

Experimentelle Charakterisierung, Modellierung und FE-Berechnung thermomechanischer Kopplungen

am Beispiel eines rußgefüllten Naturkautschuks

Dipl.-Ing. Benedikt Dippel

Vollständiger Abdruck der von der
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
der Universität der Bundeswehr München
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Hans-Joachim Gudladt
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Alexander Lion
Zweitgutachter: Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels

Die Dissertation wurde am 01. April 2015 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 06. Juli 2015 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 07. Juli 2015 statt.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist das Resultat meiner Forschungsarbeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität der Bundeswehr München und wurde von der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen "Otto von Guericke" e.V. (AiF) finanziert.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei meinem Doktorvater, Herrn Professor Alexander Lion, der mir die Möglichkeit gab, mich der Forschung auf einem interessanten Themengebiet zu widmen. Stets nahm er sich für konstruktive fachliche Diskussionen Zeit und brachte mich so in meiner Arbeit voran.

Außerdem möchte ich mich bei Herrn Professor Stefan Diebels bedanken, der freundlicherweise das Koreferat übernommen hat, sowie bei Herrn Professor Gudladt für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Michael Johlitz für seine Förderung und den fachlichen Austausch, der maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Außerdem danke ich Ihm für Hilfestellungen in administrativen Fragen und für die Erzeugung eines sehr angenehmen Arbeitsklimas.

Den Mitarbeitern des Instituts für Mechanik möchte ich ebenfalls für eben jenes angenehme Arbeitsklima und die schöne Zeit am Institut danken. Zahlreiche fruchtbare Diskussionen und die stets verlässliche Unterstützung der technischen Angestellten waren ein wichtiger Baustein für das Gelingen der Arbeit. Die Zusammenarbeit war immer von großer Kollegialität geprägt und hat die Arbeit am Institut mit Motivation und Spaß erfüllt.

Auch Herrn Thomas Kroth M. Sc. möchte ich herzlich für die konstruktive Zusammenarbeit am gemeinsamen AiF-Projekt und das freundschaftliche Verhältnis danken, das sich in diversen Projektbesprechungen entwickelt hat.

Mein persönlicher Dank gilt schließlich meinen Eltern und meinen Geschwistern, sowie meiner Freundin Ines, die nicht nur durch Korrekturen an dieser Arbeit, sondern auch durch stete Unterstützung und Motivation zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Benedikt Dippel

Abstract

In numerous areas of industrial applications elastomers play an important role. Especially in the automotive industry, they are used in various applications: As sealing material, in tires or in bearings in which they inhibit vibration propagating to the passenger compartment. In the latter case, the material is subjected to the static load of the weight of the mounted component. Added to that, the material has to bear dynamic load that stems from engine vibrations and irregularities of the road surface. This variety of mechanical stresses is applied to the elastomer at highly fluctuating temperatures. In cold climates temperatures of below 0°C can occur, in warm climates, as well as in vicinity of a running engine, high temperatures of 80°C and more can be reached. In addition, the elastomer's temperature rises due to self-heating under dynamic loads.

In order to determine these numerous influences, the first part of this work summarises various experimental investigations on a carbon black-filled natural rubber which show the temperature-dependent mechanical behaviour in the cases of tensile, compressive and shear loads. In addition, the thermal properties such as the specific heat capacity, the thermal conductivity and the thermal expansion coefficient are examined. In combined experiments, dynamically loaded specimens are investigated with regard to their surfaces' self-heating.

In the second part of this work, the experimental results are transferred to a material model which is able to mimic the fully coupled thermomechanical properties of the investigated elastomer for finite deformations. To achieve correct behaviour, the coupling is formulated in both directions - changes in temperature affect the mechanical behaviour as well as mechanical stresses change the temperature.

For the validation of the presented material model, the model is parameterised based on the experimental results and implemented in a finite element code. With these validations it is shown that the model mimics the relevant effects which are observed experimentally.

Zusammenfassung

In vielen Bereichen der Industrie spielen Elastomere heutzutage eine große Rolle. Gerade in der Automobilindustrie werden sie vielerorts eingesetzt, sei es als Dichtungswerkstoff, für Reifen oder als Lagermaterial für Bauteile, die Schwingungen vom Fahrzeuginsassen fernhalten sollen. Im Falle letzterer Anwendungen wird der Werkstoff zum einen durch das Gewicht des gelagerten Bauteils statisch belastet, zum anderen wirken Motorschwingungen und durch Unebenheiten im Untergrund bedingte dynamische Belastungen auf ihn ein. Diese Vielfalt von mechanischen Beanspruchungen erfährt das Bauteil bei stark schwankenden Temperaturen. In kalten Gefilden können Temperaturen von deutlich unter 0°C auftreten, in warmen Gegenden, grundsätzlich aber auch in der Nähe des Aggregates, werden hohe Temperaturen von 80°C und mehr erreicht. Hinzu kommt, dass sich das Material unter dynamischer Last aufgrund von Dissipation mitunter stark selbst erwärmt.

Um diese Vielzahl von Einflüssen erfassen und abbilden zu können, werden in dieser Arbeit experimentelle Untersuchungen an einem rußgefüllten Naturkautschuk durchgeführt, die sowohl im Falle von Zug-, als auch von Druck- und Scherbelastungen das temperaturabhängige mechanische Verhalten widerspiegeln. Dies geschieht sowohl für quasistatische, als auch für dynamische Beanspruchungen. Zugleich werden die thermischen Eigenschaften untersucht, insbesondere die spezifische Wärmekapazität, die thermische Leitfähigkeit und der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient. In kombinierten Versuchen werden Proben dynamisch beansprucht und gleichzeitig deren Eigenerwärmung durch dissipative Effekte gemessen.

Die Ergebnisse der Versuche werden im theoretischen Teil der Arbeit in ein Materialmodell überführt, welches die thermomechanisch gekoppelten Eigenschaften für finite Deformationen abbilden kann. Die Kopplung findet dabei in beide Richtungen statt - Veränderungen in der Temperatur beeinflussen das mechanische Verhalten, mechanische Beanspruchungen verändern die Temperatur.

Zur Validierung wird das so motivierte Materialmodell anhand von Versuchen parametrisiert und in einen Finite Elemente Code implementiert. Es wird gezeigt, dass das Modell die relevanten, im Experiment beobachteten Effekte abbildet.

Nomenklatur

Allgemeine Schreibweise für Tensoren

a, b, \dots	Tensoren 0. Stufe (Skalare)
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Tensoren 1. Stufe (Vektoren)
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Tensoren 2. Stufe (Dyaden)

Spezielle kontinuumsmechanische Größen

\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{F}_θ	thermischer Deformationsgradient
\mathbf{F}_M	mechanischer Deformationsgradient
\mathbf{F}_e	elastischer Deformationsgradient
\mathbf{F}_i	inelastischer Deformationsgradient
$\bar{\mathbf{F}}$	volumetrischer Deformationsgradient
$\hat{\mathbf{F}}$	isochorer Deformationsgradient
$J = \det \mathbf{F}$	Jacobi-Determinante
$J_{(\bullet)} = \det \mathbf{F}_{(\bullet)}$	Determinante des jeweiligen Deformationsgradienten
λ_i	Streckungen
\mathbf{u}	Verschiebungsfeld
$\mathbf{v}, \dot{\mathbf{x}}$	Geschwindigkeitsfeld
$\mathbf{a}, \ddot{\mathbf{x}}$	Beschleunigungsfeld
$d\mathbf{X}$	Linielement der Referenzkonfiguration

$d\mathbf{x}$	Linielement der Momentankonfiguration
$d\mathbf{A}$	Flächenelement der Referenzkonfiguration
da	Flächenelement der Momentankonfiguration
dV	Volumenelement der Referenzkonfiguration
dv	Volumenelement der Momentankonfiguration
\mathbf{U}, \mathbf{V}	Strecktensoren
\mathbf{R}	Rotationstensor
\mathbf{C}	rechter Cauchy-Green Deformationstensor
\mathbf{C}_M	mechanischer rechter Cauchy-Green Deformationstensor
$\hat{\mathbf{C}}$	isochorer rechter Cauchy-Green Deformationstensor
\mathbf{C}_e	elastischer rechter Cauchy-Green Deformationstensor
\mathbf{C}_i	inelastischer rechter Cauchy-Green Deformationstensor
\mathbf{B}	linker Cauchy-Green Deformationstensor
\mathbf{B}_M	mechanischer linker Cauchy-Green Deformationstensor
$\hat{\mathbf{B}}$	isochorer linker Cauchy-Green Deformationstensor
\mathbf{B}_e	elastischer linker Cauchy-Green Deformationstensor
\mathbf{B}_i	inelastischer linker Cauchy-Green Deformationstensor
$(\hat{\bullet})$	isochore kontinuumsmechanische Größen
$(\bar{\bullet})$	volumetrische kontinuumsmechanische Größen
$(\bullet)_e$	elastischer Anteil einer kontinuumsmechanischen Größen
$(\bullet)_i$	inelastischer Anteil einer kontinuumsmechanischen Größen
$(\bullet)_M$	mechanischer Anteil einer kontinuumsmechanischen Größen
$(\bullet)_\theta$	thermischer Anteil einer kontinuumsmechanischen Größen
$(\bullet)^D$	Deviator einer kontinuumsmechanischen Größe

$\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	Identitätstensor 2. Stufe
$\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}$	Dehnung, innere Energie
ε_e	elastische Dehnung
ε_i	inelastische Dehnung
\mathbf{E}	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\Sigma}$	Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration (TMZ)
$\boldsymbol{\Omega}$	Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration (VIZ)
$\boldsymbol{\Gamma}$	Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration (EIZ)
\mathbf{A}	Euler-Almansi Verzerrungstensor
$\dot{\mathbf{F}}$	materieller Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{L}	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{D}	Deformationsgeschwindigkeitstensor
\mathbf{W}	Wirbeltensor
$\dot{\mathbf{E}}$	Rate des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors
$(\dot{\bullet})$	materielle Zeitableitung
$\overset{\Delta}{(\bullet)}$	objektive Zeitableitung
\mathbf{T}	Cauchy-Spannungstensor
\mathbf{P}	1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\bar{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\bar{\mathbf{T}}_M$	Spannungsmaß der TMZ
$\hat{\bar{\mathbf{T}}}_M$	Isochorer Anteil von $\bar{\mathbf{T}}_M$
$\bar{\mathbf{T}}_{M_{vol}}$	Volumetrischer Anteil von $\bar{\mathbf{T}}_M$
σ_{eq}	Gleichgewichtsspannung
σ_{neq}	Nichtgleichgewichtsspannung
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{n}	Normalenvektor
\mathbf{b}	Fernwirkungskraft
\mathbf{q}, \mathbf{Q}	Wärmestromvektor
m	Masse

ρ_0	Dichte der Referenzkonfiguration
$\rho(\bullet)$	Dichte der jeweiligen Konfiguration
$\rho_0 r, \rho r$	spezifische Strahlungswärme
η	Entropie
$\hat{\eta}$	Entropieproduktion
θ	absolute Temperatur
Ψ	freie Helmholtz Energiefunktion
\mathbf{Q}_i	innere Variablen
E'	Speichermodul
E''	Verlustmodul
ω	Kreisfrequenz
f	Frequenz
p	Lagrange Multiplikator

Spezielle Tensoroperationen

$\text{Grad}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{X}}$	Gradient mit Bezug auf die Referenzkonfiguration
$\text{Div}(\bullet) =$ $\text{Grad}(\bullet) : \mathbf{I}$	Divergenzoperator mit Bezug auf die Referenzkonfiguration
$\text{grad}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}}$	Gradient mit Bezug auf die aktuelle Konfiguration
$\text{div}(\bullet) = \text{grad}(\bullet) : \mathbf{I}$	Divergenzoperator mit Bezug auf die aktuelle Konfiguration
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i$	Skalarprodukt von Tensoren 1. Stufe
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{jk}$	Einfaches Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren 2. Stufe
$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$	Zweifaches Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren 2. Stufe
$\text{I}_{(\bullet)}$	Erste Hauptinvariante (Spur) eines zweistufigen Tensors
$\text{II}_{(\bullet)}$	Zweite Hauptinvariante eines zweistufigen Tensors
$\text{III}_{(\bullet)}$	Dritte Hauptinvariante eines zweistufigen Tensors
$\text{tr}(\bullet)$	Spur eines zweistufigen Tensors
$\det(\bullet)$	Determinante eines zweistufigen Tensors

Material- und Modellparameter

η^j	Viskositäten
τ^j	Relaxationszeit
μ^j	Steifigkeit
K	Kompressionsmodul
C_{ij}	Yeoh Materialparameter
λ_θ	Wärmeleitfähigkeit
α	linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient
c_p	spezifische Wärmekapazität
θ_0	Referenztemperatur

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Stand der Forschung	7
3	Theoretische Grundlagen	15
3.1	Elastomere	16
3.1.1	Einteilung von Polymerwerkstoffen	16
3.1.2	Elastomertypische Effekte	17
3.1.3	Eigenschaften gefüllter Elastomere	18
3.2	Kinematik	20
3.2.1	Einführung	20
3.2.2	Darstellung mit volumetrisch-isochorer Zerlegung	25
3.3	Bilanzgleichungen	29
3.4	Materialtheorie	32
3.4.1	Clausius - Duhem - Ungleichung	32

3.4.2	Inelastisches Materialverhalten	33
3.4.3	Invariantendarstellung bei isotroper Hyperelastizität . .	35
3.4.4	Modelle der finiten Elastizität	36
3.4.5	Grundlegende Überlegungen zur linearen Viskoelastizität	38
4	Experimentelle Materialcharakterisierung	45
4.1	Probenmaterial und Prüfkörper	46
4.1.1	Untersuchtes Material	46
4.1.2	Probengeometrien und -einspannungen	48
4.2	Versuchsstände	51
4.2.1	Quasistatische Prüfmaschine	51
4.2.2	Dynamisch - Mechanische Prüfmaschine	53
4.2.3	IR-Kamera	55
4.2.4	Differential Scanning Calorimetry (DSC)	55
4.2.5	Thermisch - Mechanische Analyse (TMA)	57
4.2.6	Laser-Flash Analyse (LFA)	59
4.3	Versuchsparameter	59
4.3.1	Mechanische Versuche	59
4.3.2	Thermische Versuche	65
4.3.3	Gekoppelte Versuche	66
4.4	Ergebnisse der Versuche	67

Inhaltsverzeichnis	1
4.4.1 Mechanische Versuche	67
4.4.2 Thermische Versuche	81
4.4.3 Gekoppelte Versuche	85
4.5 Optimiertes Versuchsprogramm	88
5 Materialmodellierung	91
5.1 Viskoelastische Materialmodellierung	92
5.2 Thermoviskoelastisches Materialmodell für finite Deformationen	94
6 Parameteridentifikation und Simulation	105
6.1 Parameteridentifikation	106
6.2 FE-Umsetzung	111
6.3 Berechnungsergebnisse	115
6.3.1 Implementierung in PANDAS	115
6.3.2 Validierungsrechnungen	116
6.3.3 Eigenerwärmung unter dynamischer Beanspruchung . .	119
6.3.4 PANDAS-ABAQUS-Schnittstelle	121
7 Zusammenfassung und Ausblick	127
Literaturverzeichnis	132

1

Einleitung

Elastomerwerkstoffe finden dieser Tage eine Vielzahl von Anwendungen. Sie werden in der Automobilindustrie unter anderem als Lagerwerkstoff eingesetzt um Schwingungen zu entkoppeln. In der Dichtungsindustrie dienen sie aufgrund ihrer Verformbarkeit und chemischen Resistenz als Basismaterial und auch aus der Verpackungsindustrie sind sie nicht wegzudenken. Diese Fülle von Anwendungen kann von Elastomeren aufgrund ihrer vielen vorteilhaften Eigenschaften bedient werden. Zunächst zeichnen sie sich dadurch aus, dass sie sehr stark elastisch verformt werden können. Aufgrund ihres geringen spezifischen Gewichtes sind sie zudem sehr gut für den Leichtbau geeignet. Hinzu kommt, dass der Formgebung von Elastomeren nur wenige Grenzen gesetzt sind, da sie, das Geschick des Durchführenden vorausgesetzt, in praktisch jeder Form ausgehärtet beziehungsweise vernetzt werden können. Auch die chemische Beständigkeit gegenüber diverser Betriebsstoffe ist gewährleistet.

Mit dieser Fülle von nutzbaren Eigenschaften geht jedoch auch die Komplexität des Verhaltens dieser Werkstoffgruppe einher. So ist das mechanische Verhalten geprägt von einem stark nichtlinearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Außerdem spielt die Belastungszeit bzw. -geschwindigkeit eine große Rolle, da sich Elastomere viskoelastisch ver-

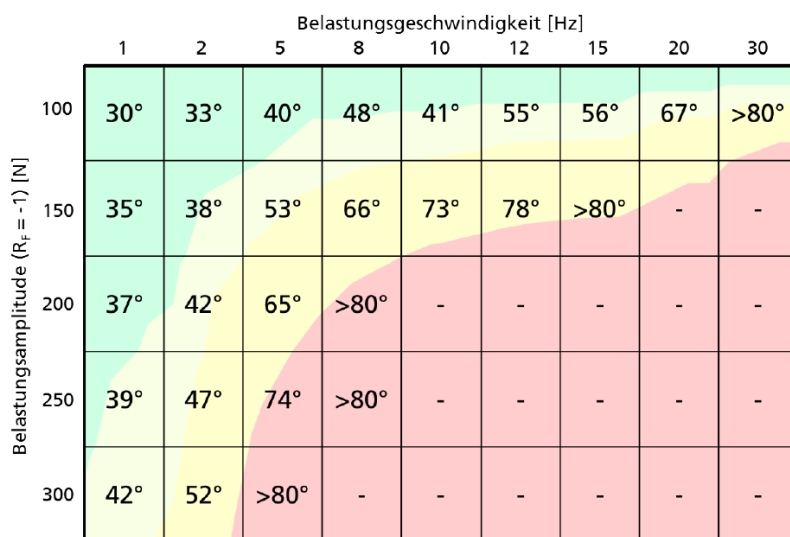


Abbildung 1.1 – Oberflächentemperaturen nach dynamischer Belastung einer Hourglassprobe mit verschiedenen Frequenzen und Lastamplituden, aufgenommen nachdem sich eine Gleichgewichtstemperatur eingestellt hat, Umgebungstemperatur ca. 24°C [54].

halten. Dies bedeutet, dass große Dehnungen zwar nahezu reversibel sind, das erneute Erreichen der Ausgangslage kann mitunter aber Stunden oder gar Tage dauern. Hinzu kommt, dass Elastomere bei höheren Temperaturen thermomechanisch beziehungsweise thermooxidativ altern.

Bezüglich des Werkstoffverhaltens spielt die Temperatur eine große Rolle. Grundsätzlich sind Elastomere zwischen ihrer Glasübergangstemperatur und ihrer Zersetzungstemperatur einsetzbar. Erstere beschreibt den Übergang von sprödem zu gummiartigem Materialverhalten, das Erreichen letzterer führt zur irreversiblen Zerstörung des Polymernetzwerkes. Innerhalb dieser Grenzen hat die Temperatur einen starken Einfluss auf praktisch alle Materialcharakteristika. Neben der Wärmekapazität und der thermischen Leitfähigkeit ändert sich vor allem das mechanische Verhalten.

In einer Vielzahl von Anwendungen werden Elastomerbauteile mit dynamischen Lasten beaufschlagt. So dienen sie zum Beispiel in Automobilen dazu, die Schwingungen des Motors, aber auch die Unebenheiten der Straße, vom Fahrgastraum zu entkoppeln. Diese schnellen, wiederkehrenden Lasten führen dazu, dass sich die eingesetzten Bauteile mitunter stark erwärmen. In Ab-

bildung 1.1 ist zu sehen, wie stark sich bereits einfache Pufferproben unter stationären zyklischen Lasten mit konstanter Frequenz und Kraftamplitude aufheizen. Damit erhöht sich auch ohne äußere Einflüsse die Temperatur des Elastomers im Betrieb so stark, dass sich das mechanische Verhalten signifikant verändert.

Die verschiedenen Materialcharakteristika experimentell zu belegen, zu modellieren und zu berechnen war Gegenstand des AiF-Vorhabens *Erfassung, Simulation und Bewertung der thermomechanischen Schädigungsmechanismen von Elastomerbauteilen unter dynamischen mechanischen Beanspruchungen "Elasto-Opt"*, im Rahmen dessen diese Arbeit entstanden ist. Das Projekt beinhaltet zwei Teilaspekte: Die Erfassung der eben beschriebenen thermomechanisch gekoppelten Eigenschaften von Elastomeren und die Vorhersage der Lebensdauer von Elastomerbauteilen unter thermomechanischen Beanspruchungen.

Ziele und Gliederung der Arbeit

Mit dem ersten Aspekt des oben genannten Projektes beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Das Ziel ist es, die komplexen thermomechanisch gekoppelten Materialeigenschaften mit Hilfe der Kontinuumsmechanik möglichst vollständig zu erfassen. Als Basis hierfür dienen umfassende Experimente, die die mechanischen und thermischen Eigenschaften eines exemplarisch ausgewählten, rußgefüllten Naturkautschuks zu erfassen ermöglichen. Darauf fußend wird ein phänomenologisches Materialmodell motiviert und formuliert, welches die ermittelten Eigenschaften abbilden kann. Als Bindeglied zwischen Experimenten und Modellierung dient die Parameteridentifikation. Sie führt dazu, dass das Materialmodell auch quantitativ die gemessenen Materialeigenschaften wiedergibt. Mit Hilfe des parametrisierten Materialmodells lassen sich nachfolgend Berechnungen zur Vorhersage des Verhaltens von Elastomerbauteilen machen. Hierzu wird die Methode der Finiten Elemente (FEM) eingesetzt.

In einem ersten Schritt wird in Kapitel 2 der aktuelle Stand der Forschung dargelegt. Die darin zugrunde gelegte Ausgangslage bezüglich der Beschaffenheit von Elastomeren und den kontinuumsmechanischen Grundlagen wird im Kapitel 3 eingeführt. Dabei werden bereits erste Erweiterungen des Standes der Forschung vorgenommen, um die Temperatur in die Modellbildung einzubeziehen.

Im nächsten Schritt werden die experimentellen Untersuchungen in Kapitel 4 detailliert erläutert. Dabei wird auf die verwandte Elastomermischung eingegangen, die Prüfvorrichtungen und -parameter beschrieben und die wichtigsten experimentellen Erkenntnisse dargelegt.

Darauf folgend wird in Kapitel 5 ein Materialmodell entwickelt, welches die experimentell beobachteten Eigenschaften abbildet. Das Modell ist dazu thermomechanisch gekoppelt formuliert, sodass die Temperatur direkten Einfluss auf das mechanische Verhalten hat und gleichzeitig die Eigenerwärmung unter dynamischen Belastungen berücksichtigt ist. Da Elastomere in Anwendungen oft sehr großen Deformationen ausgesetzt sind, ist das Modell für große Deformationen formuliert.

Die Modellparameter lassen sich anhand verschiedener Experimente identifizieren. Das Vorgehen hierzu ist in Kapitel 6 kurz erläutert und die ermittelten Parameter werden angegeben. Damit kann das vollständige Modell in einen Finite Elemente Code implementiert werden. Exemplarisch ist dies in dieser Arbeit im open-source code PANDAS durchgeführt. Damit lassen sich Validierungsrechnungen durchführen, die die Praxistauglichkeit des Modells für Strukturberechnungen bestätigen.

Mit den beschriebenen Inhalten deckt diese Arbeit die gesamte Prozesskette von der Materialcharakterisierung über die Modellbildung bis hin zur lauffähigen Simulation ab. Um im industriellen Umfeld Anwendung zu finden, ist eine Modellumsetzung in einen kommerziellen Code wie ABAQUS vonnöten. Dahingehend sind im letzten Abschnitt 6.3.4 der Arbeit erste Schritte gemacht, indem eine Schnittstelle zwischen PANDAS und ABAQUS benutzt wird, die es ermöglicht, auch komplexere Bauteile und Randbedingungen miteinzubeziehen.

Zuletzt werden die erzielten Ergebnisse in Kapitel 7 zusammengefasst und bewertet. Abschließend werden notwendige und mögliche Erweiterungen vorgestellt, mit denen das Modell im industriellen Umfeld genutzt werden kann.

2

Stand der Forschung

Die Klasse der gummiartigen quasi-inkompressiblen Werkstoffe, zu denen auch die Gruppe der Elastomere gehört, ist bereits seit geraumer Zeit Gegenstand von Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der experimentell gestützten Modellbildung und Simulation. Schon zu Beginn des vergangenen Jahrhunderts zeigten experimentelle Untersuchungen, dass Elastomere eine Vielzahl von komplexen Eigenschaften aufweisen, die sie von den damals gebräuchlichen Konstruktionswerkstoffen wie Metallen, Stählen oder Gläsern unterscheiden. Mit dieser Erkenntnis gingen sogleich Bestrebungen zur modellhaften Beschreibung des Materialverhaltens einher, sodass zur gleichen Zeit erste Modellansätze entstanden. Diese konzentrierten sich zunächst auf die elastischen Eigenschaften des Materials. Darauf aufbauend erfassten weiterführende Ansätze auch das viskoelastische Materialverhalten. Mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente wurden diese für Simulationen genutzt, um das Verhalten von einfachen Strukturen, später auch von komplexeren Bauteilen vorhersagen zu können. Das vorliegende Kapitel stellt die Grundlagen und den aktuellen Stand der Forschung im weiten Feld der Elastomere vor. Dabei wird nicht der Anspruch der Vollständigkeit gestellt, da eine Aufzählung aller Erkenntnisse im Einzelnen den Rahmen sprengen würden.

Bereits im Jahre 1839 legte Charles Goodyear mit der Entwicklung des Vulkanisationsprozesses den Grundstein für die Nutzbarmachung von Naturkautschuk. Dies war der Beginn der Entwicklung von Elastomerwerkstoffen, die sich durch ihre schwache dreidimensionale Vernetzung auszeichnen. Für eine deutliche Steifigkeitserhöhung dieser gummiartigen Materialien wurden bald aktive Füllmaterialien wie Ruß eingesetzt. Die Wahl der Füll- und Zusatzstoffe kann, genau wie die Prozessführung bei der Materialherstellung, dazu genutzt werden, die gewünschten Eigenschaften des Elastomers genau einzustellen. Diese Vielzahl von Möglichkeiten und Prozessen ist in [21] detailliert dargelegt.

Bei der Untersuchung von gefüllten Polymeren treten verschiedene stoffgruppenspezifische Effekte auf. Ein Erster wurde bereits in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts von Mullins untersucht [77, 78]. Der nach ihm benannte Effekt beschreibt die Tatsache, dass das jungfräuliche Material nach seiner Erstbelastung erweicht. Dies liegt darin begründet, dass sich Cluster von Füllerpartikeln bei der Erstbelastung auflösen können, aber auch daran, dass Polymerketten der Elastomermatrix von den Füllern abgerissen werden können [71]. Somit handelt es sich beim Mullins-Effekt um einen irreversiblen Prozess. Er tritt bedingt durch weitere Schädigungsmechanismen auch bei ungefüllten Elastomeren auf, ist bei diesen aber um ein vielfaches weniger ausgeprägt. In [15] ist eine Übersicht über weitere Arbeiten bezüglich dieses Effektes gegeben. Sowohl die experimentellen Befunde zum Mullins-Effekt, welche neben den gefüllten Elastomeren auch teilkristalline Gummiarten aufweisen, als auch Modellansätze zur Beschreibung dieses Effektes werden hierin zusammengefasst.

Nach der Eliminierung des Mullins-Effektes durch eine geeignete mechanische Vorbelastung kann nun das grundlegende mechanische Verhalten des untersuchten Elastomers beleuchtet werden. Da Elastomere viskoelastisches Materialverhalten aufweisen, ist es zunächst von Interesse das Gleichgewichtsverhalten, häufig als Grundelastizität bezeichnet, zu untersuchen. Dieses stellt sich ein, wenn das Material unendlich langsam deformiert wird oder es auf einem konstanten Deformationsniveau unendlich lang gehalten wird. Um dieses Verhalten experimentell charakterisieren zu können, kommen verschiedene Strategien zum Einsatz. Diese sind z.B. in [99, 51] beschrieben. In den genannten Arbeiten werden Strategien wie die Durchführung von mehrstufigen Relaxationsversuchen oder das zyklische Vorkonditionieren der Probe um den gewünschten Dehnungswert herum beschrieben.

Nach der Untersuchung der Grundelastizität ist das viskoelastische Materialverhalten, also die zeitabhängigen mechanischen Eigenschaften zu charakterisieren. Hierzu kommt eine Vielzahl von Methoden in Frage, die unter anderem in den Werken von Tobolsky [107], Ferry [27] und Tschoegl [113] beschrieben werden. Zunächst können viskoelastische Effekte mit Hilfe von Zugversuchen unter Aufbringung verschiedener Dehngeschwindigkeiten sichtbar gemacht werden: Je höher die Dehnrage, desto größer die auftretende Spannung bei gleicher Dehnung. Ebenfalls etabliert haben sich Relaxationsversuche, bei denen eine konstante Dehnung angefahren und der Spannungsabfall über die Zeit aufgenommen wird. Damit kann ein großes Zeitspektrum des mechanischen Verhaltens untersucht werden, welches nur begrenzt ist von der maschinenbedingten Anfahrsgeschwindigkeit und der Gesamtdauer des Versuches.

Um das viskoelastische Verhalten für große Deformationsgeschwindigkeiten zu untersuchen, werden dynamische Untersuchungen im Frequenzbereich durchgeführt. Hierfür gibt es etablierte Verfahren, wie sie in [72] beschrieben werden und z.B. in Arbeiten von Wollscheid [114] und Höfer [43] zur Anwendung kommen. In dynamischen Untersuchungen wird in der Regel zunächst eine konstante Vordeformation aufgebracht, um die herum sinusförmig zyklisiert wird. Zusätzlich kann noch die Umgebungstemperatur beeinflusst werden. Von Interesse ist dann die Amplitude und die Frequenz der aufgetragenen Dehnung, sowie die korrespondierenden Größen der zu messenden Kräfte bzw. Spannungen. Charakteristisch für viskoelastisches Verhalten ist dabei die Tatsache, dass die Spannung der Dehnung um einen Verlustwinkel nacheilt. Aus diesem Versatz und den Amplituden der Dehnung und der Spannung lassen sich der Speicher- und der Verlustmodul errechnen. Ersterer wird häufig auch als dynamische Steifigkeit bezeichnet, zweiterer ist ein Maß für die im Material pro Belastungszyklus dissipierte Energie.

Im Falle gefüllter Elastomere tritt hierbei ein weiterer Spezialeffekt auf. In Untersuchungen von Fletcher und Gent [28] wurde ein solches Material dynamisch belastet. Dabei stellte sich heraus, dass sowohl der Speicher-, als auch der Verlustmodul von der aufgetragenen Amplitude abhängen. In den Arbeiten von Payne [84, 85], dem das Phänomen den Namen zu verdanken hat, ist dies weitergehend untersucht. Es hat sich gezeigt, dass der Speichermodul mit größer werdender Dehnungsamplitude abnimmt, der Verlustmodul bildet bei bestimmten Amplituden ein Maximum aus. Anders als der Mullins-Effekt ist der Payne-Effekt dabei reversibel. Im allgemeinen Konsens wird angenommen, dass der Payne-Effekt auf einer reversiblen Aufspaltung der Füller-Füller-Wechselwirkungen beruht [22, 81], er tritt bei ungefüllten Elastomeren nicht auf.

Zusätzlich zu den mechanischen Eigenschaften können die thermischen Charakteristika von Polymeren mit verschiedenen, etablierten Methoden bestimmt werden. Die allgemeinen thermodynamischen Grundlagen hierzu sind Gegenstand von Lehrbüchern und Standardwerken, wie z.B. [104, 105]. Für den spezielleren Fall der Polymere, welche sich aufgrund ihrer makromolekularen Struktur in der Regel nicht in einem Gleichgewichtszustand befinden, gibt es umfassende Literatur. Exemplarisch hierfür sei [14] genannt. Nicht nur unter dem Einfluss von Füllern, sondern auch durch die diversen möglichen Komponenten einer technischen Elastomermischung handelt es sich bei diesen Werkstoffen um heterogene Systeme. Zu den Grundlagen der thermodynamischen Beschreibung dieser Stoffgruppe können [34, 68] herangezogen werden.

Im Einzelnen sind mittels geeigneter Versuche die Wärmekapazität, die thermische Ausdehnung, sowie die thermische Leitfähigkeit des Materials zu bestimmen. Erstere wird zumeist mittels Differenzkalorimetrie (DSC) ermittelt. Bei dieser wird eine Probe und eine Referenzmasse erwärmt, wobei entweder durch Temperatur- oder durch Leistungsmessung festgestellt werden kann, wie viel Wärme durch Vorgänge im Probeninneren verbraucht oder erzeugt wird. Somit lassen sich etwa Reaktionen und Umwandlungen, vor allem aber quantitativ die Wärmekapazität bestimmen [44]. Die DSC-Methode wird heute für vielerlei Untersuchungen eingesetzt. In [33] wird mit ihrer Hilfe der Glasübergang von Polymeren bestimmt, in [50] werden Aushärtprozesse charakterisiert, [62] ermittelt mittels DSC-Messungen die temperaturabhängige spezifische Wärmekapazität.

Der zweite thermische Parameter - die thermische Ausdehnung - kann mittels Dilatometrie, bzw. Thermisch-Mechanischer-Analyse (TMA) ermittelt werden. Dabei wird eine Probe bekannter Ausgangslänge erwärmt, wobei kontinuierlich die Längenänderung aufgenommen wird. Dabei kann sowohl das Ausdehnungsverhalten bei kontinuierlicher Temperaturänderung [20], als auch bei dynamischen Temperaturbelastungen ermittelt werden [10].

Mit Hilfe der Laser-Flash-Analyse (LFA) kann die thermische Leitfähigkeit des Materials bestimmt werden. Hierzu wird eine flache Probe von einer Seite mit einem Laserimpuls beaufschlagt, welcher die Wechselwirkungsfläche erwärmt [82]. Die so eingebrachte Wärme wird durch die Probe hindurch auf deren gegenüberliegende Seite geleitet. Aus der zeitabhängigen Messung der Temperatur dieser Fläche kann die thermische Leitfähigkeit errechnet werden.

Parallel zu den oben genannten mechanischen und kalorischen Experimenten wurde in der Fachwelt damit begonnen, das ermittelte Materialverhalten mit Hilfe von mathematischen Modellen zu erfassen. Dabei wurden zwei grundlegende Herangehensweisen entwickelt: Die phänomenologische Beschreibung und die aus mikrostrukturellen Betrachtungen heraus motivierte Beschreibung. Erstere ist bestrebt, das makroskopisch beobachtbare Verhalten ungeachtet der Mikrostruktur wiederzugeben. Zweitere geht von der makromolekularen Struktur von Polymeren aus und motiviert die Modellgleichungen daraus. Dabei wird in der Regel angenommen, dass das Polymernetzwerk aus Massepunkten und Federn besteht, die diese Punkte verbinden. Es können auch andere Modellvorstellungen zugrunde gelegt werden. Umfassend beschrieben und verglichen sind diese Methoden bereits in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts in den Arbeiten von Treloar [108, 109, 110, 111]. In einer später erschienenen Übersicht werden die verschiedenen daraus resultierenden Möglichkeiten der Modellerstellung gegenübergestellt [112].

Allen Modellen gemein ist zunächst die Annahme der Grundelastizität des Materials als hyperelastisch. Das bedeutet, dass die im Material auftretende Spannung ausschließlich von der Deformation abhängt und durch Ableitung aus einer Energiedichtefunktion berechnet werden kann, jedoch nicht notwendigerweise linear. Häufig werden die in kontinuumsmechanischen Modellen verwandten Funktionen der freien Energie als Reihenansätze aus den Potenzen der Hauptinvarianten von Deformationstensoren formuliert. Auch hierzu existieren ältere Arbeiten von Mooney [76] und Rivlin [94, 95, 96], die noch heute als Grundlage dienen und beispielsweise von Yeoh [116] oder Gent [30] aufgegriffen und modifiziert wurden. Andere Ansätze wurden von Ogden [80] entwickelt und basieren auf den Eigenwerten der Deformationstensoren. Neben diesen phänomenologischen Beschreibungen der Grundelastizität existieren diverse mikromechanisch motivierte Ansätze. Hier seien die Arbeiten von Arruda & Boyce [6], Reese [89, 87], Lulei [67], Miehe [75, 74, 73] und Göktepe & Miehe [31] genannt.

Charakteristisch für Polymerwerkstoffe und insbesondere für die Klasse der Elastomere ist das viskoelastische, also das zeitabhängige mechanische Verhalten. Hierzu gibt es bereits eine Vielzahl von Modellen, von denen an dieser Stelle nur einige exemplarisch genannt werden sollen. Hierzu gehören die Arbeiten von Chadwick [12], Alts [2], Haupt [38, 40], Lion [57, 61], Reese [88], Amin [3, 5], Besdo und Ihlemann [11, 46], sowie Lubliner [66]. Speziell mit der Beschreibung dynamischer Prozesse und deren Einflüssen auf das viskoelastische Materialverhalten beschäftigen sich unter anderem Lion [65], Amin [4], Retka [93], Rendek [91, 90, 92] und Wollscheid [114].

Auch die Modellierung der beschriebenen Effekte des Mullins- und des Payne-Effektes sind Gegenstand zahlreicher Arbeiten. So beschreibt Ogden [80] ein pseudo-elastisches Materialmodell zur Beschreibung des Mullins-Effekts, Diercks [17] und Ihlemann [47] greifen solche Modellansätze auf, um die deformationsbedingte Anisotropie beim Auftreten des Mullins-Effektes zu beschreiben. Ähnlich häufig ist der Payne-Effekt Gegenstand von Modellierungsbestrebungen. So beschreiben die Arbeiten von Barnes [7] und Lion [59, 64] das amplitudenabhängige dynamische Verhalten, genauso wie jene von Haupt [39] und Höfer [43].

Häufig werden die Materialmodelle in den genannten Arbeiten für isotherme Bedingungen formuliert. Unter bestimmten Umständen ist es jedoch sinnvoll, die Temperatureinflüsse und die Eigenerwärmung des Materials unter dynamischer Beanspruchung zu berücksichtigen. Hierzu existieren bereits verschiedene Teilansätze. So formuliert Chadwick [12] ein Modell zur temperaturabhängigen Beschreibung der in einer Zylinderprobe auftretenden Spannungen. Eine beidseitige Kopplung zwischen mechanischen und thermischen Eigenschaften ist in der Arbeit von Lion [58] durchgeführt, wobei hierfür kleine Deformationen angenommen sind. In neueren Arbeiten wie in [19, 20, 97] werden darauf basierend Materialmodelle eingeführt, die es ermöglichen, die thermomechanische Kopplung in beiden Richtungen für große Deformationen zu formulieren. In [19, 20] werden hierzu sowohl die Deformation, als auch die Funktion der freien Energie zerlegt, um die thermischen und mechanischen Einflüsse voneinander trennen zu können. Dabei berechnet sich die Eigenerwärmung unter Last durch die Einbeziehung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik in die Theorie. [97] führt zur Ermittlung der Eigenerwärmung ein Pseudopotential ein, welches durch inelastische Deformationsraten erzeugt wird.

Um die Parameter der jeweiligen Materialmodelle zu ermitteln, kann man sich verschiedener Strategien bedienen. Man unterscheidet dabei deterministische Verfahren, die auf der Berechnung von Gradienten basieren, von stochastischen Verfahren wie zum Beispiel den Evolutionsstrategien. Allen gemein ist die Anpassung der Modellansätze an experimentell gewonnene Daten. In der Regel liegt eine Fehlerminimierung zwischen den mit Versuchen ermittelten Daten und den Modellgleichungen zugrunde. Dies ist z.B. in den Arbeiten von Mahnken [69], Bartholdt [8], Scheday [98], Rechenberg [86] und Schwefel [101] der Fall. Für den speziellen Fall der Elastomerwerkstoffe gibt es Arbeiten von Hartmann [35, 36, 37], die sich speziell mit der Parameteridentifikation für die in Invarianten formulierte Darstellung der Hyperelastizität befassen.

Zur Anwendung kommen die oben vorgestellten Modelle in der Regel bei Berechnungen mit Hilfe der Finiten Elemente Methode. Diese wird in der vorliegenden Arbeit lediglich als Werkzeug benutzt, es sei für das tiefere Verständnis auf [117] bzw. für den nichtlinearen Fall auf [115] verwiesen. Der Code, der in dieser Arbeit für die Lösung der zugrundeliegenden Gleichungen herangezogen wird, ist ein open-source code namens PANDAS [25], der ursprünglich für die Berechnung von Differentialgleichungssystemen der Bodenmechanik entwickelt wurde. Hiermit lassen sich beliebig gekoppelte Konstitutivgleichungen in Kombination mit den üblichen Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik lösen, sowie das Pre- und Postprocessing zu den Berechnungen durchführen.

3

Theoretische Grundlagen

Da sich diese Arbeit mit einem Vertreter aus der Stoffgruppe der Elastomere beschäftigt, soll diese Materialklasse zunächst vorgestellt und bezüglich ihrer Eigenschaften vom allgemeinen Begriff der Polymere unterschieden werden. Dazu werden zunächst allgemeine Charakteristika von makromolekularen Stoffen eingeführt und im Weiteren auf die speziellen Eigenschaften von vernetzten und gefüllten Polymeren eingegangen.

Für die Erstellung eines thermomechanisch gekoppelten Materialmodells für finite Deformationen ist es notwendig einige methodische und rechnerische Grundlagen einzuführen. Hierzu werden, basierend auf den drei Grundpfeilern der kontinuumsmechanischen Theorie, Größen und Symbole eingeführt, die für die Materialmodellierung in Kapitel 5 vonnöten sind. Es werden die Grundbegriffe der Kinematik, der Bilanzgleichungen und der Konstitutivgleichungen eingeführt, welche das Rüstzeug der Kontinuumsmechanik darstellen.

Für ausführlichere Darstellungen der Materie sei der Leser an dieser Stelle auf die Arbeiten [1, 32, 38, 45] hingewiesen, in denen das Folgende in aller Ausführlichkeit dargelegt ist.

Für die im Kapitel 6 angewandte Finite Elemente Methode wird an dieser Stelle auf die Darstellung der Grundlagen verzichtet, für diese wird die Lektüre von [9] empfohlen. In Kapitel 6 werden die notwendigen Begriffe und Notationen kurz eingeführt.

3.1 Elastomere

3.1.1 Einteilung von Polymerwerkstoffen

Polymere sind Werkstoffe, die aus synthetisierten Makromolekülen bestehen. Dabei handelt es sich um sehr lange Ketten aus immer wiederkehrenden, gleichen Einheiten, den Monomeren. Diese zumeist kohlenstoffbasierten Grundbausteine können auf verschiedenen Wegen zu langen Ketten zusammengefügt werden, die ihrerseits miteinander wechselwirken. Daraus können dreidimensionale Makromolekülgeflechte entstehen, die entweder ungeordnet oder teilkristallin vorliegen. Außerdem besteht die Möglichkeit, dass unterschiedliche Ketten miteinander chemisch vernetzt sind. Allgemeine Informationen zu Synthese, Struktur und Eigenschaften von Polymeren sind z.B. [21, 26] zu entnehmen.

Anhand ihrer verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten lassen sich die Polymerwerkstoffe in drei Gruppen einteilen. Die erste Gruppe bilden die Thermoplaste. Diese weisen keinerlei chemische Vernetzung zwischen verschiedenen Makromolekülen auf, verschiedene Ketten wechselwirken nur durch nicht-kovalente, schwache Bindungen wie van-der-Waals Wechselwirkungen oder Dipol-Dipol-Interaktionen. Thermoplaste können sowohl amorphe, als auch teilkristalline Anordnungen aufweisen. Im amorphen Fall liegen die Makromoleküle ungeordnet nebeneinander und ineinander verwoben vor, sie weisen jedoch keine übergeordnete Ordnung auf. Teilkristalline Thermoplaste bilden hingegen neben amorphen Bereichen auch Zonen höherer Ordnung aus. In diesen Bereichen liegen Teile von Molekülketten bündelweise parallel zueinander. Der Regelfall ist hierbei, dass diese geordnete Struktur durch Rückfaltungen desselben Moleküls entstehen. Im selteneren Fall liegen verschiedene Makromoleküle parallel zueinander.

Die dreidimensional vernetzten Polymere werden in zwei Untergruppen unterteilt, die als Elastomere und Duroplaste bezeichnet werden. Beiden gemein

ist, dass die Hauptmakromolekülketten direkt, also kovalent, miteinander verbunden sind. Dabei ist es nicht ausschlaggebend, ob die Vernetzung durch einen Zusatz wie Schwefel, oder durch den Einsatz multifunktionaler Monomere beim Herstellungsprozess des Materials erreicht wird. Der einzige Unterschied zwischen Elastomeren und Duroplasten ist der Grad der Vernetzung. Ist dieser gering, so spricht man von Elastomeren, bei einem hohen Vernetzungsgrad wird das Material als Duroplast bezeichnet.

Neben der rein strukturellen Einteilung der Polymerwerkstoffe lassen sich die verschiedenen Materialien auch grob bezüglich des Glasübergangsbereiches einteilen. Aufgrund der makromolekularen Struktur ist jede Molekülsegmentbewegung durch ihre nächsten Nachbarn behindert. Der Grad der Behinderung hängt dabei von der Struktur der eingesetzten Monomere, dem Grad der Ordnung sowie der Vernetzung und im Besonderen von der Temperatur ab. Auf molekularer Ebene bedeutet eine erhöhte Temperatur gleichzeitig eine Erhöhung der Beweglichkeit. Bei niedrigen Temperaturen ist diese sehr gering, eine Erwärmung führt zunächst zu einem näherungsweise linearen Anstieg der Zahl der Bewegungsfreiheitsgrade und der Schwingungsamplituden. Ab einem bestimmten charakteristischen Temperaturbereich steigt die Beweglichkeit deutlich an, was in einer deutlichen Änderung der thermischen und mechanischen Eigenschaften resultiert. Unterhalb dieses Übergangsbereiches verhält sich das Material glasartig spröde, oberhalb wird es deutlich weicher, weshalb man bei dieser Umwandlung vom Glasübergang spricht. Der Temperaturbereich in dem sich dieser Übergang befindet, lässt sich nun als Einteilungskriterium für die verschiedenen Polymertypen heranziehen, wobei dies hauptsächlich für die vernetzten Polymere sinnvoll ist. Liegt der Glasübergang unterhalb der Einsatztemperatur des Materials, so spricht man von einem Elastomer, wird der Werkstoff unterhalb des Glasübergangsbereiches eingesetzt, so nennt man es Duroplast. Thermoplaste werden in der Praxis auch unterhalb des Glasübergangsbereiches eingesetzt.

3.1.2 Elastomertypische Effekte

Elastomere zeichnen sich dadurch aus, dass sie oberhalb ihrer Glasübergangstemperatur eingesetzt werden und in diesem Temperaturbereich sehr weich sind. Sie weisen eine geringe Steifigkeit auf, können gleichzeitig aber sehr hohe Dehnungen im Bereich mehrerer hundert Prozent ertragen.

Strukturbedingt kann ein Elastomer einer endlichen Deformation nicht instantan folgen, da auch oberhalb des Glasüberganges die Molekülsegmentbewegungen behindert sind. Anders als im Falle der meisten metallischen Werkstoffe ist das mechanische Verhalten von Elastomeren also stark dehnratenabhängig. Eine schnelle Verformung erzeugt im Material höhere Spannungen. Langsamem Beanspruchungen kann leichter gefolgt werden, sodass die daraus resultierenden Spannungen bei gleicher Enddeformation geringer sind. Dieser Effekt tritt nicht nur bei Elastomeren, sondern bei allen Arten von Polymeren auf, er ist jedoch bei vielen Elastomeren besonders ausgeprägt.

Da sich diese Arbeit im speziellen mit der thermomechanischen Kopplung der Eigenschaften von Elastomeren beschäftigt, sei ein weiterer, elastomertypischer Effekt nicht außer Acht gelassen. Der sogenannte Gough-Joule Effekt [60] beschreibt die Tatsache, dass sich Elastomere, welche unter mechanischer Spannung stehen, bei Erwärmung zusammenziehen. Unter adiabaten Randbedingungen ist dies gleichbedeutend mit der Tatsache, dass sich das Material unter Zugbelastung erwärmt. Treibende Kraft hierbei ist die materielle Konstanz der Entropie. Eine Zugdeformation auf einen elastomeren Körper aufgebracht, verringert aufgrund der Parallelisierung von Makromolekülketten die Entropie. Um diesen Effekt auszugleichen, erhöht sich die Temperatur des Materials, sodass die Entropie in Summe konstant bleibt. Meist ist diesem Effekt noch die thermomechanische Kopplung überlagert, die aus den thermischen Dehnungen resultiert und bei kleinen adiabaten aufgetragenen Dehnungen zunächst zu einer geringen Abkühlung führt. Die beschriebenen Eigenschaften von Elastomeren sind in [112] detailliert aufgeführt.

3.1.3 Eigenschaften gefüllter Elastomere

Aufgrund ihrer sehr geringen Steifigkeit werden Elastomere nur selten ungefüllt verwendet. Häufig werden Kieselsäure, Ruß oder ähnliche preisgünstige Füllstoffe eingesetzt, um die Materialeigenschaften dem Einsatzbereich des Materials anzupassen. Dadurch treten zwei Effekte auf, die in der Wechselwirkung der Füller untereinander und der Füller mit dem Makromolekülnetzwerk begründet liegen.

Der erste Effekt ist der in Kapitel 2 bereits erwähnte Mullins-Effekt [77, 78]. Während der Fertigung eines Bauteils oder einer Probe aus einem gefüllten Elastomer bilden die Füller einzelne Cluster aus, in denen die vorherrschende

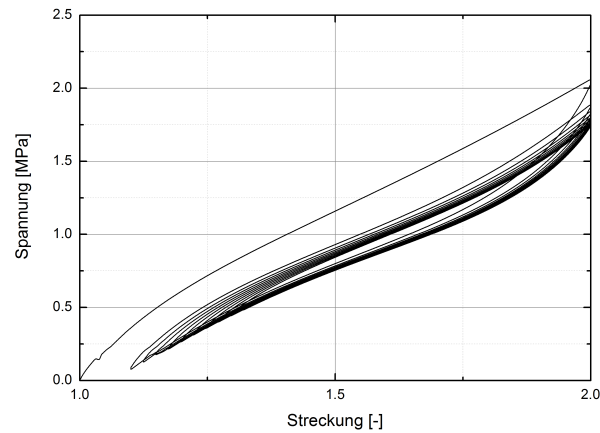


Abbildung 3.1 – Mullins-Effekt: Nach dem ersten Zyklus nimmt die Spannung bei gleichbleibender Maximaldehnung signifikant ab und bleibt danach näherungsweise konstant.

Wechselwirkung eine Füller-Füller-Interaktion ist. Gleichzeitig wechselwirken die Oberflächen dieser Cluster, aber auch einzeln vorliegende Partikel mit der Polymermatrix. Da alle Wechselwirkungen aufgrund der endlichen Fertigungsgeschwindigkeit bzw. der endlichen Abkühlraten nicht die Zeit haben, einen stabilen Gleichgewichtszustand zu erreichen, lassen sich insbesondere die schwächeren Bindungen zwischen den einzelnen Komponenten bei der Erstbelastung leicht zerstören. Dieser irreversible Effekt wird als Mullins-Effekt bezeichnet. In einem zyklischen Zugversuch zeigt sich dieser in Form eines Spannungsabfalls nach der Erstbelastung (vgl. Abbildung 3.1). Belastet man eine jungfräuliche Probe wie im gezeigten Fall auf 100% Zugdehnung, so erreicht die Spannung im Probeninneren einen bestimmten Maximalwert. Nach Ent- und erneuter Belastung auf dieselbe Streckung ist diese erreichte Spannung geringer, da einzelne Verbindungen, seien es solche zwischen Füllerpartikeln oder zwischen Partikeln und Matrix, bei der Erstbelastung zerstört wurden.

Um den Einfluss des Mullins-Effektes in den Experimenten, die zur Materialcharakterisierung verwendet werden sollen, zu minimieren, können die zu untersuchenden Proben vorkonditioniert werden. Hierzu belastet man diese bis zur maximal zu untersuchenden Dehnung und führt erst dann den gewünschten Versuch durch. Dieses Vorgehen bewirkt, dass das entwickelte und identifizierte Materialmodell nur das Verhalten des vorkonditionierten Werkstoffes innerhalb des Dehnungsbereiches beschreiben kann, der zur Vorkonditionierung benutzt wurde.

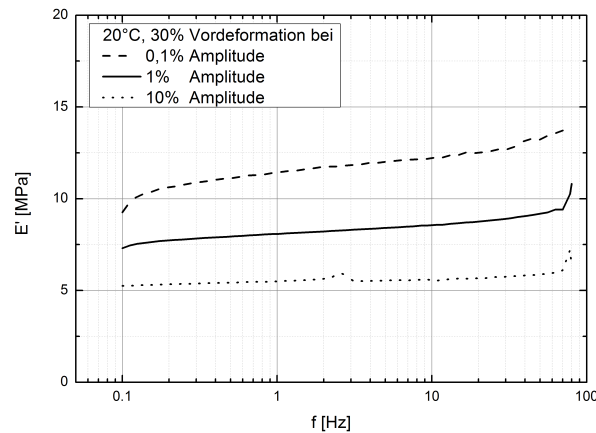


Abbildung 3.2 – Payne-Effekt: Amplitudenabhängigkeit der dynamischen Steifigkeit E' , mit größer werdender Amplitude nimmt die Steifigkeit ab, f ist die Frequenz.

Nach dem Mullins-Effekt ist der zweite füllerberingte Effekt der ebenfalls in Abschnitt 2 kurz erwähnte Payne-Effekt, welcher bei der Durchführung dynamischer Untersuchungen beobachtbar wird. Belastet man das Material dynamisch, so ist dessen dynamische Steifigkeit amplitudenabhängig: Höhere Amplituden führen zu niedrigeren Steifigkeiten. Grund hierfür ist, dass größere Deformationen zu einer stärkeren temporären Schädigung der Füller-Matrix-Wechselwirkung führen. Ist diese Schädigung bei kleinen Deformationsamplituden noch vernachlässigbar, so spielt sie bei größeren Deformationen, wie in Abbildung 3.2 veranschaulicht, eine signifikante Rolle. Die Abbildung zeigt, dass sich der Speichermodul bei Erhöhung der Dehnungsamplitude von 0,1% auf 10% auf etwa die Hälfte reduziert.

3.2 Kinematik

3.2.1 Einführung

Mit Hilfe der Kinematik werden Translations- und Rotationsbewegungen sowie Deformationen von materiellen Körpern beschrieben. Ein solcher materieller Körper zeichnet sich dadurch aus, dass er aus unendlich vielen materiellen Punkten besteht, die wiederum die physikalischen Eigenschaften tragen. Die Kinematik beschreibt die Positionsänderung eines Punktes X

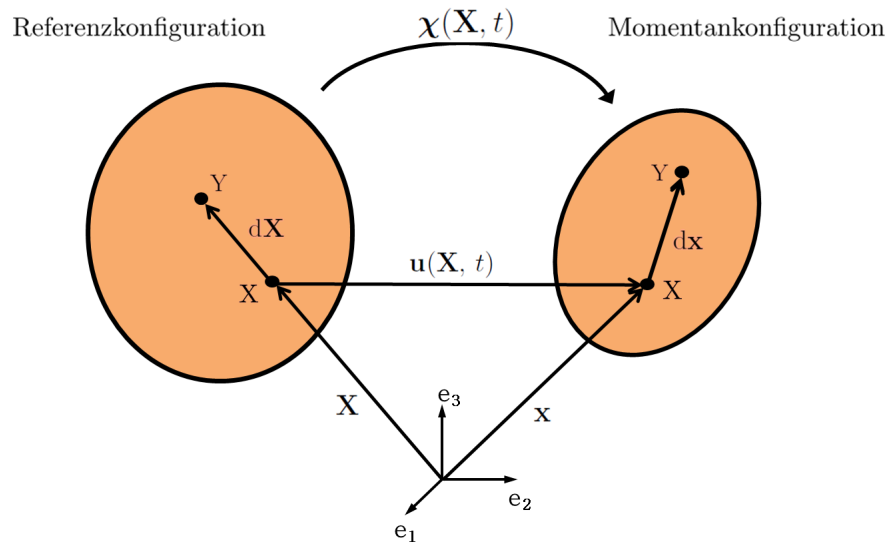


Abbildung 3.3 – Referenz- und Momentankonfiguration

des Körpers, der im Ausgangszustand, also in der undeformierten Lage bei $t = t_0$, die Position \mathbf{X} hat (vgl. Abbildung 3.3).

Diese undeformierte Form des Körpers wird als Referenzkonfiguration bezeichnet. Um die Position \mathbf{x} des Punktes X zum Zeitpunkt t darstellen zu können, wird die bijektive Bewegungsfunktion $\chi(\mathbf{X}, t)$ eingeführt, welche eine ein-eindeutige Verknüpfung zwischen der Ausgangsposition \mathbf{X} des Punktes X und dessen aktueller Position \mathbf{x} darstellt. Die Position \mathbf{x} entspricht dabei den Koordinaten von X in der Momentankonfiguration. Damit kann allgemein die Position eines Punktes in der Referenzkonfiguration mit der in der Momentankonfiguration verknüpft werden:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.1)$$

Der Verbindungsvektor zwischen der alten Punktposition \mathbf{X} zum Zeitpunkt t_0 und der neuen Position \mathbf{x} zur Zeit t ist dabei als

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (3.2)$$

definiert und wird als Verschiebungsvektor bezeichnet. Die Betrachtung der Verschiebung einzelner Punkte ist für die Beschreibung von Deformationen

in der Regel nicht ausreichend, weshalb in einem weiteren Schritt ein zweiter Punkt Y der Referenzkonfiguration zur Betrachtung hinzugefügt wird. Dieser Punkt hat einen infinitesimalen Abstand zum Punkt X und ist mit diesem durch das materielle Linienelement $d\mathbf{X}$ verbunden. Dieser Vektor wird mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} auf die Momentankonfiguration übertragen, wo er als $d\mathbf{x}$ den neuen Verbindungsvektor zwischen X und Y darstellt. Damit ergibt sich

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u}. \quad (3.3)$$

Dabei ist der Gradient ein zweistufiger Tensor und definiert als

$$\text{Grad}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (3.4)$$

Der zweistufige Tensor \mathbf{I} ist der Identitätstensor. Damit können Linienelemente der Referenzkonfiguration auf solche der Momentankonfiguration transportiert werden mit

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \quad (3.5)$$

Analog kann eine Transportvorschrift für Volumenelemente definiert werden. Dafür wird die Determinante $\det \mathbf{F}$ eingeführt, die auch als Jacobi-Determinante J bezeichnet wird. Die Abbildungsvorschrift hierzu lautet

$$dv = J dV, \quad (3.6)$$

wobei dV ein Volumenelement der Referenzkonfiguration darstellt, dv eines der Momentankonfiguration. Der Vollständigkeit halber sei noch das Transformationsverhalten von vektoriellen Flächenelementen $d\mathbf{a}$ und $d\mathbf{A}$ zwischen den beiden Konfigurationen erwähnt. Es gilt:

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.7)$$

Der Deformationsgradient \mathbf{F} beinhaltet sowohl Starrkörperrotationen, als auch reine Formänderungen. Er lässt sich polar zerlegen gemäß

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad (3.8)$$

wobei \mathbf{R} ein eigentlich orthogonaler Tensor ist und damit die Rotationsanteile beinhaltet. \mathbf{U} ist der sogenannte Rechts-Strecktensor, \mathbf{V} der Links-Strecktensor. Diese beschreiben die reinen Deformationen des Körpers. Da in der Regel nur die Körperdeformationen und nicht die Rotationsanteile von Interesse sind, bedarf es einer Zerlegung des Deformationsgradienten. Diesen im Allgemeinen mathematisch recht komplexen Schritt will man sich für gewöhnlich ersparen. Deshalb werden nun Deformationsmaße eingeführt, die die Quadrate von Linienelementen der verschiedenen Konfigurationen aufeinander abbilden. Mit Hilfe dieser Quadratur ergibt sich

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} \quad (3.9)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hieraus ergeben sich die neu eingeführten Deformationsmaße

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (3.11)$$

und

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2. \quad (3.12)$$

Der Tensor \mathbf{C} wird als rechter Cauchy-Green-Deformationstensor bezeichnet und ist ein Maß der Referenzkonfiguration, \mathbf{B} operiert auf der Momentankonfiguration und heißt linker Cauchy-Green-Deformationstensor.

Diese neuen Größen beinhalten nur die Deformationen eines Körpers, entsprechen allerdings im undeforinierten Zustand dem Einheitstensor \mathbf{I} . Um nun noch eine Beschreibungsmöglichkeit zu haben, welche im undeforinierten Zustand einem Nulltensor entspricht, bildet man die Differenz der Quadrate von Linienelementen $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$ bezogen auf die jeweilige Konfiguration. Daraus entstehen für die Referenzkonfiguration der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3.13)$$

und für die Momentankonfiguration der Euler-Almansische Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (3.14)$$

Die Tensoren \mathbf{E} und \mathbf{A} lassen sich über die Tensoroperationen *push forward* bzw. *pull back* ineinander überführen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad (3.15)$$

Um die Deformationsgeschwindigkeit zu beschreiben, erhält man je nach Darstellung den materiellen Geschwindigkeitsgradienten

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{Grad } \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.16)$$

oder den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.17)$$

Zerlegt man den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten in einen symmetrischen Anteil \mathbf{D} und einen schiefssymmetrischen Anteil \mathbf{W}

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad (3.18)$$

so ergeben sich die Deformationsgeschwindigkeit

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mathbf{D}^T \quad (3.19)$$

und der Wirbeltensor

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = -\mathbf{W}^T. \quad (3.20)$$

Bildet man weiterhin die materielle Zeitableitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors, so findet man die Zusammenhänge

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.21)$$

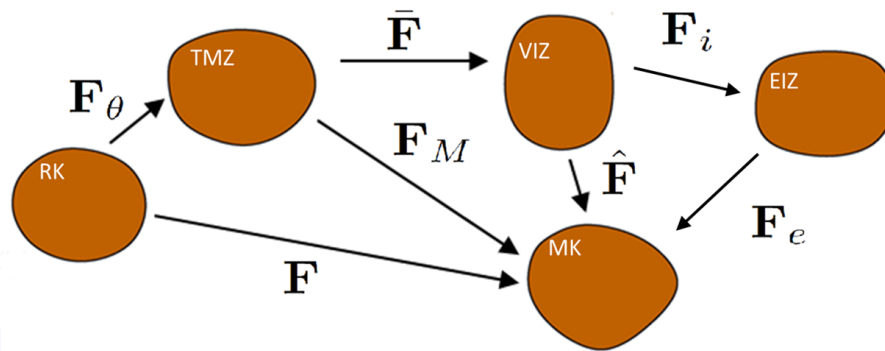


Abbildung 3.4 – Zusätzlich eingeführte Zwischenkonfigurationen: Thermisch-Mechanische Zwischenkonfiguration (TMZ), Volumetrisch-Isochore Zwischenkonfiguration (VIZ) und Elastisch-Inelastische Zwischenkonfiguration (EIZ).

Zwischen der materiellen Verzerrungsrate $\dot{\mathbf{E}}$ und der Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} gelten ebenfalls die Regeln des push forward beziehungsweise des pull back.

3.2.2 Darstellung mit volumetrisch-isochoerer Zerlegung

Zur Darstellung einfacher hyperelastischer Materialien reichen die zuvor eingeführten zwei Konfigurationen bereits aus. Viskoelastische Effekte und thermische Ausdehnungen lassen sich zwar grundsätzlich auch modellieren, können damit allerdings nicht separiert abgebildet werden. Genauso ist eine Unterteilung in volumenerhaltende und volumenändernde Deformationen nicht möglich. Dazu werden, wie in Abbildung 3.4 gezeigt, verschiedene weitere Konfigurationen eingeführt. Mit deren Hilfe kann der Deformationsgradient \mathbf{F} in unterschiedliche Anteile zerlegt werden. Solche Aufteilungen sind durch rheologische Modelle motivierbar, die elastische, viskose und thermische Deformationsanteile bzw. Komponenten enthalten.

Als erstes wird der Deformationsgradient in einen rein thermischen Anteil \mathbf{F}_θ und einen mechanischen Teil \mathbf{F}_M unterteilt. Daraus resultiert eine erste Zwischenkonfiguration, die Thermisch-Mechanische Zwischenkonfiguration (TMZ), welche den durch Temperaturbeaufschlagung deformierten Körper abbildet. Der mechanische Anteil \mathbf{F}_M wird dann, wie von [29] vorgeschlagen, in einen volumenerhaltenden Anteil $\hat{\mathbf{F}}$ und einen volumenändernden

Anteil $\bar{\mathbf{F}}$ zerlegt. Daraus resultiert die Volumetrisch-Isochore Zwischenkonfiguration (VIZ). Zuletzt wird der Deformationsanteil $\hat{\mathbf{F}}$ erneut unterteilt in einen inelastischen Anteil \mathbf{F}_i und einen elastischen Anteil \mathbf{F}_e . Letzterer Split ist in der Literatur weit verbreitet [53, 56, 55] und dient der Modellierung viskoelastischen Materialverhaltens.

In denselben Arbeiten wird motiviert, die Splits der jeweiligen Deformationsgradienten multiplikativ vorzunehmen. So ergeben sich zwischen den neu eingeführten Deformationsgradienten die Zusammenhänge

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{F}_\theta, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{F}_M = \hat{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}, \quad (3.23)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_i, \quad (3.24)$$

wobei der thermische Anteil des Deformationsgradienten gegeben ist durch

$$\mathbf{F}_\theta = (\alpha(\theta - \theta_0) + 1)\mathbf{I}. \quad (3.25)$$

Dabei ist α der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient und θ_0 eine Referenztemperatur. Basierend auf der Annahme, dass die thermische Ausdehnung isotrop ist, lässt sich \mathbf{F}_θ auf diese einfache Weise vollständig beschreiben. Wie in [29] ausgeführt, lassen sich der volumetrische und der isochore Anteil der mechanischen Deformation direkt aus \mathbf{F}_M und der Determinante $\det \mathbf{F}_M = J_M$ berechnen mit

$$\bar{\mathbf{F}} = J_M^{\frac{1}{3}}\mathbf{I} \quad \text{und} \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = J_M^{-\frac{1}{3}}\mathbf{F}_M. \quad (3.27)$$

Die Einführung neuer Zwischenkonfigurationen führt auch zu neuen Verzerrungsmaßen, die der jeweiligen Konfiguration zuzuordnen sind. Da zwischen allen neuen Zwischenzuständen ebenfalls die entsprechend formulierten Beziehungen des push forward und pull back gelten, lassen sich die neuen Größen direkt aus dem Verzerrungsmaß der Referenzkonfiguration \mathbf{E} bzw. der Momentankonfiguration \mathbf{A} herleiten.

Zunächst ist das Verzerrungsmaß Σ der TMZ zu bestimmen. Dieses ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\Sigma &= \mathbf{F}_\theta^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_\theta^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}_M - \mathbf{I}) + \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\theta^{-1}) = \Sigma_M + \Sigma_\theta,\end{aligned}\quad (3.28)$$

wobei \mathbf{C}_M und \mathbf{B}_θ^{-1} ihrem Index entsprechend der rechte Cauchy-Green Deformationstensor zu \mathbf{F}_M bzw. der linke Cauchy-Green Deformationstensor zu \mathbf{F}_θ sind. Damit lässt sich das Verzerrungsmaß Σ additiv in einen rein mechanischen Teil Σ_M und einen rein thermischen Anteil Σ_θ aufteilen.

Da die VIZ den mechanischen Anteil der Deformation zerlegt, wird für das Verzerrungsmaß dieser Konfiguration nur der Tensor Σ_M transportiert. Damit ergibt sich für das neue Verzerrungsmaß Ω der VIZ

$$\begin{aligned}\Omega &= \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \Sigma_M \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{I}) + \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}^{-1}) = \hat{\Omega} + \bar{\Omega}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Mit diesem Vorgehen lässt sich nun auch der Tensor Ω additiv zerlegen in einen isochoren Anteil $\hat{\Omega}$ und einen volumetrischen Anteil $\bar{\Omega}$. Zur Bestimmung des fehlenden Verzerrungsmaßes Γ der EIZ wird der isochore Term aus Ω vorwärts transportiert

$$\begin{aligned}\Gamma &= \mathbf{F}_i^{-T} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{F}_i^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}_e - \mathbf{I}) + \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_i^{-1}) = \Gamma_e + \Gamma_i.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Daraus folgt eine additive Zerlegung in einen elastischen Anteil Γ_e und einen inelastischen Anteil Γ_i .

Für weitere Betrachtungen sind die objektiven Zeitableitungen der neuen Verzerrungsmaße einzuführen. Die erste zu nennende ist hierbei $\overset{\Delta}{\Sigma}$, wobei (\bullet) die objektive, also beobachterunabhängige (vgl. [38]) Zeitableitung symbolisiert. Diese Zeitableitung ergibt sich aus dem push forward der zeitlichen

Ableitung des pull backs der Größe Σ selbst zu

$$\begin{aligned}\overset{\Delta}{\Sigma} &= \mathbf{F}_\theta^{-T} \cdot \left(\mathbf{F}_\theta^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{F}_\theta \right) \cdot \mathbf{F}_\theta^{-1} \\ &= \mathbf{L}_\theta^T \cdot \Sigma + \dot{\Sigma} + \Sigma \cdot \mathbf{L}_\theta,\end{aligned}\quad (3.31)$$

wobei $\mathbf{L}_\theta = \dot{\mathbf{F}}_\theta \cdot \mathbf{F}_\theta^{-1}$ als thermischer Geschwindigkeitsgradient zu bezeichnen ist. Aufgrund der Tatsache, dass \mathbf{F}_θ einem Einheitstensor entspricht, der mit einer skalaren Funktion von θ multipliziert wird, lässt sich dieses vereinfachen zu

$$\overset{\Delta}{\Sigma} = 2\mathbf{L}_\theta \cdot \Sigma + \dot{\Sigma}.\quad (3.32)$$

Wertet man (3.32) unter Benutzung von

$$\mathbf{L}_\theta = \frac{\alpha \dot{\theta}}{1 + \alpha(\theta - \theta_0)} \mathbf{I}\quad (3.33)$$

aus, so ergibt sich

$$\overset{\Delta}{\Sigma} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}_M + \frac{\alpha \dot{\theta}}{1 + \alpha(\theta - \theta_0)} \mathbf{C}_M.\quad (3.34)$$

Unter der Annahme, dass $\alpha \dot{\theta} \ll 1 + \alpha(\theta - \theta_0)$ gilt, ergibt sich daraus die Beziehung

$$\overset{\Delta}{\Sigma} \approx \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}_M \approx \dot{\Sigma}_M.\quad (3.35)$$

Auch weitere relevante Maße der Zwischenkonfigurationen werden so hergeleitet. Für die im Kapitel 5 benutzte inelastische Verzerrungsrate auf der EIZ wird $\mathbf{\Gamma}_i$ zunächst auf die VIZ zurückgezogen, sodass eine inelastische, isochore Verzerrung

$$\hat{\mathbf{\Omega}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{F}_i^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}_i^{-1}) \cdot \mathbf{F}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_i - \mathbf{I})\quad (3.36)$$

entsteht. Deren materielle Zeitableitung kann nun mit Hilfe des push forward auf die EIZ zurück transportiert werden, sodass sich die Rate der inelastischen

Verzerrung auf der EIZ

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{F}_i^{-T} \cdot (\mathbf{C}_i - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{F}_i^{-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i + \mathbf{L}_i^T) \quad (3.37)$$

ergibt.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass die Deformationsgradienten \mathbf{F}_θ und $\bar{\mathbf{F}}$ beide ausschließlich zu einer Volumenänderung führen und damit einem Einheitstensor, der mit einer skalaren Funktion multipliziert wird, bzw. einem Kugeltensor entsprechen. Somit ist auch die Objektivität von $\mathbf{\Gamma}$ gegeben, da die VIZ einer mit einem Skalar multiplizierten Referenzkonfiguration entspricht.

3.3 Bilanzgleichungen

Die zweite Komponente der Kontinuumsmechanik neben der Kinematik ist die Bilanzierung verschiedener physikalischer Größen in Bilanzgleichungen, welche axiomatisch eingeführt werden. Sie können alle in der gleichen allgemeinen Form dargestellt werden, in der sogenannten Masterbilanz. Diese bilanziert die zeitliche Änderung einer Größe ψ , die mit der Dichte ρ der Momentankonfiguration multipliziert ist. Dabei entspricht die zeitliche Änderung der Summe aus dem Fluss φ der Größe über den Körperperrand $\partial\mathcal{B}$, der Zufuhr σ und der Produktion $\hat{\psi}$. Damit ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \psi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \varphi(\mathbf{x}, t) da + \int_{\mathcal{B}} \sigma(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (3.38)$$

In diese Masterbilanz können nun physikalische Größen eingesetzt werden, was nach einigen Umformungen zu den Bilanzen von Masse, Drall, Energie und Entropie führt [1, 16, 24]. Es ergeben sich die Massenbilanz zu

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.39)$$

und die Impulsbilanz in räumlicher Darstellung zu

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}, \quad (3.40)$$

mit \mathbf{T} als Cauchyschem Spannungstensor, der auf der aktuellen Konfiguration operiert, sowie \mathbf{b} als Fernwirkungskraft (z. B. die Schwerkraft). Der Cauchysche Spannungstensor bezieht die aktuelle Kraft auf das aktuelle Flächenelement und wird auch wahre Spannung genannt. Formuliert in der materiellen Darstellung ergibt sich für die Impulsbilanz

$$\rho_0 \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}. \quad (3.41)$$

Nutzt man die Transformation für materielle Flächenelemente (3.7) und bezeichnet die zugehörigen Normalenvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration mit \mathbf{N} und \mathbf{n} , so gilt:

$$\mathbf{T} \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} da = J \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} dA = J \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.42)$$

Damit ergibt sich der 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor zu

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.43)$$

Dieser bezieht die aktuelle Kraft auf das Flächenelement der Referenzkonfiguration und wird Nominal- oder Ingenieursspannung genannt.

Die nächste auszuwertende Bilanz ist die des Dralls. Die Drallbilanz liefert die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (3.44)$$

Weiterhin wird die Bilanz der inneren Energie eingeführt. Sie kann aus der allgemeinen Energiebilanz (erster Hauptsatz der Thermodynamik) hergeleitet werden, die besagt, dass sich die aus kinetischer und innerer Energie ergebende Gesamtenergie eines materiellen Körpers durch die an ihm verrichtete mechanische und thermische Leistung ändert. Nutzt man bei der Herleitung der Energiebilanz die Impulsbilanz aus, so fällt die kinetische Energie heraus. Bezeichnet man die innere Energie pro Masseneinheit mit ε , so lautet die lokale Energiebilanz in Größen der Momentankonfiguration

$$\rho \dot{\varepsilon} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \text{div } \mathbf{q} + \rho r. \quad (3.45)$$

Die in der Bilanz auftretenden Größen sind die Spannungsleistung $\mathbf{T} : \mathbf{D}$, die Wärmeflussdichte \mathbf{q} und die innere Strahlungswärme ρr . Gleiches lässt sich auf der Referenzkonfiguration formulieren, was

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = \bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} - \text{Div } \mathbf{Q} + \rho_0 r \quad (3.46)$$

ergibt, wobei ρ_0 die Ausgangsdichte repräsentiert. Die Wärmeflussdichten \mathbf{q} und \mathbf{Q} der Momentan- und Referenzkonfiguration hängen dabei unter Berücksichtigung von (3.7) über $\mathbf{Q} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$ zusammen. In (3.46) wird ein weiterer Spannungstensor $\bar{\mathbf{T}}$ der Referenzkonfiguration verwendet, der die konjugierte Spannung zur Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{E}}$ ist und sich aus

$$\bar{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (3.47)$$

berechnet. Dieser Spannungstensor wird als 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor bezeichnet und lässt sich aus der Invarianz der Spannungsleistung herleiten, vgl. [41]

$$\frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{D}. \quad (3.48)$$

Analog lässt sich für die im Kapitel 5 relevante TMZ verfahren. Hier ergibt sich für die Bilanz der inneren Energie die Gleichung

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = J_\theta \bar{\mathbf{T}}_M : \overset{\Delta}{\Sigma} - \text{Div } \mathbf{Q} + \rho_0 r. \quad (3.49)$$

Dabei ist $\bar{\mathbf{T}}_M$ die zur Verzerrungsrate $\overset{\Delta}{\Sigma}$ korrespondierende Spannung auf der TMZ, die mit dem 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor über die Beziehung

$$\bar{\mathbf{T}}_M = \frac{1}{J_\theta} \mathbf{F}_\theta \cdot \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_\theta^T \quad (3.50)$$

zusammenhängt.

Im letzten Schritt ist die Bilanz der Entropie zu formulieren. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die Entropieproduktion $\hat{\eta}$ in ei-

nem materiellen Körper nicht negativ sein darf. Mit der Wahl

$$\varphi_\eta = -\frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad (3.51)$$

für den Entropiefluss und

$$\sigma_\eta = \frac{\rho r}{\theta} \quad (3.52)$$

für die Entropiezufuhr erhält man

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{\rho r}{\theta} = \hat{\eta} \geq 0 \quad (3.53)$$

was nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik größer oder gleich Null sein muss. Drückt man diese Bilanz durch Größen der Referenzkonfiguration aus, so ergibt sich die Ungleichung

$$\rho_0 \dot{\eta} + \operatorname{Div} \left(\frac{\mathbf{Q}}{\theta} \right) - \frac{\rho_0 r}{\theta} \geq 0 \quad (3.54)$$

3.4 Materialtheorie

3.4.1 Clausius - Duhem - Ungleichung

Sowohl die zuvor eingeführten kinematischen Beziehungen, als auch die Bilanzgleichungen sind allgemeingültig und hängen damit nicht vom Material ab, welches modelliert werden soll. Daher wird nun der dritte Teil der kontinuumsmechanischen Grundlagen eingeführt, die Konstitutivgleichungen. Diese stellen beispielsweise einen Zusammenhang zwischen auftretenden Dehnungen und Spannungen oder aber zwischen der Temperatur und dem Wärmefluss her. Mit den Konstitutivgleichungen ist es außerdem möglich, die Temperatur des Körpers mit dessen mechanischen Charakteristika zu verknüpfen, sodass sich beide gegenseitig beeinflussen.

Formuliert werden die Materialgesetze als Auswirkungsfunktionen

$$\mathcal{R} = \{ \mathbf{T}, \Psi, \mathbf{q}, \eta \}. \quad (3.55)$$

Diese sind Funktionale der Bewegung $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ und der Temperatur $\theta(\mathbf{X}, t)$. Grundsätzlich müssen die Auswirkungsfunktionen so formuliert sein, dass sie den 2. Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen.

Die spezifische freie Helmholtzsche Energie Ψ wird in Form der Legendre Transformation eingeführt

$$\Psi = \varepsilon - \theta \eta \quad (3.56)$$

und nach der Zeit abgeleitet. Setzt man die sich ergebende und nach $\dot{\eta}$ aufgelöste Beziehung und die Bilanz der inneren Energie (3.45) in die Entropiebilanz (3.53) ein, so erhält man die Clausius-Duhem-Ungleichung mit Bezug auf die Momentankonfiguration

$$-\rho \dot{\Psi} - \rho \eta \dot{\theta} - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \text{grad } \theta + \mathbf{T} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (3.57)$$

und mit Bezug auf die Referenzkonfiguration analog

$$-\rho_0 \dot{\Psi} - \rho_0 \eta \dot{\theta} - \frac{\mathbf{Q}}{\theta} \cdot \text{Grad } \theta + \bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0. \quad (3.58)$$

Nun kann die Spannungsleistung noch in Größen der Thermisch-Mechanischen Zwischenkonfiguration beschrieben werden, woraus sich

$$-\rho_0 \dot{\Psi} - \rho_0 \dot{\theta} \eta - \frac{\mathbf{Q}}{\theta} \cdot \text{Grad } \theta + J_\theta \bar{\mathbf{T}}_M : \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_M \geq 0 \quad (3.59)$$

ergibt. Damit sind nur noch konkrete Ansatzfunktionen für die freie Energie Ψ zu wählen, um letztlich zu den das Materialverhalten beschreibenden Konstitutivgleichungen zu gelangen. Diese werden in Kapitel 5 eingeführt. Die Materialgleichungen sind so zu gestalten, dass sie mit der Clausius-Duhem-Ungleichung verträglich sind.

3.4.2 Inelastisches Materialverhalten

Im Allgemeinen hängt die freie Energiedichte von der Temperatur θ , einem geeigneten Deformationsmaß wie z.B. \mathbf{E} und weiteren inneren Variablen $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_k$ ab, die tensoriellen oder skalaren Charakter haben. Bildet man

die materielle Zeitableitung von $\Psi = \Psi(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_k)$ und setzt diese in (3.58) ein, so ergibt sich:

$$\left(\bar{\mathbf{T}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \left(\eta + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \rho_0 \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_n} : \dot{\mathbf{Q}}_n \right) - \frac{\mathbf{Q}}{\theta} \cdot \text{Grad } \theta \geq 0 \quad (3.60)$$

Fordert man, dass diese Ungleichung für beliebige Raten $\dot{\mathbf{E}}$ und $\dot{\theta}$ erfüllt ist und nimmt man ferner an, dass die Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen nicht von $\dot{\mathbf{E}}$ und $\dot{\theta}$ abhängen, so muss folgendes gelten:

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}, \quad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3.61)$$

Um die verbleibende Restungleichung zu erfüllen, die die Form

$$-\rho_0 \sum_{n=1}^N \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_n} : \dot{\mathbf{Q}}_n - \frac{\mathbf{Q}}{\theta} \cdot \text{Grad } \theta \geq 0 \quad (3.62)$$

hat, sind die folgenden Evolutionsgleichungen bzw. Materialannahmen hinreichend:

$$\mathbf{Q} = -\gamma \text{Grad } \theta, \quad \gamma \geq 0 \quad (3.63)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_n = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_n}, \quad \eta > 0 \quad (3.64)$$

Dabei können die Größen γ und η z.B. von der Temperatur und der Deformation oder von weiteren Größen abhängen. Die oben gewählten Materialgleichungen stellen sicher, dass das Modell mit der Clausius-Duhem-Ungleichung verträglich ist. Sie sind hinreichende Bedingungen für die thermomechanische Konsistenz. Andere Abhängigkeiten wie z.B.

$$\dot{\mathbf{Q}}_n = -\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_n} - \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}_n} \right)^3 \quad (3.65)$$

sind ebenso thermomechanisch konsistent.

3.4.3 Invariantendarstellung bei isotroper Hyperelastizität

Die oben beschriebenen Funktionen der freien Energie werden bei hyperelastischem Materialverhalten in der Regel in Invarianten eines Deformationstensors dargestellt. Die darin vorkommenden möglichen drei Hauptinvarianten eines zweistufigen Tensors ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 - \mathbb{I}_{\mathbf{C}} \lambda^2 + \mathbb{II}_{\mathbf{C}} \lambda - \mathbb{III}_{\mathbf{C}} = 0, \quad (3.66)$$

die aus der Behandlung des Eigenwertproblems, beispielsweise für den rechten Cauchy-Green Deformationstensor \mathbf{C}

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.67)$$

entsteht. Die sich daraus ergebenden Hauptinvarianten sind

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\mathbf{C}} &= \text{tr } \mathbf{C} = \mathbf{C} : \mathbf{I}, \\ \mathbb{II}_{\mathbf{C}} &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{C} : \mathbf{I})^2 - \mathbf{C}^T : \mathbf{C} \right), \\ \mathbb{III}_{\mathbf{C}} &= \det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Dabei sind die Hauptinvarianten des linken und rechten Cauchy-Green Deformationstensors gleich.

Da im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung (3.58) auch die Ableitung der freien Energiefunktion Ψ nach der Zeit auftaucht, bedarf es zur Auswertung nach der Kettenregel der Differentiation der Ableitungen dieser Invarianten nach den Prozessvariablen. Für diese ergibt sich im Falle des rechten Cauchy-Green Deformationstensors \mathbf{C}

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{I}_{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} &= \mathbf{I}, \\ \frac{d\mathbb{II}_{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} &= \mathbb{I}_{\mathbf{C}} \mathbf{I} - \mathbf{C}^T, \\ \frac{d\mathbb{III}_{\mathbf{C}}}{d\mathbf{C}} &= (\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Nimmt man die Abhängigkeit $\Psi = \Psi(I_C, II_C, III_C)$ an, so ergibt sich mit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.70)$$

für den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{T}} = 2\rho_0 \left[\frac{\partial \Psi}{\partial I_C} \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_C} (I_C \mathbf{I} - \mathbf{C}) + (\det \mathbf{C}) \frac{\partial \Psi}{\partial III_C} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (3.71)$$

Bei inkompressiblem Materialverhalten gilt $\det \mathbf{C} = 1$. Mit (3.69) folgt daraus

$$\begin{aligned} 0 &= (\det \mathbf{C})' = (\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} \\ \Leftrightarrow \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die Rate des Greenschen Verzerrungstensors ist also zu \mathbf{C}^{-1} orthogonal. Definiert man bei inkompressiblem Materialverhalten die nicht durch das Material bestimmte Zwangsspannung gemäß $\bar{\mathbf{T}}_Z = -p \mathbf{C}^{-1}$, so leistet sie an den geometrisch möglichen Deformationen keine Arbeit.

3.4.4 Modelle der finiten Elastizität

Zur Beschreibung der finiten Elastizität existiert eine Vielzahl von Modellansätzen. Diese unterscheiden sich mitunter signifikant in ihrer Motivation, beschreiben jedoch im Normalfall das gleiche Materialverhalten. Die unterschiedlichen Ansätze lassen sich in zwei Hauptgruppen einteilen, in solche, die mikromechanisch motiviert sind, und andere, die aus phänomenologischen Betrachtungen herrühren. In [70] sind diverse solcher Modellansätze angegeben, von denen die bekanntesten im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Ein häufig verwendetes, mikromechanisch motiviertes Modell ist das *8-Ketten Modell* oder Arruda-Boyce-Modell [6]. Dieses bedient sich eines repräsentativen, würfelförmigen Einheitselementes, in dem acht Ketten in verschiedenen Richtungen angeordnet vorliegen. Die Kettenorientierungen entsprechen dabei den Diagonalen des Würfels. Unter der Annahme inkompressiblen Materialverhaltens lässt sich die Funktion der Dichte der freien Energie herleiten

zu

$$\Psi = C_r \sqrt{n} \left[\beta \lambda_{Kette} - \sqrt{n} \ln \frac{\sinh \beta}{\beta} \right]. \quad (3.73)$$

Dabei ist n die Zahl der Kettenelemente, λ_{Kette} die Kettendehnung, welche sich aus $\lambda_{Kette} = \sqrt{\frac{I_C}{3}}$ ergibt und β eine nichtlineare Funktion dieser Kettendehnung mit

$$\beta = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_{Kette}}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.74)$$

\mathcal{L} entspricht dabei der Langevinfunktion $\mathcal{L}(x) = \coth x - 1/x$. Mit dem 8-Ketten Modell lässt sich isotropes Materialverhalten beschreiben, wobei besonders Äquibiaxialversuche gut abgebildet werden können.

Ein weiteres mikromechanisch motiviertes Modell ist das *Röhrenmodell*. Das in [42] vorgestellte Modell nimmt an, dass ein Makromolekül von seinen nächsten Nachbarn so eingebettet ist, dass es sich nur in einer von diesen Nachbarn erzeugten Röhre bewegen kann. Mit diesem Modell können jedoch nur relativ kleine Deformationen beschrieben werden, eine Zugverfestigung kann nicht abgebildet werden. Daher wurde in [49] eine Erweiterung für große Deformationen vorgenommen, welche im sogenannten *extended tube model* beschrieben ist.

Ein häufig eingesetztes phänomenologisch motiviertes Modell ist das *Ogden-Modell* [79]. Dieses interpretiert die freie Energie Ψ als Funktion der Hauptstreckungen λ_i mit

$$\Psi = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3 \right). \quad (3.75)$$

Damit ergeben sich $2N$ Materialparameter μ_n und α_n , sodass frei abgewogen werden kann zwischen Aufwand bei der Parameteridentifikation und der Genauigkeit des Modells.

Die wohl verbreitetste Gruppe der Modellansätze zur Darstellung der finiten, inkompressiblen Elastizität bilden die in Invarianten von Deformationstensorsen formulierten Funktionen der freien Energie Ψ , die sogenannten *Invariantenansätze*. Vorgeschlagen von Rivlin werden diese Ansätze als Po-

Polynomreihen der Form

$$\Psi = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M C_{ij} (\mathbf{I}_{\mathbf{C}} - 3)^i (\mathbf{II}_{\mathbf{C}} - 3)^j \quad (3.76)$$

beschrieben [94, 95]. Ähnlich dem Ogden-Modell kann bei diesem Ansatz die Zahl der Materialparameter C_{ij} beliebig gewählt werden. Außerdem kann die Kopplung bzw. die Miteinbeziehung der einzelnen Invarianten beliebig vorgenommen werden.

Neben den hier erwähnten Ansätzen existiert noch eine Vielzahl weiterer Modelle. Diese hier aufzuführen würde jedoch nicht zum methodischen Verständnis des allgemeinen Vorgehens beitragen.

3.4.5 Grundlegende Überlegungen zur linearen Viskoelastizität

Das mechanische Verhalten von Polymerwerkstoffen wird als viskoelastisch bezeichnet. Veranschaulichen lässt sich dieses Verhalten besonders gut anhand eines Relaxationsversuches. Anhand eines Solchen können zunächst die elastischen und viskosen Charakteristika veranschaulicht werden, die kombiniert als Viskoelastizität bezeichnet werden.

Elastisches Verhalten zeichnet sich dadurch aus, dass die Spannungsantwort auf beliebige Deformationsprozesse reversibel ist. Nach einer Be- und anschließenden Entlastung erreicht das Material also erneut den Ausgangszustand und ist spannungsfrei. Gleichbedeutend hiermit ist die Tatsache, dass jedem Deformationszustand ein bestimmter Spannungswert zuzuordnen ist. Wie in Abbildung 3.5 zu erkennen ist, ist dies im Fall eines Elastomers offensichtlich nicht der Fall. Nach der Aufbringung einer im Weiteren konstanten Deformation, hier 10% Zug, nimmt die Spannung über der Zeit zunächst ab. Nach einer charakteristischen Zeit erreicht sie jedoch einen näherungsweise konstanten Wert, welcher dem Gleichgewichtsspannungswert für die aufgebrachte Dehnung entspricht. Die Differenz aus Anfangsspannungswert und Gleichgewichtsspannungswert wird als Überspannung bezeichnet. Die Gleichgewichtsspannung wird ungeachtet der Vorgeschichte der Deformation erreicht, sofern lange genug gewartet wird. Damit weist das Material

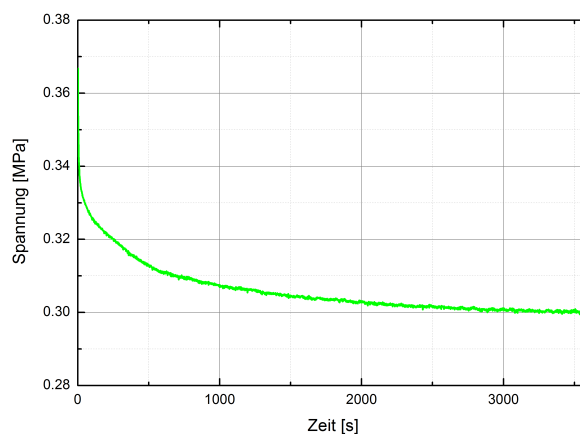


Abbildung 3.5 – Beispiel für einen Relaxationsversuch: Nach Aufbringung der konstanten Deformation von 10% Zugdehnung nimmt die anfänglich auftretende Spannung mit der Zeit ab.

Grundzüge elastischen Verhaltens auf. Dieses ist lediglich durch eine Art Fließprozess, also ein verlangsamtes Erreichen des Gleichgewichtszustandes überlagert.

Die Kombination aus elastischem Verhalten und Fließeigenschaften in dieser Form wird als Viskoelastizität bezeichnet. Um diese modellhaft zu beschreiben, hat sich das sogenannte 3-Parameter-Modell als ideales rheologisches Ersatzschaltbild erwiesen. Wie in Abbildung 3.6 dargestellt, besteht dieses aus einer Feder und einem parallel dazu angeordneten Maxwell-Element. Aufgebrachte Dehnungen werden dabei im Maxwell-Element additiv in einen elastischen Federanteil ε_e und einen inelastischen Dämpferanteil ε_i zerlegt, sodass gilt

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_i. \quad (3.77)$$

Die auftretenden Spannungen lassen sich ebenfalls additiv in einen Gleichgewichtsanteil σ_{eq} , welcher in der Feder auftritt, und einen Nichtgleichgewichtsanteil σ_{neq} im Maxwell-Element zerlegen. Aufgrund der Reihenschaltung tritt σ_{neq} sowohl in der Feder, als auch im Dämpfer auf. Mit den Parametern E als Steifigkeit der Gleichgewichtsfeder, μ als Federkonstante der Maxwell-Feder und η als Dämpfungviskosität ergeben sich die formalen Zusammenhänge

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{neq} \quad (3.78)$$

$$\sigma_{eq} = E \varepsilon \quad (3.79)$$

$$\sigma_{neq} = \eta \dot{\varepsilon}_i = \mu \varepsilon_e \quad (3.80)$$

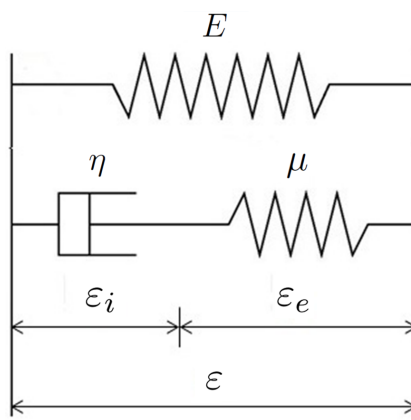


Abbildung 3.6 – 3-Parameter-Modell zur Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens: Eine Gleichgewichtsfeder der Steifigkeit E ist parallel zu einem Maxwell-Element angeordnet, welches aus einem Dämpfer der Viskosität η und einer Feder der Steifigkeit μ besteht, die Gesamtdehnung ε teilt sich im Maxwell-Element in einen inelastischen Anteil ε_i und einen elastischen Anteil ε_e auf.

für die auftretenden Spannungen. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich nach einigen Rechenschritten die charakteristische Differentialgleichung des 3-Parameter-Modells zu

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = (E + \mu) \dot{\varepsilon} + \frac{E}{\tau} \varepsilon, \quad (3.81)$$

wobei $\tau = \frac{\eta}{\mu}$ die Relaxationszeit des Maxwell-Elements bezeichnet.

Wertet man das Modell (3.81) für sehr schnelle Prozesse aus, d.h. für $|\tau \dot{\sigma}| \gg |\sigma|$ und $|\tau(E + \mu) \dot{\varepsilon}| \gg |E\varepsilon|$, so ergibt sich die spontane Spannungsantwort zu

$$\dot{\sigma} = (E + \mu) \dot{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = (E + \mu) \varepsilon. \quad (3.82)$$

Bei sehr langsamen Prozessen, d. h. für $|\tau \dot{\sigma}| \ll |\sigma|$ und $|\tau(E + \mu) \dot{\varepsilon}| \ll |E\varepsilon|$ ergibt sich die Gleichgewichtsantwort des Modells in der Form

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (3.83)$$

Dynamische Moduln

Da die dynamischen Materialeigenschaften im Folgenden von Interesse sind, soll nun aus der Differentialgleichung des 3-Parameter-Modells der komplexe Modul hergeleitet werden. Dieser entspricht der komplexen Materialsteifigkeit unter sinusförmiger Anregung und kann in einen physikalisch interpretierbaren Realteil und Imaginärteil aufgespalten werden. Der Realteil entspricht der dynamischen Steifigkeit des Materials, der Imaginärteil dem Verlustmodul, also der pro Belastungszyklus dissipierten Energie. Hierzu wird gedanklich eine periodisch wiederkehrende Deformation

$$\varepsilon = \Delta\varepsilon \exp(i\omega t) \quad (3.84)$$

aufgebracht, die in einer ebenfalls periodischen Spannung

$$\sigma = \Delta\sigma \exp(i\omega t) \quad (3.85)$$

resultiert. Einsetzen in (3.81) und umformen ergibt

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = E + \mu \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + i\mu \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (3.86)$$

Der Realteil entspricht dabei dem Speichermodul E' , der Imaginärteil dem Verlustmodul E''

$$E' = E + \mu \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{und} \quad E'' = \mu \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (3.87)$$

Beide Größen hängen von der Kreisfrequenz der Anregung ab.

Eigenerwärmung am 3-Parameter-Modell

Auch die Eigenerwärmung, welche bei dynamischen Belastungen auftritt, kann auf Basis des 3-Parameter-Modells bestimmt werden. Hierzu ist der erste Hauptsatz der Thermodynamik in der Form

$$\rho_0 c \dot{\theta} = \sigma_{neq} \dot{\varepsilon}_i \quad (3.88)$$

zu lösen. In (3.88) sind Strahlungseffekte vernachlässigt und adiabate Randbedingungen angenommen, das heißt dem Körper fließt keine Wärme zu oder ab. ρ_0 bezeichnet die Dichte, c die spezifische Wärmekapazität und θ die Temperatur. Da nur der Dämpfer des 3-Parameter-Modells zu Dissipations-effekten führen kann, sind alle anderen Spannungsleistungsanteile in (3.88) vernachlässigt. Mit (3.80) lässt sich die rechte Seite von (3.88) umschreiben in

$$\sigma_{neq} \dot{\varepsilon}_i = \frac{1}{\eta} \sigma_{neq}^2. \quad (3.89)$$

Bringt man nun eine sinusförmige Deformation

$$\varepsilon = \Delta \varepsilon \sin \omega t \quad (3.90)$$

auf, so lässt sich σ_{neq} mit $E'^* = E' - E$ in der Form

$$\sigma_{neq} = \left(E'^* \sin \omega t + E'' \cos \omega t \right) \Delta \varepsilon \quad (3.91)$$

beschreiben, da die auftretende Nichtgleichgewichtsspannung proportional zur Dehnungsamplitude ist und somit im Allgemeinen als Linearkombination aus Sinus- und Kosinusschwingung mit der Frequenz ω und der Dehnungsamplitude $\Delta \varepsilon$ formuliert werden kann. Die Quadratur führt dann zu

$$\sigma_{neq}^2 = \Delta \varepsilon^2 \left[E'^{*2} \sin^2 \omega t + E''^2 \cos^2 \omega t + 2E'^* E'' \sin \omega t \cos \omega t \right]. \quad (3.92)$$

Dies kann mit Hilfe von Additionstheoremen umgeformt werden, sodass sich für die Temperaturrate der Ausdruck

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\rho_0 c \eta} \Delta \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} (E'^{*2} + E''^2) + \frac{1}{2} (E''^2 - E'^{*2}) \cos 2\omega t + E'^* E'' \sin 2\omega t \right] \quad (3.93)$$

ergibt. Eine Integration führt mit der Annahme der Anfangsbedingung $\theta(0) = \theta_0$ im letzten Schritt zum zeitlichen Verlauf der Temperatur

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2\rho_0 c \eta} \Delta \varepsilon^2 \left[(E'^{*2} + E''^2)t + \frac{E''^2 - E'^{*2}}{2\omega} \sin 2\omega t - \frac{E'^* E''}{\omega} (1 - \cos 2\omega t) \right]. \quad (3.94)$$

Wie sich in (3.94) zeigt, ist die Erwärmung abhängig vom Quadrat der aufgebrauchten Dehnungsamplitude $\Delta \varepsilon$. Außerdem verändert sich die Temperatur

aufgrund des ersten Summanden linear mit der Zeit. Der zweite und dritte Summand überlagert dies periodisch, sodass die Temperatur um einen Mittelwert oszilliert. Die Oszillation findet dabei verglichen mit der aufgebrachten Deformation mit doppelter Frequenz 2ω statt.

Die in diesem Abschnitt gezeigten Berechnungsergebnisse im Rahmen des 3-Parameter-Modells lassen sich beliebig auf komplexeres viskoelastisches Materialverhalten erweitern, indem weitere Maxwell-Elemente parallel hinzugeschaltet werden. Somit kann das viskoelastische Verhalten beliebig genau dargestellt werden. Aufgrund der Tatsache, dass Polymerwerkstoffe aus Makromolekülen unterschiedlichen Molekulargewichts und unterschiedlicher Beweglichkeit bestehen, ist es notwendig, mehrere Steifigkeiten μ_k und Relaxationszeiten τ_k einzuführen. Damit können weitere Bereiche des zeitabhängigen Materialverhaltens abgebildet werden. Der Speicher- und der Verlustmodul erweitern sich dadurch um zusätzliche Summanden, genauso wie die Eigenerwärmung komplexere Abhängigkeiten von den verschiedenen Parametern aufweist.

In Kapitel 5 wird eine solche Erweiterung vorgenommen. Gleichzeitig werden dort dreidimensionale Vorgänge und große Deformationen miteinbezogen.

4

Experimentelle Materialcharakterisierung

Grundlegend für ein Materialmodell, welches die komplexen Eigenschaften eines Elastomers wiedergeben kann, ist die umfassende experimentelle Charakterisierung der untersuchten Mischung. Aus den gewonnenen Daten lassen sich sowohl die allgemeinen Eigenschaften des Materials, als auch die für das Modell notwendigen Parameter bestimmen.

Für die Materialuntersuchung kann eine Vielzahl von standardisierten Versuchen herangezogen werden. Seitens der mechanischen Charakterisierung können Zug-, Druck- und Scherversuche mit verschiedensten Randbedingungen durchgeführt werden. Damit kann das zeit- und temperaturabhängige mechanische Materialverhalten untersucht werden. Zur Feststellung des thermischen Materialverhaltens sind die Wärmekapazität, der thermische Ausdehnungskoeffizient und die thermische Leitfähigkeit zu bestimmen.

In diesem Kapitel wird zunächst das untersuchte Material vorgestellt. Danach folgt ein Überblick über die Gerätschaften und Maschinen, welche für die diversen Untersuchungen herangezogen werden. Auch die eingesetzten Probengeometrien und -beschaffenheiten werden vorgestellt. Im Anschluss daran steht eine detaillierte Beschreibung der durchgeführten Versuche und der darin erzielten Versuchsergebnisse.

4.1 Probenmaterial und Prüfkörper

4.1.1 Untersuchtes Material

Elastomere zeichnen sich unter anderem durch eine Vielzahl von möglichen Zusammensetzungen und Eigenschaften aus. Von extrem weichen und dehnbaren Konfigurationen bis hin zu steifen, spröden Mischungen gibt es vielerlei Zusammensetzungen, die in einem breiten Spektrum von technischen Einsatzmöglichkeiten Anwendung finden. Auch die Beständigkeit gegenüber äußeren Einflüssen wie Sauerstoff, Strahlung jeder Art, Wasser und anderen Medien ist aufgrund der steigenden Beständigkeitsansprüche von modernen Anwendungen von immer größer werdender Bedeutung. Daher werden Elastomere, die z.B. in der Automobil- oder Flugzeugindustrie Anwendung finden, mit diversen Zusatzstoffen und Füllern versetzt, um sowohl die thermischen und mechanischen Eigenschaften als auch deren Beständigkeit genau einstellen zu können.

Zur Versteifung des Elastomers werden Füller, in der Regel Rußpartikel, in das Material eingebracht. Außerdem werden neben dem Hauptvernetzungsmedium Schwefel Substanzen untergemischt, die den Vernetzungsprozess beschleunigen sollen. Um die Langzeitstabilität gegenüber äußeren Einflüssen zu verbessern, kommen dann in der Regel noch sogenannte Alterungsschutzmittel hinzu.

In modernen technischen Anwendungen kommen komplexe Rezepturen zum Einsatz, die jede für sich auf ein spezielles Einsatzfeld abgestimmt ist, sei es z. B. um besonders tiefe oder hohe Temperaturen zu ertragen. Um bei der Modellierung nicht ein zu spezielles Materialverhalten abzubilden, welches im schlechtesten Fall nicht mehr auf andere Elastomere übertragbar ist, wird in dieser Arbeit eine Materialmischung eingesetzt, die sich auf die wesentlichsten Bestandteile beschränkt.

Die Zusammensetzung des untersuchten Elastomers lässt sich Tabelle 4.1 entnehmen. Das von der Firma ZF Friedrichshafen AG zur Verfügung gestellte Material basiert auf einem sogenannten *Standard Vietnam Rubber* (SVR), welcher mit Rußpartikeln gefüllt ist. Der Anteil an Füllern wird hierbei im Allgemeinen nicht in Prozent angegeben, sondern bezogen auf 100 Teile Kautschuk-Rohmaterial ("per hundred rubber", phr). Als Vernetzungsmittel

wird Schwefel eingesetzt. Mit der Menge an beigefügtem Schwefel kann zum einen die Lebensdauer, zum anderen die Alterungsbeständigkeit modifiziert werden. In diesem Fall ist mit 1,5 phr ein Mittelweg gewählt worden. Zur Aktivierung der Vernetzung sind geringe Mengen an Zinkoxid (ZnO) und Stearinsäure, sowie zur Vernetzungsbeschleunigung N-Cyclohexylbenzothiazol-2-sulfenamid (CBS) und Tetrabenzylthiuramdisulfid (TBzTD) hinzugegeben. Die restlichen Bestandteile dienen der Stabilisierung gegenüber Temperatur- und Alterungseinflüssen. Mit dieser Rezeptur werden laut Hersteller die in

Rohstoff	[phr]
NR SVR CV69	100
Ruß N772	50
ZnO	5,0
Stearinsäure	2,0
IPPD	2,0
TMQ	1,0
Antilux	2,0
Schwefel	1,5
CBS	2,0
ZBzTD	0.2

Tabelle 4.1 – Materialzusammensetzung in *per hundred rubber* (phr).

Tabelle 4.2 angegebenen Eigenschaften erreicht. Von Relevanz ist für diese Arbeit hauptsächlich die Angabe der Glasübergangstemperatur, welche sowohl den Untersuchungsbereich, als auch die Bandbreite der Modellierung bezüglich der Temperatur eingrenzt. Die Eigenschaften des Materials ändern sich mit dem Glasübergang signifikant, sowohl in mechanischer, als auch in thermischer Hinsicht. Da der Einsatzbereich der meisten Elastomere deutlich oberhalb der angegebenen Glasübergangstemperatur liegt, wird im Weiteren davon abgesehen diese in die Betrachtungen miteinzubeziehen. Der Vollständigkeit halber wird die angegebene Glasübergangstemperatur im Kapitel 4.4.2 experimentell ermittelt und auch bestätigt.

Eigenschaft	Wert
Härte	60 Shore A
Rückprallelastizität	64 %
Zugfestigkeit	21,6 MPa
Bruchdehnung	487 %
Glasübergangstemperatur	-58°C

Tabelle 4.2 – Vom Hersteller angegebene Eigenschaften der eingesetzten Naturkautschuk-Mischung.

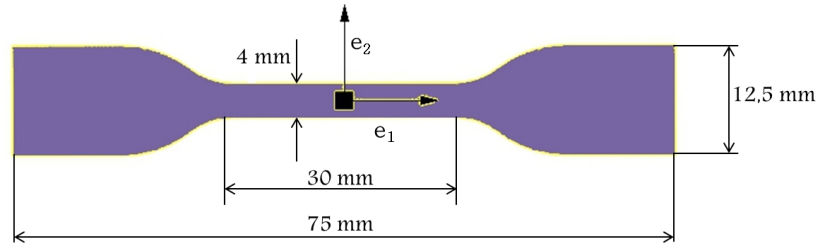


Abbildung 4.1 – Schulterprobe nach DIN ISO 572 zur Durchführung von Zugversuchen.

4.1.2 Probengeometrien und -einspannungen

Zur Charakterisierung der verschiedenen Materialeigenschaften werden mehrere Probengeometrien eingesetzt, die zum Teil einer Norm entnommen sind, oder aber sinnvoll gewählt sind im Sinne des Experimentators. In diesem Abschnitt werden die Geometrien und falls notwendig deren Einspannungen vorgestellt.

Zugproben

Für alle Untersuchungen unter Zugbeanspruchung, sowohl für quasistatische Prüfungen, als auch für dynamische Untersuchungen und Eigenerwärmungsmessungen kommen Schulterproben nach DIN ISO 572, sogenannte S2-Stäbe, zum Einsatz. In Abbildung 4.1 sind deren Abmessungen angegeben. Mit Hilfe eines Stanzmessers werden solche Proben aus Platten des zu untersuchenden Materials hergestellt. Die Materialplatten haben hierbei eine Dicke von ca. 2 mm und geben die Probendicke vor. Die exakten Maße, sowohl der Dicke als auch der Breite des 30 mm langen Probensteges werden vor jeder Messung auf hundertstel Millimeter genau gemessen. Dies wird getan, da zum einen die Elastomerplatten fertigungsbedingt nie exakt 2 mm dick sind. Zum anderen führt der Druck, der durch das Aufbringen des Stanzmessers aufgebracht wird, zu einer leichten Kompression des Materials, welches mit einer anschließenden Relaxation reagiert. Daher kann auch die Probenbreite von den gewünschten 4 mm abweichen.

Eine Ausnahme in der Geometrie bilden die in Kapitel 4.4.3 untersuchten Zugproben zur Untersuchung der Eigenerwärmung unter dynamischen Beanspruchungen. Neben S2-Stäben werden Proben mit einer Breite von 11 mm und einer Dicke von 2 mm untersucht. Hieraus sollen Rückschlüsse auf die Geometrieabhängigkeit der Eigenerwärmung geschlossen werden.

Aufgrund der Einspannung mittels Klemmbacken werden die Proben an den breiten Enden bereits vor Beginn der Zugprüfung verformt, womit bereits ein Spannungszustand in das Material eingebracht wird. Um trotzdem einen homogenen Spannungs- und Verzerrungszustand untersuchen zu können, ist die Geometrie des S2-Stabes so gewählt, dass diese Einspannungseffekte gemäß dem Prinzip von Saint-Venant in der Mitte des Steges abgeklungen und somit vernachlässigbar sind. Damit kann in der Probenmitte von einem reinen Zugzustand ausgegangen werden.

Druckproben

Aufgrund ihrer Geometrie sind die Schulterproben für Druckversuche nicht geeignet, sie würden unter Druckbelastungen sofort ausknicken, womit die Erzeugung eines homogenen Spannungszustandes unmöglich wäre. Daher werden für alle Druckversuche, sowohl für die quasistatischen, als auch für jene unter dynamischer Deformationsbeanspruchung, zylinderförmige Proben eingesetzt. Diese haben eine Höhe von 22,5 mm und einen Durchmesser von ebenfalls 22,5 mm.

Als Probenhalterungen werden zwei Platten eingesetzt, zwischen denen die Proben deformiert werden. Um die Zylinderproben bei den verschiedenen Untersuchungen zentrisch und stabil in die jeweilige Prüfmaschine einbringen zu können, sind die Probenhalter in der Mitte jeweils mit einem kleinen Dorn versehen. Ist die Probenmitte zuvor markiert, kann die Probe nun zentrisch zwischen den Platten befestigt werden. Auch ein seitliches Verrutschen während des Versuches wird damit verhindert. Abbildung 4.2 zeigt zwei Ansichten der Probenhalterung.

Beim Aufbringen einer Deformation auf die Zylinderproben entsteht aufgrund der Reibung zwischen Probe und Probenhalter in der Regel ein Bauch in der Mitte der Probe, was zu einem inhomogenen Deformationszustand führt. Da dieser nicht gewünscht ist, werden die Probenoberflächen vor der Installation in der Prüfmaschine mit einem Silikonöl beaufschlagt, welches die Reibung

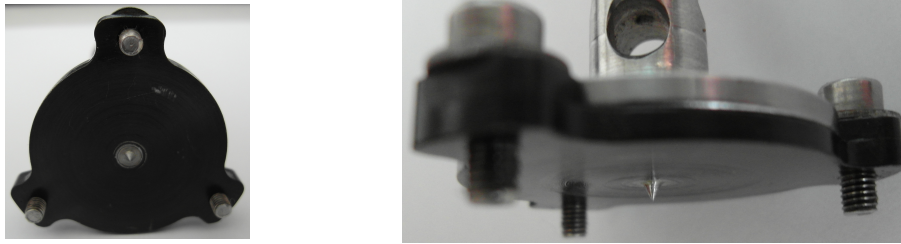


Abbildung 4.2 – Druckprobenhalterung mit zentralem Dorn zur Probenfixierung.

minimiert und so dafür sorgt, dass die zylindrische Probengeometrie bis zur maximalen Deformation erhalten bleibt. Dieser Wert darf in den im Folgenden beschriebenen Druckversuchen nicht überschritten werden.

Scherproben

Um mit einer Standardprüfmaschine, die in der Regel für Zug- und Druckversuche konzipiert ist, eine Probe unter einfacher Scherbelastung zu prüfen, bedarf es einer geeigneten Probengeometrie nebst Adaption. Hierzu werden die in Abbildung 4.3 dargestellten Prüfkörper verwendet. Zwischen zwei kreisförmige Stahlplatten mit anschließendem Gewinde wird das zu untersuchende Material eingebracht und anvulkanisiert. So entsteht ein Probenzylinder mit 14 mm Dicke und einem Durchmesser von 50 mm. Zwei solcher Proben werden dann an eine Adaption angeschraubt, die ihrerseits am Wegaufgeber der Prüfmaschine befestigt ist. Außen werden die Proben an einer weiteren Stahlbefestigung arretiert, welche fest mit der Bodenplatte des Prüfaufbaus verbunden ist.

Proben zur thermischen Untersuchung

Sowohl zur Untersuchung der spezifischen Wärmekapazität mittels Differenzkalorimetrie, als auch zur Bestimmung des linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten werden sehr kleine Proben benötigt. In beiden Fällen liegt dies darin begründet, dass die Wärmekapazität des Materials bzw. der Probe zu einer inhomogenen Aufheizung der Probe führt, ungeachtet der Heizleistung der Apparatur. Für die Kalorimetrie werden daher kleinste Stücke beliebiger Geometrie aus einer Materialmatte getrennt, mit dem Ziel ein Probengewicht von etwa zwei Milligramm zu erreichen.

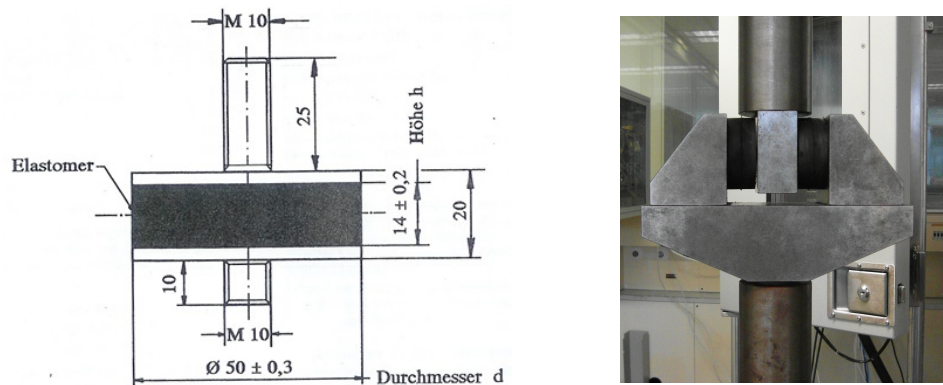


Abbildung 4.3 – Proben für Scherversuche: Links: Skizze, rechts: Foto mit zwei eingespannten Proben

Für die Messung der thermischen Ausdehnung werden mit Hilfe einer Lochstanze mit einem Durchmesser von 5 mm aus derselben Materialmatte Proben geschnitten. Diese runden Proben mit einer Dicke von etwa 2 mm werden dann für die Messung mittels thermisch-mechanischer Analyse herangezogen.

Zur Bestimmung der thermischen Leitfähigkeit mit der Laser-Flash-Analyse bedarf es runder Proben eines Durchmessers von 12,7 mm und einer Dicke von 2 mm. Diese werden zunächst mit einem Stanzeisen aus Platten herausgetrennt und dann mit feinem Schleifpapier auf den gewünschten Durchmesser gedreht. Um die Oberfläche möglichst reflexionsarm zu halten, was die Messmethode fordert, ist vor jeder Messung dafür zu sorgen, dass die Probe möglichst frei von Staub und anderen Verschmutzungen ist. Da das Material schwarz ist und daher selbst sehr reflexionsarm, bedarf es keiner weiteren Vorkonditionierung.

4.2 Versuchsstände

4.2.1 Quasistatische Prüfmaschine

Für eine große Anzahl von Versuchen ist es vonnöten, Proben verschiedener Geometrien mit moderater Geschwindigkeit, jedoch in einem recht großen Kraftbereich zu belasten. Hierzu wird in dieser Arbeit eine Prüfmaschine der Firma Zwick/Roell (TC-FR020TH.A50) eingesetzt. In Abbildung 4.4 ist die-

se dargestellt. Mit verschiedenen Probenhalterungen ist es damit möglich, die im Kapitel 4.1.2 vorgestellten Proben unter Zug-, Druck- und Scherdeformationen zu untersuchen.

Die Gerätespezifikationen sind Tabelle 4.3 zu entnehmen. Die Maschine kann eine Maximalkraft von 20 kN aufbringen, sodass alle Probentypen bis zu ausreichenden Deformationen geprüft werden können. Die größten Kräfte treten dabei bei den relativ großen Scherproben auf, sodass bei deren Untersuchung ein Kraftsensor mit einer Nennkraft von 10 kN eingesetzt wird. Dessen Auflösung wäre jedoch für die deutlich kleineren Druck- und Zugproben nicht ausreichend, da hierbei die Kräfte im Bereich von einigen 100 N bzw. 10 N liegen. Hierfür wird daher ein Sensor mit einer maximal applizierbaren Kraft von 500 N gewählt. Die mit der Prüfvorrichtung realisierbaren Deformationsgeschwindigkeiten von $5 \cdot 10^{-4}$ mm/min bis 10^3 mm/min decken für alle Prüfungen bei Weitem den relevanten Prüfbereich ab.

Da das Augenmerk in dieser Arbeit speziell auf dem Temperatureinfluss auf die mechanischen Eigenschaften von Elastomeren liegt, ist eine Temperierung erforderlich. Hierzu verfügt die quasistatische Prüfmaschine über eine Temperierkammer, welche in einem Bereich von -70°C bis 250°C betrieben werden kann. Wie sich im weiteren Verlauf der Arbeit zeigen wird, ist hierbei die untere Temperaturgrenze kein begrenzender Faktor, da der für den Einsatz des Materials relevante Bereich oberhalb dieser Temperatur liegt. Auch die Obergrenze ist aus den gleichen Gründen irrelevant. Da alle Versuche, die in dieser Apparatur durchgeführt werden (siehe Abschnitt 4.4), unter isothermen Bedingungen stattfinden, ist die Temperaturstabilität der Temperierkammer von Interesse. Diese liegt für die angegebenen Versuchszeiten bei etwa $\pm 0,5^\circ\text{C}$.

Charakteristikum	Grenzen
Maximale Prüfkraft	20 kN
Deformationsgeschwindigkeit	0,0005 bis 1000 $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$
Drehmoment	100 Nm
Drehgeschwindigkeit	0,001 bis 10 $\frac{\text{U}}{\text{min}}$
Temperaturbereich	-70°C bis 250°C

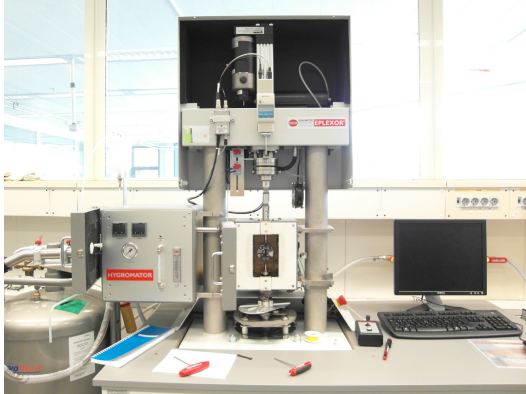
Tabelle 4.3 – Technische Daten der quasistatischen Prüfmaschine



Abbildung 4.4 – Versuchseinrichtung zur Durchführung der uniaxialen quasi-statischen Experimente, Bild entnommen aus [18].

4.2.2 Dynamisch - Mechanische Prüfmaschine

Da mit der quasistatischen Prüfmaschine der Bereich der niedrigen und mittleren Belastungsgeschwindigkeiten abgedeckt ist, bedarf es einer weiteren Prüfanordnung, mit der hohe Deformationsraten realisiert werden können. Dies geschieht in dieser Arbeit mit zwei verschiedenen Maschinen. Zum einen kommt eine EPLEXOR[®] 500 N der Firma Gabo Qualimeter zum Einsatz, zum anderen eine ELF 3230 Series III der Firma BOSE[®]. Zweitere wird nicht zur quantitativen mechanischen Prüfung, sondern nur zur Aufbringung einer dynamischen Deformation ohne Messung von auftretenden Kräften genutzt. Mit Hilfe einer Wärmebildkamera (vgl. Abschnitt 4.2.3) wird die Eigenerwärmung des untersuchten Materials aufgenommen. Die Prüfmaschine der Firma BOSE verfügt über einen kleinen Kraftsensor mit Nennbereich von 45 N, sowie einen größeren für maximale Lasten von 450 N. Die maximal aufbringbaren Deformationen liegen bei ± 6 mm.



Charakteristikum	Grenzen
Kraftbereich (dynamisch)	± 500 N
Kraftbereich (statisch)	1500 N
Dynamische Dehnung	$\pm 1 \mu\text{m}$ bis $\pm 1,5$ mm
Statische Dehnung	bis zu 35 mm
Frequenzbereich	0,01 bis 100 Hz
Temperaturbereich	-150°C bis 500°C

Abbildung 4.5 – Links: Versuchseinrichtung zur Durchführung der dynamisch - mechanischen Experimente, Bild entnommen aus [18]. Rechts: Technische Daten der dynamisch - mechanischen Prüfmaschine.

Die dynamisch-mechanische Analyse erfolgt mit der Prüfmaschine der Firma Gabo Qualimeter (Abbildung 4.5 links), deren Spezifikationen der Tabelle in Abbildung 4.5 rechts zu entnehmen sind. Mit diesem Gerät ist es möglich, unter Aufbringung einer statischen Vorlast von bis zu 1500 N, bzw. einer Vordeformation von 35 mm, eine dynamische Deformation mit Amplituden von bis zu 1,5 mm, begrenzt durch eine dynamische Maximalkraft von ± 500 N, zu applizieren. Mit einem vorgegebenen Zeitverlauf der Dehnung und der Messung des daraus resultierenden Kraft-Zeit-Verlaufes, kann der komplexe Modul, bzw. der Speicher- und Verlustmodul des Materials für verschiedene Frequenzen bestimmt werden.

Auch die dynamische Prüfung soll analog zur quasistatischen Prüfung unter dem Gesichtspunkt der Temperaturabhängigkeit durchgeführt werden. Hierbei sind die Temperaturabhängigkeiten von Speicher- und Verlustmodul von Interesse. Dazu verfügt die Prüfvorrichtung ebenfalls über eine Temperierkammer. Diese agiert in einem Temperaturbereich von -150°C bis 500°C , worin der zu prüfende Bereich vollständig enthalten ist. Auch hier ist die Temperaturstabilität unter isothermen Bedingungen von Interesse, welche im Bereich der angegebenen Versuchsdauern bei etwa $\pm 0,5^\circ\text{C}$ liegt.

4.2.3 IR-Kamera

Mit Hilfe der Thermographie, welche die Grundlage von Infrarotkameras bildet, lässt sich die Wärmestrahlung messen, die ein Körper aufgrund seiner vom absoluten Nullpunkt verschiedenen Temperatur abgibt. Die Zusammenhänge zwischen Temperatur, Strahlungsintensität und Wellenlängenverteilung folgen dem Wienschen Verschiebungsgesetz und können für die Messung als bekannt vorausgesetzt werden. Abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit des untersuchten Materials, kann sich der Emissionsgrad, also das Maß dafür, in wie weit die Probe von einem idealen schwarzen Körper abweicht, verändern. Dieser Emissionsgrad, zumeist mit ε bezeichnet, hat im Idealfall den Wert eins und für vom Ideal abweichende Oberflächen Werte zwischen null und eins.

Zur Messung der Oberflächentemperatur von Elastomerproben unter dynamischer Last kommt im Rahmen dieser Arbeit eine Infrarotkamera der Firma CEDIP Infrared Systems GmbH zum Einsatz. Diese ermöglicht es, die Temperaturverteilung auf einer Probe mittels graphischer Darstellungen der Verteilung der thermischen Strahlung auf der Oberfläche festzuhalten. Mit ihrem Einsatzbereich von -50°C bis 1200°C deckt sie den zu erwartenden Temperaturbereich bei weitem ab. Mit Hilfe einer vor der eigentlichen Messung durchgeführten Kalibrierung kann der Emissionsgrad der untersuchten Oberfläche bestimmt werden. Hierzu wird die Probenoberflächentemperatur lokal mit einem Thermometer gemessen und das Kamerasignal so lange durch eine Änderung des Emissionsgrades ε angepasst, bis sich die gemessene Temperatur am Referenzpunkt und die Anzeige der Wärmebildkamera entsprechen.

Die beschriebene Kamera wird in dieser Arbeit genutzt, um die Eigenerwärmung verschiedener Probengeometrien unter unterschiedlichen dynamischen Belastungen zu messen.

4.2.4 Differential Scanning Calorimetry (DSC)

Zur Entwicklung eines thermomechanisch gekoppelten Materialmodells ist es notwendig, neben den mechanischen Parametern auch die rein thermischen zu identifizieren. Die erste wichtige Eigenschaft hierunter ist die spezifische Wärmekapazität, welche anschaulich ausgedrückt der Wärmemenge entspricht, die benötigt wird, um ein Kilogramm eines Stoffes um ein Grad zu erwärmen.

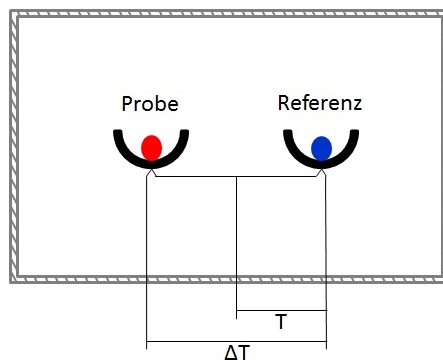


Abbildung 4.6 – Schematische Darstellung eines Differenzkalorimeters, ausgeführt als Wärmestromkalorimeter: Probe und Referenz werden mit gleichem Wärmestrom beheizt, wobei die Temperaturdifferenz zwischen Referenz und Probe gemessen und bezüglich der Wärmekapazität der Probe ausgewertet wird. Bild entnommen aus [18].

Allgemein kann Wärme durch physikalische oder chemische Prozesse generiert oder verbraucht werden, sowie durch Temperaturgradienten zum Austausch angeregt werden. Es kann generell zwischen exothermen Prozessen, bei welchen Wärme abgegeben wird, und endothermen Prozessen, welche durch eine Wärmeaufnahme charakterisiert sind, unterschieden werden. Exotherme Prozesse sind zum Beispiel Kristallisationen und Rekrystallisationen, Kondensationen und verschiedene chemische Reaktionen, endotherme Prozesse können Schmelz- und Verdampfungsvorgänge sein, aber auch chemische Reaktionen und, hier besonders interessant, der Glasübergang von Polymeren.

Um diese Prozesse zu untersuchen und auswerten zu können, bedient man sich in der Regel der Differenzkalorimetrie. Diese kann als Wärmestromkalorimetrie oder als Leistungskompensationskalorimetrie ausgeführt sein, was im Allgemeinen zu gleichen Ergebnissen führen soll. In beiden Fällen beinhaltet der Prüfraum des Gerätes zwei Tiegel. Ein leerer Tiegel dient als Referenz und der zweite ist mit der zu untersuchenden Probe (siehe Kapitel 4.1.2) befüllt (vgl. Abbildung 4.6).

In einem Wärmestromkalorimeter werden die beiden Tiegel gleichermaßen mit konstantem Wärmestrom beheizt. Kommt es nun aufgrund der Wärme-

kapazität der Probe oder zusätzlich dazu durch Reaktionen oder Umwandlungsprozesse zu einer Temperaturdifferenz im Proben Tiegel, so wird diese Differenz zum Referenztiegel mit Hilfe eines Thermoelementes unmittelbar unter den Tiegeln gemessen. Damit lässt sich auf die Wärmekapazität der Probe zurückrechnen.

Ähnlich wird bei der Leistungskompensationskalorimetrie vorgegangen. Im Unterschied zur Wärmestromkalorimetrie wird hier allerdings angestrebt, die Temperaturdifferenz zwischen Probe und Referenz durch einen angepassten Leistungseintrag auf der Probenseite anzupassen. Durch diese Leistungskompensation kann die verbrauchte oder freigesetzte Wärme in der Probe bestimmt werden. Dazu sind bei der Leistungskompensationskalorimetrie Probenraum und Referenzraum voneinander getrennt.

Für die beschriebenen Untersuchungen wird ein Gerät der Firma Netzsch eingesetzt, dessen Spezifikationen in Tabelle 4.4 gegeben sind. Im damit untersuchbaren Temperaturbereich von -180°C bis 700°C sind alle bei Elastomeren zu erwartenden Materialumwandlungen enthalten, sowohl der vom Probenhersteller angegebene Glasübergang bei -58°C , als auch die Zersetzung des Materials. Das eingesetzte Gerät ist als Wärmestromkalorimeter ausgeführt.

Für weitere Erläuterungen zur Funktionsweise der Kalorimetrie wird auf [44] verwiesen.

Charakteristikum	Grenzen
Einsatztemperatur	-180°C bis 700°C
Heizraten	$0,001 \frac{\text{K}}{\text{min}}$ bis $200 \frac{\text{K}}{\text{min}}$
Maximale Kühlrate	$200 \frac{\text{K}}{\text{min}}$

Tabelle 4.4 – Technische Daten des Differenzkalorimeters

4.2.5 Thermisch - Mechanische Analyse (TMA)

Als weiterer thermischer Parameter neben der Wärmekapazität ist der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient des untersuchten Materials zu bestimmen. Dieser stellt eine wichtige Komponente der Kopplung zwischen mechanischem und thermischem Verhalten dar. Da aufgrund der makromolekularen Struktur von Elastomeren, welche keine Fernordnung aufweist, von isotropem

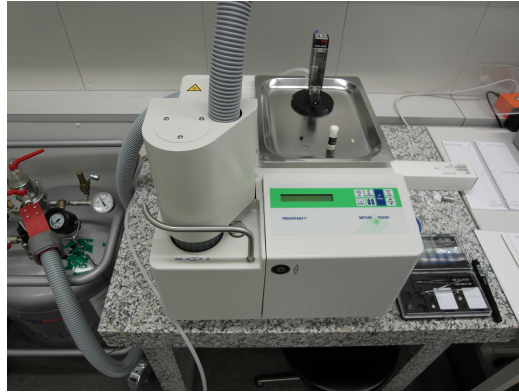


Abbildung 4.7 – Versuchseinrichtung zur Thermisch - Mechanische Analyse, Bild entnommen aus [18].

Materialverhalten ausgegangen wird, reicht es aus, die lineare und nicht die volumetrische thermische Ausdehnung des Materials zu charakterisieren, da sich die Ausdehnung in eine materielle Richtung in die Volumendehnung umrechnen lässt.

In dieser Arbeit wird zur thermisch - mechanischen Analyse ein Gerät der Firma Mettler-Toledo GmbH (SDTA841e, vgl. Abb. 4.7) herangezogen, in dem die in Kapitel 4.1.2 beschriebenen Proben untersucht werden.

Der Tabelle 4.5 sind die technischen Daten der verwendeten TMA zu entnehmen. Auch hier werden alle notwendigen Temperaturen abgedeckt. Mit der Längenauflösung von 0,6 nm kann jede sich in einer thermischen Ausdehnung niederschlagende Umwandlung innerhalb der Probe detektiert werden.

Charakteristikum	Grenzen
Einsatztemperatur	-150°C bis 600°C
Temperaturgenauigkeit	±0,35°C
Auflösung	0,6 nm
Maximale Probenlänge	20 mm

Tabelle 4.5 – Technische Daten der Thermisch-Mechanischen Analyseapparatur

4.2.6 Laser-Flash Analyse (LFA)

Als letzter thermischer Parameter ist die thermische Leitfähigkeit zu bestimmen, wofür die Laser-Flash Analyse verwendet wird. Dabei wird eine flache Probe (vgl. Abschnitt 4.1.2) in einer Kammer auf eine definierte, konstante Temperatur gebracht. Anschließend wird auf einer Seite der Probe ein Laserpuls appliziert, durch welchen sich die Probe einseitig erwärmt. Aufgrund der thermischen Leitfähigkeit des Materials, wird die so eingebrachte Wärme auf die gegenüberliegende Seite der Probe transportiert, auf der mit Hilfe eines Infrarotdetektors die zeitabhängige Oberflächentemperatur gemessen wird. Auf Basis dieses Zeitsignals kann die Temperaturleitfähigkeit und daraus abgeleitet die Wärmeleitfähigkeit des Elastomers bestimmt werden.

Die LFA-Versuche wurden am Wehrwissenschaftlichen Institut für Werk- und Betriebsstoffe durchgeführt, weshalb hierfür keine exakten Gerätspezifikationen vorliegen. Da es sich bei der Prüfanordnung der Firma Netzsch nicht um ein gekühltes System handelt, kann die Wärmeleitfähigkeit nur oberhalb von Raumtemperatur gemessen werden. Die maximale Prüftemperatur der Apparatur wird mit den avisierten Prüfungen mit maximal 90°C nicht erreicht. Für tiefergehende Erläuterungen bezüglich der LFA sei auf [82] verwiesen.

4.3 Versuchsparameter

Um das untersuchte Elastomer hinsichtlich seiner mechanischen und thermischen Eigenschaften charakterisieren zu können, werden umfangreiche Experimente durchgeführt. Dieser Abschnitt befasst sich mit den Randbedingungen der Versuche. Alle Prüfungen werden aus statistischen Gründen dreimal durchgeführt und gemittelt. Der Temperaturbereich, in dem das Material untersucht wird, beschränkt sich auf den Bereich von -10°C bis 80°C. In diesem wird die untersuchte Elastomermischung typischerweise eingesetzt.

4.3.1 Mechanische Versuche

Zur mechanischen Prüfung kommen die in Abschnitt 4.2.1 vorgestellte quasistatische Prüfmaschine und die in 4.2.2 beschriebene dynamische Testan-

ordnung zum Einsatz. Da der Mullins-Effekt [77] in dieser Arbeit nicht betrachtet werden soll, werden alle mechanisch geprüften Proben vorkonditioniert. Mindestens 24 Stunden vor der eigentlichen Prüfung werden sie dazu bei Raumtemperatur in die quasistatische Prüfmaschine eingespannt und in zwei Dehnungszyklen belastet. Sowohl die Zugproben, als auch die Druck- und Scherproben werden zweimal mit einer Geschwindigkeit von 1 mm/min auf die maximal aufgebrachte Dehnung, das heißt 50% Zug, 15% Druck, 30° Scherung gebracht und wieder entlastet. Damit ist zwar nicht gewährleistet, dass die Anzahl irreversibel geschädigter Bindungen im Material für alle Versuchsarten die Gleiche ist, aufgrund der unterschiedlichen Probenbeschaffenheiten und Beanspruchungsarten besteht jedoch keine geeignetere Möglichkeit zur Vorkonditionierung aller Proben mit etwa dem gleichen Grad der Schädigung.

Mehrstufige Relaxationsversuche

Der erste zu untersuchende Aspekt ist das Gleichgewichtsverhalten des Materials. Dieses beschreibt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung unter einer theoretischen, unendlich langsamen Belastung. Ebenfalls entspricht sie der zu einem bestimmten Dehnungszustand zugehörigen Spannung, die nach unendlich langer Relaxation erreicht ist. Um das Gleichgewichtsverhalten eines Polymers zu ermitteln, gibt es verschiedene Methoden, welche z. B. in [51, 99] beschrieben sind. Die wohl etablierteste Methode ist die des mehrstufigen Relaxationsversuches. Hierbei wird die Probe mit hoher Geschwindigkeit von 100 mm/min auf verschiedene Dehnungsstufen gedehnt, die jeweils für eine bestimmte Haltezeit beibehalten werden. In dieser Arbeit sind als Haltezeiten je Stufe zwei Stunden im Zug- und Druckfall, sowie 20 Minuten je Stufe für Scherbelastung vorgesehen. Diese Zeiten wurden in Voruntersuchungen als ausreichend ermittelt, da dann der Spannungsabfall je Stufe durch die Relaxation des Materials sehr stark abgenommen hat. Der zeitliche Dehnungsverlauf für einen solchen Versuch ist schematisch in Abbildung 4.8 dargestellt. Die Stufenhöhe beträgt im Zugversuch 10%, im Druckversuch 5% und unter Scherung 5°.

Um im Folgenden die Temperaturabhängigkeit der Grundelastizität ermitteln zu können, werden die Versuche bei verschiedenen konstanten Umgebungstemperaturen durchgeführt. Hierzu werden Prüfkammer und Prüfkörper vor jeder Untersuchung eine Stunde lang auf die gewünschte Temperatur von -10°C, 20°C, 50°C oder 80°C gebracht um eine homogene Temperaturverteilung im Prüfkörper zu gewährleisten. Anschließend wird die Probe ein-

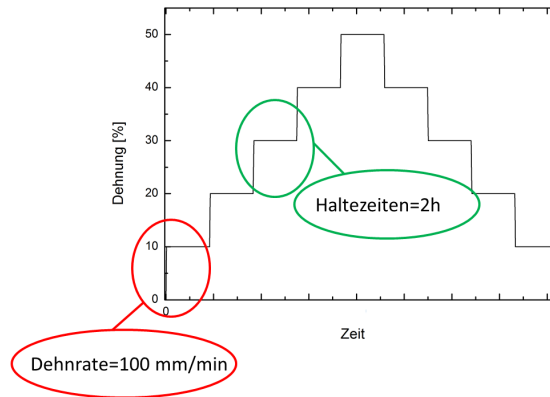


Abbildung 4.8 – Schematische Darstellung eines mehrstufigen Relaxationsversuches unter Zugbelastung: Mit vorgegebener Geschwindigkeit werden stufenweise verschiedene Dehnungen angefahren und für eine festgelegte Haltezeit konstant gehalten, alle auszuwertenden Dehnungsstufen werden bei steigender und fallender Dehnung angefahren.

gespannt und bei der jeweiligen Temperatur geprüft.

Relaxationsversuche

Aufgrund der Viskoelastizität von Elastomeren reicht es nicht aus, nur die Grundelastizität des Materials zu kennen. Vielmehr müssen auch die zeitabhängigen mechanischen Eigenschaften untersucht werden. Diese können durch verschiedene Versuche charakterisiert werden. Eine Möglichkeit, das mechanische Verhalten von Probenkörpern über größere Zeiten zu untersuchen, bietet der Relaxationsversuch. In diesem wird eine Probe um einen bestimmten konstanten Wert deformiert und auf diesem Verformungsniveau für längere Zeit gehalten. Darauf reagiert das Polymer mit einer Spannungsrelaxation, die sowohl schnelle, als auch sehr langsame im Werkstoff ablaufende Prozesse beinhaltet.

Um den Versuchsumfang zu minimieren, werden die im Kapitel 4.4 vorgestellten Relaxationsversuche nicht gesondert durchgeführt, sondern den mehrstufigen Versuchen entnommen. Deren erste Stufe entspricht im Falle der Zugprüfung einem Relaxationsversuch bei 10% Dehnung, für Druckversuche 5% Druckdehnung und für Scherversuche einem Relaxationsscherversuch mit

einem Scherwinkel von 5° . Ausgewertet werden auch hier die Versuche bei Umgebungstemperaturen von -10°C , 20°C , 50°C und 80°C .

Zyklische Versuche

Eine weitere Möglichkeit das zeitabhängige bzw. ratenabhängige Verhalten von Elastomeren zu untersuchen, bietet die Durchführung von zyklischen Versuchen. Hierbei wird mehrfach eine vorher definierte Maximaldehnung angefahren, woraufhin die Probe immer wieder zu einem weniger deformierten Zustand zurück geführt wird. Da Zugproben dazu neigen sich nach einer aufgebrachtten Dehnung mit anschließender Entspannung im Bereich von 0% Deformation auszubeulen, werden sie nicht auf 0% Dehnung zurückgefahren. Die Minimaldehnung in zyklischen Zugversuchen beträgt 5%. Ähnlich wird bei Druckversuchen verfahren, da diese sich im undeformierten Zustand unter Umständen von der Prüfplatte lösen. Die zyklischen Druckversuche werden also in einem Deformationsbereich von 1%-15% durchgeführt. Der Bereich für die Scherversuche liegt zwischen Scherwinkeln von 3° und 30° . In allen Fällen werden zehn Zyklen durchfahren.

Um auf das geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten schließen zu können, werden die zyklischen Versuche bei verschiedenen Deformationsraten durchgeführt. Diese sind 1, 10 und 100 mm/min. Hierin zeigt sich bereits ein wichtiger Nachteil gegenüber den Relaxationsversuchen. Um einen ausreichend großen Geschwindigkeits- und damit Zeitbereich charakterisieren zu können, müssen mehrere Versuche durchgeführt werden. Ein Relaxationsversuch böte diese Möglichkeit in einem Untersuchungsschritt.

Zyklische Versuche ermöglichen es, neben der Ratenabhängigkeit des Materialverhaltens eine weitere Komponente zu untersuchen. So führt die zyklische Belastung in der Betrachtung der Spannung aufgetragen über die Dehnung zur Ausbildung einer Hysterese. Diese kann qualitativ als Maß für die dissipierte Energie während eines Zyklus herangezogen werden. Jene Energie führt zur Eigenerwärmung des Materials während der Belastung, welche im Rahmen dieser Arbeit von besonderem Interesse ist. Mit dieser Methode kann also ermittelt werden, ob die Eigenerwärmung des Elastomers von der Belastungsrate abhängig sein wird. Da auch in den zyklischen Versuchen die Umgebungs- und Proben temperatur variiert wird, kann auch deren Einfluss auf die Eigenerwärmung qualitativ bewertet werden. In dieser Untersuchung werden ebenfalls Umgebungstemperaturen von -10°C , 20°C , 50°C und 80°C gewählt.

Dynamische Versuche

Durch die moderate maximale Prüfgeschwindigkeit der quasistatischen Prüfmaschine ist es nicht möglich, Proben unter höheren, in den Einsatzfeldern des Materials üblichen Geschwindigkeiten zu prüfen. Oftmals werden solche Bauteile mit Frequenzen bis zu 100 Hz belastet. Um den Bereich zwischen etwa 0,1 und 80 Hz experimentell abzudecken, wird die in Abschnitt 4.2.2 beschriebene dynamische Prüfanordnung verwendet.

In ihr werden Zug- und Druckproben untersucht. Von Interesse sind dabei der Speicher- und der Verlustmodul, wobei ersterer des öfteren als dynamische Steifigkeit bezeichnet wird und letzterer ein Maß für die dissipierte Energie und somit ein Anhaltspunkt für die Eigenerwärmung des Materials pro Zyklus ist. Um diese aus den Messwerten der dynamischen Versuche ermitteln zu können, betrachtet man zunächst die auftretenden Dehnungen und Spannungen. Da Elastomere ein nichtlineares Verhalten aufweisen, treten bei sinusförmiger Dehnungsanregung in der Regel auch höhere Frequenzen in der periodischen Spannungsantwort auf. Die Auswertetechnik der Prüfmaschine erlaubt es, den gleichfrequenten Anteil der Spannungsantwort zu extrahieren.

Aufgebracht werden Dehnungen ε mit einer Amplitude von $\Delta \varepsilon^*$ und einer Kreisfrequenz von ω . Diese dynamische Dehnung überlagert eine Vordeformation von ε_0 , welche im Versuchsverlauf konstant gehalten wird. Aufgrund der Tatsache, dass die Beweglichkeit von Makromolekülen durch ihre Nachbarn stark eingeschränkt ist, können sie einer endlich schnellen Belastung nicht instantan folgen. Daher eilt die aus der sinusförmigen Dehnung resultierende Spannung um den Phasenwinkel δ hinterher. Damit ergeben sich für Dehnung und Spannung die Zeitverläufe

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon^* \sin(\omega t) \quad (4.1)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta \sigma^* \sin(\omega t + \delta), \quad (4.2)$$

wobei σ_0 die Mittelspannung und $\Delta \sigma^*$ die Amplitude der Spannung ist. Unter

Zuhilfenahme eines Additionstheorems folgt daraus für die Spannung

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sigma_0 + \Delta \sigma^* \cos \delta \sin \omega t + \Delta \sigma^* \sin \delta \cos \omega t \\
 &= \sigma_0 + \Delta \varepsilon^* \left(\frac{\Delta \sigma^*}{\Delta \varepsilon^*} \cos \delta \sin \omega t + \frac{\Delta \sigma^*}{\Delta \varepsilon^*} \sin \delta \cos \omega t \right) \\
 &= \sigma_0 + \Delta \varepsilon^* \left(E' \sin \omega t + E'' \cos \omega t \right). \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Die darin auftretenden Größen

$$E' = \frac{\Delta \sigma^*}{\Delta \varepsilon^*} \cos \delta \quad \text{und} \quad E'' = \frac{\Delta \sigma^*}{\Delta \varepsilon^*} \sin \delta \tag{4.4}$$

werden als Speicher- und Verlustmodul bezeichnet.

Diese Größen werden nun für sinusförmige Zug- und Druckdeformationen bestimmt. Von Interesse sind dabei die Modulabhängigkeiten von der Frequenz, der Amplitude, der Vordeformation und der Temperatur. In Tabelle 4.6 sind die verschiedenen Prüfparameter angegeben, wobei alle Kombinationen dieser Parameter geprüft werden. Ein Versuch besteht dabei daraus, bei einer Temperatur eine Amplitude sowie eine Vordeformation aufzubringen und damit einen Frequenzsweep durchzuführen. Dabei wird mit der kleinsten Frequenz begonnen und in logarithmischen Schritten bis zur maximalen Frequenz erhöht.

Parameter	Spezifikation	Einheit	Werte
Temperaturen		°C	-10, 20, 50, 80
Frequenzen		Hz	0,1 bis 80
Vordeformationen	Zug	%	10, 30, 50
	Druck	%	1, 10, 15
Amplituden	Zug	%	0,1, 1, 10
	Druck	%	0,1, 0,5/1, 5/10

Tabelle 4.6 – Prüfparameter zur dynamisch-mechanischen Analyse

Im Druckfall ist zu bemerken, dass für 1% Vordeformation Amplituden von 0,1% und 0,5% aufgebracht werden, für Vordeformationen von 10% 0,1%, und 5%, sowie für 15% Vordeformation 0,1%, 1%, und 10%, da sich bei

anderen Kombinationen die untersuchten Proben von der Probenhalterung lösen würden.

4.3.2 Thermische Versuche

Die für die thermischen Versuche eingesetzten Proben werden nach ihrer Herstellung nicht weiter vorkonditioniert. Im Folgenden werden die Prüfparameter der verschiedenen thermischen Analysemethoden kurz beschrieben.

Differential Scanning Calorimetry

Mit Hilfe der in Kapitel 4.2.4 beschriebenen DSC-Apparatur sind zwei Größen zu bestimmen. Zum einen interessiert das temperaturabhängige Verhalten der isobaren spezifischen Wärmekapazität c_p im zu untersuchenden Bereich von -10 bis 80°C , zum anderen ist die Glasübergangstemperatur des Elastomers von Interesse. Für die zu entwickelnde Materialmodellierung ist sicherzustellen, dass die Glasübergangstemperatur hinreichend weit unterhalb von -10°C liegt. Da Umwandlungsprozesse wie der Glasübergang und der Verlauf von c_p im Allgemeinen von der Heiz- bzw. Kühlrate abhängen können, wird diese Abhängigkeit mituntersucht.

Hierzu werden DSC-Prüfungen im Temperaturbereich von -80 bis 150°C durchgeführt. Beginnend bei Raumtemperatur wird die Probe auf 150°C aufgeheizt. Diese Temperatur wird für 20 Minuten gehalten, um eventuelle Fertigungs- oder Vorgeschichteneffekte zu eliminieren. Dann wird die Probe mit -10 K/min auf -80°C abgekühlt und erneut auf 150°C erwärmt. Nach erneuter Haltezeit von 20 Minuten wird der Prozess mit variablen Kühlraten von 20, 30 und 40 K/min bei konstanter Aufheizrate wiederholt.

Thermisch - Mechanische Analyse

Bei der thermisch-mechanischen Analyse, welche mit der in Abschnitt 4.2.5 vorgestellten Apparatur durchgeführt wird, sind ebenfalls zwei Größen von Belang. Auch hier kann die Glasübergangstemperatur kühlratenabhängig bestimmt werden. Außerdem lässt sich der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient α bestimmen. Der untersuchte Temperaturbereich und das Temperaturprofil entsprechen dabei jenen der DSC-Untersuchungen.

Laser - Flash Analyse

Mit der Laser-Flash Analyse wird die thermische Leitfähigkeit λ_θ des Elastomers im Bereich zwischen 20 und 90°C bestimmt, wobei die untere Grenze, wie in Abschnitt 4.2.6 beschrieben, durch die Prüfapparatur vorgegeben ist. Ohne diese Beschränkung wäre auch mit dieser Methode der Glasübergang charakterisierbar. Zur Untersuchung der Temperaturabhängigkeit von λ_θ wird in 10°C-Schritten vorgegangen. Die Probe wird bei Raumtemperatur untersucht, anschließend wird der Probenraum auf 30°C erwärmt und die Prüfung wiederholt. In 10°C-Schritten wird dann weiterverfahren bis 90°C erreicht sind.

4.3.3 Gekoppelte Versuche

Als eine Möglichkeit zur Validierung des mit den oben beschriebenen Versuchen motivierten und parametrisierten Materialmodells können thermomechanisch gekoppelte Versuche herangezogen werden. Aus der Vielzahl der hierfür in Frage kommenden Versuchparameter werden für diese Arbeit dynamische Versuche gewählt, während derer die Oberflächentemperatur der belasteten Proben mit einer Wärmebildkamera (vgl. Abschnitt 4.2.3) gemessen wird. Die mechanischen Lasten werden hierzu in der in Abschnitt 4.2.2 vorgestellten Apparatur der Firma BOSE aufgebracht. Die Umgebungstemperatur entspricht der Raumtemperatur.

Da die Eigenerwärmung des untersuchten Elastomers von diversen Einflüssen abhängt, werden verschiedene Versuchsreihen durchgeführt. Zunächst wird unter Aufbringung einer Vordeformation von 20% eine sinusförmige Belastung mit 5% Amplitude aufgebracht. In einer weiteren Reihe werden diese Kombinationen gesteigert auf 20% Vordeformation und 10% Amplitude, sowie 30% Vordeformation und 20% Amplitude. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Vordeformation einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Eigenerwärmung hat.

Bei allen genannten Deformationsamplituden werden verschiedene Frequenzen appliziert. Beginnend bei 1 Hz folgen 2 Hz, 5 Hz, 10 Hz, 20 Hz und 50 Hz. Hat sich eine stationäre Temperaturverteilung eingestellt, werden mit der IR-Kamera ein Foto der gesamten Probenoberflächentemperaturverteilung aufgenommen und am wärmsten Punkt der Probenoberfläche die Temperatur bestimmt.

Um auch einen Eindruck der Geometrieabhängigkeit der Eigenerwärmung zu bekommen, werden die bisher an S2-Stäben durchgeführten Versuche an größeren Proben wiederholt. Dazu wird die ursprüngliche Querschnittsfläche von 4 x 2 mm auf 11 x 2 mm erhöht. Alle oben beschriebenen Versuche werden mit dieser Probengeometrie wiederholt.

4.4 Ergebnisse der Versuche

Die folgenden Versuchsergebnisse basieren auf den in Abschnitt 4.3 beschriebenen Versuchsparametern und -randbedingungen. Diese resultieren aus den Vorgaben und Annahmen des AiF-Projektes, welches dieser Arbeit zugrunde liegt. Wie sich mit der Bearbeitung des Projektes herausgestellt hat, offenbaren verschiedene Versuche häufig gleiche Materialcharakteristika. Somit lassen sich auch die Materialparameter auf verschiedenen Wegen identifizieren. Es wird daher davon abgesehen, alle erzielten Ergebnisse aufzulisten. Es wird viel mehr auf die Redundanz einiger Versuche eingegangen, sodass sich aus der Vielfalt durchgeführter Versuche ein optimiertes Versuchsprogramm ergibt. Dieses wird zum Abschluss des Kapitels zusammengefasst.

4.4.1 Mechanische Versuche

Mehrstufige Relaxationsversuche

Die in diesem Rahmen durchgeführten Versuche dienen der Bestimmung der Grundelastizität des untersuchten Materials, also jenes Verhaltens, das bei unendlich langsamer Deformation auftreten würde. Hierzu werden die Versuche jeweils stufenweise ausgewertet. Ein Paar von zueinandergehörenden Stufen, also beispielsweise das Spannungs-Zeit-Verhalten bei einer Dehnung von 10%, wird dabei gemeinsam betrachtet (vgl. Abb. 4.9). Sowohl im Be- als auch im Entlastungsfall wird eine Tangente an die Relaxationskurve angelegt. Der Schnittpunkt der daraus resultierenden Geraden wird dann als Gleichgewichtsspannungswert zur jeweiligen Dehnung angenommen. Zur Auswertung wird ein eigens geschriebenes MATLAB-Tool herangezogen, welches die stufenweise Auswertung automatisiert.

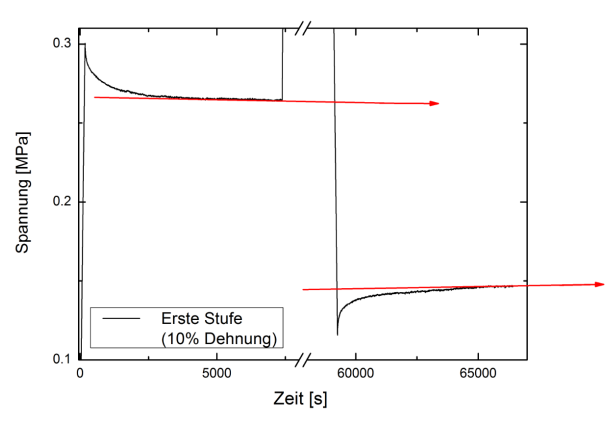


Abbildung 4.9 – Schematische Darstellung des Vorgehens zur Auswertung eines mehrstufigen Relaxationsversuches: An die zueinandergehörenden Stufen werden Tangenten angelegt, deren Schnittpunkt als Gleichgewichtsspannungswert der jeweiligen Dehnungsstufe angenommen wird.

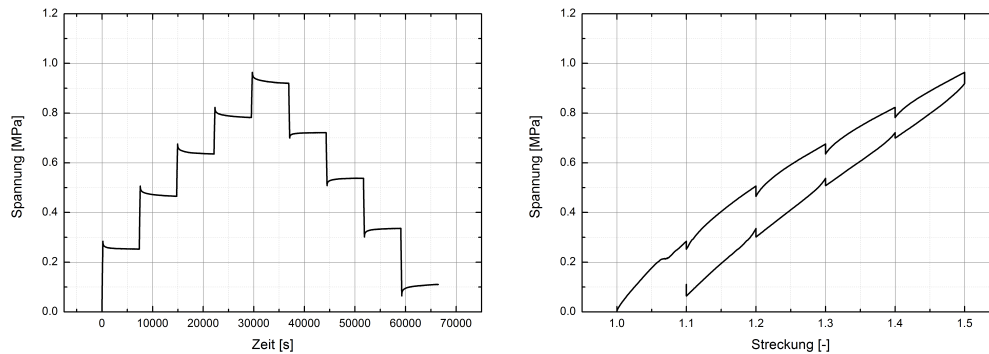


Abbildung 4.10 – Beispiel für einen mehrstufigen Zugversuch: Links: Spannungsverlauf über Versuchszeit, rechts: Spannung über Streckung

In Abbildung 4.10 ist beispielhaft ein mehrstufiger Relaxationsversuch dargestellt. Neben der Auftragung der Spannung über die Zeit ist auch das zugehörige Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt. Außer der oben beschriebenen Auswertungsmethode kann anhand dieser Darstellung eine weitere herangezogen werden. So ist es auch möglich, die Spannungsmittelwerte zu den zueinandergehörenden Dehnungsstufen als Gleichgewichtsspannung zu definieren. Die Mittelwerte sind in dieser Auftragung einfach abzulesen. Zu allen Methoden zur Bestimmung der Gleichgewichtsspannung ist anzumerken, dass diese den Verlauf der Gleichgewichtsspannung nicht tatsächlich messbar machen. Vielmehr entspricht die hier angewandte Methode einer Prozedur, mit der es möglich ist die Gleichgewichtsspannung durch Relaxationsversuche endlicher Dauer abzuschätzen.

Eine Extrapolation der Gleichgewichts-Spannungs-Dehnungs-Beziehung hin zu größeren Deformationen ist nur bedingt möglich. Für größere Deformationen weisen Elastomere in der Regel keine einfache Rechtskrümmung im Spannungs-Dehnungs-Verhalten mehr auf. Vielmehr führen höhere Deformationen zu einer Versteifung, und der Verlauf der Grundelastizität wird S-förmig. Damit ist eine Extrapolation nur in einem kleinen, im Allgemeinen jedoch nicht vorher bekannten Bereich sinnvoll. Als extrapoliertes Wert für die größte Deformation im Verlauf des Versuches kann dabei nicht der relaxierte Spannungswert herangezogen werden, sondern in jedem Fall eine geringere Spannung. Als Methode zur Bestimmung dieses Wertes kommt zum Beispiel eine Extrapolation der Spannungsdifferenzen bei den geringeren Dehnungen hin zur Maximaldeformation in Frage. Diese extrapolierte Spannungsdifferenz wird dann vom relaxierten Spannungswert bei der Ma-

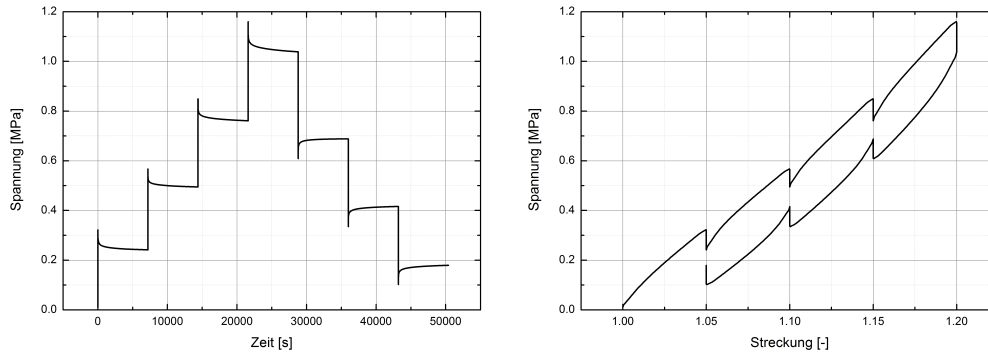


Abbildung 4.11 – Beispiel für einen mehrstufigen Druckversuch: Links: Spannungsverlauf über Versuchszeit, rechts: Spannung über Streckung

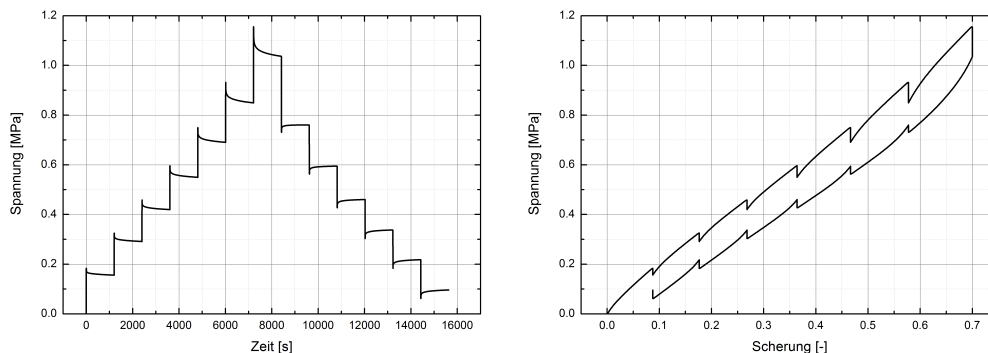


Abbildung 4.12 – Beispiel für einen mehrstufigen Scherversuch: Links: Spannungsverlauf über Versuchszeit, rechts: Spannung über Scherung

ximaldehnung abgezogen. Exemplarisch ist dieses Extrapolationsverfahren für den Zugbereich durchgeführt worden (vgl. Abbildung 4.13).

Die Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen beispielhaft je einen mehrstufigen Druckversuch und einen mehrstufigen Scherversuch. Diese können analog zu den Zugversuchen ausgewertet werden.

Nach der Auswertung aller Versuche unter Zug- und Druckbeanspruchung bei den verschiedenen Umgebungstemperaturen, können nun die korrespondierenden Gleichgewichtskennlinien ermittelt werden. Diese sind in Abbildung 4.13 dargestellt. Dabei zeigt sich, dass die Temperatur keinen ein-

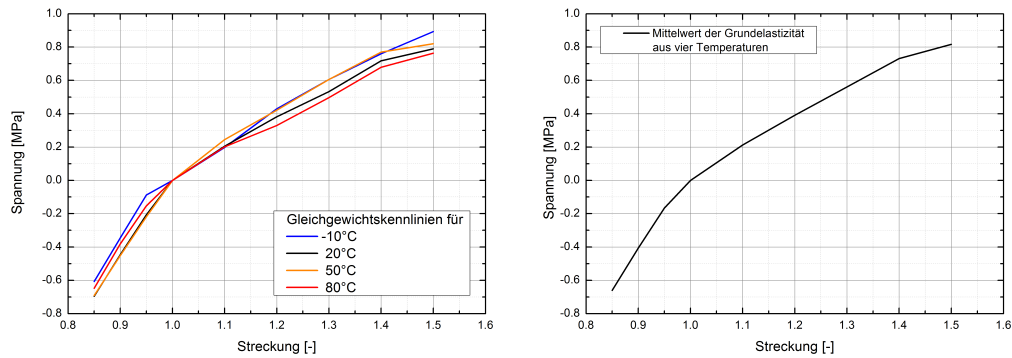


Abbildung 4.13 – Links: Aus der Auswertung von mehrstufigen Zug- und Druckversuchen gewonnene Gleichgewichts-Spannungs-Streckungs-Kennlinien im Zug- und Druckbereich für -10°C , 20°C , 50°C , und 80°C . Rechts: Mittelung der Ergebnisse für verschiedene Temperaturen.

deutigen bzw. signifikanten Einfluss auf die Grundelastizität hat, was in dem in Kapitel 5 dargestellten Modell berücksichtigt werden wird.

Die Anwendung der gleichen Auswertungsmethodik auf die durchgeführten Scherversuche führt zum in Abbildung 4.14 dargestellten Gleichgewichtsverhalten. Zum einen sind die Ergebnisse für alle vier Temperaturen dargestellt, nebenstehend sind diese, wie es unter Zug- und Druckbeanspruchung auch geschehen ist, zusammengefasst zu einer temperaturunabhängigen Gleichgewichts-kennlinie.

Sowohl an die Gleichgewichts-kennlinie für Scherbeanspruchung, als auch für jene unter Zugbeanspruchung kann für kleine Deformationen die Tangentensteigung ermittelt werden, um Aussagekraft und Sinnhaftigkeit der Ergebnisse einzuschätzen. So ergibt sich für den Tangentenmodul für Scherung (G) in etwa ein Wert von $1,4 \text{ MPa}$ und für Zug (E) etwa $2,1 \text{ MPa}$. Für inkompressibles Materialverhalten sollte dieses Verhältnis in etwa $E = 3G$ betragen, tatsächlich ist es in diesem Fall aber $E = 1,5G$. Dies führt im Weiteren dazu, dass Berechnungen, die mit Parametern aus Zug- und Druckversuchen bestückt sind, zu deutlich abweichenden Ergebnissen im Falle der Scherung führen müssen. Diese werden daher in folgenden Betrachtungen nicht berücksichtigt.

Ein möglicher Grund für diese große Abweichung ist vor allem die Beschaffenheit der Scherproben. Aufgrund des Herstellungsprozesses, bei dem das

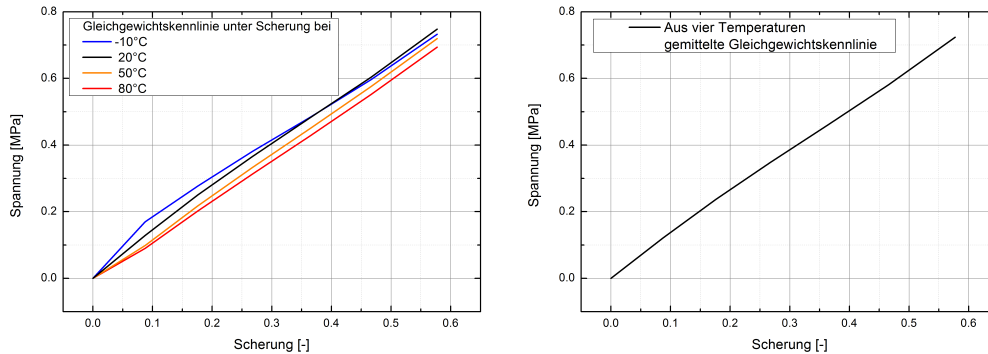


Abbildung 4.14 – Links: Aus der Auswertung von mehrstufigen Scherversuchen gewonnene Gleichgewichts-Spannungs-Scherungs-Kennlinie unter Scherbeanspruchung für -10°C , 20°C , 50°C und 80°C . Rechts: Mittelung der Ergebnisse für verschiedene Temperaturen.

untersuchte Elastomer an Stahlplatten anvulkanisiert wird, entsteht in den Randgebieten der Zylinder ein vom Gleichgewichtszustand abweichendes Material, welches sowohl abweichende chemische, vor allem aber abweichende mechanische Eigenschaften aufweist. Da eine gestörte Randschicht sich mikrostrukturell auch weit in das Probeninnere hin fortpflanzen kann, ist davon auszugehen, dass mit dieser Art von Probe nicht das gleiche Material untersucht wird, wie mit sich nahe dem Gleichgewichtszustand befindlichen Zug- oder Druckproben. Auch die Füllerkonzentration wird aufgrund dieses Vorganges lokal variieren, sodass zu keiner Zeit von einem homogenen Spannungszustand in der Probe auszugehen ist. Des Weiteren durchläuft die Scherprobe in ihrem Herstellungsprozess einen Abkühlvorgang, der bedingt durch ihre Größe und die Tatsache, dass zwei unterschiedliche Randmedien - Stahl und Luft - zum Einsatz kommen, zu starken Temperaturgradienten führt, was wiederum Eigenspannungen einfriert. Auch eine rein geometrische Betrachtung führt zu dem Schluss, dass die erzielten Ergebnisse nicht quantitativ zur Validierung herangezogen werden sollten. Aufgrund des relativ großen Verhältnisses zwischen Probendicke und Probenbreite (14:50) steht ein großer Bereich des Elastomers unter Zug- bzw. Druckbelastung. Mit einem kleineren Verhältnis wäre der Scherzustand dominanter. Es ist daher zu empfehlen eine solche Probengeometrie in zukünftigen Untersuchungen nicht erneut zu nutzen. Zusätzlich ist es auch möglich, dass aufgrund der Probenvorkonditionierung Unterschiede zwischen den Ergebnissen unter Zug-, Druck- und Scherbeanspruchung auftreten. Da bei der Vorkonditionierung zur Eliminierung des Mullins-Effektes nicht gewährleistet ist, dass

unter verschiedenen Beanspruchungen die gleiche Schädigung auftritt, können grundsätzlich Abweichungen zwischen den Ergebnissen bei verschiedenen Belastungsarten auftreten.

Relaxationsversuche

Nach dem Gleichgewichtsverhalten des Materials gilt es nun die zeitabhängigen mechanischen Eigenschaften anhand der Relaxationsversuche zu untersuchen. Diese zeigen, je nach Haltezeit, das viskoelastische Verhalten über vier Zeitdekaden, beginnend beim Kurzzeitverhalten nach einigen Sekunden, endend nach mehreren tausend Sekunden. Wie in Abbildung 4.15 zu sehen ist, fällt die Spannung ungeachtet der Beanspruchungsart und -temperatur zunächst stark ab und strebt dann langsamer werdend einem fiktiven Endwert entgegen, welcher der Grundelastizität bei der aufgebrauchten Dehnung entspricht.

Von besonderer Wichtigkeit für diese Arbeit ist die Temperaturabhängigkeit des Relaxationsverhaltens. Exemplarisch soll hierzu auf das Verhalten unter Zugbeanspruchung genauer eingegangen werden, welches auf die Fälle Druck und Scherung übertragbar ist.

Die Krümmung der in Abbildung 4.15 dargestellten Relaxationskurven ändert sich mit der Temperatur näherungsweise nicht. Daher wird in der folgenden Modellierung angenommen, dass die Relaxationszeiten temperaturunabhängig sind. Die dynamische Steifigkeit des Elastomers ändert sich mit der Temperatur dagegen signifikant: Bei einer niedrigen Temperatur von -10°C führt eine Dehnung zu deutlich höheren Spannungen als bei einer hohen Temperatur von 80°C . Dieser Effekt ist näherungsweise proportional zur Temperatur, sodass dieses Verhalten mit der Temperaturabhängigkeit der viskoelastischen Steifigkeitsanteile modelliert werden kann (siehe Kapitel 5).

Als letzte Beobachtung aus den Relaxationsversuchen lässt sich feststellen, dass die Spannungsendwerte der Relaxationsversuche alle oberhalb der gemittelten Grundelastizität liegen, sodass die erzielten Versuchsergebnisse plausibel sind.

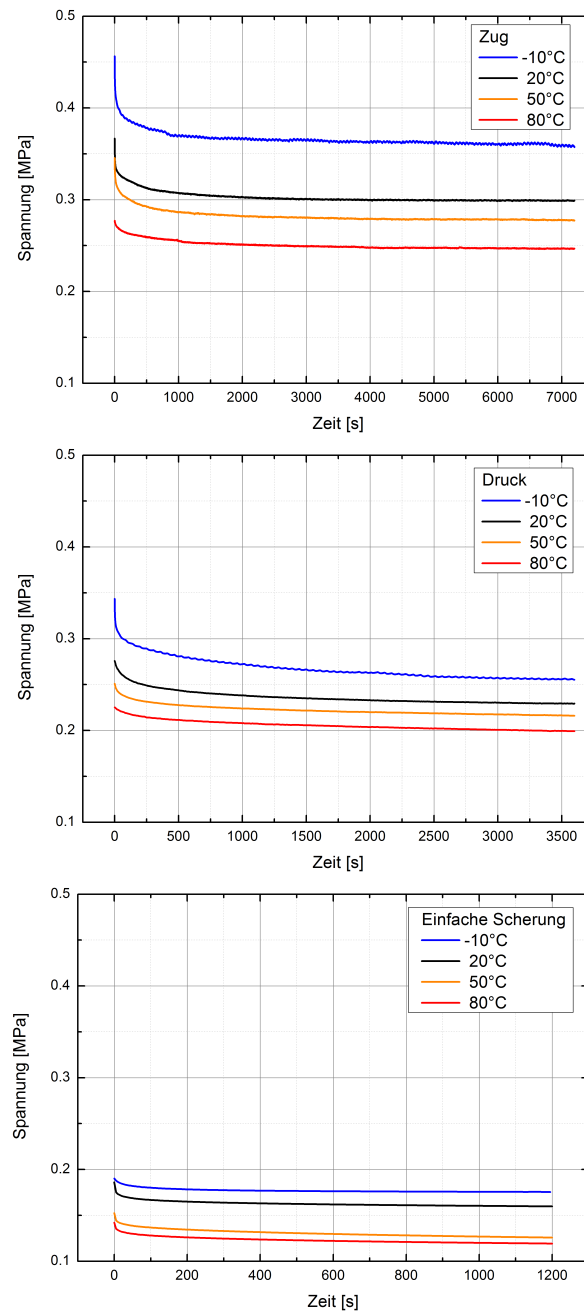


Abbildung 4.15 – Relaxationsversuche: Oben unter 10% Zugdehnung, in der Mitte mit 5% Druckdeformation, unten bei einem Scherwinkel von 5°. Jeweils bei Temperaturen von -10°C, 20°C, 50°C und 80°C.

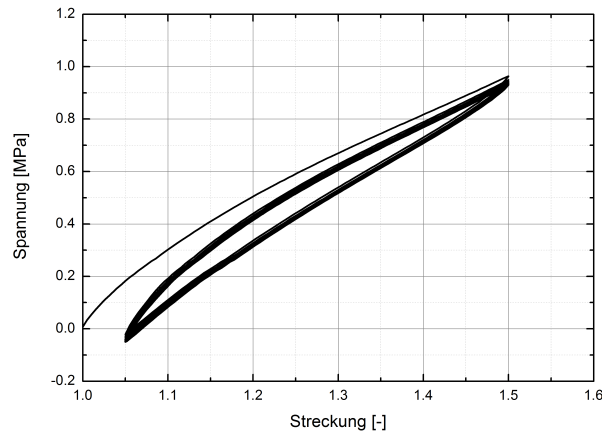


Abbildung 4.16 – Beispiel für einen zyklischen Zugversuch bei 20°C und einer Deformationsgeschwindigkeit von 10 mm/min. Die Maximaldehnung beträgt hierbei 50%. Die Minimaldehnung ist ab dem ersten Zyklus 5% um ein Ausknicken der Zugprobe unter Druckbeanspruchung zu vermeiden.

Zyklische Versuche

Mit Hilfe von zyklischen Versuchen kann die zyklische Erweichung des Materials, aber auch die Ratenabhängigkeit der Steifigkeit und deren Temperaturabhängigkeit dargestellt werden. Außerdem lassen sich Rückschlüsse auf das Dissipationsverhalten bei verschiedenen Umgebungstemperaturen ziehen. Dabei ist die Erkenntnis um die ratenabhängige Materialsteifigkeit redundant zu den Ergebnissen der Relaxationsversuche. Die Beobachtungen zur Dissipation bringen jedoch einen neuen Erkenntnisgewinn.

Bei der Auswertung der zyklischen Druck- und Scherversuche hat sich gezeigt, dass sie zu den Zugversuchen redundante Charakteristika zeigen. Die detaillierte Beschreibung der Versuchsergebnisse erfolgt damit auch hier exemplarisch anhand der Zugversuche.

In Abbildung 4.16 ist der Verlauf der Spannung als Funktion der Streckung während eines zyklischen Zugversuches dargestellt. Hierbei wurde bei einer Umgebungstemperatur von 20°C mit einer Verschiebungsgeschwindigkeit von 10 mm/min gearbeitet. Aufgrund des viskoelastischen Materialverhaltens liegt die Spannung bei der ersten Belastung am höchsten. Es sei nochmal darauf hingewiesen, dass der Mullins-Effekt durch die Vorkonditionierung aus-

geschlossen ist und es sich daher um einen reinen Relaxationsprozess handelt und nicht um Schädigung. Beim Verringern der Dehnung folgt die Spannung nicht mehr dem Anfahrtpfad, sondern liegt unter diesem. Damit bilden Be- und Entlastungspfad eine Hysterese aus, welche durch dissipative Effekte hervorgerufen wird - es wird also durch innere Reibung mechanische Energie in Wärme umgewandelt. Beim weiteren Zyklieren fällt diese Hysterese typischerweise leicht ab, was bei dem untersuchten Material nur wenig ausgeprägt ist. Anhand des in Abbildung 4.16 dargestellten Versuches zeigt sich auch, warum bereits im ersten Zyklus nicht mehr die Ausgangsdehnung angefahren wird. Durch die retardierte Materialantwort auf die aufgebrachte Dehnung erreicht die Spannung bereits bei etwa 5% Dehnung negative Werte, was bei weiterem Verfahren zum Ausknicken der dünnen Probe führen würde. Damit wäre der untere Teil der Hysterese nicht mehr aussagekräftig.

Um nun die Dehnratenabhängigkeit im zyklischen Versuch darstellen zu können, werden die Ergebnisse bei 20°C mit Verschiebungsgeschwindigkeiten von 1 mm/min, 10 mm/min und 100 mm/min verglichen. In Abbildung 4.17 sind hierzu die erste Belastung, der erste Zyklus und der zehnte Zyklus des jeweiligen Versuches dargestellt. Für alle drei Raten zeigt sich, dass der Unterschied zwischen der geringsten und der mittleren Rate gering ist, die hohe Rate jedoch zu einer deutlichen Versteifung führt. Dies entspricht auch den Beobachtungen aus den Relaxationsversuchen, bei denen festzustellen ist, dass sich das zeitabhängige mechanische Verhalten bei kurzen Zeiten, sprich hohen Dehnraten, deutlicher verändert als bei langen Zeiten, also niedrigen Dehnraten.

Auch die Temperaturabhängigkeit des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens zeigt ein Verhalten, welches den Beobachtungen aus dem Relaxationsversuch entspricht. In den drei Darstellungen in Abbildung 4.18 ist sowohl für die Erstbelastung, als auch für den ersten und zehnten Zyklus zu erkennen, dass sich das Material mit fallender Temperatur deutlich steifer verhält. Eine neue Beobachtung, die insbesondere für die folgende Betrachtung der Eigenerwärmung des Materials von Bedeutung ist, ist die Öffnung der Hysterese, welche deutlich von der Temperatur abhängt. Je höher die Temperatur, desto kleiner ist die Fläche zwischen Be- und Entlastungspfad und desto weniger wird sich das Material erwärmen. Dies entspricht der physikalischen Vorstellung der Makromolekülbeweglichkeit. Mit steigender Temperatur sind die Molekülketten stärker in Bewegung, weshalb sie einer äußeren Deformation leichter, und damit mit geringerem Reibungswiderstand gegen ihre nächsten Nachbarn, folgen können.

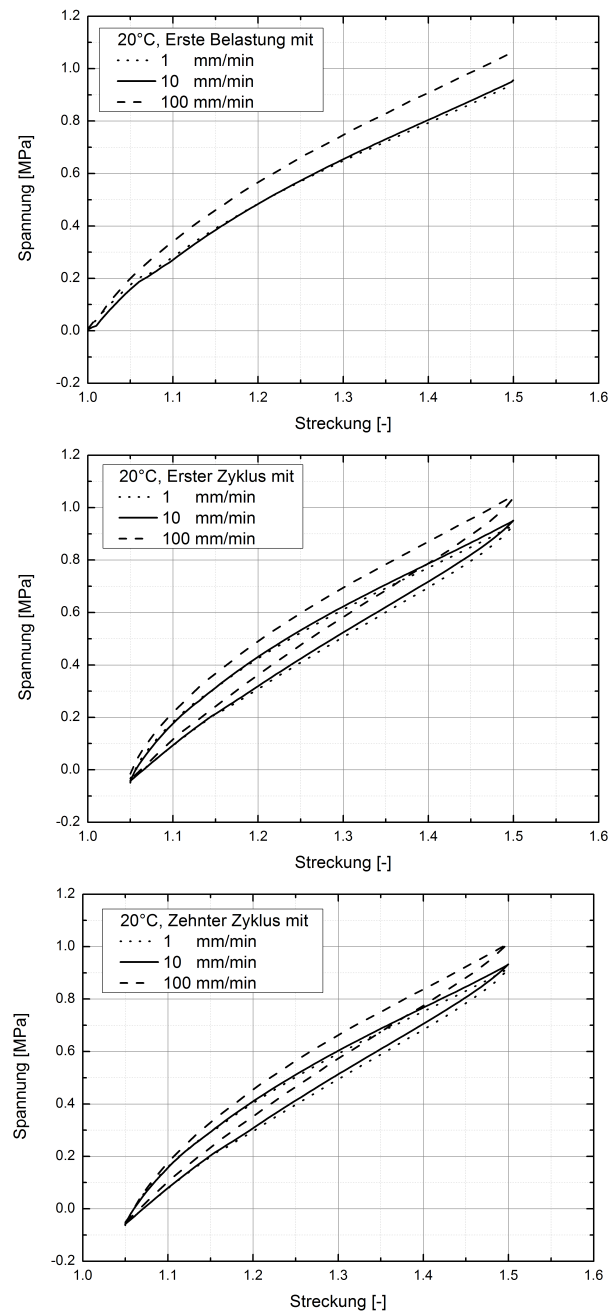


Abbildung 4.17 – Erste Belastung, erster Zyklus und zehnter Zyklus von zyklischen Zugversuchen bei 20°C mit Verschiebungsgeschwindigkeiten von 1 mm/min, 10 mm/min und 100 mm/min.

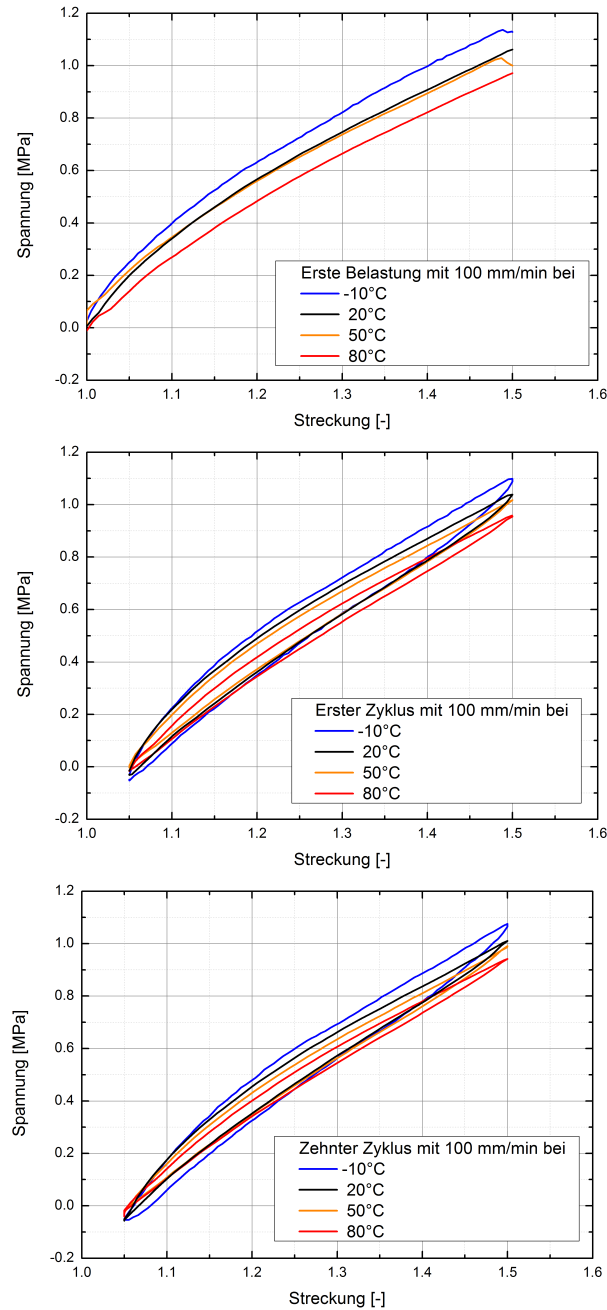


Abbildung 4.18 – Erste Belastung, erster Zyklus und zehnter Zyklus von zyklischen Zugversuchen bei einer Verschiebungsgeschwindigkeiten von 100 mm/min und Temperaturen von -10°C, 20°C, 50°C und 80°C.

Dynamische Versuche

Ebenso wie die Relaxationsversuche und die quasistatischen zyklischen Versuche können die durchgeführten dynamischen Versuche zur Charakterisierung des Materialverhaltens und zur Identifikation der für das Materialmodell notwendigen Parameter herangezogen werden. Damit ist auch diese Versuchsgruppe redundant zu den bereits beschriebenen Experimenten, auf die Auswertung dieser Versuche wird nur kurz eingegangen.

In Abbildung 4.19 sind exemplarisch einige Ergebnisse der dynamischen Untersuchungen dargestellt. Auf der linken Seite ist jeweils der Speichermodul aufgetragen, auf der rechten der zugehörige Verlustmodul. Zuoberst ist die Temperaturabhängigkeit der Moduln dargestellt. Für den Speichermodul zeigt sich eine deutliche Versteifung mit fallender Temperatur. Außerdem lässt sich feststellen, dass eine Erhöhung der Dehnungsfrequenz zu einem höheren Wert von E' führt. Mit steigender Temperatur nimmt im gleichen Versuch der Verlustmodul ab, der Anteil der dissipierten Energie wird also geringer. Diese Beobachtungen entsprechen jenen aus den vorangegangenen Versuchen und können auch mit anderen Vordeformationen und Amplituden gleichermaßen generiert werden.

Im zweiten Bilderpaar der Abbildung 4.19 ist beispielhaft der Einfluss der Vordeformation auf die mechanischen Moduln abzulesen. Mit steigender Vordeformation nimmt auch der Speichermodul zu, der Verlustmodul bleibt jedoch annähernd konstant.

Das dritte Bilderpaar zeigt den Einfluss der Dehnungsamplitude auf die Moduln. Dabei ist der Speichermodul deutlich von der aufgebrachten Dehnungsamplitude abhängig, was unter dem Begriff des Payne-Effektes bekannt ist [85, 83]. Gleichzeitig bleibt hierbei der Verlustmodul unverändert. Analoge Beobachtungen sind auch für den Druckbereich zu machen.

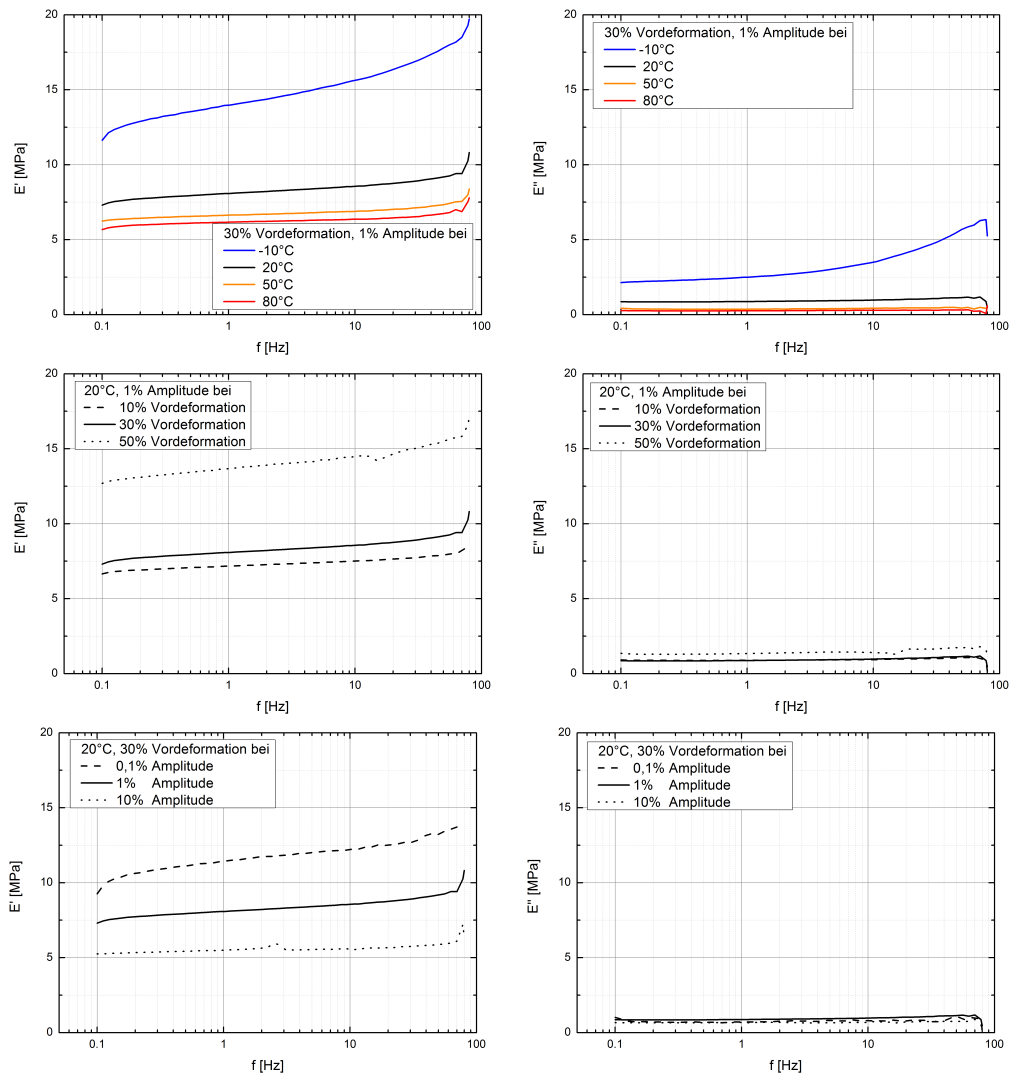


Abbildung 4.19 – Auszug aus den Ergebnissen der dynamischen Zuguntersuchungen. Dargestellt sind jeweils der Speicher- und der Verlustmodul bei verschiedenen Temperaturen (oben), Vordeformationen (mitte) und Amplituden (unten).

4.4.2 Thermische Versuche

Differential Scanning Calorimetry

Zur Bestimmung der Materialcharakteristika, die mit einem Materialmodell abgebildet werden sollen, sowie zur Parameteridentifikation sind neben den mechanischen Daten zusätzlich thermische Eigenschaften zu berücksichtigen. Zuerst seien hierzu die Resultate der DSC-Untersuchungen dargestellt. Diese wurden anhand von Untersuchungen in der in Kapitel 4.2.4 vorgestellten Apparatur erzielt. Die Versuchsparameter entsprechen dabei jenen aus Abschnitt 4.3.2.

Die DSC-Messung, deren Ergebnisse in Abbildung 4.20 links dargestellt sind, beginnt mit dem Aufheizen der Probe auf 150°C und einer anschließenden isothermen Phase von 20 Minuten, um eventuell vorliegende fertigungsbedingte Nichtgleichgewichtszustände zu eliminieren. Darauf folgt eine Abkühlphase mit -10 K/min auf -80°C. Innerhalb des so durchfahrenen Temperaturbereiches findet der Glasübergang des Materials statt. Dieser kann sowohl im Verlauf der Wärmekapazität mit der Temperatur beim Abkühlvorgang, als auch bei einem nachfolgenden Aufheizen auf die Ausgangstemperatur von 150°C beobachtet werden. Der Glasübergang äußert sich dabei in einem ausgeprägten Anstieg von c_p mit der Temperatur.

Wie sich in Abbildung 4.20 links zeigt, liegt der Glasübergang bei einer Heizrate von 10 K/min am unteren Rand des untersuchten Temperaturbereiches. Zur genauen Bestimmung der Glasübergangstemperatur können verschiedene Methoden angewandt werden [44]. In dieser Arbeit wird die Tangentenmethode angewandt, welche auf eine Glasübergangstemperatur von -57,5°C führt. Da die Lage und die Ausprägung des Glasüberganges von der Heiz- beziehungsweise Kühlrate abhängen kann, wird nach dem zweiten Heizvorgang auf 150°C erneut auf -80°C abgekühlt, wobei die Kühlrate auf -20 K/min erhöht wird. Gleiches wird mit Kühlraten von -30 K/min und -40 K/min wiederholt. Wie sich in Abbildung 4.20 links zeigt, hat die Kühlrate keinen Einfluss auf den Glasübergang, sodass dieser als ratenunabhängig angenommen werden kann. Aufgrund der ermittelten Glasübergangstemperatur kann die Glasumwandlung im in Kapitel 5 eingeführten Modell vernachlässigt werden, da der dort abzubildende Temperaturbereich deutlich über dem Glasübergangsbereich liegt.

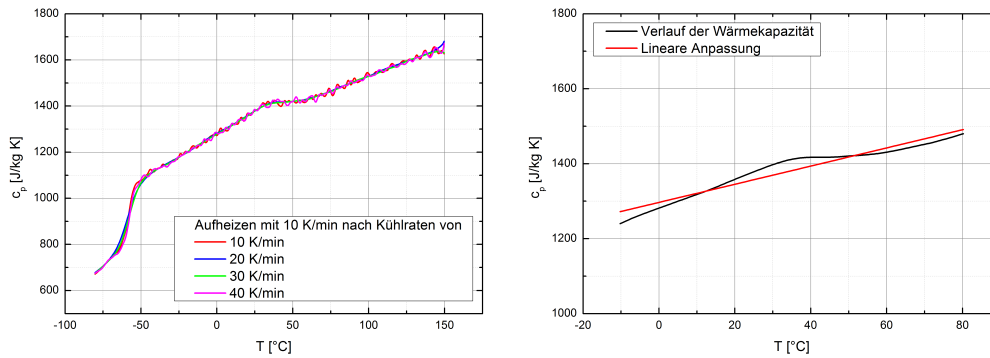


Abbildung 4.20 – Links: Ergebnisse der Differenzkalorimetrie mit konstanter Heizrate von 10 K/min nach Abkühlen mit verschiedenen Kühlraten (c_p -Verläufe bei der Abkühlung nicht dargestellt). Der Glasübergang liegt bei $-57,5^\circ\text{C}$. Rechts: Linearer Fit an den temperaturabhängigen Verlauf von c_p im Bereich von -10°C bis 80°C , der Verlauf entspricht einer Mittelung aus den Ergebnissen der Aufheizvorgänge nach den Abkühlungen mit verschiedenen Kühlraten.

Mit Hilfe der gleichen ratenabhängigen Untersuchung kann die temperaturabhängige spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck untersucht werden. Ähnlich wie der Glasübergang zeigt diese keine Ratenabhängigkeit, so dass c_p im Materialmodell unabhängig von der Temperaturrate formuliert werden kann. In Abbildung 4.20 rechts ist eine Mittelung der Daten der verschiedenen Heizvorgänge nach Abkühlungen mit unterschiedlichen Raten im relevanten Temperaturbereich von -10°C bis 80°C dargestellt. Dabei zeigt sich ein nahezu lineares Verhalten der Wärmekapazität mit der Temperatur. Die ebenfalls dargestellte lineare Anpassung entspricht dem im Materialmodell angenommenen linearen Verlauf

$$c_p = A + B\theta. \quad (4.5)$$

Dabei sind A und B Fitparameter, welche in Kapitel 6 angegeben werden. Die Größe θ entspricht der absoluten Temperatur in Kelvin.

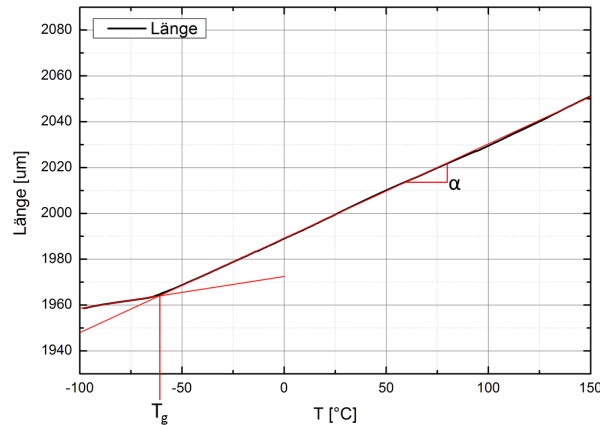


Abbildung 4.21 – Beispiel für die Messung der thermischen Ausdehnung und die daraus resultierende Auswertung bezüglich des linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten α aus den Steigungen der Ausgleichsgeraden sowie der Glasübergangstemperatur T_g aus dem Schnittpunkt der beiden Geraden.

Thermisch - Mechanische Analyse

Der nächste für das Materialmodell notwendige thermische Parameter ist der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient. Für die TMA kommt das in Abschnitt 4.2.5 vorgestellte Messsystem zum Einsatz. Die Versuchsparameter entsprechen jenen in Kapitel 4.3.2.

Das Temperaturprofil bei der TMA entspricht jenem der beschriebenen DSC-Messungen. Dabei wird in diesem Fall die temperaturbedingte Längenänderung einer Probe gemessen. Das Ergebnis einer solchen Messung ist in Abbildung 4.21 dargestellt. Wie abzulesen ist, steigt oberhalb des Glasüberganges die Probenlänge linear mit der Temperatur an. Dabei ist bei einer niedrigen Temperatur eine sprunghafte Änderung der Steigung zu erkennen. Mit Hilfe dieser Änderung lässt sich erneut der Glasübergang des Materials bestimmen. Hierzu werden oberhalb und unterhalb des Übergangs Ausgleichsgeraden an den temperaturabhängigen Längenverlauf angelegt. Der Schnittpunkt dieser Geraden entspricht dem Glasübergangstemperatur, welcher mit dieser Methode zu $-64,5^\circ\text{C}$ bestimmt wurde. Dieses Ergebnis bestätigt die Beobachtung aus den DSC-Messungen, dass der Glasübergangsbereich deutlich außerhalb des in dieser Arbeit relevanten Temperaturbereiches liegt.

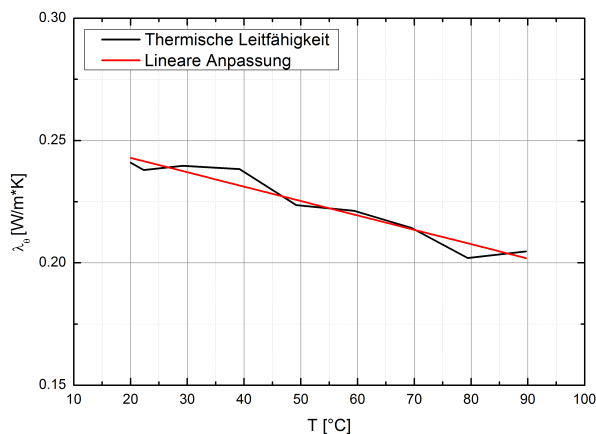


Abbildung 4.22 – Ergebnis der Laser-Flash-Analyse zur Bestimmung der temperaturabhängigen thermischen Leitfähigkeit mit linearer Anpassung.

Die in Abbildung 4.21 bereits erzeugte Ausgleichsgerade für den höheren Temperaturbereich wird zusätzlich zur Bestimmung des Glasüberganges zur Quantifizierung des linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten herangezogen. Dieser entspricht der Steigung der Geraden und beträgt $2,155 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$.

Laser - Flash Analyse

Die letzte zu quantifizierende Eigenschaft ist die thermische Leitfähigkeit des Elastomers. Mit Hilfe der in Abschnitt 4.2.6 vorgestellten LFA-Apparatur kann diese im Bereich von 20 bis 90°C ermittelt werden. Das Ergebnis der mit den in Kapitel 4.3.2 beschriebenen Randbedingungen durchgeführten Untersuchung ist in Abbildung 4.22 dargestellt. Aufgrund des apparaturbedingten eingeschränkten Temperaturbereiches kann mit diesem Experiment keine Aussage über den Glasübergang gemacht werden. Dies wäre mit dieser Methode aber grundsätzlich möglich.

Für die thermische Leitfähigkeit zeigt sich in Abbildung 4.22 eine lineare Abhängigkeit von der Temperatur. Diese kann mit der empirischen Geradengleichung

$$\lambda_\theta = C + D\theta \quad (4.6)$$

beschrieben werden, wobei C und D Anpassungsparameter sind, welche in Kapitel 6 angegeben sind.

4.4.3 Gekoppelte Versuche

Da mit den vorherigen Experimenten die Abhängigkeiten der Materialeigenschaften von der Temperatur hinreichend untersucht sind, ist nun die andere Richtung der Kopplung - der Einfluss mechanischer Beanspruchungen auf die Temperatur - von Interesse. Hierzu werden verschiedene Proben, wie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben, dynamisch belastet und währenddessen wird deren Oberflächentemperatur mit Hilfe einer IR-Kamera gemessen. Damit kann die Eigenerwärmung des Materials in Abhängigkeit vom Belastungsprozess quantifiziert werden. Die eingesetzten Versuchsanordnungen wurden in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 vorgestellt.

Zur Auswertung bezüglich des Temperaturanstieges während der dynamischen Beanspruchung werden nach einer ausreichend langen Zeit Bilder der IR-Strahlungsverteilung auf der Oberfläche aufgenommen, anhand derer die stationäre mittlere Gleichgewichtstemperatur zu den jeweiligen Dehnungsrandbedingungen ermittelt werden kann. Als ausreichend lang wird die Wartezeit dann erachtet, wenn auf den Wärmekameraaufnahmen keine Temperaturänderung mehr zu erkennen ist. Ein Beispiel solcher Aufnahmen ist in Abbildung 4.23 dargestellt. Auf der linken Seite ist das Bild eines S2-Stabes zu sehen, auf der rechten die Aufnahme einer breiteren Probe mit dem Querschnitt von $11 \times 2 \text{ mm}^2$. Beiden ist die zugehörige Temperaturskalierung beigefügt. Hier sind die Erwärmungen bei einer Belastungsfrequenz von 50 Hz bei 20% Vordeformation und 5% Dehnungsamplitude gezeigt. Als Endtemperatur wird dabei der Wert an der markierten Stelle "P01" gewählt, welcher den Ort mit der höchsten Oberflächentemperatur markiert.

Aus den Ergebnissen von Materialproben gleicher Geometrie, die bei verschiedenen Frequenzen, Vordeformationen und Amplituden belastet wurden, können dann die Abhängigkeiten von diesen Größen bestimmt werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Vordeformation keinen Einfluss auf die Eigenerwärmung hat. Der Abbildung 4.24 sind die Probenerwärmungen nach Belastung zu entnehmen. In allen drei Graphiken sind die beiden Probengeometrien in ihrem frequenzabhängigen Eigenerwärmungsverhalten bei verschiedenen Dehnungsamplituden verglichen.

Für alle Dehnungsamplituden ist zunächst zu erkennen, dass die stationäre Gleichgewichtstemperatur mit der aufgebrachten Frequenz näherungsweise linear ansteigt. Für die Amplitudenabhängigkeit ergibt sich ein ähnliches

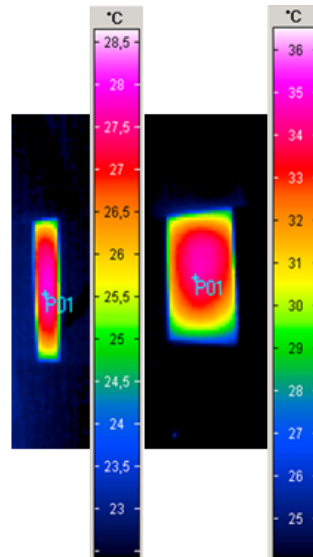


Abbildung 4.23 – Aufnahmen der Temperaturverteilungen auf der Oberfläche von dynamisch belasteten Proben der Querschnitte $4 \times 2 \text{ mm}^2$ und $11 \times 2 \text{ mm}^2$ bei 50Hz, 20% Vordeformation und 5% Amplitude. An den mit "P01" markierten Punkten haben die Oberflächen die Temperaturen $27,8^\circ\text{C}$ (links) bzw. $34,2^\circ\text{C}$ (rechts). Zu erkennen ist, dass die Temperatur in der Probenmitte am höchsten ist. Eine Vergrößerung des Probenquerschnittes führt zur stärkeren Eigenerwärmung.

Verhalten. Außerdem kann aus allen drei Darstellungen abgelesen werden, dass die Probengeometrie in Form einer Querschnittsvergrößerung zu einer Verstärkung des Erwärmungseffektes führt.

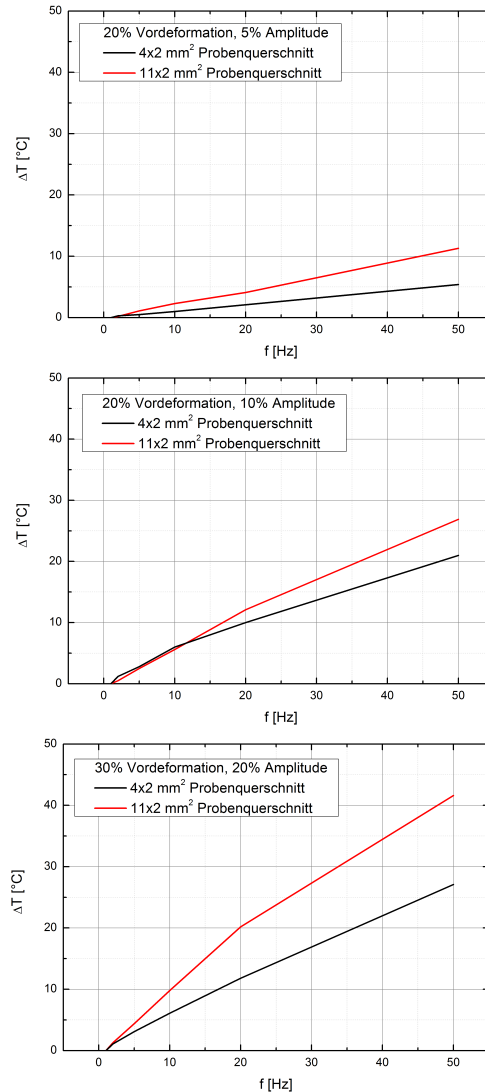


Abbildung 4.24 – Eigenerwärmungsmessung an Probenoberflächen mittels IR-Kamera (siehe Abbildung 4.23) bei dynamischer Belastung. Materialproben verschiedener Querschnitte von $4 \times 2 \text{ mm}^2$ bzw. $11 \times 2 \text{ mm}^2$ werden unter Aufbringung verschiedenen Amplituden und Frequenzen belastet. Die Gleichgewichtstemperaturen werden relativ zur Ausgangstemperatur am wärmsten Punkt der Probe in der Regel in der Probenmitte bestimmt. Abgebildet ist die Eigenerwärmung unter Deformationen von 20% Vordeformation und 5% Amplitude (oben), 20% Vordeformation und 10% Amplitude (mitte), 30% Vordeformation und 20% Amplitude (unten).

4.5 Optimiertes Versuchsprogramm

Wie bei der Vorstellung der Versuchsergebnisse schon erwähnt, kann aus den oft redundanten experimentellen Beobachtungen ein optimiertes Versuchskonzept abgeleitet werden, das ausreicht, um das in Kapitel 5 vorgestellte Materialmodell vollständig zu parametrieren und zu validieren. Dieses ist im Bezug auf den Einsatz von Materialmodellen in der Industrie wichtig und soll im Folgenden in Form einer Empfehlung zusammengetragen werden.

Für die experimentelle Charakterisierung des mechanischen Gleichgewichtsverhaltens gibt es verschiedene Versuchsführungen; in dieser Arbeit wurde der mehrstufige Relaxationsversuch gewählt. Durchgeführt bei verschiedenen jeweils konstanten Temperaturen kann mit diesem in vorgegebener Dehnungsauflösung die Grundelastizität sowohl im Zug-, als auch im Druckbereich bestimmt werden. Zwar bedarf es für einen solchen Versuch aufgrund der langen Wartezeit pro Stufe einer langen Prüfzeit, allerdings wird auf diese Weise gleichzeitig das viskoelastische Materialverhalten charakterisiert. So kann der Spannungs-Zeit-Verlauf während der ersten Belastungsstufe als Relaxationsversuch ausgewertet werden, um daraus die Parameter der Viskoelastizität zu extrahieren.

Damit ist das Materialmodell bereits für den Zug- und den Druckbereich vollständig parametrierbar. Alle weiteren Experimente, seien es zyklische oder dynamische Versuche, können als Validierung dienen. Dies gilt bis hin zu Deformationsgeschwindigkeiten die kleiner als die Anfahrtgeschwindigkeit im Relaxationsversuch sind. Da die Zeit bis zum Erreichen der konstanten Dehnung im Relaxationsversuch die untere Zeitgrenze für die identifizierten Parameter bildet, können schnellere Vorgänge nicht hinreichend genau mit den so ermittelten Parametern erfasst werden. Für schnelle dynamische Prozesse müssen die Materialparameter also anhand von dynamischen Versuchen identifiziert werden.

Auf der Seite der thermischen Untersuchungen sind DSC-, TMA- und LFA-Untersuchungen durchzuführen. Zeigt sich mit einer der Methoden, so wie im vorliegenden Fall in den DSC-Untersuchungen in Abschnitt 4.4.2, dass der Glasübergang außerhalb des Betrachtungsbereiches liegt und keine nennenswerte Ratenabhängigkeit besteht, so reicht es, den gewünschten Untersuchungsbereich einmal mit einer beliebigen Temperaturrate zu durchfahren. Damit kann die spezifische Wärmekapazität, der lineare thermische Ausdeh-

nungskoeffizient und die thermische Leitfähigkeit bestimmt werden.

Zuletzt muss noch die Dichte des Materials bei Raumtemperatur bestimmt werden. Dazu kann eine einfache Auftriebsmessung durchgeführt werden. Da die thermische Ausdehnung bekannt ist, reicht es aus die Dichte bei Raumtemperatur zu kennen.

Als Validierung für ein Materialmodell kommen zum einen die Relaxationsdruckversuche aus den zugehörigen mehrstufigen Versuchen in Frage, oder aber einfache, zusätzlich durchzuführende zyklische Versuche bei wechselnden Deformationsraten und/oder Umgebungstemperaturen.

Das vorgestellte vereinfachte Versuchsprogramm reicht für den in dieser Arbeit vorgestellten Fall aus, um alle notwendigen Modellparameter zu bestimmen und zu validieren.

5

Materialmodellierung

Im nun folgenden Kapitel wird ein Materialmodell motiviert und formuliert, welches, basierend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen aus Kapitel 3, das experimentell ermittelte Materialverhalten aus Kapitel 4 wiedergeben kann. Es wird elastomertypisch für große Deformationen formuliert und berücksichtigt das viskoelastische Verhalten dieser Stoffgruppe. Hierfür wird zunächst schematisch erläutert, wie die Modellierung dieses prozessabhängigen Verhaltens im Allgemeinen vonstatten geht.

Zusätzlich werden die mechanischen Eigenschaften, dort wo die Experimente diese Notwendigkeit aufgezeigt haben, temperaturabhängig formuliert. Dies geschieht durch die Einführung temperaturabhängiger Materialparameter an geeigneter Stelle. Aus den so gewonnenen Gleichungen wird automatisch die Eigenerwärmung des untersuchten Körpers unter dynamischer Beanspruchung hervorgehen.

5.1 Viskoelastische Materialmodellierung

Die mechanischen Eigenschaften von Elastomeren sind geprägt durch eine Vielzahl von Beweglichkeiten und Schwingungsmöglichkeiten verschiedenartiger und in unterschiedlichen Umgebungen vorliegender Molekülkettensegmente. Wird also eine Deformation auf ein solches Kneuel von Ketten aufgebracht, so bedarf es einer charakteristischen Reaktionszeit, in der sich die Makromoleküle entgegen der strukturell bedingten Widerstände entlang der Kraftrichtung ausrichten können und einen Gleichgewichtszustand erreichen. Wird das Material entlastet, erreicht es mit einer zeitlichen Verzögerung wieder seinen Ausgangszustand, das mechanische Verhalten ist also grundsätzlich elastisch.

Aufgrund der verzögerten Rückstellung kann allerdings nicht von rein elastischem Verhalten gesprochen werden. Vielmehr wird die Elastizität von einem Fließverhalten hin zum Gleichgewichtszustand geprägt, sodass das Verhalten eines Polymers als viskoelastisch bezeichnet wird.

Mit der nahezu gleichverteilten Verteilung von Molekülstrukturen und -wechselwirkungen wäre zur korrekten Abbildung dieses Verhaltens auch eine Gleichverteilung von mechanischen Eigenschaften vonnöten. Jede lokale Materialkonfiguration bringt eine bestimmte lokale Steifigkeit und eine charakteristische Zeit mit sich, in der sie sich einer äußeren Last anpasst. Die Steifigkeiten und Relaxationszeiten wären also normalverteilt. In der Kontinuumsmechanik wird diese Verteilung vereinfacht und mit Hilfe einer Kette von Maxwell-Elementen abgebildet, die je eine Steifigkeit und eine Relaxationszeit aufweisen. Mit steigender Zahl der Elemente kann das tatsächliche Werkstoffverhalten grundsätzlich genauer angenähert werden.

In Abbildung 5.1 ist ein rheologisches Modell zur Diskretisierung der Eigenschaftsverteilung dargestellt. Es besteht aus einer Gleichgewichtsfeder, die für beliebig langsam aufgebrachte Deformationen das Materialverhalten wiedergibt. Unter solchen langsamen Deformationen können sich die Makromoleküle ideal entlang der auftretenden Kraft ausrichten. Zusätzlich zu dieser Gleichgewichtsfeder sind n Maxwell-Elemente parallel geschaltet, die das Relaxationszeit- und Steifigkeitsspektrum diskretisiert abbilden. Sie weisen je eine Steifigkeit μ^j und eine Relaxationszeit τ^j auf. In der Fachliteratur zur linearen Viskoelastizität werden auch andere Ansätze in Form von Kelvin-Voigt-Ketten oder aber sogenannte kontinuierliche Spektren verwendet [113].

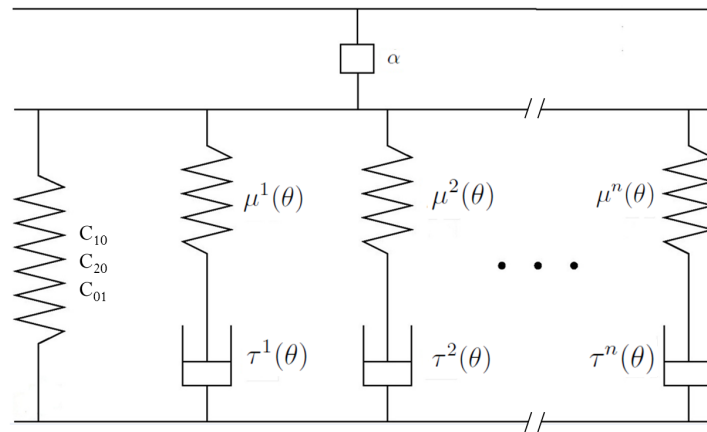


Abbildung 5.1 – Rheologisches Modell für thermoviskoelastisches Materialverhalten: Einer Gleichgewichtsfeder mit den Parametern C_{10} , C_{20} und C_{01} sind n Maxwell-Elemente mit temperaturabhängigen Federsteifigkeiten $\mu^j(\theta)$ und temperaturabhängigen Relaxationszeiten $\tau^j(\theta)$ parallel geschaltet, in Reihe geschaltet kommt ein thermisches Element mit der thermischen Ausdehnung α hinzu.

Bei letzteren hängen die Steifigkeiten und Relaxationszeiten von einem kontinuierlichen Parameter ab.

Diese weit verbreitete Form der Modellierung von Polymeren ist z.B. in den Arbeiten von Lion [57], Lubliner [66], Le Tallec [106], Sedlan [102] oder Kopyrowski [51] im Rahmen von finiten Deformationen wiederzufinden.

Neben diesen rein mechanischen Einflüssen, sind in Abbildung 5.1 auch Temperatureinflüsse eingeführt. So können im Allgemeinen sowohl die Steifigkeit der Gleichgewichtsfeder, als auch die Maxwell-Element-Parameter temperaturabhängig gewählt sein. Die primären Parameter der Elementanteile sind die Federsteifigkeiten μ^j und die Viskositäten der Dämpfer η^j , welche sich mit $\tau^j = \eta^j / \mu^j$ in die Relaxationszeiten umrechnen lassen. Es spielt dabei keine Rolle, welche Parameter temperaturabhängig gewählt sind, da mit der angegebenen Gleichung die weiteren Abhängigkeiten ohnehin automatisch folgen. Werden z.B. die Federsteifigkeiten in gleicher Weise von der Temperatur abhängig formuliert wie die Viskositäten, so sind die Relaxationszeiten automatisch temperaturunabhängig.

Neben den temperaturabhängigen Elementeigenschaften kommt im Falle der Thermoviskoelastizität ein weiteres thermisches Element mit dem Parameter α hinzu, welches in Reihe zugeschaltet ist. Dieses repräsentiert die thermische Ausdehnung des Werkstoffes.

5.2 Thermoviskoelastisches Materialmodell für finite Deformationen

Die komplexen Strukturen von Bauteilen machen es in der Regel notwendig, für ihre Simulation dreidimensionale Werkstoffmodelle zu formulieren, da eine Vereinfachung auf zwei- oder gar eindimensionale Probleme dort nicht möglich ist. Im besonderen Fall der Elastomere kommt hinzu, dass die vom Material erfahrenen Deformationen sehr groß sein können, sodass dazu die Näherung kleiner Deformationen nicht zulässig ist. Daher wird ein dreidimensionales Materialmodell eingeführt, welches die thermomechanisch gekoppelten viskoelastischen Eigenschaften von Elastomeren für große Deformationen abbilden kann.

Wie in Kapitel 3 bereits für die kinematischen Beziehungen eingeführt, soll zunächst eine Zerlegung der Spannung in verschiedene Anteile vorgenommen werden. So wie die Deformationsmaße können auch die auftretenden Spannungen in ihre volumetrischen und deviatorischen Anteile aufgeteilt werden. Für die Cauchy-Spannung ergibt sich hieraus

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}^D, \quad (5.1)$$

wobei $p = -\frac{1}{3}\text{tr } \mathbf{T}$ dem hydrostatischen Druck entspricht und \mathbf{T}^D dem deviatorischen Spannungsanteil. Aufgrund der Invarianz der Spannungsleistung lässt sich die Cauchy-Spannung, welche ein Maß der Momentankonfiguration ist, auf die Thermisch-Mechanische Zwischenkonfiguration transportieren mit

$$\bar{\mathbf{T}}_M = J_M \mathbf{F}_M^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_M^{-T}. \quad (5.2)$$

Dieses Spannungsmaß der TMZ ist ebenfalls unterteilbar in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil

$$\bar{\mathbf{T}}_M = \hat{\bar{\mathbf{T}}}_M + \bar{\mathbf{T}}_{Mvol}, \quad (5.3)$$

wobei diese gemäß [62] definiert werden können als

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{T}}_M &= J_M \hat{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{T}^D \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-T}, \\ \bar{\mathbf{T}}_{M_{vol}} &= J_M \mathbf{F}_M^{-1} \cdot (-p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{F}_M^{-T} = -J_M p \mathbf{C}_M^{-1}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Die Clausius-Duhem-Ungleichung (3.59) kann damit nun umgeschrieben werden zu

$$-\rho_0 \dot{\Psi} + J_\theta \left(-p \dot{J}_M + \hat{\mathbf{T}}_M : \dot{\hat{\Omega}} \right) - \rho_0 \dot{\theta} \eta - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \text{Grad } \theta \geq 0. \quad (5.5)$$

Dabei ergibt sich der zerlegte Spannungsleistungsterm aus den folgenden Definitionen und Berechnungen. Zunächst seien die kinematischen Größen

$$\Sigma_M = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_M - \mathbf{I}), \quad \hat{\Omega} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{I}) \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_M = J_M^{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{C}}$$

ins Gedächtnis gerufen. Mit diesen folgt für die materielle Zeitableitung

$$\dot{\Sigma}_M = \frac{1}{3} J_M^{-\frac{1}{3}} \dot{J}_M (2\hat{\Omega} + \mathbf{I}) + J_M^{\frac{2}{3}} \dot{\hat{\Omega}} = \frac{1}{3} J_M^{-\frac{1}{3}} \dot{J}_M \hat{\mathbf{C}} + J_M^{\frac{2}{3}} \dot{\hat{\Omega}}. \quad (5.6)$$

Die Spannung auf der TMZ wird mit den oben beschriebenen Zerlegungen umformuliert in

$$\bar{\mathbf{T}}_M = -p J_M^{\frac{1}{3}} \hat{\mathbf{C}}^{-1} + J_M^{-\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{T}}_M. \quad (5.7)$$

Berechnet man nun das Produkt $\bar{\mathbf{T}}_M : \dot{\Sigma}_M$, so ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}}_M : \dot{\Sigma}_M &= -\frac{1}{3} p \dot{J}_M \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \hat{\mathbf{C}} - p J_M \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\hat{\Omega}} \\ &\quad + \frac{1}{3} J_M^{-1} \dot{J}_M \hat{\mathbf{T}}_M : \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{T}}_M : \dot{\hat{\Omega}}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Die Gleichung (5.8) lässt sich nun vereinfachen. Zuerst wird $\dot{\hat{\Omega}}$ mit Hilfe von Gleichung (3.29) durch $\frac{1}{2} \dot{\hat{\mathbf{C}}}$ ersetzt. Mit der Bedingung, dass

$$\det \hat{\mathbf{C}} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det \hat{\mathbf{C}})' = \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\hat{\mathbf{C}}} = 0 \quad (5.9)$$

gilt, wird der zweite Term auf der rechten Seite von (5.8) zu null. Im dritten Summanden ist die Spur des deviatorischen Spannungsanteils $\hat{\mathbf{T}}_M$ auf der TMZ enthalten. Diese wird ebenfalls null. Die letzte Vereinfachung lässt sich für den ersten Teil der Summe durchführen. Hierin gilt

$$\hat{\mathbf{C}}^{-1} : \hat{\mathbf{C}} = \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{C}}) = 3. \quad (5.10)$$

Damit sind nur noch die in (5.5) beschriebenen Anteile der Spannungsleitung übrig.

Um nun die Clausius-Duhem-Ungleichung auswerten zu können, muss ein Ansatz für die Funktion der spezifischen Helmholtzschen freien Energie Ψ eingeführt werden. Zur besseren Strukturierung des Materialmodells wird zunächst ein additiver Split vorgenommen, der die freie Energie in einen thermischen Anteil Ψ_θ , einen Gleichgewichts- und einen Nichtgleichgewichtsanteil Ψ_{eq} und Ψ_{neq} , sowie in einen volumetrischen Anteil Ψ_{vol} unterteilt. Damit ergibt sich, unter Angabe der jeweiligen Prozessvariablen die spezifische freie Energie zu

$$\Psi = \Psi_{th}(\theta) + \Psi_{eq}(\hat{\mathbf{C}}_M) + \Psi_{neq}(\mathbf{C}_e^j, \theta) + \Psi_{vol}(J_M). \quad (5.11)$$

Mit dieser Definition der unabhängigen Variablen kann nun die freie Energie total differenziert werden, was den allgemeinen Ausdruck

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{C}}} : \dot{\hat{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}_e^j} : \dot{\mathbf{C}}_e^j + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial J_M} \dot{J}_M \quad (5.12)$$

ergibt. Der Laufindex j der elastischen, isochoren Deformationen \mathbf{C}_e^j indiziert dabei die verschiedenen Maxwell-Elemente. Alternativ zu den Deformationsmaßen $\hat{\mathbf{C}}$ und \mathbf{C}_e^j können auch deren Invarianten als innere Variablen angenommen werden.

Die einzelnen Anteile der spezifischen freien Energie können so gewählt werden, dass sie zum einen die thermodynamischen Voraussetzungen nicht verletzen, zum anderen aber vor allem die in Kapitel 4 erzielten Ergebnisse wiedergeben. Für die mechanischen Anteile Ψ_{eq} und Ψ_{neq} werden bewährte

Mooney-Reihenansätze [76] gemäß

$$\rho_0 \Psi_{eq} = C_{10}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} - 3) + C_{20}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} - 3)^2 + C_{01}(\mathbf{II}_{\hat{\mathbf{C}}} - 3) \quad (5.13)$$

$$\rho_0 \Psi_{neq} = \mu^j(\theta) (\mathbf{I}_{\mathbf{C}_e^j} - 3) \quad (5.14)$$

gewählt. Die Parameter C_{10} , C_{20} und C_{01} sind die temperaturunabhängigen Parameter des Gleichgewichtsanteils der mechanischen Materialantwort. Die Parameter $\mu^j(\theta)$ sind die Elastizitätsparameter der j Maxwell-Elemente und werden temperaturabhängig formuliert. Der Ansatz (5.14) entspricht einem Neo-Hooke Modell für die Federn der Maxwell-Elemente. Da deren Deformationen in der Regel recht klein bleiben, ist dieser Ansatz ausreichend.

Der volumetrische Anteil der Helmholtzschen freien Energiedichte wird eingeführt, um die näherungsweise vorliegende mechanische Inkompressibilität des Materials formulieren zu können. Dies geschieht mit einem Ansatz nach [103] in der Form

$$\rho_0 \Psi_{vol} = \frac{1}{2}K \left((J_M - 1)^2 + (\ln J_M)^2 \right), \quad (5.15)$$

wobei K der Kompressionsmodul des Werkstoffes ist. Der letzte Summand in der Funktion der spezifischen freien Energie (5.11) ist der des thermischen Anteils Ψ_{th} . Dieser ergibt sich aus der zweimaligen Integration der temperaturabhängigen spezifischen Wärmekapazität $c_p(\theta)$ gemäß [60] zu

$$\rho_0 \Psi_{th} = \rho_0 \zeta(\theta), \quad (5.16)$$

$$\zeta''(\theta) = -\frac{1}{\theta} c_p(\theta), \quad (5.17)$$

$$c_p(\theta) = A + B\theta, \quad (5.18)$$

wobei als Randbedingung angenommen wird, dass $\zeta(\theta_0) = \zeta_0$ und $\zeta'(\theta_0) = \zeta'_0$ erfüllt ist. Damit folgt für Ψ_{th} der Ausdruck

$$\rho_0 \Psi_{th} = \rho_0 \left[\zeta_0 - A \left(\theta \ln \frac{\theta}{\theta_0} - (\theta - \theta_0) \right) - \frac{B}{2} (\theta - \theta_0)^2 \right]. \quad (5.19)$$

Da in die Clausius-Duhem-Ungleichung die Zeitableitungen dieser Größen einzusetzen sind, sollen diese im Folgenden angegeben werden. Sie ergeben

sich zu

$$\rho_0 \dot{\Psi}_{eq} = (C_{10} \mathbf{I} + 2C_{20}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} - 3) \mathbf{I} + C_{01}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}})) : \dot{\hat{\mathbf{C}}} \quad (5.20)$$

$$\rho_0 \dot{\Psi}_{neq} = \frac{\partial \mu^j(\theta)}{\partial \theta} (\mathbf{I}_{\mathbf{C}_e^j} - 3) \dot{\theta} + \mu^j(\theta) \mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}}_e^j \quad (5.21)$$

$$\rho_0 \dot{\Psi}_{vol} = K \left((J_M - 1) + \frac{\ln J_M}{J_M} \right) \dot{J}_M \quad (5.22)$$

$$\rho_0 \dot{\Psi}_{th} = -\rho_0 \left(A \ln \frac{\theta}{\theta_0} + B(\theta - \theta_0) - \zeta'_0 \right) \dot{\theta}. \quad (5.23)$$

Bevor die freie Energie nun in die Entropiebilanz eingesetzt wird, kann noch die Umformung

$$\dot{\mathbf{C}}_e^j = \mathbf{F}_i^{j-T} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{F}_i^{j-1} - \mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{L}_i^j - \mathbf{L}_i^{jT} \cdot \mathbf{C}_e^j \quad (5.24)$$

vorgenommen werden. Es ergibt sich nun nach einigen Rechenschritten die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \leq & \left[-\rho_0 \eta + \rho_0 \left(A \ln \frac{\theta}{\theta_0} + B(\theta - \theta_0) - \zeta'_0 \right) \dot{\theta} - \frac{\partial \mu^j(\theta)}{\partial \theta} (\mathbf{I}_{\mathbf{C}_e^j} - 3) \right] \dot{\theta} \\ & + \left[-p J_\theta - K \left((J_M - 1) + \frac{\ln J_M}{J_M} \right) \right] \dot{J}_M \\ & + \left[\frac{1}{2} J_\theta \hat{\mathbf{T}}_M - C_{10} \mathbf{I} - 2C_{20}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} - 3) \mathbf{I} - C_{01}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}) - \mu^j(\theta) \mathbf{C}_i^{j-1} \right] : \dot{\hat{\mathbf{C}}} \\ & - \frac{\mathbf{Q}}{\theta} \cdot \text{Grad } \theta \\ & + \mu^j(\theta) \mathbf{I} : (\mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{L}_i^j + \mathbf{L}_i^{jT} \cdot \mathbf{C}_e^j). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dabei ist im letzten Summanden mit

$$\mathbf{\Gamma}_i^j = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i^j + \mathbf{L}_i^{jT}) \quad (5.26)$$

eine weitere Vereinfachung möglich, aus der sich der Anteil $2\mu^j(\theta) \mathbf{C}_e^j : \mathbf{\Gamma}_i^j$ ergibt. Damit lässt sich die Gleichung (5.25) nach Coleman und Noll [13] auswerten, woraus sich die Konstitutivgleichungen ableiten lassen.

Die erste Konstitutivgleichung, die daraus abgeleitet werden kann, ist die für die Entropie. Diese lautet

$$\eta = A \ln \frac{\theta}{\theta_0} + B(\theta - \theta_0) - \zeta'_0 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \mu^j(\theta)}{\partial \theta} (\mathbf{I}_{\mathbf{C}_e^j} - 3). \quad (5.27)$$

Damit hängt die Entropie sowohl von der Temperatur, als auch von den mechanischen Randbedingungen ab. Letztere fließen sowohl in der Temperaturabhängigkeit der Federsteifigkeiten der Maxwell-Elemente ein, als auch in deren elastischer Deformation. Der zweite Summand der Ungleichung (5.25) lässt sich bezüglich des hydrostatischen Druckes p auswerten. Dieser ergibt sich zu

$$p = -\frac{K}{J_\theta} \left((J_M - 1) + \frac{\ln J_M}{J_M} \right). \quad (5.28)$$

In den folgenden Betrachtungen wird dieser Term für hinreichend hohe Werte von K dazu führen, dass die Inkompressibilität des Materials in guter Näherung gewährleistet ist. Für den Wärmeflussvektor \mathbf{Q} kann ein Ansatz gewählt werden, der sicherstellt, dass der Summand $-\frac{\mathbf{Q}}{\theta}$ Grad θ stets größer oder gleich null ist, und damit die Ungleichung immer erfüllt. Einen solchen Ansatz stellt im einfachsten Falle die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung

$$\mathbf{Q} = -\lambda_\theta(\theta) \text{Grad } \theta \quad (5.29)$$

dar, in der $\lambda_\theta(\theta)$ der temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit entspricht. Die beiden letzten Anteile der Clausius-Duhem-Ungleichung führen auf die Konstitutivgleichung für die isochore Spannung auf der TMZ und die inelastische Deformationsrate auf der EIZ. Aufgrund der Symmetrie der auftretenden Deformationstensoren bestehen diese tensoriellen Gleichungen aus jeweils sechs unabhängigen skalaren Teilgleichungen. Da hier zusätzlich die Inkompressibilität des Materials vorausgesetzt ist, reduziert sich die Zahl der unabhängigen Variablen auf fünf. Aus diesem Grund wird die Spannung auf die Momentankonfiguration überführt, wo die Beziehung $\mathbf{T}^D : \mathbf{I} = 0$ gilt. Um dies sicherzustellen wird ein zu bestimmender Kugelanteil $\Phi_1 \mathbf{I}$ zum Deviator \mathbf{T}^D hinzu addiert [62]. Damit folgt

$$\mathbf{T}^D = \frac{2}{J} \left(C_{10} \hat{\mathbf{B}} + 2C_{20} (\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{B}}} - 3) + C_{01} (\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{B}}} \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}}^2) + \mu^j(\theta) \mathbf{B}_e^j \right) + \Phi_1 \mathbf{I}, \quad (5.30)$$

was für die Funktion Φ_1 zu

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^D : \mathbf{I} = \frac{2}{J} \left[(C_{10} + 2C_{20}(I_{\hat{\mathbf{C}}}} - 3)) \text{tr}(\hat{\mathbf{B}}) + C_{01}(I_{\hat{\mathbf{B}}}^2 - \text{tr}(\hat{\mathbf{B}}^2)) \right. \\ \left. + \mu^j(\theta) \text{tr}(\mathbf{B}_e^j) \right] + 3\Phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi_1 = -\frac{2}{3J} \left[(C_{10} + 2C_{20}(I_{\hat{\mathbf{C}}}} - 3)) \text{tr}(\hat{\mathbf{B}}) + C_{01}(I_{\hat{\mathbf{B}}}^2 - \text{tr}(\hat{\mathbf{B}}^2)) \right. \\ \left. + \mu^j(\theta) \text{tr}(\mathbf{B}_e^j) \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

führt. Damit ist sichergestellt, dass die Materialgleichung für \mathbf{T}^D deviatorisch ist.

Nun kann der deviatorische Anteil der Cauchy-Spannung mit Hilfe von Gleichung (5.4) auf die TMZ zurücktransportiert werden, was

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_M = \frac{2}{J_\theta} \left[(C_{10} + 2C_{20}(I_{\hat{\mathbf{C}}}} - 3)) \mathbf{I} + C_{01}(I_{\hat{\mathbf{C}}}} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}) \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \{ (C_{10} + 2C_{20}(I_{\hat{\mathbf{C}}}} - 3) I_{\hat{\mathbf{C}}}} + 2C_{01} II_{\hat{\mathbf{C}}}} \} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right. \\ \left. + \mu^j(\theta) (\mathbf{C}_i^{j-1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}_i^{j-1}) \hat{\mathbf{C}}^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

ergibt. Auch der volumetrische Anteil der Spannung auf der TMZ kann so bestimmt werden, indem der hydrostatische Druck p der Momentankonfiguration mit Gleichung (5.4) zurückgezogen wird. Es ergibt sich

$$\bar{\mathbf{T}}_{M_{vol}} = -J_M p \mathbf{C}_M^{-1} = \frac{K}{J_\theta} (J_M(J_M - 1) + \ln J_M) \mathbf{C}_M^{-1}. \quad (5.34)$$

Analog wird nun für die inelastische Deformationsrate verfahren. Da sie deviatorisch sein muss, gilt die Beziehung

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j : \mathbf{I} = 0, \quad (5.35)$$

sodass mit der Einführung eines weiteren zu bestimmenden Summanden $\Phi_2 \mathbf{I}$

folgt

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j = \frac{2}{\tau^j} \mathbf{C}_e^j + \Phi_2 \mathbf{I} \quad (5.36)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j : \mathbf{I} = 0 = \frac{2}{\tau^j} \operatorname{tr}(\mathbf{C}_e^j) + 3\Phi_2 \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow \Phi_2 = -\frac{2}{3} \frac{1}{\tau^j} \operatorname{tr}(\mathbf{C}_e^j). \quad (5.38)$$

wobei $\tau^j = \frac{\eta^j(\theta)}{\mu^j(\theta)}$ Relaxationszeiten bezeichnet, die aus den Eigenschaften von Maxwell-Elementen motiviert sind. Mit der Annahme, dass die Viskositäten $\eta^j(\theta)$ und Steifigkeiten $\mu^j(\theta)$ gleichermaßen von der Temperatur abhängen, sind die Relaxationszeiten temperaturunabhängig. Für die inelastische Deformationsrate ergibt sich damit die folgende deviatorische Beziehung

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j = \frac{2}{\tau^j} \left(\mathbf{C}_e^j - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{C}_e^j) \mathbf{I} \right). \quad (5.39)$$

Bemerkung: Ob die Relaxationszeiten τ^j oder die Federsteifigkeiten μ^j temperaturabhängig formuliert sind, ist zunächst zweitrangig. Da sich unabhängig von dieser Entscheidung die Zahl der Parameter nicht ändert, kann auf beiden Wegen gleich gut das temperaturabhängige mechanische Verhalten abgebildet werden. Durch die Wahl, die Federsteifigkeiten temperaturabhängig zu formulieren, ergeben sich jedoch drei Vorteile:

- Die Zeitschrittweite für die numerische Integration der Materialgleichungen kann konstant gewählt werden.
- Die Entropie hängt auch von den mechanischen Eigenschaften ab.
- Das experimentell vorgegebene Zeitfenster bleibt für alle Temperaturen abbildbar.

Da sich mit einer konstanten Wahl der Relaxationszeit diese nicht mit der Temperatur ändert, kann auch die Zeitschrittweite des Integrationsverfahrens über die gesamte Rechenzeit konstant bleiben. Im umgekehrten Falle würden die Relaxationszeiten mit steigender Temperatur fallen, sodass während ei-

nes Erwärmungsprozesses die Zeitschrittweite verringert werden müsste. Dadurch, dass die Ableitung von Ψ_{neq} nach der Temperatur aufgrund der Temperaturabhängigkeit von $\mu^j(\theta)$ nicht null ist, wird die Entropie in Gleichung (5.27) direkt von den mechanischen Eigenschaften und der Deformation beeinflusst. Damit wird die thermomechanische Kopplung um einen weiteren Einflussfaktor verstärkt.

Unter Zuhilfenahme der Beziehung (3.37) kann die für die Spannungsberechnung notwendige inelastische Deformationsrate

$$\dot{\mathbf{C}}_i^j = 2 \mathbf{F}_i^{jT} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j \cdot \mathbf{F}_i^j = \frac{4}{\tau^j} \left(\hat{\mathbf{C}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}_i^{j-1}) \mathbf{C}_i^j \right) \quad (5.40)$$

berechnet werden. Mit den bisher eingeführten Gleichungen ist eine einseitige Kopplung zwischen den mechanischen Eigenschaften und der Temperatur erreicht. Über die thermische Ausdehnung in Form der Determinanten J_θ und die temperaturabhängige Steifigkeit der Maxwell-Elemente $\mu^j(\theta)$ ist die Spannung von der Temperatur abhängig. Die Gesamtspannung auf der TMZ ist beschrieben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_M = \frac{2}{J_\theta} & \left[(\mathbf{C}_{10} + 2\mathbf{C}_{20}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} - 3)) \mathbf{I} + \mathbf{C}_{01}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}) \right. \\ & - \frac{1}{3} \{ (\mathbf{C}_{10} + 2\mathbf{C}_{20}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} - 3)) \mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} + 2\mathbf{C}_{01} \mathbf{II}_{\hat{\mathbf{C}}} \} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \\ & \left. + \mu^j(\theta) \left(\mathbf{C}_i^{j-1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}_i^{j-1}) \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right) \right] \\ & + \frac{K}{J_\theta} \left(J_M (J_M - 1) + \ln J_M \right) \mathbf{C}_M^{-1}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Mit

$$\mathbf{P} = J_\theta \mathbf{F}_M \cdot \bar{\mathbf{T}}_M \cdot \mathbf{F}_\theta^{-T} \quad (5.42)$$

lässt sich Gleichung (5.41) auf die Referenzkonfiguration zurückziehen und damit der 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor ermitteln, der sich zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} = & 2 \mathbf{F}_M \left[(C_{10} + 2C_{20}(I_{\hat{\mathbf{C}}} - 3)) \mathbf{I} + C_{01}(I_{\hat{\mathbf{C}}} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}) \right. \\
& - \frac{1}{3} \{ (C_{10} + 2C_{20}(I_{\hat{\mathbf{C}}} - 3)) I_{\hat{\mathbf{C}}} + 2 C_{01} II_{\hat{\mathbf{C}}} \} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \\
& + \mu^j(\theta) \left(\mathbf{C}_i^{j-1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}_i^{j-1}) \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right) \left. \right] \mathbf{F}_\theta^{-T} \\
& + K \left(J_M (J_M - 1) + \ln J_M \right) \mathbf{F}^{-T}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

ergibt.

Mit diesen Gleichungen ist die erste Richtung der thermomechanischen Kopplung formuliert, die mechanischen Größen hängen in unterschiedlicher Weise von der Temperatur ab. Zur Beschreibung der zweiten Kopplungsrichtung, die zu deformationsbedingten Temperaturänderungen führt, wird die Bilanz der inneren Energie - der erste Hauptsatz der Thermodynamik - ausgewertet. Dieser lautet, wie in Gleichung (3.49) beschrieben

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = J_\theta \bar{\mathbf{T}}_M : \overset{\Delta}{\boldsymbol{\Sigma}} - \text{Div} \mathbf{Q} + \rho_0 r.$$

Die darin vorkommende spezifische innere Energie ε kann mit Hilfe der *Legendre Transformation* in Gleichung (3.56) umgeschrieben werden in einen Anteil freier Energie und einen Entropieterm. Damit kann die Zeitableitung der inneren Energie pro Masseneinheit formuliert werden als

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\Psi} + \dot{\theta} \eta + \theta \dot{\eta}. \tag{5.44}$$

Mit der bereits eingeführten Aufspaltung der Spannungsleistung aus Gleichung (5.5) und unter Vernachlässigung der Fernwirkungskräfte $\rho_0 r$ wird (3.49) dann zu

$$0 = \text{Div} \mathbf{Q} + \rho_0 \dot{\Psi} + \rho_0 \dot{\theta} \eta + \rho_0 \theta \dot{\eta} - J_\theta \left(-p \dot{J}_M + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{T}}_M : \dot{\hat{\mathbf{C}}} \right). \tag{5.45}$$

Nun können die Zeitableitungen der spezifischen Helmholtzschen freien Energie aus den Gleichungen (5.20)-(5.23) und die isochore Spannung auf der TMZ

aus Gleichung (5.33) eingesetzt werden, was nach einigen Rechenschritten zu

$$0 = \text{Div } \mathbf{Q} + \rho_0 \theta \dot{\eta} - \mu^j(\theta) \mathbf{C}_i^{j-1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}_i^{j-1} : \dot{\mathbf{C}}_i^j \quad (5.46)$$

führt. Somit können Verformungen aufgrund ihrer inelastischen Spannungsleistung zu einer Temperaturveränderung führen. Bedingt durch das negative Vorzeichen vor dem Spannungsleistungsterm muss sich die Temperatur bei aufgebrauchten inelastischen Dehnungen erhöhen, um die Gleichung zu erfüllen.

Damit ist das Modell in beide Richtungen gekoppelt. Zum einen hängt die mechanische Spannung von der Temperatur ab, zum anderen führen Deformationen zur Eigenerwärmung des Materials. Der im Kapitel 4 beschriebene Payne-Effekt, der bei dynamischer Beanspruchung des Materials auftritt, wird im präsentierten Modell vernachlässigt, da das Hauptaugenmerk dieser Arbeit auf den Temperatureinflüssen liegt. Dieser Effekt kann dem Modell beispielsweise durch deformationsabhängige Relaxationszeiten hinzugefügt werden [51].

Im folgenden Kapitel werden nun die Materialparameter anhand der durchgeführten Versuche identifiziert, sodass das Modell mittels FE-Rechnungen validiert und angewandt werden kann.

6

Parameteridentifikation und Simulation

Um das vorgestellte Modell mittels FE-Berechnungen validieren und anwenden zu können, muss es zunächst mit Materialparametern bestückt werden. Dazu werden die in Kapitel 4 beschriebenen Versuchsergebnisse herangezogen. In diesem Kapitel soll kurz auf die grundlegende Methodik eingegangen werden, nach der bei einer solchen Parameteridentifikation vorzugehen ist. Mittels dieses Parametersatzes werden im Weiteren diverse Simulationen durchgeführt. Deren Ziel ist es im ersten Schritt das eingeführte Materialmodell zu validieren. Dazu werden mit dem open-source code PANDAS prototypische Berechnungen an einem einfachen Würfel durchgeführt, die die im Versuch gemessenen thermoviskoelastischen Eigenschaften widerspiegeln sollen.

Nach der Validierung folgen sowohl mit PANDAS, als auch mit dem kommerziellen FE-Code ABAQUS durchgeführte weiterführende Berechnungen zur Eigenerwärmung. Es wird qualitativ gezeigt, wie sich das Modell bezüglich der beidseitigen thermomechanischen Kopplung verhält und inwieweit es zur Simulation komplexerer Geometrien einsetzbar ist.

6.1 Parameteridentifikation

Zur Identifikation der Materialparameter ist die Lösung eines inversen Problems notwendig. Ziel ist es, ein geeignetes Materialmodell so zu parametrieren, dass die experimentell ermittelten Daten abgebildet werden. Hierzu wird eine Funktion $f(\mathbf{p})$ eingeführt, die abhängig vom Parametersatz $\mathbf{p} = (p_i)$, bestehend aus n Materialparametern angibt, wie gut die Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation ist. Die Funktion $f(\mathbf{p})$ stellt somit ein Qualitätskriterium für die Güte des aktuellen Parametersatzes dar und wird als Summe von Fehlerquadraten als

$$f(\mathbf{p}) = \sum_j \|\mathbf{T}_j^{num}(\mathbf{p}) - \mathbf{T}_j^{exp}\| \rightarrow \min \quad (6.1)$$

formuliert. Darin sind

$$\mathbf{T}_j^{exp} = [T_j^{exp1}, T_j^{exp2}, \dots]^T \quad (6.2)$$

die experimentell ermittelten Werte der zur Identifikation herangezogenen Versuche und

$$\mathbf{T}_j^{num} = [T_j^{num1}, T_j^{num2}, \dots]^T \quad (6.3)$$

die zugehörigen numerischen Lösungen des jeweiligen Randwertproblems. Im Idealfall liegen die Stützstellen von Experiment und Simulation T_j^{expk} bzw. T_j^{numk} zu denselben Zeitpunkten vor. Ist dies nicht möglich, muss geeignet interpoliert werden. Um nun den auftretenden Fehler zwischen Versuchsdaten und numerisch ermittelten Ergebnissen zu minimieren, werden die Parameter inkrementell verändert [98], bis ein vorgegebenes Abbruchkriterium erreicht ist.

Hierzu gibt es eine Vielzahl von Verfahren, die nach unterschiedlichen Gesichtspunkten unterteilt werden können [69]. Häufig werden Gradientenverfahren und gradientenfreie Verfahren unterschieden. Erstere zeichnen sich dadurch aus, dass der Gradient der Zielfunktion $\nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p})$ zu minimieren versucht wird. Mit dieser Methode können allerdings nur lokale Minima gefunden werden. Daher werden häufig gradientenfreie Optimierungsmethoden eingesetzt, wie sie z.B. in [98, 101] beschrieben sind.

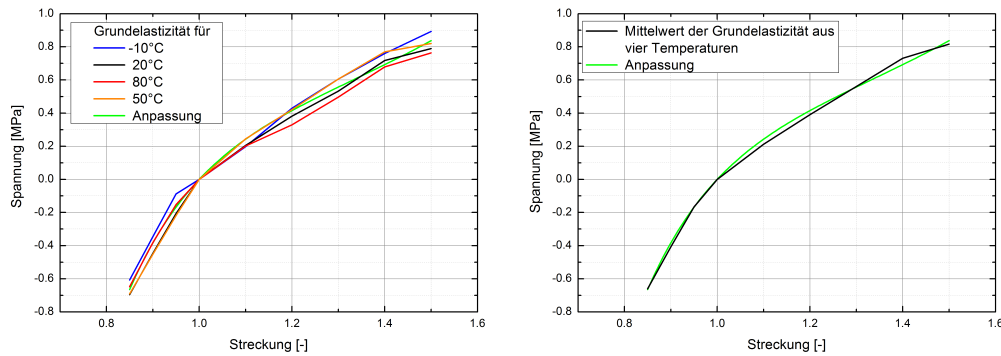


Abbildung 6.1 – Anpassung der Grundelastizität anhand der Mittelwerte der Resultate bei verschiedenen Temperaturen. Links: Vergleich des berechneten Ergebnisses (grün) mit den Messergebnissen bei verschiedenen Temperaturen. Rechts: Vergleich mit dem Mittelwert aus den vier Messungen.

Eine Gruppe dieser Verfahren stellen die Evolutionsstrategien dar [86]. Diese basieren auf einem iterativen Algorithmus, der einen beliebigen, physikalisch sinnvollen Vektor von Modellparametern als Ausgangspunkt nutzt. Dieser Satz an *Elternparametern* wird mit Hilfe eines stochastischen Verfahrens mehrfach verändert, sodass der *Elternvektor* mehrere Nachkommen generiert. Für jeden dieser Nachkommen kann nun die Zielfunktion $f(\mathbf{p})$ berechnet werden. Der daraus resultierende beste Nachkomme fungiert dann seinerseits als Elternvektor für die nächste Generation. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis das vorgegebene Abbruchkriterium, also ein festgelegter Grenzwert der Zielfunktion unterschritten ist. Im Gegensatz zu den Gradientenverfahren kann auf diesem Weg auch das globale Minimum der Zielfunktion gefunden werden, da die jeweils nächste Generation durch zufällige Parameteränderungen entsteht. Dieses Zufallsprinzip führt allerdings auch dazu, dass das Auffinden eines Minimums mitunter mehr Zeit in Anspruch nehmen kann als es bei den gradientenbasierten Verfahren der Fall ist.

Um nun nicht alle Parameter in einem Schritt identifizieren zu müssen, wird strategisch vorgegangen. Zunächst wird nur die Grundelastizität im Zug- und Druckbereich betrachtet. Diese ist für verschiedene Temperaturen gemessen worden (vgl. Abbildung 4.13). Da der Temperatureinfluss auf das Gleichgewichtsverhalten offenbar gering ist, wird die Grundelastizität als temperaturunabhängig angenommen, es sind folglich die Parameter C_{10} , C_{20} und C_{01} zu bestimmen.

In Abbildung 6.1 ist das erzielte Ergebnis dargestellt. Zunächst ist für die Anpassung der Mittelwert aus den Versuchsergebnissen für die verschiedenen untersuchten Temperaturen gebildet worden. Dieser mittlere Verlauf der Grundelastizität dient dann als "Versuchsergebnis" und damit als Ausgangspunkt für die Parameteridentifikation. Wie sich zeigt, reichen drei Materialparameter für den zugrunde liegenden Werkstoff völlig aus, um eine sehr gute Übereinstimmung von Versuch und Berechnung zu erzielen. Die auf diesem Weg ermittelten Parameter C_{10} , C_{20} und C_{01} sind Tabelle 6.1 zu entnehmen.

Aus der Größenordnung der für die Grundelastizität ermittelten Parameter lässt sich nun der Kompressionsmodul K abschätzen. Dieser muss, um Inkompressibilität zu gewährleisten, etwa drei Größenordnungen größer als der Schubmodul, bzw. die Parameter der Grundelastizität sein und ist daher hier zu 10^3 MPa gewählt.

Die nächste Aufgabe ist es, die Parameter der Viskoelastizität zu bestimmen. Diese haben sich experimentell in Kapitel 4 als temperaturabhängig herausgestellt. Als experimentelle Basis dienen hierzu die durchgeführten Relaxationszugversuche bei verschiedenen Temperaturen. In diesen sind alle Informationen über die Zeitabhängigkeit des mechanischen Verhaltens, aber auch über das temperaturabhängige Verhalten enthalten. Außerdem beinhaltet diese Art von Versuch mehrere Zeitdekaden des Materialverhaltens. Anders als bei Zugversuchen mit diskreten Dehnraten müssen somit nicht mehrere Versuche ausgewertet werden und das Zeitspektrum des mechanischen Verhaltens lässt sich ohne Interpolation kontinuierlich wiedergeben.

Parameter	Wert	Einheit
ρ_0	1,13	[g/cm ³]
C_{10}	0,1	[MPa]
C_{20}	0,04	[MPa]
C_{01}	0,4	[MPa]
K	10^3	[MPa]
c_p	$784 + 2,47 \cdot \theta$	[J/KgK]
α	$2,16 \cdot 10^{-4}$	[1/K]
λ_θ	$0,25 - 5,82 \cdot 10^{-4} \cdot (\theta - 273)$	[W/m*K]
θ_0	273	[K]
μ^1	$0,37 + \frac{0,1317}{1 + 10^{-(63,45(\theta-\theta_0)) \cdot 0,08}}$	[MPa]
μ^2	$0,06 + \frac{0,0015}{1 + 10^{-(40,45(\theta-\theta_0)) \cdot 0,08}}$	[MPa]
μ^3	$0,01 + \frac{0,0805}{1 + 10^{-(64,30(\theta-\theta_0)) \cdot 0,08}}$	[MPa]
μ^4	$0,04 + \frac{0,0228}{1 + 10^{-(61,61(\theta-\theta_0)) \cdot 0,08}}$	[MPa]
μ^5	$0,13 + \frac{0,0318}{1 + 10^{-(61,93(\theta-\theta_0)) \cdot 0,08}}$	[MPa]
τ^1	0,04	[s]
τ^2	0,12	[s]
τ^3	1,74	[s]
τ^4	265	[s]
τ^5	$2 \cdot 10^4$	[s]

Tabelle 6.1 – Materialparameter

Die zu bestimmenden Parameter für die Viskoelastizität sind die Federsteifigkeiten $\mu^j(\theta)$ und die Relaxationszeiten der Maxwell-Elemente τ^j , wobei erstere, wie in Kapitel 5 beschrieben, temperaturabhängig sind. Physikalisch und systematisch bedingt unterliegen sie einigen Restriktionen. Beide müssen positiv sein, da sowohl eine negative Federsteifigkeit, als auch eine negative Relaxationszeit unphysikalisch wären. Weiterhin werden die Werte der Relaxationszeiten begrenzt. Mit der Einführung mehrerer Maxwell-Elemente soll erreicht werden, dass die Zeitabhängigkeit der mechanischen Eigenschaften über einen breiten Bereich dargestellt werden kann. Die Charakteristik eines einzelnen Maxwell-Elements ist die folgende: Etwa eine Dekade unterhalb der reziproken Relaxationszeit, also der Eigenkreisfrequenz des Elementes, liefert das Element keine wesentliche Spannungen mehr, da der Dämpfer der Anregung ungehindert folgen kann. Ab etwa einer Dekade oberhalb verhält sich das Element jedoch elastisch. Damit erfasst ein einzelnes Maxwell-Element nur etwa zwei Zeitdekaden. Aus diesem Grund ist die Einführung mehrerer solcher Elemente nur sinnvoll, wenn deren Relaxationszeiten sich um etwa eine Zeitdekade unterscheiden. Es werden also Intervalle vorgegeben, in denen die zu identifizierenden Relaxationszeiten liegen sollen.

In dieser Arbeit hat sich die Einführung von fünf Maxwell-Elementen als sinnvoll erwiesen. Diese werden zunächst, gemeinsam mit den zugehörigen Steifigkeitsparametern μ^j , für 80°C identifiziert. Für die nächst niedrigere Temperatur von 50°C werden dann die Relaxationszeiten konstant gehalten. Für die Federsteifigkeiten wird außerdem die Vorgabe gemacht, dass sie größer sein müssen, als bei der vorangegangenen höheren Temperatur. Analog wird für 20°C verfahren. Die niedrigste Temperatur von -10°C wird im weiteren außer Acht gelassen, da diese in den Folgeberechnungen keine Rolle mehr spielen wird. Dies stellt keine Einschränkung des vorgestellten Materialmodells dar, vielmehr würden mit der Einbeziehung einer weiteren Temperatur diverse Redundanzen in den folgenden Betrachtungen generiert.

Die Funktion, mit welcher die ermittelten Werte von $\mu^j(\theta)$ interpoliert werden, ist prinzipiell frei zu wählen, sofern die damit berechnete Federsteifigkeit für alle Temperaturen positiv ist. Diese Bedingung wird mit der Funktion

$$\mu^j(\theta) = \mu^{j_1} + \frac{\mu^{j_2} - \mu^{j_1}}{1 + 10^{(\mu^{j_3} - (\theta - 273K)) \cdot \mu^{j_4}}} \quad (6.4)$$

erfüllt für alle $\mu^{j_1} > 0$. Exemplarisch ist in Abbildung 6.2 die Anpassung für $\mu^1(\theta)$ dargestellt.

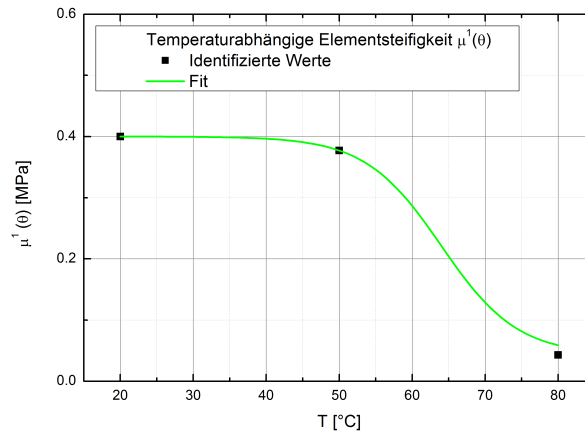


Abbildung 6.2 – Anpassung des viskoelastischen Parameters $\mu^1(\theta)$ zur Veranschaulichung des eingesetzten Funktionals zur Beschreibung der temperaturabhängigen Maxwell-Element-Steifigkeiten (vgl. Gleichung (6.4)).

Mit dieser Parameteridentifikation ergeben sich die in Tabelle 6.1 angegebenen Werte für die Relaxationszeiten τ^j und die Elementsteifigkeiten $\mu^j(\theta)$. Dieser Ansatz basiert darauf, dass die Viskositäten der Maxwell-Elemente mit der Temperatur fallen, die Relaxationszeiten aber konstant bleiben.

Die weiteren angegebenen Parameter thermischer Natur, sowie die Dichte sind direkt den in Kapitel 4 beschriebenen Versuchen zu entnehmen und bedürfen keiner weiteren Parameteridentifikation. Damit ist das Materialmodell vollständig parametrisiert und kann in einen Finite-Elemente-Code überführt werden.

6.2 FE-Umsetzung

Da der Fokus dieser Arbeit auf der experimentellen Charakterisierung und der Modellierung des Verhaltens von Elastomeren liegt, wird die Implementierung des Modells in eine Finite-Elemente-Software nur kurz erläutert. Diese findet zunächst im open-source Code PANDAS statt und wird im Weiteren übertragen in eine Schnittstelle zwischen diesem Tool und dem kommerziellen FEM-Programm ABAQUS. Diese Verknüpfung stellt lediglich eine Möglichkeit dar, das Pre- und Postprocessing möglichst benutzerfreundlich zu

gestalten. Für die Lösung der zu Grunde liegenden Materialgleichungen wird weiterhin PANDAS verwendet.

Die in die FEM zu implementierenden Gleichungen sind die Bilanzen des Impulses und der inneren Energie. Die zugehörigen Primärvariablen sind die Verschiebungen \mathbf{u} und die absolute Temperatur θ . Für beide können sowohl Dirichlet-, als auch Neumann-Randbedingungen für den Rand des Körpers $\partial\Omega$ vorgegeben werden

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial\Omega_D^u \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \partial\Omega_N^u, \quad (6.5)$$

$$\theta = \theta_i \quad \text{auf } \partial\Omega_D^\theta \quad \text{und} \quad \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} \quad \text{auf } \partial\Omega_N^\theta, \quad (6.6)$$

wobei die Summe der Neumann-Ränder und der Dirichlet-Ränder die Körperoberfläche ergeben muss, jedoch für keinen Rand beide Arten von Randbedingungen zugleich vorgegeben werden dürfen. Mathematisch bedeutet dies

$$\partial\Omega_D^u \cup \partial\Omega_N^u = \partial\Omega_D^\theta \cup \partial\Omega_N^\theta = \partial\Omega, \quad (6.7)$$

beziehungsweise

$$\partial\Omega_D^u \cap \partial\Omega_N^u = \partial\Omega_D^\theta \cap \partial\Omega_N^\theta = \emptyset. \quad (6.8)$$

Um nun die schwache Form, also die im Integral über das Volumen des Körpers formulierte Form der Bilanz des Impulses

$$\text{Div } \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

zu erhalten, wird diese mit einer Testfunktion $\delta\mathbf{u}$ multipliziert und über das Volumen Ω integriert

$$\int_{\Omega} \text{Div } \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u} \, dv = 0. \quad (6.9)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes kann nun partiell integriert werden,

was zu

$$\int_{\Omega} \text{Div } \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, da - \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \text{Grad } \delta \mathbf{u} \, dv = 0 \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \text{Grad } \delta \mathbf{u} \, dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, da \quad (6.11)$$

führt. Die Randbedingung (rechte Seite der Gleichung (6.11)) kann mit Hilfe des Cauchy-Theorems

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (6.12)$$

umgeschrieben werden, sodass sich für die schwache Form der Impulsbilanz im Gesamten

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} \, da = \int_{\Omega} \left\{ 2\mathbf{F}_M \left[(C_{10} + 2C_{20}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}}) - 3))\mathbf{I} + C_{01}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}}\mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}) \right. \right. \\ - \frac{1}{3} \{ (C_{10} + 2C_{20}(\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}}) - 3))\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}} + 2C_{01}\mathbf{I}\hat{\mathbf{C}} \} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \\ + \mu^j(\theta) \left(\mathbf{C}_i^{j-1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}_i^{j-1}) \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right) \left. \right] \\ + K \left(J_M(J_M - 1) + \ln J_M \right) \mathbf{F}^{-T} \left. \right\} \cdot \text{Grad } \delta \mathbf{u} \, dv \quad (6.13) \end{aligned}$$

ergibt. Ein analoges Vorgehen führt für die Bilanz der inneren Energie

$$0 = J_{\theta} \left(-p \dot{J}_M + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{T}}_M : \dot{\hat{\mathbf{C}}} \right) - \text{Div } \mathbf{Q} - \rho_0 \dot{\varepsilon}$$

zur schwachen Formulierung

$$\int_{\partial\Omega} \delta\theta \bar{\mathbf{q}} \, da = \int_{\Omega} \left(\mathbf{Q} \cdot \text{Grad } \delta\theta - \rho_0 \theta \dot{\eta} \delta\theta + \mu^j(\theta) \delta\theta \mathbf{C}_i^{j-1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}_i^{j-1} : \dot{\mathbf{C}}_i^j \right) dv, \quad (6.14)$$

wobei $\bar{\mathbf{q}}$ eine Randbedingung für den Wärmestrom darstellt.

Im Falle der finiten Elemente wird der dreidimensionale Körper, für den die Bilanzgleichungen gelöst werden sollen, in diskrete Volumina unterteilt. Diese werden durch diskrete Knotenpunkte aufgespannt. Jedem dieser Punkte ist eine gesuchte Verschiebung und Temperatur zuzuordnen. Zwischen den Elementknoten wird mit einer zu wählenden Ansatzfunktion der Wert der Verschiebung und der Temperatur interpoliert. In der Regel werden die Ansatzfunktionen durch Polynome dargestellt. In den im Folgenden vorgestellten Berechnungen werden für die Verschiebungen quadratische Ansatzfunktionen gewählt, für die Temperatur lineare Funktionen.

Zusätzlich müssen nun noch die Evolutionsgleichungen für die inelastischen Deformationstensoren \mathbf{C}_i^j ausgewertet werden. Dabei kommt in der Regel ein implizites Eulerverfahren zum Einsatz. Implizite Verfahren zeichnen sich dadurch aus, dass die gesuchte Zielgröße Z zum Zeitpunkt t_{n+1} aus dem gegebenen Anfangswert zum Zeitpunkt t_n und einer Funktion der Zielgröße zum Zeitpunkt t_{n+1} berechnet wird:

$$Z(t_{n+1}) = Z(t_n) + \Delta t f(t_{n+1}, Z(t_{n+1})) \quad (6.15)$$

Dabei ist Δt eine vorzugebende Zeitschrittweite. Da der Wert $Z(t_{n+1})$ unbekannt ist, ist dieser iterativ zu bestimmen. Je kleiner dabei die Zeitschrittweite ist, desto genauer wird das Ergebniss, wobei damit die Rechenzeit steigt.

In impliziter Form ist die Lösung der Evolutionsgleichung (5.40) gegeben als

$$\mathbf{C}_i^j(t_{n+1}) = \frac{4\Delta t}{\tau^j} \left[\hat{\mathbf{C}}(t_{n+1}) - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}(t_{n+1}) \cdot \mathbf{C}_i^{j-1}(t_{n+1})) \mathbf{C}_i^j(t_{n+1}) \right] + \mathbf{C}_i^j(t_n). \quad (6.16)$$

Um nun eine explizite Lösung für diese implizite Gleichung zu finden, wird der Argumentation von Shutov [100] gefolgt. In dieser wird zunächst festgestellt, dass für unimodulare Tensoren die Beziehung

$$\overline{\alpha \cdot \mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}} \quad (6.17)$$

gilt, wobei $\overline{\mathbf{A}}$ den unimodularen Anteil von \mathbf{A} bezeichnet und α ein Skalar ist. Im vorliegenden Fall sind sowohl $\hat{\mathbf{C}}$, als auch \mathbf{C}_i^j unimodulare Tensoren, da $\det \hat{\mathbf{C}} = \det \mathbf{C}_i^j = 1$ gilt. Mit der Substitution

$$\gamma = \frac{4}{3} \frac{\Delta t}{\tau^j} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}(t_{n+1}) \cdot \mathbf{C}_i^{j-1}(t_{n+1})) \quad (6.18)$$

lässt sich (6.16) nun umschreiben in

$$\mathbf{C}_i^j(t_{n+1}) = \frac{1}{1 + \gamma} \left(\mathbf{C}_i^j(t_n) + \frac{4\Delta t}{\tau^j} \hat{\mathbf{C}}(t_{n+1}) \right). \quad (6.19)$$

Da $\frac{1}{1 + \gamma}$ ein Skalar ist, wird damit der unimodulare Anteil von $\mathbf{C}_i^j(t_{n+1})$ und damit der Tensor selbst zu

$$\mathbf{C}_i^j(t_{n+1}) = \overline{\mathbf{C}_i^j(t_n) + \frac{4\Delta t}{\tau^j} \hat{\mathbf{C}}(t_{n+1})} \quad (6.20)$$

oder ausgeschrieben zu

$$\mathbf{C}_i^j(t_{n+1}) = \left[\det \left(\mathbf{C}_i^j(t_n) + \frac{4\Delta t}{\tau^j} \hat{\mathbf{C}}(t_{n+1}) \right) \right]^{-\frac{1}{3}} \left(\mathbf{C}_i^j(t_n) + \frac{4\Delta t}{\tau^j} \hat{\mathbf{C}}(t_{n+1}) \right). \quad (6.21)$$

Diese Gleichung ist explizit in einem Ein-Schritt-Verfahren lösbar. Dieses für inkompressible Materialien anwendbare Konzept erspart damit die zeitintensive iterative Lösung der gegebenen Evolutionsgleichung.

6.3 Berechnungsergebnisse

Die im Folgenden vorgestellten Berechnungsergebnisse dienen zum einen der Validierung des vorgestellten Materialmodells, zum anderen der Veranschaulichung der verschiedenen Effekte, die aus der beidseitigen thermomechanischen Kopplung entstehen. Zunächst wird dazu kurz auf die Umsetzung im open-source code PANDAS eingegangen.

6.3.1 Implementierung in PANDAS

Ursprünglich wurde das Programmsystem PANDAS für die Berechnung von Geomaterialien und technischen Schäumen entwickelt. Diese haben gemein, dass sie eine starke Porosität aufweisen, welche die mechanischen Eigenschaften dominiert. Somit lässt sich mittels der vorgestellten Software die Mehrphasigkeit von Materialien aller Art in Form der Theorie Poröser Medien (TPM) darstellen. Dies beinhaltet die Beschreibung von elastischem Verhal-

ten, aber auch von viskoelastischen, plastischen oder viskosen Charakteristika. Auch die Anforderung physikalische und geometrische Nichtlinearitäten zu beschreiben war eine Motivation für die Entwicklung des Programmes. Hinzu kommt, dass einige zu betrachtende Fluide, aber auch die meisten zugrunde liegenden Elastomere inkompressibel sind, was ebenfalls mittels Zwangsbedingungen wiedergegeben werden kann. Somit ist PANDAS eine ideale Grundlage für die Berechnung beliebig garteter Kopplungen wie sie hier zwischen mechanischem Verhalten und Temperatur auftreten.

Die dem Modell zugrunde liegenden Konstitutivgleichungen, welche in Kapitel 5 eingeführt wurden, müssen hierbei nicht erst linearisiert werden, da PANDAS die Möglichkeit bietet, den für die FE-Methode notwendigen 4-stufigen Tangentenoperator numerisch intern zu berechnen. Es können hierzu sowohl ein Newton-Raphson-Verfahren, als auch ein vereinfachtes Newton-Verfahren angewandt werden.

Weitere Informationen zu den Möglichkeiten und Vorgehensweisen von PANDAS sind [23] zu entnehmen.

6.3.2 Validierungsrechnungen

Als erste, ideale Möglichkeit der Validierung des Modells und dessen Implementierung, bietet sich das Berechnen einfacher Relaxationszugversuche an einem einfachen Würfel der Kantenlänge eins an. Die errechneten Spannungen sollten sehr gut zu den experimentell ermittelten Werten passen, da sowohl die Grundelastizität, als auch das temperaturabhängige viskoelastische Verhalten anhand von Zugversuchen parametrisiert wurde. Abbildung 6.3 zeigt die Ergebnisse der FE-Rechnungen mit den Versuchsdaten. Wie zu erkennen ist, ist die Anpassung für 80°C sehr gut. Für diese Temperatur ist der Satz an viskoelastischen Parametern optimiert, weil der Hochtemperaturbereich in dieser Arbeit zugrunde liegenden Projekt Elasto-opt von besonderem Interesse ist. Auch für 50°C stimmt die FE-Berechnung sehr gut mit dem Experiment überein, gleiches gilt für die niedrigste rechnerisch untersuchte Temperatur von 20°C. Mit Hilfe dieser Berechnungen ist somit gezeigt, dass das implementierte Modell das mechanische Verhalten im gesamten, großen untersuchten Zeit- und Temperaturbereich korrekt wiedergibt.

Als Kontrolle sollen nun auch die durchgeführten Relaxationsdruckversuche nachgerechnet werden. Im Gegensatz zu den Zugversuchen werden diese nicht

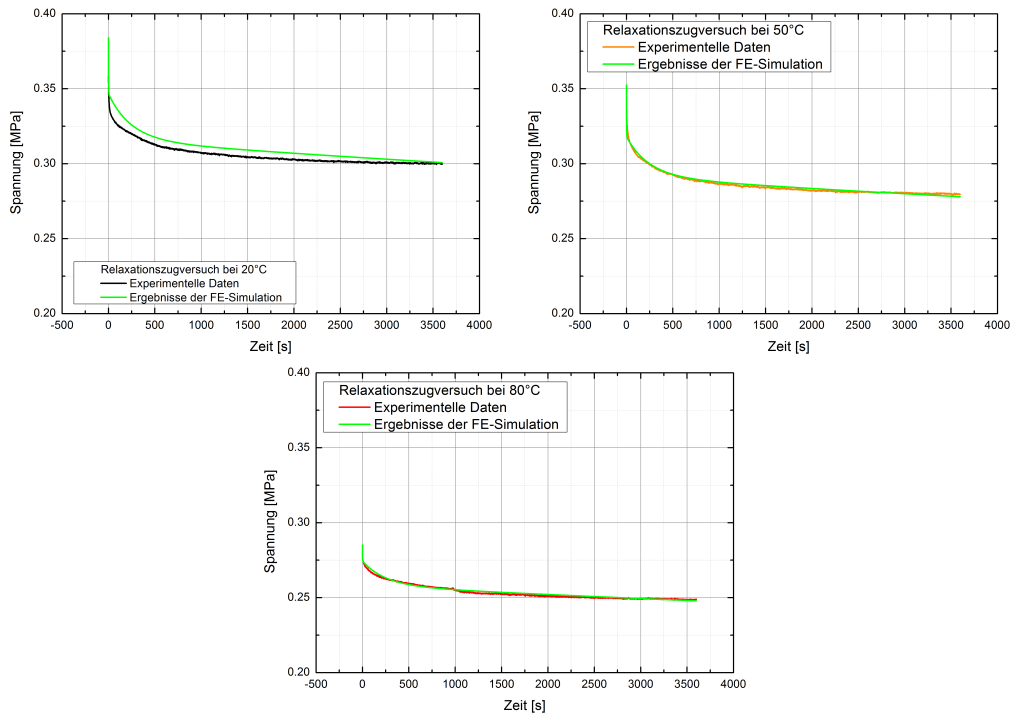


Abbildung 6.3 – Ergebnisse der FE-Validierungsrechnungen verglichen mit experimentellen Daten aus Relaxationszugversuchen bei Temperaturen von 20°C, 50°C und 80°C.

mit Parametern durchgeführt, die an äquivalenten Versuchen angepasst wurden, sondern vielmehr erneut mit dem aus Zugversuchen gewonnenen Parametersatz. Damit sind eventuelle Abweichungen, die aus der Anpassung der Grundelastizität im Zug- und Druckbereich herrühren nicht mehr durch die Parameteridentifikation kompensiert. Abbildung 6.4 zeigt die Berechnungsergebnisse für 20°C, 50°C und 80°C verglichen mit den jeweiligen Versuchsergebnissen. Analog zur Versuchsführung wurde die berechnete Geometrie zunächst im spannungsfreien Zustand auf Versuchstemperatur aufgeheizt und dann belastet. Somit entspricht die Ausgangslänge des berechneten Würfels jener im thermisch ausgedehnten Zustand.

Auch im Druckbereich zeigen die Berechnung und das Experiment eine relativ gute Übereinstimmung. Diese ist für die höchste Temperatur von 80°C am besten, was wiederum daran liegt, dass die viskoelastischen Parameter für diese Temperatur optimiert sind. Mit fallender Temperatur wird die

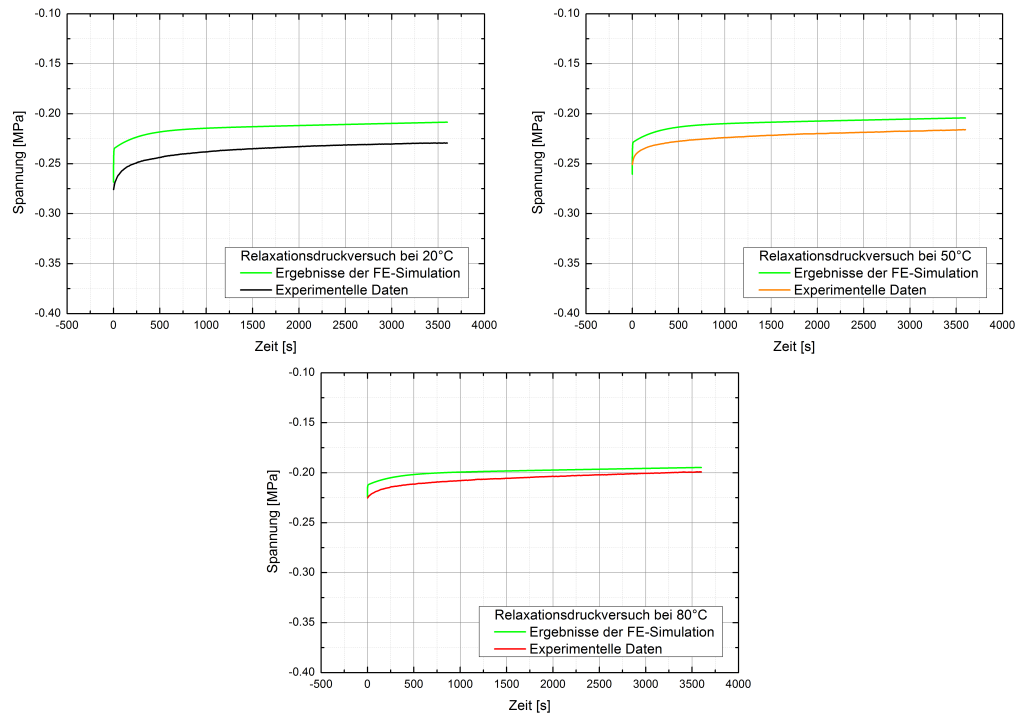


Abbildung 6.4 – Ergebnisse der FE-Validierungsrechnungen verglichen mit experimentellen Daten für Relaxationsdruckversuche bei Temperaturen von 20°C, 50°C und 80°C.

Übereinstimmung schlechter. Dies macht sich am offensichtlichsten in einer Parallelverschiebung des Spannungsverlaufes über der Zeit bemerkbar, die mit niedrigerer Temperatur zunimmt. Begründet kann dies darin liegen, dass die Grundelastizität als temperaturunabhängig modelliert ist. Wie in Abbildung 4.13 zu erkennen ist, stellt diese Annahme eine Näherung dar. Im Zugbereich konnte dieser Umstand durch die Parameteridentifikation des Modellteils für die Nichtgleichgewichtsspannung kompensiert werden, was im Druckbereich nicht mehr der Fall ist, da hierfür keine eigenen Parameter identifiziert wurden. Dem Abweichen der Ergebnisse im Druckbereich kann also entgegengewirkt werden, indem die Grundelastizität temperaturabhängig formuliert wird oder aber die Druckversuche zusätzlich zur Parameteridentifikation herangezogen werden. Da aber die durchgeführten Scherversuche, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, nicht auszuwerten sind, steht keine weitere Versuchsgrundform zur Modellvalidierung zur Verfügung. Vor diesem Hintergrund stellt die vorgestellte Berechnung von Relaxationsdruckversuchen eine

sehr gute Validierung des Modells und der identifizierten Parameter dar.

Mit diesen Berechnungen ist gezeigt, dass die temperatur- und zeitabhängigen mechanischen Eigenschaften vom entwickelten Modell korrekt abgebildet werden können.

6.3.3 Eigenerwärmung unter dynamischer Beanspruchung

Um qualitativ bewerten zu können, ob die modellhafte Beschreibung des Materialverhaltens die Einflussfaktoren auf die Eigenerwärmung vollständig erfasst, werden mittels FE-Berechnungen dynamische Randbedingungen auf einen homogenen Würfel aufgebracht. Da der Wärmeübergang zwischen untersuchtem Elastomer und den umgebenden Medien nicht ohne größeren Aufwand quantifiziert werden kann, werden alle Zustandsänderungen als adiabat angenommen. Damit findet kein Wärmeaustausch zwischen Probenkörper und Umgebung statt.

Wie in den in Abschnitt 4.4.3 vorgestellten Versuchen, welche einen qualitativen Überblick über die Einflussfaktoren auf die Dissipation unter dynamischer Last geben, werden nun verschiedene sinusförmige Belastungen aufgebracht. Experimentell hat sich gezeigt, dass sowohl eine Erhöhung der Frequenz bei konstanter Amplitude, als auch eine erhöhte Amplitude bei konstanter Frequenz zu einer stärkeren Erwärmung führt. Da die inelastischen Deformationsraten \dot{C}_i^j ausschlaggebend für die Eigenerwärmung sind, sollte sich dieses Verhalten auch in der Berechnung wiederfinden lassen.

Hierzu werden nun verschiedene Randbedingungen aufgebracht. Als Referenz dient die Berechnung einer Elastomerprobe mit einer Ausgangstemperatur von 20°C, die zunächst auf 30% Zugdehnung vordeformiert wird und dann mit einer Frequenz von 1 Hz und einer Amplitude von 10%, bezogen auf die Ausgangslänge, belastet wird. Der gesamte Berechnungszeitraum umfasst dabei 200 Sekunden. Basierend auf dieser Referenzberechnung, werden nun sukzessiv einzelne Parameter verändert, um deren Einfluss zu beobachten. Begonnen wird hierbei unter Konstanthaltung aller anderen Parameter mit der Variation der Frequenz auf 5 Hz bzw. 10 Hz. Das Ergebnis dieser Veränderung ist der Abbildung 6.5 links zu entnehmen. Wie erwartet nimmt die Eigenerwärmung mit erhöhter Frequenz deutlich zu, wobei diese Zunahme nicht linear mit der Frequenzerhöhung einhergeht. Da mehrere Maxwell-Elemente zugleich Einfluss auf die Dissipation nehmen, ist dies auch nicht zu erwarten. Gleiches gilt auch für den Einfluss der Amplitude. Wie in Abbildung 6.5

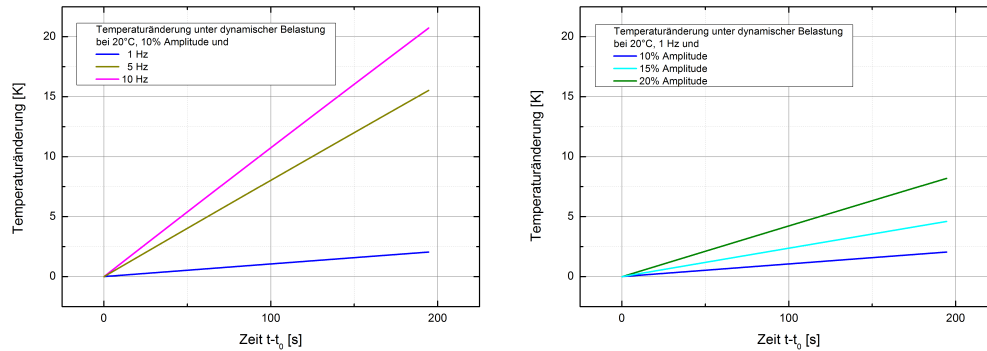


Abbildung 6.5 – Ergebnisse der FE-Berechnungen zur Eigenerwärmung unter dynamischer Belastung. Links: Temperaturänderung bei konstanter Anfangstemperatur von 20°C und konstanter Dehnungsamplitude von 10% zur Veranschaulichung der Frequenzabhängigkeit für 1 Hz, 5 Hz und 10 Hz. Rechts: Temperaturänderung bei konstanter Anfangstemperatur von 20°C und konstanter Belastungsfrequenz von 1 Hz zur Veranschaulichung der Amplitudenabhängigkeit für 10%, 15% und 20%. Die angegebenen Temperaturen sind jeweils auf die Ausgangstemperatur normiert. t_0 ist die Zeit, die zur Aufbringung der Vordeformation notwendig ist.

rechts zu erkennen ist, steigt auch mit erhöhter Amplitude die Erwärmung merklich an. Der kontinuierliche Temperaturanstieg in allen gezeigten Fällen hat seine Ursache in den als adiabat angenommenen Randbedingungen. Würde man in Abbildung 6.5 den Anfangsbereich vergrößern, so würde man kleine Oszillationen im Temperaturverlauf feststellen, die ihre Ursache in der oszillierenden Dissipationsleistung der einzelnen Maxwell-Elemente haben.

Somit sind beide grundlegenden Variationsparameter bezüglich der Eigenerwärmung des Materials korrekt im Modell enthalten. Die Formulierung der Proben temperatur abhängig von der inelastischen Deformationsrate beinhaltet sowohl den Einfluss höherer Frequenzen, als auch jenen größerer Deformationsamplituden. Bleibt nun noch festzustellen, ob auch die durch niedrigere Temperaturen verstärkte Dissipation, die in den dynamischen Untersuchungen in Abschnitt 4.4 festgestellt wurde, dargestellt werden kann. Dazu wird die Berechnung des dynamischen Versuches mit genannten Referenzparametern wiederholt und die Anfangstemperatur auf 80°C erhöht. Das Resultat ist der Abbildung 6.6 zu entnehmen. Es zeigt sich, dass die erhöhte Temperatur zu einer Verringerung der Eigenerwärmung pro Zeit führt, was dem gemessenen Verhalten des Verlustmoduls, welcher mit höherer Temperatur

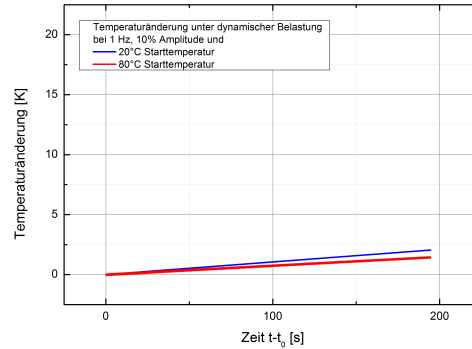


Abbildung 6.6 – Ergebnisse der FE-Berechnungen zur Eigenerwärmung unter dynamischer Belastung bei konstanter Amplitude von 10% und konstanter Frequenz von 1 Hz zur Veranschaulichung der Ausgangstemperaturabhängigkeit bei 20°C und 80°C. Die angegebenen Temperaturen sind jeweils auf die Ausgangstemperatur normiert. t_0 ist die Zeit, die zur Aufbringung der Vordeformation notwendig ist.

abnimmt, entspricht.

6.3.4 PANDAS-ABAQUS-Schnittstelle

Um das Pre- und Postprocessing von Berechnungen an komplexeren Bauteilgeometrien komfortabler zu gestalten, ist es sinnvoll dieses mit Hilfe einer kommerziellen FE-Software durchzuführen. Dazu bietet sich die Finite-Elemente Software ABAQUS an, da sie in vielen Unternehmen eingesetzt wird und gerade im Bezug auf die Einbindung komplexerer Geometrien recht einfach bedienbar ist. Um das vorgestellte Materialmodell nicht erneut implementieren zu müssen, kann hierfür eine Schnittstelle zwischen PANDAS und ABAQUS eingesetzt werden. Diese lässt das Pre- und Postprocessing in ABAQUS cae, der Benutzeroberfläche von ABAQUS, durchführen und bedient sich der in PANDAS implementierten Materialgleichungen.

Um zunächst die Funktionsfähigkeit der Schnittstelle zu überprüfen, wird wie im Falle aller PANDAS-Rechnungen ein Würfel als Geometrie gewählt, der unter Zug einem Relaxationsversuch unterzogen wird. Die Randbedingungen sind hierbei die gleichen wie im Falle der in Abbildung 6.3 vorgestellten reinen PANDAS-Rechnung für 20°C. Da das Berechnungsergebnis an allen

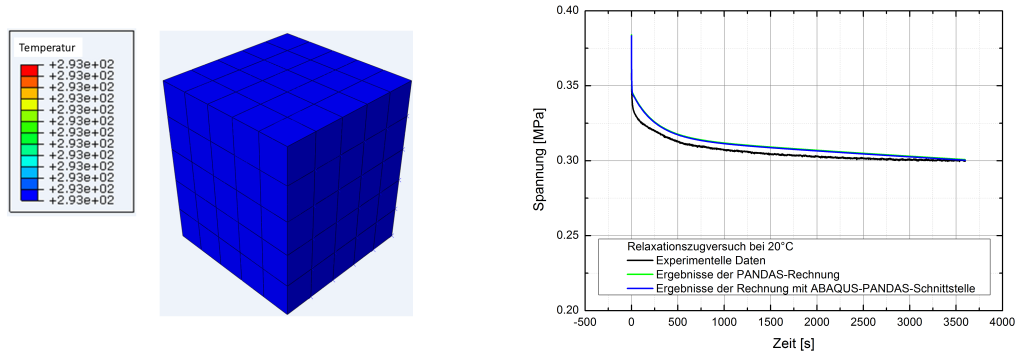


Abbildung 6.7 – Links: Berechnungsergebnis mittels ABAQUS-PANDAS-Schnittstelle für die Temperaturverteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt während eines Relaxationszugversuches. Rechts: Vergleich der im Relaxationszugversuch ermittelten experimentellen Daten bei 20°C mit Berechnungsergebnissen aus einer PANDAS-Rechnung und einer Rechnung mit der ABAQUS-PANDAS-Schnittstelle.

Punkten des Würfels homogen ist (vgl. Abbildung 6.7 links), reicht es wie im Fall der reinen PANDAS-Rechnung aus, das Ergebnis an einem Punkt zur Auswertung heranzuziehen. Dies ist in Abbildung 6.7 rechts für den Spannungsverlauf über der Zeit geschehen. Es zeigt sich, dass das Schnittstellenergebnis exakt mit jenem der PANDAS-Rechnung übereinstimmt. Somit ist die Übertragung auf die Schnittstelle gelungen bzw. die Funktionsfähigkeit nachgewiesen und es können im Folgenden komplexere Geometrien damit berechnet werden.

Als Beispiel für eine solche dient eine Hourglassprobe, wie sie häufig für Betriebsfestigkeitsuntersuchungen von Elastomeren eingesetzt wird. Diese verdanken ihren Namen ihrer stundenglasförmigen Geometrie, wie sie in Abbildung 6.8 abgebildet ist. Die Höhe der Probe beträgt dabei 25 mm, der seitliche Radius ist 15 mm und der Durchmesser an der dünnsten Stelle misst 12 mm. Aufgrund ihrer Geometrie führen Randbedingungen, die auf die obere, bzw. untere Fläche aufgebracht werden, zu Inhomogenitäten im Probeninneren. Um diese in Berechnungen aufweisen zu können, wird die Geometrie zunächst unter Berücksichtigung von Symmetrien vereinfacht. Zusätzlich werden die die Metallaufnahmen oben und unten umschließenden Elastomerlippen vernachlässigt, sodass sich als zu berechnende Geometrie die in Abbildung 6.9 gezeigte Achtelprobe ergibt.

Berechnet wird ein dynamischer Versuch mit sinusförmig aufgebrachter Deformation an der Oberseite. Die Schnittflächen werden hierbei mittels Sym-

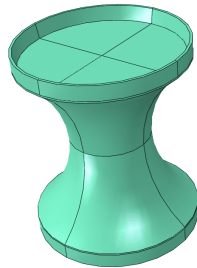


Abbildung 6.8 – Schematische Darstellung einer Hourglassprobe

metrierandbedingungen festgehalten. Beginnend bei Raumtemperatur (293 K) wird mit einer Frequenz von 1 Hz und einer Verschiebungsamplitude von 3 mm um die Nulllage herum belastet. Aufgrund der großen Rechenzeit werden nur zwei Zyklen, folglich also zwei Sekunden Belastung berechnet. Diese reichen jedoch aus, um alle Charakteristika und die Plausibilität der Rechnung zu zeigen.

Zunächst wird zum Zeitpunkt $t = 1,22$ s nahe der größten Zugverformung die Verteilung der Deformation in Zugrichtung C_{22} , der Spannung in dieser Richtung P_{22} und der Temperatur θ betrachtet. Wie Abbildung 6.9 zu entnehmen ist, sind sowohl die 22-Komponente des rechten Cauchy-Greens Tensors C_{22} , als auch die nominelle Spannung P_{22} an der Außenkante am kleinsten Querschnitt am größten. Beide nehmen hin zur oberen Einspannung ab. Die im Spannungsverlauf auftretenden Schwankungen innerhalb der einzelnen Elemente sind der groben Vernetzung geschuldet und können mit einer feineren Vernetzung eliminiert werden. Da diese jedoch die Rechenzeit deutlich erhöhen würde, wird hiervon abgesehen.

Die ebenfalls abgebildete Temperaturverteilung weist die höchste Temperatur am Ort der größten Deformation auf; am nahezu undeformierten oberen rechten Rand entspricht sie der Ausgangstemperatur. Damit sind alle berechneten Verteilungen plausibel. Mit Hilfe der Schnittstelle von PANDAS und ABAQUS lassen sich auch komplexere Geometrien berechnen, bei denen Inhomogenitäten bezüglich der Verzerrungs- und Spannungsverteilung auftreten.

Zuletzt wird der zeitliche Verlauf der oben untersuchten Größen betrachtet. Dazu kann ein beliebiger Punkt der untersuchten Geometrie ausgewählt wer-

den, zum Beispiel jener, der in Abbildung 6.10 markiert ist. An diesem ist die Deformation in Zugrichtung C_{22} nahezu symmetrisch und sinusförmig. Die daraus resultierende Spannung in derselben Richtung ist aufgrund der Asymmetrie des Gleichgewichts-Spannungs-Dehnungs-Verhaltens hin zu negativen Spannungen verschoben. Außerdem ist die Spannungsantwort zwar noch periodisch, aufgrund der geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten bei großen Deformationen sowie der viskoelastischen Eigenschaften entspricht ihr zeitlicher Verlauf jedoch nicht mehr dem eines einfachen Sinus. Von besonderem Interesse ist der daraus resultierende Verlauf der Temperatur. Diese steigt aufgrund der von inelastischen Spannungsleistungen bedingten Dissipation zyklisch an. Da die inelastische Deformationsrate beim Nulldurchgang der inelastischen Deformation, und damit näherungsweise beim Nulldurchgang der Gesamtdeformation maximal ist, erreicht die Erwärmung dort auch ihr Maximum. Somit ist die Frequenz der Temperaturschwankung doppelt so groß, wie die der Deformation.

Mit diesen Berechnungsergebnissen ist zum einen die Funktionsfähigkeit der Schnittstelle zwischen PANDAS und ABAQUS gezeigt, zum anderen aber auch die Übertragbarkeit des vorgestellten Modells auf inhomogene Probleme. Somit ist dieses auch auf beliebig komplexe Bauteile übertragbar. Einzig die Rechenzeit stellt hier einen deutlich begrenzenden Faktor dar. Diese liegt bei der vorgestellten Implementierungsvorgehensweise weit außerhalb von Zeitbereichen, die in der industriellen Anwendung praktikabel sind. So dauert die Berechnung des gezeigten Hourglassproben-Beispiels auf einem herkömmlichen Computer etwa einen Tag.

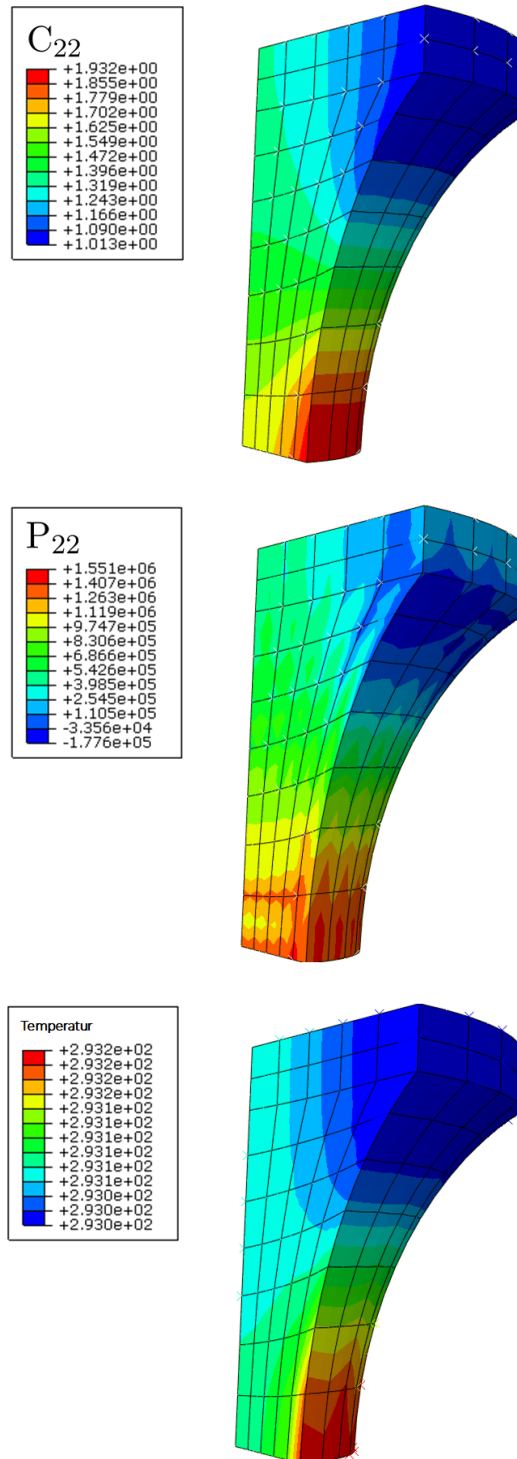


Abbildung 6.9 – Ergebnisse der Schnittstellenberechnung zum Zeitpunkt $t = 1,22$ s während einer sinusförmig aufgebrachtten Deformationsphase mit einer Frequenz von 1 Hz und einer Amplitude von 3 mm um die Nulllage. Oben: Verteilung der Deformation C_{22} . Mitte: Verteilung der Spannung P_{22} . Unten: Verteilung der Temperatur θ .

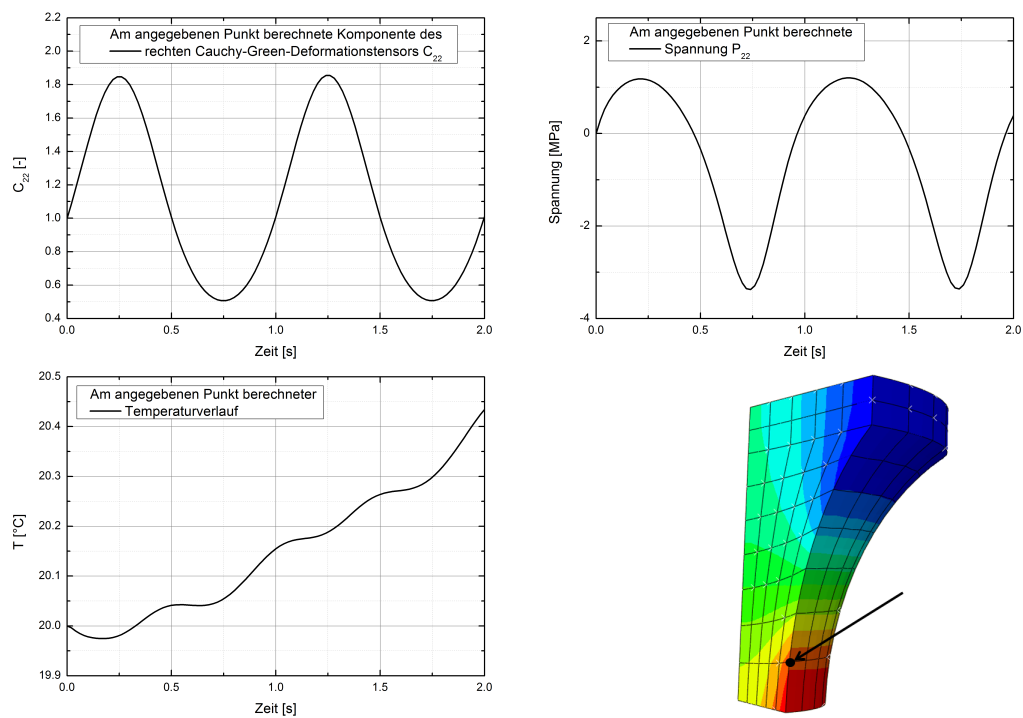


Abbildung 6.10 – Zeitlicher Verlauf der Deformation C_{22} , der Spannung P_{22} und der Temperatur am angegebenen Punkt während einer sinusförmig aufgetragenen Deformationsbelastung. Frequenz $f = 1$ Hz, Verschiebungsamplitude $A = 3$ mm, $r_u = -1$

7

Zusammenfassung und Ausblick

Ergebnisse der Arbeit

Die vorliegende Arbeit hat zwei Schwerpunkte: Zum einen die experimentelle Charakterisierung der thermischen und mechanischen Eigenschaften eines Elastomers und zum anderen die Entwicklung eines Materialmodells, welches die thermomechanische Kopplung der Eigenschaften dieser Werkstoffgruppe unter Berücksichtigung finiter Deformationen erfasst.

Um aus einer breiten Basis an experimentellen Daten schöpfen zu können, werden zunächst Zug-, Druck- und Scherversuche bei verschiedensten Randbedingungen durchgeführt. Als Startpunkt dienen hierbei mehrstufige Relaxationsversuche bei verschiedenen Temperaturen zur Untersuchung des temperaturabhängigen Gleichgewichtsverhaltens des Elastomers. Dabei stellt sich heraus, dass die Grundelastizität, also jenes Materialverhalten bei unendlich langsamer Belastung, als unabhängig von der Temperatur angenommen werden kann.

Um zeitabhängige Effekte miteinzubeziehen, werden zyklische Versuche bei unterschiedlichen Dehnraten und Temperaturen herangezogen. Es kann festgestellt werden, dass das Material deutlich erkennbar viskoelastische Eigenschaften aufweist. Mit steigender Dehnrates steigt die erreichte Spannung bei

gleichbleibender Maximaldehnung stark an. Außerdem zeigt sich in zyklischen Versuchen eine Hysterese zwischen Be- und Entlastungspfad, welche als erster Indikator für die Eigenerwärmung des Materials herangezogen werden kann. Die Fläche der Hysterese ist proportional zur dissipierten Energie pro Belastungszyklus. Dabei zeigt sich, dass höhere Temperaturen zu kleineren Hysterese führen.

Da mit zyklischen Versuchen bei unterschiedlichen Dehnraten nur ein diskretes Spektrum des Zeitverhaltens erfasst werden kann - eine Dehnrates entspricht einer Zeitkonstanten im Anregungsprozess -, werden Relaxationsversuche bei verschiedenen Temperaturen durchgeführt. Das so zu charakterisierende viskoelastische Verhalten erstreckt sich vom Zeitpunkt unmittelbar nach Erreichen der Maximaldehnung bis zum Versuchsende und ist dazwischen kontinuierlich erfasst. In diesen Versuchen lässt sich feststellen, dass die auftretenden Spannungen unter konstanter Dehnung signifikant von der Temperatur abhängen. Mit steigender Temperatur sinkt die erreichte Spannung ab.

Die letzte Gruppe mechanischer Untersuchungen stellen dynamische Versuche dar. Hiermit kann das viskoelastische Verhalten für schnellere Prozesse beobachtet werden. Außerdem kann erneut die temperaturabhängige Energie-dissipation in Form des Verlustmoduls aufgenommen werden. In den durchgeführten Versuchen ergibt sich analog zu den Relaxationsversuchen eine starke Temperaturabhängigkeit der Moduln. Der Speichermodul, genauso wie der Verlustmodul fallen mit steigender Temperatur ab.

Zur thermischen Charakterisierung werden DSC-, TMA- und LFA-Untersuchungen durchgeführt. Der Verlauf der spezifischen Wärmekapazität und der thermischen Leitfähigkeit stellen sich dabei als linear von der Temperatur abhängig heraus, der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient als konstant. Die mit den Methoden bestimmte Glasübergangstemperatur liegt mit ca. -60° deutlich unterhalb des untersuchten Bereiches von -10°C bis 80°C und spielte daher keine Rolle in den weiteren Betrachtungen bzw. bei der Materialmodellierung.

Um in einem letzten Schritt die Eigenerwärmung des Elastomers unter dynamischer Last quantifizieren zu können, werden während solcher dynamischer Beanspruchungen mit Hilfe einer Wärmebildkamera Aufnahmen der Probenoberfläche gemacht, die die amplituden- und frequenzabhängige stationäre Gleichgewichtstemperatur der Probe aufzeichnen. Aufgrund der starken Temperaturanstiege, die dabei gemessen werden, war die Notwendigkeit

der Modellierung der bidirektionalen Kopplung zwischen Mechanik und Temperatur vollständig gezeigt.

Aus diesem breiten Spektrum an Versuchen wird eine optimierte Anzahl herausgearbeitet, die notwendig ist, um das im Folgenden eingeführte Materialmodell zu parametrieren und zu validieren.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der kontinuumsmechanischen Modellierung der gemessenen Einflüsse und Effekte. Dazu wird ein thermoviskoelastisches Materialmodell motiviert und hergeleitet, welches elastomertypische finite Deformationen berücksichtigt. Ausgangspunkt hierfür ist zunächst die Zerlegung des Deformationsgradienten in seine thermischen, volumetrischen, inelastischen und elastischen Anteile. Daraus resultierend entstehen verschiedene Zwischenkonfigurationen, auf denen verschiedene Verzerrungs- und Spannungsmaße einzuführen sind. Kombiniert werden diese kinematischen Betrachtungen mit einem aus kinematischen Annahmen resultierenden Split der Spannungsleistung in einen volumetrischen und einen isochoren Anteil, sowie einer Aufschlüsselung des Funktionals der spezifischen Helmholtzschen freien Energie. Diese wird additiv in einen thermischen und einen volumetrischen Anteil, sowie in einen Gleichgewichts- und einen Nichtgleichgewichtsanteil zerlegt.

Die Auswertung der Clausius-Duhem-Ungleichung auf Basis der kinematischen Annahmen sowie der freien Energiedichte führt damit zu Konstitutivgleichungen für Spannung, Entropie und Wärmefluss, sowie zu Evolutionsgleichungen für die inelastischen Deformationsanteile. Mit den so erhaltenen Gleichungen lassen sich alle relevanten, gemessenen Effekte abbilden.

Um dies zu zeigen, wird das Materialmodell in den Finite-Elemente-Code PANDAS überführt. Es werden verschiedene Validierungsrechnungen durchgeführt, welche das temperaturabhängige mechanische Verhalten sehr gut quantitativ darstellen. Die Abhängigkeit der Eigenerwärmung von verschiedenen Einflussfaktoren wird numerisch simuliert und stimmt qualitativ mit der Erfahrung und experimentellen Beobachtungen überein. Aufgrund der hohen Rechenzeiten konnten keine Simulationen von längeren, mehrere tausend Zyklen umfassenden Prozessen durchgeführt werden. Zur Vereinfachung wurden außerdem adiabate Randbedingungen angenommen.

Das somit in seiner Funktionsfähigkeit bestätigte Materialmodell wird in einem letzten Schritt genutzt, um Berechnungen mit einer Schnittstelle des verwandten Codes PANDAS mit der kommerziellen Software ABAQUS durch-

zuführen. Diese ermöglicht es, Berechnungen an komplexeren Geometrien durchzuführen. Auch für geometrisch komplexe Körper kann damit gezeigt werden, dass das Materialmodell zu plausiblen Ergebnissen führt.

Mit der vorliegenden Arbeit ist ein wesentlicher Fortschritt gegenüber dem derzeitigen Stand der Forschung gemacht worden, da die bidirektionale Kopplung von mechanischem Verhalten und Temperatureinflüssen in diesem Umfang und gerade unter Berücksichtigung der Eigenerwärmung unter dynamischer Belastung nur wenig betrachtet worden ist.

Weitere Ziele

Um das eingeführte Materialmodell bezüglich seiner Berechnungsergebnisse zur Eigenerwärmung sinnvoll validieren zu können, sind in künftigen Arbeiten Experimente durchzuführen, die es ermöglichen den Temperaturverlauf während dynamischer Belastungen im zeitlichen Verlauf zu beobachten und aufzunehmen. Mittels solcher Versuchsdaten lassen sich dann die im Modell enthaltenen Materialparameter identifizieren und auf die Erwärmungsproblematik hin optimieren. Eine weitere Herausforderung ist die Untersuchung und Modellierung des Wärmeüberganges zwischen der Elastomerprobe und ihrer Umgebung.

Da die Langlebigkeit von Elastomerbauteilen immer mehr in den Fokus von Forschungsbemühungen rückt, wird es in zukünftigen Arbeiten von großem Interesse sein das Alterungsverhalten dieser Werkstoffgruppe experimentell genauer zu untersuchen. Hierzu ist es notwendig den Einfluss verschiedener Umgebungsmedien und -temperaturen mittels Langzeitversuchen zu erfassen.

Diese Alterungseffekte sind in einem weiteren Schritt in das Materialmodell zu integrieren. Die Grundlage hierzu ist bereits in Arbeiten von [63, 48] gelegt, die darin vorgestellten Modellansätze sind nur noch auf das in dieser Arbeit vorgestellte Modell zu übertragen. Basis der genannten Alterungsmodelle ist die Definition zweier im Elastomer existierender Netzwerke - einem der jungfräulichen Gleichgewichtskonfiguration entsprechenden und einem durch die Alterung neu entstehenden -, die mit Hilfe einer Mischungsregel das zeit- bzw. alterungszustandsabhängige Materialverhalten wiedergeben. In Kombination mit dem hier vorgestellten Modell können diese beiden Netzwerke mit unterschiedlichen Temperaturabhängigkeiten und charakteristischen Dissipationseigenschaften belegt werden, sodass die thermomechanisch gekoppelten

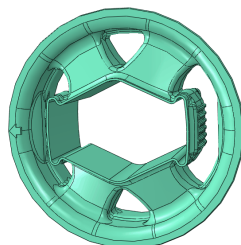


Abbildung 7.1 – Schematische Darstellung eines Viersteglagers

Eigenschaften über lange Zeiträume hinweg abgebildet werden können.

Auch der in dieser Arbeit experimentell beobachtete Payne-Effekt, welcher sich in der aktuellen Modellformulierung nicht wiederfindet, kann integriert werden, was beispielsweise über die deformationsabhängige Formulierung der Relaxationszeiten realisiert werden kann, wie es z.B. in [52, 51] vorgestellt wird. Der für viele Anwendungen ebenfalls relevante Mullins-Effekt, der in dieser Arbeit experimentell ausgeklammert wurde, kann ebenfalls modellhaft erfasst und in das Materialmodell integriert werden.

Hauptgegenstand weiterer Arbeiten wird es sein, die Berechnungszeit für Simulationen mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Materialmodell gerade auch von komplexeren Bauteilberechnungen entscheidend zu verringern. Hierzu ist es erforderlich das Modell in Form einer ABAQUS UMAT-Subroutine zu implementieren, sodass für die Materialgleichungen nicht mehr auf PANDAS zurückgegriffen werden muss. Damit fällt die zeitintensive Schnittstellenkommunikation zwischen ABAQUS und PANDAS weg.

Unter der Bedingung, dass die Rechenzeit auf diesem Wege signifikant zurückgeht, können dann in einem letzten Schritt Berechnungen an einem konkreten Lager, wie es in der Automobilindustrie zum Einsatz kommt, durchgeführt werden. Abbildung 7.1 zeigt ein solches sogenanntes Viersteglager schematisch. Diese hochdynamisch beanspruchten Bauteile erwärmen sich besonders stark an den Stegen, wo sie dann, abhängig vom erlebten Temperaturprofil, früher oder später ausfallen. Um solche Ausfälle vorhersehen zu können, soll mit Hilfe des vorgestellten Materialmodells der Bauteiltemperaturverlauf vorhergesagt werden, sodass diese Information in Betriebsfestigkeitsbetrachtungen einfließen kann.

Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, J. & H. ALTENBACH [1994]. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- [2] ALTS, T. [1979]. ‘On the energy-elasticity of rubber-like materials.’ *Prog. Coll. Pol. Sci. S.*, **66**, pp. 367–375.
- [3] AMIN, A., M. ALAM & Y. OKUI [2002]. ‘An improved hyperelasticity relation in modeling viscoelasticity response of natural and high damping rubbers in compression: experiments, parameter identification and numerical verification.’ *Mech. Mater.*, **34**, pp. 75–95.
- [4] AMIN, A., A. LION & P. HÖFER [2010]. ‘Effect of temperature history on the mechanical behavior of a filler-reinforced nr/br blend: Literature review and critical experiments.’ *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **90**, pp. 347–369.
- [5] AMIN, A., A. LION, S. SEKITA & Y. OKUI [2006]. ‘Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification.’ *Int. J. Plast.*, **22**, pp. 1610–1657.
- [6] ARRUDA, E. M. & M. C. BOYCE [1993]. ‘A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **41**, pp. 389–412.
- [7] BARNES, H. [1997]. ‘Thixotropy - a review.’ *J. Non-Newton Fluid*, **70**, pp. 1–33.
- [8] BARTHOLD, F.-J. [2002]. *Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrieprobleme*. Habilitation, Mechanik-Zentrum, Braunschweiger Schriften zur Mechanik 44, TU Braunschweig.

- [9] BATHE, K. J. [1990]. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin.
- [10] BAUER, C., R. RICHERT, R. BÖHMER & T. CHRISTENSEN [2000]. ‘Dynamic thermal expansivity near the glass transition.’ *J. Non-Cryst. Solids.*, **262**, pp. 261–276.
- [11] BESDO, D. & J. IHLEMANN [2003]. ‘A phenomenological constitutive model for rubberlike materials and its numerical applications.’ *Int. J. Plast.*, **19**, pp. 1019–1036.
- [12] CHADWICK, P. [1974]. ‘Thermo-mechanics of rubberlike materials.’ *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond A*, **276**, pp. 371–403.
- [13] COLEMAN, B. D. & W. NOLL [1961]. ‘Foundations of linear viscoelasticity.’ *Reviews of Modern Physics*, **33**, pp. 239–249.
- [14] DEMIREL, Y. [2014]. *Nonequilibrium Thermodynamics; 3rd Edition*. Elsevier.
- [15] DIANI, J., B. FAYOLLE & P. GILORMINI [2009]. ‘A review on the Mullins effect.’ *Eur. Polym. J.*, **45**, pp. 601–612.
- [16] DIEBELS, S. [2000]. *Mikropolare Zweiphasenmodelle: Modellierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien*. Habilitationsschrift, Institut für Mechanik (Bauwesen), Nr. II-4, Universität Stuttgart.
- [17] DIERCKS, N. & A. . LION [2013]. ‘Modelling deformation-induced anisotropy using 1D-laws for Mullins-Effect.’ *Constitutive Models for Rubber*, **8**, pp. 419–424.
- [18] DIPPEL, B. [2012]. *Finite Thermoviskoelastizität von Elastomeren - Experimente und Modellbildung*. Universität des Saarlandes.
- [19] DIPPEL, B., M. JOHLITZ & A. LION [2013]. ‘Finite thermoviscoelastic behaviour of elastomers - experiments, modelling and fe simulation.’ *Proceedings of the 8th European conference on constitutive models for rubber (ECCMR)*, **8**, pp. 117–122.
- [20] DIPPEL, B., M. JOHLITZ & A. LION [2014]. ‘Thermo-mechanical couplings in elastomers - experiments and modelling.’ *Z. Angew. Math. Mech.*, **DOI**, pp. 10.1002/zamm.201400110.
- [21] DOMININGHAUS, H., P. ELSNER, P. EYERER & T. HIRTH [2012]. *Kunststoffe, 8. Auflage*. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 978-3-642-16173-5.

- [22] DONNET, J.-B. & E. CUSTODERO [2013]. ‘Chapter 8 - Reinforcement of Elastomers by Particulate Fillers.’ *The Science and Technology of Rubber (Fourth Edition)*, pp. 383–416.
- [23] EHLERS, W. [2009]. *PANDAS: Porous media Adaptive Nonlinear finite element solver based on Differential Algebraic Systems*. Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- [24] EHLERS, W., S. DIEBELS, D. MAHNKOPF & P. ELLSIEPEN [1996]. ‘Theoretische und numerische Studien zur Lösung von Rand- und Anfangswertproblemen in der Theorie poröser Medien, Forschungsbericht zum DFG-Projekt Eh 107/6-1.’ In *Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen) Nr. 96-II-1*. Universität Stuttgart.
- [25] EHLERS, W. & P. ELLSIEPEN [1998]. ‘PANDAS: Ein FE-System zur Simulation von Sonderproblemen der Bodenmechanik.’ In *Finite Elemente in der Baupraxis: Modellierung, Berechnung und Konstruktion, Beiträge zur Tagung FEM '98 an der TU Darmstadt am 5. und 6. März 1998*, edited by P. Wriggers, U. Meißner, E. Stein & W. Wunderlich, pp. 431–400. Ernst & Sohn, Berlin.
- [26] EHRENSTEIN, G. & S. PONGRATZ [2007]. *Beständigkeit von Kunststoffen*. Carl Hanser Verlag.
- [27] FERRY, J. D. [1980]. *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons.
- [28] FLETCHER, W. & A. GENT [1953]. ‘Nonlinearity in the dynamic properties of vulcanized rubber compounds.’ *Trans. Inst. Rubber Ind.*, **5**, pp. 266–280.
- [29] FLORY, P. J. [1961]. ‘Thermodynamic relations for high elastic materials.’ *T. Faraday Soc.*, **57**, pp. 829–838.
- [30] GENT, A. N. [1996]. ‘A new constitutive relation for rubber.’ *Rubber Chem. Technol.*, **69**, pp. 59–61.
- [31] GÖKTEPE, S. & C. MIEHE [2005]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials. Part III: The micro-sphere model of anisotropic Mullins-type damage.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **53**, pp. 2259–2283.
- [32] GREVE, R. [2002]. ‘Kontinuumsmechanik.’ Technical report, TU Darmstadt, Fachbereich Mechanik, AG3.

- [33] GUTZOW, I., J. W. P. SCHMELZER & B. PETROFF [2007]. ‘The phenomenology of Metastable Liquids and the Glass Transition.’ *J. Eng. Thermophys.*, **16**, pp. 205–223.
- [34] HAASE, R. [1956]. *Thermodynamik der Mischphasen*. Springer-Verlag, Berlin.
- [35] HARTMANN, S. [2001]. ‘Numerical studies of the identification of the material parameters of Rivlin’s hyperelasticity using tension-torsion test.’ *Acta Mech.*, **148**, pp. 129–155.
- [36] HARTMANN, S. [2001]. ‘Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions.’ *Int. J. Solids Structures*, **38**, pp. 7999–8018.
- [37] HARTMANN, S., T. TSCHÖPE, L. SCHREIBER & P. HAUPT [2003]. ‘Large deformations of a carbon black-filled rubber; Experiment, optical measurement and parameter identification using finite elements.’ *Eur. J. Mech. A/Solids*, **22**, pp. 309–324.
- [38] HAUPT, P. [2000]. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag, Berlin.
- [39] HAUPT, P. [2000]. ‘On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters.’ *Int. J. Solids Struct.*, **37**, pp. 3633–3646.
- [40] HAUPT, P. & A. LION [2002]. ‘On finite linear viscoelasticity of incompressible isotropic materials.’ *Acta Mech.*, **159**, pp. 87–124.
- [41] HAUPT, P. & C. TSAKMAKIS [1989]. ‘On the application of dual variables in continuum mechanics.’ *Continuum Mech. Therm.*, **1**, pp. 165–196.
- [42] HEINRICH, G. & M. KALISKE [1997]. ‘Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity.’ *Comput. Theor. Polym. Sci.*, **7**, pp. 227–241.
- [43] HÖFER, P. & A. LION [2009]. ‘Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber.’ *J. Mech. Phys. Solids.*, pp. 500–520.
- [44] HÖHNE, G., W. HEMMINGER & H.-J. FLAMMERSHEIM [2003]. *Differential Scanning Calorimetry*. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 978-3-540-00467-7.

- [45] HOLZAPFEL, G. A. [2000]. *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [46] IHLEMANN, J. [2002]. *Kontinuumsmechanische Nachbildung hochbelasteter technischer Gummiwerkstoffe*. Dissertation, Universität Hannover.
- [47] IHLEMANN, J. [2005]. ‘Richtungsabhängigkeit beim Mullins-Effekt.’ *KGK-Kautschuk Gummi Kunststoffe*, **58(9)**, pp. 438–448.
- [48] JOHLITZ, M., N. DIERCKS & A. LION [2014]. ‘Thermo-Oxidative Aging of Elastomers: A Modelling Approach Based on a Finite Strain Theory.’ *Int. J. Plasticity*, p. in press.
- [49] KALISKE, M. & G. HEINRICH [1999]. ‘An extended tube-model for rubber elasticity: Statistical-mechanical theory and finite element implementation.’ *Rubber Chem. Technol.*, **72**, pp. 602–632.
- [50] KAMAL, M.-R. [1973]. ‘Kinetic and thermal characterization of thermoset cure.’ *Polym. Eng. Sci.*, **13**, pp. 59–64.
- [51] KOPROWSKI-THEISS, N. [2011]. *Kompressible, viskoelastische Werkstoffe: Experimente, Modellierung und FE-Umsetzung*. Saarbrücker Reihe, Band 25, Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. Shaker Verlag, Aachen.
- [52] KOPROWSKI-THEISS, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2010]. ‘Modelling of a cellular rubber with nonlinear viscosity functions.’ *Exp. Mech.*. published online.
- [53] KRÖNER, E. [1960]. ‘Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und eigenspannungen.’ *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **4**, pp. 273–334.
- [54] KROTH, T. & B. DIPPEL [2012]. ‘Erfassung, Simulation und Bewertung der thermomechanischen Schädigungsmechanismen von Elastomerbauteilen unter dynamischen mechanischen Beanspruchungen ”Elasto-Opt”.’ *Zwischenbericht zum AiF-Vorhaben 400 ZN*.
- [55] LEE, E. H. [1969]. ‘Elastic-plastic deformation at finite strain.’ *J. Appl. Mech.*, **36**, pp. 1–6.
- [56] LEE, E. H. & D. T. LIU [1967]. ‘Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis.’ *J. Appl. Phys.*, **38(1)**, pp. 19–27.

- [57] LION, A. [1996]. ‘A constitutive model for carbon black filled rubber, experimental results and mathematical representation.’ *Continuum Mech. Thermodyn.*, **8**, pp. 153–169.
- [58] LION, A. [1997]. ‘On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, pp. 1805–1834.
- [59] LION, A. [1999]. ‘Strain-dependent dynamic properties of filled rubber: A non-linear viscoelastic approach based on structural variables.’ *Rubber Chemistry and Technology*, **72(2)**, pp. 410–429.
- [60] LION, A. [2000]. *Thermomechanik von Elastomeren*. Berichte des Instituts für Mechanik der Universität Kassel (Bericht 1/2000). ISBN 3-89792-023-9.
- [61] LION, A. [2004]. ‘Phenomenological modelling of the material behaviour of carbon black-filled rubber in continuum mechanic.’ *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, **57**, pp. 184–190.
- [62] LION, A., B. DIPPEL & C. LIEBL [2014]. ‘Thermomechanical material modelling based on a hybrid free energy density depending on pressure, isochoric deformation and temperature.’ *Int. J. Solids Struct.*, **51**, pp. 729–739.
- [63] LION, A. & M. JOHLITZ [2011]. ‘On the representation of chemical ageing of rubber in continuum mechanics.’ *Int. J. Solids Struct.*, p. under review.
- [64] LION, A. & C. KARDELKY [2003]. ‘The Payne effect in finite viscoelasticity: constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales.’ *Int. J. Plasticity*, **20**, pp. 1313–1345.
- [65] LION, A., J. RETKA & M. RENDEK [2009]. ‘On the calculation of predeformation-dependent dynamic modulus tensors in finite nonlinear viscoelasticity.’ *Mech. Res. Commun.*, **36**, pp. 653–658.
- [66] LUBLINER, J. [1985]. ‘A model of rubber viscoelasticity.’ *Mech. Res. Commun.*, **12**, pp. 93–99.
- [67] LULEI, F. [2002]. *Mikromechanisch motivierte Modelle zur Beschreibung finiter Deformationen gummiartiger Polymere, physikalische Modellbildung und numerische Simulation*. Dissertation, Bericht Nr. I-09 des Instituts für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I, Universität Stuttgart.

- [68] LUPIS, C.-H.-P. [1983]. *Chemical Thermodynamics of Materials*. Elsevier.
- [69] MAHNKEN, R. [1998]. *Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation und Modellierung bei metallischen Werkstoffen*. Habilitation, Institut für Baumechanik und Numerische Methoden F98/2, Universität Hannover.
- [70] MARCKMANN, G. & E. VERRON [2006]. ‘Comparison of hyperelastic models for rubberlike materials.’ *Rubber Chem. Technol.*, **79**, pp. 835–858.
- [71] MARCKMANN, G., E. VERRON, L. GORNET, G. CHAGNON, P. CHARRIER & P. FORT [2002]. ‘A theory of network alteration for the Mullins effect.’ *J. Mech. Phys. Solids.*, **50**, pp. 2011–2028.
- [72] MENARD, K.-P. [1999]. *Dynamic mechanical analysis - A practical introduction*. CRC Press.
- [73] MIEHE, C. & S. GÖKTEPE [2005]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials. Part II: The micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **53**, pp. 2231–2258.
- [74] MIEHE, C., S. GÖKTEPE & F. LULEI [2004]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials. Part I: The non-affine micro-sphere model of rubber elasticity.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **52**, pp. 2617–2660.
- [75] MIEHE, C. & J. KECK [2000]. ‘Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, pp. 323–365.
- [76] MOONEY, M. [1940]. ‘A theory of large elastic deformation.’ *J. Appl. Phys.*, **11**, pp. 582–592.
- [77] MULLINS, L. [1948]. ‘Effect of stretching on the properties of rubber.’ *Rubber Chem. Technol*, **21**, pp. 281–300.
- [78] MULLINS, L. & N. R. TOBIN [1965]. ‘Stress softening in rubber vulcanizates Part I: Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **9**, pp. 2993–3009.

- [79] OGDEN, R. W. [1972]. ‘Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids.’ *Proc. R. Soc. Lond. A*, **326**, pp. 565–584.
- [80] OGDEN, R.-W. & D.-G. ROXBURGH [1998]. ‘A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber.’ *Proceedings of the Royal Society of London. Series S: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **455**, pp. 2861–2877.
- [81] ÖSTERLÖF, R. [2014]. *Modelling of the Fletcher-Gent effect and obtaining hyperelastic parameters for filled elastomers*. KTH Royal institute of technology.
- [82] PARKER, W., R. JENKINS, C. BUTLER & G.L.ABBOTT [1961]. ‘Method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity.’ *JPN J APPL PHYS*, **32**.
- [83] PAYNE, A. [1962]. ‘Thy dynamic propterties of carbon black loaded natural rubber vulcanizates. part ii.’ *J APPL POLYM SCI*, pp. 368–372.
- [84] PAYNE, A. R. [1960]. ‘A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanizates.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **3**, pp. 127.
- [85] PAYNE, A. R. [1962]. ‘The dynamic properties of carbon black-loaded natural rubber vulcanizates.’ *j. Appl. Polymer Sci.*, **6**, pp. 57–63.
- [86] RECHENBERG, I. [1973]. ‘Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution.’ *Frommann-Holzboog, Stuttgart*.
- [87] REESE, S. [2001]. *Thermomechanische Modellierung gummiartiger Polymerstrukturen*. Habilitation, Bericht-Nr. F01/4 des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [88] REESE, S. & P. WRIGGERS [1997]. ‘A material model for rubber-like polymers exhibiting plastic deformation, computational aspects and a comparison with experimental results.’ *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **148**, pp. 279–298.
- [89] REESE, S. & P. WRIGGERS [1999]. ‘Modelling of the thermo-mechanical material behaviour of rubber-like polymers – micromechanical motivation and numerical simulation.’ *In Constitutive Models for Rubber, edited by Dorfmann & Muhr, Balkema, Rotterdam*, pp. 13–21.

- [90] RENDEK, M. & A. LION [2009]. ‘Filler-reinforced rubber under transient and cyclic loadings: Constitutive modelling and FEM-implementation for time domain simulations, Proceedings of the 6th ECCMR-Conference in Dresden, Eds. G. Heinrich, M. Kaliske, A. Lion and S. Reese.’ *Proc Monogr eng wate*, **VI**, pp. 39–45.
- [91] RENDEK, M. & A. LION [2009]. ‘Modelling and finite element simulation of filler-reinforced elastomers under dynamic deformations.’ *kaut. gummi kunstst.*, pp. 463–470.
- [92] RENDEK, M. & A. LION [2010]. ‘Strain-induced transient effects of filler-reinforced elastomers with respect to the Payne-effect: experiments and constitutive modelling.’ *Zamm-z angew. math. me.*, **90**, pp. 436–458.
- [93] RETKA, J. & A. LION [2009]. ‘Modelling and simulation of dynamically-loaded elastomer-mounts under predeformation, proceedings of the 6th ECCMR-conference in dresden, Eds. G. Heinrich, M. Kaliske, A. Lion and S. Reese.’ *Proc Monogr eng wate*, **VI**, pp. 149–152.
- [94] RIVLIN, R. S. [1948]. ‘Large elastic deformation of isotropic materials IV:Further developments of the general theory.’ *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond A*, **A241**, pp. 379–397.
- [95] RIVLIN, R. S. [1948]. ‘Large elastic deformation of isotropic materials V:The problem of flexure.’ *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond A*, **A195**, pp. 463–473.
- [96] RIVLIN, R. S. [1949]. ‘Large elastic deformation of isotropic materials VI:further results in the theory of torsion, shear and flexure.’ *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond A*, **242**, pp. 173–195.
- [97] RODAS, C. O., F. ZAÏRI & M. NAÏT-ABDELAZIZ [2014]. ‘A finite strain thermo-viscoelastic constitutive model to describe the self-heating in elastomeric materials during low-cycle fatigue.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **64**, pp. 396–410.
- [98] SCHEDAY, G. [2003]. *Theorie und Numerik der Parameteridentifikation von Materialmodellen der finiten Elastizität und Inelastizität auf der Grundlage optischer Feldmessmethoden*. Dissertation, Bericht-Nr. I-11 des Instituts für Mechanik, Lehrstuhl I, Universität Stuttgart.
- [99] SCHEFFER, T., H. SEIBERT & S. DIEBELS [2013]. ‘Optimisation of a pretreatment method to reach the basic elasticity of filled rubber materials.’ *Arch Appl Mech*. published online.

- [100] SCHUTOV, A., R. LANDGRAF & J. IHLEMANN [2013]. ‘An explicit solution for implicit time stepping in finite strain viscoelasticity.’ *Comput. method. appl. m.*, **265**, pp. 213–225.
- [101] SCHWEFEL, H. P. [1995]. ‘Evolution and optimum seeking.’ *John Wiley & Sons, New York*.
- [102] SEDLAN, K. [2001]. *Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerkwerkstoffen, Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*. Dissertation, Berichte des Instituts für Mechanik (2/2001), Universität Gesamthochschule Kassel.
- [103] SIMO, J. C. & R. L. TAYLOR [1982]. ‘Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **35**, pp. 107–118.
- [104] STEPHAN, P., K. SCHABER, K. STEPHAN & F. MAYINGER [2009]. *Thermodynamik - Grundlagen und technische Anwendungen, Band 1: Einstoffsysteme; 18. Auflage*. Springer-Verlag, Berlin.
- [105] STEPHAN, P., K. SCHABER, K. STEPHAN & F. MAYINGER [2010]. *Thermodynamik - Grundlagen und technische Anwendungen, Band 2: Mehrstoffsysteme und chemische Reaktionen; 15. Auflage*. Springer-Verlag, Berlin.
- [106] TALLEC, P. L., A. KAISS & C. RAHIER [1994]. ‘Three-dimensional incompressible viscoelasticity in large strains: formulation and numerical approximation.’ *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **37**, pp. 1159–1186.
- [107] TOBOLSKY, A. V. [1967]. *Mechanische Eigenschaften und Struktur von Polymeren*. Berliner Union Stuttgart.
- [108] TRELOAR, L. R. G. [1943]. ‘The elasticity of a network of long-chain molecules. I.’ *T. Faraday Soc.*, **39**, pp. 36–41.
- [109] TRELOAR, L. R. G. [1943]. ‘The elasticity of a network of long-chain molecules. II.’ *T. Faraday Soc.*, **39**, pp. 241–246.
- [110] TRELOAR, L. R. G. [1946]. ‘The elasticity of a network of long-chain molecules. III.’ *T. Faraday Soc.*, **42**, pp. 83–94.
- [111] TRELOAR, L. R. G. [1954]. ‘The photoelastic properties of short-chain molecular networks.’ *T. Faraday Soc.*, **50**, pp. 881–896.

-
- [112] TRELOAR, L. R. G. [1975]. ‘The mechanics of rubber elasticity.’ *Proc. R. Soc. Lond. A*, **351**, pp. 301–330.
- [113] TSCHOEGL, N.-W. [1989]. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behaviour*. Springer-Verlag Berlin.
- [114] WOLLSCHIED, D. & A. LION [2013]. ‘Predeformation- and frequency-dependent material behaviour of filler-reinforced rubber: Experiments, constitutive modelling and parameter identification.’ *Int. J. Solids Struct.*, **50**, pp. 1217–1225.
- [115] WRIGGERS, P. [2001]. *Nichtlineare Finite-Element-Methode*. Springer-Verlag, Berlin.
- [116] YEOH, O. H. & P. D. FLEMMING [1997]. ‘A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity.’ *J. Polym. Sci. Part B: Polym. Phys.*, **35**, pp. 1919–1931.
- [117] ZIENKIEWICZ, O. [2001]. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier.