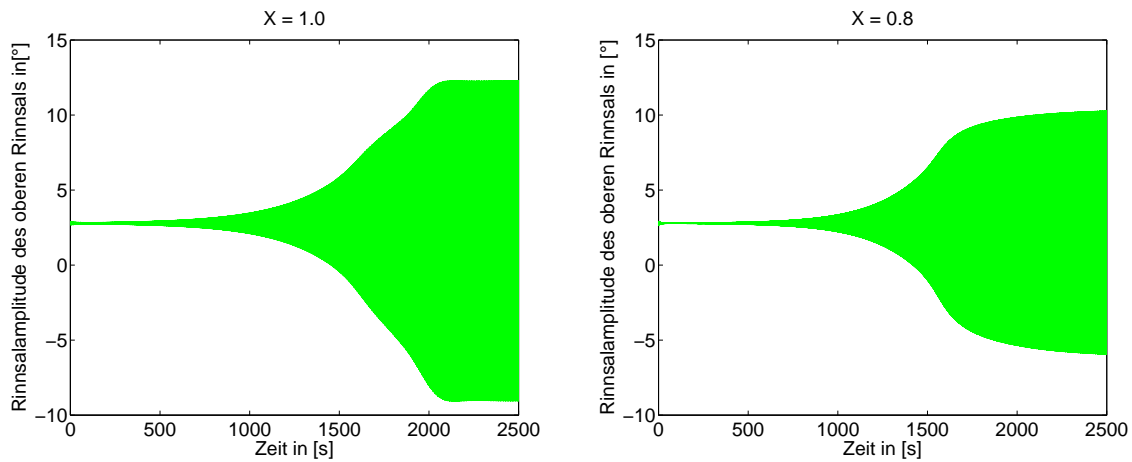


Bild 9.17: Rinnsalamplituden des oberen Rinnals für  $\chi = 1,00$  und  $\chi = 0,80$

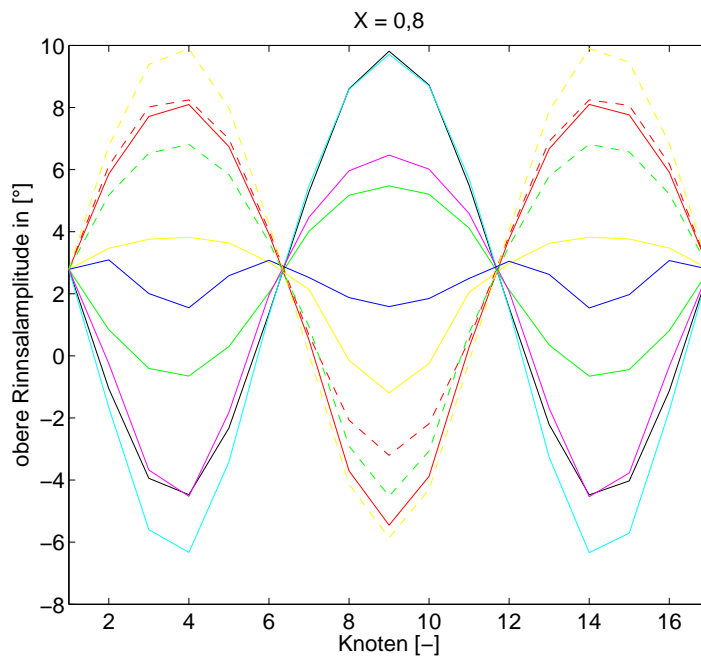


Bild 9.18: obere Rinnsalschwingung über die Seillänge bei  $\chi = 0,80$

Das obere Rinnsal schwingt in Affinität zum Seil in der dritten Schwingungsform, siehe Abb. 9.18. Die größten lokalen, negativen, d.h. leewärtigen, Amplituden treten bei der gewählten Ortsdiskretisierung von 16 Elementen an den Knoten 4 und 14 auf.

Ab einem Deformationsfaktor  $\chi = 0,75$  wachsen die Amplituden des oberen Rinnsals so stark weiter an, dass an den Knoten 4 und 14 das obere Rinnsal bei etwa 2350 s und Auslenkungen von etwa  $-10^\circ$  leewärts am Seilquerschnitt abrutscht. Dieses Abrutschen führt zum bereits beschriebenen Zusammenbrechen der Schwingungen des oberen Rinnsals. Der Aufschaukelprozess wird stark gestört. Das Seil und die Rinnsale schwingen aus und nähern sich wieder ihrem statischen Anfangszustand unter Wind und Regen an, wie beispielhaft am Mittelknoten in Abb. 9.19 dargestellt.

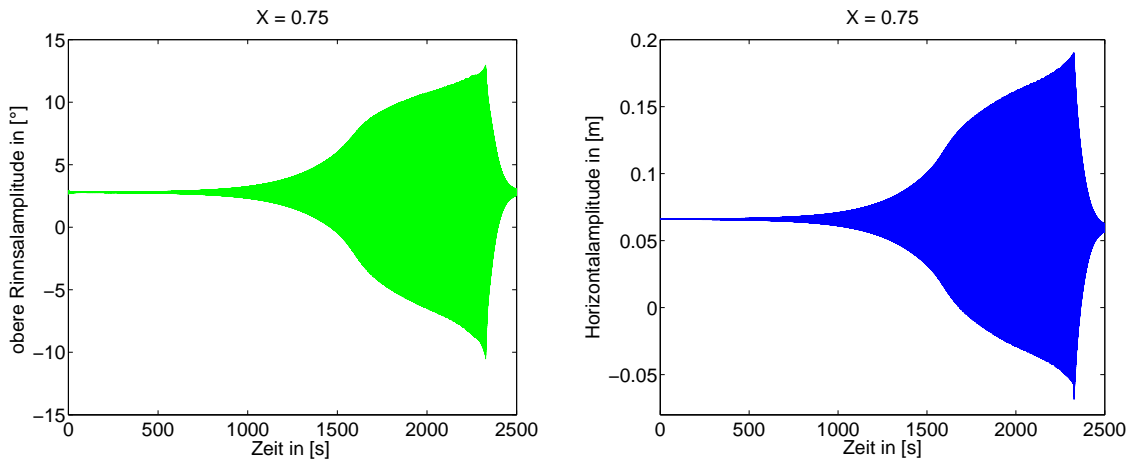


Bild 9.19: Schwingungsverhalten am Mittelknoten bei  $\chi = 0,75$

Dieses Ausschwingen würde in der Realität vermutlich nicht so geschehen. Es ist auf das verwendete Modell und die damit verbundenen Vereinfachungen zurückzuführen. Um dieses Ausschwingen in der Simulation zu verhindern, müsste das Modell so verändert werden, dass die Strömung des Rinnsals in Seillängsrichtung erfasst wird. Damit könnte auch eine Neubildung des oberen Rinnsals erreicht werden, die in der Realität durchaus eintreten könnte.

Untersucht man die Auswirkungen des Deformationsfaktors  $\chi$  beginnend von der vollständigen Vernachlässigung der Seilbeschleunigungen in der Differentialgleichung der Rinnsale, erhält man in der Simulation für  $\chi = 0$  Amplituden der Seilknoten in vertikaler Richtung von über zwei Metern in der dritten Schwingungsform. Diese Werte übersteigen die Beobachtungen wiederum deutlich. Dies ist entweder auf eine zu starke Anregung, eine zu geringe Dämpfung oder eine Kombination aus beidem zurückzuführen.

Unter Annahme einer 1%igen Berücksichtigung der Seilbeschleunigungswerte im Differentialgleichungssystem der Rinnsale nach Gl. (7.11), d.h.  $\chi = 0,01$ , ergeben sich die in den Abb. 9.20 bis 9.22 dargestellten Ergebnisse, wobei sich die Schwingungsform auch im modifizierten Modell durch die Selbsterregung von allein einstellt.

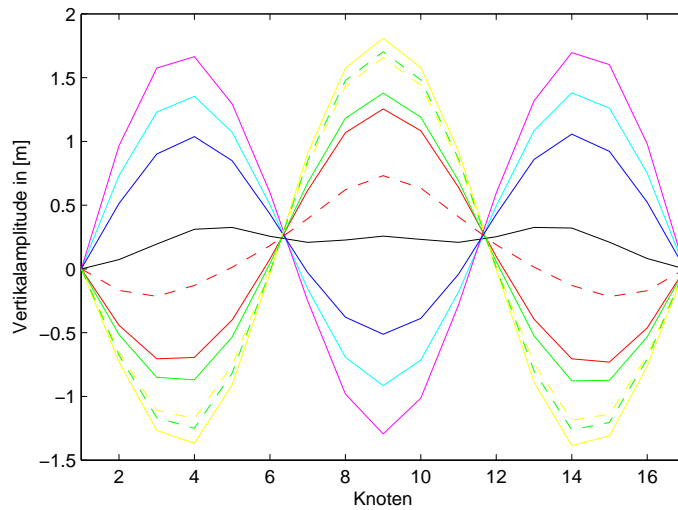


Bild 9.20: vertikale Seilschwingung für  $\chi = 0,01$  in der 3. Eigenform

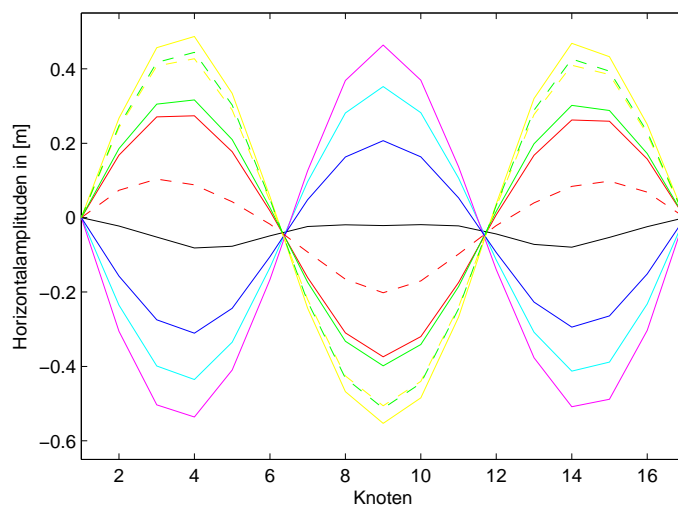


Bild 9.21: horizontale Seilschwingung für  $\chi = 0,01$  in der 3. Eigenform

Beim Seil treten am Mittelknoten Schwingungsamplituden in vertikaler Richtung von etwa  $1,5\text{ m}$  um die statische Gleichgewichtslage herum unter Eigengewicht, konstanter Windlast und Vorspannung auf. In horizontaler Richtung betragen die Amplituden etwa  $0,5\text{ m}$ . Der Schwingungsort des in Abb. 9.22 dargestellten Seilmittelknotens entspricht der flachen, leicht geneigten Ellipse, wie sie auch an den Seilen von Brücken beobachtet wurde und als typisch für Regen-Wind-induzierte Schwingungen gilt.

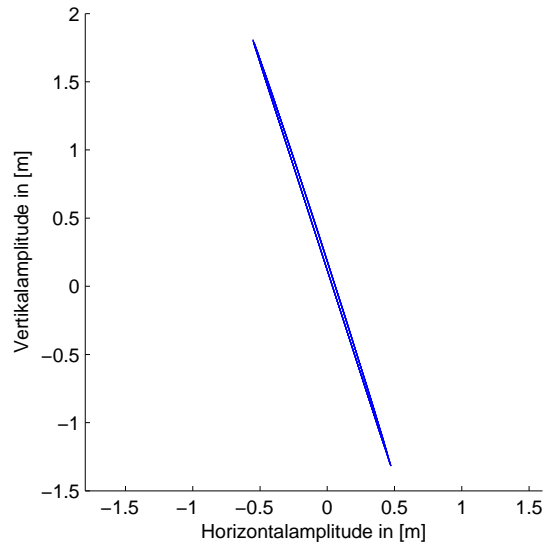


Bild 9.22: Schwingungsort des Seilmittelknotens für  $\chi = 0,01$

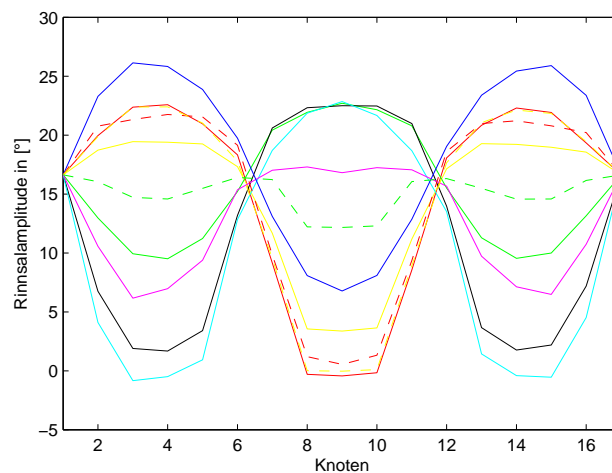
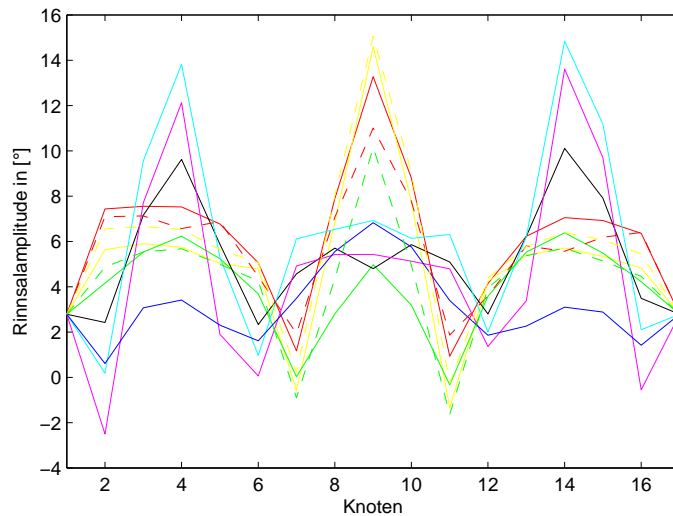
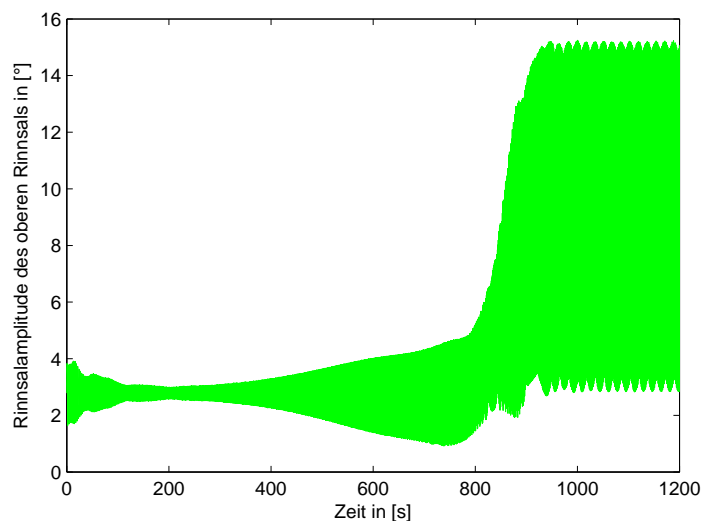


Bild 9.23: Schwingung des unteren Rinnsals über die Seillänge bei  $\chi = 0,01$

Bild 9.24: Schwingung des oberen Rinnsals über die Seillänge bei  $\chi = 0,01$ 

Das Seil und das untere Rinnsal (Abb. 9.23) schwingen affin in der dritten Schwingungsform. Beim oberen Rinnsal, Abb. 9.24, ist eine klare Schwingungsform nicht auszumachen. Die Ursache dafür liegt auch hier in einem Sprungphänomen. Das obere Rinnsal springt ausgehend von der statischen Ruhelage bei etwa  $2,79^\circ$  zwischen  $800\text{ s}$  und  $900\text{ s}$  in eine benachbarte Gleichgewichtslage bei rund  $9^\circ$  luvwärts, siehe Abb. 9.25, und hat Schwingungsamplituden von etwa  $6^\circ$ .

Bild 9.25: Schwingungsamplituden des oberen Rinnsals in Seilmitte bei  $\chi = 0,01$



Im Gegensatz zu den Untersuchungen für  $\chi$ -Werte  $\chi > 0,75$  stellt sich -scheinbar bedingt durch das Springen des oberen Rinnsals in die benachbarte, luvwärtige Gleichgewichtslage- ein Grenzzzyklus mit gleichbleibenden Amplituden ein. Damit rutscht das obere Rinnsal nicht leewärts am Seilquerschnitt ab. Die Berechnung läuft stabil weiter. Diese neue Gleichgewichtslage des oberen Rinnsals ist durch Lösung des statischen Problems nicht zu finden und somit in Abb. 9.4 nicht ablesbar. Im Grenzzzyklus schwingt das untere Rinnsal den Beobachtungen entsprechend etwa  $12^\circ$  um seine statische Gleichgewichtslage, wie in Abb. 9.26 dargestellt.

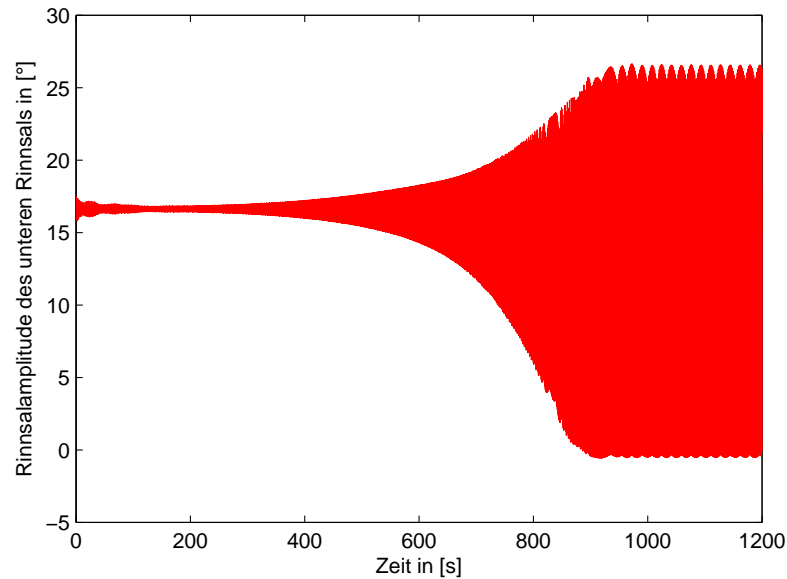


Bild 9.26: Schwingungsamplituden des unteren Rinnsals in Seilmitte bei  $\chi = 0,01$

Das dynamische Gleichungssystem liefert neue Lösungen, so dass das in Kapitel 6.5.2.1 beschriebene, durch Nichtlinearitäten bedingte Sprungphänomen hier zum Tragen kommt. Dieses tritt erst ab einer gewissen Amplitudengröße auf, die bei den Simulationen ohne Modifizierung nie erreicht wurden. Vermutlich durch dieses Sprungphänomen bedingt gewinnen die Nichtlinearitäten an Bedeutung und das System versteift sich schlagartig, so dass kurz nach dem Sprung des oberen Rinnsals in die neue Gleichgewichtslage der Grenzzzyklus erreicht wird, wie in den Abb. 9.25 gut zu erkennen ist.

Ein weiterer positiver Aspekt der gewählten Modifizierung ist die deutlich realistischere Einschwingzeit, die in den Abb. 9.25 bis 9.28 ablesbar ist. Der Grenzzzyklus wird nach etwa 900 Sekunden erreicht. Im Vergleich mit anderen Simulationsergebnissen liegt dieser Wert in einem ähnlichen Bereich.

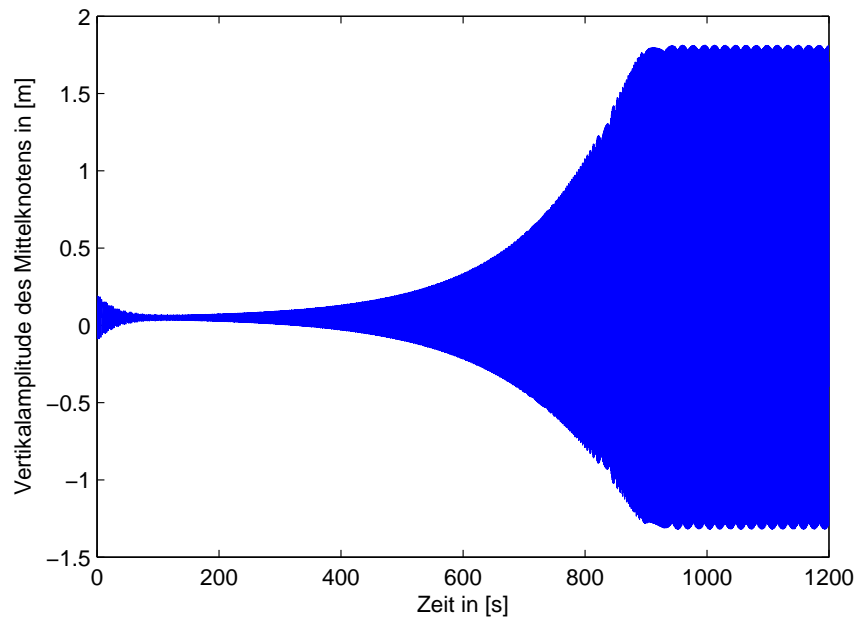


Bild 9.27: vertikaler Schwingungsverlauf des Seilmittelknotens für  $\chi = 0,01$

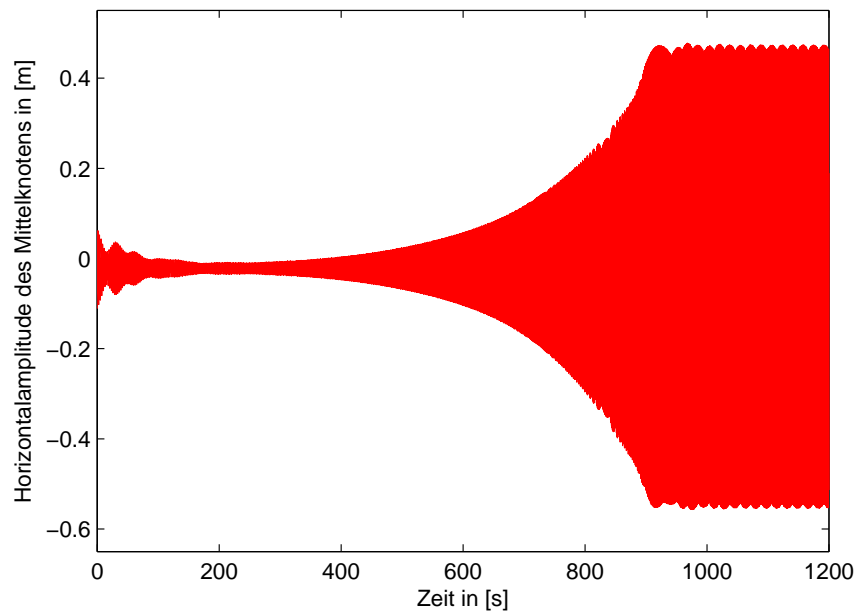


Bild 9.28: horizontaler Schwingungsverlauf des Seilmittelknotens für  $\chi = 0,01$

Für die gewählte Modifizierung mit  $\chi = 0,01$  sind die Amplituden im Vergleich zu den beobachteten etwa um den Faktor 2,5 zu groß. Mögliche Ursachen dafür sind:

- die Überschätzung der Windkräfte durch zu lange Rinnsallängen,
- die Überschätzung der Windkraftbeiwerte durch Erhöhung der relativen Anströmung und der damit verbundenen Reduktion der Beiwerte nach Abb. 2.5
- die Wahl einer zu geringen Dämpfung
- oder die Wahl zu kleiner  $\chi$ -Werte.

Mangels besserer Erkenntnisse zu den Rinnsallängen und den Dämpfungswerten bleiben diese unverändert, siehe Kap. 8.1.1 und 8.2.1. An Windkraftbeiwerten standen für die Simulationen leider nur Daten zu einer Anströmung mit einer REYNOLDS-Zahl zur Verfügung, obwohl sich im Verlauf des Schwingungsprozesses die Strömungsverhältnisse deutlich verändern, siehe Kapitel 9.3.3. Der Einfluss der Seilbeschleunigungen lässt sich über den Faktor  $\chi$  vergleichsweise einfach untersuchen.

Bei der Vergrößerung des Deformationsfaktors  $\chi$  laufen die Rechnungen bis  $\chi = 0,03$  stabil. Dabei stellen sich die Schwingungsformen während des Einschwingvorgangs aus der statischen Gleichgewichtslage heraus von allein ein. Die Schwingungsform des oberen Rinnsals weicht dabei immer stärker von der dritten Eigenform ab. Ab  $\chi = 0,04$  rutscht an einzelnen Knoten das obere Rinnsal ab und fällt mit dem unteren Rinnsal zusammen. Im Gegensatz zu den Berechnungen mit  $\chi > 0,75$  bricht die Schwingung des oberen Rinnsals nicht vollständig zusammen. In einem begrenzten Bereich der  $\chi$ -Werte schwingt ein Teil des oberen Rinnsals weiter in einer gestörten Schwingungsform.

Bedingt durch die abgerutschten Rinnsale werden die oberen Rinnsale verkürzt, so dass sich die Windkräfte reduzieren. Es kommt in diesem Bereich zu Schwingungen in einem Grenzyklus. So rutscht das obere Rinnsal bei der Berechnung mit  $\chi = 0,10$  und einer Diskretisierung von 16 Elementen an 7 Knoten am Seilquerschnitt ab.

Grundsätzlich ist das Modell nicht dafür ausgelegt, diesen Fall abzubilden. Die Rechnungen laufen zwar weiter, jedoch sind die gelieferten Ergebnisse durch weitere Modelanpassungen auf ihre Gültigkeit zu überprüfen.

Bei  $\chi = 0,10$  betragen die in Abb. 9.29 dargestellten Doppelamplituden etwa 2 m in vertikaler Richtung und etwa 0,8 m in horizontaler Richtung. Diese berechneten Amplituden übersteigen die beobachteten Amplituden immer noch, jedoch nicht mehr so deutlich.

Der in Abb. 9.30 dargestellte Schwingungsortbit am Mittelknoten des Seils im Grenzzyklus bleibt eine geneigte, sehr flache Ellipse mit den genannten Amplituden. Über die Seillänge gesehen, stellt sich trotz der Störungen beim oberen Rinnsal eine gut ausgeprägte, dritte Schwingungsform ein.

Wird der Deformationsfaktor auf Werte  $\chi > 0,12$  gesteigert, rutscht das obere Rinnsal scheinbar an so vielen Knoten am Seil ab, dass die obere Rinnsalschwingung über die Seillänge vollständig zusammenbricht. Die Auswirkungen auf das Seil sind beträchtlich. Die Schwingungen des Seils klingen bedingt durch die ausbleibende anfachende Wirkung im Laufe der Zeit ab und es nähert sich asymptotisch seinem Anfangszustand an.

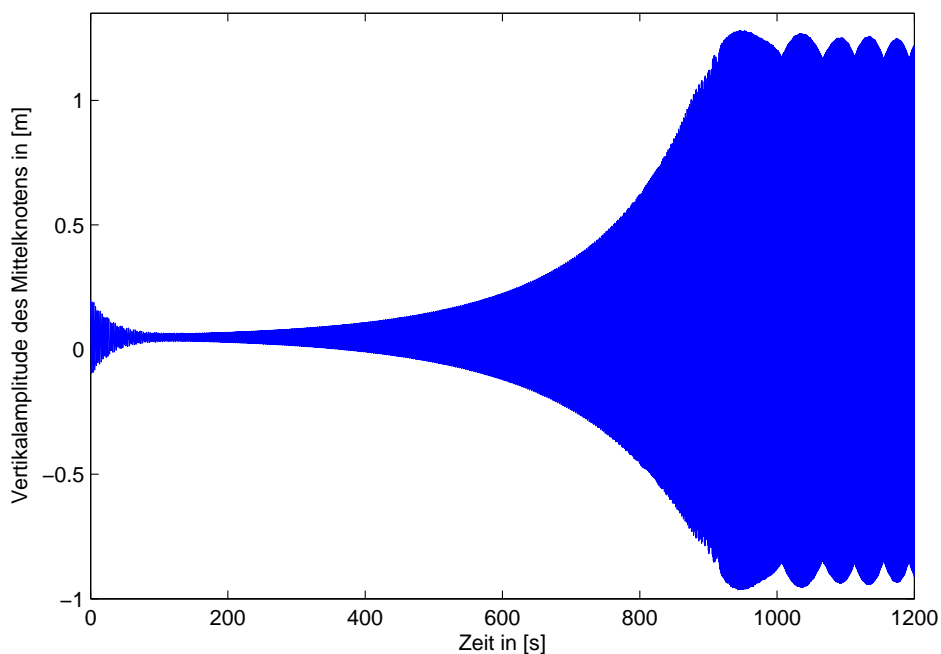
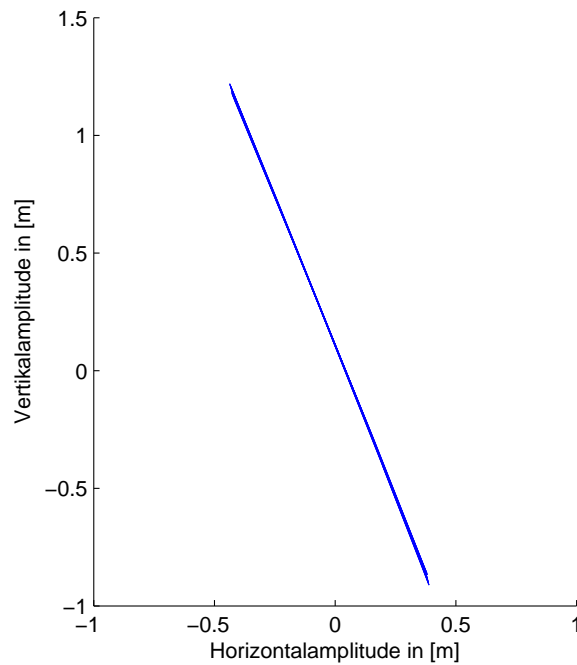


Bild 9.29: vertikaler Schwingungsverlauf des Seilmittelknotens für  $\chi = 0,10$

Bild 9.30: Orbit des Mittelknotens für  $\chi = 0,10$ 

### 9.3.3 Schwinggeschwindigkeiten und deren Folgen auf die relative Umströmung

Für das berechnete Beispiel mit dem Deformationsfaktor  $\chi = 0,01$  ergeben sich neben den größten berechneten Amplituden auch die größten Schwinggeschwindigkeiten. Die Schwinggeschwindigkeiten am Mittelknoten betragen im Grenzyklus in horizontaler Richtung bis etwa  $4,7 \text{ m/s}$  und in vertikaler Richtung sogar bis etwa  $13 \text{ m/s}$ , siehe Abb. 9.31 und 9.32. Betrachtet man die Schwinggeschwindigkeiten über die Seillänge, ergibt sich auch hier affin zu den Amplituden die dritte Schwingungsform, die beispielhaft in Abb. 9.33 dargestellt ist. Diese großen Schwinggeschwindigkeiten haben einen beträchtlichen Einfluss auf die relative Anströmung. Die in Abb. 9.34 dargestellte, relative Anströmgeschwindigkeit  $U_{rel}$  variiert am Mittelknoten als Folge der selbstinduzierten Schwingungen im Grenzyklus innerhalb einer Schwingungsperiode zwischen etwa  $2 \text{ m/s}$  und  $26 \text{ m/s}$ .

An dieser Stelle wird die Bedeutung der relativen Windgeschwindigkeit  $U_{rel}$  deutlich, so dass diese nicht wie in vielen Veröffentlichungen durch die Windgeschwindigkeit  $U$  angenähert werden sollte.

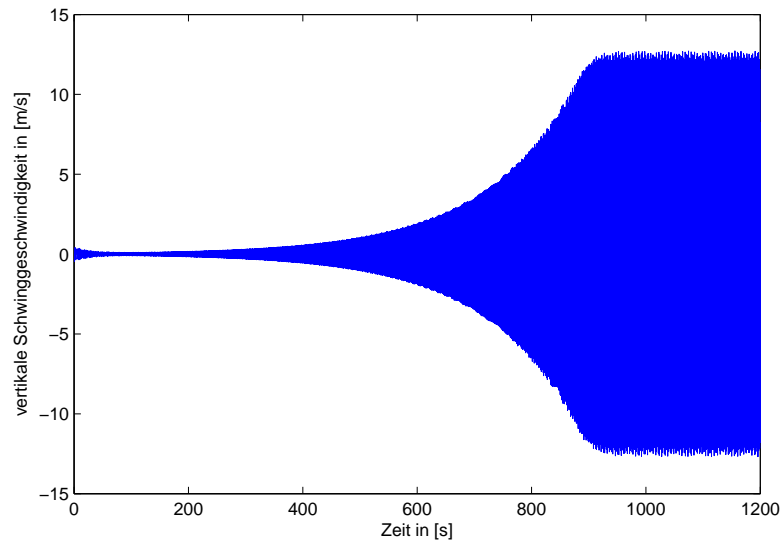


Bild 9.31: vertikale Schwinggeschwindigkeit des Mittelknotens bei  $\chi = 0,01$

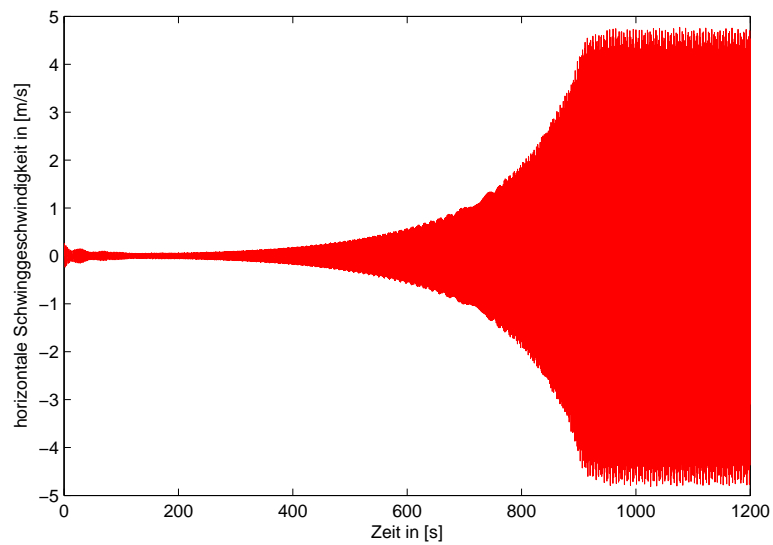


Bild 9.32: horizontale Schwinggeschwindigkeit des Mittelknotens bei  $\chi = 0,01$

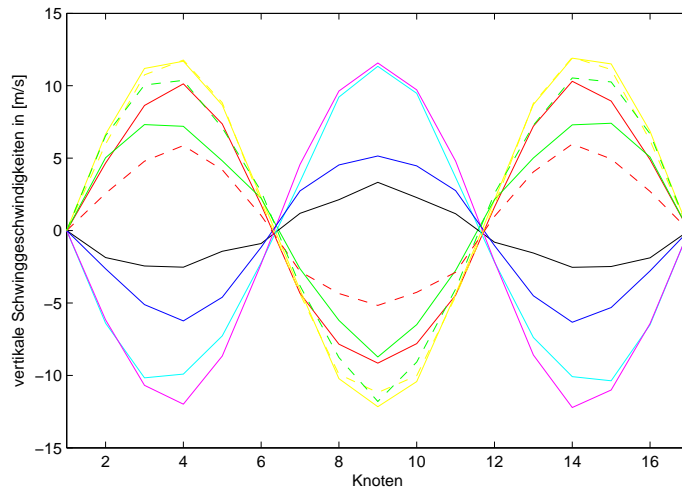
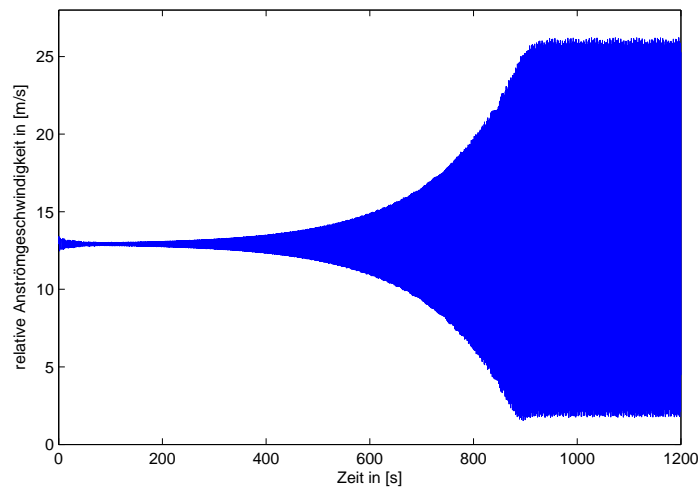


Bild 9.33: vertikale Schwinggeschwindigkeiten über die Seillänge

Bild 9.34: Resultierende relative Anströmgeschwindigkeit  $U_{rel}$ 

Im direkten Zusammenhang mit der relativen Anströmung stehen die qualitativen Strömungsverhältnisse, die sich mit der REYNOLDS-Zahl beschreiben lassen, siehe Kap. 2.2.3.3. Diese ändert sich im Grenzyklus innerhalb einer Schwingungsperiode gravierend. Für die minimale relative Anströmung  $U_{rel,min} = 2 \text{ m/s}$  beträgt die REYNOLDS-Zahl  $Re = 2,6 \cdot 10^4$ , während bei  $U_{rel,max} = 26 \text{ m/s}$  die größten Werte mit  $Re = 3,4 \cdot 10^5$  erreicht werden, die nach Abb. 2.5 bereits im kritischen Bereich liegen, so dass sich am

Seilquerschnitt die Strömungsverhältnisse schon innerhalb einer Periode deutlich verändern. An dieser Stelle wird nochmals angemerkt, dass die Amplituden mit der Modifizierung für  $\chi = 0,01$  überschätzt werden und somit auch die Folgen für die Schwinggeschwindigkeiten als zu groß angesehen werden können.

Daraus resultierend stellt sich nun die Frage, ob bei dieser Änderung der relativen Anströmung überhaupt noch aerodynamisch ähnliche Verhältnisse vorliegen und somit die ermittelten Windkraftbeiwerte noch Gültigkeit besitzen. Aus Sicht des Autors sind die möglichen Veränderungen der dynamischen Verhältnisse so gravierend, dass zur richtigen Erfassung der Windkräfte unter Beibehaltung des verwendeten Modells, die aerodynamischen Beiwerte nicht nur von den Positionen der Rinnsale, sondern darüber hinaus auch von der Anströmgeschwindigkeit  $U_{rel}$  abhängig gemacht werden sollten. Dazu müssen weitere Windkanalversuche durchgeführt werden.

Die Winkelgeschwindigkeiten beider Rinnsale, Abb. 9.35 und 9.36, gehen betragsmäßig bis etwa  $240^\circ/s$ . Für den Bereich zwischen  $60^\circ/s$  und  $240^\circ/s$  lässt sich die geschwindigkeitsabhängige Rinnsaldämpfung nach Kapitel 8.1.3 mittels *Spline*-Funktionen gut ermitteln.

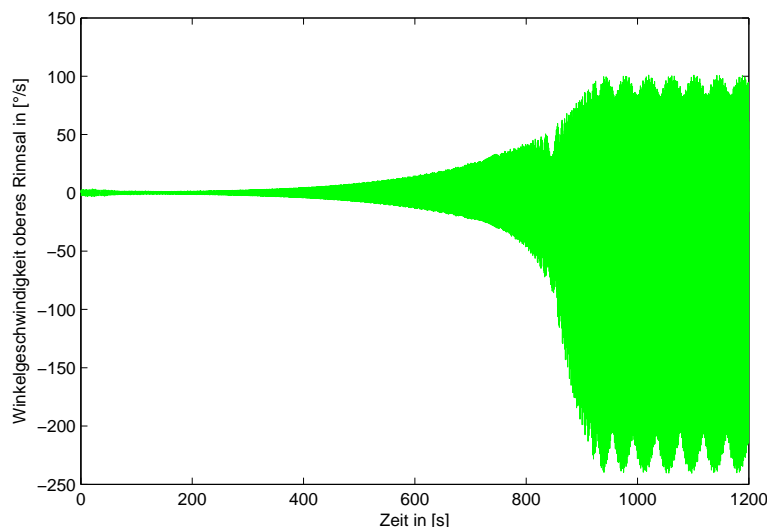


Bild 9.35: Winkelgeschwindigkeit des oberen Rinnsals am Mittelknoten

Ein großer Teil der Punkte liegt jedoch im Bereich zwischen  $-60^\circ/s$  und  $+60^\circ/s$ , der von DREYER nicht ausreichend untersucht wurde. Somit können die zugehörigen Dämpfungswerte in diesem Bereich nur durch eine Annahme geschätzt werden.

In Laboruntersuchungen sind in Zukunft weitere Dämpfungsuntersuchungen durch-



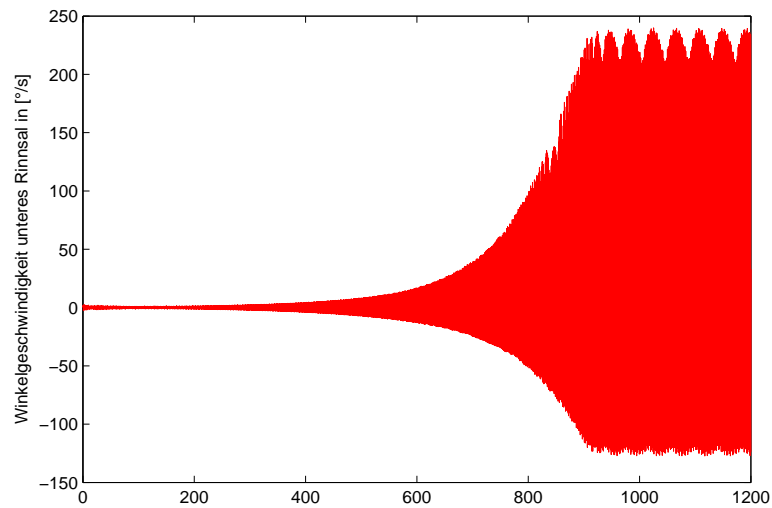


Bild 9.36: Winkelgeschwindigkeit des unteren Rinnsals am Mittelknoten

zuführen, mit dem Ziel, die Dämpfung in niedrigen Winkelgeschwindigkeitsbereichen und bei allen Seilneigungen besser einschätzen zu können.

Wie für die anderen Kinematn der Differentialgleichungen stellt sich auch für die Winkelgeschwindigkeiten der Rinnsale in guter Näherung die dritte Schwingungsform ein, was beispielhaft in Abb. 9.37 dargestellt ist.

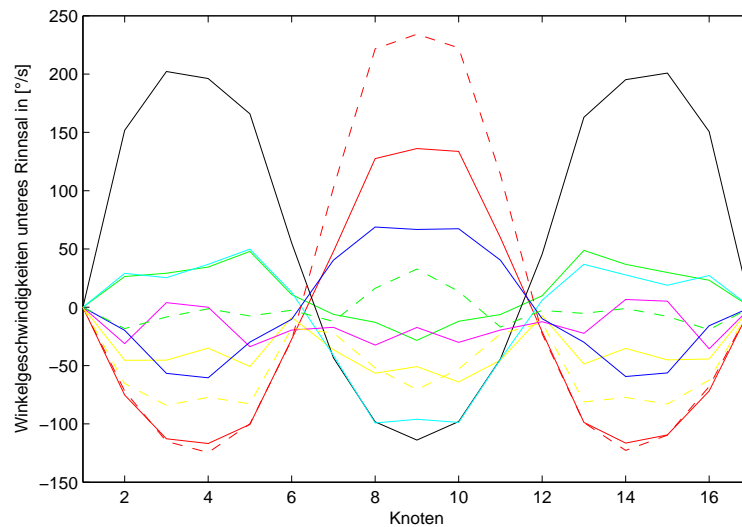


Bild 9.37: Winkelgeschwindigkeiten des unteren Rinnsals über die Seillänge

### 9.3.4 Auswirkungen auf die Seilkraft

In Abb. 9.38 ist die Änderung der Seilkraft gegenüber der statischen Zugkraft am mittleren Seilknoten abgebildet. Auch diese Änderungen sind bei einem angenommenen Deformationsfaktor  $\chi = 0,01$  gravierend. So steigt während des Einschwingvorgangs das mittlere Seilkraftniveau um etwa  $600 \text{ kN}$ . Diese Änderung entspricht 26%. Die maximale Seilkraft steigt sogar um etwa  $1200 \text{ kN}$  und liegt somit etwa 53% über der statischen Seilkraft.

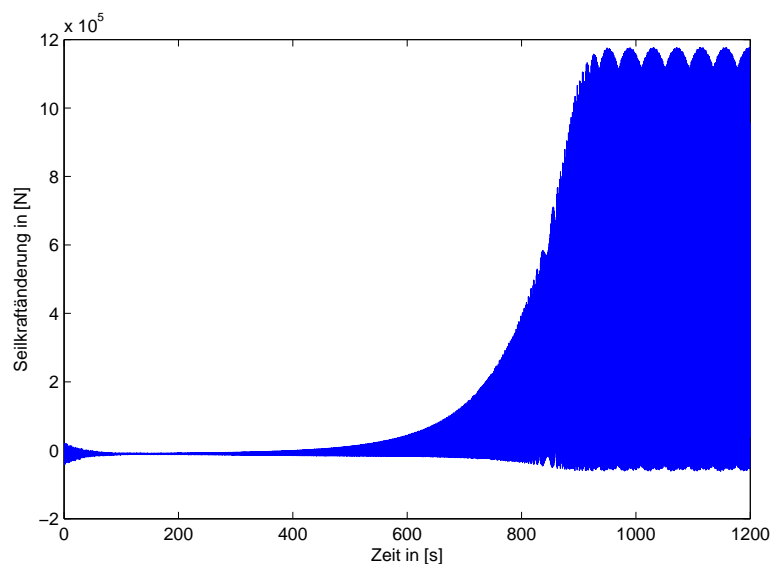


Bild 9.38: Seilkraftänderung in Seilmitte für  $\chi = 0,01$

Auch diese Angaben beziehen sich auf das modifizierte Modell mit  $\chi = 0,01$ . Die resultierenden Seilkräfte werden in diesem Fall wie die anderen Zustandsgrößen ebenfalls deutlich überschätzt. Aber auch die beobachteten Amplituden führen bereits zum Anheben des mittleren Spannungsniveaus und zu deutlichen Spannungsschwankungen infolge der Schwingungen, so dass sich die Ermüdungsrisse an Befestigungen von Schrägseilen oder Brückenhängern, wie beispielsweise der *Elbebrücke* Dömitz, gut mit Hilfe der Regen-Wind-induzierten Schwingungen erklären lassen.

### 9.3.5 Folgen der Modifizierung

Folge dieser Ergebnisse ist, dass Modelle mit starrer Querschnittsgeometrie (Fluid-Struktur-Struktur-Ansatz) unter vollständiger Vernachlässigung der Rinnsaldeformation nur bedingt geeignet sind, um mit ihnen Regen-Wind-induzierte Schwingungen zu simulieren, da wesentliche Effekte der Rinnsalverformung nicht erfasst werden. Für die vorgestellte Modifizierung mit einem Deformationsfaktor im Bereich zwischen  $0 < \chi < 0,12$ , der die Beschleunigungswirkung des Seils sehr stark reduziert, stellen sich zu große Amplituden ein; für Modifizierungen im Bereich  $0,75 < \chi < 1,00$  möglicherweise zu kleine. Jedoch könnten die Amplituden für gewisse Werte  $\chi < 1$  auch näherungsweise mit Blick auf die zusätzliche Parametererregung zutreffend sein, siehe Ausführungen in Kap. 9.1.

Für mittlere Beschleunigungen, bei denen die beobachteten Amplituden erwartet werden dürften, ergeben sich Instabilitäten bei denen Teile des oberen Rinnsals am Seilquerschnitt abrutschen. Geschieht dies bei kleinen Deformationsfaktoren nur an wenigen Stellen, bleibt die Seilschwingung stabil in der dritten Schwingungsform mit kleineren Amplituden erhalten. Rutscht das Rinnsal an zu vielen Stellen ab, bricht die obere Rinnsalschwingung mit ausgeprägter Schwingungsform zusammen. Dieses Verhalten prägt für die untersuchten Eingangswerte den Bereich zwischen  $\chi = 0,12$  und  $\chi = 0,75$ .

Da das in dieser Arbeit vorgestellte Modell für diesen Fall eines herabrutschenden oberen Rinnsals nicht ausgelegt ist, muss dieser scheinbar relevante Aspekt in künftigen Berechnungen als Modellerweiterung aufgenommen werden. Folglich sind genauere Untersuchungen und auch Beobachtungen der Rinnsaldeformation als Folge der Seilbeschleunigungen und zum Schwingungsverhalten der Rinnsale anzustellen. Dabei ist auch das beschriebene Sprungphänomen in die luvwärtigere Position beim oberen Rinnsal zu untersuchen.

Zur Berücksichtigung der Verformung im Modell eignen sich u.a. NAVIER-STOKES-Gleichungen, die die fluiden Eigenschaften wie Oberflächenspannung, Viskosität und Reibung besser abbilden und das daraus resultierende Verformungsverhalten der Flüssigkeit berücksichtigen. Inwiefern die aerodynamischen Beiwerte in diesem Fall ihre Gültigkeit behalten, muss untersucht werden. Alternativ könnte in einem modifizierten Fluid-Struktur-Struktur-Ansatz der Deformationsfaktor  $\chi$  in Laborversuchen ermittelt werden. Eine geeignete Berücksichtigung der Deformation der Rinnsale scheint bei der Berechnung Regen-Wind-induzierter Schwingungen unerlässlich.

## 9.4 Parametererregte Seilschwingungen an der Erasmusbrücke

### 9.4.1 Motivation und Eingangsdaten

Die in [R4] dokumentierten Seilschwingungen mit großen Amplituden konnten für das Seil 13 der *Erasmusbrücke* mit einer Anregung durch Regen und Wind bislang nicht in der zweiten, sondern nur in der dritten Schwingungsform berechnet werden. Somit stellt sich die Frage, ob möglicherweise eine weitere Anregungsform die beobachteten Seilschwingungen hervorgerufen haben könnte. Das Seil wird aus diesem Grund auf parametererregte Schwingungen untersucht. Zur Anregung wird die bei Beobachtungen von REUSINK und KUIJPERS festgestellte Erregerfrequenz des Brückenüberbaus von etwa  $f = 0,8 \text{ Hz}$  angesetzt. Diese Frequenz entspricht näherungsweise der zweiten Eigenfrequenz des Seils 13 sowohl in als auch senkrecht zur Seilebene, siehe Tab. 9.1. Die zugehörige Eigenkreisfrequenz entspricht etwa  $\omega = 5,0 \text{ rad s}^{-1}$ . Aus diesem Grund wurde bei der *Erasmusbrücke* für das Seil 13 der Erregerbereich zwischen  $\omega = 4,5 \text{ rad s}^{-1}$  und  $\omega = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$  untersucht. Große Amplituden mit verschiedenen Grenzyklen wurden im Bereich zwischen  $\omega = 4,7 \text{ rad s}^{-1}$  und  $\omega = 5,0 \text{ rad s}^{-1}$  festgestellt.

Als vertikale Erregeramplitude werden gemäß den Beobachtungen  $5 \text{ cm}$  angesetzt. Um räumliche Schwingungen in der Simulation überhaupt zu ermöglichen, wird senkrecht zur Seilebene lediglich eine 1%-ige Störung mit einer Amplitude von  $0,05 \text{ cm}$  in der gleichen Frequenz aufgebracht.

### 9.4.2 Ergebnisse für die Parametererregung

Nach einer gewissen Einschwingzeit stellen sich für alle berechneten Erregerfrequenzen stabile Grenzyklen in der zweiten Schwingungsform ein. Das Seil wurde für die Berechnungen mit lediglich 8 Elementen diskretisiert, da sich dies bereits bei den Berechnungen zu parametererregten Schwingungen als ausreichender Diskretisierungsgrad gezeigt hat. In den Abb. 9.39 bis 9.47 wird das Schwingungsverhalten über die Seillänge in der letzten halben Sekunde vor Simulationsende dargestellt, wobei die Knoten 1 und 9 die beiden Auflager des Seiles darstellen. Für die zweite Eigenform kommt es im Viertelpunkt und im Dreiviertelpunkt zu den größten Amplituden. Durch die Überlagerung der Horizontal- und Vertikalschwingung des Viertelpunktes ergibt sich der in Abb. 9.39 dargestellte Schwingungsorbit mit den größten Amplituden.

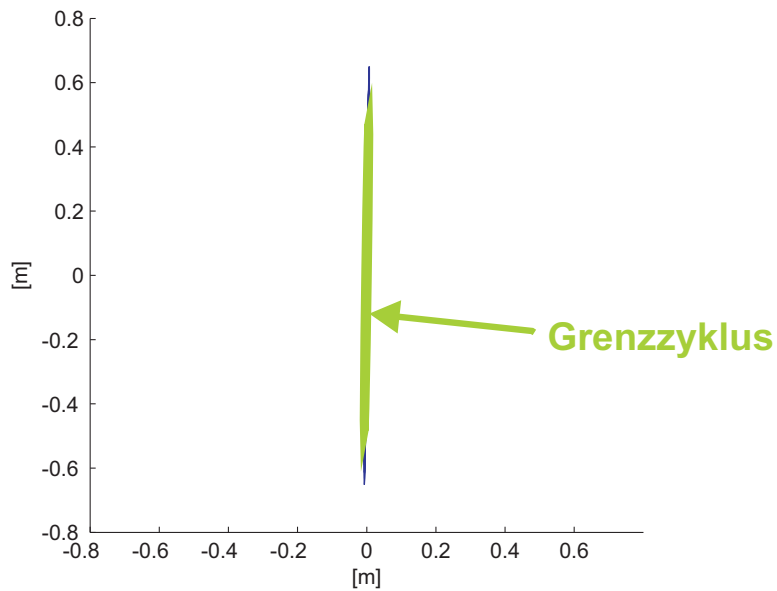


Bild 9.39: Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz  $\omega = 4,70 \text{ rad/s}$

Während bei der Erregerkreisfrequenz  $\omega = 4,70 \text{ rad s}^{-1}$  noch eine stark ausgeprägte vertikale Schwingung mit äußerst geringen horizontalen Schwingungsanteilen vorliegt, siehe Bild 9.39, schlägt das System bei  $\omega = 4,80 \text{ rad s}^{-1}$  um, und die horizontale Störung führt zu einem Aufschaukeln bis sich auch senkrecht zur Seilebene eine Schwingung in der zweiten Schwingungsform mit Amplituden von etwa  $90 \text{ cm}$  einstellt. Der resultierende Grenzyklus ist die in Abb. 9.40 dargestellte Rotationsschwingung.

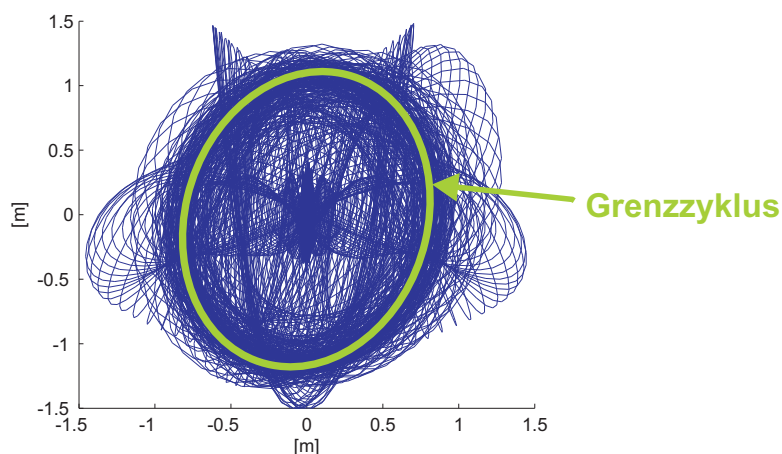
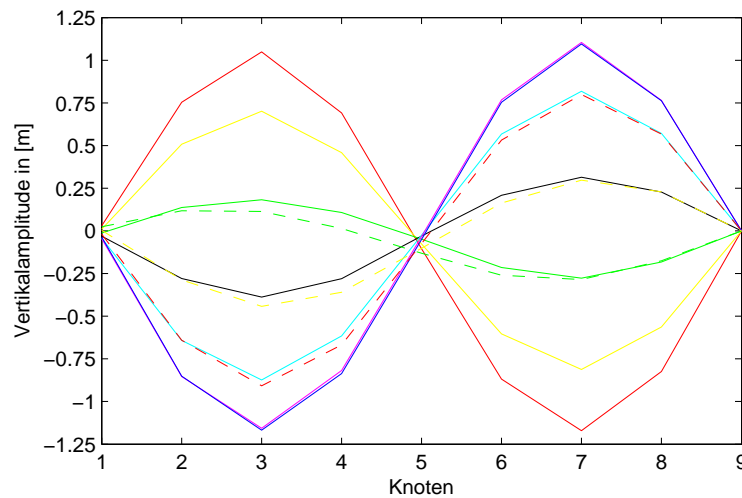
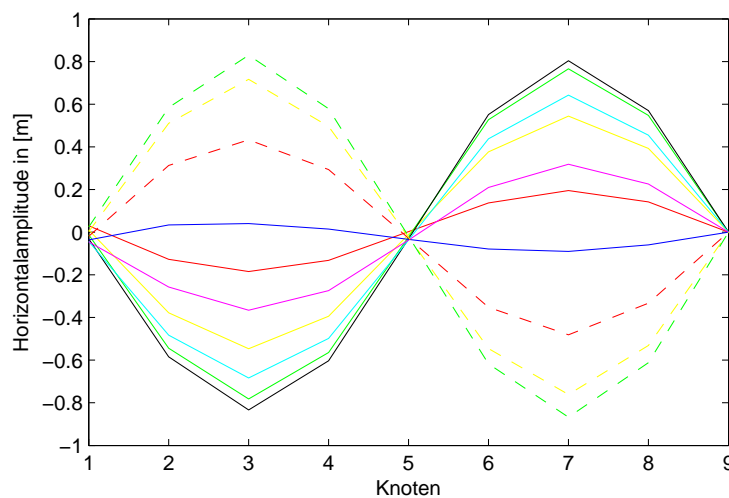


Bild 9.40: Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz  $\omega = 4,80 \text{ rad/s}$

Bild 9.41: vertikale Schwingungen des Seils bei einer Erregerkreisfrequenz  $\omega = 4,80\text{rad/s}$ Bild 9.42: horizontale Schwingungen des Seils bei einer Erregerkreisfrequenz  $\omega = 4,80\text{rad/s}$ 

Diese Rotationsschwingung folgt aus einer Phasenverschiebung der Amplituden zwischen vertikaler (Abb. 9.41) und horizontaler (Abb. 9.42) Richtung. Diese Schwingungsform ist dem ersten Nebeninstabilitätsbereich der zweiten Eigenform zuzuordnen, da die Erregerfrequenz ziemlich genau der Schwingungsfrequenz des Seiles entspricht und nicht wie im Hauptinstabilitätsbereich den doppelten Wert der Seilschwingungsfrequenz annimmt. Dieses Phänomen wurde in Kap. 6.2 bereits ausführlich erläutert.

Der Einschwingvorgang dauert in Abhängigkeit der Erregerfrequenz zwischen etwa 300 Sekunden und 1200 Sekunden. Beispielhaft ist dieser Aufschaukelprozess für die Erregerkreisfrequenz  $\omega = 4,80 \text{ rad s}^{-1}$  in Abb. 9.43 und 9.44 dargestellt.

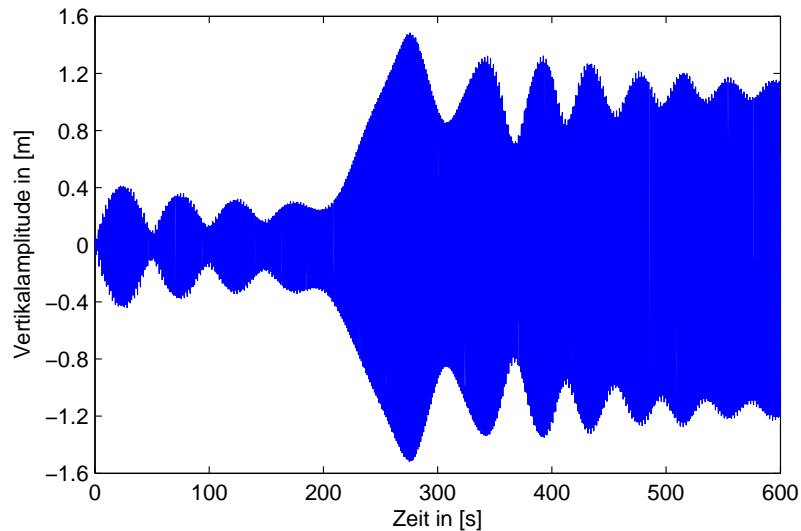


Bild 9.43: vertikaler Einschwingvorgang des Viertelnotes bei  $\omega = 4,80 \text{ rad/s}$

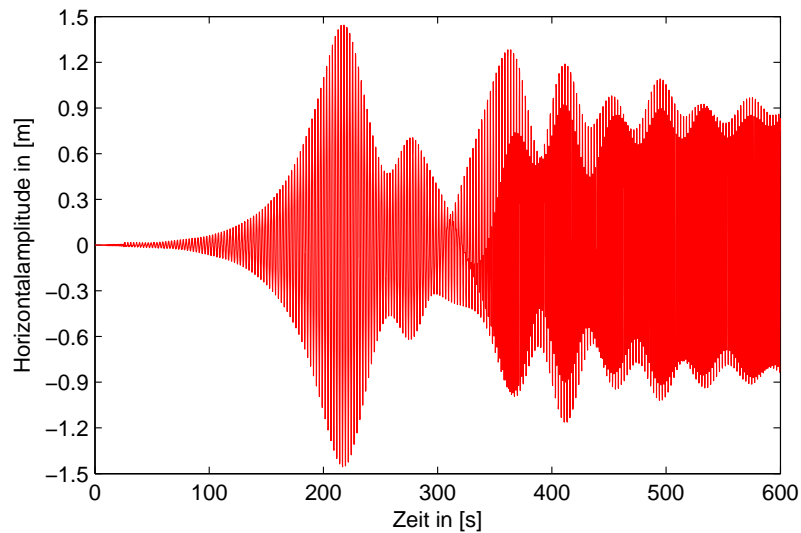


Bild 9.44: horizontaler Einschwingvorgang des Viertelnotes bei  $\omega = 4,80 \text{ rad/s}$

Bei  $\omega = 4,85 \text{ rad s}^{-1}$  dominiert die vertikale Schwingung, so dass der Grenzzzyklus einer leicht geneigten, vertikal orientierten Ellipse mit vertikalen Amplituden von etwa einem

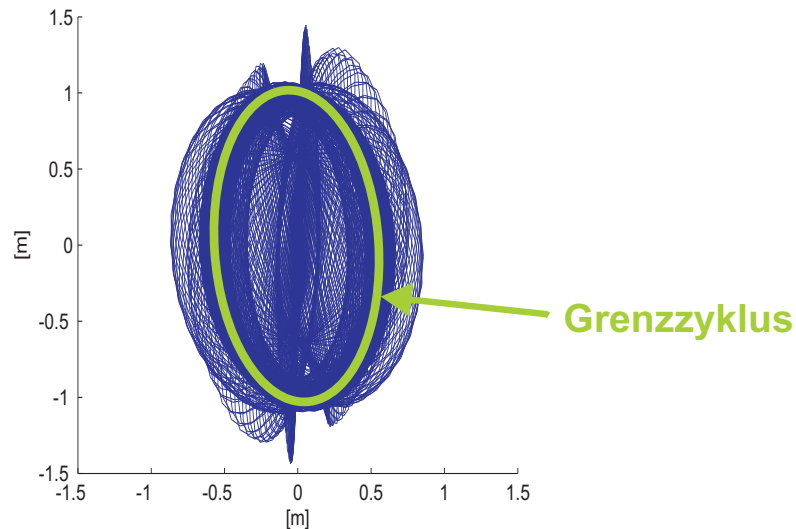


Bild 9.45: Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz  $\omega = 4,85 \text{ rad/s}$

Meter entspricht. Dies ändert sich schon bei  $\omega = 4,90 \text{ rad s}^{-1}$ . Es entsteht eine in Abb. 9.46 dargestellte, horizontal orientierte Ellipse. Für die Erregerkreisfrequenz  $\omega = 5,00 \text{ rad s}^{-1}$  verschwinden die horizontalen Schwingungsanteile fast, so dass sich eine sehr flache, nahezu senkrechte Ellipse mit vergleichsweise kleinen Amplituden von etwa  $15 \text{ cm}$  nach der Einschwingphase einstellt, siehe Abb. 9.47. In allen Fällen des untersuchten Erregerbereiches lag die zweite Schwingungsform wegen des ersten Nebeninstabilitätsbereiches in und/oder senkrecht zur Seilebene vor.

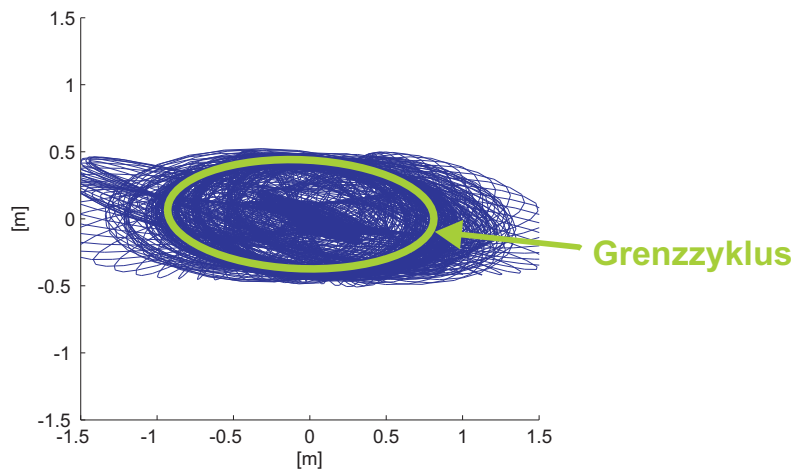


Bild 9.46: Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz  $\omega = 4,90 \text{ rad/s}$



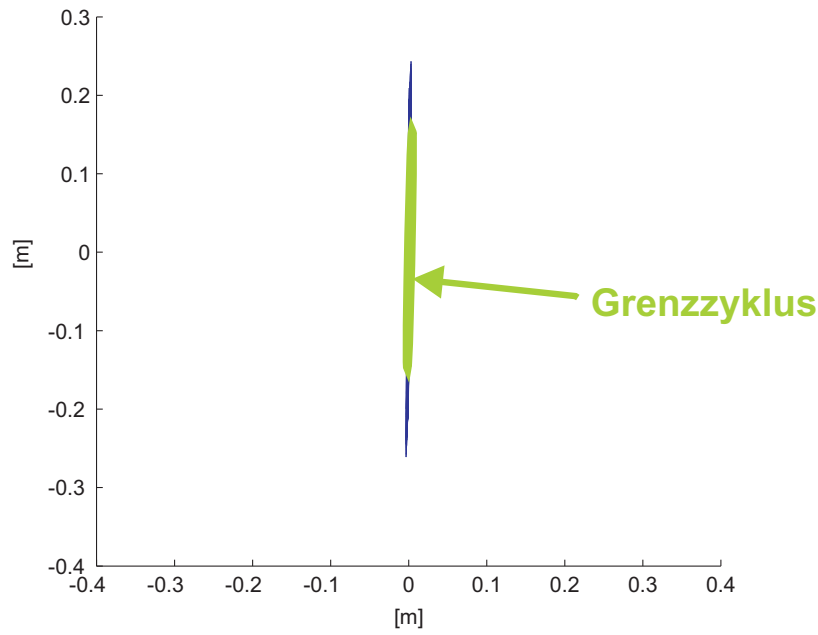


Bild 9.47: Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz  $\omega = 5,00 \text{ rad/s}$

### 9.4.3 Zusammenfassung der Parametererregung

Diese Simulationen zeigen deutlich, dass die beobachteten Schwingungen des Brückenüberbaus einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Seilschwingungen haben. Die Parametererregung wird in der Literatur für das Beispiel *Erasmusbrücke* deutlich unterschätzt. Darüber hinaus scheinen die parametererregten Schwingungen sogar die in [R4] dokumentierten Beobachtungen für das Seil 13 besser zu bestätigen als die Anregung in Folge Regen und Wind, da sich in allen Berechnungen zur Parametererregung eine sehr ausgeprägte zweite Eigenform einstellt. Die in der Simulation berechneten Amplituden von bis zu  $1,10 \text{ m}$  liegen teilweise über und zum anderen Teil unter den Beobachtungen, so dass der beobachtete Schwingungsbereich im Allgemeinen gut abgedeckt wird. Die Vielfältigkeit der Grenzyklen und auch die Veränderlichkeit der Amplituden in Abhängigkeit der Erregerfrequenz für dieses Seil lässt vermuten, dass eine Variation der Störung bzw. Anregung hinsichtlich Erregerfrequenz, Störampplituden und Störrichtung zu den beobachteten Schwingungen in der zweiten Eigenform mit Schwingungsamplituden von etwa  $60 \text{ cm}$  führen könnte.



## 10 Zusammenfassung und Ausblick

Die in dieser Arbeit verwendete nichtlineare Seiltheorie, siehe auch [H1] und [T2], unterscheidet sich von den meisten Formulierungen der Literatur durch ihren einfachen Aufbau, da nur maximal kubische Nichtlinearitäten in den Verschiebungskomponenten auftreten, während die klassischen Seilgleichungen - bedingt durch die Verwendung der Ingenieurdehnungen - kompliziertere Wurzelausdrücke enthalten. Die einfachere Struktur der nichtlinearen Gleichungen in dieser Arbeit wird durch Verwendung des GREENSchen Verzerrungsmaßes aus der Kontinuumsmechanik erreicht. Den Längsverzerrungen dieses Maßes müssen dann - entsprechend der Vorgehensweise in der Kontinuumsmechanik bei der Zuordnung von Spannungen und Verzerrungen - sogenannte nichtphysikalische Seilkraftkomponenten zugeordnet werden, die auf die Tangentenvektoren an die verformte Seillinie bezogen sind. Die auf dieser Basis entstandenen nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Seils sind denen der klassischen Theorie mechanisch gleichwertig, siehe [T2], aber mit geringerem numerischen Aufwand lösbar. Die Ortsdiskretisierung der nichtlinearen Seilgleichungen mittels Differenzenverfahren führt auf ein Differentialgleichungssystem in der Zeit, das in ein selbst erstelltes *MatLab*-Programm implementiert und durch den Löser *ode45* gelöst wird. Zur Überprüfung des Modells werden Vergleichsrechnungen mit im Ort mittels FE-Methode diskretisiertem Seil nach [T2] durchgeführt.

In diese Seiltheorie wird die Parametererregung unter vollständiger Berücksichtigung der Nichtlinearitäten eingebaut, bei der ein Auflagerpunkt periodisch bewegt wird. Bei den Simulationen wird für ein an der Universität der Bundeswehr untersuchtes Seil der Erregerkreisfrequenzbereich von  $\Omega = 4,4 \text{ rad/s}$  bis  $\Omega = 13,8 \text{ rad/s}$  untersucht. Die Vergleiche sowohl mit den Versuchen als auch mit durchgeführten Simulationen liefern an allen untersuchten Punkten sehr gute Übereinstimmungen sowohl qualitativ als auch quantitativ. Auftretende Unterschiede zu den Beobachtungen von REIF [R1] lassen sich durch den Versuchsablauf mit Hilfe des *Sprungphänomens* erklären und werden durch Versuche von TONIS [T5] bestätigt. Beobachtete Instabilitätserscheinungen wie z.B. Horizontal- oder Rotationsschwingungen werden rechnerisch bestätigt und lassen sich

mit Hilfe der Stabilitätskarten erklären.

Die vorgestellte Seiltheorie ist in der Lage, parametererregte Schwingungen richtig widerzuspiegeln. Im Gegensatz zu den Versuchen wird die Erregerfrequenz nicht stufenartig erhöht oder vermindert, da die Zeiten zwischen den Erregerfrequenzwechslern nicht bekannt sind und nur durch Annahmen realisiert werden könnten. Somit werden manche Grenzzyklen in den "Überhängen" nicht erreicht. Aufbauend auf diese Arbeit kann eine Bewegung der Auflagerpunkte implementiert werden, deren Erregerfrequenz, wie im Versuch von REIF, beliebig verändert werden kann, ohne jedesmal aus der statischen Gleichgewichtslage heraus beginnen zu müssen. Dabei sollten die Änderungen nach Erreichen eines Grenzzyklusses und in kleinen Stufen erfolgen, um ein Zusammenbrechen der Schwingungen zu verhindern. Durch diese Erweiterung sollte das Modell dann in der Lage sein, auch die Sprungphänomene und die Übergänge der verschiedenen Grenzzyklen abbilden zu können.

Nach erfolgreicher Überprüfung des implementierten Modells ist die Grundlage gelegt, die vorgestellte Seiltheorie auf den Lastfall Regen-Wind-induzierte Seilschwingungen anzuwenden. Dieses Schwingungsphänomen ist der Fachwelt seit 1986 durch eine Publikation von HIKAMI bekannt und kann bis heute nicht zufrieden stellend erklärt werden. Im Gegensatz zur Berechnung Regen-Wind-induzierter Schwingungen lassen sich die realen Schwingungen selbst durch relativ einfache, konstruktive Maßnahmen wirkungsvoll verhindern.

Bei der Simulation Regen-Wind-induzierter Schwingungen wird ein Fluid-Struktur-Struktur-Ansatz gewählt, der auf zwei nichtlineare, mehrfach gekoppelte Differentialgleichungssysteme für das Seil und die Rinnsale führt. Mit diesem Ansatz, bei dem die Rinnsale, wie in den Versuchen zur Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte in ihrer Querschnittsgeometrie als starr angenommen werden, führen die Berechnungen für das Seil 13 der *Erasmusbrücke* überwiegend zu Schwingungen in der dritten Schwingungsform, allerdings mit relativ kleinen Amplituden. Alle berechneten Schwingungsformen stellen sich automatisch durch Lösen der Differentialgleichungssysteme ausgehend vom Ausgangszustand unter Eigengewicht, Vorspannung und Wind ein. Dabei wurden in Abhängigkeit der Dämpfungsparameter auch Schwingungen von der zweiten bis zur fünften Eigenform erreicht. Schwingungen ähnlich der ersten Eigenform wurden im Gegensatz zu den Simulationen von DREYER nicht berechnet. Im Vergleich zu den Modellen auf Basis der Streifentheorie unter Verwendungen eines ebenen Ersatzsystems und zum Modell von DREYER spiegeln die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse die

---

beobachteten Schwingungen hinsichtlich der Schwingungsformen besser wider.

Zu einem Aufschaukelprozess als Folge eines instabilen Grundzustandes kommt es immer dann, wenn das Seil und die beiden Rinnsale affin über die Seillänge schwingen. Schwingungen in der zweiten, vierten oder fünften Eigenform führen im Grenzzyklus zu sehr kleinen Amplituden oder liegen bei der gewählten Anregung in einem stabilen Bereich, so dass die Anfangsstörung abklingt und sich der stabile Ausgangszustand wieder einstellt.

Bei einer Modifikation des Grundmodells wird durch den Faktor  $\chi$  in der Rinnsaldifferentialgleichung nur ein Teil der Beschleunigungskräfte des Seils in die Bewegung der Rinnsale übertragen. Die verbleibende, nicht in die Beschleunigung der Rinnsale umgesetzte Energie erklärt sich durch die Deformation des Rinnsalquerschnitts. Damit stellt diese Modifikation einen Ansatz unter Berücksichtigung eines verformbaren Rinnsals, der im Vergleich zu den NAVIER-STOKES-Gleichungen numerisch deutlich einfacher strukturiert ist. Trotzdem behalten die aerodynamischen Beiwerte ihre Gültigkeit, da lediglich die Interaktion zwischen Seil und Rinnsal durch den Deformationsfaktor  $\chi$  verändert wird.

Diese Verbesserung des Grundmodells liefert bei Verkleinerung der  $\chi$ -Werte von 1,00 auf 0,80 größere Seilschwingungen bei kleineren Rinnsalamplituden. Bei weiterer Reduktion bricht die obere Rinnsalschwingung zusammen.

Für sehr kleine Modifikationsfaktoren  $\chi$  stellen sich nach dem Auftreten eines Sprungphänomens beim oberen Rinnsal in eine luvwärtigere Position Schwingungen ebenfalls in der dritten Schwingungsform mit deutlich größeren Amplituden ein. Die Zeit bis zum Erreichen des Grenzzyklusses, der als charakteristisch für Regen-Wind-induzierte Schwingungen gilt, ist realitätsnäher. Für etwas größere  $\chi$ -Werte rutscht zunächst an wenigen Stellen das Rinnsal am Seilquerschnitt ab. Diese Verkürzung der Rinnsale führt zu kleineren Schwingungsamplituden des Seils in der dritten Schwingungsform, die den beobachteten Amplituden am nächsten kommen. Da dieser Fall im Modell eigentlich nicht vorgesehen ist, müssen die Ergebnisse durch weitere Modellanpassungen überprüft werden. Verlässt das Rinnsal jedoch an zu vielen Diskretisierungspunkten die obere Position auf dem Seil, bricht die obere Rinnsalschwingung in der dritten Schwingungsform zusammen und es stellt sich asymptotisch die statische Gleichgewichtslage ein.

Die Einarbeitung der Rinnsalverformung in das Modell ist scheinbar notwendig, um Regen-Wind-induzierte Schwingungen genauer modellieren zu können. Aus diesem Grund sollte in Zukunft versucht werden, von der Idee, die Rinnsale mit starrer Quer-

schnittsgeometrie ohne Deformation darzustellen, Abstand zu nehmen und diese mit Hilfe von hydrodynamischen Ansätzen unter Druck-, Trägheits- und Zähigkeitseinflüssen realitätsnah oder mit Hilfe des Deformationsfaktors  $\chi$  zu modellieren.

Ein weiterer Vorteil einer hydrodynamischen Betrachtung wäre die Möglichkeit, das Abspritzen der Wasserrinnsale vom Seil durch Seilbewegungen oder das Abblasen vom Seil durch starke Umströmung mit berücksichtigen zu können. Dieser allerdings stark erhöhte numerische Aufwand, z.B. durch die Verwendung von NAVIER-STOKESSchen Differentialgleichungen, bedarf, um die Berechnungszeiten bei einer ausreichend genauen Ortsdiskretisierung in Grenzen zu halten, einer optimierten - wann immer möglich - parallelisierten Programmierung.

Vergleiche der eigenen Ergebnisse mit Beobachtungen oder anderen Simulationen gestalten sich insofern als schwierig, da in vielen Veröffentlichungen für ein konkretes Beispiel mit verschiedenen Eingangsdaten gerechnet wurde oder da oft unklar ist, welche genauen Beobachtungen für den Einzelfall gemacht wurden.

Das aus den Erkenntnissen dieser Arbeit resultierende Modell zur Simulation Regen-Wind-induzierter Schwingungen müsste folgende Punkte berücksichtigen:

- Das gesamte Seil muss unter Berücksichtigung einer geeigneten Seiltheorie, wie z.B. in dieser Arbeit, erfasst werden. Modelle auf Basis der Streifentheorie erfassen die komplexen Zusammenhänge nicht hinreichend genau.
- Die Rinnsale schwingen auf der Seiloberfläche. Die Bewegungsgleichung der Rinnsale folgt aus dem Momentengleichgewicht am Seilquerschnitt an jedem Diskretisierungspunkt.
- Das Abfließen des Wassers in Seillängsrichtung darf auch weiterhin vermutlich vernachlässigt werden.
- Zur Modellierung der Scherwirkung zwischen Seil und Rinnsal, darstellbar durch einen Dämpfungsansatz mit  $d_\varphi(\dot{\varphi})$ , sind Versuche nach [D2] mit weiteren Seilneigungen durchzuführen, die besonders den Bereich kleiner Rotationsgeschwindigkeiten abdecken.
- Die dissipierte Deformationsenergie der Rinnsale bzw. des Wasserfilms auf der Oberfläche muss an jedem Diskretisierungspunkt des Seils in einer 2D-Querschnittsbetrachtung in Abhängigkeit der Umströmung und der Seilbewegung mittels hydromechanischer Verfahren untersucht werden. Falls dieses Vorgehen nu-

---

merisch zu aufwendig sein sollte, kann versucht werden, den in dieser Arbeit eingeführten Deformationsfaktor  $\chi$  in Laborversuchen zu ermitteln.

- In Abhängigkeit der Form des Wasserfilms oder auch der Lage der Rinnsale ergeben sich an jedem Diskretisierungspunkt aerodynamische Quer- und Auftriebskräfte, die wiederum als Lastfall in die Seilgleichung eingehen.
- Die relative Umströmungsgeschwindigkeit ist in Richtung und Größe stark abhängig von der Seilbewegung und variiert über die Seillänge. Dieser Einfluss sollte an keiner Stelle vernachlässigt werden.
- Die von den Strömungsverhältnissen abhängigen aerodynamischen Beiwerte müssen sich neben der Abhängigkeit der Rinnsalpositionen auch als Funktion der relativen Anströmgeschwindigkeit ergeben. Dazu müssen weitere Versuche zu den Beiwerten unter Berücksichtigung verschiedener REYNOLDS-Zahlen durchgeführt werden.
- Um die Windkräfte nicht zu überschätzen, sollte durch Beobachtungen oder in Laboruntersuchungen herausgefunden werden, auf welcher Länge und in welchen Bereichen sich obere bzw. untere Rinnsale ausbilden. Dieser Punkt kann vernachlässigt werden, wenn ein erweitertes Modell in der Lage wäre, die Bildung von Rinnsalen und das Abspritzen darzustellen. Dazu wäre allerdings eine 3D-Modellierung der gesamten Rinnsale nötig.
- Die Lösungsverfahren dieser nichtlinearen, mehrfach gekoppelten Differentialgleichungssysteme müssen wegen des numerischen Aufwandes unbedingt optimiert werden.

Wenn es zukünftig gelingt, Regen-Wind-induzierte Schwingungen unter Berücksichtigung der beschriebenen Fluid-Fluid-Struktur-Interaktion oder einer geeigneten, modifizierten Fluid-Struktur-Struktur-Interaktion hinreichend genau zu modellieren, sollte das Ziel bestehen, für Anwendungsbeispiele das Gefährdungspotenzial einzuschätzen und konkret Schwingungsformen und Amplituden zu berechnen. Die Ergebnisse könnten in Stabilitätskarten zusammengefasst werden, womit bereits in einigen Publikationen begonnen wurde.

Durch die Berücksichtigung von Biegesteifigkeiten lassen sich als mögliche Erweiterung auch Hänger von Stabbogenbrücken mit der vorgestellten Theorie nach [H3] berechnen.

Wenn das in ausreichendem Maße gelingt, kann von den bisher in Normen verwendeten, nur schwer physikalisch begründbaren Ersatzlastverfahren Abstand genommen werden. Im Idealfall lassen sich für die zu untersuchenden Seile gleichzeitig mehrere Lastfälle, wie zum Beispiel parametererregte Schwingungen einarbeiten, da es bei komplexen Bauwerken wie Schrägseilbrücken permanent zur Interaktion zwischen Pylonen, Brückenüberbau und den Seilen kommt.

Dass gerade die parametererregten Schwingungen zu sehr großen Amplituden führen können, zeigt diese Arbeit. Im Gegensatz zu einigen Veröffentlichungen der Literatur, in denen der Einfluss der leichten Bewegung des Brückenüberbaus auf die Schwingungen ausgeschlossen wird, kann dieser Lastfall für das Seil 13 der *Erasmusbrücke* die beobachteten Schwingungen in der zweiten Schwingungsform mit Doppelamplituden von etwa  $1,20\text{ m}$  unter Umständen besser erklären als die Regen-Wind-induzierten Schwingungen. Je nach Richtung, Amplitude und Frequenz der Auflagerbewegung lassen sich mit den parametererregten Schwingungen sehr viele Schwingungsformen mit stark variierenden Amplituden ermitteln.

Regen-Wind-induzierte Schwingungen können durch die Seilkraftänderung angrenzende Pylone oder den Brückenüberbau zu leichten Bewegungen anregen, die dann wiederum parametererregte Schwingungen an anderen Seilen hervorrufen. Erst durch die gemeinsame Betrachtung der beiden vorgestellten Lastfälle und unter vollständiger Berücksichtigung der Interaktion sämtlicher Bauteile kann die Komplexität und Vielfalt der Schwingungsmöglichkeiten an einem Bauwerk wie der *Erasmusbrücke* mit 16 Paar Schrägseilen erfasst werden. Dies stellt eine große Herausforderung für künftige Forschungsbemühungen dar.



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Die Meiko-Nishi-Brücke in Japan [I4]	11
2.1	Die Öresundbrücke zwischen Dänemark und Schweden [N3]	16
2.2	Die Erasmus-Brücke in Rotterdam [I4]	17
2.3	1-FHG-Galloping-Modell [N1]	22
2.4	2-FHG-Galloping-Modell[N1]	22
2.5	Widerstandsbeiwert eines glatten Kreiszyinders [N1]	24
2.6	Farø-Brücke, Dänemark [I3]	25
2.7	Schwingungsmöglichkeiten bei 2 Rinnsalen [S4]	26
2.8	Kugel ohne Stolperdraht aus [S4]	26
2.9	Kugel mit Stolperdraht aus [S4]	26
2.10	Überblick über Anregungsmechanismen bei Seilen [N1]	28
2.11	mögliche Oberflächenprofilierungen [K2]	29
2.12	Abtropfring [R4]	29
2.13	Cross-Ties: links: Fred-Hartman-Brücke [K2]; rechts: Brooklyn-Bridge [G3]	29
2.14	Ankerdämpfer [K2]	30
2.15	Kolbendämpfer (Erasmusbrücke) [R2]	30
3.1	Das mechanische Modell von Yamaguchi (1990) [Y1]	32
3.2	Vergleich der berechneten Amplituden mit Messungen von OHSHIMA [W1]	33
3.3	Vergleich der berechneten Amplituden mit Messungen von HIKAMI [W1]	33
3.4	Das mechanische Modell von PEIL und NAHRATH (2001) [N1]	34
3.5	3-FHG-Modell nach Robra [R4]	37
3.6	Die Anregungstypen C und D nach ROBRA [R4]	38
3.7	Das mechanische Modell nach SEIDEL und DINKLER [S4]	39
3.8	Anströmwinkel	45
3.9	Einfluss des Turbulenzgrades $I_u$ auf die Schwingungsamplitude [S3]	47
4.1	Die Kinematik des Einzelseils [T2]	54

4.2	Die Aufspaltung der vektoriellen Seilkraft [T2] . . . . .	55
4.3	Kräfte am Seilelement (nach [T2]) . . . . .	56
4.4	Das finite Seilelement [T2] . . . . .	58
5.1	Programmbaum zur Berechnung Regen-Wind-induzierter Schwingungen . .	67
6.1	Alex-Fraser-Bridge in Kanada [N3] . . . . .	73
6.2	Pont-de-Ben-Ahin in Belgien [T2] . . . . .	74
6.3	Stabilitätskarte des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes [B8] . . . . .	77
6.4	Parameterschwingung eines Hauptinstabilitätsbereiches [B8] . . . . .	78
6.5	Stabilitätskarten eines Seiles mit und ohne Dämpfung [T2] . . . . .	80
6.6	Momentaufnahme des Schwingungsversuches von REIF [R1] . . . . .	83
6.7	Kraft-Dehnungs-Diagramm für das Seil von REIF . . . . .	84
6.8	Vergleich mit REIF . . . . .	86
6.9	Das Sprungphänomen mit versteifender und verweichender Feder [T5] . . .	87
6.10	Der Versuch "V-04" von TONIS [T5] . . . . .	88
6.11	Vergleich für die Rotationsschwingung bei $\Omega = 5,35 \text{ rad s}^{-1}$ . . . . .	89
6.12	Vergleich für die Horizontalschwingung bei $\Omega = 9,68 \text{ rad s}^{-1}$ . . . . .	90
6.13	Berechnete Amplituden in und senkrecht zur Seilebene . . . . .	91
6.14	Darstellung der Schwingungsformen bei $\Omega = 11,2 \text{ rad s}^{-1}$ . . . . .	93
6.15	Darstellung der Schwingungsform "2vsSFGP" bei $\Omega = 13,8 \text{ rad s}^{-1}$ . . .	94
7.1	Vorzeichendefinitionen bei DREYER . . . . .	102
7.2	Zusammenhang der Koordinatensysteme . . . . .	103
7.3	Darstellung der effektiven Anströmung . . . . .	104
7.4	Winkel für relative Windanströmung . . . . .	105
7.5	Winkelübersicht . . . . .	106
7.6	Darstellung der Rinnsalkräfte . . . . .	110
8.1	Versuchsaufbau zur Bestimmung der Rinnsaldämpfung nach [D2] . . . . .	117
8.2	Ergebnisse des Versuchs zur Bestimmung der Rinnsaldämpfung nach [D2]	117
8.3	Kräftedarstellung zur Bestimmung der Rinnsaldämpfung . . . . .	118
8.4	Rinnsaldämpfung $d_\varphi$ für eine Seilneigung von $\delta = 38^\circ$ . . . . .	121
8.5	Rinnsaldämpfung für eine Seilneigung von $\delta = 45^\circ$ . . . . .	122
8.6	Rinnsaldämpfung für eine Seilneigung von $\delta = 52^\circ$ . . . . .	123
9.1	Die Erasmusbrücke in Rotterdam (Niederlande) . . . . .	129

9.2	Seillinie unter Eigengewicht und Darstellung von Kräftegleichgewichten [T2]	132
9.3	Darstellung des statischen Seildurchhangs bezogen auf die Seilsehne . . . . .	135
9.4	Statische Rinnsalpositionen für das Seil 13 der Erasmusbrücke . . . . .	137
9.5	Orbit des Mittelknotens . . . . .	140
9.6	Schwingung des oberen Rinnsals in der 2. Eigenform . . . . .	141
9.7	Schwingung des oberen Rinnsals am Viertelknoten bei der 2. Schwingungsform	142
9.8	Vertikalschwingung des Seils in der 5. Schwingungsform . . . . .	143
9.9	Schwingung des oberen Rinnsals in der 5. Schwingungsform . . . . .	143
9.10	Schwingung des Mittelknotens bei der 5. Schwingungsform . . . . .	144
9.11	Schwingung des oberen Rinnsals am Mittelknoten bei der 5. Schwingungsform	144
9.12	Darstellung des herabrutschenden oberen Rinnsals . . . . .	145
9.13	Orbit des Mittelknotens für $\chi = 1,0$ und $\chi = 0,95$ . . . . .	148
9.14	Orbit des Mittelknotens für $\chi = 0,90$ und $\chi = 0,80$ . . . . .	148
9.15	Vertikalschwingung des Mittelknotens für $\chi = 1,00$ und $\chi = 0,80$ . . . . .	149
9.16	Horizontalschwingung des Mittelknotens für $\chi = 1,00$ und $\chi = 0,80$ . . . . .	149
9.17	Rinnsalamplituden des oberen Rinnsals für $\chi = 1,00$ und $\chi = 0,80$ . . . . .	150
9.18	obere Rinnsalschwingung über die Seillänge bei $\chi = 0,80$ . . . . .	150
9.19	Schwingungsverhalten am Mittelknoten bei $\chi = 0,75$ . . . . .	151
9.20	vertikale Seilschwingung für $\chi = 0,01$ in der 3. Eigenform . . . . .	152
9.21	horizontale Seilschwingung für $\chi = 0,01$ in der 3. Eigenform . . . . .	152
9.22	Schwingungsorbit des Seilmittelknotens für $\chi = 0,01$ . . . . .	153
9.23	Schwingung des unteren Rinnsals über die Seillänge bei $\chi = 0,01$ . . . . .	153
9.24	Schwingung des oberen Rinnsals über die Seillänge bei $\chi = 0,01$ . . . . .	154
9.25	Schwingungsamplituden des oberen Rinnsals in Seilmitte bei $\chi = 0,01$ . . . . .	154
9.26	Schwingungsamplituden des unteren Rinnsals in Seilmitte bei $\chi = 0,01$ . . . . .	155
9.27	vertikaler Schwingungsverlauf des Seilmittelknotens für $\chi = 0,01$ . . . . .	156
9.28	horizontaler Schwingungsverlauf des Seilmittelknotens für $\chi = 0,01$ . . . . .	156
9.29	vertikaler Schwingungsverlauf des Seilmittelknotens für $\chi = 0,10$ . . . . .	158
9.30	Orbit des Mittelknotens für $\chi = 0,10$ . . . . .	159
9.31	vertikale Schwinggeschwindigkeit des Mittelknotens bei $\chi = 0,01$ . . . . .	160
9.32	horizontale Schwinggeschwindigkeit des Mittelknotens bei $\chi = 0,01$ . . . . .	160
9.33	vertikale Schwinggeschwindigkeiten über die Seillänge . . . . .	161
9.34	Resultierende relative Anströmgeschwindigkeit $U_{rel}$ . . . . .	161
9.35	Winkelgeschwindigkeit des oberen Rinnsals am Mittelknoten . . . . .	162

9.36	Winkelgeschwindigkeit des unteren Rinnsals am Mittelknoten . . . . .	163
9.37	Winkelgeschwindigkeiten des unteren Rinnsals über die Seillänge . . . . .	163
9.38	Seilkraftänderung in Seilmitte für $\chi = 0,01$ . . . . .	164
9.39	Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz $\omega = 4,70 \text{ rad/s}$ . .	167
9.40	Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz $\omega = 4,80 \text{ rad/s}$ . .	167
9.41	vertikale Schwingungen des Seils bei einer Erregerkreisfrequenz $\omega = 4,80 \text{ rad/s}$	168
9.42	horizontale Schwingungen des Seils bei einer Erregerkreisfrequenz $\omega = 4,80 \text{ rad/s}$	168
9.43	vertikaler Einschwingvorgang des Viertelknotens bei $\omega = 4,80 \text{ rad/s}$ . . . .	169
9.44	horizontaler Einschwingvorgang des Viertelknotens bei $\omega = 4,80 \text{ rad/s}$ . . .	169
9.45	Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz $\omega = 4,85 \text{ rad/s}$ . .	170
9.46	Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz $\omega = 4,90 \text{ rad/s}$ . .	170
9.47	Orbit des Viertelknotens bei einer Erregerkreisfrequenz $\omega = 5,00 \text{ rad/s}$ . .	171

## Tabellenverzeichnis

2.1	Beobachtete Schwingungsamplituden nach [G1] . . . . .	18
3.1	Übersicht der vorgestellten Modelle . . . . .	40
3.2	Beobachtete Windgeschwindigkeiten an Brücken [R4] . . . . .	44
3.3	Dämpfungswerte ausgewählter Brückenseile nach [R2], [D2] und [R4] . . . . .	51
3.4	Regen-Wind-induzierte Schwingungsformen und -frequenzen [R4] . . . . .	52
5.1	Zusammenhang zwischen der Stufenzahl $s$ und der Konvergenzordnung $p$ [K1] . . . . .	69
5.2	Das BUTCHER-Tableau [K1] . . . . .	69
5.3	Das BUTCHER-Tableau für eingebettete Verfahren [K1] . . . . .	71
6.1	Die ersten 10 Eigenfrequenzen des Seils aus [R1] . . . . .	91
6.2	Übersicht der betroffenen Instabilitätsbereiche . . . . .	92
8.1	Messergebnisse und Rinnsaldämpfungen für die Seilneigung von $\delta = 38^\circ$ . . . . .	121
8.2	Messergebnisse und Rinnsaldämpfungen für die Seilneigung von $\delta = 45^\circ$ . . . . .	122
8.3	Messergebnisse und Rinnsaldämpfungen für die Seilneigung von $\delta = 52^\circ$ . . . . .	123
8.4	Übersicht der allgemeinen Seileigenschaften . . . . .	126
8.5	Dämpfungswerte und Strömungsverhältnisse . . . . .	126
9.1	Die ersten 10 Eigenfrequenzen . . . . .	135



## Literaturverzeichnis

- [A1]       **Ampunant, P.**  
Numerische Simulation Regen-Wind induzierter Seilschwingungen  
*Diplomarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2007*
- [A2]       **Aps, U.; Thalheim, J.U.; Heinen, A.H.**  
Wirkung von Störungen auf die Stabilität von Seilschwingungen  
*PAMM, Volume 6, S. 285-286; 2006*
- [B1]       **Bathe, K.-J.**  
Finite-Elemente-Methoden  
*Springer, Berlin, 1986*
- [B2]       **Blank, L.**  
Vergleich von Zeitintegrationsverfahren für parametererregte Seilschwingungen  
*Bachelorarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2009*
- [B3]       **Bolotin, W.W.**  
Kinetische Stabilität elastischer Systeme  
*VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961*
- [B4]       **Bosdogianni, A.; Olivari, D.**  
Wind- and rain-induced oscillations of cables of stayed bridges  
*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics (64), S.171-185, 1996*
- [B5]       **Bossel, H.**  
Modellbildung und Simulation  
*Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1994*

- [B6]       **Bossel, H.**  
Simulation dynamischer Systeme  
*Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1992*
- [B7]       **Brytchkow, J. A.; Maritschew, I.**  
Tabellen unbestimmter Integrale  
*Frankfurt, 1992*
- [B8]       **Büllesbach, J.**  
Kinetische Stabilitätsprobleme der Stabtheorie  
*Diplomarbeit, Universität der Bundeswehr München, 1992*
- [C1]       **Collatz, L.**  
Differentialgleichungen  
*Stuttgart, Teubner, 1973*
- [C2]       **Cosentino, N. et al**  
Rain-wind induced vibration of inclined stay cables  
*Wind and structures 6(6), 2003*
- [D1]       **Den Hartog, J.P.**  
Mechanische Schwingungen  
*Berlin/ Göttingen/ Heidelberg, Springer, 2004*
- [D2]       **Dreyer, O.**  
Regen-Wind induzierte Seilschwingungen in laminarer und turbulenter  
Strömung  
*Dissertation, TU Braunschweig, 2004*
- [E1]       **Engel, M.; Dinkler, D.**  
Weiterentwicklung eines mechanischen Modells zur Beschreibung Regen-  
Wind induzierter Schwingungen: Zwischenbericht August 2008  
*Veröffentlichung der Universitätsbibliothek Braunschweig, 2008*
- [F1]       **Flamand, O.**  
Rain-wind induced vibration of cables  
*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics (57), S.353-  
362, 1995*



- [F2] **Flesch, R.**  
Baudynamik praxisgerecht  
*Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin, 1993*
- [G1] **Geurts, C. P. W.; van Staalduinen, P. C.**  
Estimation of the effects of rain-wind induced vibration in the design stage of inclined stay cables  
*Proceedings of the 10th International Conference on Wind Engineering, S. 885-891, Copenhagen, 1999*
- [G2] **Geurts, C. P. W.; Vrouwenvelder, T.**  
Numerical modeling of rain-wind induced vibration: Erasmus Bridge, Rotterdam  
*Structural Engineering International (8), S.129-135, 1998*
- [G3] **Gilow, T.**  
Untersuchungen zu Seilschwingungen  
*Diplomarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2005*
- [G4] **Gu, M.; Du, X.**  
Testing investigation for rain-wind induced vibration and its control of cables of cable-stayed bridges  
*Proceedings of the 11th International Conference on Wind Engineering, S. 2339-2346, Lubbock, 2003*
- [G5] **Gu, M.; Du, X.**  
Experimental investigation of rain-wind-induced vibration of cables in cable-stayed bridges and its migration  
*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 93(1), 2005*
- [G6] **Gu, M.; Lu, Q.**  
Theoretical analysis of wind-rain induced vibration of cables of cable-stayed bridges  
*Proceedings of the 5th Asia-Pacific Conference on Wind Engineering, S. 125-128, Kyoto, 2001*

- [H1]       **Heinen, A.H.; Thalheim, J.-U.**  
Neufassung und Anwendung einer nichtlinearen Seiltheorie  
*PAMM, Volume 6, S.305-306, 2006*
- [H2]       **Heinen, A.H.; Büllesbach, J.**  
Kinetische Stabilität gerader Stäbe - Theorie und Beispiele  
*Forschungs- und Seminarberichte aus dem Gebiet der Technischen Mechanik, Universität der Bundeswehr München, 1993*
- [H3]       **Heinen, A.H.**  
Handschriftliche Ausarbeitungen zu Regen-Wind-induzierten Schwingungen  
*Universität der Bundeswehr, München, 2007 - 2009*
- [H4]       **Hikami, Y.**  
Rain-wind induced vibrations of cables in cable-stayed bridges  
*Journal of Japan Association of Wind Engineering (27), 1987*
- [H5]       **Hikami, Y.; Shiraishi, N.**  
Rain-wind induced vibrations of cables in cable stayed bridges  
*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics (29), S.409-418, 1988*
- [I1]       **Irvine, H.M.**  
Cable Structures  
*Dover Publications, New York, 1992*
- [I2]       **Irvine, H.M.**  
Free Vibrations of inclined cables  
*Journal of the Structural Division ASCE 104(ST2), S.343-347, 1978*
- [I3]       **Internetpublikation**  
Abruf vom 20.10.08  
*<http://farm3.static.flickr.com>*
- [I4]       **Internetpublikation**  
Abruf vom 22.10.08  
*[www.japan-photo.de/MEIKO-NISHI-OHASHI.jpg](http://www.japan-photo.de/MEIKO-NISHI-OHASHI.jpg)*

- [K1] **Korch, M.**  
Effiziente Implementierung eingebetteter Runge-Kutta-Verfahren durch  
Ausnutzung der Speicherzugriffslokalität  
*Dissertation, Universität Bayreuth, 2006*
- [K2] **Kumarasena, S.; Jones, N.P.; Irwin, P.; Taylor, P.**  
Wind Induced Vibration of Stay Cables  
*FHWA / HNTB Corporation, RI98-034 RDT05-004, Boston, 2005*
- [L1] **Langsoe, H. E.; Larsen, O. D.**  
Generating Mechanisms for Cable Stay Oscillations at the FarøBridges  
*Proceedings of the International Conference on Cable-Stayed-Bridges,  
S.1023-1033, Bangkok, 1987*
- [L2] **Lüesse, G.; Ruschweyh, C.**  
Regen-Wind-induzierte Schwingungserscheinungen an der Elbebrücke  
Dömitz  
*Stahlbau (65), S.105-114, 1996*
- [M1] **Magnus, K.; Popp, K.; Sextro, W.**  
Schwingungen  
*Vieweg und Teubner, Wiesbaden, 2008, 8. Auflage*
- [M2] **Main, J. A.; Jones, N. P.**  
Full-scale measurements of stay cable vibration  
*Proceedings of the 10th International Conference on Wind Engineering,  
S.963-971, Copenhagen, 1999*
- [M3] **Matsumoto, M.; Saitoh, T.**  
Response characteristics of rain-wind induced vibration of stay-cables of  
cable-stayed bridges  
*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics (57), S.323-  
333, 1995*
- [M4] **Matsumoto, M.; Shiraishi, N.**  
Rain-wind induced vibration of cables of cable-stayed bridges  
*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics (41-44),  
S.2011-2022, 1992*

- [M5]       **Matsumoto, M.; Yamagishi, M.**  
Various mechanism of inclined cable aerodynamics  
*Proceedings of the 9th International Conference on Wind Engineering, S. 759-770, New Dehli, 1995*
- [N1]       **Nahrath, N.**  
Modellierung Regen-Wind-induzierter Schwingungen  
*Dissertation, TU Braunschweig, 2003*
- [N2]       **Norton, D.J.; Heidmann, C.J.**  
Wind tunnel tests of inclined circular cylinders  
*Proceedings of then Offshore Technology Conference, Houston, 1981*
- [N3]       **Internetpublikation**  
Abruf vom 08.11.05  
*www.bernd-nebel.de*
- [P1]       **Peil, U.; Nahrath, N.**  
Modellierung Regen-Wind induzierter Schwingungen  
*Tagung der Windtechnologischen Gesellschaft, Berichte Nr.7, S.85-96, Aachen, 2001*
- [P2]       **Peil, U.; Nahrath, N.; Dreyer, O.**  
Modellierung Regen-Wind induzierter Schwingungen - Grundlagen, Modellierung und Berechnungsmethoden  
*VDI-Berichte Nr. 1754 zur Tagung Baudynamik, S.271-285, Kassel, 2003*
- [P3]       **Persoon, A.J. ; Noorlander, K.**  
Full-scale measurements on the Erasmus Bridge after rain/wind induced cable vibrations  
*Proceedings of the 10th International Conference of Wind Engineering (ICWE), 1999*
- [P4]       **Petersen, C.**  
Dynamik der Baukonstruktionen  
*Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg & Sohn, 1996*

- [P5]       **Petersen, C.**  
Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau  
*Maurer & Söhne, München, 2001*
- [R1]       **Reif, F.**  
Mittels geregelter harmonischer Endpunktverschiebung induzierte räumliche Seil­schwingungen  
*Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, 97/4, UniBW München, 1997*
- [R2]       **Reusink, J.H.; Kuipers, M.L.J.**  
Dämpfer gegen Regen-Wind- induzierte Schwingungen der Schrägseile an der Erasmusbrücke  
*Stahlbau 67, Heft 10, S. 768-775, 1998*
- [R3]       **Robertson A. C.; Taylor, I. J.**  
Effects of rivulets on a circular cylinder usind a 2D discrete vortex method  
*Proceedings of the 12th International Conference on Wind Engeneering, Cairns, 2007*
- [R4]       **Robra, J.**  
Regen-Wind induzierte Schwingungen von Schrägkabeln und Hängern – Ein Rechenmodell zur Vorhersage und Maßnahmen zur Verhinderung  
*Dissertation, TU Wien, 2003*
- [S1]       **Saito, Toru ; Matsumoto, Masaru**  
Rain-Wind Excitation of cables on cable-stayed Higashi-Kobe bridge and cable vibration control  
*Proceedings of the International Conference on cable-stayed and suspension bridges (AFPC), 1994*
- [S2]       **Schütz, R.**  
Ingenieurbüro Schütz - Brückenbau  
*www.ibdrs.de/data/pics, 2005*

- [S3]       **Schwarzkopf, D.**  
Regen-Wind induzierte Schwingungen – Grundlagen und ein Berechnungsmodell  
*Dissertation, RWTH Aachen, 2004*
- [S4]       **Seidel, C.; Dinkler, D.**  
Phänomenologie und Modellierung Regen-Wind induzierter Schwingungen  
*Bauingenieur, Band 79, S.145-154, 2004*
- [S5]       **Stierner, S.F.; Taylor, P.; Vincent, D.H.C.**  
Full Scale Dynamic Testing of the Annacis Bridge  
*IABSE Proceedings, IABSE Periodica, 1988*
- [T1]       **Taylor, I.J.; Robertson, A.C.; Wilson, S.K.; Duffy, B.R.; Sullivan, J.M.**  
New developments in rain-wind-induced vibrations of cables  
*Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings, S. 73-86, Glasgow, 2010*
- [T2]       **Thalheim, J.U.**  
Nichtlineare Seilschwingungen und Stabilitätsanalysen für Seilbewegungen  
*Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2003*
- [T3]       **Thalheim, J.U.; Heinen, A.H.; Aps, U.**  
Nonlinear vibration effects, analysis of instability phenomena  
*Structural Dynamics, Volume 3, EUROLYN, Rotterdam, 2005*
- [T4]       **Thalheim, J.U.; Heinen, A.H.**  
Nichtlineare Seilschwingungen und Stabilitätsanalysen für Seile  
*PAMM, Volume 4, S. 113-114, 2004*
- [T5]       **Tonis, D.**  
Zum dynamischen Verhalten von Abspannseilen  
*Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 1989*

- [V1]       **Verwiebe, C.**  
Neue Erkenntnisse über die Erregermechanismen Regen-Wind-induzierter Schwingungen  
*Stahlbau (65), S.547-550, 1996*
- [V2]       **Verwiebe, C.**  
Erregermechanismen von Regen-Wind induzierten Schwingungen  
*Baukonstruktionen unter Windeinwirkung, Vortragsband der 5. Dreiländertagung der Windtechnologischen Gesellschaft, WTG-Berichte, Nr. 5, S. 101-119, Aachen, 1998*
- [W1]       **Wang, L.Y.; Xu, Y.L.**  
Wind-rain-induced vibration of cable: an analytical model (1)  
*International Journal of Solids and Structures (40), 2003*
- [W2]       **Wang, L.Y. et al.**  
Fluid dynamics around an inclined cylinder with running water rivulets  
*Journal of Fluids and Structures 21(1), 2005*
- [W3]       **Weingartner, M.**  
Parametererregte Schwingungen - Theoretische Grundlagen und Berechnungen zu Seilschwingungen  
*Bachelorarbeit, Universität der Bundeswehr, 2009*
- [X1]       **Xu, Y.L; Wang, L.Y.**  
Analytical study of wind-rain-induced cable Vibration: SDOF model  
*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics (91), S.27-40, 2003*
- [Y1]       **Yamaguchi, H.**  
Analytical study on growth mechanism of rain vibration of cables  
*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics (33), S.73-80, 1990*

