

Universität der Bundeswehr München  
Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften

Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg  
Fakultät Maschinenbau

Charakterisierung von gewebeverstärkten Einzellagen  
aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFK)  
mit Hilfe einer mesomechanischen Kinematik  
sowie strukturdynamischen Versuchen

Marco Romano

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften  
der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften  
(Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Promotionskommission:

1. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Ingo Ehrlich
  2. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Norbert Gebbeken
  3. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil., rer. nat. Hans-Joachim Gudladt
- Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Brüning

Die Dissertation wurde am 27. Juli 2015 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht,  
und durch die Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften am 16. März 2016  
angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 12. April 2016 statt.



*... Zeiten ...*

*... i tempi ...*

*Meinen Eltern und Großeltern.*

*Ai miei genitori e nonni.*



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Labor für Faserverbundtechnik an der Ostbayerischen Technischen Hochschule Regensburg im Umfeld des Aufbaus und der Etablierung des Labors an der Fakultät Maschinenbau.

Mein besonderer Dank gilt dem Leiter des Labors für Faserverbundtechnik der Ostbayerischen Technischen Hochschule Regensburg, Herrn Prof. Dr.-Ing. Ingo Ehrlich für die vielen, nicht nur fachlichen, Diskussionen und Gespräche. Seine Anregungen und Ideen haben die Arbeit ganz wesentlich geprägt. Seine ausgezeichnete Kritik und die hervorragende Betreuung der Arbeit in Verbindung mit aller wissenschaftlichen Freiheit haben wesentlich zum Gelingen beigetragen.

Darüber hinaus möchte ich besonders dem Leiter des Instituts für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Norbert Gebbeken, danken, der meine Arbeit als kooperative Promotion zwischen der Ostbayerischen Technischen Hochschule Regensburg und der Universität der Bundeswehr München jederzeit ausgezeichnet betreut hat. Seine wertvollen Hinweise in den zahlreichen Gesprächen habe ich stets sehr gerne in die Arbeit aufgenommen.

Für die Übernahme des Amtes des dritten Gutachtes gilt mein Dank dem Leiter des Instituts für Werkstoffkunde der Universität der Bundeswehr München, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil., rer. nat. Hans-Joachim Gudladt, für die fachlichen Gespräche und das große Interesse an der Arbeit.

Für die Bereitschaft als Vorsitzender der Promotionskommission zu agieren sowie für die sehr schöne Leitung des Promotionsverfahrens danke ich dem Inhaber der Professur für Baumechanik, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Brünig.

Es ist mir wichtig, mich bei den Angehörigen der Fakultät Maschinenbau der Ostbayerischen Technischen Hochschule Regensburg zu bedanken, die durch ihre wohlwollende Förderung und ihr Interesse sehr zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. In diesem Zusammenhang möchte ich stellvertretend die jeweils amtierenden Dekane, Herrn Prof. Dr.-Ing. Georg Rill und Herrn Prof. Dr.-Ing. Ulrich Briem, besonders erwähnen.

Schließlich möchte ich denjenigen Personen danken, die bei der Entstehung dieser Arbeit keinen unwesentlichen Anteil hatten: Herrn Vinzent Schmid, M.Sc., Herrn Bastian Jungbauer, B.Eng., Herrn Andreas Kastenmeier, M.Sc., Herrn Michael Eisenried, M.Sc., Herrn Matthias Micklitz, M.Sc., Herrn Carl Hoinkes, M.Sc., Herrn Staatl. gepr. Techniker Elmar Lauterborn sowie allen Abschlussarbeitern und Studierenden, die ich im Zuge dieser Arbeit betreuen durfte.

Baar-Ebenhausen, Mai 2016

Marco Romano



## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die analytische und numerische Identifikation einer mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen sowie deren Validierung über die Struktur­dynamik von flachen stabförmigen Probekörpern aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFK). Unter der Voraussetzung, dass das wiederholte Wirken der Kinematik Energie dissipiert, trägt sie bei zyklischer viskoelastischer Deformation zusätzlich zur reinen viskoelastischen Werkstoffdämpfung in gewebeverstärkten Einzellagen bei.

Die analytischen und numerischen Untersuchungen beschränken sich auf die Betrachtung des ebenen, zweidimensionalen Zusammenhangs einer vollständigen Ondulation bzw. einer repräsentativen Sequenz in Dickenrichtung. Zur Parameteridentifikation werden die geometrischen Abmessungen in definierten Schritten variiert. Dafür wird der Grad der Ondulation in gewebeverstärkten Einzellagen  $\tilde{O} = \frac{A}{L}$  als dimensionslose Kennzahl eingeführt.

Zur Validierung der dämpfungserhöhenden Wirkung der in den analytischen und numerischen Untersuchung identifizierten mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen werden in experimentellen struktur­dynamischen Untersuchungen frei abklingende Transversal­schwingungen von einseitig fest eingespannten Probekörpern untersucht. Im Detail werden flache stabförmige Probekörper aus kohlenstofffaserverstärktem Epoxidharz mit Lagenaufbauten aus 0°-unidirektionalen und gewebeverstärkten Einzellagen untersucht.

Die Ergebnisse der experimentellen struktur­dynamischen Untersuchungen dienen schließlich der Validierung des analytischen Modells und der numerischen Berechnungen. Die dämpfungserhöhende Wirkung der identifizierten mesomechanischen Kinematik wird schließlich in Abhängigkeit des eingeführten Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  quantifiziert.

## Summary

The present work contains an analytical and a numerical identification of a mesomechanic kinematic in fabric-reinforced single-layers as well as its validation by the structural dynamics of flat beam-like specimens of carbon-fiber reinforced plastic (CFRP). Under the presumption, that the repeated acting of the kinematic dissipates energy, it contributes under cyclic viscoelastic deformation to the pure viscoelastic material damping of fabric-reinforced single-layers.

The analytical and numerical investigations consider the plain, two-dimensional correlation of one complete conulation and a representative sequence, respectively, in the through-thickness direction. In order to identify the parameters, the geometric dimensions are varied in defined steps. Therefore the degree of ondulation in fabric-reinforced single-layers  $\tilde{O} = \frac{A}{L}$  is introduced as a dimensionless ratio.

In order to validate the contribution of the analytically and numerically identified mesomechanic kinematic in fabric-reinforced single-layers to the material damping, the free decay of transversal vibrations of single-sided clamped specimens is considered in the experimental structural dynamic investigations. In detail flat beam-like specimens of carbon-fiber reinforced epoxy with layups of 0°-unidirectionally reinforced and fabric-reinforced single-layers are investigated.

The results of the experimental structural dynamic investigations allow the validation of the analytical model and the numerical calculations. The contribution of the identified mesomechanic kinematic is finally quantified depending on the introduced degree of ondulation  $\tilde{O}$ .





# Inhaltsverzeichnis

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Vorwort</b>  | <b>v</b>    |
| <b>Inhaltsverzeichnis</b>   | <b>ix</b>   |
| <b>Formelzeichen und Bezeichnungen</b>  | <b>xiii</b> |
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>1</b>    |
| 1.1 Technischer Hintergrund und Motivation . . . . .                            | 1           |
| 1.2 Ausgangssituation . . . . .   | 2           |
| 1.3 Mesomechanisches Wirkprinzip . . . . .                                      | 2           |
| 1.4 Zielsetzung und Vorgehen . . . . .  | 4           |
| <b>2 Strukturdynamische Werkstoffdämpfung in faserverstärkten Kunststoffen</b>  | <b>7</b>    |
| 2.1 Ausgewählte Aspekte . . . . .   | 7           |
| 2.1.1 Unterschiedliche mechanische Wirkprinzipien . . . . .                     | 7           |
| 2.1.2 Ermittlung strukturdynamischer Werkstoffkennwerte . . . . .               | 10          |
| 2.1.3 Ondulationen in gewebeverstärkten Einzellagen . . . . .                   | 12          |
| 2.2 Abschließende Bemerkungen . . . . .   | 20          |
| <b>3 Ausgewählte Aspekte zu faserverstärkten Kunststoffen</b>                   | <b>25</b>   |
| 3.1 Verstärkungsfasern . . . . .  | 25          |
| 3.2 Schlichte bzw. Finish und Interphase . . . . .                              | 26          |
| 3.3 Polymere Matrixsysteme . . . . .  | 27          |
| 3.4 Textile Halbzeuge . . . . .   | 28          |
| 3.5 Ausgewählte Herstellungsverfahren für faserverstärkte Kunststoffe . . . . . | 31          |
| 3.6 Exkurs . . . . .  | 33          |
| <b>4 Lineare anisotrope Elastizität und Materialmodelle</b>                     | <b>35</b>   |
| 4.1 HOOKE'sches Gesetz des isotropen Körpers . . . . .                          | 35          |
| 4.1.1 Materialgesetz . . . . .  | 35          |
| 4.1.2 Kinematische Beziehungen . . . . .  | 38          |
| 4.1.3 Lokale Bewegungsgleichungen . . . . .                                     | 40          |
| 4.2 Materialsymmetrien . . . . .  | 41          |
| 4.2.1 Anisotropie . . . . .   | 41          |
| 4.2.2 Monotropie . . . . .  | 44          |
| 4.2.3 Orthotropie . . . . .   | 44          |
| 4.2.4 Transversalisotropie . . . . .  | 45          |
| 4.2.5 Isotropie . . . . .   | 46          |
| <b>5 Mikromechanische Homogenisierungsansätze</b>                               | <b>51</b>   |
| 5.1 Vereinfachende Voraussetzungen . . . . .                                    | 51          |
| 5.2 Steifigkeiten . . . . .   | 53          |
| 5.2.1 Längssteifigkeit $E_{11}$ . . . . .                                       | 53          |
| 5.2.2 Quersteifigkeit $E_{22}$ . . . . .  | 53          |
| 5.2.3 Längs-Quer-Schubsteifigkeit $G_{12}$ . . . . .                            | 54          |
| 5.2.4 Quer-Quer-Schubsteifigkeit $G_{23}$ . . . . .                             | 56          |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.3      | Querverformungszahlen . . . . .  | 57        |
| 5.3.1    | Senkrecht bei Längsverformung $\nu_{12}$ . . . . .                             | 58        |
| 5.3.2    | Längs bei Querverformung $\nu_{21}$ . . . . .                                  | 58        |
| 5.3.3    | Quer bei Querverformung $\nu_{23}$ . . . . .                                   | 58        |
| 5.4      | Abschließende Bemerkungen . . . . .  | 59        |
| <b>6</b> | <b>Makromechanik der Einzelschicht und Erfassung von Schichtungen</b>          | <b>65</b> |
| 6.1      | Vereinfachungen der ebenen Elastizität . . . . .                               | 65        |
| 6.1.1    | Ebener Spannungszustand . . . . .  | 66        |
| 6.1.2    | Ebener Verzerrungszustand . . . . .  | 67        |
| 6.1.3    | Grenzen der Idealisierung . . . . .  | 68        |
| 6.2      | Koordinatentransformation beim ebenen Spannungszustand . . . . .               | 69        |
| 6.2.1    | Transformation der Spannungen und Verzerrungen . . . . .                       | 70        |
| 6.2.2    | Zusammenhang zwischen den Transformationsbeziehungen . . . . .                 | 71        |
| 6.2.3    | Transformation der Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten . . . . .                | 72        |
| 6.3      | Makromechanik des Laminats als Mehrschichtverbund . . . . .                    | 73        |
| 6.3.1    | Klassische Laminattheorie (CLT) . . . . .                                      | 74        |
| 6.3.2    | Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen der faserverstärkten Einzelschicht . . . . . | 74        |
| 6.3.3    | Spannungs- und Verzerrungsverläufe über die Dicke des Laminats . . . . .       | 75        |
| 6.3.4    | Schnittgrößen des Laminats . . . . .   | 76        |
| 6.3.5    | Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen des Laminats . . . . .                   | 78        |
| 6.3.6    | Definition der Laminatsteifigkeiten zur <i>ABD</i> -Hypermatrix . . . . .      | 79        |
| <b>7</b> | <b>Aspekte der linearen Viskoelastizität</b>                                   | <b>83</b> |
| 7.1      | Definition und Beschreibung von Schwingungen . . . . .                         | 83        |
| 7.2      | Eindimensionale Betrachtung schwingungsfähiger Systeme . . . . .               | 83        |
| 7.2.1    | Eindimensionale Bewegung . . . . .   | 84        |
| 7.2.2    | Harmonischer Oszillator . . . . .  | 85        |
| 7.3      | Eindimensionale mechanische Schwingungen . . . . .                             | 86        |
| 7.3.1    | Ungedämpfte Schwingung . . . . .   | 87        |
| 7.3.2    | Schwache Dämpfung . . . . .  | 88        |
| 7.3.3    | Starke Dämpfung . . . . .  | 89        |
| 7.3.4    | Aperiodischer Grenzfall . . . . .  | 90        |
| 7.4      | Dynamisches Materialgesetz . . . . .   | 90        |
| 7.4.1    | Gedächtnisintegral . . . . .   | 91        |
| 7.5      | Frequenzbereichsdarstellung . . . . .  | 92        |
| 7.6      | Komplexe strukturdynamische Werkstoffkennwerte . . . . .                       | 93        |
| 7.6.1    | KELVIN-VOIGT-Element . . . . .   | 94        |
| 7.6.2    | Physikalische Interpretation . . . . .   | 94        |
| 7.6.3    | Energiedissipation . . . . .   | 95        |
| <b>8</b> | <b>Transversalschwingungen von Balken</b>                                      | <b>97</b> |
| 8.1      | Eigenschaften des Balkens als mechanisches Tragwerk . . . . .                  | 98        |
| 8.2      | Homogener isotroper Balken . . . . .   | 99        |
| 8.2.1    | Gleichgewicht, Verschiebung-Verzerrung, Materialgesetz . . . . .               | 100       |
| 8.2.2    | Schubdeformationstheorie erster Ordnung nach TIMOSHENKO . . . . .              | 103       |
| 8.2.3    | Schubstarre Theorie nach EULER-BERNOULLI . . . . .                             | 106       |
| 8.2.4    | Lösung durch Separationsansatz . . . . .                                       | 109       |
| 8.2.5    | Einseitig fest eingespannter Balken . . . . .                                  | 111       |
| 8.3      | Laminatbalken . . . . .  | 114       |
| 8.4      | Anmerkungen . . . . .  | 118       |

|  |            |
|--|------------|
| <b>9 Analytische und numerische Untersuchungen</b>                           | <b>121</b> |
| 9.1 Mesomechanische Betrachtung von Geweben . . . . .                        | 121        |
| 9.2 Geometrie und Strukturmechanik . . . . .                                 | 122        |
| 9.2.1 Geometrische Verhältnisse . . . . .                                    | 122        |
| 9.2.2 Strukturmechanische Voraussetzungen . . . . .                          | 124        |
| 9.3 Grad der Ondulation . . . . .  | 125        |
| 9.4 Analytisches Modell . . . . .  | 127        |
| 9.4.1 Mathematisches Modell und Voraussetzungen . . . . .                    | 127        |
| 9.4.2 Analytischer Lösungsansatz . . . . .                                   | 129        |
| 9.5 Numerische Untersuchungen mit der FE-Methode . . . . .                   | 132        |
| 9.5.1 Vorbemerkungen . . . . .   | 132        |
| 9.5.2 FE-Modell der ebenen repräsentativen Sequenzen . . . . .               | 134        |
| 9.5.3 Einstellungen der FE-Analyse . . . . .                                 | 137        |
| 9.5.4 Randbedingungen und Verschiebungen . . . . .                           | 138        |
| 9.5.5 Strukturmechanische Werkstoffkennwerte . . . . .                       | 140        |
| <b>10 Experimentelle Untersuchungen</b>                                      | <b>147</b> |
| 10.1 Verwendete Materialien . . . . .  | 148        |
| 10.1.1 Trockene textile Halbzeuge und Matrixsystem . . . . .                 | 149        |
| 10.1.2 Prepregs . . . . .  | 151        |
| 10.2 Herstellung der Prüfplatten . . . . .                                   | 151        |
| 10.2.1 Vorimprägnierung der trockenen textilen Halbzeuge . . . . .           | 151        |
| 10.2.2 Aufbau der Prüfplatten . . . . .                                      | 152        |
| 10.2.3 Verwendete Heißluftautoklavzyklen . . . . .                           | 153        |
| 10.3 Materialcharakterisierung und Präparation der Probekörper . . . . .     | 155        |
| 10.3.1 Experimentelle Bestimmung von Dichte und Faservolumengehalt . . . . . | 155        |
| 10.3.2 Präparation der Probekörper . . . . .                                 | 157        |
| 10.4 Versuchsaufbau . . . . .  | 159        |
| 10.4.1 Laser-Doppler-Vibrometer . . . . .                                    | 159        |
| 10.4.2 Einspann- und Anregevorrichtung . . . . .                             | 162        |
| 10.5 Versuchsdurchführung . . . . .  | 165        |
| 10.5.1 Einspannung und Anregung des Probekörpers . . . . .                   | 165        |
| 10.5.2 Position des Messpunktes . . . . .                                    | 165        |
| 10.5.3 Messtechnische Parameter . . . . .                                    | 166        |
| 10.5.4 Aufzeichnung des Messsignals . . . . .                                | 166        |
| 10.5.5 Konstante Bedingungen . . . . .                                       | 166        |
| <b>11 Ergebnisse der Untersuchungen</b>                                      | <b>171</b> |
| 11.1 Analytische und numerische Untersuchungen . . . . .                     | 171        |
| 11.1.1 Auswertung . . . . .  | 171        |
| 11.1.2 Ergebnisse des analytischen Modells . . . . .                         | 172        |
| 11.1.3 Auswertung der FE-Berechnungen . . . . .                              | 172        |
| 11.1.4 Ergebnisse der FE-Berechnungen . . . . .                              | 176        |
| 11.2 Experimentelle strukturdynamische Untersuchungen . . . . .              | 185        |
| 11.2.1 Auswertung . . . . .  | 185        |
| 11.2.2 Ergebnisse . . . . .  | 187        |
| 11.2.3 Geometrische Verhältnisse und Grad der Ondulation . . . . .           | 194        |
| <b>12 Diskussion der Ergebnisse</b>  | <b>199</b> |
| 12.1 Diskussion der analytischen und numerischen Ergebnisse . . . . .        | 199        |
| 12.2 Diskussion der experimentellen Ergebnisse . . . . .                     | 204        |
| 12.3 Abschließende Bemerkungen . . . . .                                     | 207        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>13 Zusammenfassung und Ausblick</b>  | <b>213</b> |
| 13.1 Zusammenfassung . . . . .  | 213        |
| 13.2 Ausblick . . . . .   | 214        |
| <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>215</b> |
| <b>Anhang</b>   | <b>227</b> |
| A.1 Reproduzierbarkeit, Parameteridentifikation und Sensitivitätsanalyse . . . . .  | 227        |
| A.2 Gewöhnliche, homogene Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung . . . | 233        |
| A.3 Statistische Absicherung der Messwerte . . . . .                                | 235        |

# Formelzeichen und Bezeichnungen

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Formelzeichen und Bezeichnungen werden im Folgenden angeführt.

## Lateinische Buchstaben

|             |   |
|-------------|---|
| $A$         | Amplitude, Dehnsteifigkeit, Fläche, (Integrations-)Konstante  |
| $B$         | Koppelsteifigkeit, (Integrations-)Konstante   |
| $b$         | Breite eines Tragwerks  |
| $C$         | Komponenten der Steifigkeitsmatrix, (Integrations-)Konstante  |
| $c$         | Steifigkeit, Konstante  |
| $D$         | Biegesteifigkeit, LEHR'sches Dämpfungsmaß, (Integrations-)Konstante   |
| $d$         | totales Differential, infinitesimale Einheit, Abklingkoeffizient  |
| $\partial$  | partiell Differential   |
| $E$         | Elastizitätsmodul, Steifigkeit, (Integrations-)Konstante, Welle   |
| $F$         | Normalkraft, (Integrations-)Konstante   |
| $f$         | Frequenz  |
| $G$         | Schubsteifigkeit  |
| $H$         | (Wellen-)Höhe   |
| $g$         | Fallbeschleunigung, Erdbeschleunigung, Ortsfaktor   |
| $h$         | Dicke eines Tragwerks   |
| $I$         | Flächenträgheitsmoment 2. Ordnung, Intensität   |
| $i$         | imaginäre Einheit   |
| $k$         | Bettung, Federsteifigkeit   |
| $L$         | Länge einer Ondulation, LAGRANGE'sche Funktion, Wellenlänge   |
| $l$         | Auskraglänge  |
| $M$         | Momentenschnittgröße bei Linientragwerken   |
| $\tilde{M}$ | Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik als Steigung   |
| $m$         | Momentenschnittgröße bei Flächentragwerken  |
| $N$         | Anzahl der Einzellagen im Laminat, Kraftschnittgröße der Normalkraft bei Linientragwerken   |
| $n$         | Schnittgröße der Normalkraft bei Flächentragwerken, Anzahl repräsentativer Sequenzen  |
| $\tilde{O}$ | Grad der Ondulation   |
| $p$         | eingeprägte Belastung in Längsrichtung bei Linientragwerken   |
| $Q$         | Kraftschnittgröße der Querkraft bei Linientragwerken, Reduzierte Steifigkeiten  |
| $q$         | eingeprägte Last in Querrichtung bei Linientragwerken, Kraftschnittgröße der Querkraft bei Flächentragwerken, Komponenten der zweidimensionalen Nachgiebigkeitsmatrix |
| $R$         | Radius  |
| $r$         | Abstand   |

|           |   |
|-----------|---|
| $S$       | Komponenten der dreidimensionalen Nachgiebigkeitsmatrix |
| $s$       | Bogenlänge  |
| $T$       | Periodendauer, Tangentialkraft, Kinetische Energie      |
| $t$       | Zeit  |
| $U$       | potentielle Energie, Formänderungsenergie               |
| $u, v, w$ | Verschiebungen im globalen Koordinatensystem            |
| $V$       | Volumen   |
| $W$       | Arbeit, WRONSKI-Determinante                            |
| $x$       | unabhängige Variable (Abszisse)                         |
| $y$       | abhängige Variable (Ordinate)                           |
| $x, y, z$ | globales Koordinatensystem                              |

### Griechische Buchstaben

|               |  |
|---------------|--|
| $\alpha$      | Drehwinkel, Faserorientierungswinkel, Orientierung der Vorzugsrichtung, Phasenwinkel |
| $\beta$       | Konstante  |
| $\gamma$      | Gleitung   |
| $\Delta$      | Differenz  |
| $\delta$      | Variation, Phasenwinkel  |
| $\varepsilon$ | Verzerrung   |
| $\kappa$      | Krümmung   |
| $\Lambda$     | logarithmisches Dekrement  |
| $\lambda$     | Eigenwert, Wellenlänge, spezifischer Faktor Gewebekonstruktion                       |
| $\mu$         | Substitutionsgröße   |
| $\nu$         | Querverformungszahl  |
| $\xi$         | (Hilfs-)Variable   |
| $\pi$         | Kreiszahl  |
| $\rho$        | Dichte   |
| $\sigma$      | Normalspannung   |
| $\tau$        | Schubspannung, (Hilfs-)Variable  |
| $\varphi$     | Faservolumengehalt, Frequenzverschiebung   |
| $\psi$        | Drehwinkel eines Querschnitts  |
| $\omega$      | Eigenkreisfrequenz   |

### Subskripts (Indizes), Superskripts

|            |                               |
|------------|-------------------------------|
| $\dot{()}$ | Ableitung nach der Zeit $t$   |
| $()'$      | Ableitung nach dem Ort $x$    |
| $()^*$     | komplexe Größe                |
| 0          | Grundgröße                    |
| a          | analytisch                    |
| B          | BRAGG                         |
| b          | beidseitig elastisch gebettet |
| c          | Composite, Verbundmaterial    |
| d          | gedämpfte Größe               |
| D          | DOPPLER                       |
| e          | einseitig elastisch gebettet  |
| E          | Einzellage                    |

|              |  |
|--------------|--|
| el           | elastisch  |
| ERS          | ebene repräsentative Sequenz   |
| f            | Faser, Verstärkungsfaser   |
| G            | Gewebe   |
| $i, j, k, l$ | Indizes  |
| ip           | Anordnung „in-phase“   |
| K            | Kette, Kettstrang  |
| $k$          | Zähler der Einzellagen im Laminat, Zähler der Ordnung der Schwingung |
| K2           | Köper(-gewebe) 2/2   |
| kin          | kinematisch  |
| l            | längs  |
| L            | Laminat, Laser   |
| LW           | Leinwand(-gewebe)  |
| m            | Matrix   |
| max          | maximal  |
| min          | minimal  |
| $m, n$       | Indizes  |
| n            | numerisch  |
| $n$          | Zähler   |
| O            | Ondulation   |
| op           | Anordnung „out-of-phase“   |
| PK           | Probekörper  |
| q            | quer   |
| R            | Roving(-strang)  |
| rel          | relativ  |
| S            | Schuss(-strang)  |
| t            | trocken  |
| tot          | total  |
| UD           | unidirektional   |

### Abkürzungen und weitere Bezeichnungen

|      |   |
|------|---|
| 2D   | zweidimensional   |
| 3D   | dreidimensional   |
| APDL | Ansys Parametric Design Language                                      |
| CFK  | kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe                                |
| CFRP | Carbon Fiber Reinforced Plastics                                      |
| CLT  | Classical Laminate Theory (Klassische Laminattheorie)                 |
| ERS  | ebene repräsentative Sequenz  |
| ES   | Einzelschicht   |
| FE   | Finite-Elemente   |
| FEM  | Finite-Elemente-Methode   |
| FVK  | faserverstärkte Kunststoffe   |
| KS   | Koordinatensystem   |
| MSV  | Mehrschichtverbund  |
| RVE  | repräsentatives Volumenelement (engl.: Representative Volume Element) |





# 1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit charakterisiert gewebeverstärkte Einzellagen aus kohlenstoffaserverstärktem Kunststoff mit Hilfe einer mesomechanischen Kinematik sowie strukturdynamischen Versuchen. Dafür wird zu Beginn der technische Hintergrund sowie die daraus resultierende Motivation zur Durchführung der Untersuchungen dargestellt. Zur Beschreibung der Kinematik werden im mesomechanischen Maßstab analytische und numerische Untersuchungen mit repräsentativen Sequenzen durchgeführt. Im makromechanischen Maßstab werden die Auswirkungen von Omdulationen in gewebeverstärkten Einzellagen auf die strukturdynamische Werkstoffdämpfung von flachen stabförmigen Probekörpern experimentell untersucht.

## 1.1 Technischer Hintergrund und Motivation

Die Anwendung von faserverstärkten Kunststoffen für Strukturbauteile in vielen Anwendungsbe-  
reichen steigt stetig. Dabei weisen diese Materialien meist hohe dichtetpezifische Steifigkeiten und  
Festigkeiten auf. Diese Eigenschaft stellt dabei direkt das dem Material spezifische Leichtbaupoten-  
tial dar. Zusätzlich weisen faserverstärkte Kunststoffe weitere charakteristische Eigenschaften,  
wie z. B. Anisotropie, Temperaturverformung, chemische und/oder elektrische Beständigkeit  
sowie teilweise sehr freie Gestaltungsmöglichkeit durch Integralbauweise etc., auf. Neben Anwen-  
dungen in der Luft- und Raumfahrt werden faserverstärkte Kunststoffe aktuell zunehmend als  
innovativer und funktioneller Werkstoff in der Automobilbau eingesetzt. Die wesentlichen Motive  
sind die Reduktion des Fahrzeuggewichts und bewegter Massen, die Reduktion des Kraftstoff-  
verbrauchs und damit direkt die Erhöhung der Energieeffizienz.

Das Material ist üblicherweise lagenweise aufgebaut. Die Einzelschichten können auf unterschiedli-  
chen textilen Halbzeugen basieren. In der Praxis sind besonders unidirektional- und gewebe-  
verstärkte Einzelschichten relevant. Vereinfachte analytische Ansätze zur makroskopischen Be-  
schreibung des strukturmechanischen Verhaltens von faserverstärkten Kunststoffen setzen dabei  
meist einen Lagenaufbau voraus, der lediglich aus unidirektional verstärkten Einzellagen be-  
steht. Strukturmechanische Werkstoffkennwerte von unidirektional verstärkten Einzellagen wer-  
den analytisch in erster Näherung über mikromechanische Mischungsregeln (sog. Homogenisie-  
rungsansätze) bestimmt. Diese basieren meist auf den Eigenschaften der Einzelkomponenten des  
Materials, Verstärkungsfaser und Matrixwerkstoff. Häufig werden jedoch unterschiedliche Arten  
von Geweben als Faserverstärkung in Lagenaufbauten von Strukturbauteilen verwendet. In die-  
sem Fall treffen die teilweise stark vereinfachenden Voraussetzungen zur Formulierung einfacher  
Homogenisierungsansätze nicht mehr zu, sodass deren Modellgrenzen überschritten werden und  
das Modell unter den gegebenen Voraussetzungen keine Gültigkeit mehr besitzt. Ein wesentli-  
cher Grund dafür ist, dass die mesomechanische Geometrie in gewebeverstärkten Einzellagen  
nicht ausreichend durch verhältnismäßig einfache Modellvorstellungen für Homogenisierungsan-  
sätze beschrieben werden kann. Die Berücksichtigung mesomechanischer Zusammenhänge sind  
dabei zwingend erforderlich, da sie die mechanischen Eigenschaften einer Struktur signifikant  
beeinflussen.

In der vorliegenden Arbeit wird das Wirken einer mesomechanischen Kinematik in gewebever-  
stärkten Einzellagen untersucht, die aufgrund rein geometrischer Zusammenhänge induziert wird.  
Unter der Voraussetzung, dass das wiederholte Wirken der Kinematik Energie dissipiert, trägt sie

bei zyklischer viskoelastischer Deformation zusätzlich zur reinen viskoelastischen Werkstoffdämpfung in gewebeverstärkten Einzellagen bei. Die reine Kinematik wird unter stark vereinfachenden Voraussetzungen analytisch betrachtet, und mit ebenen repräsentativen Sequenzen numerisch mit der Finite-Elemente-Methode (FE-Methode oder FEM) untersucht. Die Validierung des mechanischen Wirkprinzips und die zugehörige Parameteridentifikation wird mit experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen von flachen stabförmigen Probekörpern durchgeführt.

## 1.2 Ausgangssituation

Faserverstärkte Kunststoffe (FVK) bestehen in der Regel aus den Einzelkomponenten Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff. Die steifen Verstärkungsfasern sind dabei in einer Kunststoffmatrix gebettet. FVK sind damit mikromechanisch heterogene Materialien. Die großen Steifigkeitsunterschiede zwischen Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff im mikromechanischen Maßstab sowie der lagenweise Aufbau im makromechanischen Maßstab bestimmen das strukturmechanische Verhalten des Materials. Ein Verbundmaterial mit kontinuierlicher Faserverstärkung weist dabei hohe dichtespezifische mechanische Werkstoffkennwerte bezüglich der Steifigkeiten und Festigkeiten in Faserlängsrichtung auf. Auf dieser Eigenschaft basiert das Leichtbaupotential dieser Materialien. Ziel bei der Herstellung ist dabei, eine möglichst hohe Faser-Matrix-Haftung sowie eine optimale Haftung der Einzelschichten zueinander zu erreichen. Unter diesen Voraussetzungen erhält der Verbundwerkstoff insgesamt höherwertige mechanische Eigenschaften als jeder der beiden Einzelkomponenten allein. Aufgrund guter dichtespezifischer strukturmechanischer Materialkennwerte sind faserverstärkte Kunststoffe Leichtbauwerkstoffe. Die Orientierung der Vorzugsrichtung einer jeweiligen Einzellage sowie die Anordnung der Einzellagen im Lagenaufbau bestimmen die mechanischen Eigenschaften des Verbundes. Charakteristische Lagenaufbauten bedingen entsprechende Belastungs-Verformungs-Reaktionen, die dabei gezielt beeinflusst werden können. FVK werden jedoch auch wegen der bereits zuvor genannten charakteristischen Eigenschaften (Anisotropie, temperaturinduziertes Verformungsverhalten, chemische und/oder elektrische Beständigkeit etc.) eingesetzt.

Die Einzelschichten können mit unterschiedlichen textilen Halbzeugen verstärkt sein. In der Praxis sind dabei besonders unidirektional- und gewebeverstärkte Einzelschichten relevant. Unter vereinfachenden Voraussetzungen sind unidirektional verstärkte Einzelschichten analytisch verhältnismäßig einfach erfassbar. Im Gegensatz dazu sind gewebeverstärkte Einzelschichten aufgrund der bidirektionalen Verstärkung und die sich regelmäßig wiederholenden Ondulationen in Dickenrichtung nicht einfach analytisch erfassbar. Die Ondulationen in gewebeverstärkten Einzellagen verursachen, im Gegensatz zu unidirektional verstärkten Einzellagen, eine sich regelmäßig und kontinuierlich ändernde Vorzugsrichtung in Dickenrichtung und dadurch eine stetige Änderung des Kraftflusses in den ondulierten Rovingsträngen der jeweiligen Einzellage.

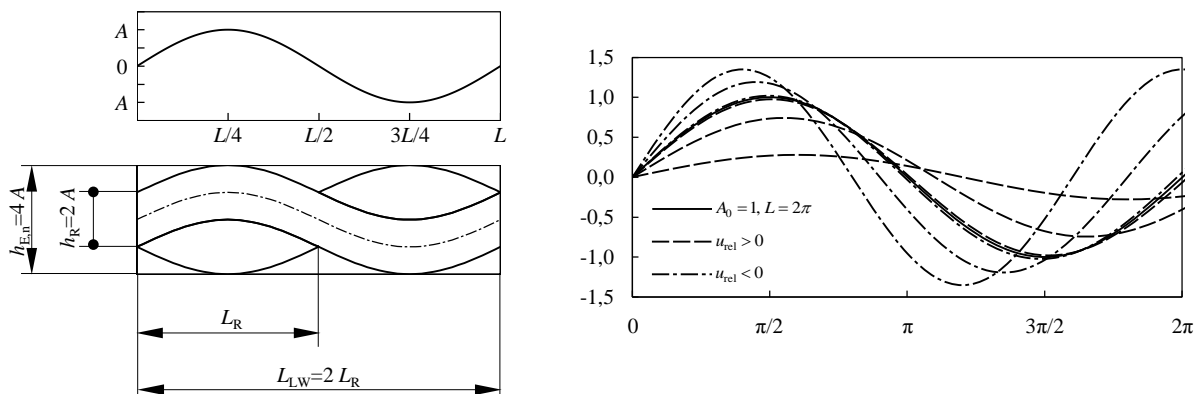
## 1.3 Mesomechanisches Wirkprinzip

Das Ziel der durchgeführten analytischen, numerischen und experimentellen Untersuchungen ist die Identifikation einer mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge, die durch sich regelmäßig wiederholende und stetige Ondulationen in gewebeverstärkten Einzellagen verursacht werden. Dabei werden sowohl die vereinfachenden Voraussetzungen als auch das mechanische Wirkprinzip beschrieben.

In gewebeverstärkten Einzellagen, die unter vereinfachenden Voraussetzungen auf einem sinusförmigen Verlauf basieren, wie in Abbildung 1.1 links oben dargestellt, existieren im mesomechanischen Maßstab in einer ebenen repräsentativen Sequenz drei strukturmechanisch unterschiedliche

Bereiche, wie in Abbildung 1.1 links unten dargestellt. Bezüglich der jeweiligen Steifigkeiten im lokalen Koordinatensystem (1-2-3-Koordinatensystem) als charakteristische strukturmechanische Werkstoffkennwerte sind dies im Einzelnen

- der Kettstrang mit der Vorzugsrichtung der Verstärkungsfasern entlang dem sinusförmigen Verlauf, und damit  $E_1$  parallel der vereinfachend sinusförmig vorausgesetzten Kontur und  $E_2$  senkrecht dazu,
- die beiden Schussstränge mit der Vorzugsrichtung der Verstärkungsfasern senkrecht zum Querschnitt, und damit  $E_2 = E_3$  im untersuchten ebenen Modell und
- die Bereiche mit reiner Matrix ohne jeglicher Faserverstärkung mit  $E_m$ .



**Abbildung 1.1:** Ebene repräsentative Sequenz für das analytische Modell (links oben) und für die numerischen FE-Berechnungen (links unten) sowie idealisierte mesomechanische Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge (rechts).

Die Werte der einzelnen lokalen Steifigkeiten der unterschiedlichen Bereiche unterscheiden sich dabei erheblich voneinander. Die Steifigkeit  $E_1$  in Faserlängsrichtung der unidirektional verstärkten Einzelstränge ist deutlich größer als die Steifigkeiten  $E_2 = E_3$  senkrecht zur Richtung der Verstärkungsfasern und der Steifigkeit  $E_m$  der Bereiche mit reinem Matrixwerkstoff. Die mathematische Formulierung der Verhältnisse lautet

$$E_1 \gg E_2 > E_m . \quad (1.1)$$

Für eine unidirektional verstärkte Einzellege aus sog. high tenacity-Kohlenstofffasern (HT-Kohlenstofffasern) in duroplastischem Matrixsystem mit einem vorausgesetzten Faservolumengehalt von  $\varphi_f = 65\%$  (vereinfachende Voraussetzung des Wertes in Abschnitt 9.5.5 und Begründung der Annahme des Wertes in Abschnitt 12.3) liefert die Anwendung gebräuchlicher Homogenisierungsansätze  $E_1 = 150,7 \text{ GPa} \gg E_2 = 11,4 \text{ GPa} > E_{\text{matrix}} = 3,3 \text{ GPa}$  als numerische Werte der Steifigkeiten der unterschiedlichen Bereiche. Unter den zuvor beschriebenen strukturmechanischen Steifigkeitsverhältnissen kann eine mesomechanische Kinematik in gewebeverstärkten Einzellegen auf rein geometrische Zusammenhänge zurückgeführt werden. Dabei werden unterschiedliche Effekte im Modell identifiziert, wenn positiv oder negativ definierte Deformationen in Längsrichtung betrachtet werden. In beiden Fällen erfährt der unidirektional verstärkte, ondulierte Kettstrang eine rein elastische Deformation. Aufgrund der mesomechanischen Geometrie des ondulierten Strangs induzieren positiv definierte Längsdeformationen zusätzlich gleichzeitig eine Glättung bzw. Abflachung. Negativ definierte Längsdeformationen verursachen zusätzlich gleichzeitig ein Aufstauchen. Abbildung 1.1 rechts stellt, die idealisierte Annahme sich nicht längerer sondern lediglich geometrisch verformender sinusförmiger Gewebendulationen mit  $A = 1$  und  $L = 2\pi$  graphisch dar. In beiden Fällen ist die Zunahme und die Abnahme der Amplitude der Ondulation die Superposition von Effekten aus der Querverformung als rein elastische Reaktion und der reinen kinematischen Reaktion aufgrund geometrischer Zusammenhänge im

mesomechanischen Maßstab. Die zusätzlich induzierte mesomechanische Querverformung von Gewebeondulationen bei wirkenden Längsdeformationen entsprechen dabei einer, zusätzlich zur Querverformung des Materials, wirkenden Kopplung von Längs- und Querverformung. Im Gegensatz dazu verursachen positiv bzw. negativ definierte Längsdeformationen bei einer unidirektional verstärkten Einzellage in Richtung der Verstärkungsfasern eine Dehnung bzw. Stauchung in Längsrichtung und eine Querverformung, die lediglich über die Querverformungszahl gekoppelt ist.

Es wird angenommen, dass das wiederholte Wirken der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge bei dynamischer Beanspruchung Energie dissipiert, und bei zyklischer Deformation zusätzlich zur reinen viskoelastischen Werkstoffdämpfung in gewebeverstärkten Einzellagen beiträgt. Zur Validierung des mesomechanischen Wirkprinzips werden abklingende Transversalschwingungen von einseitig fest eingespannten flachen stabförmigen Probekörpern mit unidirektional und gewebeverstärkten (Leinwand- und Köpergewebe 2/2) Probekörpern untersucht. Die Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen dienen schließlich der Validierung des analytischen Modells und der numerischen Berechnungen.

## 1.4 Zielsetzung und Vorgehen

Die Arbeit behandelt im Wesentlichen zwei Schwerpunkte:

1. Im mesomechanischen Maßstab werden analytisch und numerisch mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) kinematische Zusammenhänge in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund geometrischer Parameter untersucht. Dafür werden ebene repräsentative Sequenzen von gewebeverstärkten Einzellagen, wie in Abbildung 1.2 unten dargestellt, betrachtet. Die strukturellen Voraussetzungen in mikromechanischem Maßstab für die unterschiedlichen mesomechanischen Bereiche sind in Abbildung 1.2 oben rechts dargestellt. Die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen dienen der Parameteridentifikation und der Verifizierung des analytischen Modells.
2. Im makroskopischen Maßstab wird experimentell der Einfluss der Art der Faserverstärkung in den Einzellagen der flachen stabförmigen Probekörper (unidirektional verstärkt und gewebeverstärkt) auf die Strukturmechanik, und dabei v. a. auf das Dämpfungsverhalten, untersucht, wie in Abbildung 1.2 oben links dargestellt. Der Vergleich von Probekörpern die entweder aus unidirektional verstärkten oder aus gewebeverstärkte Einzelschichten aufgebaut sind, liefert eine Korrelation zur numerisch identifizierten mesomechanischen Kinematik, und ermöglicht deren Validierung.

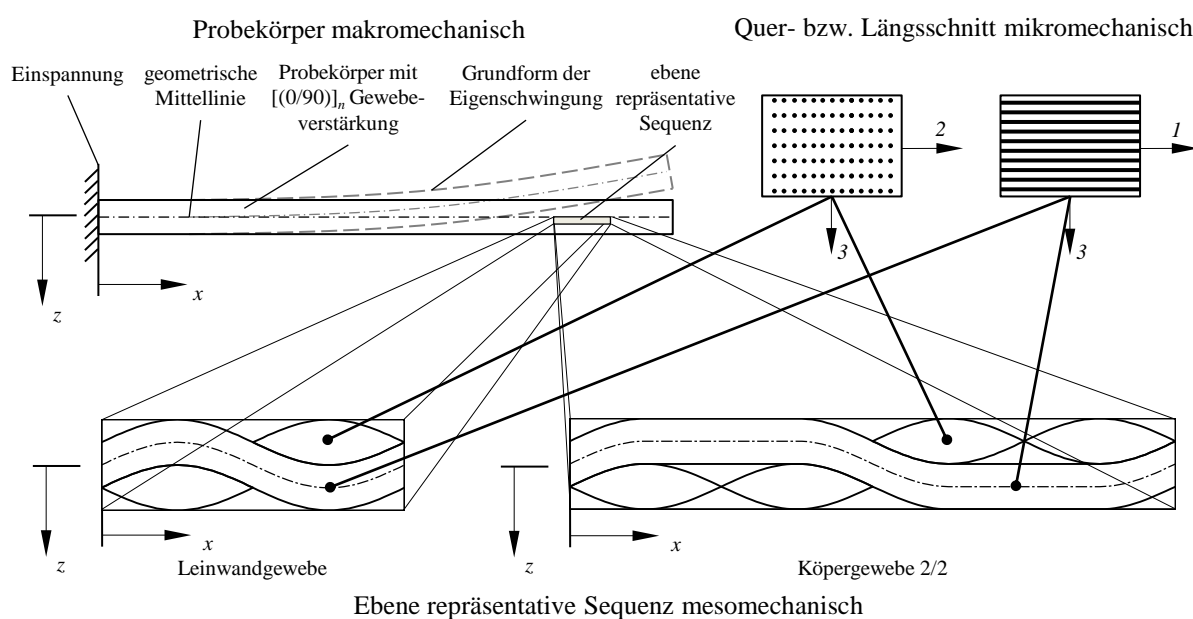
Abbildung 1.2 stellt die unterschiedlichen relevanten mechanischen Betrachtungsebenen bezüglich des beschriebenen Vorgehens schematisch dar.

### Analytische und numerische Untersuchungen

Die analytischen und numerischen Untersuchungen beschränken sich auf die Betrachtung des ebenen, zweidimensionalen Zusammenhangs in Dickenrichtung. Dabei wird vereinfachend vorausgesetzt, dass die Ondulation einer mathematisch verhältnismäßig einfach zu behandelnden Sinus-Funktion folgt. Im Detail werden im analytischen Modell und in den FE-Berechnungen die geometrischen Parameter der Amplitude  $A$  und der Länge der Ondulation  $L$  bzw. der Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$  in definierten Schritten variiert. Zur parametrischen Betrachtung wird der Grad der Ondulation in gewebeverstärkten Einzellagen  $\tilde{O} = \frac{A}{L}$  als dimensionslose Kennzahl eingeführt. Der eingeführte Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  erlaubt schließlich den direkten Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen. Trotz der Vernachlässigung von Querverformungseffekten in die Dimension der Breite erlauben die getroffenen Voraussetzungen eine Beschreibung des mechanischen Wirkprinzips in guter Näherung.

Im analytischen Modell wird ein ondulierter Rovingstrang geometrisch über den Verlauf seiner Mittellinie approximiert. Der sinusförmig vorausgesetzte Verlauf der Gewebeondulation stellt zunächst die mesomechanische Geometrie eines Leinwandgewebes dar. Zunächst erlauben die Voraussetzungen idealer Steifigkeitsverhältnisse (ideal Steifigkeit in Längsrichtung und vernachlässigbare Steifigkeit quer dazu) bei positiv bzw. negativ aufgebrachten Deformationen in Längsrichtung, die parametrische Identifikation einer stark vereinfachten mesomechanischen Kinematik. Im Detail vernachlässigen die stark vereinfachenden Voraussetzungen zunächst die (visko-)elastischen Parameter.

Die numerischen Untersuchungen mit der Finite-Elemente-Methode ermöglichen die Berücksichtigung der Elastizität des Materials. Dabei werden ebene repräsentative Sequenzen, die auf den analytischen Geometrien basieren, betrachtet. Im Detail werden Kohlenstofffasergewebe als Leinwandgewebe und Köpergewebe 2/2 mit Epoxidharzmatrix modelliert. Dabei werden zwei grundsätzlich unterschiedliche Randbedingungen für zwei unterschiedliche Positionen der Einzellagen im Lagenaufbau (Randlage bzw. im Inneren eines Laminats) berücksichtigt, und die geometrischen Parameter der FE-Modelle, in den gleichen Bereichen, wie im analytischen Modell, definiert variiert. Die Berücksichtigung (visko-)elastischer Anteile der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge in den durchgeführten FE-Berechnungen erlaubt eine Parameteridentifikation und Verifikation des analytischen Modells.



**Abbildung 1.2:** Unterschiedliche relevante mechanische Betrachtungsebenen: Grundform der Eigenschwingung eines einseitig fest eingespannten flachen stabförmigen Probekörpers (entspricht strukturmechanisch frei abklingenden Transversalschwingungen eines Kragbalkens als eindimensionales Tragwerk) im makromechanischen Maßstab (oben links). Repräsentative Sequenzen gewebeverstärkter Einzellagen, basierend auf sinusförmigem Verlauf der Gewebeondulation (hier: Leinwandgewebe und Köpergewebe 2/2) im mesomechanischen Maßstab (unten). Strukturmechanische Einzelkomponenten Verstärkungsfasern und polymerer Matrixwerkstoff (ohne Interphase) in ideal parallel vorausgesetzter Anordnung einer unidirektional verstärkten Einzelschicht (Längs- und Querschnitt) im mikromechanischen Maßstab (oben rechts).

### Experimentelle Untersuchungen

Zur Validierung der dämpfungserhöhenden Wirkung der in den analytischen und numerischen Untersuchung identifizierten mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen werden in den experimentellen strukturmechanischen Untersuchungen abklingende Transversal-

schwingungen von einseitig fest eingespannten Probekörpern untersucht. Die flachen stabförmigen Probekörper bestehen aus kohlenstofffaserverstärktem Epoxidharz, die aus Prüfplatten mit ausgewählten Lagenaufbauten und jeweils gleichbleibendem Matrixsystem ausgeschnitten und präpariert worden sind. Die Herstellung der Prüfplatten ist im Heißluftautoklavverfahren erfolgt. Die verschiedenen Lagenaufbauten unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Verwendung von  $0^\circ$ -unidirektionalen und gewebeverstärkten Einzellagen. Im Detail stehen drei untereinander vergleichbare Sätze von Probekörpern zur Verfügung. Die flachen stabförmigen Probekörper sind dabei entweder  $0^\circ$ -unidirektional verstärkt oder  $0^\circ$ -gewebeverstärkt (Leinwand- und Köpergewebe 2/2, jeweils in Kettrichtung). Im Biegeschwingversuch werden die, nach definierter reproduzierbarer Weganregung, frei abklingenden Transversalschwingungen der einseitig fest eingespannten Probekörper berührungslos mit einem Laser-Doppler-Vibrometer vermessen. Die Randbedingungen und die geometrischen Abmessungen erlauben die strukturmechanische Betrachtung des Probekörpers als Kragbalken. Während des freien Ausschwingvorganges erfahren die repräsentativen Sequenzen der Struktur vollständige Zyklen der Kinematik (neutral-Dehnung-neutral-Stauchung-neutral) in der Anzahl der Grundfrequenz. Die Probekörper werden mit ausgewählten Auskraglängen  $l$  vermessen, sodass entweder gleiche geometrische Bedingungen, d. h. gleiche Auskraglängen  $l = l_{UD} = l_G$ , oder gleiche dynamische Bedingungen, d. h. gleiche Grundfrequenzen  $f = f_{UD} = f_G$ , ausgewertet und verglichen werden können. Die Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen dienen schließlich der Validierung des analytischen Modells und der numerischen Berechnungen.

## 2 Strukturdynamische Werkstoffdämpfung in faserverstärkten Kunststoffen

Der für die vorliegende Arbeit relevante Stand der Wissenschaft und Technik zu Dämpfungsmechanismen in faserverstärkten Kunststoffen wird dargestellt. Aufgrund der mikromechanischen Heterogenität und der jeweiligen Materialsymmetrie von faserverstärkten Kunststoffen (vgl. Anisotropie, Monotropie, Orthotropie, Transversalisotropie, wie in Kapitel 4 Abschnitt 4.2 dargestellt) unterscheiden sich die wirkenden Mechanismen dabei grundlegend von denen in homogenen isotropen Werkstoffen, wie beispielsweise Metallen.

### 2.1 Ausgewählte Aspekte

Es werden ausgewählte Arbeiten vorgestellt, die, für die vorliegende Arbeit relevante, Aspekte zur Werkstoffdämpfung in faserverstärkten Kunststoffen enthalten. Dabei werden v. a. Arbeiten berücksichtigt, die den Einfluss charakteristischer mesomechanischer Geometrien in gewebeverstärkten Einzellagen auf das strukturdynamische Materialverhalten behandeln. Für die vorliegende Arbeit sind dabei sowohl Beiträge, in denen die strukturmechanische Werkstoffdämpfung in faserverstärkten Kunststoffen analytisch und/oder numerisch behandelt werden, als auch Arbeiten, in denen die Bestimmung mit experimentellen Methoden u. a. zur Validierung im Vordergrund stehen, relevant.

#### 2.1.1 Unterschiedliche mechanische Wirkprinzipien

Vorangegangene Untersuchungen und daraus abgeleitete mechanische Modelle zum strukturdynamischen Dämpfungsverhalten von faserverstärkten Kunststoffen sind u. a. von KEHL 1978 [75], KLUG 1977 [77], HANSELKA 1992 [59], HOFFMANN 1992 [63] und MOSER 1992 [92] publiziert worden. Die theoretischen Ansätze zur Beschreibung des Dämpfungsverhaltens basieren dabei meist auf der Einführung von Homogenisierungsansätzen, die auf den Eigenschaften der Einzelkomponenten Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff beruhen. Jedoch wird in einigen der, im Vorherigen genannten, Arbeiten bereits der Einfluss der Verstärkungsfasern aufgrund ihrer, im Vergleich zum polymeren Matrixwerkstoff, vielfach höheren Steifigkeit und geringeren viskoelastischen Eigenschaften vernachlässigt. Darüber hinaus setzen die unterschiedlichen Ansätze meist ideale mikromechanische und mesomechanische Geometrie des Laminats voraus und vernachlässigen Imperfektionen. Diese beiden stark vereinfachenden Annahmen können als die Gründe betrachtet werden, warum experimentell ermittelte Dämpfungskennwerte von Strukturen oder Probekörpern aus faserverstärkten Kunststoffen meist immer geringfügig höher sind, als die theoretisch berechneten Werte.

Im Review von CHANDRA, SINGH und GUPTA 1999 [26] wird u. a. eine detaillierte Gliederung und ausführliche Beschreibung der unterschiedlichen Wirkprinzipien der strukturdynamischen Werkstoffdämpfung in faserverstärkten Kunststoffen gegeben. Dabei werden fünf Dämpfungsmechanismen identifiziert und genauer ausgeführt. Diese sind im Einzelnen:

1. Viskoelastisches Verhalten des Matrixwerkstoffes und/oder der Verstärkungsfasern,  
Den größten Beitrag zur Materialdämpfung wird dem Matrixwerkstoff zugeschrieben. Die Dämpfung der Verstärkungsfasern leistet einen weiteren Beitrag zur Dämpfung.
2. Dämpfung durch die Interphase,  
Die chemisch zur Faser und Matrix unterschiedliche Grenzschicht zwischen Verstärkungsfaser und Matrix, bestehend aus einem Schlichte-Matrix-Gemisch, wird als Interphase bezeichnet. Die Schlichte wird als Schutzschicht und Haftvermittler auf die Verstärkungsfasern aufgebracht. Abhängig von der auf die Verstärkungsfasern aufgetragenen Menge der Schlichte, nimmt die Interphase im Verbundmaterial einen z. T. nicht mehr zu vernachlässigenden Volumenanteil ein. Da sich die mechanischen Werkstoffeigenschaften der Interphase von denen der Verstärkungsfasern und des Matrixwerkstoffes wesentlich unterscheiden, ist ihr Einfluss auf das Dämpfungsverhalten teilweise nicht mehr vernachlässigbar.
3. Dämpfung aufgrund von Schädigungen,  
In Regionen mit unzureichender Haftung zwischen Verstärkungsfaser und Matrixwerkstoff, oder in Bereichen mit Delaminationen treten Dämpfungseffekte aufgrund von Relativbewegungen und damit verbundenen Reibeffekten auf. Bereiche mit Rissen im Matrixwerkstoff oder gebrochenen Verstärkungsfasern tragen zusätzlich zur Materialdämpfung bei.
4. Viskoplastische Dämpfung und  
Große Schwingungsamplituden und damit verbundene hohe Verzerrungskonzentrationen verursachen hohe Spannungsniveaus, die wiederum eine Erhöhung der Werkstoffdämpfung verursachen. Diese Effekte sind dabei z. T. zusätzlich nichtlinear. Viskoplastische Dämpfung ist damit bereits evtl. im linear elastisch vorausgesetzten Bereich des Materials nichtmehr vernachlässigbar.
5. Thermoelastische Dämpfung.  
Der Dämpfungsmechanismus basiert auf dem wechselnden Wärmestrom von den Druckspannungsbereichen zu den Zugspannungsbereichen. Dieser Dämpfungsmechanismus trägt vor allem bei thermoplastischen Matrixsystemen zur Materialdämpfung bei.

Die genannten Dämpfungsmechanismen wirken dabei zeitgleich, und sind miteinander gekoppelt. Ein inhaltlich wesentlicher Teil der Arbeit behandelt insbesondere Dämpfung aufgrund von Schädigungen und das entsprechende Potential als Indikator für den Materialzustand von Strukturen.

In KUMAR, CHANDRA und GUPTA 2007 [80] wird der Einfluss der Interphase als Haftvermittler zwischen Verstärkungsfasern und polymerem Matrixwerkstoff auf die Dämpfung in faserverstärkten Kunststoffen behandelt. Die durchgeführten FE-Berechnungen mit einem sog. Dreiphasenmodell, das mikromechanisch Verstärkungsfaser, Interphase und Matrixwerkstoff modelliert, zeigen den Einfluss der parametrisch variierten Werkstoffeigenschaften der Interphase auf die Dämpfungseigenschaften. Dabei wird ein signifikanter Einfluss der Beschaffenheit der Interphase auf die Dämpfungseigenschaften des Materials identifiziert. Zusätzlich werden unterschiedliche mikromechanische Packungsarten der Verstärkungsfasern im Querschnitt untersucht, die das Dämpfungsverhalten ebenfalls beeinflussen.

KLUG 1977 [77] führt analytische, numerische sowie experimentelle Untersuchungen zum Dämpfungsverhalten von glasfaserverstärkten Kunststoffen durch. Dabei werden v. a. die Parameter Faser, Matrix, Faserorientierung, Laminataufbau und Faservolumengehalt detailliert betrachtet. Dafür werden folgende vereinfachende Voraussetzungen getroffen:

- linear viskoelastisches Verhalten des Matrixwerkstoffes und der Verstärkungsfasern,
- keine Frequenzabhängigkeit der Dämpfung,
- keine Spannungsabhängigkeit der Dämpfung durch Verwendung des viskosen Dämpfungsgesetzes,



- Messwerte bei geringen Spannungen sind als Werkstoffkennwerte zu betrachten und bedürfen keiner Korrektur,
- Verbund mit idealer Faser-Matrix-Haftung ohne Vorschädigung.

Damit werden bei geringen Spannungsniveaus und neuwertigen, also vor der Messung unbeanspruchten, Probekörpern sehr gute Übereinstimmung zwischen theoretisch berechneten Dämpfungswerten und Messergebnissen erzielt. Bei geringen Amplituden und damit niedrigen Spannungsniveaus entsprechen sich Hysteresisdämpfung und viskose Dämpfung. Es werden flache stabförmige Probekörper und gewickelte Rohre untersucht. In beiden Fällen erhöhen eingebrachte Mikrorisse die im Biegeschwingversuch ermittelte Werkstoffdämpfung. Mit dem Dämpfungsanstieg geht eine Abnahme des Elastizitätsmoduls einher. Dabei ist der Anstieg der Dämpfung stets höher als die Abnahme der Steifigkeit. Da v. a. der harmonisch schwingende Balken im Biegeschwingversuch mit flachen stabförmigen Probekörpern in großen Bereichen lineares Dämpfungsverhalten aufweist, eignet er sich zur experimentellen Bestimmung der Werkstoffdämpfung und zur Validierung von Ergebnissen analytischer und/oder numerischer Untersuchungen.

TAUCHERT 1974 [157] zeigt die Möglichkeit der Extrapolation der Werkstoffdämpfung von faserverstärkten Kunststoffen über sehr große Frequenzbereiche auf. Zur Untersuchung hoher Frequenzbereiche werden unidirektional verstärkte Probekörper mit Ultraschall parallel und senkrecht zur Orientierung der Verstärkungsfasern angeregt. Als Datenbasis dienen Ergebnisse aus vorhergegangenen Untersuchungen mit flachen stabförmigen Probekörpern aus unidirektional glasfaserverstärktem Kunststoff, mit denen per Shaker angeregte Schwingungen für niedrige und mittlere Frequenzen untersucht worden sind. Es wird gezeigt, dass eine Extrapolation der Werkstoffdämpfung über einen sehr großen Frequenzbereich möglich ist.

Vor dem Hintergrund der Anforderungen aus Automobil- und Luftfahrtanwendungen wird in SUN, RAO und SANKAR 1992 [152] die Optimierung von Dämpfungseigenschaften von faserverstärkten Kunststoffen behandelt. Dafür werden FE-Berechnungen und experimentelle Untersuchungen zur Ermittlung der passiven Dämpfung in faserverstärkten Kunststoffen durchgeführt. Die FE-Berechnungen werden beansprucht und unter dem Einfluss von Vorspannung im Material durchgeführt. Dabei können jedoch lediglich die beanspruchten Fälle im Biegeschwingversuch validiert werden.

In TSAI und CHI 2008 [160] wird der Einfluss der mikromechanischen Anordnung der Verstärkungsfasern auf das Dämpfungsverhalten von unidirektional kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffen numerisch untersucht. Dabei werden die quadratische Packung, die quadratisch zentrierte Packung und die hexagonale Packung betrachtet. Es werden FE-Berechnungen mit repräsentativen Volumenelementen (RVE) durchgeführt. Dabei zeigt die quadratisch zentrierte Packung höhere Dämpfungseigenschaften als die beiden anderen Packungsarten. Die ermittelten Materialkennwerte des RVE werden auf eindimensionale und zweidimensionale Tragwerke (Balken und Platten) extrapoliert. Diese werden mit ebenen Probekörpern, die verhältnismäßig kurz und dick und somit nicht vollständig praxisrelevant sind, modelliert. Es wird gefolgert, dass die mikromechanische Anordnung der Verstärkungsfasern das Dämpfungsverhalten signifikant beeinflusst.

In HWANG und GIBSON 1992 [66] werden zur weiterführenden Analyse und Beschreibung unterschiedlicher Dämpfungsmechanismen faserverstärkten Kunststoffen im mikromechanischen und makromechanischen Maßstab FE-Berechnungen durchgeführt, die mit der nach der Verzerrungsenergie-Methode ausgewertet werden. Im makromechanischen Maßstab werden u. a. Kopplungseffekte, die bedingt durch den Lagenaufbau des Laminats als zusätzlich energiedissipierender Mechanismus wirken, untersucht. Als hauptsächlich dämpfungserhöhende Effekte werden Biege-Torsions-Kopplung in symmetrischen Laminaten und die Biege-Dehn-Kopplung in anti-symmetrischen Laminaten identifiziert.

Der Review von FINEGAN und GIBSON 1999 [39] zeigt den Stand der Technik bezüglich der Erhöhung und Optimierung der Dämpfungseigenschaften in faserverstärkten Kunststoffen. Hinter-

grund sind die Forderungen nach verbesserten Dämpfungseigenschaften im Hinblick auf die Minimierung von Geräuschemissionen, die Erhöhung der dynamischen Stabilität, die Erhöhung der Lebensdauer und die Widerstandsfähigkeit gegen transversale Impactschäden. Im makromechanischen Maßstab werden analog zu [66] Kopplungen im Laminat als zusätzlich energiedissipierender Mechanismus behandelt. Zusätzlich wird explizit das Wirken eines strukturdynamischen Dämpfungsmechanismus in gewebeverstärkten Einzellagen von faserverstärkten Kunststoffen erwähnt, nicht jedoch weiter behandelt. Stattdessen wird der Einfluss des Faservolumengehalts auf das Dämpfungsverhalten detaillierter untersucht. Dabei werden Probekörper mit Lagenaufbauten aus gewebeverstärkten Einzellagen behandelt.

Im Review von GIBSON 2000 [48] werden der Stand der Technik und Forschungsergebnisse zur Möglichkeit der Charakterisierung von faserverstärkten Kunststoffen über strukturdynamische Werkstoffkennwerte vorgestellt. Dabei wird u. a. die Möglichkeit bzw. das Potential der mechanischen Charakterisierung des Material- bzw. Schädigungszustands betont. Dabei ergeben sich unterschiedliche vorteilhafte Aspekte. Die mechanische Charakterisierung von faserverstärkten Kunststoffen mit strukturdynamischen Untersuchungen, v. a. die Ermittlung elastischer und viskoelastischer Werkstoffkennwerte, ist zeit- und kostengünstig sowie präzise. Als Schwierigkeiten der Validierung analytischer Modelle mit experimentellen Ergebnissen werden jedoch die unterschiedlichen Einspannbedingungen als Randbedingungen genannt. In analytischen Modellen werden oft allseitig gelenkig gelagerte Tragwerke beschrieben, um eine analytisch geschlossene Lösungen zu erhalten. Im Gegensatz dazu wird in der experimentellen Werkstoffkennwertermittlung, u. a. aus Gründen der Praktikabilität und der Reproduzierbarkeit, eine einseitig feste Einspannung verwendet. Die analytische Lösung solcher Problemstellungen ist dann meist lediglich über Näherungsverfahren, beispielsweise nach RAYLEIGH, RAYLEIGH-RITZ oder GALERKIN, möglich.

### 2.1.2 Ermittlung strukturdynamischer Werkstoffkennwerte

Die beiden Arbeiten von SCHULTZ und TSAI 1968 [147] und 1969 [148] stellen die experimentelle Ermittlung von dynamischen Steifigkeiten und Dämpfungskennwerten von faserverstärkten Kunststoffen unter Fremderregung über einen verhältnismäßig großen Frequenzbereich vor. Als Probekörper dienen flache stabförmige Probekörper aus unidirektional glasfaserverstärkten Epoxidharzmatrix. Unterschiedliche Orientierungen des Ausschnitts der Probekörper aus den Prüfplatten liefern schließlich vier bzw. acht unterschiedliche Lagenaufbauten der Probekörper. Sie werden mittig bezüglich ihrer Länge gespannt, sodass der eingespannte Probekörper mechanisch als symmetrischer Doppelkragbalken behandelt werden kann. Die Einspannung wird mit einem elektrodynamischen Aktor von der 1. bis zur 27. Eigenfrequenz mit konstanter Amplitude fremderregt und durch Wegfall der Anregung zum freien Ausschlagen gebracht. Die statisch ermittelten Steifigkeiten sind dabei um bis zu 20 % bzw. 27 % geringer als die dynamisch ermittelten Steifigkeiten (Speichermodul und Verlustmodul). Die Auswertung der Ergebnisse zeigt eine relativ geringe Abhängigkeit der Speichermoduli von der Frequenz, bei der diese ermittelt worden sind. Im Gegensatz dazu hängen die Verlustmoduli teilweise stark von der jeweiligen Frequenz ab. Mit zunehmender Amplitude steigt i. a. das gemessene Dämpfungsmaß. Zusätzlich liefert ein kurzer Betrachtungszeitraum (10 Schwingungszyklen) stets geringfügig höhere Dämpfungskennwerte als ein längerer Betrachtungszeitraum (50 Schwingungszyklen). Experimentell ermittelte Verlustmoduli sind dabei stets gleich oder höher, jedoch nie geringer, als die analytisch berechneten. Als Grund wird ein komplexerer Spannungszustand, vor allem zwischen den Einzellagen des Laminats (interlaminar), vermutet. Eine Sensitivitätsanalyse ergibt, dass bezüglich der Erhöhung der Amplitude der Anregung die Frequenzen insensitive, die Dämpfung jedoch sensitiv ist. Bezüglich der Sensitivität der Messwerte sind Untersuchungen in evakuierter Atmosphäre durchgeführt worden, was jedoch keinen signifikanten Einfluss auf die Messwerte liefert.

Die Arbeit von KADIOGLU 2009 [72] beschreibt die experimentelle Ermittlung der strukturdynamischen Werkstoffkennwerte Steifigkeit und Werkstoffdämpfung von faserverstärkten Kunststoffen. Dabei werden einleitend die (quasi-)statische und die dynamische Ermittlung von mechanischen Werkstoffkennwerten einander gegenübergestellt. Während die (quasi-)statischen Methoden meist zerstörend arbeiten und verhältnismäßig große Streuungen im Prozentbereich aufweisen, sind die dynamischen Methoden meist nichtzerstörend, zeit- und kostengünstiger, und weisen zudem um eine Dekade geringere Streuungen auf. In der Arbeit werden beidseitig gelenkig gelagerte Probekörper untersucht, die an den Orten der Schwingungsknoten der ersten Eigenschwingungsform gelagert sind. Die Anregung und Messung erfolgt berührungslos. Dabei sind kohlenstofffaser- und glasfaserverstärkte Kunststoffe, hergestellt aus Prepregs im Heißluftautoklavverfahren, untersucht worden. Die experimentellen Ergebnisse werden mit Messwerten von Probekörper aus Aluminium und Stahl validiert. Die Amplitude der Anregung ist konstant und so klein als möglich gehalten worden, um mögliche (geometrische) Nichtlinearitäten zu vermeiden. Die berührungslose Anregung und Messung bei frei-freier Lagerung wird als vorteilhaft gegenüber anderen Methoden und Lagerbedingungen genannt.

MOTAVALLI und FLÜELER 1998 [93] betrachten ausgewählte amerikanische, und wo möglich entsprechende europäische bzw. deutsche, Normen bezüglich der experimentellen mechanischen Charakterisierung von faserverstärkten Kunststoffen. Die zu Grunde liegenden Methoden werden in zwei Kategorien eingeteilt. Die erste Kategorie beinhaltet Untersuchungen für eine grundlegende Charakterisierung einer ersten Serie von Probekörpern eines neuartigen Lagenaufbaus. Die zweite Kategorie beinhaltet empfohlene Methoden zur Qualitätskontrolle. Dabei wird jede Methode mit entsprechenden Normen referenziert und kurz beschrieben. Ein kohlenstofffaserverstärktes Laminat mit Lagenaufbau aus unidirektional verstärkten Einzelschichten dient als beispielhafter Lagenaufbau der Probekörper. Als experimentelle Untersuchungsmethode zur Ermittlung von dynamischen Werkstoffkennwerte wird der Biegeschwingversuch mit schwingendem Kragbalken nach DIN 53440 [99] genannt.

Die Arbeit von MISTOU und KARAMA 2000 [91] vergleicht den zerstörenden Zugversuch mit den nichtzerstörenden Impedanzmessungen von eingeleitetem Ultraschall als experimentelle Methoden zur Ermittlung der dreidimensionalen unabhängigen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der Steifigkeit und der Querverformung in faserverstärkten Kunststoffen. Dabei werden unterschiedliche textile Halbzeuge aus Glasfasern in ungesättigtem Polyesterharz als Matrixwerkstoff untersucht. Im Detail handelt es sich um ein unidirektionales in Längsrichtung verstärktes Laminat aus Rovings, ein unidirektional in Längsrichtung verstärktes Laminat aus UD-Gelegen und zwei Leinwandgeweben mit unterschiedlichem Flächengewicht. Die Streuung des Faservolumengehalts über die unterschiedlichen Lagenaufbauten ist dabei verhältnismäßig groß. Um die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen dennoch vergleichbar zu machen, werden die ermittelten Werkstoffkennwerte über Mischungsregeln auf einen normierten Faservolumengehalt, im vorliegenden Fall 45 %, normiert. Die Abweichungen der Ergebnisse der beiden experimentellen Methoden liegen im Bereich  $< 10\%$ . Die Abweichungen werden unter anderem mit der Normierung der experimentell ermittelten Werkstoffkennwerte begründet. Eine Tendenz, welche Methode höhere bzw. geringere Werte liefert, kann nicht abgeleitet werden. Aufgrund des verhältnismäßig geringen Zeit- und Kostenaufwands wird die nichtzerstörende Methode zur Ermittlung von (quasi-)statischen Werkstoffkennwerten favorisiert.

VANTOMME 1995 [165] stellt parametrisierte analytische Berechnungen und experimentelle Untersuchungen zur Ermittlung der Materialdämpfung in faserverstärkten Kunststoffen vor. In den analytischen Berechnungen werden die Dämpfungseigenschaften der Einzelkomponenten Verstärkungsfasern, Matrixwerkstoff und Interphase berücksichtigt. Basierend auf der Verzerrungsenergie an einem repräsentativen Volumenelement (RVE) werden analytisch geschlossene Lösungen angegeben. Der gewählte Ansatz gewichtet den jeweiligen Beitrag der Einzelkomponenten zur Materialdämpfung mit deren Anteilen an der elastischen Verzerrungsenergie. Diese hängt dabei

von den elastischen Eigenschaften der Einzelkomponenten ab. Um den Einfluss der Interphase zu untersuchen, wird zusätzlich ein Drei-Parameter-Modell formuliert. Das Modell zeigt bei schlechter Qualität der Interphase, d. h. bei geringer Steifigkeit der Einzelkomponente und damit schlechter Faser-Matrix-Haftung, einen signifikanten Anstieg der Energiedissipationsfähigkeit einer unidirektional verstärkten Einzellage. Zur Validierung der analytischen Ergebnisse werden unidirektional glasfaserverstärkte Probekörper mit Epoxidharzmatrix experimentell untersucht. Abhängig von zwei unterschiedlich langen Auslagerungsdauern ergeben zwei unterschiedliche Qualitäten der Interphase. Es werden balken- und plattenähnliche Probekörper kontaktlos über Schalldruck angeregt, und nach Wegnahme der Anregung die frei abklingenden Schwingungen berührungslos mit einem Laser-Doppler-Vibrometer gemessen. Der dämpfungserhöhende Einfluss einer reduzierten Qualität der Interphase wird nachgewiesen. Im Ausblick wird zur Beschreibung der Materialdämpfung von geschädigten Materialien explizit ein zusätzlicher Beitrag aufgrund von COULOMB'scher Reibung genannt, der in diesem Fall nicht vernachlässigbar ist.

Die Arbeiten von SCHMIDT und GAUL 2007 [144] sowie von SCHMIDT 2003 [145] liefern einen Beitrag zur Modellierung und experimentellen Ermittlung linear-viskoelastischen Materialverhaltens. Dabei steht bei der Modellierung der Materialdämpfung neben den ganzzahligen Zeitableitungen besonders deren Erweiterung mit Hilfe von fraktionalen (nichtganzzahligen) Zeitableitungen im Mittelpunkt. Die Erweiterung auf fraktionale Modelle linearer Viskoelastizität wird mit der Definition fraktionaler Ableitungen nach RIEMANN-LIOUVILLE eingeleitet. Die verwendeten Probekörper bestehen aus dem unverstärkten thermoplastischen Kunststoff Polyoxymethylen. Neben Untersuchungen in einem Scherrheometer werden frei abklingende Transversalschwingungen von einseitig fest eingespannten Probekörpern berührungslos mit einem Laser-Doppler-Vibrometer gemessen. Um die Probekörper zu Schwingungen bei unterschiedlichen relevanten Eigenfrequenzen anzuregen, werden die Auskraglänge und die Dicke in ausgewählten Schritten variiert. Zur strukturmechanischen Beschreibung des transversalschwingenden Probekörpers wird dabei stets die schubstarre Balkentheorie nach EULER-BERNOULLI verwendet. Die Auswertungen zeigen, dass die Modellierung linear-viskoelastischen Materialverhaltens mit fraktionalen Zeitableitungen im Gegensatz zur Modellierung mit klassischen Feder-Dämpfer-Modellen Aussagen über deutlich größere Zeit- oder Frequenzbereiche zulässt. Die Erkenntnisse sind für FE-Formulierungen viskoelastischer Werkstoffe mit fraktionalen Zeitableitungen verwendet worden.

### 2.1.3 Ondulationen in gewebeverstärkten Einzellagen

BYUN 2000 [22] stellt ein analytisches Modell einer sog. Einheitszelle im mesomechanischen Maßstab zur Berechnung der geometrischen Charakteristik und der dreidimensionalen mechanischen Werkstoffkennwerte von Lagenaufbauten aus zweidimensional geflochtenen textilen Halbzeugen vor. Basierend auf einer vorausgesetzten idealisierten mesomechanischen Geometrie werden die sich kontinuierlich ändernden, stetigen Orientierungen der sich ondulierenden Rovingstränge analytisch angegeben und mit Schlibbildern validiert. Analog wird unter der Voraussetzung eines konstanten lokalen Faservolumengehalts in den ideal imprägnierten Rovingsträngen die Berechnung des globalen Faservolumengehalt des Laminats bzw. der Einzellage angegeben. Das elastische Modell verwendet dabei die Koordinatentransformation und die, auf dem Faservolumengehalt basierende, gewichtete Mittelung der Steifigkeiten bzw. Nachgiebigkeiten der Einzelkomponenten, Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff. Zur Validierung der analytischen Berechnungen sind sieben unterschiedliche Konstruktionen der textilen Halbzeuge hergestellt und experimentell im einachsigen Zugversuch untersucht worden. Die Ergebnisse des analytischen Modells sind zusätzlich mit Ergebnissen verglichen worden, die auf der klassischen Laminattheorie basieren. Obwohl die Ergebnisse beider analytischer Methoden mit den experimentellen Ergebnissen korrelieren, liefert das in der Arbeit eingeführte analytische Modell, basierend auf der mesomechanischen Einheitszelle, genauere Ergebnisse bei geringeren Winkeländerungen oder bei stark

unterschiedlichen Abmessungen der Rovings im textilen Halbzeug. Dafür ist im eingeführten analytischen Modell eine Parametervariation durchgeführt worden. Die Ergebnisse sind für ausgewählte Steifigkeiten und Querverformungszahlen dargestellt.

HUANG 2000 [65] behandelt die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte von Laminaten mit Lagenaufbauten aus gewebeverstärkten oder geflochtenen Einzellagen. Die analytische Beschreibung einer repräsentativen Sequenz eines Leinwandgewebes im mesomechanischen Maßstab führt auf das in der Arbeit eingeführte Brückenmodell (engl.: bridging model), das die strukturmechanischen Eigenschaften von Laminaten aus gewebeverstärkten oder geflochtenen Einzellagen beschreibt. Zur detaillierten analytischen Beschreibung wird als gewebeverstärkte Einzellage ein ausgeglichenes Leinwandgewebe als zweidimensionales textiles Halbzeug zu Grunde gelegt. Das eingeführte Modell erlaubt die Beschreibung linear-elastischer und plastischer Zusammenhänge sowie Betrachtung der Festigkeit von gewebeverstärkten Lagenaufbauten unter beliebigen Belastungsbedingungen. Dabei hängen die Spannungszustände in den Einzelkomponenten direkt von den globalen Belastungen des Verbundmaterials ab, sodass das globale Verhalten des Verbundmaterials direkt auf das strukturmechanische Verhalten der Einzelkomponenten zurückgeführt werden kann. Die vereinfachende Geometrie setzt eine elliptische Querschnittsform der Rovingstränge sowie einen sinusförmigen Verlauf der ondulierten Rovingstränge voraus. Die vorausgesetzte Geometrie verursacht drei strukturmechanisch unterschiedliche Bereiche im repräsentativen Element. Dies sind im Einzelnen die sich senkrecht kreuzenden und ondulierenden Kettstrang und Schussstrang mit vorausgesetzter unidirektionaler Faserverstärkung und Bereiche reiner Matrix ohne Faserverstärkung. Zur Verifizierung sind mehrere geometrische Parameter mit dem Modell analysiert worden. Die Ergebnisse der Steifigkeiten und Festigkeiten des analytischen Modells stimmen dabei gut mit experimentellen Ergebnissen überein. Zusätzlich ist der Einfluss von Lunkern auf die Steifigkeit und Festigkeit parametrisch untersucht worden.

LE PAGE et al. 2004 [83] stellen zweidimensionale FE-Berechnungen unter der Voraussetzung eines ebenen Verzerrungszustandes vor, um im mesomechanischen Maßstab unterschiedliche lokale Geometrien in gewebeverstärkten Einzellagen bezüglich der Schadensausbreitung abhängig von der Anzahl der Einzellagen zu untersuchen. Dabei ist die globale Steifigkeit relativ insensitive auf die Variation solcher lokaler Geometrien. Im Gegensatz dazu beeinflusst der Ort eines Risses die Freisetzungsrates der Verzerrungsenergie in Zusammenhang mit der Form des Risses stark. Es werden Lagenaufbauten aus leinwandgewebeverstärkten Einzellagen in der sog. „in-phase“-Anordnung und in der sog. „out-of-phase“-Anordnung parametrisch untersucht. Die mesomechanische Geometrie setzt wieder vereinfachend eine elliptische Querschnittsform sowie einen sinusförmigen Verlauf der ondulierten Rovingstränge voraus, sodass sich drei strukturmechanisch unterschiedliche Bereiche im repräsentativen Element ergeben (unidirektional verstärkter Kettstrang und Schussstrang sowie reine Matrix ohne Faserverstärkung). Vor diesem Hintergrund werden die parametrischen Berechnungen durchgeführt.

SZABLEWSKI 2009 [153] behandelt repräsentative Sequenzen in leinwandgewebeverstärkten Einzellagen unter der vereinfachenden geometrischen Voraussetzung einer sinusförmigen Ondulation der Rovingstränge im mesomechanischen Maßstab. Das Modell ermöglicht die Ermittlung relevanter geometrischer Parameter im mesomechanischen Maßstab, sodass die mesomechanische Geometrie des textilen Halbzeugs geometrisch eindeutig definiert ist. Die mesomechanische Geometrie setzt eine ellipsenähnliche Querschnittsform sowie einen (quasi-)sinusförmigen Verlauf der ondulierten Rovingstränge voraus. Es ergeben sich jedoch auch hier die drei strukturmechanisch unterschiedliche Bereiche im repräsentativen Element (unidirektional verstärkter Kettstrang und Schussstrang sowie reine Matrix ohne Faserverstärkung). Im weiteren Verlauf wird mit der Untersuchung einer repräsentativen Sequenz auf die Festigkeitsanalyse eingegangen. Abschließend wird die Adaptierbarkeit der vorausgesetzten mesomechanischen Geometrie auf andere Gewebekonstruktionen genannt.

TABIEI und YI 2002 [156] stellen Methoden zur Ermittlung der strukturmechanischen Werk-

stoffkennwerte von Laminaten aus leinwandgewebeverstärkten Einzellagen gegenüber. Im Detail handelt es sich dabei um die Methode der repräsentativen Volumenelemente (RVE), die Vier-Zellen-Methode und die Methode mit dreidimensionalen FE-Berechnungen. Als weitere Methode wird eine vereinfachte Version der Methode der Einzelzellen für gewebeverstärkte Lagenaufbauten eingeführt. Sie unterscheiden sich im Wesentlichen in der getroffenen vereinfachenden Voraussetzungen der mesomechanischen Geometrie einer leinwandgewebeverstärkten Einzellage. Während die Methode der repräsentativen Elemente eine kontinuierliche, stetige Änderung der Vorzugsrichtung und einen elliptischen Querschnitt der unidirektional verstärkten Rovings voraussetzt, wird beim Vier-Zellen-Modell ein bereichsweise linearer, und damit unstetiger, Verlauf der Vorzugsrichtung und ein rechteckförmiger Querschnitt der unidirektional verstärkten Rovings vorausgesetzt. Zusätzlich wird auf die numerische Effizienz und damit die Anwendbarkeit der einzelnen Methoden für lokale bzw. globale FE-Berechnungen von gewebeverstärkten Einzellagen eingegangen. Für die vorgestellten Methoden werden Ergebnisse numerischer Berechnungen der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte gegenübergestellt. Die eingeführte Methode der Einzelzellen zeigt dabei gute Übereinstimmung mit den anderen angewendeten Methoden.

WIELAGE et al. 2005 [168] betonen die Relevanz der detaillierten strukturmechanischen Beschreibung von Laminaten aus gewebeverstärkten Einzellagen, während zur Berechnung von Laminaten aus unidirektional verstärkten Einzellagen eine Vielzahl analytischer und numerischer Methoden existiert. Die gewebeverstärkten Einzellagen werden aus unidirektional verstärkten Rovings vorausgesetzt. Zur mechanischen Beschreibung wird die Methode der repräsentativen Volumenelemente verwendet, und damit eine vollständige Ondulation im mesomechanischen Maßstab modelliert. Die drei untersuchten Gewebekonstruktionen sind im Einzelnen ein Leinwandgewebe, ein Köpergewebe 2/2 und ein Atlasgewebe 1/4. Die mesomechanische Geometrie setzt eine elliptische Querschnittsform sowie einen sinusförmigen, und damit kontinuierlichen, stetigen, Verlauf der ondulierten Rovingstränge voraus, sodass sich auch hier die drei strukturmechanisch unterschiedliche Bereiche im repräsentativen Element ergeben (unidirektional verstärkter Kettstrang und Schussstrang sowie reine Matrix ohne Faserverstärkung). Dabei werden die unabhängigen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der lokal transversalisotropen imprägnierten Rovingsträngen mit bekannten Homogenisierungsansätzen, basierend auf den Einzelkomponenten Verstärkungsfaser und polymerer Matrixwerkstoff, berechnet. Im weiteren Verlauf werden die strukturmechanischen Steifigkeiten (Längs-, Quer- und Schubsteifigkeiten) und die thermischen Ausdehnungskoeffizienten für die einzelnen Gewebekonstruktionen mit FE-Berechnungen ermittelt und experimentell validiert. Zusätzlich wird im Fall des Atlasgewebes 1/4 der Einfluss von Poren im Bereich der reinen Matrix ohne Faserverstärkung berücksichtigt.

MITAL, MURPHY und CHAMIS 1996 [90] untersuchen die mesomechanischen Zusammenhänge in leinwandgewebeverstärkten Einzellagen mit repräsentativen Volumenelementen. Die Ergebnisse werden analytisch beschrieben und numerisch verifiziert. Der Verlauf der ondulierten unidirektional verstärkten Rovingstränge wird mit sinusförmigen Übergängen in Bereichen der Umlenkung beschrieben, die die linearen Bereiche der ondulierten Rovings verbinden. Zur Vereinfachung und zur Reduktion der Berechnungsdauer werden Symmetrieeigenschaften der repräsentativen Sequenzen genutzt. Dabei wird mit analytischen Ansätzen das hygrothermale und das strukturmechanische Verhalten des repräsentativen Volumenelements beschrieben. Die Ergebnisse liefern die vollständigen thermischen, hygroskopischen und strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der leinwandgewebeverstärkten Einzelschicht, und damit die notwendigen Eingabewerte für FE-Berechnungen zur numerischen Auslegung von Strukturen. Das erlaubt schließlich die makromechanische Spannungsberechnung im Laminat sowie die mikroskopischen Spannungsanalyse der Einzelkomponenten. Im Detail werden die analytischen Berechnungen u. a. zur Berechnung von kohlenstofffaserverstärktem Epoxidharz mit Leinwandgewebeverstärkung verwendet, wobei die Ondulation der Rovingstränge als mesomechanische Geometrie sowie der Lagenaufbau berücksichtigt werden. Die Ergebnisse der analytischen Berechnungen stimmen dabei sowohl mit denen

der dreidimensionalen FE-Berechnungen als auch mit experimentell ermittelten Werkstoffkennwerten gut überein. Verglichen mit den dreidimensionalen FE-Berechnungen ist die vorgestellte Methode jedoch v. a. wegen ihrer numerischen Effizienz empfehlenswert.

NAIK und SHEMBEKAR 1992 [126] stellen zweidimensionale Modelle zur linear-elastischen Analyse einer leinwandgewebeverstärkten Einzelschicht vor. Die Modelle beschreiben die mesomechanische Geometrie durch die Berücksichtigung der kontinuierlichen und stetigen Ondulation der Rovingstränge (sowohl in Kett- als auch in Schussrichtung), eines möglichen Abstands zwischen benachbarten Rovingsträngen, der eigentlichen Querschnittsform der Rovingstränge sowie einer möglichen Unausgeglichenheit des Leinwandgewebes. Es werden Untersuchungen zu den Auswirkungen der Ondulation in gewebeverstärkten Einzellagen und der Dicke der Einzellage auf die planaren strukturmechanischen Werkstoffkennwerte vorgestellt. Dabei ergibt sich eine wesentliche Diskrepanz zwischen eindimensionalen analytischen und numerischen Modellen und experimentellen Ergebnissen. Aufgrund der ausreichenden Berücksichtigung der Effekte der Ondulation in zweidimensionalen analytischen und numerischen Modellen stimmen diese verhältnismäßig gut mit experimentellen Ergebnissen überein.

BALLHAUSE 2007 [6] beschreibt das strukturmechanische Verhalten von trockenen Geweben im mesomechanischen Maßstab unter ein- und zweiachsiger Belastung numerisch und experimentell. Es wird ein Versagensmodell formuliert, das auf dem Anstieg der Kontaktkräfte und der gleichzeitigen Reduktion der Intensität der Ondulation an den Kreuzungspunkten von Kett- und Schusssträngen bei zunehmender Belastung zurückgeführt wird. Im Detail bewirkt eine geringe positive Deformation eine Abflachung der ondulierten Rovings und damit eine Reduktion der Dicke. Bei weiterer positiver Deformation in ein oder zwei Dimensionen bewirkt das Abflachen der belasteten Stränge jedoch sogar eine Anhebung der senkrecht dazu verlaufenden Stränge. Dieser Mechanismus resultiert in einer Zunahme der Dicke der Gewebelage statt in einer Abnahme der Dicke, die durch eine Kopplung analog zu Querverformungseffekten eigentlich erwartet wird.

BADEL, VIDAL-SALLÉ und BOISSE 2007 [5] untersuchen das mesomechanische Materialverhalten von trockenen Geweben unter Schubbelastung analytisch, numerisch und experimentell. Im Detail wird ein trockenes Leinwandgewebe in einen sog. Schubrahmen-Mechanismus (auch: Picture-Frame-Mechanismus oder Viergelenk-Rahmen) eingespannt, über den durch Ziehen an gegenüberliegenden Gelenken die Schubbelastung eingeleitet wird. Bei ansteigender Belastung nehmen die Schubverzerrungen zu. Zwischen dem sich einstellenden Winkel des Schubrahmens und der resultierenden Orientierung der Rovingstränge im Gewebe ergeben sich Nichtlinearitäten. Bei ausreichend großer Schubverformung berühren sich die Außenkanten der ursprünglich senkrecht zueinander verlaufenden Kett- und Schussstränge. Bei weiterer Zunahme der Schubverformung bewirkt dies eine Zunahme der Dicke und schließlich ein beulähnliches Stabilitätsversagen des ursprünglich ebenen Gewebes.

HIVET und BOISSE 2008 [62] untersuchen das mesomechanische Materialverhalten von trockenen Geweben unter zweiachsiger Zugbelastung analytisch, numerisch und experimentell. Dabei ergibt sich eine starke Nichtlinearität, v. a. bei noch geringen Belastungsniveaus. Diese führt, analog zu den in [6] berichteten Effekten, zunächst zu einer Reduktion der Dicke, und bei weiterer positiver Deformation jedoch sogar zu einer Zunahme der Dicke der trockenen Gewebelage.

HIVET und DUONG 2010 [61] untersuchen das mesomechanische Materialverhalten von trockenen Geweben sowohl unter Schubbelastung, analog zu [5] und [6], als auch unter zweiachsiger Zugbelastung, analog zu [62], analytisch, numerisch und experimentell. Im Detail werden zwei trockene Leinwandgewebe untersucht. Die Schubbelastung wird mit einem Schubrahmen-Mechanismus und die zweiachsige Zugbelastung wird mit einer biaxialen Zugprüfmaschine aufgebracht. In beiden Fällen ergeben sich bei ansteigender Belastung und damit ansteigenden Verzerrungsraten die zuvor beschriebenen Nichtlinearitäten.

EL MAHI et al. 2008 [36] geben eine analytische Beschreibung von Dämpfungsmechanismen in

gewebeverstärkten Einzellagen und führen entsprechende FE-Berechnung durch, die auch im Experiment validiert werden. Die numerischen Berechnungen basieren dabei auf der Betrachtung der Verzerrungsenergie unter der Voraussetzung des ebenen Spannungszustandes und beschränken sich aufgrund der vereinfachenden Voraussetzungen auf unidirektional und orthotrop verstärkte Lamine. Im Detail werden ein UD-Gelege, ein UD-Gewebe (stark unausgeglichen mit Vorzug in  $0^\circ$ -Richtung), ein Leinwandgewebe und ein Köpergewebe (jeweils in in Kettrichtung) aus Glasfasern untersucht. Die Validierung der untersuchten Dämpfungsmechanismen erfolgt mit flachen stabförmigen Probekörpern. Diese werden aus Prüfplatten aus glasfaserverstärktem Epoxidharz ausgeschnitten und präpariert. Sie werden einseitig fest eingespannt, mit mechanischem Impuls angeregt, und berührungslos mit einem Laser-Doppler-Vibrometer vermessen. Zur Variation der untersuchten Eigenfrequenzen werden die Auskraglängen bei unterschiedlichen Querschnittsabmessungen definiert variiert. Die Sensitivität der Ergebnisse auf unterschiedliche experimentelle Parameter sowie die Reproduzierbarkeit der Versuchsdurchführung ist nachgewiesen worden. Dabei wurde sogar der Einfluss der aerodynamischen Dämpfung aufgrund von Luftreibung bzw. viskoser Luftdämpfung und Trägheitseffekten berücksichtigt. Es zeigt sich jedoch, dass der Einfluss lediglich für große Schwingungsamplituden groß ist, und bei kleinen Schwingungsamplituden vernachlässigt werden kann. Bei gleichen Vorzugsrichtungen ( $0^\circ$ -unidirektional verstärkt bzw. in Kettrichtung verstärkt) unterscheiden sich die Materialdämpfungen der Probekörper mit den unterschiedlichen textilen Halbzeugen signifikant voneinander. Die Ergebnisse sind jeweils für die ersten drei Eigenfrequenzen von ca. 50 Hz, 300 Hz und 600 Hz dargestellt. Das UD-Gelege und das UD-Gewebe weisen deutlich geringere Dämpfungswerte auf als das Leinwand- und das Köpergewebe. Im Detail weist das UD-Gelege die niedrigste Dämpfung auf. Das Leinwandgewebe weist dagegen die höchste Dämpfung auf, während das Köpergewebe lediglich eine geringfügig niedrigere Dämpfung aufweist.

GUAN 1997 [55] führt FE-Berechnungen zur Untersuchung der viskoelastischen Dämpfung in faserverstärkten Kunststoffen mit Gewebeverstärkung durch. Dabei steht die Modellierung eines repräsentativen Volumenelements für einen glasfaserverstärkten Duroplast (Matrixsystem: Vinylester) mit Leinwandgewebeverstärkung im Mittelpunkt der Berechnungen. Experimentell werden Schiffe erstellt und mikroskopiert, um die mesomechanische Geometrie zu bestimmen. Zur Validierung der FE-Berechnungen werden impulserregte frei abklingende Schwingungen von flachen stabförmigen Probekörpern vermessen. Die Ergebnisse korrelieren mit zwei analytischen Modellen. Die Sensitivität des analytischen Modells auf Faservolumengehalt und Länge der Ondulation durch die Gewebeverstärkung wird untersucht, mit dem Ziel die Werkstoffdämpfung in faserverstärkten Kunststoffen zu optimieren. Bezüglich der Geometrie der Ondulation wird eine weitere Sensitivitätsanalyse bezüglich der Länge der Ondulation im FE-Modell durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen jedoch, dass die Materialdämpfung, zumindest für den gewählten Bereich der Parametervariation der Länge, relativ insensitive auf eine Variation dieses geometrischen Parameters reagiert.

NAKANISHI et al. 2007 [127] untersuchen Dämpfungseigenschaften von faserverstärkten Kunststoffen mit gewebeverstärkten Einzellagen. Im vorliegenden Fall stehen Leinwandgewebe aus Glasfasern mit Vinylestermatrix im Vordergrund. Dafür werden FE-Berechnungen durchgeführt, die mit experimentellen Ergebnissen validiert werden. Die FE-Berechnungen sind mit dreidimensionalen, heterogenen Elementen, sog. repräsentativen Volumenelementen, durchgeführt worden. Dabei werden die imprägnierten Rovingstränge der Verstärkungsfasern als unidirektional verstärkt, und damit makroskopisch transversalisotrop vorausgesetzt. Dabei folgen die Materialeigenschaften der Kontur der Ondulation. Die umgebende unverstärkte Matrix wird als makroskopisch isotrop vorausgesetzt. Die mechanischen Werkstoffkennwerte der unidirektional verstärkten Bereiche der Kett- und Schussfäden werden mithilfe von Mischungsregeln berechnet. Der dafür zugrunde gelegte Faservolumengehalt ist nach Auswertung von Schlibbildern der Probekörper unter einem Lasermikroskop und der digitalen Nachbearbeitung ermittelt worden. Die



experimentellen Ergebnisse zeigen die höchsten dynamischen Steifigkeiten für Orientierung der Gewebeverstärkung in  $0^\circ$ - bzw.  $90^\circ$ -Richtung, während die Orientierung  $\pm 45^\circ$  die geringsten Werte dafür liefert. Die ermittelte Materialdämpfung verhält sich dazu entgegengesetzt. Sie weist die geringsten Werte in  $0^\circ$ - bzw.  $90^\circ$ -Richtung auf, während die Orientierung  $\pm 45^\circ$  die höchsten Werte liefert. Die Ergebnisse der Simulation folgen den angegebenen experimentell ermittelten strukturdynamischen Eigenschaften bezüglich der Eigenfrequenzen und zugehörigen Materialdämpfung.

KREIKMEIER et al. 2011 [79] führen analytische und numerische Untersuchungen von kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff mit herstellungsbedingten Fehlstellen durch. Als herstellungsbedingte Fehlstellen werden im Detail Faserwelligkeit und Porositäten behandelt. Im Detail wird die sogenannte Faserwelligkeit in Längsrichtung in der Ebene als herstellungsbedingte Fehlstelle betrachtet. Hintergrund ist die zunehmende Anwendung des Injektionsverfahrens statt des Heißluftautoklavverfahrens aus Zeit- und Kostenvorteilen. Im Gegensatz zur Kompaktierung der Einzellagen und damit des gesamten Laminats durch den applizierten Druck im Heißluftautoklavverfahren kann es beim Injektionsverfahren zu einem Verschieben der Einzellagen kommen. Damit würde die erreichte Faserorientierung von der gewünschten abweichen. Schliffbilder über die Dicke eines Laminats zeigen, dass diese Welligkeiten in Dickenrichtung des Laminats auftreten. Dabei befinden sich die Einzellagen großer Welligkeiten im Inneren des Laminats, während außen die Faserwelligkeiten deutlich geringer, und teilweise sogar nicht erkennbar, sind. Dieser Effekt wird auf den Einfluss der Form auf die Randlagen zurückgeführt. Der Einfluss der durch die Injektion als Herstellungsverfahren bedingten Faserwelligkeiten in Dickenrichtung auf die Steifigkeiten und Festigkeiten wird analytisch und mit FE-Berechnungen, basierend auf einem repräsentativen Volumenelement, untersucht. Der Verlauf einer gleichmäßigen Faserwelligkeit wird dabei vereinfachend sinusförmig vorausgesetzt. In den Ausführungen zu den FE-Berechnungen wird erstmals der Begriff des „Welligkeitsverhältnis“ verwendet. Es wird als Verhältnis der Amplitude  $A$  zur Länge der Welligkeit  $L$  mit  $\frac{A}{L}$  angegeben. Das Welligkeitsverhältnis ist von  $< 0,1$  bis  $0,2$  variiert worden. Für den betrachteten Maximalwert  $\frac{A}{L} = 0,2$  werden die relativen Veränderungen der (quasi-)statischen strukturmechanischen Steifigkeiten im Verhältnis zum ideal  $0^\circ$ -unidirektional verstärkten Material angegeben. Während die Steifigkeit in Längsrichtung zunimmt, nehmen die Steifigkeiten senkrecht dazu sowie alle drei Schubmoduln ebenfalls zu. Damit bewirkt ein steigendes Welligkeitsverhältnis sowohl eine Versteifung in Längsrichtung als auch in Dickenrichtung.

GUAN und GIBSON 2001 [56] führen analytische, numerische und experimentelle Untersuchungen zur Beschreibung der strukturdynamischen Dämpfungsmechanismen auf mesomechanischer Ebene durch. Der analytische Ansatz und die numerischen FE-Berechnungen basieren auf der Geometrie eines Leinwandgewebes, wobei jeweils ein repräsentatives Element behandelt wird. Mit der Methode der Verzerrungsenergie werden die einzelnen Verlustfaktoren berechnet. Bei den experimentellen Untersuchungen wird ein mit Leinwandgewebe glasfaserverstärktes Vinylolester im Biegeschwingversuch mit der Methode der Impuls-Frequenzantwort untersucht. Das analytische Modell basiert auf dem sog. Mosaik-Modell nach ISHIKAWA und CHOU 1983 [67]. Es idealisiert die Ondulation durch die Zusammensetzung von diskreten quaderförmigen Stücken, die jeweils  $0^\circ$  bzw.  $90^\circ$  unidirektional verstärkt sind, zu einem asymmetrischen Kreuzverbund. Das erlaubt die Anwendung der klassischen Laminattheorie und des elastisch-viskoelastischen Korrespondenzprinzips. Im Gegensatz zum analytischen Mosaik-Modell, wird in den FE-Berechnungen eine kontinuierliche Ondulation eines verhältnismäßig groben Gewebes (Dick mit hoher Grammatur) formuliert. Die Berechnung der Verlustfaktoren als Maß der Werkstoffdämpfung wird nach UNGAR und KERVIN 1962 [162] durchgeführt, die nachweisen, dass sich für beliebige Systeme linear viskoelastischer Elemente der Verlustfaktor des Systems als Verhältnis der Summe der Produkte der einzelnen Elementverlustfaktoren und der gesamten in den Elementen gespeicherte Verzerrungsenergie ergibt. Die experimentellen Untersuchungen werden an frei abklingenden Transversal-

schwingungen eines Kragbalkens durchgeführt. Die Anregung erfolgt in beiden Fällen mit einem elektromagnetischen Impulshammer und die Messung der Transversalschwingungen mit einem Wirbelstromsensor. Bezüglich des Verlustfaktors der Verstärkungsfasern und des Faservolumengehalts im Strang ist eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt worden. Mit kleiner werdendem Verlustfaktor der Verstärkungsfasern nimmt der Verlustfaktor des Verbundes ab. Analog nimmt der Verlustfaktor des Verbundes mit steigendem Faservolumengehalt im Strang ab. Eine Sensitivitätsanalyse der im FE-Modell ermittelten Verlustfaktoren bezüglich der Anzahl der Elemente im FE-Modell zeigt, dass die Erhöhung der Anzahl der Elemente die Ergebnisse lediglich geringfügig beeinflusst. Abschließend wird festgestellt, dass die Ergebnisse sowohl des analytischen Modells als auch der FE-Berechnung verbessert werden können, indem ein geringerer Verlustfaktor der Verstärkungsfasern und/oder ein erhöhter Faservolumengehalt im Rovingstrang angenommen wird. Trotzdem das analytische Modell mit der sehr starken Vereinfachung durch das quaderförmige, diskret verstärkte Mosaik-Modell, keine kontinuierliche Ondulation beschreibt, weichen die Ergebnisse nicht stark vom FE-Modell ab, das die Geometrie deutlich präziser und realitätsnäher abbildet. Diese Erkenntnis wird auf die Eigenschaft der Verzerrungsenergie zurückgeführt, die integriert für ein Volumen berechnet wird.

MATSUDA et al. 2007 [84] stellen FE-Berechnungen zum elastisch-viskoplastischen Verhalten von glasfaserverstärkten Kunststoffen mit Leinwandgewebeverstärkung sowie deren Validierung im Zugversuch vor. Es wird eine Fallunterscheidung bezüglich der Anordnung der Einzellagen zueinander durchgeführt. Im Einzelnen sind dies die beiden Positionierungsfälle „in-phase“ oder „out-of-phase“ von zwei aufeinanderfolgenden Einzellagen im Laminat, die auch in [56] erwähnt, jedoch nicht untersucht wird. Die Stränge sind als unidirektional verstärkte, transversalisotrope, Bereiche mit linear-elastischem Materialverhalten modelliert worden. Die umgebende Matrix ist als isotrop und mit elastisch-viskoplastischem Materialverhalten modelliert worden. Die Berechnung der Materialeigenschaften der unidirektional faserverstärkten Stränge ist mit Homogenisierungsansätzen erfolgt. Dafür ist ein Faservolumengehalt von  $\varphi_f = 75\%$  angenommen worden. Dieser ist aus der, in mikroskopischen Aufnahmen identifizierten, hexagonalen Packungsart der Monofilamente ermittelt worden. Der verhältnismäßig hohe Faservolumengehalt ist bereits in einer vorangegangenen Arbeit von MATSUDA et al. 2002 [85] verwendet worden. Um die Ergebnisse der FE-Berechnungen zu validieren, werden Probekörper aus glasfaserverstärktem Epoxidharz mit Leinwandgewebeverstärkung im Zugversuch untersucht. Dabei werden insgesamt vier unterschiedliche Lagenaufbauten untersucht, wobei der Winkel der Vorzugsrichtungen in  $15^\circ$ -Schritten von  $0^\circ$  auf  $45^\circ$  variiert. Die globalen Dehnungen sind mit Dehnmessstreifen aufgenommen worden. Die experimentell ermittelten mechanische Spannungs-Dehnungs-Verläufe werden denen aus der FE-Analyse der beiden Positionierungsfälle gegenübergestellt. Die  $0^\circ$ -, also kettrichtungsverstärkten, Probekörper zeigen annähernd linear-elastische Spannungs-Dehnungs-Verläufe. Diese Linearität nimmt mit ansteigendem Winkel in  $15^\circ$ -Schritten von  $15^\circ$  auf  $45^\circ$  stark ab. Die sich ergebenden nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Verläufe folgen aus dem zunehmenden Einfluss der elastisch-viskoplastischen Epoxidharzmatrix. Die Ergebnisse der FE-Berechnungen stimmen dabei sehr gut mit den experimentell ermittelten Ergebnissen überein. Die beiden Positionierungsfälle der FE-Analyse „in-phase“ und „out-of-phase“ unterscheiden sich im elastischen Bereich im Wesentlichen nicht. Erst im viskoplastischen Bereich liefert die „in-phase“-Position geringfügig größere Spannungen als die „out-of-phase“-Position für die Orientierungen von  $15^\circ$  bis  $45^\circ$ . Lediglich für die  $0^\circ$ -Orientierung liefert die „out-of-phase“-Position größere Werte für die Spannungen als die „in-phase“-Position. Abhängig von den beiden Positionierungsfällen wird ein entsprechender Homogenisierungsansatz angegeben.

BARBERO et al. 2006 [8] beschreiben ein FE-Modell zur Berechnung von Laminaten aus leinwandgewebeverstärkten Einzellagen. Zur Validierung sind die experimentellen Ergebnisse im Wesentlichen aus drei Literaturstellen verwendet worden. Diese enthalten Betrachtungen von gewebeverstärkten Einzellagen sowie die Unterscheidung der Positionierungsfälle „in-phase“ bzw.

„iso-phase“ und „out-of-phase“, analog zu [84]. Im Stand der Technik wird der existierende Ansatz sinusförmiger Ondulationen mit sinusförmigen oder elliptischen Querschnitten der einzelnen Stränge nach CHOU und ITO 1998 [27] erwähnt. Zusätzlich wird das Mosaik-Modell nach ISHIKAWA und CHOU 1983 [67] vorgestellt. Im Gegensatz zu geschlossenen analytischen Modellen, die vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge liefern, liefern numerische Modelle weitaus detailliertere Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge. Es wird bemerkt, dass die Gewebeondulation die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der Steifigkeit und der Festigkeit i. a. stets reduzieren. Die in der Arbeit modellierten repräsentativen Elemente basiert auf mikroskopierten Schliffbildaufnahmen. Die Auswertung der Aufnahmen liefert im Wesentlichen einen sinusförmigen Verlauf der Mittellinien der Stränge sowie sinusförmige Querschnitte der einzelnen Stränge. Die Stränge werden als transversalisotrope Materialien modelliert. Dabei ist es wichtig, dass die Elementkoordinatensysteme der Kontur der Verläufe der einzelnen Stränge folgen, um die Materialeigenschaften gerichtet zuzuordnen. Im Bezug auf die Faservolumengehalte wird auf die faserverstärkten Bereiche der Stränge und die unverstärkten Bereiche des umgebenden Matrixsystems eingegangen. Dabei ist die Kenntnis des Faservolumengehalts in den faserverstärkten Strängen für eine Berechnung der strukturmechanischen Materialkennwerte mit mikromechanischen Homogenisierungsansätzen relevant, wobei dieser nicht direkt experimentell bestimmbar ist. Die experimentelle Ermittlung des Faservolumengehalts liefert nämlich den Faservolumengehalt des gesamten RVEs als globalen Faservolumengehalt. Deshalb wird der Faservolumengehalt in den faserverstärkten Strängen über das Verhältnis der faserverstärkten Bereiche bzw. Volumen zum gesamten Bereich bzw. Volumen berechnet. In der Arbeit wird dies als „Volumenkorrektur“ bezeichnet. Daraus folgt, dass in Laminaten mit Gewebeverstärkung beliebiger Art der Faservolumengehalt in den Rovingsträngen stets höher als der experimentell ermittelte Wert ist. Nicht von den Rovingsträngen ausgefüllte Bereiche sind idealerweise vollständig mit Reinharz gefüllt. Mit der vorgestellten Methode lässt sich dieser Zusammenhang jedoch eindeutig berücksichtigen.

Das Review von ANSAR, XINWEI und CHOUWEI 2011 [4] behandelt im Wesentlichen dreidimensional verstärkte Composites. Ausgewählte Abschnitte sind jedoch auch für die Modellierung von Geweben als zweidimensionale textile Halbzeuge relevant, da darin im Speziellen mesomechanische Zusammenhänge beschrieben werden. Für geometrische Parameter der Einzelstränge gibt WU 2009 [170] eine tabellarische Übersicht. Dabei sind die zur eindeutigen geometrischen Beschreibung des textilen Halbzeugs relevanten Parameter die Querschnittsform, der Verlauf und der Ort der Einzelstränge im textilen Halbzeug. Basierend auf der physikalischen Dichte des Materials der Monofilamente ergibt sich die lineare Dichte eines Rovingstrangs. Die Dicke und die Breite eines Rovingstrangs können experimentell ermittelt werden. Zusätzlich sind die Volumenverhältnisse der einzelnen Stränge, der lokale bzw. globale Faservolumengehalt und die Dicke des textilen Halbzeugs charakteristische Parameter. Zusammen mit der Anzahl der nicht ondulierten Stränge in einer Einzellage und die Anzahl der Kett- bzw. Schussstränge pro Längeneinheit in einer Einzellage ist die eindeutige Charakterisierung gewebeverstärkter Einzellagen möglich. Mit den zuvor genannten Parametern ergeben sich der globale Volumengehalt der Verstärkung, das Flächengewicht bzw. die Grammaturn und die Verhältnisse der Volumen der sich kreuzenden Stränge zueinander. Im weiteren Verlauf wird auf unterschiedliche Querschnittsformen der Rovingstränge eingegangen. In unterschiedlichen Arbeiten werden diese vereinfachend als ellipsenförmig, linsenförmig, rechteckförmig, kreisrunde oder „rennstrecken“-förmig (d. h. zwei parallele Geraden mit Halbkreisen verbunden) vorausgesetzt. Mit der Kenntnis der Querschnittsform und den charakteristischen geometrischen Abmessungen kann entsprechend der Faservolumengehalt berechnet werden. Bei der mikromechanischen Betrachtung mehrerer Monofilamente in umgebender Matrix geschieht dies über das Verhältnis der Querschnittsflächen. In BUCHANAN et al. 2009 [19] wird in diesem Zusammenhang auf die maximal erreichbaren Faservolumengehalte unter der Voraussetzung von Verstärkungsfasern mit kreisrundem Querschnitt eingegangen. Dabei existieren im Wesentlichen zwei unterschiedliche Packungsarten. Dies sind die quadratische und die hexagonale Packungsart. Wenn die Packung maximal dicht ist, berühren sich die Querschnitte

der einzelnen Monofilamente, und es handelt sich entsprechend um die quadratisch dichteste bzw. hexagonal dichteste Packung mit den jeweiligen maximalen Werten  $\varphi_{f,\max,\text{qdP}} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854 \approx 78,5\%$  bzw.  $\varphi_{f,\max,\text{hdP}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069 \approx 90,7\%$ . Im weiteren Verlauf werden relevante Berechnungsgleichungen für geometrische und volumetrische Verhältnisse zur Modellierung einzelner Stränge angegeben. Abschließend gibt eine tabellarische Gegenüberstellung unterschiedlichen mathematische Ansätze zur Form der Ondulationen bei Gewebeverstärkungen und der unterschiedlichen Querschnittsformen von Rovingsträngen im Schlifffbild wieder.

## 2.2 Abschließende Bemerkungen

Vor dem Hintergrund der recherchierten und zuvor dargestellten Arbeiten ergeben sich abschließende Bemerkungen. Die daraus gezogenen Folgerungen bilden die Grundlage für die, in der vorliegenden Arbeit durchgeführten, Untersuchungen.

### Mikromechanik, Packungsarten und Interphase

In [4] und [19] wird auf die maximal erreichbaren Faservolumengehalte unter der Voraussetzung von Verstärkungsfasern mit kreisrundem Querschnitt eingegangen. Dies sind die quadratisch dichteste bzw. die hexagonal dichteste Packung mit den jeweiligen maximalen Werten  $\varphi_{f,\max,\text{qdP}} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854 \approx 78,5\%$  bzw.  $\varphi_{f,\max,\text{hdP}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069 \approx 90,7\%$ . In [80] wird der der Interphase auf die Dämpfung in faserverstärkten Kunststoffen als signifikant identifiziert. Zusätzlich wird darin und in [160] der Einfluss der mikromechanischen Anordnung kreisrunder Verstärkungsfasern auf die Werkstoffdämpfung untersucht, die das Dämpfungsverhalten ebenfalls beeinflussen. Auf die Praktikabilität bzw. Realisierbarkeit, die mikromechanische Anordnung der Verstärkungsfasern zu beeinflussen, wird jedoch in beiden Fällen nicht eingegangen. Für die vorliegende Arbeit wird deshalb, analog zu [165], eine gleichbleibende Qualität der Interphase sowie die strukturelle Integrität der Probekörper vorausgesetzt. Zusätzlich wird bezüglich der mikromechanischen Packungsart vorausgesetzt, dass eine homogene Verteilung der Verstärkungsfasern vorliegt. Auch lokal tritt keine beiden dichtesten Packungsarten auf, sodass die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte mit mikromechanischen Homogenisierungsansätzen berechnet werden können.

### Mesomechanische Geometrie

In [56] wird das sog. Mosaik-Modell nach [67] beschrieben, das trotz unstetiger, nicht kontinuierlich modellierter Ondulation in Dickenrichtung gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Dämpfungskennwerten liefert. Dagegen wird in [79] die sogenannte Faserwelligkeit in Längsrichtung in der Ebene mit trigonometrischen Funktion realitätsnäher modelliert. Obwohl dieser Ansatz nicht auf der Beschreibung einer Ondulation in gewebeverstärkten Eizellagen basiert, kann er analog für eine solche verwendet werden. Im vorliegenden Fall werden die Abweichungen in der Orientierung der Verstärkungsfasern als herstellungsbedingte Fehler bezeichnet. Dies ist für gewebeverstärkte Einzellagen so nicht zutreffend, da die Ondulation durch die Geometrie des zweidimensionalen textilen Halbzeugs bedingt ist. Im Gegensatz zu herstellungsbedingten Fehlstellen sind Ondulationen Welligkeiten in Dickenrichtung zu betrachten, obwohl diese mit dem gleichen Ansatz analytisch beschrieben werden können, wie in OTTAWA et al. 2012 [129], analog zu MAZZEO, TENUTA et al. 2012 [86], TREVISO, MUMOLI et al. 2013 [159], VALENTINO et al. 2013 [163] und VALENTINO et al. 2014 [164] sowie [44], dargestellt. Die betrachteten Faserwelligkeiten unterscheiden sich jedoch von typischen Ondulationen in Geweben, da diese nicht durch die Kreuzung von Kett- und Schussstrang entstehen. Geometrischen Abmessungen in der mesomechanischen Betrachtungsebene, meist von Leinwandgeweben, sind als schematische Darstellungen oder mikroskopierten Schlifffbildern u. a. in [5], [6], [8], [56] und [151] dargestellt. Dabei wird meist eine gewebeverstärkte Einzellage aus Leinwandgewebe mit  $[(0/90)]_n$ -Orientierung, d. h. mit der Betrachtungsrichtung in Kettrichtung, behandelt. In allen Arbeiten werden dabei

bezüglich der geometrischen Verhältnisse und der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der sich ergebenden unterschiedlichen Bereiche vereinfachende Voraussetzungen getroffen. Während die Voraussetzungen bezüglich der mesomechanischen Geometrie sich teilweise unterscheiden, entsprechen sich die Voraussetzungen bezüglich der strukturmechanischen Voraussetzungen. Die ondulierten Stränge werden dabei stets als ideal parallel unidirektional verstärkt vorausgesetzt, umgeben von Bereichen mit Reinharz ohne Faserverstärkung. In einigen Arbeiten sind neben den geometrischen Verhältnissen zusätzlich die relevanten geometrischen Abmessungen angegeben. Sie dienen der eindeutigen Beschreibung der Geometrie der Gewebeondulation sowie zur Abschätzung der realistischen mesomechanischen Dimensionen. In keiner der Arbeiten, die numerische FE-Berechnungen darstellen, wird jedoch auf die, für die Vernetzung problematischen, Stellen in den Ecken der sinus- bzw. linsenförmigen Querschnitte eingegangen, die evtl. Modifikationen bedürfen.

### **Grad der Ondulation**

In [55] wird erstmals die Auswirkung der Variation des geometrischen Parameters der Länge einer Ondulation in FE-Berechnungen betrachtet. In diesem Fall zeigen die Ergebnisse, dass die Materialdämpfung relativ insensitive auf die Variation der Länge reagiert. Der Bereich der Variation ist jedoch absolut und relativ betrachtet verhältnismäßig klein. In den FE-Berechnungen von [79] wird erstmals der Begriff „Welligkeitsverhältnis“ verwendet. Es wird als Verhältnis der Amplitude  $A$  zur Länge der Welligkeit  $L$  mit  $\frac{A}{L}$  angegeben. Es wird jedoch kein Formelzeichen dafür eingeführt. Ebenso wird der Hintergrund für die Definition nicht erläutert. Es wird angegeben, dass in den FE-Berechnungen das Welligkeitsverhältnis von  $< 0,1$  bis  $0,2$  variiert worden ist. Dazu werden jedoch keine graphische Darstellungen der Ergebnisse geliefert. Die Ergebnisse der (quasi-)statischen Berechnungen zeigen, dass für den betrachteten Maximalwert  $\frac{A}{L} = 0,2$  die Steifigkeit in Längsrichtung signifikant abnimmt. Dies ist evtl. auf die deutlich geringere Steifigkeit der umgebenden Matrix, und damit auf den fehlenden Bettungseffekt durch senkrecht zur Welligkeit verlaufende Schussfäden zurückzuführen. Die Steifigkeiten senkrecht dazu sowie alle drei Schubmoduln verhalten sich gegensätzlich, und steigen an. Die Ergebnisse werden mit einer steigenden versteifenden Wirkung in Dickenrichtung mit steigendem Welligkeitsverhältnis begründet. Die Darstellung der FE-Berechnungen enthält jedoch keine Bereiche von aufgebracht Verformungen oder aufgebracht Dehnungen, in denen dieses Verhalten ermittelt worden ist. Obwohl in [79] statt Gewebeondulationen die Faserwelligkeit in Längsrichtung in der Ebene als herstellungsbedingte Fehlstelle behandelt, sind die Überlegungen modifiziert für die vorliegende Arbeit anwendbar.

### **Mesomechanische Kinematik**

Das Wirken eines strukturdynamischen Dämpfungsmechanismus in gewebeverstärkten Einzellagen von faserverstärkten Kunststoffen wird in [39] explizit erwähnt, nicht jedoch weiter behandelt. Obwohl darin ausschließlichen Probekörpern mit Lagenaufbauten aus gewebeverstärkten Einzellagen experimentell strukturdynamisch untersucht werden, wird jedoch auf mögliche Effekte, die in der mesomechanischen Betrachtungsebene wirken, und entsprechend als dämpfungserhöhende Materialkopplungen interpretiert werden können, nicht weiter eingegangen. In [13] wird bezüglich einer vermuteten dämpfungserhöhenden Wirkung in gewebeverstärkten Einzellagen auf [131] verwiesen, das mit dem sog. modifizierten Fabric Geometry Model (FGM) einen ersten analytischen Ansatz dafür liefert. In [36] wird die Materialdämpfung in faserverstärkten Kunststoffen mit unterschiedlichen textilen Halbzeugen und gleichem Matrixsystem untersucht. Bei gleicher Vorzugsrichtung unterscheiden sich die Werte der Materialdämpfungen dabei signifikant voneinander. Das UD-Gelege und das UD-Gewebe weisen deutlich geringere Dämpfungswerte auf als das Leinwand- und das Köpergewebe. Dies wird mit energiedissipierenden Reibungseffekten bzw. Relativbewegungen zwischen den Kett- und Schusssträngen begründet. Da bei sorgfältig hergestellten Materialien und ungeschädigten Probekörpern jedoch von einer ausreichend guten Tränkung des Gewebes, und damit einer ausreichend hohen Faser-Matrix-Haftung, ausgegan-

gen werden kann, ist diese Beobachtung ein Nachweis für zusätzlich dissipierte Energie bei frei abklingenden Schwingungen, auf dem das wiederholte Wirken einer mesomechanischen Kinematik aufgrund von geometrischen Parametern der Ondulation in gewebeverstärkten Einzellagen basiert. Einfache analytische Ansätze mit der Methode der Untersuchung der Verzerrungsenergie unter der vereinfachenden Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes genügen nicht mehr zur Beschreibung dieses eigentlich dreidimensional wirkenden Effekts. Deshalb ist dieser Aspekt in numerischen Untersuchungen mit FE-Berechnungen in OTTAWA et al. 2012 [129], analog zu MAZZEO, TENUTA et al. 2012 [86], TREVISO, MUMOLI et al. 2013 [159], VALENTINO et al. 2013 [163] und VALENTINO et al. 2014 [164] sowie [44], betrachtet worden. Darin wird das mesomechanische Wirkprinzip vorgestellt und anhand einer repräsentativen Sequenz eines Leinwandgewebes identifiziert. Dabei sind die strukturmechanischen Materialeigenschaften und die Randbedingungen parametrisch variiert worden. In der Auswertung der numerischen Ergebnisse der FE-Berechnungen wird, basierend auf der resultierenden Reaktion des FE-Modells, der elastische Anteil und der Anteil der mesomechanischen Kinematik aufgrund von geometrischen Parametern separiert. Die Ergebnisse sind schließlich grundlegend im Biegeschwingversuch mit flachen stabförmigen Probekörpern aus basaltfaserverstärktem Epoxidharz mit 0°-unidirektionaler Faserverstärkung und in Kettrichtung gewebeverstärkten Probekörpern validiert worden.

### FE-Berechnungen

In [56] wird auf die FE-Modellierung einzelner Rovingstränge in repräsentativen Elementen von gewebeverstärkten Einzellagen eingegangen. Sie werden als, mit Harz imprägnierten, Rovingstränge betrachtet. In der Realität bestehen die Rovingstränge aus mehreren Tausend Monofilamenten. Zur vereinfachten Modellierung werden die imprägnierten Rovingstränge als unidirektional verstärkte Bereiche betrachtet, bei denen der Verlauf der Verstärkungsfasern, und damit die Vorzugsrichtung, der Kontur der Ondulation folgen. In [84] wird auf die idealisierte Fallunterscheidung der Positionierung von zwei übereinanderliegenden Gewebelagen eingegangen, und die Problematik angesprochen, dass in FE-Berechnungen untersuchte repräsentative Elemente in realen Laminaten in der idealisierten Form meist nicht vorliegen. Die beiden idealisierten Positionierungsfälle sind die „in-phase“ oder „out-of-phase“. Im Fall „in-phase“ kommen die Maxima der Kettstränge der unteren Lage auf den Minima der Schussstränge der darüberliegenden Lage zu liegen und umgekehrt. Im Gegensatz dazu kommen im Fall „out-of-phase“ die Maxima der Kettfäden der unteren Lage auf den Minima der Kettstränge der oberen Lage zu liegen. Abhängig vom jeweiligen Positionierungsfall kann ein repräsentatives Volumenelement identifiziert werden. Während es im Positionierungsfall „in-phase“ dem klassischen RVE eines leinwandgewebeverstärkten Kunststoffes entspricht, besteht ein RVE im Positionierungsfall „out-of-phase“ aus zwei übereinander liegenden phasenverschobenen RVEs. In Realität wird jedoch keiner der beiden idealisierten Positionierungsfälle so auftreten. Aufgrund der Biegeschlaffheit der einzelnen Stränge, der Schiebeweichheit des Gewebes und der Neigung der Stränge in Zwischenräume zu gleiten, kommen die ondulierten Stränge von Ober- bzw. Unterseite der aneinander grenzenden Lagen in den Zwischenräumen der unteren Lage zu liegen. Die in RVEs modellierte allseitig umgebende Matrix bildet sich in der Realität so nicht aus. Dies wird durch Schlifffbildaufnahmen von Laminaten, die mit Geweben unterschiedlicher Verstärkungsfasern und evtl. unterschiedlicher Gewebearten im Heißluftautoklavverfahren hergestellt worden sind, anschaulich nachgewiesen.

### Globaler und lokaler Faservolumengehalt

In [84] wird für die imprägnierten Stränge eines repräsentativen Elements ein verhältnismäßig hoher Faservolumengehalt von  $\varphi_f = 75\%$  angenommen. Dieser Faservolumengehalt ist aus mikroskopischen Aufnahmen, und der identifizierten hexagonalen Packungsart der Monofilamente, ermittelt worden. Dieser verhältnismäßig hohe Faservolumengehalt ist bereits in einer vorangegangenen Arbeit von MATSUDA et al. 2002 [85] verwendet worden. In [8] wird bezüglich der unterschiedlichen Bereiche eines repräsentativen Elements auf die faserverstärkten Bereiche der Stränge und die unverstärkten Bereiche des umgebenden Matrixsystems eingegangen.

Da die umgebende Matrix den Faservolumengehalt des gesamten repräsentativen Elements herabsetzt, ergibt sich eine Fallunterscheidung zum lokalen Faservolumengehalt im imprägnierten Rovingstrang und zum globalen Faservolumengehalt des gesamten repräsentativen Elements. Der lokale Faservolumengehalt in den faserverstärkten Strängen für eine Berechnung der strukturellen Materialkennwerte mit mikromechanischen Mischungsregeln relevant. Der lokale Faservolumengehalt ist jedoch experimentell nicht direkt bestimmbar, da eine experimentelle Ermittlung des Faservolumengehalts stets den Faservolumengehalt des gesamten RVEs als globalen Faservolumengehalt liefert. Deshalb wird in [8] die Berechnung des lokalen Faservolumengehalts über die sog. „Volumenkorrektur“ berechnet, die auf dem Verhältnis der faserverstärkten Bereiche zum gesamten Bereich des repräsentativen Elements basiert. Da die beiden in [84] dargestellten Positionierungsfälle jedoch in der Realität so nicht auftreten, und die mesomechanischen Bereiche mit reiner Matrix deutlich kleiner sind, sind die Unterschiede zwischen globalen und lokalen Faservolumengehalt deutlich geringer.

### **Biegeschwingversuch**

In einer Vielzahl vorgestellter Arbeiten, wie beispielsweise [36], [55], [56], [77], [93], [127], [144], [145], [147], [148], [152] und [157], wird der Biegeschwingversuch mit flachen stabförmigen Probekörpern als geeignete experimentelle Methode zur Bestimmung strukturdynamischer Materialkennwerte genannt. Bei geringen Amplituden und damit niedrigen Spannungsniveaus entsprechen sich dabei die Hysteresisdämpfung und die viskose Dämpfung. Der Biegeschwingversuch eignet sich zudem besonders wegen des verhältnismäßig großen Bereichs mit linearem Dämpfungsverhalten, was die experimentelle Bestimmung der Werkstoffdämpfung zur Validierung von Ergebnissen analytischer und/oder numerischer Untersuchungen erlaubt. Der Biegeschwingversuch ist als experimentelle Methode zur Bestimmung strukturdynamischer Werkstoffkennwerte zudem in der DIN EN ISO 6721 von 1996 [109] genormt, die die zurückgezogene DIN 53440 von 1984 [99] ersetzt.

### **Parameter der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen**

Bezüglich einer repräsentativen Auswertung müssen die Parameter der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen vergleichbar sein. In [147] und [148] wird auf die Sensitivität der Ergebnisse bezüglich der Amplitude und der Zeitdauer des Biegeschwingversuchs eingegangen. Im Einzelnen sind die Versuche bei drei unterschiedlich starken Anregefrequenzen durchgeführt worden. Bei ausgewählten Anregefrequenzen sind zusätzlich die Auswertungen über eine kurze und über eine längere Zeitdauer (im Detail über 10 bzw. 50 Schwingungszyklen) erfolgt. Im Gegensatz zu den ermittelten Steifigkeiten hängen die ermittelten Dämpfungskennwerte stark von der jeweiligen Frequenz und der Schwingungsamplitude ab. Dabei steigt mit zunehmender Amplitude der Schwingung die gemessene Werkstoffdämpfung. Der kurze Betrachtungszeitraum mit 10 Schwingungszyklen liefert tendenziell stets höhere Dämpfungskennwerte als der längere Betrachtungszeitraum mit 50 Schwingungszyklen. Die Gründe hierfür sind geometrische und/oder physikalische Nichtlinearitäten, die vermieden bzw. auf ein konstantes Minimum reduziert werden müssen, sodass die ermittelten strukturdynamischen Werkstoffeigenschaften als linear viskoelastisch betrachtet werden können.

### **Auswertung der Ergebnisse**

Durch das Verwerfen von anfänglichen Bereichen der Messung wird sichergestellt, dass inhomogene Anteile der Schwingung am Anfang nicht berücksichtigt werden, und lediglich die harmonischen Schwingungen im eingeschwungenen Zustand ausgewertet werden. Bezüglich der Auswertung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen wird in [147] und [148] empfohlen die Dämpfung bei niedrigen Eigenfrequenzen durch das Abklingen der Schwingung im Zeitbereich zu ermitteln, und lediglich bei hohen Eigenfrequenzen die Berechnung des Dämpfungsmaßes über die Halbwertsbreite im Frequenzbereich durchzuführen. Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  mit Speicher- und Verlustmodul über die Eigenfrequenz und die Materialdämpfung aus dem Messsignal im Zeitbereich mit der Kenntnis der physikalischen Werkstoffkennwerte Ma-

terialdichte, Querschnittsabmessungen und Auskraglänge wird in der vorliegenden Arbeit, wie in MICKLITZ et al. 2014 [89], ROMANO et al. 2014 [140] und in ROMANO et al. 2014 [141] dargestellt, und analog zu [144] und [145], angewendet.

### **Validierung**

Von den zuvor dargestellten Arbeiten enthalten v. a. [36], [48], [55], [56], [72], [77], [127], [144], [145], [152] und [165] numerische Untersuchungen mit der FE-Methode sowie deren Validierung in experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen, während anderen Arbeiten entweder ausschließlich experimentelle, numerische oder analytische Ergebnisse enthalten. Wie in [26] dargestellt, wirken in faserverstärkten Kunststoffen unterschiedliche Dämpfungsmechanismen zeitgleich, und miteinander gekoppelt. Zur phänomenologischen Bestimmung der Materialdämpfung dient dabei die experimentelle strukturdynamische Untersuchung von flachen stabförmigen Probekörpern im Biegeschwingversuch. Eine detaillierte Differenzierung der unterschiedlichen Dämpfungsmechanismen, die zeitgleich und gekoppelt auftreten, ist dabei lediglich mit erhöhtem Aufwand möglich, und im Hinblick auf die vorliegende Arbeit auch nicht notwendig. Die Methode der Vergleichsmessung geometrisch gleicher Probekörper mit lediglich unterschiedlicher Art der Faserverstärkung (unidirektional verstärkt und gewebeverstärkt) unter zwei unterschiedlichen konstanten Bedingungen (nämlich unter der Voraussetzung konstanter geometrischer und konstanter dynamischer Bedingungen) erlaubt nämlich, die Parameter, die nicht der Art der Faserverstärkung zuzuordnen sind, als konstant voranzusetzen, und diese zu vernachlässigen bzw. zu eliminieren. Die Vorgehensweise ist analog in MICKLITZ et al. 2014 [89], ROMANO et al. 2014 [140] und in ROMANO et al. 2014 [141] angewendet worden.

### **Reproduzierbarkeit und Sensitivität**

Im Hinblick auf die statistische Absicherung, die Reproduzierbarkeit und die Ermittlung der Sensitivität der Ergebnisse auf unterschiedliche Parameter der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen sind u. a. in [36], [144], [145], [147] und [148] relevante Aspekte enthalten, die in der vorliegenden Arbeit berücksichtigt werden. Der Nachweis der Reproduzierbarkeit, sowie eine zugehörige Sensitivitätsanalyse und Parameteridentifikation, der in der vorliegenden Arbeit in Kapitel 10 dargestellten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen mit flachen stabförmigen Probekörpern ist bezüglich relevanter Aspekte im Anhang A.1 ab Seite 227 ausführlich beschrieben.



## 3 Ausgewählte Aspekte zu faserverstärkten Kunststoffen

Faserverstärkte Kunststoffe bestehen aus zwei oder mehr Einzelkomponenten. Diese sind im Einzelnen die Verstärkungsfasern und das polymere Matrixsystem. Die mechanisch hochwertigen Eigenschaften der Verstärkungsfasern beruhen auf dem Größeneinfluss. Mit kleiner werdenden Monofilamentdurchmessern sinkt aufgrund von statistischen Zusammenhängen die Wahrscheinlichkeit von Fehlstellen im Material. Die daraus resultierende Zunahme an Steifigkeit und Festigkeit ist dabei deutlich nichtlinear und überproportional. Polymere Matrixsysteme besitzen meist vergleichsweise sehr geringe mechanische Werkstoffkennwerte. Die Kombination der beiden Einzelkomponenten liefert faserverstärkte Kunststoffe als Verbundmaterial. Aufgrund hoher dichtespezifischer mechanischer Werkstoffkennwerte besitzen faserverstärkte Kunststoffe Leichtbaupotential. Dieses äußert sich v. a. in hohen dichtespezifischen Festigkeiten und hohen dichtespezifischen Steifigkeiten. Leichtbau mit faserverstärkten Kunststoffen ermöglicht damit die Realisierung von Strukturen mit geringem Gewicht. Weitere Motive für den Einsatz von faserverstärkten Kunststoffen sind Anisotropie (d. h. richtungsabhängige Eigenschaften einer Einzelschicht sowie definierte Belastungs-Verformungs-Reaktionen von Laminaten), und die Möglichkeit der Realisierung von Integralbauweisen oder mechanisch hochwertige Eigenschaften im Zeit- und Dauerfestigkeitsbereich [31].

Die dargestellten Aspekte sind im Wesentlichen aus EHRENSTEIN 2006 [29], EHRLICH 2004 [30], EHRLICH 2012 [31], FLEMMING, ZIEGMANN und ROTH 1996 [41], FLEMMING, ZIEGMANN und ROTH 1999 [40], MICHAELI, HUYBRECHTS und WEGENER 1995 [88], MOSER 1992 [92], NEITZEL, MITSCHANG und BREUER 2014 [128], SCHÜRMAN 2005 [149] sowie WITTEN 2010 [169] exzerpiert.

### 3.1 Verstärkungsfasern

Es gibt unterschiedliche Arten von Verstärkungsfasern. Darunter sind besonders Kohlenstoff-, Glas- und Aramidfasern relevant, die in technischen Hochwertanwendungen Einsatz finden. Der Hauptgrund dafür ist, dass in den jeweiligen Fällen ausreichend konstante Materialeigenschaften garantiert werden können. Dies wird durch die Rückverfolgbarkeit bzw. die Dokumentation des Herstellungsprozesses sichergestellt. Namhafte Hersteller ermitteln im Zuge einer Qualitätskontrolle bzw. Materialcharakterisierung selbst oder an externen Instituten zusätzlich Materialkennwerte. Diese werden für die weitere Verwendung in Datenblättern angegeben. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden aufgrund ihrer technischen Relevanz exemplarisch Kohlenstofffasern behandelt.

#### **Kohlenstofffasern**

Kohlenstofffasern sind organische Verstärkungsfasern. Sie werden in einem mehrstufigen kontinuierlichen Prozess hauptsächlich aus Polyacrylnitril (PAN), oder alternativ Pech, hergestellt. Dies geschieht durch Stabilisieren unter Temperaturlast in oxidativer Atmosphäre und unter Zugspannung und anschließendes Carbonisieren unter Stickstoffatmosphäre (Schutzgas) ohne Zugspannung. Die folgende Graphitierung erfolgt wieder unter Temperaturlast in Schutzgasatmosphäre und unter Zugspannung. Das Aufbringen eines Haftvermittlers zu Matrixsystemen, der

als Schlichte bezeichnet wird, schließt den Herstellungsprozess ab. Aufgrund des Herstellungsprozesses weisen Kohlenstofffasern in Längsrichtung elektrochemisch starke kovalente Bindungen auf. Im Gegensatz dazu weisen die Fasern in Querrichtung elektrochemisch schwache Wasserstoffbrückenbindungen, auch VAN-DER-WAALS-Bindungen genannt, auf. Aufgrund der beschriebenen chemischen Struktur besitzen Kohlenstofffasern selbst in Längsrichtung stark gerichtete, transversalisotrope Eigenschaften.

Im Folgenden werden die physikalischen und mechanischen Eigenschaften der hochfesten High-Tenacity-Fasern (HT-Fasern) angeführt. Sie machen einen Großteil der verwendeten Kohlenstofffasern aus und stellen daher den Standardtyp dar [149]. Die physikalische Eigenschaft der Dichte von Kohlenstofffasern beträgt  $\rho_f \approx 1,74\text{--}1,8 \text{ g/cm}^3$ . Wesentliche strukturelle Eigenschaften von Kohlenstofffasern sind u. a. die Steifigkeiten, namentlich der Elastizitätsmodul parallel zur Faserrichtung  $E_{f,1} = 230 \text{ GPa}$  und der Elastizitätsmodul senkrecht dazu  $E_{f,2} = 28 \text{ GPa}$  sowie die Querverformung für Belastung in Faserlängsrichtung und Kontraktion in Faserquerrichtung  $\nu_{f,12} = 0,23$ . Zusätzlich zur mechanischen Anisotropie verhalten sich die thermischen Ausdehnungskoeffizienten charakteristisch und anisotrop. Während der thermische Ausdehnungskoeffizient quer zur Faserrichtung positiv ist,  $\alpha_{f,2} = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{K}$ , ist er in Längsrichtung negativ,  $\alpha_{f,1} = -0,455 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{K}$ .

Der Durchmesser einzelner Faserfilamente beträgt ca.  $5\text{--}10 \text{ }\mu\text{m}$ . Dabei wird die Feinheit der Rovings nach der Anzahl der in einem Roving enthaltenen Filamente in 1000 in der Einheit k angegeben. In den folgenden experimentellen Untersuchungen werden Rovings mit  $6 \text{ k} = 400 \text{ tex}$  und  $12 \text{ k} = 800 \text{ tex}$  verwendet. Dabei ist tex eine textile Einheit, die als lineare Dichte  $\frac{\text{g}}{\text{km}}$  definiert ist. Die Filamentdurchmesser betragen ca.  $7 \text{ }\mu\text{m}$ .

### 3.2 Schlichte bzw. Finish und Interphase

Bei jeder der zuvor beschriebenen Arten von Verstärkungsfasern wird im letzten Prozessschritt der Herstellung eine Beschichtung aufgebracht [149]. Diese Beschichtung ist individuell für die jeweilige Art der Verstärkungsfasern. Dabei unterscheidet sich deren Beschaffenheit zusätzlich nach dem jeweiligen Anwendungsfall, beispielsweise nach dem vorgesehenen Matrixsystem.

Die Beschichtung erfüllt mehrere Funktionen. Grundlegende Funktionen sind der Schutz der Verstärkungsfasern gegen Abrasion sowie die Beeinflussung der Tränkbarkeit. Für die späteren mechanischen Eigenschaften eines Laminats ist jedoch die Funktion der Haftvermittlung zwischen Fasern und Matrix wesentlich. Dabei ist eine hohe Faser-Matrix-Haftung anzustreben, um einen mechanisch hochwertigen faserverstärkten Kunststoff zu erhalten. Im Allgemeinen wird diese Beschichtung als Schlichte bezeichnet [149]. Teilweise wird je nach Funktion noch zwischen Schlichte als Schutzbeschichtung und Finish als Haftvermittler differenziert [92]. Meist sind lediglich wenige Informationen über die chemische Formulierung der Schlichte bekannt. Für die Verwendung von Verstärkungsfasern in einem faserverstärktem Kunststoff mit Epoxidharz als duroplastisches Matrixsystem werden meist Schichten auf der Basis von (Amino-)Silan eingesetzt.

Im Herstellungsprozess bzw. während der Aushärtung reagiert der Haftvermittler mit der Matrix, sodass die sog. Interphase entsteht. Ihre Dicke beträgt ungefähr  $200 \text{ nm}$ . Abhängig vom Monofilamentdurchmesser und dem Faservolumengehalt eines Laminats bestehen damit ca.  $8 \%$  der Matrix aus der Grenzschicht [149]. Sie unterscheidet sich mechanisch und chemisch sowohl vom Werkstoff der Verstärkungsfasern als auch vom Matrixsystem. Aus diesem Grund wird die Interphase bzw. Grenzschicht auch als dritte Komponente in einem faserverstärkten Kunststoff, neben den eigentlichen Einzelkomponenten Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff, bezeichnet.

### 3.3 Polymere Matrixsysteme

Die Aufgaben des Matrixwerkstoffes in faserverstärkten Kunststoffen sind charakteristisch. Es werden Duroplaste im Allgemeinen und (warmaushärtende) Epoxidharze im Speziellen als polymere Matrixsysteme vorgestellt.

#### Aufgaben des Matrixwerkstoffes

Im Allgemeinen erfüllt der Matrixwerkstoff in einem faserverstärkten Kunststoff mehrere Aufgaben. Diese sind im Einzelnen [31], [92], [149]:

- Fixierung der Verstärkungsfasern in der gewünschten geometrischen Anordnung,
- Ermöglichung der Einleitung von Kräften in die Verstärkungsfasern und damit der Kräfteinleitung in die Struktur. Dies geschieht durch Verklebung der Verstärkungsfasern, und Übertragung von Kräften zwischen den einzelnen Verstärkungsfasern im Wesentlichen durch Schubspannungen.
- Aufnahme von mechanischen Belastungen, v. a. bei Beanspruchungen quer zur Faserrichtung sowie bei Schubbeanspruchungen,
- Schutz der Fasern gegen Ausknicken (Schubknicken) bei Druckbeanspruchung in Faserrichtungsrichtung,
- Schutz der Verstärkungsfasern gegen Umgebungseinflüsse (mechanischer Abrieb, chemisch reaktive Substanzen oder energiereicher Strahlung) und
- Verklebung der Einzelschichten in einem (Mehr-)Schichtverbund als Laminat und Übertragung von Kräften zwischen den Einzelschichten.

#### Duroplaste

Als polymere Matrixsysteme sind für die Herstellung mechanisch hochwertiger faserverstärkter Kunststoffe vor allem duroplastische Matrixsysteme relevant. Im Vergleich zu anderen polymeren Matrixsystemen, wie beispielsweise Thermoplasten oder Elastomeren, weisen Duroplaste mechanisch hochwertige Werkstoffkennwerte auf. Sie vernetzen räumlich engmaschig und ungeordnet (amorph) zu einem hochmolekularen Polymer. Dabei vernetzen die einzelnen Monomere in engen Abständen mit elektrochemisch starken kovalenten Bindungen (Atombindungen). Diese Vernetzung ist nicht reversibel.

Duroplastische Matrixsysteme bestehen meist aus mehreren Komponenten (Harz und Härter bei zweikomponentigen Systemen, Harz, Härter und Beschleuniger bei dreikomponentigen Systemen), die vor der Verarbeitung angemischt werden. Durch eine chemische Reaktion entsteht der feste Formstoff. Bis zum Beginn der Gelierung, d. h. bis zum Erreichen der Topfzeit bei kaltaushärtenden Matrixsystemen bzw. bis zum Erreichen der Geliertemperatur bei warmaushärtenden Matrixsystemen, ist ihre Verarbeitung verhältnismäßig einfach, da sie im Allgemeinen niedrigviskos sind bzw. durch geregelte Temperierung niedrig viskos gehalten werden können. Diese Eigenschaft ermöglicht eine gute Benetzung und Imprägnierung der Verstärkungsfasern.

#### *Epoxidharze*

Epoxidharze (EP, engl.: epoxy resins) weisen selbst unter den unterschiedlichen Arten der Duroplaste mechanisch hochwertige Eigenschaften auf. Aus diesem Grund werden sie meist für Hochleistungsverbundwerkstoffe eingesetzt [92]. Die Basis der meisten Epoxidharze Bisphenol. Epoxidharze entstehen durch den chemischen Reaktionstyp der Polyaddition. Dabei werden größere, stöchiometrisch genau gemessene Mengen an eigenschaftsbestimmenden Reaktionsmitteln angemischt [92]. Mit dem Anmischen der Einzelkomponenten wird der exotherme Prozess der Härtung eingeleitet. Der Härteprozess ist im eigentlichen Sinne nicht aufzuhalten und irreversibel. Bei der Polyaddition entstehen keine Nebenprodukte der Reaktion, sodass keine flüchtigen Stoffe freigesetzt werden. Da die Gelierung erst zwischen 50 % bis 70 % Umsatz stattfindet, tritt die Volumenschwindung aufgrund des chemischen Härtevorgangs überwiegend in der flüssigen Phase ein. Daraus ergibt sich der Vorteil, dass die Schwindung größtenteils durch

Nachfließen flüssigen Harzes kompensiert wird. Damit beträgt die Schwindung bei EP-Harzen lediglich 2 % bis 5 % [149]. Daraus resultierende Eigenspannungen aufgrund der Schwindung bzw. Temperaturbelastung in der Faser-Matrix-Grenzfläche als Schubspannungen, wie beispielsweise in BODE 1996 [15] untersucht, sind, verglichen zu anderen Matrixsystemen, gering. Durch die vergleichsweise gute Faser-Matrix-Haftung können schließlich Steifigkeiten bzw. Festigkeiten des Werkstoffes besser ausgenutzt werden. Im Detail wird angestrebt, dass sich die Aushärtung mit einer wandernden Härtingsfront ausbildet [31], [149]. Dies ist besonders für dickwandige Strukturen relevant [32]. Beispielsweise wird bei einer Aushärtung im Heißluftautoklavverfahren angestrebt, das Laminat von unten beginnend auszuhärten. Dadurch wird ein Nachfließen noch ausreichend niedrig viskosen Harzes von der harzreichen Außenseite ermöglicht. Zusätzlich wird die Neigung zur Porenbildung bzw. zum Einschluss von Poren unter einer aushärtenden Harzfront verringert [149].

In der vorliegenden Arbeit wird ein dreikomponentiges anhydridisches Wickelharz als duroplastisches Matrixsystem verwendet.

### 3.4 Textile Halbzeuge

Als ausgewählte Arten von textilen Halbzeugen werden Rovings und Gewebe detaillierter vorgestellt. Sie sind die relevanten textilen Halbzeuge für die durchgeführten experimentellen Untersuchungen.

#### **Ausgewählte trockene textile Halbzeuge**

Als ausgewählte trockene textile Halbzeuge wird kurz auf Rovings und Gewebe eingegangen. Dabei sind Rovings eine (quasi-)endlose parallele Anordnung einzelner Monofilamente unterschiedlicher Stärke. Rovings werden deshalb als eindimensionale Halbzeuge bezeichnet. Gewebe werden meist aus Rovings hergestellt. Dazu werden unterschiedliche Stränge meist in zueinander senkrechter Orientierung miteinander verwoben. Gewebe werden deshalb als zweidimensionale Halbzeuge bezeichnet.

#### *Rovings*

Als Rovings werden im Allgemeinen die Stränge der Verstärkungsfasern genannt. Rovings sind eine eindimensionale Faserverstärkung und damit ein eindimensionales textiles Halbzeug. Rovings liegen aufgespult auf Spulen mit Innen- oder Außenabzug vor.

Die Rovingstränge werden dabei in Direktrovings und assemblierte Rovings unterschieden. Während Direktrovings direkt mit der endgültigen Anzahl an Monofilamenten aus der Schmelze abgezogen werden, werden bei assemblierten Rovings mehrere Direktrovings ungedreht parallel zusammengeführt und auf Spulen mit Außenabzug aufgespult.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Direktrovings und assemblierten Rovings ist die Spannungsverteilung über den Querschnitt. Bei Direktrovings liegt durch den gleichzeitigen Herstellungsprozess der einzelnen Monofilamente ohne weitere Eingriffe eine verhältnismäßig homogene Gleichverteilung der Spannungen vor. Die einzelnen Monofilamente sind gleich lang. Im Gegensatz dazu entstehen durch den Prozess des Assemblierens mehrerer Direktrovings zu einem assemblierten Roving prozessbedingt geringfügig Durchhänge. Die Durchhänge resultieren aus Längenunterschieden, die eine deutlich inhomogenere Verteilung der Spannungen über den Querschnitt bedingen. Für eine mechanische Charakterisierung des Faserwerkstoffes sind aufgrund der homogeneren Spannungsverteilung demnach Direktrovings wünschenswert.

Aus Rovings als eindimensionale textile Halbzeuge können in ausgewählten Verfahren unidirektional verstärkte Einzelschichten (UD-ES) [31], [149] oder auch parallelfaserverstärkte Einzelschicht (P-ES) [92] hergestellt werden. In einer unidirektional verstärkten Einzelschicht verlaufen alle Verstärkungsfasern bzw. Rovings idealisiert in eine Vorzugsrichtung und liegen ideal gestreckt

vor [149]. In stark vereinfachenden analytischen und numerischen Modellen wird eine solche Verstärkung oft vorausgesetzt, da sie geschlossen lösbar sind. Die vereinfachenden Voraussetzungen einer idealen Orientierung der Vorzugsrichtung sowie eine homogene Spannungsverteilung über den Querschnitt einer jeweiligen Einzelschicht bzw. über den Querschnitt aller Rovingstränge trifft jedoch in der Realität lediglich in erster Näherung zu.

#### *Gewebe*

Aus Rovings als eindimensionalem textilem Halbzeug kann durch die Weiterverarbeitung zu Geweben ein zweidimensionales textiles Halbzeug mit einer zweidimensionalen Faserverstärkung hergestellt werden. Beim Einsatz von zweidimensionalen (flächigen) Halbzeugen steht hauptsächlich die einfachere Handhabung sowie die zeit- und kostengünstige Verarbeitbarkeit im Vordergrund. Ein weiterer Grund hierfür ist, dass lediglich mit ausgewählten Fertigungsverfahren eine direkte Verarbeitung von Rovings zu mechanisch hochwertigen unidirektional verstärkten Einzelschichten möglich ist [149].

Da Leichtbaukonstruktionen meist auf dünnwandigen flächigen Laminaten basieren, eignen sich flächige, also zweidimensionale, textile Halbzeuge besonders [149]. Zum Großteil handelt es sich dabei um Gewebe unterschiedlicher Webart bzw. Konstruktion. Gewebe weisen rechtwinklig zueinander orientierte Faserrichtungen auf. Bedingt durch den Herstellungsprozess werden dabei die Kett- und die Schussrichtung unterschieden. Die Kettfäden verlaufen in Längsrichtung und werden im Herstellungsprozess einmalig eingezogen. Sie werden deshalb als Träger bezeichnet. Im Gegensatz dazu werden die Schussfäden nacheinander von einer Webkante zur anderen über die gesamte Webbreite hinweg durch die Kettfäden gezogen, sodass das Gewebe entsteht.

Im Gegensatz zu einer unidirektional verstärkten Einzelschicht, weisen Gewebe auf mesomechanischer Ebene sich periodisch wiederholende Umlenkungen bzw. Krümmungen auf. Diese Umlenkungen resultieren aus der Verwebung von Kett- und Schusssträngen zu einem quasi formschlüssigen zweidimensionalen textilem Halbzeug. Sie werden als Krümmungen [149] oder Ondulation [151] und englisch *ondulation* oder *undulation* [127] bezeichnet. Ihre Ausprägung hängt von der Webart und der Geometrie des Querschnitts der verwebten Rovings im Gewebe ab. Die Rovings sind nicht ideal gestreckt und strenggenommen länger als die jeweilige theoretische Mittel- bzw. Symmetrielinie der gewebeverstärkten Einzellage.

Es gibt unterschiedliche Webarten bzw. Gewebekonstruktionen. Diese unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Anzahl der Kettstränge, um die die Schussstränge onduliert werden. Wenn die Schussstränge jeden Kettstrang ondulieren, liegt ein Leinwandgewebe mit geringer Flottierung (geringe Abständen zwischen den Kreuzungspunkten) vor. Wenn die Schussfäden jeden zweiten bis vierten Kettstrang ondulieren, liegt ein Köpergewebe mit jeweils größerer Flottierung (größeren Abständen zwischen den einzelnen Kreuzungspunkten) vor [149]. Auf Atlasgewebe, Gelege oder Konstruktionen die auf nicht ausgeglichene Gewebe führen, d. h. bei denen Rovings mit unterschiedliche Querschnittsabmessungen o. ä., wird nicht näher eingegangen, da sie für die durchgeführten experimentellen Untersuchungen nicht relevant sind.

In SCHÜRMAN 2005 [149] werden Faserkrümmungen in Geweben explizit als herstellungsbedingte Störungen bezeichnet. Deren Auswirkungen, die die mechanischen Werkstoffkennwerte der Steifigkeit und Festigkeit i. a. reduzieren, können jedoch mit erweiterten Ansätzen auf mesomechanischer Ebene beschrieben werden. Numerische Untersuchungen mit FE-Berechnungen von repräsentativen Volumenelementen sowie deren Validierung im Zugversuch ist für basaltfaserverstärkte Kunststoffe in MAZZEO, TENUTA et al. 2012 [86], TREVISIO, MUMOLI et al. 2013 [159], VALENTINO et al. 2013 [163] und VALENTINO et al. 2014 [164] nach [44], dargestellt worden.

#### **Faser-Matrix-Halbzeuge als vorimprägnierte textile Halbzeuge (Prepregs)**

Als Faser-Matrix-Halbzeuge sind v. a. sog. Prepregs relevant. Dabei handelt es sich um vorimprägnierte textile Halbzeuge. Der Name Prepreg ist zusammengesetzt aus der vollständigen englischsprachigen Bezeichnung *pre-impregnated fibre*. Ausführliche grundlegende technische Be-

schreibungen mit fertigungstechnischen und mechanischen Aspekten finden sich in SCHÜRMAN 2005 [149], FLEMMING, ZIEGMANN und ROTH 1996 [41] und WITTEN 2010 [169]. Die Verfahrensentwicklung für reproduzierbare und vergleichbare unidirektionale Prepregs stand zusätzlich im Mittelpunkt der Arbeiten von EISENRIED et al. 2013 [33], EISENRIED 2014 [35] und ROMANO et al. 2015 [136].

Die Entwicklung von Faser-Matrix-Halbzeugen verfolgt nach SCHÜRMAN 2005 [149] zwei wesentliche Ziele. Sie ermöglichen die Rationalisierung des Herstellungsprozesses und damit eine Senkung der Herstellungskosten. Zusätzlich tragen sie erheblich zur Steigerung der Produktqualität bei. Dieser Aspekt ist besonders für mechanische Hochwertanwendungen relevant. Die maschinelle Imprägnierung ist dabei deutlich gleichmäßiger, hochwertiger und reproduzierbarer als beispielsweise Handlaminat. Ein eng tolerierbares Faser-Matrix-Verhältnis bei der Herstellung ermöglicht die reproduzierbare Erreichung technisch geeigneter Faservolumenanteile und geringem Porenanteil bei verhältnismäßig geringem Harzfluss während des Aushärtprozesses.

Prepregs liegen ein zweidimensionales Faserhalbzeug sowie ein polymerer Matrixwerkstoff zugrunde. Zum Erreichen mechanisch hochwertiger Steifigkeiten und Festigkeiten werden sog. Endlosfasern mit Längen  $l > 50$  mm und Längen-Durchmesser-Verhältnissen von  $\frac{l}{d} \rightarrow \infty$  verwendet. Die maschinelle Imprägnierung kann dabei auf unterschiedliche Methoden erfolgen. Dabei sind v. a. die Schmelzharz-Imprägnierung mit Harzfilm oder Tauchbad sowie die Lösungsmittel-Imprägnierung zu nennen. Die maschinelle Imprägnierung ermöglicht den Einsatz sog. zähmodifizierter Harze. Diese sind deutlich höherviskos als für die manuelle Verarbeitung geeignete Laminierharze. Für den Schutz und das leichtere Handling von Prepregs werden beidseitig Schutzfolien angebracht. Dies sorgt zusätzlich für eine hohe Arbeitshygiene. Technisch sehr relevante und kommerziell verfügbare Prepregs sind üblicherweise unidirektional oder gewebeverstärkt. Als Matrixwerkstoff können sowohl duroplastische als auch thermoplastische Systeme verwendet werden. Basierend auf der ursprünglich vorgesehenen Verwendung von Prepregs zur Herstellung von mechanisch hochbeanspruchten Bauteilen, sind bzw. waren duroplastische Matrixsysteme üblich. Die Aushärtung von Laminaten aus Prepregs zu mechanisch hochwertigem Material erfolgt dabei meist im Heißluftautoklavverfahren.

Die Verwendung von Prepregs ermöglicht eine hohe Arbeitshygiene, lange Verarbeitungszeiten und geringe Emissionen. Entgegen den zuvor genannten Vorteilen sind das verhältnismäßig hohe Preisniveau, hohe Investitions- und Prozesskosten (beispielsweise für Heißluftautoklaven zur Aushärtung, temperaturbeständige Verbrauchsmaterialien, lange Prozesszeiten) und Lagerkosten (tiefgekühlte Lagerung bei üblicherweise  $-18^\circ\text{C}$ ) Nachteile bei der Verwendung von Prepregs.

Bei Prepregs mit duroplastischem Matrixsystem werden drei Vernetzungsgrade unterschieden. Das nicht vernetzte Matrixsystem bei der Imprägnierung der Prepregs wird A-stage (oder  $\alpha$ -phase) genannt. Da das Matrixsystem jedoch fertig eingestellt ist, ist es reaktiv. Es wird bis zu einer definierten Zwischenstufe, der sog. B-stage (oder  $\beta$ -phase), vorvernetzt. Dadurch wird die sog. Glasübergangstemperatur  $T_g$  angehoben. Die chemische Reaktion der Vernetzung kann nicht vollständig unterbunden. Um die Reaktion jedoch stark zu verlangsamen, werden Prepregs üblicherweise bei  $-18^\circ\text{C}$  tiefgekühlt gelagert. Da die Materialqualität stark temperatursensitiv ist besitzen Prepregs ein Mindesthaltbarkeitsdatum. Zusätzlich werden üblicherweise Anzahl und Zeitdauer der Entnahme der Prepregs aus der Kühlung zum Auftauen für den Zuschnitt der Einzellagen dokumentiert werden. Auch diesbezüglich ist ein Maximum an Entnahmen bzw. Auftau- und Tiefkühlzyklen überschritten angegeben. Prepregs sind ursprünglich für die Aushärtung im Heißluftautoklavverfahren entwickelt worden. Bei der Aushärtung vernetzt das Matrixsystem vollständig. Es erreicht die C-stage (oder  $\gamma$ -Phase). Prepreg-Systeme werden dabei häufig mit der entsprechenden Aushärtetemperatur bezeichnet.

## 3.5 Ausgewählte Herstellungsverfahren für faserverstärkte Kunststoffe

Ausgewählte Herstellungsverfahren von faserverstärkten Kunststoffen werden allgemein vorgestellt. Zusätzlich werden die in der vorliegenden Arbeit angewendeten Modifikationen beschrieben.

Im Allgemeinen ist die Aufgabe der Herstellungsverfahren das Zusammenführen von Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff (im Falle der trockenen textilen Halbzeuge), der Aufbau eines definierten Lagenaufbaus in der gewünschten Form und die Aushärtung (mit eventueller vorhergegangener oder zeitgleicher Kompaktierung des Laminats). In diesem Zuge entsteht dabei zeitgleich sowohl das (Verbund-)Material als auch das Bauteil selbst.

### Wickeltechnik

Die Wickeltechnik eignet sich zur Herstellung von rotationssymmetrischen Hohlkörpern. Dabei wird üblicherweise der trockene Rovingstrang (bzw. mehrere Rovingstränge parallel) durch ein Harzbad gezogen und auf einen Dorn aufgewickelt. Im Detail ist das Harzbad auf einem Wickelkopf montiert, der in Längsrichtung um den rotierenden Dorn verfahrbar ist. Die beiden Parametern Vorschub in Längsrichtung und Rotationsgeschwindigkeit des Dorns, bestimmen den sich einstellenden Wickelwinkel, während die Geometrie des Dorns die Form des Längsschnitts bestimmt.

Die sich ergebende Materialqualität, v. a. den Faservolumengehalt  $\varphi_f$ , beeinflussen im Wesentlichen die Vorspannung des Rovingstrangs, die Viskosität des Matrixsystems im Harzbad und der Durchmesser einer evtl. benötigten Abstreiföse zum Abstreifen von überschüssigem Harz. Das gewickelte Bauteil wird kalt oder warm auf dem Dorn ausgehärtet. Bezüglich des Dorns gibt es wiederverwendbare Dornen (von denen das ausgehärtete Bauteil entformt wird), teilbare Dornen (als Dauerformen), verlorene Dornen oder im Bauteil verbleibende Dornen (mit strukturellen Aufgaben).

Zu den Vorteilen der Wickeltechnik zählen u. a. der erreichbare hohe Automatisierungsgrad (ökonomisch günstig), die erreichbaren hohen Festigkeiten und Steifigkeiten sowie die exakte und reproduzierbare Steuerung der Faserorientierung. Wesentliche Nachteile sind dagegen die fertigungstechnische Einschränkung auf lediglich konvexe Querschnitte, ein hoher Aufwand zur Herstellung von  $0^\circ$ -Lagen (also in Längsrichtung bzw. in Richtung der Drehachse), sich undefiniert ergebende Oberflächen sowie die zwingende Verarbeitung von vergleichsweise niedrigviskoserem Harzsystemen (liefert generell schlechtere Bauteileigenschaften).

Typischerweise werden Behälter und Rohre zum Speichern und Transportieren flüssiger oder gasförmiger Stoffe, insbesondere jedoch Drucktanks mit hoher Leichtbaugüte, aber auch Verbundhohlisolatoren im Wickelverfahren hergestellt. In der vorliegenden Arbeit wird das Wickelverfahren auf ein Zweifach angewendet, um die Prüfplatten, aus denen die Probekörper für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen ausgeschnitten und präpariert werden, herzustellen, wie in Kapitel 10 in Abschnitt 10.2.1 dargestellt. Dabei ist das Ziel die Herstellung eines unidirektionalen vorimprägnierten Halbzeugs. Die Herstellung bzw. das Vorimprägnieren der unidirektionalen Einzelschichten erfolgt in Anlehnung an die DIN 65071 [100] auf einer Drehmaschine.

### Vorlaminattechnik

Die Vorlaminattechnik ist eine Art des Nasslaminierverfahrens (auch Handlaminierverfahren oder Handauflegeverfahren genannt). In bzw. auf eine Negativform wird das Bauteil lagenweise aufgebaut. Da dabei üblicherweise zwei- oder dreidimensionale trockene textile Halbzeuge (d. h. Gewebe, Matten oder Gelege) verwendet werden, ist jede Lage einzeln und manuell zu imprägnieren. Der Harzauftrag kann dabei vor oder nach dem Auflegen der Einzellage erfolgen, wobei

stets auf eine vollständige Durchtränkung der Faserverstärkung zu achten ist. Im Falle der Vorlaminattechnik erfolgt er vor dem Auflegen zwischen zwei Folien aus Polyethylen (PE) mit einer Rakel.

Die sich ergebende Materialqualität, der Faservolumengehalt  $\varphi_f$  und v. a. der Porenanteil, wird dabei zunächst durch die Qualität der Imprägnierung, und damit durch die Fähigkeiten und Fertigkeiten des ausführenden Bearbeiters, bestimmt. Der Lagenaufbau des Bauteils kann kalt oder warm, jeweils ohne oder mit Vakuumaufbau, ausgehärtet werden. Durch eine vorangegangene Vorbereitung der Form mit einer Trennschicht ist die Form, zumindest für eine gewissen Anzahl von Bauteilen, wiederverwendbar.

Vorteile der Vorlaminattechnik sind u. a. die einfache und schnell erlernbare Durchführung sowie die vergleichsweise geringen Investitionskosten. Zusätzlich ist im speziellen Fall der Vorlaminattechnik von Vorteil, dass das textile Halbzeug nicht direkt mit einem Pinsel o. ä. imprägniert wird, sondern das Harz mit der Rakel lediglich über die PE-Folie, also indirekt, verteilt wird. Ein wesentlicher Nachteil ist die teilweise große Abhängigkeit der Materialqualität von der Erfahrung sowie von den Fähigkeiten und Fertigkeiten des ausführenden Bearbeiters sowie, analog zum Wickelverfahren, die zwingende Verarbeitung von vergleichsweise niedrigviskoser Harzsystemen.

Das Vorlaminatverfahren eignet sich besonders für die Herstellung von komplexen oder großflächigen Bauteilen in geringer Stückzahl. Dies sind typischerweise Boote, Rotorblätter für Windkraftanlagen. Außerdem wird das Verfahren im Prototypenbau und für Reparaturzwecke angewendet. In der vorliegenden Arbeit wird die Vorlaminattechnik zur Herstellung ebener Prüfplatten angewendet, aus denen die Probekörper für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen ausgeschnitten und präpariert werden. Dies ist im Detail in Kapitel 10 in Abschnitt 10.2.1 dargestellt. Dabei ist das Ziel die Herstellung eines gewebeverstärkten vorimprägnierten Halbzeugs. Die Herstellung bzw. das Vorimprägnieren der trockenen Gewebe erfolgt in Anlehnung an die DIN 65071-2 [101], wie u. a. in [71] und [74] angewendet, auf einer Grundplatte.

### Heißluftautoklavverfahren und Prepreg-Technik

Für die Herstellung von Bauteilen im Heißluftautoklavverfahren werden vornehmlich duroplastische Prepregs verwendet. Prepregs sind die im vorhergehenden Abschnitt 3.4 beschriebenen vorimprägnierte textile Halbzeuge bzw. Faser-Matrix-Halbzeuge. Die qualitätsbestimmende Imprägnierung erfolgt dabei maschinell (mit den sich ergebenden Vorteilen Reproduzierbarkeit, hohe Faservolumengehalte bei gleichzeitig geringem Porenanteil), und ist von der eigentlichen Formgebung getrennt.

Vor allem für die Verarbeitung von Prepregs, aber auch zur mechanisch hochwertigen und reproduzierbaren Aushärtung von Laminaten aus anderweitig imprägnierter Einzellagen, wird üblicherweise das Heißluftautoklavverfahren angewendet. Dabei werden definiert über die Prozessdauer Druck und Temperatur auf das Laminat, das sich unter einem Vakuumaufbau befindet, appliziert. Ein optimiertes Druck-, Temperatur- und Vakuumprofil wird dabei üblicherweise vom Hersteller vorgegeben. Die einzelnen Prozessparameter haben dabei unterschiedliche Funktionen. Der zuvor genannte, vom Hersteller vorgegebene, Aushärtprozess berücksichtigt in ihrer chronologischen Abfolge die teilweise zeitgleich und/oder gekoppelt auftretende Effekte bei der Aushärtung des Lagenaufbaus zum Laminat. Die Prozessparameter und deren Funktionen für Lagenaufbauten aus duroplastischen Prepregs sind im Einzelnen

- der applizierte Druck,  
Der Druck komprimiert das Laminat und minimiert dadurch Faserwelligkeiten und Ungängen. Poren werden komprimiert. Lufteinschlüsse werden geschlossen. Der applizierte Druck erhöht zusätzlich den Temperaturübergang durch den Vakuumaufbau auf das Laminat.
- die applizierte Temperatur und  
Die Temperatur sorgt zunächst für eine Verringerung der Viskosität des Matrixsystems. Die verbesserte Fließfähigkeit ermöglicht einen definierten Harzfluss. Dadurch wird der Kon-



takt des Matrixsystems mit der Schlichte der Verstärkungsfasern abschließend verbessert. Durch eine weitere Erhöhung der Temperatur beginnt das Harz zunächst zu gelieren. Bei Erreichen der Aktivierungstemperatur, wird die chemische Reaktion der Vernetzung des Matrixsystems aktiviert.

- das applizierte Vakuum.

Das Laminat befindet sich unter einem Vakuumaufbau. Das Vakuum wird appliziert, indem der Vakuumaufbau evakuiert wird. Nach der Verringerung der Viskosität des Matrixsystems durch die applizierte Temperatur, ermöglicht das angelegte Vakuum den definiert vorgesehenen Harzfluss aus dem Laminat. Zusätzlich entweichen flüchtige Bestandteile.

Vorteile des Heißluftautoklavverfahrens im Allgemeinen, und der Prepreg-Technik im Besonderen, sind u. a. der erreichbare hohe und reproduzierbare Faservolumengehalt, der geringe Anteil an Poren, die industrielle Erfahrung wegen der Anwendung für strukturmechanisch hochbeanspruchte Produkte, die Möglichkeit der Verwendung von vergleichsweise höherviskosen Harzsystemen (liefert generell bessere Bauteileigenschaften) und die verhältnismäßig lange Verarbeitungszeit. Wesentliche Nachteile sind dagegen die, im Vergleich zu anderen Herstellungsverfahren, höheren Materialkosten, die Begrenzung der Bauteilgröße auf die Größe des Heißluftautoklaven, die zwingend erforderliche Verwendung von temperaturbeständigen, und damit teuren, Verbrauchsmaterialien, die hohen Investitions- und Betriebskosten eines Heißluftautoklaven sowie die niedrigen herstellbaren Stückzahlen wegen der vergleichsweise langen Zykluszeiten (meist mehrere Stunden).

Im Heißluftautoklavverfahren werden meist Bauteile hergestellt, bei denen die Anforderung nach höchster strukturmechanischer Qualität bei gleichzeitig hoher Leichtbaugüte im Mittelpunkt stehen. Dies trifft v. a. bei Strukturanwendungen in der Luft- und Raumfahrt zu. Die Anwendungen erstrecken sich aber auch zunehmend auf den Motorsport- bzw. Automobil-Bereich sowie den Sportgerätebau. In der vorliegenden Arbeit wird das Heißluftautoklavverfahren angewendet, um die Prüfplatten, aus denen die Probekörper für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen ausgeschnitten und präpariert werden, herzustellen, wie in Kapitel 10.2.3 beschrieben. Dabei werden sowohl die Prüfplatten basierend auf den vorimprägnierten trockenen textilen Halbzeuge, wie in Abschnitt 10.2.1 beschrieben, als auch die in der Prepreg-Technik hergestellten Prüfplatten im Heißluftautoklavverfahren ausgehärtet. Die für die jeweiligen Materialien und Lagenaufbauten verwendeten Heißluftautoklavzyklen mit den Prozessparametern Druck, Temperatur und Vakuum über die Prozesszeit sind in Abbildung 10.5 in Abschnitt 10.2.3 dargestellt und beschrieben.

## 3.6 Exkurs

Neben den in Abschnitt 3.1 bereits erwähnten Arten von Verstärkungsfasern, im Einzelnen Kohlenstoff-, Glas-, und Aramidfasern, sind u. a. Basaltfasern erwähnenswert. Die unterschiedlichen Arten von Verstärkungsfasern werden entsprechend ihren jeweiligen charakteristischen Eigenschaften eingesetzt. Kohlenstofffasern zeichnen sich dabei besonders durch ihre hohen absoluten und dichtespezifischen Steifigkeiten und Festigkeiten aus. Glas- und Basaltfasern weisen einander ähnliche, verhältnismäßig moderate Steifigkeits- und Festigkeitswerte auf, nehmen jedoch aufgrund ihres Dämpfungsverhaltens Einfluss auf die strukturdynamischen Eigenschaften und damit auf das Bruchverhalten. Dagegen weisen Aramidfasern eine tendenziell höhere Energiedissipationskapazität auf. Aufgrund ihrer starken Hygrophilie, schlechten Imprägnationseigenschaften (und damit schlechter Faser-Matrix-Haftung) und der zeit- und kostenaufwändigen Nachbearbeitung werden Aramidfasern tendenziell nicht in lasttragenden Strukturen eingesetzt.

Die charakteristischen mechanischen Eigenschaften der unterschiedlichen Arten von Verstärkungsfasern basieren u. a. auf dem Herstellungsprozess, der chemischen Struktur o. ä.. Besonders

relevant sind dabei im Wesentlichen die Steifigkeiten und Festigkeiten der Verstärkungsfasern sowie die darauf basierenden charakteristischen Schädigungsmechanismen im Verbund mit polymeren Matrixwerkstoffen. Dabei treten aufgrund des üblicherweise geschichteten Aufbaus von faserverstärkten Kunststoffen v. a. bei Belastungen durch transversalen Impact charakteristische Versagensmechanismen auf. Im Einzelnen ist dabei die Geschwindigkeit, mit der der transversale Impact erfolgt, eine relevante Größe, für den Schädigungsmechanismus. Überlegungen zur Kombinierbarkeit der charakteristischen Eigenschaften der Verstärkungsfasern führen auf die Idee gemischter bzw. hybrider Lagenaufbauten.

Die Identifikation und Entwicklung von tragenden Strukturen, die gleichzeitig eine ausreichende Schutzfunktion übernehmen können geschieht durch die folgenden beiden Grundgedanken:

1. Durch die Verwendung von hybriden Lagenaufbauten aus faserverstärkten Kunststoffen werden die unterschiedlichen Vorzüge von technisch relevanten Arten von Verstärkungsfasern für tragende Strukturen im Lagenaufbau über die Dicke der Struktur entsprechend ihrer charakteristischen mechanischen Eigenschaften sinnvoll kombiniert.
2. Die zusätzliche Verwendung von Kernmaterialien, im Besonderen mit geringer Dicke und verhältnismäßig geringer Steifigkeit mit der Funktion einer elastischen Bettung statt zur Erhöhung des Trägheitsmoments bzw. der Biegesteifigkeit, bewirkt die tendenziell stärkere Umlagerung der transversalen Belastungen in ebene Beanspruchungen. Im Falle von Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen ist dieser fasergerechte Beanspruchungszustand in jedem Fall anzustreben.

Mit den zuvor dargestellten beiden Grundgedanken wird die Möglichkeit geschaffen, das Leichtbaupotential von faserverstärkten Kunststoffen vollständig zu nutzen, und gleichzeitig die Widerstandsfähigkeit gegen transversale Impactbelastung signifikant zu erhöhen. Diese bifunktionale Nutzung des Materials als tragender Strukturwerkstoff und Schutzwerkstoff, sowie der damit verbundene Wegfall einer zusätzlichen Schutzstruktur (Material und v. a. Massen entfallen.), erhöht das Leichtbaupotential unter mehreren Aspekten gleichzeitig. Entsprechende experimentelle Untersuchungen zur Validierung der zuvor beschriebenen Grundgedanken als Lösungsansätze für transversale Impactbelastung im Hochgeschwindigkeitsbereich sind für monolithische und hybride Lagenaufbauten ausführlich in HOINKES et al. 2014 [64], ROMANO et al. 2014 [137], ROMANO et al. 2014 [138] und ROMANO et al. 2014 [139] beschrieben.

# 4 Lineare anisotrope Elastizität und Materialmodelle

Die lineare anisotrope Elastizität beschreibt die Reaktion eines Werkstoffes auf Belastung. Die äußere Belastung verursacht Reaktionskräfte an Lagerungen. Im Inneren eines Materials verursacht die Belastung Beanspruchungen. Das Material reagiert mit Verzerrungen und Spannungen [76]. Der Zusammenhang zwischen Spannungen als infinitesimal über Schnittflächen verteilte Flächenkräfte und Verzerrungen wird über ein Materialgesetz beschrieben. Unter der Voraussetzung eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Verzerrungen wird das Materialgesetz nach HOOKE<sup>1</sup> benannt.

## 4.1 HOOKE'sches Gesetz des isotropen Körpers

Das HOOKE'sche Gesetz wird bezüglich des Materialgesetzes, der kinematischen Beziehungen und der lokalen Bewegungsgleichungen dargestellt. Die Beziehungen werden vereinfachend eindimensional und für den Spezialfall des isotropen Materialverhaltens dargestellt.

### 4.1.1 Materialgesetz

Das Materialgesetz beschreibt das Verhalten eines Werkstoffes unter Belastung. Die Belastung verursacht Verzerrungen und Spannungen im Material. Wenn sich das Material linear elastisch verhält und die Belastung Verzerrungen und Spannungen lediglich im linear elastischen Bereich verursacht, gilt das HOOKE'sche Materialgesetz. Es stellt einen linearen elastischen, und damit vollkommen reversiblen, Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen her.

Grundsätzlich wird der Begriff Verzerrungen weiter gefasst. Im Allgemeinen wird bei Verzerrungen zwischen Dehnungen, Stauchungen und Gleitungen unterschieden. Im Falle von Dehnungen und Stauchungen ändert der Körper seine Abmessungen und damit sein Volumen, nicht jedoch seine Gestalt. Im Gegensatz dazu sind Gleitungen Verformungen aufgrund von Schubbeanspruchungen. Der Körper ändert seine Gestalt, nicht jedoch sein Volumen.

Wie im weiteren Verlauf dargestellt wird, sind die Verzerrungen aufgrund einer einachsigen Belastung über die Querverformungszahl miteinander gekoppelt. Diese ist das dem Werkstoff typische negative Verhältnis Querverzerrung zu Längsverzerrung unter einachsiger Belastung. Gleitungen sind in den jeweiligen Betrachtungsrichtungen voneinander entkoppelt. Dabei sind Dehnungen, Stauchungen und Gleitungen dimensionslose Größen.

Unter der Voraussetzung einer gleichmäßigen Verteilung einer Normalkraft  $F$  bzw. einer Tangentialkraft  $T$  auf einer Querschnittsfläche  $A_0$  resultieren die eindimensionalen Zusammenhänge für die Spannungen und die Verzerrungen

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad , \quad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{T}{A_0} \quad , \quad \gamma \approx \tan \gamma = \frac{\Delta v}{l_0} . \quad (4.1)$$

<sup>1</sup> ROBERT HOOKE, \* 28. Juli 1635 in Freshwater, Isle of Wight, † 14. März 1703 in London. Englischer Universalgelehrter, 1678 Offenlegung des Wortlauts des sog. HOOKE'schen Gesetzes: „*ut tensio sic vis*“ - wie die Dehnung, so die Kraft.

Ein sog. Materialgesetz setzt Spannungs- und Verformungsgrößen in Beziehung. In der Kontinuumsmechanik werden diese Zusammenhänge auch konstitutive Gleichungen bzw. Konstitutivgleichungen genannt. Unter der Voraussetzung eines linear elastischen Zusammenhangs zwischen Belastung und Verformung werden die Größen mit Hilfe des HOOKE'schen Gesetzes transformiert

$$\sigma = E \varepsilon \quad , \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \tau = G \gamma \quad , \quad G = \frac{\tau}{\gamma} \quad , \quad (4.2)$$

wobei  $E$  der Elastizitätsmodul (auch YOUNG'sche Modul) und  $G$  der Schub- oder Gleitmodul ist. Beide Faktoren sind Proportionalitätsfaktoren. Bei homogenen Materialien entsprechen sie den sog. elastischen Konstanten.

In Folge einer Belastung in Normalenrichtung mit  $F$  tritt zusätzlich zur Längsverformung eine Querverformung mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Dabei erfährt der Körper bei einer Dehnung  $\varepsilon_{\text{längs}}$  in Längsrichtung i. a. eine Stauchung  $\varepsilon_{\text{quer}}$  in Querrichtung (orthogonal dazu), bzw. bei einer Stauchung in Längsrichtung  $-\varepsilon_{\text{längs}}$  i. a. eine Dehnung in Querrichtung  $\varepsilon_{\text{quer}}$ . Die Verzerrung quer zur Belastungsrichtung ist analog zur Verzerrung in Längsrichtung (4.1) definiert. Sie lautet

$$\varepsilon_{\text{quer}} = \frac{b - b_0}{b_0} = \frac{(b_0 + \Delta b) - b_0}{b_0} = \frac{-\Delta b}{b_0} \quad (4.3)$$

und liefert im Verhältnis zur Längsverzerrung die sog. Querverformungszahl

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{\text{quer}}}{\varepsilon_{\text{längs}}} \quad (4.4)$$

Diese wird auch als Querkontraktionszahl, Querdehnzahl oder POISSON'sche Konstante bezeichnet und ist eine weitere materialabhängige Konstante.

Im Falle des hier vorausgesetzten isotropen Materialverhaltens existieren zwei unabhängige elastische Konstanten, da zwischen dem Elastizitätsmodul  $E$ , dem Schubmodul  $G$  und der Querverformungszahl  $\nu$  der Zusammenhang

$$E = 2(1 + \nu) G \quad \text{bzw.} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.5)$$

existiert. Damit ist der Schubmodul  $G$  für isotrope Materialien keine unabhängige elastische Konstante.

Im Folgenden werden die sich ergebenden Zusammenhänge für die dreidimensionale isotrope Elastizität dargestellt. Im allgemeinen Fall einer Belastung in alle drei kartesischen Koordinatenrichtungen,  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung, ergeben sich aufgrund der dargestellten Kopplung der Normalspannungen über die Querverformungszahl die Verformungen im dreidimensionalen Fall zu

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (4.6)$$

und die voneinander unabhängigen Gleitungen zu

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad \text{und} \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad . \quad (4.7)$$

In der Vektor-Matrix-Schreibweise ergeben sich aus den Zusammenhängen der Gleichungen (4.6)

und (4.7) die sog. Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$  und invers die sog. Steifigkeitsmatrix  $[E]$  zu

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G = \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G = \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Dabei besteht zwischen den Gleichungen (4.8) und (4.9) der Zusammenhang

$$[\varepsilon] = [E]^{-1} [\sigma] = [S] [\sigma]. \quad (4.10)$$

### Arten der Indizierung

Hier werden kurz die in der Literatur üblichen bzw. die, den einzelnen Disziplinen eigenen, Schreibweisen mit entsprechender Indizierung vorgestellt.

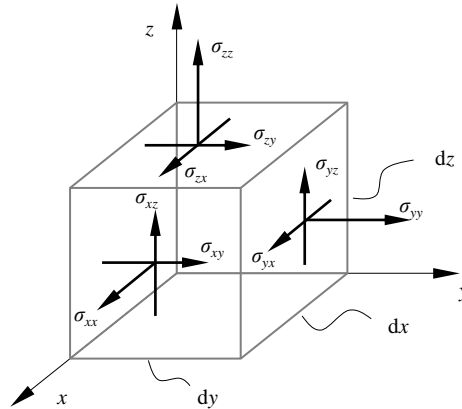
Die Indizierung mit  $i$  und  $j$  wird in der Kontinuumsmechanik typischerweise verwendet. Spannungen und Verzerrungen werden dabei als Tensoren zweiter Stufe notiert. In diesem Fall wird anstatt der Gleitung  $\gamma$ , die in der Ingenieurschreibweise typisch ist, die Dehnung  $\varepsilon_{ij} \forall i, j = 1, 2, 3$  und  $i \neq j$ , die der Dehnung der Diagonalen (also der Hauptdehnung) entspricht, beschrieben. Dabei gilt zwischen der tensoriellen Notation der Kontinuumsmechanik und der matriziellen Notation in der Ingenieurschreibweise  $\varepsilon = \frac{1}{2} \gamma$  bzw.  $\gamma = 2\varepsilon$  [12], [149].

Die Indizierung von Spannungen und Verzerrungen erfolgt im allgemeinen dreidimensionalen Fall mit einer doppelten Indizierung. Sie gibt an erster Stelle die Achse an, zu der das jeweilige Schnittufer senkrecht ist, und an zweiter Stelle die Orientierung der jeweiligen Größe. Bei doppelt gleich auftretenden Indizes wird dabei oft lediglich ein Index angegeben. Diese Aussagen gelten für die Definition des globalen Koordinatensystems als  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem und als 1-2-3-Koordinatensystem analog. Im Falle der numerischen Bezeichnung der Hauptachsen des globalen Koordinatensystems ist es beispielsweise für Anwendungen numerischer Methoden, wie der Finite-Elemente-Methode, günstig, die Indizes der sechs Komponenten der der matriziellen Notation in der Ingenieurschreibweise durchgängig mit  $i = 1, \dots, 6$  zu indizieren. Damit ergeben sich für die Spannungen und Verzerrungen unterschiedliche aber gleichwertige Schreibweisen und Indizierungen wie sie in der Literatur gebräuchlich sind zu

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (4.11)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Abbildung 4.1 zeigt die positiv definierten Spannungskomponenten eines infinitesimalen Volumenelements mit den Abmessungen  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$ , jeweils am positiven Schnitthufer.



**Abbildung 4.1:** Positiv definierte Spannungskomponenten, jeweils am positiven Schnitthufer, eines infinitesimalen Volumenelements mit den Abmessungen  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$ .

#### 4.1.2 Kinematische Beziehungen

Die im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Verformungen aufgrund von äußeren Belastungen und daraus resultierenden Beanspruchungen im Inneren des Materials basieren auf Relativbewegungen von beliebigen Punkten eines Kontinuums bzw. eines Tragwerks vom verformten Zustand bezogen auf den unverformten Zustand. Die infinitesimale Betrachtung der Verschiebungen eines beliebigen Punktes im verformten Zustand zum unverformten Zustand liefert die sog. Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen. Sie sind unabhängig von elastischen Materialkonstanten.

Bei eindimensionaler Betrachtung setzt sich die Verschiebung eines Bereiches mit infinitesimaler Länge unter Zugbelastung aus der Starrkörperverschiebung  $u$  und der Längsverformung  $du$  zusammen. Die Länge des gedehnten infinitesimalen Bereiches  $d\bar{x}$  ergibt sich zu

$$d\bar{x} = dx + (u + du) - u = dx + du. \quad (4.13)$$

Aus der Definition der Verformung in Gleichung (4.1) folgt für die eindimensionale Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung, wie in Abbildung 4.2 links dargestellt,

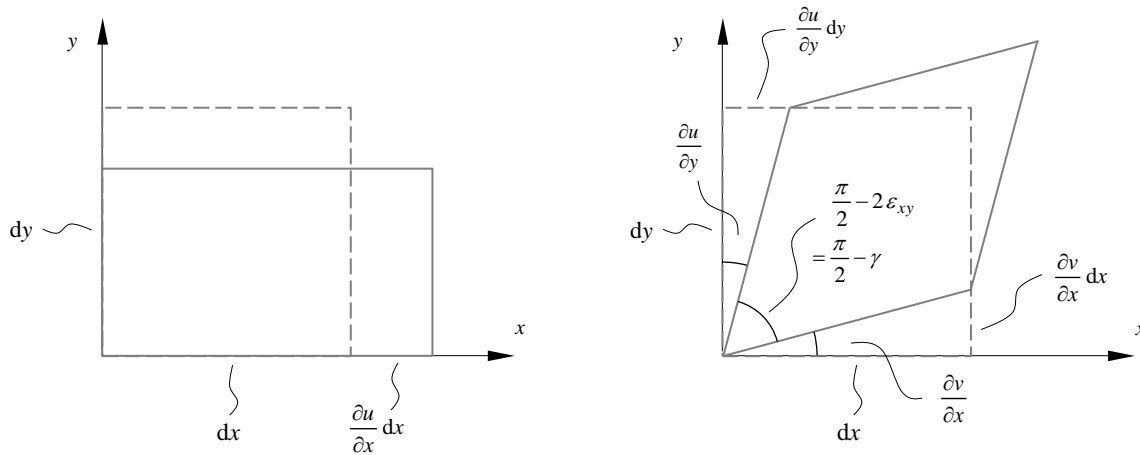
$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{dx + du - dx}{dx} = \frac{du}{dx}, \quad (4.14)$$

Beim Übergang in die dreidimensionale Betrachtung wird das gewöhnliche Differential in Gleichung (4.14) zu partiellen Differentialen in allen drei Raumrichtungen. Für die in der Mechanik übliche Bezeichnung der Verschiebungen  $u$  in  $x$ -Richtung,  $v$  in  $y$ -Richtung und  $w$  in  $z$ -Richtung

lauten diese

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad . \quad (4.15)$$

Die Zusammenhänge gelten analog für Stauchungen, wobei daraus negative Vorzeichen der partiellen Differentiale resultieren.



**Abbildung 4.2:** Deformationen eines infinitesimalen Elements mit den Abmessungen  $dx$  und  $dy$ : Dehnung als positive Verzerrung  $\varepsilon_x > 0$  (links) und Gleitung  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$  (rechts), exemplarisch in der  $x$ - $y$ -Ebene.

Ein wesentlicher Unterschied besteht bei der Definition der Gleitungen infolge von Schubbelastung zwischen der mechanischen Ingenieurschreibweise und der tensoriellen Notation. Diese geht besonders einsichtig aus der Betrachtung der zweidimensionalen Zusammenhänge hervor. In der Ingenieurschreibweise ist die gesamte Schubverformung  $\gamma$  über die Gleitung eines infinitesimalen Quadrats mit den Abmessungen  $dx$  und  $dy$  aufgrund einer einzelnen Schubspannung  $\tau$  definiert. Daraus resultiert der in Gleichung (4.1) über die elastische Konstante des Schubmoduls definierte Zusammenhang zwischen Schubspannung und Gleitung. Dies ist jedoch ein idealisierter Fall. Aufgrund des Satzes von der Betragsgleichheit von einander zugeordneten Schubspannungen treten Schubspannungen stets an allen Seiten des betrachteten Quadrats auf. Sie zeigen an positiven Schnittufern in positive Richtung und an negativen Schnittufern in negative Koordinatenrichtungen. Damit zeigen positiv definierte Schubspannungen an den positiven sowie negativen Schnittufern auf eine Ecke zueinander. Aufgrund der resultierenden Verformung setzt sich die mechanische Gleitung in der  $x$ - $y$ -Ebene  $\gamma_{12}$  aus den beiden kontinuumsmechanisch relevanten Komponenten  $\varepsilon_{12} = \tan \alpha \approx \alpha = \tan \beta \approx \beta$  zusammen. Analoge dreidimensionale Betrachtung liefert die infinitesimalen partiellen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{zy} \quad , \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2\varepsilon_{zx} = 2\varepsilon_{xz} \quad , \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yz} \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

für die Gleitungen als Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen in der Ingenieurschreibweise sowie in der kontinuumsmechanischen Notation. Abbildung 4.2 rechts stellt den Zusammenhang exemplarisch in der  $x$ - $y$ -Ebene dar.

Die kinematischen Beziehungen setzen Verschiebungen und Verzerrungen in Relation. Sie besagen, dass in einem Kontinuum vor, während und nach der Belastung (im linear elastischen Bereich) keine Klaffungen entstehen dürfen. Dazu muss zwischen Verschiebungen und Verzerrungen ein eindeutiger Zusammenhang bestehen [12]. Damit dieser eindeutige Zusammenhang vorliegt, muss zwischen den einzelnen Verzerrungen selbst ein differenzieller Zusammenhang bestehen [76]. Dieser lautet allgemein [11], [37]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 . \quad (4.17)$$

### 4.1.3 Lokale Bewegungsgleichungen

Im allgemeinen Fall stellt das zweite Gesetz von NEWTON<sup>2</sup> (das sog. Aktionsprinzip oder auch Grundgesetz der Dynamik) makroskopisch den Zusammenhang zwischen auf einen Körper mit der Masse  $m$  wirkende Kraft  $\vec{F}$  und die daraus resultierende Beschleunigung  $\vec{a}$  her. Es besagt, dass die Änderung der Bewegung als Beschleunigung  $\vec{a}$  proportional der einwirkenden Kraft  $\vec{F}$  ist, und in Richtung der Kraft gerichtet ist. Damit ist  $F_i = m a_i$  für jede Raumrichtung  $i$  mit  $m = \text{const.}$ . Mit der Definition der Kraft  $F_i$  als Ableitung des Impulses  $p_i = m \vec{v}_i$  nach der Zeit  $t$  gilt  $F_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} = m \frac{\partial v_i}{\partial t}$  in jede Raumrichtung  $i$ . Da die Geschwindigkeit als  $v_i$  Ableitung der Verschiebung  $s_i$  nach der Zeit  $t$  definiert ist, gilt weiter  $F_i = m \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2}$ . Im Falle eines Gleichgewichtszustandes ergibt sich der Ausdruck zu Null,  $\sum F_i = 0$  in jede Raumrichtung  $i$ . Der Körper verbleibt dann in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Die Anwendung in der Strukturmechanik liefert infinitesimale partielle Zusammenhänge. Dafür werden Spannungen als infinitesimale Beanspruchungen betrachtet. Es wird ein infinitesimaler Würfel eines Kontinuums mit den infinitesimalen Abmessungen und damit infinitesimalen Volumen  $dx dy dz = dV$  der Dichte  $\rho$  betrachtet. Die Spannungskomponenten am infinitesimalen Würfel in eine Raumrichtung entsprechen, multipliziert mit der jeweiligen infinitesimalen Fläche, infinitesimalen Kräften. Mit den Beschleunigungen in die jeweiligen Raumrichtungen  $a_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $a_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  und  $a_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  in die jeweiligen Raumrichtungen und der infinitesimalen Masse  $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$  können die Bewegungsgleichungen aufgestellt werden. Kürzen der Terme mit jeweils zwei Dimensionen liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} , \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} , \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

als strukturmechanische lokale Bewegungsgleichungen. Wenn keine Beschleunigungen wirken, also im statischen bzw. quasi-statischen Fall werden die Terme der Zeitableitungen zu Null und es verbleiben die strukturmechanischen lokalen Gleichgewichtsbedingungen.

<sup>2</sup> ISAAC NEWTON, \* 4. Januar 1643 in Woolsthorpe-by-Colsterworth in Lincolnshire, † 31. März 1727 in Kensington. Englischer Naturforscher und Philosoph (!).



## 4.2 Materialsymmetrien

Ausgehend von der Kontinuumsmechanik wird auf die, in der technischen Mechanik üblichen, Zusammenhänge gefolgert. Dies ist detailliert beispielsweise in ALTENBACH, ALTENBACH und KISSING 2004 [1] oder BETTEN 1993 [12] dargestellt. Dabei wird auf die unterschiedlichen Materialsymmetrien Anisotropie, Monotropie, Orthotropie, Transversalisotropie und Isotropie eingegangen. Diese weisen gewisse Symmetrien von Materialkennwerten bzgl. einer Achse oder einer Ebene auf. Entsprechende Herleitungen und Aspekte sind dabei im Wesentlichen u. a. in ALTENBACH, ALTENBACH und RIKARDS 1996 [2], EHRLICH 2004 [30], GEBBEKEN 1996 [47], GROSS et al. 2004 [53] und JONES 1999 [69] dargestellt.

In der vorliegenden Arbeit ist das monotrope, das orthotrope, das transversalisotrope sowie das isotrope Materialgesetz relevant. Orthotropes Materialverhalten wird zum Beispiel durch orthogonale Anordnung von unidirektional faserverstärkten Werkstofflagen im Kreuzverbund oder durch gewebeverstärkte Einzellagen erreicht, wenn die Koordinatenachsen des lokalen Koordinatensystems (also die Vorzugsrichtung bzw. Richtung der Verstärkungsfasern) mit dem globalen Koordinatensystem der Struktur zusammenfallen. Unidirektional verstärkte Einzellagen weisen transversalisotropes Materialien mit einer Vorzugsrichtung auf, wenn die Koordinatenachsen des lokalen Koordinatensystems mit dem globalen Koordinatensystem zusammenfallen. Die Ebene senkrecht dazu weist dagegen quasi-isotrope Eigenschaften auf. Monotropes Materialverhalten tritt in unidirektional verstärkten Einzelschichten auf, wenn das lokale Koordinatensystem um die Achse in Dickenrichtung gedreht wird (also in der Ebene der Einzellage). Dadurch fällt die Vorzugsrichtung des lokalen Koordinatensystems bzw. Richtung der Verstärkungsfasern nicht mehr mit den Koordinatenachsen des globalen Koordinatensystems in der Ebene der Einzellage zusammen. Im Gegensatz dazu weisen isotrope Materialien keine Vorzugsrichtung auf.

### 4.2.1 Anisotropie

Die Anisotropie ist der allgemeine Fall des Materialgesetzes. Anisotrope Materialien zeigen in jede Betrachtungsrichtung unterschiedliche Materialeigenschaften. Es besteht keine Symmetrie bezüglich Achsen oder Ebenen. Anisotrope Materialien können gleichbedeutend als triklone Materialien bezeichnet werden. Alle 36 Komponenten der Steifigkeitsmatrix  $[C]$  bzw. der Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$  sind von Null verschieden. Da die Matrizen  $[C]$  und damit  $[S]$  immer symmetrisch zur Hauptdiagonalen sind, existieren 21 unabhängige Materialkennwerte.

In allgemeiner matrizieller Form lautet das HOOKE'sche Materialgesetz

$$[\sigma] = [C] [\varepsilon] \quad , \quad \text{bzw. invers} \quad [\varepsilon] = [S] [\sigma] \quad , \quad \text{wobei} \quad [S] = [C]^{-1} \quad . \quad (4.19)$$

gilt. Dabei ist  $[C]$  die Steifigkeitsmatrix und deren Inversion  $[S]$  die Nachgiebigkeitsmatrix.

In Komponentendarstellung bezüglich einer kartesischen Basis ist

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad . \quad (4.20)$$

Dabei ist  $\sigma_{ij}$  der Spannungstensor und  $\varepsilon_{kl}$  der Verzerrungstensor mit jeweils  $3^2 = 9$  Komponenten. Beide Tensoren sind von zweiter Ordnung und symmetrisch. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft reduzieren sich diese auf einen Spaltenvektor mit jeweils sechs Komponenten. Zusätzlich ist  $C_{ijkl}$  der Elastizitätstensor vierter Ordnung mit  $3^4 = 81$  Materialkoeffizienten. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des sog. CAUCHY-Spannungstensor und des sog. GREEN-Verzerrungstensors, vgl.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  und  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , folgt für den Materialtensor

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \text{und} \quad C_{ijkl} = C_{jilk} \quad . \quad (4.21)$$

Damit reduziert sich die Anzahl der Komponenten auf 36. Die zuvor dargestellte Reduktion der Anzahl der Komponenten von symmetrischen Tensoren entspricht einer sog. Kontraktion. Dies ermöglicht die Formulierung des Zusammenhangs mit einer Einfachindizierung für die Spannungen und Verzerrungen und einer Doppelindizierung für die elastischen Konstanten zu

$$[\sigma_i] = [C_{ij}] [\varepsilon_j] \quad \text{mit} \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{und} \quad C_{ij} \neq C_{ji}, \quad i \neq j \quad (4.22)$$

und damit mit einer Vektor-Matrix-Schreibweise.

Für den dreidimensionalen Fall entsprechen Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen aus Gleichung (4.19)

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{46} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{56} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.23)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{46} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{56} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} = [C]^{-1} . \quad (4.24)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Materialien hyperelastisch sind und ein elastisches Potential bzw. eine Verzerrungsenergiegedichtefunktion existiert, wird der Nachweis der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix  $C_{ij}$  zur Hauptdiagonalen dargestellt. Für die Formänderungsenergiefunktion im dreidimensionalen Fall wird die gespeicherte Verzerrungsarbeit eines infinitesimalen Volumenelements zu

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i \quad \text{und damit} \quad \frac{dW}{d\varepsilon_i} = \sigma_i \quad (4.25)$$

und durch Integration über alle Koordinaten des Verzerrungsvektors und mit Gleichung (4.22) zu

$$W = \int \sigma_i d\varepsilon_i = \int C_{ij} \varepsilon_i d\varepsilon_j = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (4.26)$$

als im Körper gespeicherte Verzerrungsenergiegedichte. Die Verzerrungsenergiegedichtefunktion hängt dabei von allen Koordinaten der Verzerrungen ab, und es gilt  $W = W(\varepsilon_i)$ . Analog lässt sich über die Entwicklung von  $W(\varepsilon_i)$  in einer TAYLOR<sup>3</sup>-Reihe und unter den Voraussetzungen, dass sich das System im Ausgangszustand für  $\varepsilon = 0$  im Gleichgewicht befindet, und damit die Terme aller ersten Ableitungen als notwendige Bedingung zu Null werden, sowie dass lediglich kleine Verzerrungen  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$  betrachtet werden, auf die jeweiligen Faktoren vor den Termen der Ableitungen schließen, und es folgt ebenfalls Gleichung (4.26). Die partiellen Differentiation nach den Verzerrungen  $\partial\varepsilon_i$  liefert wieder das allgemeine HOOKE'sche Materialgesetz in Vektor-Matrix-

<sup>3</sup> BROOK TAYLOR, \* 18. August 1685 in Edmonton (Middlesex), † 29. Dezember 1731 in Somerset House (London). Britischer Mathematiker.

Form nach Gleichung (4.22) zu

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j = \sigma_i . \quad (4.27)$$

Damit ist das verallgemeinerte HOOKE'sche Gesetz nach Gleichung (4.20) die allgemeinste Formulierung des Zusammenhangs zwischen den Koordinaten des Spannungs- und Verzerrungsvektors für linear-elastisches Materialverhalten. Dies gilt unter der zusätzlichen vereinfachenden Voraussetzung, dass der Anfangszustand keine Eigenspannungen enthält. Nach nochmaliger partieller Differentiation nach den Verzerrungen  $\partial \varepsilon_j$  verbleibt die Steifigkeitsmatrix bzw. der Stofftensor

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} . \quad (4.28)$$

Damit entspricht die Steifigkeit  $C$  der zweiten Ableitung der Potentialfunktion im Ausgangszustand. Dies stellt den Zusammenhang zwischen dem makroskopischen Materialverhalten und der inneren Materialstruktur dar. Wenn ausgehend von der zur Gleichung (4.27) gleichwertigen Beziehung

$$dW = C_{ji} \varepsilon_j d\varepsilon_i \quad (4.29)$$

ausgegangen wird, führt die zweifache partielle Differentiation der integrierten Gleichung (4.29) auf

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} . \quad (4.30)$$

Die Differentiationsreihenfolge ist unabhängig, und es gilt

$$C_{ij} = C_{ji} . \quad (4.31)$$

Damit ist die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix  $[C]$  zur Hauptdiagonalen nachgewiesen worden. Analoges Vorgehen ermöglicht den Nachweis der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$  zur Hauptdiagonalen. Die beiden Koeffizientenmatrizen mit 36 von Null verschiedenen Komponenten besitzt damit maximal 21 unabhängige Koeffizienten und lauten allgemein

$$[C_{\text{aniso}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \text{sym.} & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.32)$$

$$[S_{\text{aniso}}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \text{sym.} & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} . \quad (4.33)$$

In den dargestellten Sonderfällen der Materialsymmetrien besitzen die Koeffizientenmatrizen für Steifigkeit bzw. Nachgiebigkeit stets 36 Komponenten. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften

reduziert sich jedoch die Anzahl der voneinander unabhängigen Koeffizienten und es erhöht sich die die Anzahl von Nulleinträgen, d. h. die Beanspruchungsarten Verzerrungen und Gleitungen im Material werden von den äußeren Belastungen bzw. Verformungen immer mehr entkoppelt.

### 4.2.2 Monotropie

Monotropes bzw. monoklines Materialverhalten wird durch die Existenz einer Symmetrieebene der Materialeigenschaften hervorgerufen. Durch die Spiegelung der Materialeigenschaften an einer Ebene reduzieren sich die von Null verschiedenen Komponenten auf 20. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft zur Hauptdiagonale verbleiben damit 13 unabhängige elastische Kennwerte zur Beschreibung eines monotropen Materialverhaltens.

Die Koeffizientenmatrizen unterscheiden sich in ihrer Belegung durch die Symmetrieebene. Diese kann im dreidimensionalen Fall die  $x$ - $y$ -, die  $y$ - $z$ - oder die  $z$ - $x$ -Ebene sein, wobei die Isotropieebene dann in  $z = 0$ ,  $x = 0$  oder  $y = 0$  liegt. Für den ersten Fall, dass die  $x$ - $y$ -Ebene die Symmetrieebene ist, und die Isotropieebene in  $z = 0$  liegt, lauten die Koeffizientenmatrizen exemplarisch

$$[C_{\text{mono}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ \text{sym.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.34)$$

$$[S_{\text{mono}}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ & & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & 0 \\ \text{sym.} & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Monotropes Materialverhalten tritt in unidirektional verstärkten Einzelschichten auf, wenn das lokale Koordinatensystem um die Achse in Dickenrichtung gedreht wird (also in der Ebene der Einzellage). Dadurch fällt die Vorzugsrichtung des lokalen Koordinatensystems bzw. Richtung der Verstärkungsfasern nicht mehr mit den Koordinatenachsen des globalen Koordinatensystems in der Ebene der Einzellage zusammen. Aus der Belegung der Koeffizientenmatrizen geht hervor, dass Verzerrungen bzw. Normalspannungen und Gleitungen bzw. Schubspannungen in der Symmetrieebene nicht voneinander entkoppelt sind. Die Verzerrungen bzw. Normalspannungen sind miteinander über Querverformungseffekte gekoppelt.

### 4.2.3 Orthotropie

Orthotropes bzw. orthotrop anisotropes Materialverhalten wird durch die Existenz von zwei oder drei zueinander orthogonalen Symmetrieebenen, zu denen symmetrische Punkte gleiche elastische Kennwerte besitzen, hervorgerufen. Dadurch reduzieren sich die von Null verschiedenen Komponenten auf 12. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft zur Hauptdiagonale verbleiben damit 9 unabhängige elastische Kennwerte zur Beschreibung eines orthotropen Materialverhaltens.

Die Belegung der Koeffizientenmatrizen ergibt sich aufgrund der zueinander senkrechten Symmetrieebenen als weiter vereinfachter Fall des Materialgesetzes. Die Koeffizientenmatrizen bei

orthotropen Materialien lauten

$$[C_{\text{ortho}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.36)$$

$$[S_{\text{ortho}}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Orthotropes Materialverhalten tritt beispielsweise in kreuzweise unidirektional verstärkten Verbunden, sog. Kreuzverbunden, oder in gewebeverstärkten Einzellagen auf, wenn die Koordinatenachsen des lokalen Koordinatensystems (also die Vorzugsrichtung(en) bzw. die Richtung der Verstärkungsfasern der Kett- bzw. Schussrichtung) mit dem globalen Koordinatensystem der Struktur zusammenfallen. Verzerrungen bzw. Normalspannungen und Gleitungen bzw. Schubspannungen treten im Fall orthotropen Materialverhaltens voneinander entkoppelt auf. Lediglich Verzerrungen bzw. Normalspannungen sind miteinander über Querverformungseffekte gekoppelt. Im Gegensatz dazu treten Gleitungen bzw. Schubspannungen in den jeweiligen Ebenen entkoppelt voneinander auf.

#### 4.2.4 Transversalisotropie

Unter der Voraussetzung, dass das Materialverhalten in einer Schnittebene, beispielsweise der  $y$ - $z$ -Ebene, quasi-isotrop ist, besteht in dieser Ebene keine Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften. Damit vereinfachen sich die Zusammenhänge weiter. Bei einer Drehung um die zur Isotropieebene senkrechte Achse, in diesem Fall um die  $x$ -Achse, bleiben die Materialeigenschaften unverändert. Die Anzahl der von Null verschiedenen Komponenten in der Koeffizientenmatrix sind weiterhin 12. Da die Materialeigenschaften in der Schnittebene jedoch richtungsunabhängig sind, gilt im dargestellten Fall  $C_{22} = C_{33}$  und  $C_{12} = C_{13}$  sowie  $C_{55} = C_{66}$ . Zusätzlich gilt für den dargestellten Fall in der  $x$ - $y$ -Ebene aufgrund der Zusammenhänge aus der Koordinatentransformation in der Ebene und damit für den zweiachsigen Spannungszustand, dass unter reiner Zugbelastung der um  $+45^\circ$  bzw.  $-45^\circ$  gedrehte Hauptschubspannungszustand nicht normalspannungsfrei ist. An den Schnittufern verbleiben jeweils gleichgroße Zugspannungen mit der Hälfte des Betrags der ursprünglichen Zugspannung. Deshalb gilt zusätzlich  $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{32})$ . Aufgrund der beschriebenen Zusammenhänge und der Symmetrieeigenschaft zur Hauptdiagonale verbleiben damit 5 unabhängige elastische Kennwerte zur Beschreibung eines transversalisotropen Materialverhaltens.

Die Belegung der Koeffizientenmatrizen ergibt sich aufgrund der Isotropieebene und der dazu senkrechten Symmetrieachse als weiter vereinfachter Fall des Materialgesetzes. Die Koeffizien-

tenmatrizen bei transversalisotropen Materialien lauten

$$[C_{\text{transiso}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.38)$$

$$[S_{\text{transiso}}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & S_{66} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Transversalisotropes Materialverhalten tritt in unidirektional verstärkten Einzellagen auf, wenn die Koordinatenachsen des lokalen Koordinatensystems (also die Vorzugsrichtung) mit dem globalen Koordinatensystem der Struktur zusammenfallen und das Materialverhalten in Schnittebenen senkrecht zur Symmetrieachse als quasi-isotrop vorausgesetzt wird. Normalspannungen sind miteinander über Querverformungseffekte gekoppelt. Zusätzlich ergeben sich die Gleitungen bzw. Schubspannungen in der zur Isotropieebene senkrechten Ebene  $z = 0$  aus den Transformationsbeziehungen des ebenen Spannungszustandes. Im Gegensatz dazu sind auftretende Gleitungen bzw. Schubspannungen in der Isotropieebene betragsgleich, jedoch von den Zusammenhängen in  $z = 0$  entkoppelt.

#### 4.2.5 Isotropie

Das isotrope Materialgesetz entspricht der höchsten Symmetriestufe des Materialgesetzes. Isotrope Materialien zeigen bezüglich allen Achsen und Ebenen symmetrische Materialkennwerte. Sie verhalten sich vollständig richtungsunabhängig. Die Anzahl der von Null verschiedenen Komponenten in der Koeffizientenmatrix ist wiederum 12. Da die Materialeigenschaften jedoch richtungsunabhängig sind, ergeben sich drei weitere Kopplungen zwischen Komponenten der Koeffizientenmatrix. Unter der Voraussetzung gleichen Materialverhaltens in den zueinander senkrechten Schnittebenen  $x$ - $y$ -,  $y$ - $z$ - oder  $z$ - $x$ -Ebene gilt

- $C_{11} = C_{22} = C_{33}$  wegen gleichem Längsverzerrungsverhalten,
- $C_{12} = C_{23} = C_{31}$  wegen gleichem Querverzerrungsverhalten und
- $C_{44} = C_{55} = C_{66}$  wegen gleichem Schubverzerrungsverhalten.

Zusätzlich gilt aufgrund der Äquivalenz zwischen reiner Schubbeanspruchung in einer Ebene und der betragsgleichen zweiachsigen Zug-Druck-Beanspruchung an den Schnittufern in der um  $+45^\circ$  bzw.  $-45^\circ$  gedrehten Koordinatentransformation  $C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$ . Aufgrund der beschriebenen Zusammenhänge und der Symmetrieeigenschaft zur Hauptdiagonale verbleiben damit lediglich noch  $C_{11}$  und  $C_{12}$  als 2 unabhängige elastische Kennwerte zur Beschreibung isotropen Materialverhaltens.

Die Belegung der Koeffizientenmatrizen ergibt sich aufgrund der vollkommenen Symmetrie der

elastischen Materialkennwerte. Die Koeffizientenmatrizen bei isotropen Materialien lauten

$$[C_{\text{iso}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.40)$$

$$[S_{\text{iso}}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ & & & & & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Normalspannungen sind über die Querverformung gekoppelt. Zusätzlich ergeben sich die Gleitungen bzw. Schubspannungen aus Transformationsbeziehungen. Auftretende Gleitungen bzw. Schubspannungen sind entgegengerichtet betragsgleich, jedoch in jeder Ebene voneinander entkoppelt. Isotropes Materialverhalten wird näherungsweise für Materialien vorausgesetzt, die richtungsunabhängige elastische Materialkennwerte aufweisen. Dies sind typischerweise metallische Werkstoffe und unverstärkte Polymere.

### Nachgiebigkeitsmatrizen in Termen von Ingenieurskonstanten

Die im vorherigen Abschnitt abgeleiteten Belegungen der Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen für unterschiedliche Materialsymmetrien werden für relevante Fälle in Termen von Ingenieurskonstanten angegeben. Im Einzelnen sind dies üblicherweise die Steifigkeit oder Elastizitätsmodul  $E$ , die Querverformungszahl  $\nu$  und der Schubmodul  $G$  angegeben. Diese Größen werden direkt in unterschiedlichen Methoden der Materialkennwertermittlung ermittelt. Sie sind deshalb leichter zugänglich und anschaulich als die Koeffizienten der Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen. Dabei ist die Ermittlung der Koeffizienten der Nachgiebigkeitsmatrix teilweise direkter nachvollziehbar, da üblicherweise Verzerrungen bzw. Verformungen als Reaktion des Materials gemessen werden, die aus bekannten, von außen aufgebrachten, Belastungen resultieren. Damit treffen Spannungen  $[\sigma]$  auf Nachgiebigkeiten  $[S]$  und resultieren in Verzerrungen  $[\varepsilon]$ . Dies geht aus dem Zusammenhang  $[\varepsilon] = [S] [\sigma]$  hervor. Die Inversion dieses Zusammenhangs bedeutet, dass Verzerrungen  $[\varepsilon]$  auf Steifigkeiten  $[C]$  treffen, und daraus Spannungen  $[\sigma]$  resultieren. Dies wird durch  $[\sigma] = [C] [\varepsilon]$ .

Die Nachgiebigkeitsmatrix eines monotropen Materials mit der  $x$ - $y$ -Ebene als Symmetrieebene und damit  $z = 0$  als Isotropieebene lautet

$$[S_{\text{mono}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{61}}{E_6} \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{62}}{E_6} \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{63}}{E_6} \\ & \text{sym.} & & \frac{1}{E_4} & \frac{\nu_{54}}{E_5} & 0 \\ & & & & \frac{1}{E_5} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{E_6} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix eines orthotropen Materials lautet

$$[S_{\text{ortho}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \frac{1}{E_4} = \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{E_5} = \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{E_6} = \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

mit den Ingenieurskonstanten und entsprechender Indizierung

- $E_1, E_2, E_3$  als die Elastizitätsmoduli in der 1-, 2- bzw. 3-Richtung,
- $\nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{12}$  als die Querverformungszahlen und
- $G_{23}, G_{31}, G_{12}$  als die Gleitmoduli in der 2-3-, 3-1- bzw. 1-2-Ebene.

Mit der Definition der Querverformungszahl

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad \forall \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.44)$$

ist diese das negative Verhältnis der Kontraktion in  $j$ -Richtung bei reiner Zugbeanspruchung in  $i$ -Richtung.

Mit der sog. MAXWELL<sup>4</sup>-BETTI<sup>5</sup>-Beziehung

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad \forall \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.45)$$

der u. a. aus der Symmetrie der Koeffizientenmatrizen der Steifigkeit bzw. Nachgiebigkeit (siehe Gleichung (4.43)) oder der Reziprozität bzw. Gegenseitigkeit der Verschiebungsarbeiten hervorgeht, wird Gleichung (4.43) zu

$$[S_{\text{ortho}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Mit den Ingenieurskonstanten

$$E_1, \quad E_2 = E_3, \quad G_{13} = G_{12}, \quad \nu_{12} = \nu_{13}, \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (4.47)$$

lautet die Nachgiebigkeitsmatrix eines transversalisotropen Materials mit der  $y$ - $z$ -Ebene bzw.

<sup>4</sup> JAMES CLERK MAXWELL, \* 13. Juni 1831 in Edingburgh, † 5. November 1879 in Cambridge. Schottischer Physiker.

<sup>5</sup> ENRICO BETTI, \* 21. Oktober 1823 in Pistoia (Toskana, Italien), † 11. August 1892 in Soiana. Italienischer Mathematiker.



$x = 0$  als Isotropieebene

$$[S_{\text{transiso}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix eines isotropen Materials in Termen der Ingenieurskonstanten  $E$  und  $\nu$  lautet

$$[S_{\text{iso}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Die Ingenieurkonstanten sind im Einzelnen der Elastizitätsmodul  $E$  und die Querverformungszahl  $\nu$ . Zwischen Elastizitätsmodul  $E$  und Schubmodul  $G$  besteht der Zusammenhang

$$E = 2(1 + \nu)G, \quad (4.50)$$

sodass das Schubmodul  $G$  kein unabhängiger Materialkennwert ist. Die Verzerrungen bzw. Normalspannungen sind über die Querverformung gekoppelt. Die Kopplung wird durch die Querverformungszahl  $\nu$ , wie in Gleichung (4.4) dargestellt, beschrieben. Sie ist über den einachsigen Zugversuch definiert. Die Schubspannungen sind auch hier entkoppelt.



# 5 Mikromechanische Homogenisierungsansätze

Faserverstärkte Kunststoffe bestehen aus den Einzelkomponenten Verstärkungsfasern, polymerer Matrixwerkstoff und sich in der Faser-Matrix-Grenzschicht ausgebildeten Interphase. Bei der analytischen Betrachtung geschichteter Strukturen ist jedoch i. a. eine verstärkte Einzelschicht das kleinste berücksichtigte Werkstoffelement. Diese wird dabei vereinfachend als homogen vorausgesetzt [92]. Da die makromechanischen Einzelschichten in der Realität mikromechanisch jedoch aus den zuvor genannten Einzelkomponenten bestehen, ergibt sich die Notwendigkeit, die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der mikromechanischen Einzelkomponenten in unterschiedlichen Ansätzen zu makromechanisch resultierenden Größen der verstärkten Einzelschicht zu homogenisieren [69].

Ansätze zur Homogenisierung sind ein wesentlicher Bestandteil der Mikromechanik einer verstärkten Einzellage. Dabei wird die grundlegende Frage behandelt, wie die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte des makroskopischen Verbundmaterials von denen der mikromechanischen Einzelkomponenten abhängen [69]. Im Allgemeinen setzt die Formulierung von Mischungsregeln voraus, dass die Einzelkomponenten in einer verstärkten Einzellage makromechanisch nicht mehr als solche erkennbar sind [69]. Unter dieser Voraussetzung liefert die Mikromechanik unterschiedliche mechanische Modelle, die auf repräsentativ angenommenen Ausschnitten des Werkstoffes basieren. Für einen sich ständig wiederholenden Bereich (sog. Einheitszellen) werden die relevanten mechanischen Eigenschaften exemplarisch analysiert. Die Eigenschaften der Einheitszelle werden anschließend als das mechanische Verhalten des makroskopischen Modells vorausgesetzt [149]. Die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte einer verstärkten Einzellage hängen von den jeweiligen Eigenschaften der Einzelkomponenten in unterschiedlichem Maß ab.

Ansätze zur Homogenisierung gewichten die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der Einzelkomponenten, sodass einer verstärkten Einzellage die entsprechenden makroskopischen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte zugeordnet werden. Damit mischen bzw. verschmieren Homogenisierungsansätze die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der Einzelkomponenten. Als Größe für die Gewichtung wird dabei in den meisten Ansätzen der Faservolumengehalt  $\varphi_f$  verwendet. Er dient als Indikator für die mechanische Qualität des Materials und für die Reproduzierbarkeit der angewendeten Herstellverfahren. In mechanisch hochwertigen faserverstärkten Kunststoffen beträgt dieser charakteristische Materialkennwert  $\varphi_f \approx 60\%$ .

Die dargestellten Aspekte sind im Wesentlichen aus den Werken von ALTENBACH, ALTENBACH und RIKARDS 1996 [2], JONES 1999 [69], MOSER 1992 [92], SCHÜRMAN 2005 [149] und STELLBRINK 1996 [151] exzerpiert. In GEBBEKEN 1996 [47] findet sich eine ausführliche Betrachtung der Gültigkeitsbereiche und Grenzen sowie kritischen Anmerkungen zu unterschiedlich recherchierten Homogenisierungsansätzen [46].

## 5.1 Vereinfachende Voraussetzungen

Zunächst werden unidirektional verstärkte Einzelschichten betrachtet. Diese sind im lokalen Koordinatensystem transversalisotrop, wenn eine Hauptachse mit der Richtung der Verstärkungsfasern übereinstimmt. Dabei ergeben sich fünf voneinander unabhängige strukturmechanische Werkstoffkennwerte, die mit unterschiedlichen Homogenisierungsansätzen berechnet werden.

Die zu Grunde liegenden vereinfachenden Voraussetzungen sind u. a.:

- Die Steifigkeit und die Festigkeit des polymeren Matrixsystems sind mindestens eine Magnitude kleiner als die jeweilige Größe der Verstärkungsfasern (v. a. in Längsrichtung) [151].
- Die Bruchdehnung des polymeren Matrixsystems ist größer als die der Verstärkungsfasern.
- Das polymere Matrixsystem weist isotropes Materialverhalten auf. Die Verstärkungsfasern weisen isotropes oder, bezogen auf die Faserlängsrichtung, transversalisotropes Materialverhalten auf.
- Sowohl für das polymere Matrixsystemen als auch für die Verstärkungsfasern wird vereinfachend ein linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt, obwohl v. a. polymere Matrixsysteme in ihrer Reinform (Reinharz) teilweise nichtlineare mechanische Werkstoffigenschaften aufweisen.
- Die Geometrie der Verstärkungsfasern wird als zylindrisch, d. h. mit kreisrundem Querschnitt und ideal gerader Achse, vorausgesetzt. Die Durchmesser betragen zwischen  $5\ \mu\text{m}$  und  $20\ \mu\text{m}$ .
- Die Betrachtung einer unidirektional verstärkten Einzelschicht impliziert die vereinfachenden Voraussetzungen, dass die Verstärkungsfasern (quasi-)endlos lang sind und ideal parallel angeordnet vorliegen.
- In der Grenzschicht zwischen den Verstärkungsfasern und dem polymeren Matrixsystem herrscht vollständige Haftung (sog. *ideale Faser-Matrix-Haftung*), sodass von einer Kontinuität der Verzerrungen, und damit einem sog. *idealen Verbund*, ausgegangen wird [47].
- Die sich in der Faser-Matrix-Grenzfläche ausbildende Interphase, die als sog. dritte Einzelkomponente bezeichnet wird, wird vernachlässigt, obwohl ihr Volumenanteil im Laminat teilweise nicht unwesentlich ist.
- Der Volumenanteil von Poren (auch: Porositäten) und Lunkern im Laminat wird als vernachlässigbar klein vorausgesetzt.

Im weiteren Verlauf sind neben den Querverformungszahlen besonders die Steifigkeiten relevant. Diesbezüglich werden folgende weitere vereinfachende Voraussetzungen getroffen:

- Die Steifigkeiten des Verbundmaterials werden sowohl für Zugbeanspruchungen als auch für Druckbeanspruchungen als (betrags-)gleich vorausgesetzt. Die Steifigkeiten und die Festigkeiten hängen in der Realität jedoch von der jeweiligen Art der Beanspruchung (Zug- oder Druck) ab [151].
- Bei der Betrachtung von Schubsteifigkeiten als auch von Schubfestigkeiten in der gleichen Ebene ist das Vorzeichen per se irrelevant [151].
- Die entsprechenden Größen werden im lokalen 1-2-3-Koordinatensystem berechnet. Über Transformationsbeziehungen ergeben sich diese Größen für das eventuell abweichende globale  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem.

Die folgenden Darstellungen beziehen sich auf eine unidirektional verstärkte Einzelschicht. In der zweidimensionalen Schicht fällt die 1-Richtung des lokalen Koordinatensystems mit der Richtung der Faserverstärkung zusammen und spannt mit der dazu senkrechten 2-Richtung die Ebene der Schicht auf. Unter diesen Voraussetzungen, die schließlich lediglich die Betrachtung eines ebenen Spannungszustandes zulassen, genügt die Kenntnis der Komponenten der sog. reduzierten Steifigkeitsmatrix  $Q$ . Dreidimensionale Betrachtungen erfordern zusätzlich die Kenntnis der mechanischen Materialkennwerte in der 1-3-Ebene. Diese ergeben sich aufgrund von Symmetrieeigenschaften der Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix analog zu  $E_1, E_2 = E_3, G_{13} = G_{12}, \nu_{12} = \nu_{13}, G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})}$ , wie in den Ausführungen bis zur Gleichung (4.47) dargestellt. Diese Größen werden u. a. bei der Eingabe von strukturmechanischen Werkstoffkennwerten für numerische Berechnungen mit der Finite-Elemente-Methode benötigt. Dabei wird aus Gründen der Konsistenz beispielsweise auch für zweidimensionale Elemente, zu deren eindeutiger Beschreibung die Kenntnis der fünf unabhängigen Materialkennwerte genügt, die vollständige Eingabe der neun dreidimensionalen Materialkennwerte gefordert.

## 5.2 Steifigkeiten

Grundlegend existieren zwei unterschiedliche Fälle mechanische Elemente zu verbinden. Dies sind die Parallelschaltung und die Hintereinanderschaltung. Die Parallelschaltung impliziert die Summation der Kräfte bei Gleichheit der Verschiebungen. Die Last verteilt sich invers proportional zu den Steifigkeitsverhältnissen. Die Hintereinanderschaltung impliziert die Summation der Verschiebungen bei Gleichheit der Kräfte. Die Verschiebungen verteilen sich invers proportional zu den Steifigkeitsverhältnissen. Basierend auf den beiden zuvor kurz beschriebenen Anordnungsmöglichkeiten werden Homogenisierungsansätze zur Berechnung der Steifigkeiten einer unidirektional verstärkten Einzelschicht im lokalen Koordinatensystem angegeben.

### 5.2.1 Längssteifigkeit $E_{11}$

Die Steifigkeit in Faserlängsrichtung  $E_{11}$  bzw.  $E_1$  ergibt sich in erster Näherung über das Modell der Parallelschaltung der beiden Einzelkomponenten Verstärkungsfaser und Matrixsystem unter der Voraussetzung linear-elastischen Materialverhaltens zu

$$E_1 = \varphi_f E_f + (1 - \varphi_f) E_m , \quad (5.1)$$

als arithmetischer Mittelwert von (Element-)Kräften. Der Ansatz entspricht dem, mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$ , gewichteten Mittel der Steifigkeiten der Verstärkungsfasern und des Matrixsystems.

Obwohl sich Gleichung (5.1) unter stark vereinfachenden Voraussetzungen ergibt, stimmen experimentell ermittelte Steifigkeiten von unidirektional verstärkten Einzellagen sehr gut damit überein. Dabei sind Querverformungseffekte bzw. dreidimensionale Spannungszustände, beispielsweise hervorgerufen durch unterschiedliche Querschnittsformen, mikromechanische Anordnung bzw. Packungsart der Verstärkungsfasern oder Eigenschaften der Interphase in der Faser-Matrix-Grenzschicht nicht berücksichtigt. Aufgrund der verhältnismäßig geringen Steifigkeit des Matrixsystems sind diese Einflüsse entsprechend gering.

### 5.2.2 Quersteifigkeit $E_{22}$

Die Steifigkeit quer zur Faserlängsrichtung  $E_{22}$  bzw.  $E_2$  ergibt sich in erster Näherung über das Modell der Hintereinanderschaltung der beiden Einzelkomponenten Verstärkungsfaser und Matrixsystem unter der Voraussetzung linear-elastischen Materialverhaltens zu

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{(1 - \varphi_f) E_f + \varphi_f E_m} , \quad (5.2)$$

als arithmetischer Mittelwert von (Element-)Verschiebungen. Der Ansatz entspricht dem, mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$ , gewichteten Mittel der Nachgiebigkeiten der Verstärkungsfasern und des Matrixsystems. Dabei verweist STELLBRINK 1996 [151] auf JONES 1999 [69].

Der Zusammenhang in Gleichung (5.2) ergibt sich analog zu Gleichung (5.1) unter stark vereinfachenden Voraussetzungen. In diesem Fall liefern experimentell ermittelte Steifigkeiten mit zunehmendem Faservolumengehalt lediglich geringfügig höhere Werte. Die Gründe hierfür sind u. a. die Voraussetzung rechteckförmiger Querschnitte von Verstärkungsfaser und Matrixsystem, die in der Realität eher einer stochastischen Verteilung unterschiedlicher Packungsarten der zylinderförmig vorausgesetzten Verstärkungsfasern entspricht, sowie das Auftreten von Querverformungsbehinderungen, Fehlstellen bzw. Ungenzen und mangelnde Faser-Matrix-Haftung in der Grenzschicht. Der Ansatz liefert im Vergleich zu alternativen Homogenisierungsansätzen verhält-

nismäßig kleine Werte, sodass er als unterer Grenzwert (sog. *lower-bound*) betrachtet werden kann. Dabei dominiert die verhältnismäßig geringe Steifigkeit des Matrixsystems diese Größe. Im Detail wirken die Verstärkungsfasern mikromechanisch als Kerben, sodass die effektive experimentell ermittelte Steifigkeit zusätzlich reduziert ist.

CHAMIS 1983 [24] bzw. CHAMIS 1984 [25] liefert einen verhältnismäßig einfachen semi-empirischen Ansatz [151],

$$E_2 = \frac{E_m}{1 - \left(1 - \sqrt{\varphi_f} \frac{E_m}{E_{f,22}}\right)}. \quad (5.3)$$

Er liefert annähernd die gleichen Ergebnisse wie das deutlich komplexere Kreiszyylinder-Modell nach HASHIN 1983 [60], das auf einer rein analytischen Grenzwertbetrachtung basiert [151].

Für die Steifigkeit quer zur Faserlängsrichtung existieren noch weitere unterschiedliche Homogenisierungsansätze. Dabei wären insbesondere Ansätze nach FÖRSTER und KNAPPE, PUCK, SCHNEIDER, TSAI 1980 [161], dem Handbuch Strukturberechnung (HSB) im Luftfahrttechnischen Handbuch (LTH) (wird zur Auslegung von Luftfahrtstrukturen in Deutschland verwendet) zu nennen. Diese weichen bei zunehmendem Faservolumengehalt  $\varphi_f$  zunehmend voneinander ab [151]. Dabei liefert der Ansatz nach PUCK stets den oberen Grenzwert (sog. *upper-bound*), während der Ansatz nach JONES in Gleichung (5.2), wie bereits erwähnt, den unteren Grenzwert (sog. *lower-bound*) über den gesamten theoretischen Definitionsbereich des Faservolumengehalts  $\varphi_f = 0\% \dots 100\%$  liefert. Dabei beträgt der technisch anzustrebende Wert des Faservolumengehalts in Laminaten mit unidirektionaler Verstärkung  $\varphi_{f,UD} \approx 60\%$ .

Die zuvor kurz beschriebenen Aspekte lassen den Schluss zu, dass die Steifigkeit quer zur Faserlängsrichtung deutlich sensitiver auf das Materialverhalten der untersuchten Art der Verstärkungsfasern (isotrop oder anisotrop), deren Wechselwirkung mit dem ausgewählten polymeren Matrixsystem und den Faservolumengehalt  $\varphi_f$  ist. Zusätzlich ist die Validierung der unterschiedlichen Homogenisierungsansätze für diesen mechanischen Werkstoffkennwert eine Herausforderung, da die dem Material eigene Streuung teilweise gleichzeitig in die Ergebnisbereiche mehrerer Ansätze fällt. Die Validierung zeigt eine große Sensitivität bezüglich Porositäten im Laminat. Zusätzlich verhalten sich die Werte sensitiv auf die Art der Beanspruchung, Zug oder Druck.

### 5.2.3 Längs-Quer-Schubsteifigkeit $G_{12}$

Die Schubsteifigkeit parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung ergibt sich in erster Näherung analog zur Steifigkeit quer zur Faserlängsrichtung über das Modell der Hintereinanderschaltung der beiden Einzelkomponenten Verstärkungsfasern und Matrixsystem unter der Voraussetzung linear-elastischen Materialverhaltens zu

$$G_{12} = \frac{G_{f,12} G_m}{(1 - \varphi_f) G_{f,12} + \varphi_f G_m}. \quad (5.4)$$

Dieser Ansatz entspricht wieder einer arithmetischen Mittelwertbildung von (Element-)Verschiebungen, analog zu Gleichung (5.2). Er entspricht dem, mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$ , gewichteten Mittel der Schubverformungen als Nachgiebigkeiten der Verstärkungsfasern und des Matrixsystems in einer Ebene parallel zur Faserlängsrichtung. Dabei referenziert STELLBRINK 1996 [151] wieder JONES 1999 [69].

Die Validierung der Gleichung (5.4) liefert analog zur Steifigkeit quer zur Faserlängsrichtung nach Gleichung (5.2) zu geringe Werte. Sie ist entsprechend wieder als unterer Grenzwert zu betrachten. Aus diesem Grund existieren in der Literatur weitere Homogenisierungsansätze für die Schubsteifigkeit parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung. Diese werden oft mit einem Mo-

dell abgeleitet, das dem zur Ermittlung der Steifigkeit quer zur Faserlängsrichtung entspricht oder ähnlich ist. Aus diesem Grund veröffentlichten oft die gleichen Autoren, wie beispielsweise FÖRSTER und KNAPPE, PUCK, SCHNEIDER, TSAI, Handbuch Strukturberechnung (HSB) im Luftfahrttechnischen Handbuch (LTH), HASHIN sowie SENDECKYJ unterschiedliche Ansätze. Die numerischen Unterschiede zwischen den einzelnen Homogenisierungsansätzen verhalten sich im wesentlichen analog zu denen der Ansätze für die Steifigkeit quer zur Faserlängsrichtung [151].

Der Homogenisierungsansatz nach Gleichung (5.4) ist v. a. wieder für glasfaserverstärkte Kunststoffe geeignet. Für kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe hat sich auch hier der Homogenisierungsansatz nach CHAMIS 1983 [24] bzw. CHAMIS 1984 [25] als geeignet erwiesen [151]. Die verhältnismäßig einfache semi-empirische Gleichung lautet im Falle für die Schubsteifigkeit parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung analog zu Gleichung (5.3)

$$G_{12} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{\varphi_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{f,12}}\right)}. \quad (5.5)$$

In diesem Fall unterscheiden sich die Werte nicht nach dem Vorzeichen der Beanspruchungsrichtung. Im Falle der Schubsteifigkeit ist jedoch die Beurteilung der Ergebnisse zusätzlich erschwert. Ein wesentlicher Grund hierfür ist das nichtlineare Schubverformungsverhalten, das polymere Matrixwerkstoffe meist aufweisen. Das nichtlineare Werkstoffverhalten einer Einzelkomponente beeinflusst das Werkstoffverhalten des Verbundmaterials entsprechend hin zu einer nichtlinearen Schubsteifigkeit parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung [151]. Die Validierung zeigt, dass  $G_{12}$  verhältnismäßig sensitiv auf Porositäten als Imperfektionen im Laminat reagiert. Die Streuungen von experimentellen Untersuchungsergebnissen können zusätzlich auf eventuelle Verdrillungen der Monofilamente in den Rovings oder der Rovings selbst, also sog. Imperfektionen, zurückgeführt werden [151]. Die Adaption der Gleichungen ist im Falle der Schubsteifigkeit parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung jedoch bereits durch geringe Modifikation der Eingangsgrößen erreichbar.

### Unterschiedliche experimentelle Methoden

Zur Ermittlung der Schubsteifigkeit parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung  $G_{12}$  existiert eine Vielzahl von experimentellen Methoden. Deren Auswertung erlaubt in unterschiedlicher Weise schließlich die Ermittlung der Schubsteifigkeit  $G_{12}$ . Im Folgenden wird eine Auswahl der bekanntesten bzw. relevantesten experimentellen Methoden angeführt.

Es existieren Ansätze, die Zugversuche mit flachen stabförmigen Probekörpern mit gewissen Winkeln der Faserverstärkung vorschlagen [92]. Dies sind im Detail, der in der DIN EN ISO 14129 [110] genormte  $\pm 45^\circ$ -Zugversuch (auch Zug-Schub-Versuch) oder der Off-Axis-Zugversuch, bei dem VASILIEV und MOROZOV 2007 [166]  $10^\circ$ -Faserverstärkung als geeignet betrachtet, und seinerseits auf CHAMIS 1979 [23] verweist. Der sog. IOSIPESCU-Schubversuch, bei denen symmetrisch gekerbte Probekörper mit unterschiedlichen Lagenaufbauten über eine Vorrichtung in einer Zugprüfmaschine in der Kerbe geschert werden, ist in der US-amerikanischen Norm ASTM D5379M [97] beschrieben. Im Two- bzw. Three-Rail-Shear-Test werden zwei bzw. drei Probekörper in einer Vorrichtung in Längsrichtung parallel nebeneinander eingespannt. Die Applikation von Zugbelastung auf die Vorrichtung leitet über die Fügstellen Schubbeanspruchungen in die Probekörper ein. Versuchsaufbau, -durchführung und -auswertung sind in GRELLMANN und SEIDLER 2005 [50], und dabei besonders in ALTSTÄDT 2005 [3], beschrieben. Beim sog. Picture-Frame-Versuch wird ein flacher quadratischer Probekörper mit  $45^\circ$ -Verstärkung in einen Viereck-Rahmen eingespannt, und an zwei gegenüberliegenden Gelenken in einer Zugmaschine gezogen. Die Betrachtung von Gleichgewichtsbedingungen in Kombination mit geometrischen bzw. kinematischen Bedingungen erlaubt die Berechnung der wirkenden Schubspannungen  $\tau_{12}$  bzw. die Schubsteifigkeit  $G_{12}$ , wie beispielsweise in VASILIEV und MOROZOV 2007 [166] beschrieben. Schließlich erlaubt die Torsionsprüfung von dünnen Kreiszyinderschalen mit  $0^\circ$ -

bzw. 90°-Faserverstärkung die Ermittlung der Schubsteifigkeit  $G_{12}$ . Die Anwendung der sog. 2. BREDT'schen Formel<sup>1</sup> mit dem Torsionswiderstand (auch ST. VENANT'scher Drillwiderstand<sup>2</sup>) ist in VASILIEV und MOROZOV 2007 [166], GRELLMANN und SEIDLER 2005 [50], und dabei besonders in ALTSTÄDT 2005 [3], beschrieben.

Der Werkstoffkennwert selbst ist zusätzlich sensitiv auf das Materialverhalten der untersuchten Art der Verstärkungsfaser (isotrop oder anisotrop), deren Wechselwirkung mit dem ausgewählten polymeren Matrixsystem und den Faservolumengehalt  $\varphi_f$ . Neben der Vielzahl von experimentellen Methoden zur Ermittlung der Schubsteifigkeit  $G_{12}$  ist auch in diesem Fall besonders die dem Material eigenen Streuung erwähnenswert. Zusätzlich weisen alle Methoden in unterschiedlichem Umfang gleichzeitig Vor- und Nachteile auf. Die grundlegende Ursache für die zuvor genannten Umstände ist jedoch, dass keine der recherchierten experimentellen Methoden reine Schubbeanspruchung mit experimentellen Randbedingungen realisiert die zugleich messbar sind.

#### 5.2.4 Quer-Quer-Schubsteifigkeit $G_{23}$

Für eine vollständige Beschreibung der Elastizitätsgrößen der unidirektional verstärkten Einzelschicht mit transversalisotropem Materialverhalten, wenn eine Koordinatenachse mit der Faserlängsrichtung zusammenfällt, wird die Schubsteifigkeit senkrecht/senkrecht zur Faserlängsrichtung  $G_{23}$  benötigt. Nach Definition liegt in der Ebene senkrecht zur Faserlängsrichtung Isotropie vor. Unter dieser Voraussetzung gilt aus Betrachtungen des ebenen Elastizitätsgesetzes unter Berücksichtigung geometrischer Zusammenhänge

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (5.6)$$

als bekannten Beziehung zwischen Elastizitätsmodul, Querverformungszahl und Schubsteifigkeit. Damit ist  $G_{23}$  ein abhängiger strukturmechanischer Werkstoffkennwert der unidirektional verstärkten Einzelschicht und keine Grund-Elastizitätsgröße im eigentlichen Sinn. Gleichung (5.6) verwendet jedoch die Querverformungszahl  $\nu_{23}$  für Querverformung quer zur Faserlängsrichtung bei Belastung quer zur Faserlängsrichtung. Entsprechende Homogenisierungsansätze sind in Abschnitt 5.3.3 angegeben.

Für die Schubsteifigkeit senkrecht/senkrecht zur Faserlängsrichtung  $G_{23}$  gibt es zusätzlich weitere Homogenisierungsansätze. Analog zu den Gleichungen (5.3) bzw. (5.5) gibt CHAMIS 1983 [24] bzw. CHAMIS 1984 [25] für diesen strukturmechanischen Werkstoffkennwert

$$G_{23} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{\varphi_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{f,23}}\right)} \quad (5.7)$$

an. Dieser wiederum relativ einfache Zusammenhang liefert jedoch tendenziell sehr hohe Werte. Zusätzlich wird zur Auswertung von Gleichung (5.7) insbesondere eben dieser mechanische Werkstoffkennwert der Verstärkungsfaser benötigt. Er wird dabei wieder durch die zuvor beschriebene Methode durch Auflösen der jeweiligen Gleichung selbst berechnet.

Basierend auf einem konzentrischen Zylinderelement Modell gibt TSAI 1980 [161] für die Schub-

<sup>1</sup> RUDOLF BREDT, \* 17. April 1842 in Barmen, † 18. Mai 1900 in Wetter. Deutscher Maschinenbauingenieur und Unternehmer. Veröffentlichte 1886 im VDI-Journal die sog. BREDT'schen Formeln als Grundlage zur Berechnung von Schubspannungen und Verformungen bei Bauelementen mit geschlossenen dünnwandigen Hohlquerschnitten unter reiner Torsionsbeanspruchung.

<sup>2</sup> ADHÉMAR JEAN CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT, \* 23. August 1797 in Villiers-en-Bière, Seine-et-Marne, † 6. Januar 1886 in St-Ouen, Loir-et-Cher. Französischer Ingenieur, Mathematiker und Physiker.



steifigkeit senkrecht/senkrecht zur Faserlängsrichtung

$$G_{23} = \frac{\varphi_f + \delta (1 - \varphi_f)}{\frac{\varphi_f}{G_{f,23}} + \frac{\delta(1-\varphi_f)}{G_m}} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{3 - 4\nu_m + \frac{G_m}{G_{f,23}}}{4(1 - \nu_m)} \quad (5.8)$$

an. Für verhältnismäßig schubsteife Verstärkungsfasern und einer Querverformungszahl des polymeren Matrixsystems  $\nu_m = 0,35$  beträgt der Wert des Terms  $\delta$  näherungsweise  $\delta \approx 0,62$  [151].

Obwohl die Schubsteifigkeit senkrecht/senkrecht zur Faserlängsrichtung  $G_{23}$  allgemein nicht relevant für die sog. klassische Laminattheorie (engl.: *classical laminate theory (CLT)*) ist, werden in STELLBRINK 1996 [151] wenige existierende Ansätze angeführt. Ein Grund dafür ist u. a., weil der Wert von  $G_{23}$  für die Berechnung der Steifigkeit quer zur Faserlängsrichtung  $E_{22}$  nach HASHIN benötigt wird. Außerdem ist die Ermittlung des Werts notwendig, wenn numerische Berechnungen mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) dessen Eingabe im Sinne der Konsistenz der Eingabeparameter erfordern. Zusätzlich ist der Wert von  $G_{23}$  eine wesentliche Größe für Festigkeitsanalysen im dreidimensionalen Spannungszustand. Diese treten beispielsweise bei Problemstellungen der Lasteinleitung auf. Gleichung (5.7) nach CHAMIS liefert tendenziell sehr hohe Werte. Zusätzlich liefert HASHIN 1983 [60] einen Ansatz für den unteren als auch für den oberen Grenzwert, der in beiden Fällen jedoch verhältnismäßig geringe Werte liefert. Die Werte der Gleichung nach TSAI liegen dabei zwischen den tendenziell zu hohen Werten der Gleichung nach CHAMIS und den tendenziell zu niedrigen Werten der Gleichungen nach HASHIN. Als wahrscheinlicher Grund für die in der Validierung ermittelten höheren Schubsteifigkeiten als die des Ansatzes nach HASHIN wird angenommen, dass die stark vereinfachenden Voraussetzungen in der Realität nicht zutreffen. Stattdessen liegen die Verstärkungsfasern nie exakt parallel zueinander, was eine geringfügige Versteifung bewirkt. Auch in diesem Fall unterscheiden sich die Werte nicht nach dem Vorzeichen der Beanspruchungsrichtung.

### 5.3 Querverformungszahlen

Querverformungszahlen  $\nu_{ij} \forall i, j = 1, 2, 3$  beschreiben das negative Verhältnis der Längsverzerrung aufgrund der wirkenden Beanspruchung zur dazu senkrechten Querverzerrung, wie in Gleichung (4.44) formuliert.

Zur eindeutigen Bezeichnung der Querverformungszahlen ist eine doppelte Indizierung zwingend. Während ein Index die Richtung der wirkenden Beanspruchung angibt, adressiert der andere die dazu senkrechte Richtung der Querverformung. Dabei ist zusätzlich die Reihenfolge relevant. Diese unterscheidet sich dabei in der europäischen und anglo-amerikanischen Literatur. Die europäische Schreibweise indiziert in der Reihenfolge von Wirkung und Ursache. Im Gegensatz dazu indiziert die anglo-amerikanische Schreibweise in der Reihenfolge von Ursache und Wirkung. D. h. die Querverformungszahl  $\nu_{12}$  ist diejenige, die das negative Verhältnis der Querverzerrung in 2-Richtung zur ursächlichen Längsverzerrung in 1-Richtung beschreibt,  $\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ . In der vorliegenden Arbeit ist die anglo-amerikanische Indizierung verwendet worden. Sie ist u. a. auch von den Autoren JONES 1999 [69], BARBERO 2011 [7], EHRLICH 2004 [30]. Im Gegensatz dazu verwenden u. a. die Autoren SCHÜRMAN 2005 [149], STELLBRINK 1996 [151] und MOSER 1992 [92] die europäische Indizierung. Eine eindeutige Möglichkeit der Bezeichnung der Querverformungszahlen bietet ihr Betrag. Damit ergibt sich die sog. große Querverformungszahl (hier:  $\nu_{12}$ ) und die sog. kleine Querverformungszahl (hier:  $\nu_{21}$ ), analog zur englischen Bezeichnung *major POISSON's ratio* und *minor POISSON's ratio* [149].

### 5.3.1 Senkrecht bei Längsverformung $\nu_{12}$

Die Querverformungszahl  $\nu_{12}$  für Querverformung senkrecht zur Faserlängsrichtung bei Belastung in Faserlängsrichtung kann vereinfacht analog über eine sog. Mischungsregel ermittelt werden. Sie ergibt sich aus dem, mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$ , gewichteten Mittel der Querverformungszahlen der Verstärkungsfasern und des Matrixsystems. Dabei wird als Kompatibilitätsbedingung formuliert, dass Verstärkungsfasern und Matrixsystem senkrecht zur Faserlängsrichtung die gleiche Beanspruchung erfahren. Die Querverformungszahl einer unidirektional verstärkten Einzelzelle senkrecht zur Faserlängsrichtung bei Belastung in Faserlängsrichtung ergibt sich zu

$$\nu_{12} = \varphi_f \nu_{f,12} + (1 - \varphi_f) \nu_m . \quad (5.9)$$

Obwohl auch diese Mischungsregel auf einem verhältnismäßig einfachen eindimensionalen Modell basiert, stimmen experimentell ermittelte Werte sehr gut mit Ergebnissen des Homogenisierungsansatzes überein.

### 5.3.2 Längs bei Querverformung $\nu_{21}$

Die beiden Querverformungszahlen  $\nu_{12}$  und  $\nu_{21}$  sind nicht voneinander unabhängig, wie bereits in Gleichung (4.44) formuliert. Unter der vereinfachenden Voraussetzung infinitesimaler Verformungen bei linear-elastischem Materialgesetz ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (5.10)$$

zwischen den beiden Größen aufgrund der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix. Dieser setzt die beiden Querverformungszahlen mit den zueinander senkrecht orientierten Elastizitätsmoduli ins Verhältnis. Damit ist die Querverformungszahl  $\nu_{21}$  für Querverformung in Faserlängsrichtung bei Belastung senkrecht zur Faserlängsrichtung kein unabhängiger Materialkennwert. Die Gleichung (5.10) ergibt sich aus dem Satz der Reziprozität der Arbeiten. Dieser Zusammenhang wird auch als der Satz nach MAXWELL<sup>3</sup> und BETTI<sup>4</sup> auch als MAXWELL-BETTI-Beziehung bezeichnet. Der analytisch geschlossene Zusammenhang wird insbesondere von BERT 1975 [10] aufgegriffen, wie in GEBBEKEN 1996 [47] referenziert. Während der Zusammenhang nach Gleichung (5.10) in BERT 1975 [10] für gewickelte kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe nicht validiert werden konnte, werden in [10] über 200 Literaturstellen angegeben, in denen die Gültigkeit hauptsächlich für glasfaserverstärkte Kunststoffe mit Epoxidharzmatrix validiert werden kann.

Für die Formulierung der Gleichung (5.10) werden im Anhang kurz der sog. Vertauschungssatz nach MAXWELL und der Reziprozitätssatz von BETTI vorgestellt. Diese sind in POPOV 2012 [133] in Kürze angeführt, der die Lehrbücher von GROSS et al. 2011 [51] und MÜLLER 2012 [94] zitiert.

### 5.3.3 Quer bei Querverformung $\nu_{23}$

Für eine vollständige Beschreibung der Elastizitätsgrößen der unidirektional verstärkten Einzelschicht mit transversalisotropem Materialverhalten, wenn eine Koordinatenachse mit der Faserlängsrichtung zusammenfällt, wird die Querverformungszahl  $\nu_{23}$  für Querverformung quer zur Faserlängsrichtung bei Belastung quer zur Faserlängsrichtung benötigt. Die Querverformungs-

<sup>3</sup> JAMES CLERK MAXWELL, \* 13. Juni 1831 in Edinburgh, † 5. November 1879 in Cambridge. Schottischer Physiker.

<sup>4</sup> ENRICO BETTI, \* 21. Oktober 1823 in Pistoia (Toskana, Italien), † 11. August 1892 in Soiana. Italienischer Mathematiker und Ingenieur.

zahl  $\nu_{23}$  ist ein Verformungsverhältnis in der transversal isotropen 2-3-Ebene. Die analytische Berechnung über das mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$  gewichtete Mittel der entsprechenden Querverformungszahlen der Verstärkungsfasern und des Matrixsystems

$$\nu_{23} = \varphi_f \nu_{f,23} + (1 - \varphi_f) \nu_m \quad (5.11)$$

vernachlässigt jedoch die Dehnungsbehinderung. Die unter Dehnungsbehinderung effektiv wirkende Querverformungszahl des Matrixsystems wird in SCHÜRMAN 2005 [149] hergeleitet und angegeben mit

$$\nu_{m,\text{eff}} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \nu_m \frac{\left(1 + \nu_m - \nu_{12} \frac{E_m}{E_1}\right)}{\left(1 - \nu_m^2 + \nu_m \nu_{12} \frac{E_m}{E_1}\right)}. \quad (5.12)$$

Wie in [149] angegeben, verwendet FOYE 1972 [43] den Ansatz nach Gleichung (5.11) und setzt  $\nu_m = \nu_{m,\text{eff}}$  nach Gleichung (5.12) ein, sodass folgt

$$\nu_{23} = \varphi_f \nu_{f,23} + (1 - \varphi_f) \nu_{m,\text{eff}} = \varphi_f \nu_{f,23} + (1 - \varphi_f) \nu_m \left[ \frac{\left(1 + \nu_m - \nu_{12} \frac{E_m}{E_1}\right)}{\left(1 - \nu_m^2 + \nu_m \nu_{12} \frac{E_m}{E_1}\right)} \right]. \quad (5.13)$$

Die Querverformungszahl  $\nu_{23}$  für Querverformung quer zur Faserlängsrichtung bei Belastung quer zur Faserlängsrichtung wird nicht zur Beschreibung des Elastizitätsgesetzes für den ebenen Spannungszustand benötigt, und ist damit keine Grund-Elastizitätsgröße im eigentlichen Sinn. Sie ist jedoch relevant, um die Spannungs- und Verformungsanalyse auf räumliche Spannungszustände auszudehnen.

Der Ansatz in Gleichung (5.13) nach FOYE 1972 [43] ist in KNAUST 1989 [78] mit mikromechanischen FE-Berechnungen für glasfaserverstärktes Epoxidharz unterschiedlicher Packungsarten numerisch verifiziert worden [149].

## 5.4 Abschließende Bemerkungen

Die zuvor dargestellten mikromechanischen Ansätze zur Homogenisierung der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der Einzelkomponenten Verstärkungsfasern und Matrixsystem basieren auf einer Einheitszelle oder einer entsprechenden Modellvorstellung im mikromechanischen Maßstab. Da die vereinfachenden Voraussetzungen in der Realität in unterschiedlichem Maße nicht zutreffen, bedarf die vorausgesetzte direkte Übertragbarkeit der mikromechanischen Werkstoffkennwerte auf die entsprechenden makromechanischen Größen der unidirektional verstärkten Einzelschicht einigen Anmerkungen.

### Anmerkungen zum Faservolumengehalt als Gewichtungsfaktor

Der charakteristische Materialkennwert, der unterschiedlichen Homogenisierungsansätzen zu Grunde liegt, ist der Faservolumengehalt  $\varphi_f$ . Er stellt das Verhältnis des Volumens der Verstärkungsfasern zum Volumen des Verbundmaterials, bestehend aus Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff, dar. Unter der Voraussetzung von ideal parallelen Verstärkungsfasern mit kreisrundem Querschnitt gibt es unterschiedliche theoretisch ideale Muster der Anordnung. Von diesen sog. Packungsarten sind zwei für die theoretischen Grenzwerte des Faservolumengehalts  $\varphi_f$  relevant. Dies sind die quadratisch dichteste Packung (qdP) und die hexagonal dichteste Packung (hdP). Unter der Voraussetzung gleicher Durchmesser der Verstärkungsfasern ergeben sich durchmesserunabhängige maximal erreichbare Faservolumengehalte  $\varphi_{f,\text{max}}$ . Diese sind für die quadratisch

dichteste Packung (qdP) bzw. für die hexagonal dichteste Packung (hdP)

$$\varphi_{f,\max,\text{qdP}} = \frac{\pi}{4} = 0,79 \quad \text{bzw.} \quad (5.14)$$

$$\varphi_{f,\max,\text{hdP}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,91 . \quad (5.15)$$

In beiden Extremfällen der Anordnung als quadratisch bzw. hexagonal dichteste Packung liegen die Verstärkungsfasern jedoch bereits so nahe beieinander, dass Linienkontakt zwischen den einzelnen Verstärkungsfasern herrscht. In diesen Bereichen liegt keine Matrix vor, sodass sich auch keine haftungsvermittelnde Faser-Matrix-Grenzfläche als Interphase ausbildet. Die Matrix kann ihre mechanischen Aufgaben im Verbund, wie in Abschnitt 3.3 dargestellt, nicht erfüllen. Damit reagiert das Material als solches nicht mehr als Verbundmaterial im eigentlichen Sinne, und weist auch nicht mehr die entsprechenden Vorzüge auf. Dabei entspricht das viel zu steife Materialverhalten in Verbindung mit der Neigung zu zunehmend splitterartigem Sprödbbruchversagen einer geringeren strukturmechanischen Qualität. Dies ist u. a. an Stellen der Krafteinleitung problematisch. Aus diesem Grund werden in der Anwendung maximale Faservolumenanteile  $\varphi_f \approx 60\%$  angestrebt [7], [40], [49], [69], [92], [149], [151], da in unidirektional verstärkten Bereichen die mikromechanische Übertragung der Beanspruchungen zwischen Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff in der Faser-Matrix-Grenzfläche (sog. Interphase) auf Schubspannungen basiert (vgl. Abschnitt zu den Aufgaben des Matrixwerkstoffes in Abschnitt 3.3). Damit wird die stochastische Verteilung der Verstärkungsfasern über den Querschnitt mit ausreichend Matrixanteil im Laminat sichergestellt. Dabei findet sich in der Realität mikromechanisch meist nie lediglich eine repräsentative Packungsart, sodass ebenfalls meist nie eine ideale maximale Packungsart erreicht wird. Diese beiden Aussagen lassen sich mit der dem Material charakteristischen stochastischen Eigenheiten, basierend auf der mikromechanischen Heterogenität, begründen. Es liegt stets eine Kombination verschiedener Packungsarten vor, selten bzw. nie die dichteste.

### Bestimmung des Faservolumenanteils

Der Faservolumenanteil  $\varphi_f$  ist ein charakteristischer Materialkennwert. Er gibt Aufschluss über die mechanische Materialqualität und die Reproduzierbarkeit von Herstellungsprozessen. Die experimentelle Bestimmung des Faservolumenanteils eines Laminats ist dabei lediglich im ausgehärteten Zustand nach dem eigentlichen Herstellungsprozess möglich. Dabei sind die Methoden der (nass-)chemischen Extraktion für organische Verstärkungsfasern (z. B. Kohlenstofffasern) nach DIN EN 2564 [103] sowie der thermischen Zersetzung des polymeren Matrixsystems für anorganische Verstärkungsfasern (z. B. Glasfasern) nach DIN EN ISO 1172 [107] genormt. In SCHMID et al. 2012 [142] ist die Massenkonstanz von Glas- und Basaltfasern bei Temperaturen von bis zu 820°C für bis zu 240 min nachgewiesen worden. Damit ist die das Verfahren der thermischen Zersetzung des polymeren Matrixwerkstoffes nach DIN EN ISO 1172 [107] analog für basaltfaserverstärkte Kunststoffe anwendbar. Zur experimentellen Bestimmung des Faservolumenanteils mit der Methode der (nass-)chemischen Extraktion für organische Verstärkungsfasern nach DIN EN 2564 [103] ist zusätzlich vorher die experimentelle Bestimmung der Dichte des Verbundmaterials  $\rho_c$  nach DIN EN ISO 1183-1 [108] durchzuführen. Das Vorgehen ist im Rahmen der Materialcharakterisierung der Probekörper für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen durchgeführt worden, und in Abschnitt 10.3.1 detailliert beschrieben.

### Methoden zur Formulierung von Homogenisierungsansätzen

Ansätze zur Homogenisierung können analytisch, numerisch oder experimentell (auch semiempirisch) methodisch hergeleitet und formuliert werden. Bei der Validierung bzw. experimentellen empirischen Definition von Mischungsregeln gilt es jedoch zu beachten, dass im eigentlichen Sinne lediglich die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte des Reinharzes und des Laminats experimentell bestimmt werden können. Erst unter der zusätzlichen Berücksichtigung des Faservolumenanteils  $\varphi_f$  als charakteristischen Materialkennwert kann lediglich analytisch durch Auflösen des jeweiligen Homogenisierungsansatzes der entsprechende mechanische Werkstoffkennwert

der Verstärkungsfasern berechnet werden. Obwohl im textilen Bereich die Werkstoffkennwertermittlung für einzelne trockene Rovingstränge in Faserlängsrichtung durchgeführt wird, entsprechen weder das Werkstoffverhalten noch die Ergebnisse dem strukturmechanischen Verhalten der Verstärkungsfasern im Verbund mit dem polymeren Matrixsystem. Ansätze zur Homogenisierung basieren damit stets auf den bekannten experimentell ermittelten Größen von Reinharz und faserverstärktem Probekörper mit bekanntem Faservolumengehalt  $\varphi_f$ . Diese drei Größen ermöglichen schließlich invers die Berechnung des jeweiligen strukturmechanischen Werkstoffkennwerts der Verstärkungsfasern.

### Validierung von Homogenisierungsansätzen

Bei der Validierung von analytischen oder numerisch abgeleiteten Homogenisierungsansätzen treten in der Realität teilweise relevante Aspekte auf, die in der Modellvorstellung nicht berücksichtigt werden können, bzw. die Modellgrenzen nicht einschließen. Dies sind beispielsweise

- Querverformungseffekte bzw. dreidimensionale Spannungszustände, die durch unterschiedliche Querschnittsformen hervorgerufen werden,
- mikromechanische Anordnungen der Verstärkungsfasern, die in der Realität eher einer stochastischen Verteilung unterliegen,
- die Interphase in der Faser-Matrix-Grenzschicht, die nicht berücksichtigt wird,
- das (lokale) Auftreten von Querverformungsbehinderungen, Fehlstellen oder Porositäten und mangelnde Faser-Matrix-Haftung in der Grenzschicht,
- die dem Material eigene Streuung, die teilweise gleichzeitig in die Ergebnisbereiche mehrerer Ansätze fällt,
- die große Sensitivität bezüglich Porositäten im Laminat (global betrachtet),
- die Sensitivität auf die Beanspruchungsart und damit auf das Vorzeichen der Beanspruchung (bei Zug oder Druck und den zugehörigen Querverformungszahlen, nicht bei Schub),
- eventuelle Verdrillungen der Monofilamente in den Rovings oder der Rovings selbst, also sog. Richtungsimperfektionen, die eine geringfügige Versteifung bewirken.

### Einschränkung auf bestimmte untersuchte Faser-Matrix-Kombinationen

Experimentell validierte bzw. semi-empirisch formulierte Homogenisierungsansätze gelten streng genommen lediglich für die jeweils untersuchte Faser-Matrix-Kombination [47]. Eine Umrechnung bzw. Gewichtung der strukturmechanischen Werkstoffeigenschaften ist zusätzlich lediglich in kleinen Bereichen um den jeweils zu Grunde liegenden Faservolumengehalt zulässig. Gleiche Faser-Matrix-Kombination mit stark abweichendem Faservolumengehalt können sich strukturmechanisch signifikant anders verhalten.

### Vernachlässigung der Interphase als dritte Einzelkomponente

Die Einzelkomponenten sind, wie zuvor beschrieben, die Verstärkungsfasern, der polymere Matrixwerkstoff und die Interphase. Die Interphase bildet sich, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben in der Grenzschicht zwischen Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff aus. Obwohl der volumenmäßige Anteil der Interphase im Laminat nicht unwesentlich ist, wird diese in Ansätzen zur Homogenisierung fast immer vernachlässigt. Dabei ist der Hauptgrund die mangelnde Kenntnis von strukturmechanischen Werkstoffkennwerten aufgrund fehlender strukturmechanischer Analyse- und Prüfmethoden in diesem Maßstab [69].

### Dichte des Verbundmaterials

Neben der zuvor genannten experimentellen Methode zur Bestimmung der Dichte des Verbundmaterials  $\rho_c$  nach DIN EN ISO 1183-1 [108] besteht die Möglichkeit der analytischen Berechnung der Größe. Dabei ist die Dichte  $\rho$  kein strukturmechanischer Materialkennwert im engeren Sinne, sondern ein physikalischer Werkstoffkennwert. In ALTENBACH, ALTENBACH und RIKARDS 1996 [2] wird sie auch als *effektive Dichte*  $\rho_c$  bezeichnet. Im Falle eines faserverstärkten Kunststoffes ergibt sich die Dichte über das mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$  gewichtete Mittel der Dichten

der Einzelkomponenten Verstärkungsfaser  $\varrho_f$  und polymerem Matrixsystem  $\varrho_m$  zu [2]

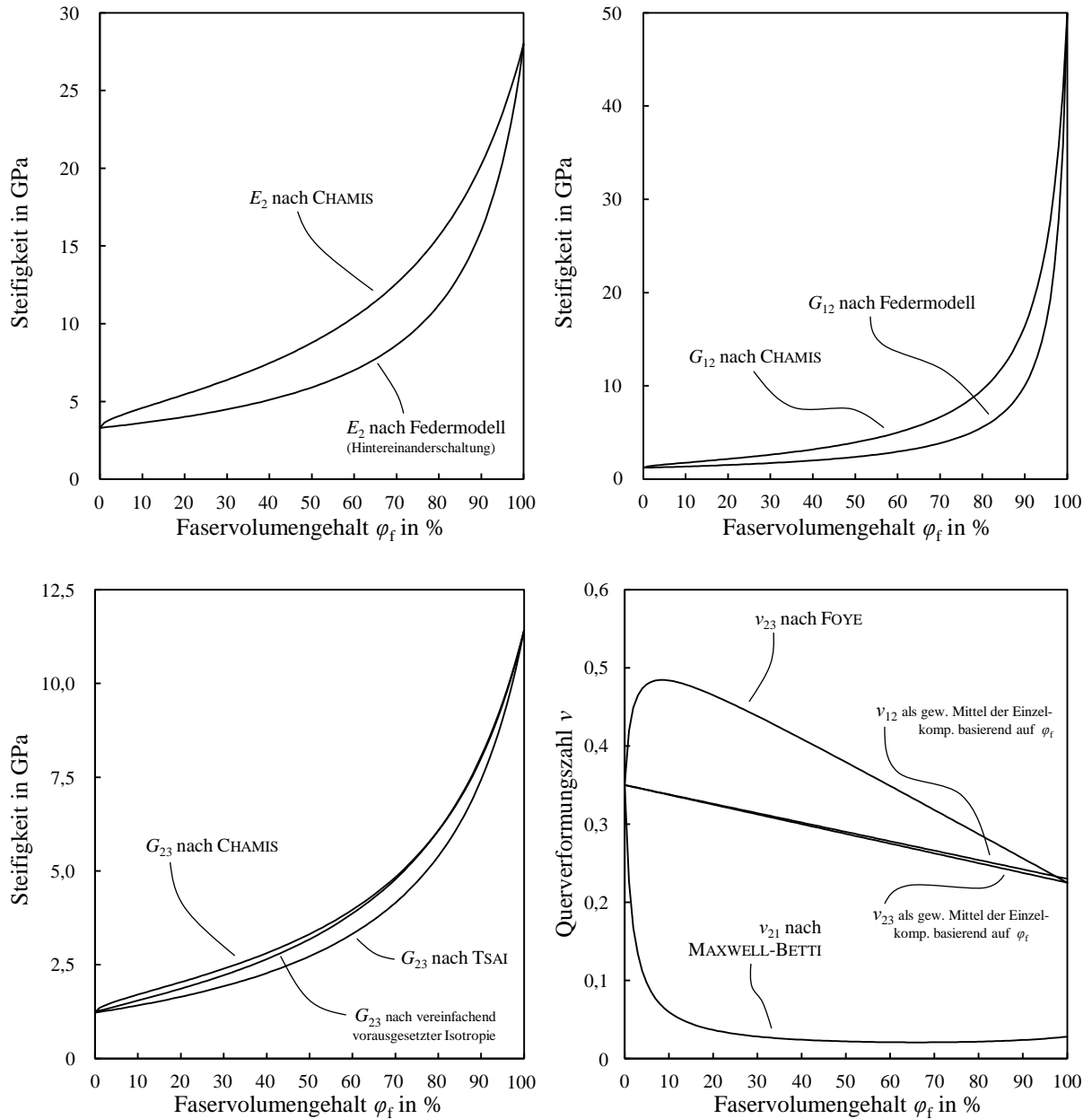
$$\varrho_c = \varphi_f \varrho_f + (1 - \varphi_f) \varrho_m . \quad (5.16)$$

Wie zuvor beschrieben bzw. vereinfachend vorausgesetzt, werden dabei die Interphase als dritte Einzelkomponente sowie Poren und Lunker, sog. Porositäten bzw. Ungängen, vernachlässigt.

### Graphische Darstellung der Ergebnisse

Die Ergebnisse der unterschiedlichen Homogenisierungsansätze für die jeweiligen unabhängigen Werkstoffkennwerte lassen sich graphisch über den Faservolumengehalt  $\varphi_f$  darstellen. Der gesamte Definitionsbereich erstreckt sich dabei theoretisch von  $\varphi_f = 0\%$  bis  $\varphi_f = 100\%$ . Der anzustrebende Faservolumengehalt  $\varphi_f$  als charakteristischer Materialkennwert für mechanisch hochwertige faserverstärkte Kunststoffe beträgt jedoch  $\varphi_f \approx 60\%$ . Ergebnisse der Homogenisierungsansätze für relativ geringe und für relativ hohe Faservolumenanteile  $\varphi_f$  dienen dabei lediglich der Veranschaulichung der unterschiedlichen Tendenzen bzw. Gewichtung der strukturellen Werkstoffkennwerte der Einzelkomponenten durch die jeweiligen Homogenisierungsansätze, haben jedoch keine praktische Relevanz im eigentlichen Sinne. Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, weichen die einzelnen Ergebnisse der unterschiedlichen Homogenisierungsansätze um den relevanten Bereich des Faservolumenanteils  $\varphi_f \approx 60\%$  teilweise nicht wesentlich voneinander ab.

Abbildung 5.1 veranschaulicht exemplarisch die Ergebnisse der dargestellten Homogenisierungsansätze für eine unidirektional HT-kohlenstofffaserverstärkte Einzelschicht mit Epoxidharz als polymeres Matrixsystem. Dabei sind als strukturelle Werkstoffkennwerte der Einzelkomponenten die in Tabelle 9.1 angegebenen Werte verwendet worden (vgl. Abschnitt 9.5.5 in Kapitel 9). Im Detail sind die Ergebnisse für die Quersteifigkeit  $E_{22}$  nach den Gleichungen (5.2) und (5.3) oben links, für die Längs-Quer-Schubsteifigkeit  $G_{12}$  nach den Gleichungen (5.4) und (5.5) oben rechts, für die Quer-Quer-Schubsteifigkeit  $G_{23}$  nach den Gleichungen (5.6), (5.7) und (5.8) unten links sowie für die Querverformungszahlen senkrecht bei Längsverformung  $\nu_{12}$ , längs bei Querverformung  $\nu_{21}$  und quer bei Querverformung  $\nu_{23}$  nach den Gleichungen (5.9), (5.10), (5.11) und (5.13) unten rechts dargestellt.



**Abbildung 5.1:** Quersteifigkeit  $E_{22}$  (oben links), Längs-Quer-Schubsteifigkeit  $G_{12}$  (oben rechts), Quer-Quer-Schubsteifigkeit  $G_{23}$  (unten links) sowie Querverformungszahlen senkrecht bei Längsverformung  $\nu_{12}$ , längs bei Querverformung  $\nu_{21}$  und quer bei Querverformung  $\nu_{23}$  (unten rechts).





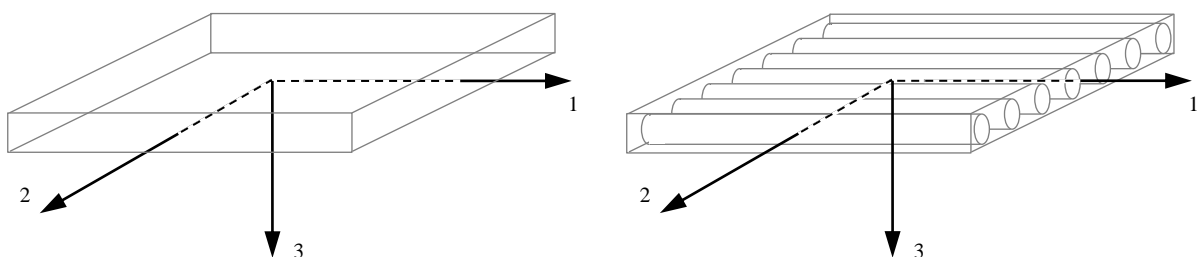
# 6 Makromechanik der Einzelschicht und Erfassung von Schichtungen

Das zweidimensionale Werkstoffgesetz der unidirektional verstärkten Einzelschicht resultiert aus der Vernachlässigung von Spannungs- bzw. Verzerrungskomponenten, üblicherweise in 3-Richtung eines mechanischen Tragwerks. Für die weiteren Ausführungen sind dabei besonders die Zusammenhänge für orthotropes bzw. transversalisotropes und isotropes Materialverhalten relevant. Im Falle von unidirektional verstärkten Einzelschichten handelt es sich nicht lediglich um eine Idealisierung. Vielmehr ist eine ebene Beanspruchung mit ihrem größten Betrag in Richtung der Verstärkungsfasern der Einzelschicht ein Ziel der Anwendung [69].

Die dargestellten Aspekte sind im Wesentlichen aus den Werken von ALTENBACH, ALTENBACH und RIKARDS 1996 [2], JONES 1999 [69], KLEIN 2005 [76], MOSER 1992 [92] und SCHÜRMAN 2005 [149] exzerpiert.

## 6.1 Vereinfachungen der ebenen Elastizität

Die Grundgleichungen der ebenen Elastizität sind eine Vereinfachung der dreidimensionalen Elastizität. Der ebene Spannungszustand wird am häufigsten in Flächentragwerken vorausgesetzt [76]. Er erfüllt die getroffenen vereinfachenden Voraussetzungen annähernd, weil die Ausdehnung der Tragwerke in 3-Richtung als Dicke  $h$  gegenüber den beiden anderen Dimensionen Länge und Breite in 1-2-Richtung (oder Radius und Winkel) klein ist, wie in Abbildung 6.1 dargestellt. Im Stahlbau kann das Verhältnis der Dicke zur kleinsten, zweiten Abmessung  $\frac{1}{20}$ , im Leichtbau sogar  $\frac{1}{50}$  erreichen [30]. Damit ist in diesen Fällen die Voraussetzung des ebenen Spannungszustandes gerechtfertigt. Der ebene Verzerrungszustand kann in guter Näherung in langen dickwandigen Bauteilen oder in bestimmten Lagen von Composite-Bauteilen aus faserverstärkten Werkstoffen vorausgesetzt werden, wenn eine Verformungsbehinderung in Dickenrichtung vorliegt [76].



**Abbildung 6.1:** Lokales 1-2-3-Koordinatensystems für die Vereinfachungen der ebenen Elastizität in der 1-2-Ebene: Isotropes Material (links) und transversalisotropes Material (rechts).

Die konstitutiven Gleichungen ergeben sich entweder durch Vernachlässigen der Spannungskomponente oder der Verzerrungskomponente in 3-Richtung. Es werden lediglich die Verschiebungen  $u$  und  $v$  bzw. die Verformungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  und  $\gamma_{12}$  in der 1-2-Ebene berücksichtigt. Dabei setzt die Vernachlässigung der Spannungskomponente einen ebenen Spannungszustand voraus, während die Vernachlässigung der Verzerrungskomponente einen ebenen Verzerrungszustand voraussetzt.

Es werden die Gleichungen für orthotropes bzw. transversalisotropes und isotropes Materialverhalten angegeben. Entsprechend der zuvor beschriebenen Voraussetzungen zeigt Abbildung 6.1 die Lage des lokalen 1-2-3-Koordinatensystems für die ausgeführten Vereinfachungen der ebenen Elastizität in der 1-2-Ebene, links für isotropes Materialverhalten und rechts für transversalisotropes Materialverhalten, wenn die Vorzugsrichtung mit der 1-Achse des lokalen Koordinatensystems zusammenfällt.

### 6.1.1 Ebener Spannungszustand

Unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes in der 1-2-Ebene werden die Spannungen  $\sigma_3$  vernachlässigt. Aus der Voraussetzung  $\sigma_3 = 0$  folgt  $\tau_{13} = \tau_{31} = \tau_{23} = \tau_{32} = 0$  und damit  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$  und  $\tau_{12} \neq 0$ . Für den Fall linearer orthotroper bzw. transversalisotroper Elastizität reduziert sich die Gleichung der Nachgiebigkeiten (4.37) zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 \\ q_{12} & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

wobei sich die die Komponenten, wie in Gleichung (4.43) für den dreidimensionalen Fall dargestellt, ergeben zu

$$q_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad q_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad q_{22} = \frac{1}{E_2} \quad \text{und} \quad q_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \quad (6.2)$$

Die Reduktion der Dimensionen in der Formulierung der Steifigkeiten (4.36) führt auf

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Dabei sind die Komponenten  $Q_{ij}$  die sog. reduzierten Steifigkeiten unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes in der 1-2-Ebene. Ihre Ermittlung erfolgt entweder über die Inversion der Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$  in Gleichung (6.1), direkt aus der Reduktion der der Steifigkeitsmatrix  $[C]$  oder in Termen der vier voneinander unabhängigen Ingenieurskonstanten einer transversalisotropen Einzelschicht in der Ebene zu [69]

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & \text{und} & \quad Q_{66} = G_{12}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Zur Ermittlung der Komponenten  $Q_{ij}$  der sog. reduzierten Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (6.4) werden die vier unabhängigen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte, im Einzelnen  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  und  $G_{12}$  (vgl. Kapitel 5, Gleichungen (5.1), (5.3), (5.9) und (5.5)), zusätzlich zum reziproken Verhältnis  $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$  nach Gleichung (4.45) bzw. (5.10) benötigt. Die zuvor dargestellten Spannungs-Verzerrungs- und Verzerrungs-Spannungs-Beziehungen bilden die Grundlage zur Steifigkeits- und Spannungsanalyse einer faserverstärkten Einzellage, die planar mit Kraftschnittgrößen belastet ist.

Im Falle linearer isotroper Elastizität reduziert sich die Dimensionen der Gleichungen der Nachgiebigkeiten (4.41) analog zu Gleichung (6.1). Die Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$

werden mit den verbleibenden beiden unabhängigen Ingenieurkonstanten  $E$  und  $\nu$  zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Die Reduktion der Dimensionen in der Formulierung der Steifigkeiten (4.40) führt analog zu Gleichung (6.3) auf

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Die Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes führt auf Verzerrungen in Dickenrichtung  $\varepsilon_3 \neq 0$ . Die Verzerrungen  $\varepsilon_3$  ergeben sich dabei über die Kopplung der Normalspannungen. Ein ebener Spannungszustand bedingt damit einen räumlichen Verzerrungszustand. Zur Ermittlung der Verzerrungen in Dickenrichtung  $\varepsilon_3$  genügen als bekannte Größen des ebenen Spannungszustandes entweder die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  oder die Verzerrungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Entsprechend ergibt sich für orthotropes Materialverhalten [69]

$$\varepsilon_3 = S_{13} \sigma_1 + S_{23} \sigma_2 = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_2 \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_3 = C_{13} \varepsilon_1 + C_{23} \varepsilon_2, \quad (6.7)$$

wobei der zweite Ausdruck in den Verzerrungen auf verhältnismäßig lange Terme für  $C_{13}$  und  $C_{23}$  führt (dargestellt in JONES 1999 [69]), und für isotropes Materialverhalten [76]

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2), \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (6.8)$$

Zur Ermittlung der Verzerrungen in Dickenrichtung  $\varepsilon_3$  im Falle orthotropen Materialverhaltens, wie in Gleichung (6.7) dargestellt, müssen neben den Ingenieurkonstanten  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  und  $G_{12}$  die Querverformungszahlen  $\nu_{13}$  und  $\nu_{23}$  bekannt sein. Diese ergeben sich durch Auflösen der Gleichung (6.7) und entsprechende Symmetriebedingungen (4.47).

### 6.1.2 Ebener Verzerrungszustand

Unter der Voraussetzung eines ebenen Verzerrungszustandes werden die Verzerrungen  $\varepsilon_3$  vernachlässigt. Aus der Voraussetzung  $\varepsilon_3 = 0$  folgt für die Gleitungen  $\gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = 0$ . Für den Fall linearer isotroper Elastizität reduzieren sich die Dimensionen der Gleichungen der Nachgiebigkeiten (4.41) analog zu Gleichung (6.1). Dabei werden die Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$  mit den verbleibenden beiden unabhängigen Ingenieurkonstanten  $E$  und  $\nu$  zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Für den Fall linearer isotroper Elastizität führt die Reduktion der Dimensionen in der Formulierung der Steifigkeiten (4.40) unter der Voraussetzung eines ebenen Verzerrungszustandes analog

zu Gleichung (6.3) auf

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Die Voraussetzung eines ebenen Verzerrungszustandes führt auf Spannungen in Dickenrichtung  $\sigma_3 \neq 0$ . Die Spannungen in Dickenrichtung  $\sigma_3$  ergeben sich dabei über die Kopplung der Normalspannungen. Ein ebener Verzerrungszustand bedingt damit einen räumlichen Spannungszustand. Zur Ermittlung der Spannungen in Dickenrichtung  $\sigma_3$  genügen als bekannte Größen des ebenen Verzerrungszustandes entweder die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  oder die Verzerrungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Entsprechend ergibt sich für isotropes Materialverhalten [76]

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \text{bzw.} \quad \sigma_3 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (6.11)$$

### 6.1.3 Grenzen der Idealisierung

Die Vereinfachungen der ebenen Elastizität sind jedoch nicht ohne Widerspruch. In der Strukturmechanik wird für Theorien erster Ordnung die Normalenhypothese (auch BERNOULLI-Hypothese bei Balken bzw. KIRCHHOFF-Hypothese bei Flächentragwerken) verwendet. Sie setzt voraus, dass ein auf der unverformten Mittelebene senkrecht stehendes Linienelement auch auf der verformten Mittelebene senkrecht steht [30], [69]. Das Verhalten wird als schubstarr bezeichnet. Der zur Mittelebene lotrecht bleibende Winkel bedeutet für die Gleitungen

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = 0, \quad (6.12)$$

und für die zugehörigen Schubspannungen

$$\tau_{13} = \tau_{31} = \tau_{23} = \tau_{32} = 0. \quad (6.13)$$

Eine weitere vereinfachende Annahme ist, dass äquidistante Punkte einer Normalen zur unverformten Mittelebene sich auch auf einer Normalen zur verformten Mittelebene in gleichem Abstand befinden [30], [69]. Diese Annahme bedeutet für die Verzerrung in Dickenrichtung

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6.14)$$

Gleichung (6.14) setzt damit voraus, dass die Verschiebung  $w$  in 3-Richtung über die Dicke  $h$  konstant ist [76]. Der zur Mittelebene lotrecht bleibende Winkel liefert die Gleitungen in Dickenrichtung, wie in Gleichung (6.12) formuliert, zu Null. Die unveränderliche Länge des Linienelementes bzw. die konstante Verschiebung  $w$  bedingt  $\varepsilon_3 = 0$ . Gleichzeitig wird die Spannungskomponente in Dickenrichtung oft als klein gegenüber den Spannungskomponenten in 1- bzw. 2-Richtung angenommen. Das bedeutet

$$\sigma_3 \ll \sigma_1, \quad \text{bzw.} \quad \sigma_3 \ll \sigma_2, \quad (6.15)$$

und führt auf eine weitere häufig getroffene Annahme [30], [69]

$$\sigma_3 = 0. \quad (6.16)$$

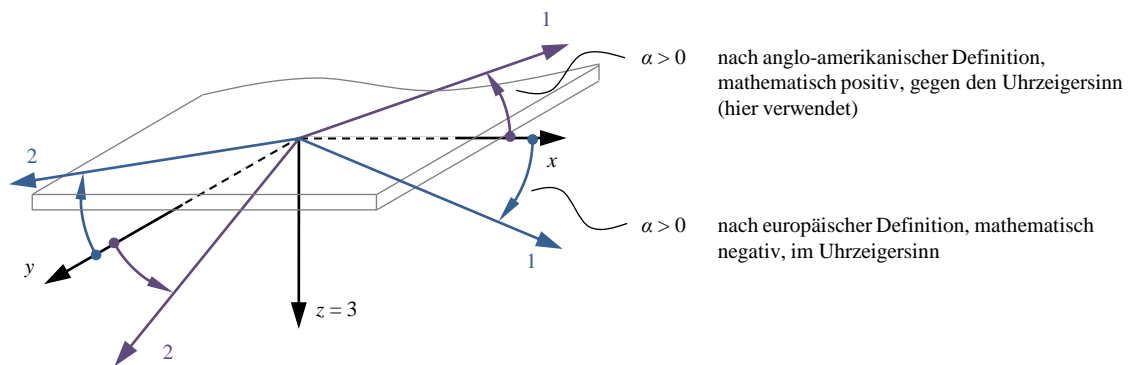
Die in den Gleichungen (6.12) und (6.13) getroffenen Annahmen, und damit die daraus resultierende Schlussfolgerung (6.16) widersprechen sich jedoch mit der in Gleichung (6.14) formulierten Annahme. Die getroffenen Vereinfachungen bedeuten auch nicht, dass die vernachlässigten Span-

nungen oder Verzerrungen im belasteten Tragwerk nicht auftreten. Die Vernachlässigung von  $\sigma_3$  oder  $\varepsilon_3$  verhindert lediglich die Berechnung der jeweiligen Größe [30].

Die beschriebenen Vereinfachungen erlauben in der Strukturmechanik jedoch häufig die Beschreibung eines Modells in erster Näherung. Theorien die auf diesen Vereinfachungen basieren, werden deshalb als Theorien erster Ordnung bezeichnet. Der durch die Vereinfachungen geschaffene Widerspruch erlaubt jedoch wichtige und sehr effektive Annäherungen an die realen Beanspruchungen im Material bei einer Vielzahl strukturmechanischer Problemstellungen [69].

## 6.2 Koordinatentransformation beim ebenen Spannungszustand

Unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes, wie im vorherigen Abschnitt 6.1.1 beschrieben, werden die Transformationsbeziehungen für Spannungen und Verzerrungen dargestellt. Die Transformationsbeziehungen werden benötigt, wenn das lokale Koordinatensystem nicht mit dem globalen Koordinatensystem zusammenfällt. Dies ist insbesondere für unidirektional verstärkte Einzelschichten relevant, wenn die Faserorientierung als Vorzugsrichtung nicht mit dem (globalen) Bauteilkoordinatensystem übereinstimmt. Zur Unterscheidung wird das lokale Koordinatensystem als 1-2-3 Koordinatensystem und das globale Koordinatensystem als  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem bezeichnet, wie bereits in Abbildung 6.1 dargestellt. Dabei ist üblich, dass die 1-2-Ebene des lokalen Koordinatensystems mit der  $x$ - $y$ -Ebene des globalen Koordinatensystems zusammenfällt, und die zur jeweiligen Ebene orthogonale Dickenrichtung in 3-Richtung bzw. in  $z$ -Richtung gleichgerichtet, nach unten positiv definiert, wird. Zusätzlich ist es günstig, das lokale Koordinatensystem so zu orientieren, dass die 1-Richtung mit der Richtung der Vorzugsrichtung (in Faserlängsrichtung bei unidirektional verstärkten Einzellschichten) übereinstimmt.



**Abbildung 6.2:** Definition des positiven Drehsinns vom globalen  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem ins lokale 1-2-3-Koordinatensystem um den Winkel  $\alpha > 0$ : Mathematisch positiv, gegen den Uhrzeigersinn, nach anglo-amerikanischer Definition (lila dargestellt und hier verwendet), und mathematisch negativ, im Uhrzeigersinn, nach europäischer Definition (blau dargestellt).

### Vorzeichenkonvention bzgl. des Drehsinns

Im Falle der idealisierten ebenen Elastizität, wie im vorherigen Abschnitt 6.1 beschrieben, genügt eine zweidimensionale Koordinatentransformation in der Ebene, wenn die 3-Richtung des lokalen mit der  $z$ -Richtung des globalen Koordinatensystems, und damit mit der Dickenrichtung, zusammenfällt. Aus diesem Grund werden das lokale 1-2-Koordinatensystem und das globale  $x$ - $y$ -Koordinatensystem als reduzierte, zweidimensionale Koordinatensysteme eingeführt, sowie die entsprechenden Koordinatentransformation in der Ebene dargestellt. Das lokale Koordinatensystem ist um den Winkel  $\alpha$  gegenüber dem globalen Koordinatensystem gedreht. Bezüglich des Vorzeichens des Drehsinns existieren zwei Richtungskonventionen, die jeweils der europäischen

bzw. anglo-amerikanischen Literatur folgen. Die beiden Definitionen eines positiven Drehsinns vom globalen  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem ins lokale 1-2-3-Koordinatensystem um den Winkel  $\alpha > 0$  sind in Abbildung 6.2 veranschaulicht. Die anglo-amerikanische Definition des positiven Drehsinns ist mathematisch positiv, d. h. entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert. In SCHÜRMAN 2005 [149] wird darauf hingewiesen, dass in der deutschsprachigen Literatur oft eine entgegengesetzte Richtungskonvention verwendet wird. Es wird jedoch erwähnt, dass sich international und mittlerweile auch national (vgl. VDI-Richtlinie 2014 von 2006 [124]) die anglo-amerikanische Definition durchsetzt. Aus den zuvor genannten Gründen wird hier die anglo-amerikanische Definition des positiven Drehsinns in mathematisch positive Richtung verwendet.

### 6.2.1 Transformation der Spannungen und Verzerrungen

Unter der vereinfachenden Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes ( $\sigma_3 = 0$ , vgl. Abschnitt 6.1.1) werden die Transformationsbeziehungen der Spannungen sowie der Verzerrungen beschrieben. Dabei wird jeweils die zweidimensionale Transformation der Größen vom lokalen ins globale Koordinatensystem und invers vom globalen ins lokale Koordinatensystem angegeben, wie beispielsweise in EHRlich 2012 [31] ausführlich dargestellt.

#### Transformation der Spannungen

Zur Herleitung der Transformationsmatrix der Spannungen wird ein infinitesimales Element betrachtet. An der zur 1-Achse des lokalen Koordinatensystems senkrechten Schnittfläche  $dA$  wirken die Normalspannung  $\sigma_1$  und die Schubspannung  $\tau_{12}$ . Die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen im lokalen 1-2-Koordinatensystem erfolgt mit den trigonometrischen Anteilen der Schnittflächen und der Normal- und Schubspannungen des globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystems im lokalen 1-2-Koordinatensystem. Analog werden die Gleichgewichtsbedingungen an der zur 2-Achse des lokalen Koordinatensystems senkrechten Schnittfläche  $dA$  mit der Normalspannung  $\sigma_2$  und der Schubspannung  $\tau_{21}$  aufgestellt. Auflösen nach den Spannungskomponenten im lokalen 1-2-Koordinatensystem und Kürzen mit der zur 1-Achse des lokalen Koordinatensystems senkrechten Schnittfläche  $dA$  liefert unter der Voraussetzung der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen  $\tau_{12} = \tau_{21}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{oder kurz} \quad (6.17)$$

$$[\sigma_{12}] = [T_\sigma] [\sigma_{xy}] . \quad (6.18)$$

Die Inversion des Zusammenhangs liefert die Spannungskomponenten des globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystems aus den Spannungskomponenten des lokalen 1-2-Koordinatensystems zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad \text{oder kurz} \quad (6.19)$$

$$[\sigma_{xy}] = [T_\sigma]^{-1} [\sigma_{12}] . \quad (6.20)$$

Die Gleichungen (6.18) und (6.20) beschreiben matriziell die Transformation der Spannungen unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes. Dabei ist  $[T_\sigma]$  die Transformationsmatrix der Spannungen vom globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem ins lokale 1-2-Koordinatensystem. Die inverse Formulierung liefert die inverse Matrix  $[T_\sigma]^{-1}$  als Transformationsmatrix der Spannungen vom lokalen Koordinatensystem ins globale Koordinatensystem.

Zusätzlich ist die Transformationsmatrix der Spannungen vom globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem ins lokale 1-2-Koordinatensystem eine Funktion des Winkels  $\alpha$ ,  $[T_\sigma] = [T_\sigma](\alpha)$ . Dabei ist die Transformationsmatrix des negativ definierten Drehwinkels  $-\alpha$  die inverse der Matrix des positiv definierten Drehwinkels  $\alpha$ ,

$$[T_\sigma](-\alpha) = [T_\sigma](\alpha)^{-1} . \quad (6.21)$$

### Transformation der Verzerrungen

Für die Verzerrungen werden die Transformationsbeziehungen basierend auf den Verschiebungskomponenten  $u_x$  und  $v_y$  betrachtet. Analog wird neben dem globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem ein lokales 1-2-Koordinatensystem eingeführt, das um den Winkel  $\alpha$  mathematisch positiv gegenüber dem globalen Koordinatensystem gedreht ist. Basierend auf den Abmessungen eines infinitesimalen Elements  $dx$   $dy$  werden mit den trigonometrischen Beziehungen die Abmessungen eines infinitesimalen Elements  $d1$   $d2$  im lokalen Koordinatensystem formuliert. Analog werden die Verschiebungen  $u_x$  und  $v_y$  im globalen Koordinatensystem und die Verschiebungen  $u_1$  und  $v_2$  im lokalen Koordinatensystem über trigonometrische Zusammenhänge formuliert. Anwendung der Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen aus den Gleichungen (4.15) und (4.16) und Berechnung der partiellen Ableitungen der geometrischen Verhältnisse liefert

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{oder kurz} \quad (6.22)$$

$$[\varepsilon_{xy}] = [T_\varepsilon]^{-1} [\varepsilon_{12}] . \quad (6.23)$$

Die Inversion des Zusammenhangs liefert die Verzerrungskomponenten des lokalen 1-2-Koordinatensystems aus den Verzerrungskomponenten des globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystems zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{oder kurz} \quad (6.24)$$

$$[\varepsilon_{12}] = [T_\varepsilon] [\varepsilon_{xy}] . \quad (6.25)$$

Die Gleichungen (6.23) und (6.25) beschreiben matriziell die Transformation der Verzerrungen unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes. Dabei ist  $[T_\varepsilon]^{-1}$  die Transformationsmatrix der Verzerrungen vom lokalen 1-2-Koordinatensystem ins globale  $x$ - $y$ -Koordinatensystem. Die inverse Formulierung liefert die inverse Matrix  $[T_\varepsilon]$  als Transformationsmatrix der Verzerrungen vom globalen Koordinatensystem ins lokale Koordinatensystem.

### 6.2.2 Zusammenhang zwischen den Transformationsbeziehungen

Der Zusammenhang zwischen den Transformationsmatrizen wird u. a. in GEBBEKEN 1996 [47] dargestellt [46]. Da die Formänderungsarbeit als Produkt der Spannungen und Verzerrungen im globalen als auch im lokalen Koordinatensystem invariant ist, gilt

$$[\sigma_{xy}]^T [\varepsilon_{xy}] = [\sigma_{12}]^T [\varepsilon_{12}] . \quad (6.26)$$

Transponieren des Zusammenhangs (6.18) liefert

$$[\sigma_{12}]^T = [\sigma_{xy}]^T [T_\sigma]^T . \quad (6.27)$$

Einsetzen der Gleichungen (6.25) und (6.27) in Gleichung (6.26) liefert

$$[\sigma_{xy}]^T [\varepsilon_{xy}] = [\sigma_{xy}]^T [T_\sigma]^T [T_\varepsilon] [\varepsilon_{xy}] . \quad (6.28)$$

Die Identität in Gleichung (6.28) liefert schließlich den Zusammenhang zwischen den Transformationsmatrizen

$$[T_\sigma]^T [T_\varepsilon] = 1 \quad \text{bzw.} \quad [T_\sigma]^T = [T_\varepsilon]^{-1} . \quad (6.29)$$

Somit folgen die analogen Zusammenhänge für die Transformationsmatrix der Spannungen und Verzerrungen zu

$$[T_\sigma] = [T_\varepsilon]^{-1T} = [T_\varepsilon]^{-T} \quad \text{bzw.} \quad [T_\varepsilon] = [T_\sigma]^{-1T} = [T_\sigma]^{-T} . \quad (6.30)$$

Für die spätere Verwendung sind schließlich die Zusammenhänge zwischen den Inversen bzw. Transponierten der Transformationsmatrizen der Spannungen und Verzerrungen

$$[T_\sigma]^T = [T_\varepsilon]^{-1} \quad \text{bzw.} \quad [T_\varepsilon]^T = [T_\sigma]^{-1} \quad (6.31)$$

besonders relevant.

Mit den zuvor dargestellten Beziehungen können sämtliche Transformationen im zweidimensionalen Fall durchgeführt werden. Die Zusammenhänge gelten analog für den dreidimensionalen Fall. Dabei ist jedoch besonders die Reihenfolge der Drehungen relevant, da räumliche Drehungen nicht kommutativ sind [47]. In der Schreibweise der Kontinuumsmechanik werden Spannungen und Verzerrungen oft als Tensoren zweiter Stufe notiert. Dabei sind in der Tensorschreibweise die Transformationsmatrizen für Spannungen und Verzerrungen gleich [1], [11].

### 6.2.3 Transformation der Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten

Der vorherige Abschnitt 6.2.1 stellt die zweidimensionalen Transformationsbeziehungen der Spannungen und Verzerrungen unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes ( $\sigma_3 = 0$ , vgl. Abschnitt 6.1.1) dar. Sie dienen zur Transformation der Komponenten der reduzierten Steifigkeitsmatrix  $C_{ij}$  nach Gleichung (6.4) bzw. der Komponenten der reduzierten Nachgiebigkeitsmatrix  $S_{ij}$  nach Gleichung (6.1) vom lokalen ins globale Koordinatensystem und invers vom globalen ins lokale Koordinatensystem.

Das zweidimensionale Werkstoffgesetz der unidirektional verstärkten Einzelschicht bezüglich der Steifigkeiten  $[C]$  lautet im lokalen bzw. globalen Koordinatensystem

$$[\sigma_{12}] = [C_{12}] [\varepsilon_{12}] \quad \text{bzw.} \quad (6.32)$$

$$[\sigma_{xy}] = [C_{xy}] [\varepsilon_{xy}] . \quad (6.33)$$

Bezüglich der Nachgiebigkeiten  $[S]$  lautet das zweidimensionale Werkstoffgesetz der unidirektional verstärkten Einzelschicht im lokalen bzw. globalen Koordinatensystem

$$[\varepsilon_{12}] = [S_{12}] [\sigma_{12}] \quad \text{bzw.} \quad (6.34)$$

$$[\varepsilon_{xy}] = [S_{xy}] [\sigma_{xy}] . \quad (6.35)$$



**Transformation der Steifigkeitsmatrizen**

Einsetzen der beiden Transformationsbeziehungen vom globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem ins lokale 1-2-Koordinatensystem der Spannungen und der Verzerrungen aus Gleichung (6.18) bzw. (6.25) in Gleichung (6.32) liefert

$$[T_\sigma] [\sigma_{xy}] = [C_{12}] [T_\varepsilon] [\varepsilon_{xy}] . \quad (6.36)$$

Multiplikation von links mit der Inversen der Transformationsmatrix der Spannungen  $[T_\sigma]^{-1}$  liefert

$$[\sigma_{xy}] = [T_\sigma]^{-1} [C_{12}] [T_\varepsilon] [\varepsilon_{xy}] . \quad (6.37)$$

Einsetzen des Zusammenhangs  $[T_\sigma]^{-1} = [T_\varepsilon]^T$ , wie in Gleichung (6.31) angegeben, und der globalen zweidimensionalen Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (6.33) ergibt

$$[C_{xy}] [\varepsilon_{xy}] = [T_\varepsilon]^T [C_{12}] [T_\varepsilon] [\varepsilon_{xy}] \quad \text{bzw.} \quad (6.38)$$

$$[C_{xy}] = [T_\varepsilon]^T [C_{12}] [T_\varepsilon] . \quad (6.39)$$

**Transformation der Nachgiebigkeitsmatrizen**

Einsetzen der beiden Transformationsbeziehungen vom globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem ins lokale 1-2-Koordinatensystem der Spannungen und der Verzerrungen aus Gleichung (6.25) bzw. (6.18) in Gleichung (6.34) liefert

$$[T_\varepsilon] [\varepsilon_{xy}] = [S_{12}] [T_\sigma] [\sigma_{xy}] . \quad (6.40)$$

Multiplikation von links mit der Inversen der Transformationsmatrix der Verzerrungen  $[T_\varepsilon]^{-1}$  liefert

$$[\varepsilon_{xy}] = [T_\varepsilon]^{-1} [S_{12}] [T_\sigma] [\sigma_{xy}] . \quad (6.41)$$

Einsetzen des Zusammenhangs  $[T_\varepsilon]^{-1} = [T_\sigma]^T$ , wie in Gleichung (6.31) angegeben, und der globalen zweidimensionalen Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (6.35) ergibt

$$[S_{xy}] [\sigma_{xy}] = [T_\sigma]^T [S_{12}] [T_\sigma] [\sigma_{xy}] \quad \text{bzw.} \quad (6.42)$$

$$[S_{xy}] = [T_\sigma]^T [S_{12}] [T_\sigma] . \quad (6.43)$$

**6.3 Makromechanik des Laminats als Mehrschichtverbund**

Ein Laminat besteht aus zwei oder mehr aneinander haftenden Einzelschichten. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Haftung zwischen den Einzelschichten ideal ist, sodass das Laminat makromechanisch als ein integrales Strukturbauteil betrachtet werden kann. Dabei steht das strukturelle Verhalten eines Laminats im Mittelpunkt. Es werden beliebige Lagenaufbauten mit unterschiedlichen Dicken der Einzelschichten und Orientierungen der Vorzugsrichtungen der jeweiligen Einzelschicht zum globalen Koordinatensystem des Bauteils betrachtet. Es sind v. a. die Steifigkeiten der Struktur relevant. Diese werden über die Eigenschaften der jeweiligen Einzelschicht und die Anordnung dieser im Laminat berechnet.

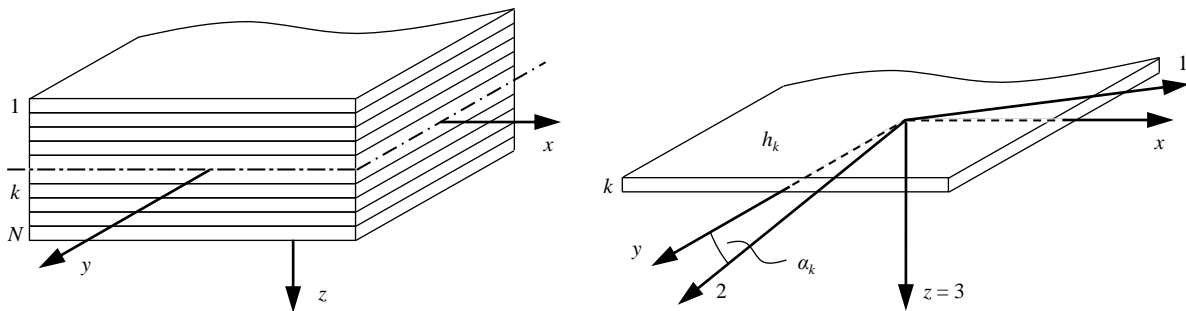
### 6.3.1 Klassische Laminattheorie (CLT)

Die sog. Klassische Laminattheorie (engl.: Classical Lamination Theory - CLT) ist eine Zusammenführung von Spannungs- und Verformungshypothesen der Festigkeitslehre [69]. Sie basiert auf dem strukturmechanischen Verhalten der faserverstärkten Einzelschicht und führt konsistent auf das strukturmechanische Verhalten eines Laminats als Mehrschichtverbund. Im Detail wird unter realitätsnahen, vereinfachenden Voraussetzungen das ursprünglich dreidimensionale, komplexere Problem auf eine zweidimensionale, einfachere Mechanik reduziert.

Die Einzelschritte zur strukturmechanischen Beschreibung eines Laminats sind [69]

- die Formulierung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen einer faserverstärkten Einzellaage und Darstellung dieser als Gleichung der  $k$ -ten Einzellaage in einem Laminat,
- die Betrachtung der Spannungs- und Verzerrungs-Verläufe im (quasi-)statischen Fall über die Dicke des gesamten Laminats und
- die Formulierung der Beziehungen zwischen den Schnittgrößen des Laminats (Kraft- und Momentenschnittgrößen) und den Verformungen (Verzerrungen und Krümmungen) über die Definition der sog. Laminatsteifigkeiten als Proportionalitätsfaktoren.

Abbildung 6.3 zeigt links den allgemeinen Schichtverbund als Laminat aus  $N$  Einzellaagen mit globalem  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem und rechts eine  $k$ -te Einzelschicht mit lokalem 1-2-3-Koordinatensystem für  $\alpha_k > 0$ .



**Abbildung 6.3:** Allgemeiner Schichtverbund als Laminat aus  $N$  Einzellaagen mit globalem  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem (links) und  $k$ -te Einzelschicht mit lokalem 1-2-3-Koordinatensystem für  $\alpha_k > 0$  (rechts).

### 6.3.2 Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen der faserverstärkten Einzelschicht

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen bei orthotropen Materialien im lokalen bzw. globalen Koordinatensystem ergeben sich nach den Gleichungen (6.32) bzw. (6.33). Wenn die Vorzugsrichtungen und damit das lokale Koordinatensystem der orthotropen Einzelschicht nicht mit globalen Koordinatensystem des Tragwerks bzw. des Laminats zusammenfallen, ist die Koordinatentransformation der Spannungen wie in Abschnitt (6.2.1) anzuwenden. Dabei ist zu beachten, dass im allgemeinen Fall die reduzierte globale Steifigkeitsmatrix  $\bar{Q}_{ij}$  für  $i, j = 1, 2, 6$  vollständig besetzt ist, und die verstärkte Einzelschicht monotropes Materialverhalten aufweist. Die transformierten Komponenten der reduzierten globalen Steifigkeitsmatrix  $\bar{Q}_{ij}$  für  $i, j = 1, 2, 6$  in Termen der reduzierten lokalen Steifigkeitsmatrix  $Q_{ij}$  für  $i, j = 1, 2, 6$  (6.4) ergeben sich nach Gleichung (6.39) im Einzelnen zu

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4(\alpha) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + Q_{22} \sin^4(\alpha) , \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + Q_{12} (\sin^4(\alpha) + \cos^4(\alpha)) ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4(\alpha) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + Q_{22} \cos^4(\alpha) , \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin(\alpha) \cos^3(\alpha) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3(\alpha) \cos(\alpha) , \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3(\alpha) \cos(\alpha) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin(\alpha) \cos^3(\alpha) , \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + Q_{66} (\sin^4(\alpha) + \cos^4(\alpha)) . \quad (6.44)
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes im globalen Koordinatensystem für jede  $k$ -te Einzelschicht eines Laminats lässt sich schreiben [69]

$$[\sigma_{xy}]^k = [\bar{Q}]^k [\varepsilon_{xy}]^k . \quad (6.45)$$

### 6.3.3 Spannungs- und Verzerrungsverläufe über die Dicke des Laminats

Die Kenntnis der Verläufe der Spannungen und Verzerrungen über die Dicke des Laminats ist die Grundlage zur Definition der Dehn-, Koppel- und Biegesteifigkeiten des Laminats. Dafür wird vereinfachend eine ideale Haftung zwischen den Einzelschichten des Laminats vorausgesetzt. Zusätzlich werden die Grenzschichten zwischen den Einzelschichten des Laminats als infinitesimal dünn sowie schubstarr vorausgesetzt. Dadurch resultieren über die Dicke des Laminats und damit auch in den Grenzschichten der Einzellagen kontinuierliche Verschiebungen. Es gibt keine Relativbewegung zwischen den Einzellagen.

Die zuvor getroffenen vereinfachenden Voraussetzungen treffen in der Realität nicht zu. Bei bestimmten Lagenaufbauten stellen sich interlaminae Spannungen als Schubspannungen zwischen den Einzellagen ein, die unter (quasi-)statischer Belastung teilweise analytisch berechnet werden können [69]. V. a. bei transversaler Impactbelastung im Niedergeschwindigkeitsbereich können die bei der Energiedissipation auftretenden interlaminae Schubspannungen zu interlaminae Delaminationen führen [30]. Im Gegensatz dazu ist die makroskopische Beschreibung von Imperfektionen im mikromechanischen Maßstab als nicht ideale Haftung in der Grenzschicht zwischen Verstärkungsfaser und polymerem Matrixwerkstoff nicht möglich [69]. Zur mechanischen Beschreibung des Verhaltens von geschichteten Strukturen als Laminat muss eine ausreichend hohe interlaminae Haftung gegeben sein. Wenn das nicht zutrifft, kann das Tragwerk mechanisch nicht als Laminat behandelt werden. In der Praxis ist so ein Bauteil vielmehr auszusondern oder, wenn möglich, zu reparieren.

Die Anwendung der Normalenhypothese setzt voraus, dass eine im unverformten Zustand auf der Mittelebene des Tragwerks gerade und senkrechte Linie auch im verformten Zustand auf der Mittelebene gerade ist, senkrecht steht und ihre Länge nicht ändert. Diese Hypothese wird bei Platten als KIRCHHOFF-Hypothese und bei Schalen als KRICHHOFF-LOVE-Hypothese bezeichnet. Sie liefert die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen [69]

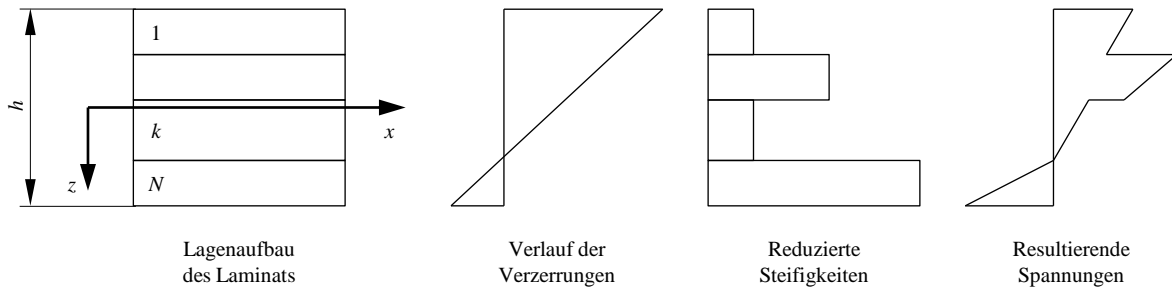
$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{xx} &= \varepsilon_{xx} + z \kappa_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} , \\
\bar{\varepsilon}_{yy} &= \varepsilon_{yy} + z \kappa_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} , \\
\bar{\gamma}_{xy} &= \gamma_{xy} + z \kappa_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ,
\end{aligned} \quad (6.46)$$

linear über die gesamte Dicke des Tragwerks  $h$ . Die Verzerrungen setzen sich zusammen aus den Verzerrungen der Mittelebene  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y$  und der Gleitung  $\gamma_{xy}$  sowie den Krümmungen der Mittelebene  $\kappa_{xx} = \kappa_x$ ,  $\kappa_{yy} = \kappa_y$  und deren Verdrillung  $\kappa_{xy}$ .

Einsetzen der Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (6.46) in die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (6.45) bzw. (6.33) liefert die Spannungen der  $k$ -ten Einzelschicht

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} . \quad (6.47)$$

Die Komponenten der transformierten reduzierten Steifigkeitsmatrix  $\bar{Q}_{ij}$  für  $i, j = 1, 2, 6$  hängen von der Orientierung der jeweiligen Einzellagen im Lagenaufbau ab. Diese kann für jede Einzelschicht unterschiedlich sein, wird jedoch über die Dicke der jeweiligen  $k$ -ten Einzellage  $h_k$  als konstant vorausgesetzt. Aus den weiteren vereinfachenden Voraussetzungen der Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen ergeben sich linear über die gesamte Dicke des Tragwerks  $h$  verteilte Verzerrungen. Die resultierenden Spannungen verlaufen dann stückweise über die Dicke der jeweiligen  $k$ -ten Einzellage  $h_k$  linear über die Dicke  $h$  des Laminats, sind jedoch im allgemeinen Fall in den Grenzflächen der Einzellagen ungleich und unstetig. Abbildung 6.4 verdeutlicht diesen Zusammenhang.



**Abbildung 6.4:** Vorausgesetzter Verlauf der Verzerrungen und, basierend auf den reduzierten Steifigkeiten, sich ergebender Verlauf der Spannungen über die Dicke des Laminats  $h$ .

### 6.3.4 Schnittgrößen des Laminats

Die Schnittgrößen eines Laminats sind Kraft- und Momentenschnittgrößen. Bei ebenen Tragwerken werden diese üblicherweise mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Sie sind längenbezogene Schnittgrößen, sodass die Kraftschnittgrößen  $n$  die Einheit  $\frac{\text{Kraft}}{\text{Einheitslänge}} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$  und die Momentenschnittgrößen die Einheit  $\frac{\text{Moment}}{\text{Einheitslänge}} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}} = \text{N}$  tragen. Die doppelte Indizierung der Kraft- und Momentenschnittgrößen entspricht der Systematik der doppelten Indizierung der Spannungen und Verzerrungen analog zu den Gleichungen (4.11) und (4.12). Dabei wird an erster Stelle die Achse angegeben, zu der das jeweilige Schnittufer senkrecht ist, und an zweiter Stelle die Orientierung der Schnittgröße bzw. der verursachenden Spannung (vgl. Kapitel 4, Abschnitt 4.1.1), hier jedoch im globalen  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem. Doppelt gleich auftretende Indizes werden dabei oft mit einem Index angegeben, sodass sich für die längenbezogenen Kraftschnittgrößen  $n_{xx} = n_x$ ,  $n_{yy} = n_y$  und  $n_{xy}$ , und für die längenbezogenen Momentenschnittgrößen  $m_{xx} = m_x$ ,  $m_{yy} = m_y$  und  $m_{xy}$  ergibt.

Die Schnittgrößen der  $k$ -ten Einzelschicht des Laminats ergeben sich durch Integration der Spannungen der  $k$ -ten Schicht zu [69]

$$n_x^k = \int_{h_k} \sigma_x^k dz , \quad n_y^k = \int_{h_k} \sigma_y^k dz , \quad n_{xy}^k = \int_{h_k} \tau_{xy}^k dz ,$$

$$m_x^k = \int_{h_k} \sigma_x^k z \, dz, \quad m_y^k = \int_{h_k} \sigma_y^k z \, dz, \quad m_{xy}^k = \int_{h_k} \tau_{xy}^k z \, dz, \quad (6.48)$$

wobei  $h_k$  die Dicke der  $k$ -ten Einzelschicht des Laminats ist.

Durch anschließende Summation der jeweiligen Schnittgröße aller  $N$  Einzelschichten über die Anzahl der Einzelschichten im Laminat  $k = 1, \dots, N$  ergeben sich die Schnittgrößen eines infinitesimalen Laminatausschnitts über die gesamte Dicke  $h$  des Laminats zu [69]

$$\begin{aligned} n_x &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_x^k \, dz, & n_y &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_y^k \, dz, & n_{xy} &= s = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{xy}^k \, dz, \\ m_x &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_x^k z \, dz, & m_y &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_y^k z \, dz, & m_{xy} &= h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{xy}^k z \, dz, \end{aligned} \quad (6.49)$$

wobei  $N$  die Anzahl der Einzelschichten des Laminats ist.

Die  $z$ -Richtung ist in Dickenrichtung nach unten positiv definiert. Die Bezugsebene  $z = 0$  muss dabei nicht die geometrische Mittelebene  $z_0 = -\frac{h}{2}$  sein. Die Bezugsebene  $z = 0$  wird beginnend vom Abstand  $z_0$  von der Oberseite des Tragwerks definiert. Abbildung 6.5 links veranschaulicht die Definition und Geometrie des Koordinatensystems in Dickenrichtung für ein  $N$ -lagiges Laminat. Dabei ist die Dicke der  $k$ -ten Einzelschicht

$$h_k = z_k - z_{k-1} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6.50)$$

Die Dicke des gesamten  $N$ -lagigen Laminats ergibt sich aus der Summation der Dicken der Einzellagen  $h_k$  über die Anzahl der Einzellagen im Laminat  $N$  zu

$$h = \sum_{k=1}^N h_k \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6.51)$$

Der vorzeichenbehaftete Abstand  $z_k$  der Unterseite der  $k$ -ten Einzelschicht von der geometrischen Mittelfläche  $z_0 = -\frac{h}{2}$  ist

$$z_k = \frac{h}{2} - \sum_{i=1}^k h_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (6.52)$$

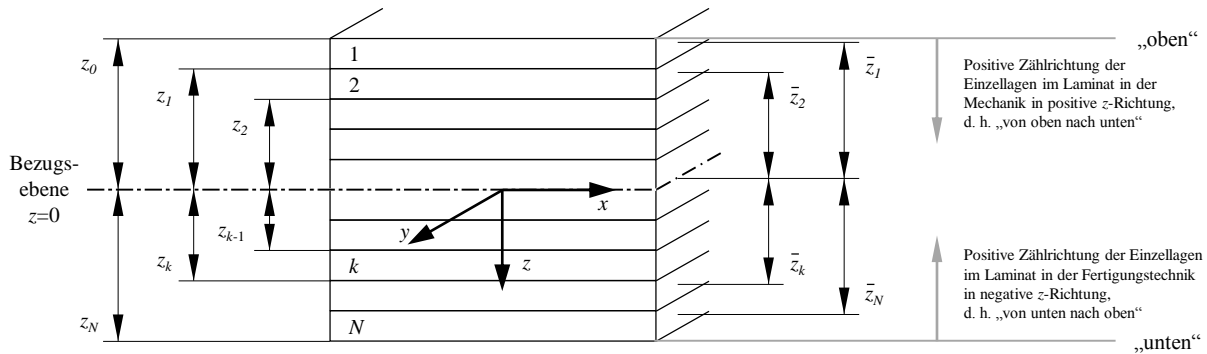
Der Abstand  $\bar{z}_k$  der geometrischen Mittelfläche der  $k$ -ten Einzelschicht von der geometrischen Mittelfläche des Laminats  $z_0 = -\frac{h}{2}$  ist

$$\bar{z}_k = \frac{1}{2} (z_{k-1} + z_k) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6.53)$$

Obwohl die Bezugsebene  $z = 0$  beliebig wählbar ist, und nicht die geometrische Mittelebene  $z_0 = -\frac{h}{2}$  sein muss, hängen die resultierenden Schnittgrößen nach der Integration über die Dickenrichtung  $z$  (6.49) nicht von  $z$  ab. Sie sind jedoch Funktionen von  $x$  und  $y$  [69].

In EHRICH 2004 [30] wird dabei explizit die in der Literatur bzw. Mechanik und in der Fertigung unterschiedliche Nummerierung der Einzellagen im Laminat hingewiesen. Die beiden unterschiedlichen Konventionen der positiven Zählrichtung der Einzellagen im Laminat in der Mechanik im Gegensatz zur Fertigungstechnik ist in Abbildung 6.5 rechts dargestellt. In der Mechanik werden die Einzellagen in positive  $z$ -Richtung, d. h. „von oben nach unten“ nummeriert. Diese Definiti-

on der Reihenfolge ist jedoch dem fertigungstechnischen Legen des Laminats entgegengesetzt, die von „unten nach oben“ nummeriert. Die Reihenfolge beim Aufbau des Laminats ist in der DIN EN 7000-11 [106] normiert, und orientiert sich entgegen der mechanisch positiven  $z$ -Richtung. Damit ist die Reihenfolge beim fertigungstechnischen Legen des Laminats der Zählrichtung der Mechanik entgegengesetzt, sodass die jeweils getroffene Bezeichnungsdefinition in der technischen Kommunikation unbedingt zu beachten ist.



**Abbildung 6.5:** Definition und Geometrie des Koordinatensystems in Dickenrichtung für ein  $N$ -lagiges Laminat (links) mit den unterschiedlichen Konventionen der positiven Zählrichtung in der Mechanik im Gegensatz zur Fertigungstechnik (rechts).

### 6.3.5 Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen des Laminats

Zur Formulierung der Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen des Laminats ist es günstig, die Gleichungen der Schnittgrößen eines infinitesimalen Laminatausschnitts über die gesamte Dicke  $h$  des Laminats (6.49) matriziell zu schreiben. Da die Matrix der transformierten reduzierten globalen Steifigkeitsmatrix  $\bar{Q}_{ij}$  für  $i, j = 1, 2, 6$  für jede  $k$ -te Einzelschicht üblicherweise konstant ist, wird diese vor das Integral jeder  $k$ -ten Einzellschicht geschrieben. Einsetzen der Spannungen der  $k$ -ten Einzelschicht (6.47) in die Gleichungen der Schnittgrößen eines infinitesimalen Laminatausschnitts über die gesamte Dicke  $h$  des Laminats (6.49) liefert die matrizielle Schreibweise der Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen [69]

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z dz \right], \quad (6.54)$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right]. \quad (6.55)$$

In JONES 1999 [69] wird explizit angemerkt, dass die Formulierung in den Gleichungen (6.54) und (6.55) mit der transformierten reduzierten Steifigkeitsmatrix  $\bar{Q}_{ij}$  für  $i, j = 1, 2, 6$  vor dem Integral lediglich unter der Gültigkeit der vereinfachenden Voraussetzung einer über die Dicke für jede  $k$ -te Einzelschicht konstanten transformierten reduzierten Steifigkeitsmatrix  $\bar{Q}_{ij}$  für  $i, j = 1, 2, 6$  gilt. Die getroffene vereinfachende Voraussetzung gilt in der Realität in guter Näherung, außer es treten sog. hygrothermale Effekte (Temperatur und/oder Feuchte) auf, die einen Gradienten über die Dicke der Einzelschichten aufweisen. Andernfalls ist das Laminat in jeder Einzellschicht inhomogen. Eine exakte Lösung würde aufwändigere numerische Verfahren erfordern. Außerdem wären die für die Homogenisierung getroffenen vereinfachenden Voraussetzung nicht

erfüllt, sodass auch bezüglich der Homogenisierung der strukturmechanischen Materialkennwerte die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

Wenn hygrothermale Effekte auftreten, die jedoch keinen Gradient über die Dicke der Einzelschichten aufweisen, können diese vereinfacht berücksichtigt werden. In der vorliegenden Arbeit werden hygrothermale Effekte jedoch nicht weiter berücksichtigt, da diese in den durchgeführten experimentellen Untersuchungen durch entsprechende Konditionierung der Probekörper im Klimaschrank auf ein konstantes Minimum reduziert worden sind.

### 6.3.6 Definition der Laminatsteifigkeiten zur $ABD$ -Hypermatrix

Da die Verzerrungen und Krümmungen von  $z$  unabhängig sind und sich auf die Mittelebene beziehen, ist es möglich diese Größe vor die Summation über die Einzelschichten  $k = 1, \dots, N$  zu stellen. Die Gleichungen (6.54) und (6.55) ergeben sich damit schließlich zu

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (6.57)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k, \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k \bar{z}_k, \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k \left( \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^2}{12} \right) h_k. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Die Terme  $A_{ij}$  sind Dehnsteifigkeiten,  $D_{ij}$  Biegesteifigkeiten und  $B_{ij}$  Kopplungssteifigkeiten. Sie werden ebenfalls nach dem in Abbildung 6.5 dargestellten Koordinatensystem in Dickenrichtung des Tragwerks errechnet.

Mit Hilfe der sogenannten Laminatsteifigkeiten  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  und  $D_{ij}$  für  $i, j = 1, 2, 6$  ergeben sich die Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen des Laminats zur Hypermatrix (auch  $ABD$ -Matrix genannt)

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad \text{oder kurz} \quad (6.59)$$

$$\begin{bmatrix} [n] \\ [m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\varepsilon] \\ [\kappa] \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

Dabei stellte die Terme im Einzelnen eine charakteristische Belastungs-Verformungs-Reaktion des Laminats dar. Die Terme  $B_{ij} \neq 0$  bewirken eine sog. Biege-Dehn-Kopplung. Die Terme  $A_{16} \neq 0$  und  $A_{26} \neq 0$  stellen eine Schub-Dehn-Kopplung dar, während die Terme  $D_{16} \neq 0$  und  $D_{26} \neq 0$  eine Biege-Drill-Kopplung bewirken.

### Symmetrischer Kreuzverbund als Spezialfall

Dabei ergeben sich je nach der Art des Lagenaufbaus eines Laminats sog. Spezialfälle der Laminatsteifigkeiten. Die in Kapitel 10 experimentell strukturdynamisch untersuchten, flachen stabförmigen Probekörper werden aus Prüfplatten mit einem sog. symmetrischen Kreuzverbund ausgeschnitten und präpariert, wie in Tabelle 10.3 angegeben und in Abbildung 10.11 dargestellt.

Ein Kreuzverbund (engl.: cross-ply laminate) besteht aus Einzellagen, deren Vorzugsrichtungen eine Winkeldifferenz von  $90^\circ$  zueinander aufweisen. Dabei besteht der Lagenaufbau entweder aus mehreren unidirektional verstärkte Einzelschichten, deren Vorzugsrichtungen abwechselnd orthogonal zueinander orientiert sind, oder aus gewebeverstärkten Einzellagen. Wenn der Lagenaufbau symmetrisch zur Mittelebene  $z = 0$  ist und die gegenüberliegenden Einzellagen gleich Dick sind, wird der Lagenaufbau als symmetrischer Kreuzverbund bezeichnet [149]. In diesem Fall ergibt sich die Belegung der Hypermatrix aus Gleichung (6.59) mit  $A_{16} = A_{26} = 0$ ,  $B_{ij} = 0$  und  $D_{16} = D_{26} = 0$  zu

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$

Da der symmetrische Kreuzverbund drei Symmetrieebenen aufweist, ist er orthotrop (vgl. Gleichungen (4.36), (4.37) und (4.43) in Abschnitt 4.2.3). Deshalb tritt bei Beanspruchung in Richtung der Symmetrieachsen bzw. entlang der Vorzugsrichtungen keine Dehn-Schub-Kopplung auf.

### Inversion der $ABD$ -Hypermatrix der Steifigkeiten zur $abd$ -Hypermatrix der Nachgiebigkeiten

Die bereits in Kapitel 4, Abschnitt 4.2.5 angeführte Inversion der Steifigkeiten zu Nachgiebigkeiten wird analog für die Terme der  $ABD$ -Hypermatrix durchgeführt. Der Hintergrund ist, dass die Ingenieurskonstanten (4.47), wie auf Seite 47 beschrieben, direkt in unterschiedlichen Methoden der Materialkennwertermittlung ermittelt werden.

Auflösen von Gleichung (6.59) nach den Verzerrungen bzw. Krümmungen erfordert die Inversion der Steifigkeitsmatrix des Gesamtverbundes ( $ABD$ -Matrix) zur Nachgiebigkeitsmatrix des Gesamtverbundes ( $abcd$ -Matrix). Es ergibt sich analog zur Hypermatrix der Steifigkeiten (6.60) die Hypermatrix der Nachgiebigkeiten zu

$$\begin{bmatrix} [\varepsilon] \\ [\kappa] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [n] \\ [m] \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

Dabei ergeben sich die Untermatrizen  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$  und  $[d]$  durch Inversion von Gleichung (6.60) [2], [31], [92]. Daraus folgt zusätzlich  $[c] = [b]^T$ .

Die Untermatrizen lauten zusammenfassend

$$\begin{aligned} [a] &= [A]^{-1} + [A]^{-1} [B] \left( [D] - [B] [A]^{-1} [B] \right)^{-1} [B] [A]^{-1}, \\ [b] &= -[A]^{-1} [B] \left( [D] - [B] [A]^{-1} [B] \right)^{-1}, \end{aligned}$$



$$[c] = [b]^T = - \left( [D] - [B] [A]^{-1} [B] \right)^{-1} [B] [A]^{-1} ,$$

$$[d] = \left( [D] - [B] [A]^{-1} [B] \right)^{-1} ,$$

Mit der Hypermatrix der Nachgiebigkeiten (6.62) ergeben sich die Spannungen und Verzerrungen der  $k$ -ten Einzelschicht im globalen Koordinatensystem bzw. mit den Zusammenhängen (6.20) und (6.23) im lokalen Koordinatensystem zu

$$[\bar{\sigma}]_k = [\bar{Q}]_k [\bar{\varepsilon}]_k \quad \text{bzw.} \quad (6.63)$$

$$[\sigma]_k = [T_\varepsilon]^{-T} [\bar{Q}]_k [T_\varepsilon]^{-1} [\varepsilon]_k = [Q]_k [\varepsilon]_k . \quad (6.64)$$

Dabei entspricht der Verzerrungsvektor des Laminats  $[\bar{\varepsilon}]$  dem der Einzelschichten  $[\bar{\varepsilon}]_k$ , da die gleichen Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (6.46) gelten. Aus Gleichung (6.64) geht zusätzlich der inverse Zusammenhang von Gleichung (6.39) als Rücktransformation der Steifigkeitsmatrix vom globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem ins lokale 1-2-Koordinatensystem hervor,

$$[C_{12}] = [T_\varepsilon]^{-T} [C_{xy}] [T_\varepsilon]^{-1} . \quad (6.65)$$

Für den Verzerrungsvektor gilt  $[\bar{\varepsilon}] = [\bar{\varepsilon}_0] + z [\kappa]$ . Die Spannungen  $[\bar{\sigma}]_k$  setzen sich aus einem konstanten Normalverzerrungsanteil und einen linear über die Dicke  $h$  verlaufenden Krümmungsanteil zusammen. Für unterschiedliche reduzierte Steifigkeiten der  $k$  Einzelschichten im allgemeinen Fall ergeben sich Spannungsverläufe über die Dicke  $h$ , wie in Abbildung 6.4 dargestellt. Bezüglich der unterschiedlichen Anteile zitiert EHRlich 2004 [30] die Arbeit von ROLFES und ROHWER 1997 [135], der für Plattenbiegung mit kleinen Durchbiegungen  $w$  vorschlägt, näherungsweise eine reine Biegeform anzunehmen und Normalverzerrungen  $[\bar{\varepsilon}_0]$  zu vernachlässigen.



## 7 Aspekte der linearen Viskoelastizität

Die folgenden Ausführungen zu relevanten Aspekten der linearen Viskoelastizität orientieren sich u. a. an BOYCE und DiPRIMA 1995 [14], BRINSON und BRINSON 2008 [16], BRONSTEIN und SEMDENDAJEW 2008 [18], FORSTER 2011 [42], GIBSON 2012 [49], GROSS et al. 2008 [52], SILBERBERGER 2008 [150], POPOV 2012 [133] und SZABO 2003 [154], sowie an den Ausführungen in SCHMIDT und GAUL 2007 [144] bzw. SCHMIDT 2003 [145] und an der DIN 1311 [98]. Vor dem Hintergrund der, in Abschnitt 11.2.1 dargestellten, Auswertungen der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen der frei abklingenden Transversalschwingungen der einseitig fest eingespannten flachen stabförmigen Probekörper, deren Durchführung in Abschnitt 10.5 beschrieben ist, wird v. a. auf die Frequenzbereichsdarstellung und auf den komplexen Modul eingegangen.

### 7.1 Definition und Beschreibung von Schwingungen

Die zeitliche Änderung einer Zustandsgröße eines Systems, die im allgemeinen abwechselnd zu- und abnimmt, wird als Schwingung bezeichnet. Dazu zählen z. B. sich wiederholende, periodische Bewegungsvorgänge, aber auch Stoß- und Kriechvorgänge können im erweiterten Sinn als Schwingungen behandelt werden [98]. Voraussetzung für schwingendes Verhalten eines Systems ist die Existenz von Energiespeichern, wie z. B. Federn für potentielle Energie und Massen für kinetische Energie, die abwechselnd und wiederkehrend geladen und entladen werden. Bei mechanischen Systemen sind die Zustandsgrößen beispielsweise äußere Kräfte als Belastungen, innere Kräfte als Beanspruchungen oder Verschiebungen bzw. Verformungen. Zur eindeutigen Beschreibbarkeit des momentanen Zustandes eines Systems werden mindestens zwei Zustandsgrößen je Freiheitsgrad benötigt [98].

Es wird vereinfachend vorausgesetzt, dass die flachen stabförmigen Probekörper frei abklingende Transversalschwingungen ausführen, wie in Kapitel 8 beschrieben. Von den unterschiedlichen Arten bzw. Definitionen von Schwingungen wird deshalb auf harmonische Schwingungen als periodische, und damit deterministische Schwingung eingegangen. In diesem Fall existiert eine funktionale Abhängigkeit  $x(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  und der Zustandsgröße  $x$ .

### 7.2 Eindimensionale Betrachtung schwingungsfähiger Systeme

Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschreiben i. a. schwingungsfähige Systeme. Dabei sind besonders eindimensionale Bewegungen in einem Potential sowie freie und gedämpfte Schwingungen relevant. Die folgenden Ausführungen sind rein mathematisch formuliert, und orientieren sich an BOYCE und DiPRIMA 1995 [14] sowie FORSTER 2011 [42].

### 7.2.1 Eindimensionale Bewegung

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad \text{mit} \quad t, x \in R \quad (7.1)$$

ist im physikalischen Sinne die Differentialgleichung eines Masseteilchens mit einem Freiheitsgrad  $x$  [42]. Das Masseteilchen kann als Einheitsmasse der Masse 1 betrachtet werden. Es bewegt sich unter dem Einfluss einer lediglich vom Ort  $x$  abhängigen Kraft  $f(x)$ . Dabei ist  $t$  die Zeitvariable.

Die erste Ableitung des Ortes nach der Zeit ist die Geschwindigkeit  $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , und die zweite Ableitung ist die Beschleunigung  $a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ , jeweils zum Zeitpunkt bzw. in Abhängigkeit von  $t$ .

Mit der Definition der potentiellen Energie  $U(x) = -\int_a^x f(\xi) d\xi$  geht die Differentialgleichung (7.1) über in [42]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx}(x) . \quad (7.2)$$

Durch Multiplikation mit  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  folgt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \right) = 0 . \quad (7.3)$$

Es existiert eine Konstante  $E \in R$ , die die Gesamtenergie des Systems darstellt, sodass gilt [42]

$$\frac{1}{2} v(t)^2 + U(x(t)) = E \quad \forall \quad t . \quad (7.4)$$

Da der Term  $v^2$  stets positiv ist, erfolgt die Bewegung in Bereichen, für die gilt  $U(x) \leq E$ . Die Bewegung genügt dann der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - U(x))} \quad \text{für} \quad \dot{x} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{x} = -\sqrt{2(E - U(x))} \quad \text{für} \quad \dot{x} \leq 0 . \quad (7.5)$$

Mit der Definition [42]

$$G(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} \quad (7.6)$$

und der Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  gilt

$$G(x(t)) = t - t_0 \quad \text{oder} \quad x(t) = H(t - t_0) , \quad (7.7)$$

wobei  $H$  die Umkehrfunktion von  $G$  ist. Das Integral  $G(x)$  gibt die Zeitdauer an, die das Masseteilchen benötigt, um von  $x_0$  nach  $x$  zu gelangen.

Mit den beiden Punkten  $x_A$  und  $x_B$ , und unter der Voraussetzung, dass  $x_A < x_B$  mit

$$U(x_A) = U(x_B) = E \quad \text{und} \quad U(\xi) < E \quad \text{für} \quad x_A < \xi < x_B , \quad (7.8)$$

sowie unter der Voraussetzung, dass [42]

$$U'(x_A) \neq 0 \quad \text{und} \quad U'(x_B) \neq 0 , \quad \text{d. h.} \quad f(x_A) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(x_B) \neq 0 , \quad (7.9)$$

verläuft die Bewegung im Intervall  $[x_A, x_B]$ . Die Zeit  $T$  die das Masseteilchen von  $x_A$  nach  $x_B$

benötigt wird durch das uneigentliche Integral

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} \quad (7.10)$$

beschrieben. Wegen der Voraussetzung

$$\frac{dv}{dt}(t_B) = \frac{d^2x}{dt^2}(t_B) = f(x_B) \quad \text{für } x(t_B) = x_B \quad (7.11)$$

ist die Geschwindigkeit im Punkt  $x_B$  null und ändert das Vorzeichen. Das Masseteilchen läuft anschließend von  $x_B$  nach  $x_A$  zurück. Der Zeitbedarf ist wieder  $T$  und es ergibt sich eine periodische Bewegung mit der Schwingungsdauer  $2T$ . Abhängig vom Vorzeichen der Geschwindigkeit gehorcht das Masseteilchen alternierend den Differentialgleichungen (7.5).

## 7.2.2 Harmonischer Oszillator

Der harmonische Oszillator genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad (7.12)$$

die im physikalischen Sinne eine eindimensionale Schwingung eines Masseteilchens mit einem Freiheitsgrad  $x$  um den Nullpunkt beschreibt. Das Masseteilchen kann als Einheitsmasse der Masse 1 betrachtet werden. Es bewegt sich unter dem Einfluss einer lediglich vom Ort  $x$  abhängigen Kraft. Die Proportionalität der Rückstellkraft wird durch die positive Konstante  $k$  beschrieben. Physikalisch betrachtet entspricht sie einer Federkonstante.

Mit den Bedingungen für die Anfangsauslenkung  $x(t_0) = 0$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{x}(t_0) = v_0 > 0$  wird die potentielle Energie des Systems zu [42]

$$U(x) = \int_0^x k\xi d\xi = \frac{1}{2} kx^2. \quad (7.13)$$

Mit den Anfangsbedingungen wird die Konstante  $E \in \mathbb{R}$  als Gesamtenergie des Systems zu [42]

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}(t_0)^2 + U(x(t_0)) = \frac{1}{2} v_0^2. \quad (7.14)$$

Die Bewegung verläuft im Intervall  $\{x \in \mathbb{R} : U(x) \leq E\} = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \frac{v_0}{\sqrt{k}}\right\}$ . Mit den Abkürzungen

$$A = \frac{v_0}{\sqrt{k}} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{k} \quad (7.15)$$

ist für  $|x| < A$  [42]

$$G(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{v_0^2 - k\xi^2}} = \frac{1}{A\omega} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{A}\right)^2}} \quad (7.16)$$

und mit der Substitution  $u = \frac{\xi}{A}$  folgt [42]

$$G(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{x}{A}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{x(t)}{A}\right) = t - t_0. \quad (7.17)$$

Aufgelöst nach der Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit folgt

$$x(t) = A \sin[\omega(t - t_0)] . \quad (7.18)$$

Die Gültigkeit der Beziehung, die zunächst lediglich für  $|\omega(t - t_0)| < \frac{\pi}{2}$  gegeben ist, kann auf alle Zeitpunkte  $t$  ausgeweitet werden [42]. Die Bewegung ist eine Schwingung um den Nullpunkt mit der Amplitude  $A = \frac{v_0}{\sqrt{k}}$  und der Schwingungs- oder Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ .

### 7.3 Eindimensionale mechanische Schwingungen

Praktisch existieren keine Systeme ohne Dämpfung. Dabei unterscheiden sich verschiedene Dämpfungseffekte in ihren Ursachen, sowie ihren Auswirkungen auf das schwingungsfähige System. Sie sind in der mathematischen Formulierung von mechanischen Modellen entsprechend zu berücksichtigen. Der harmonische Oszillator als Einmassenschwinger mit ideal-elastischer Feder nach dem HOOKE'schen Gesetz als Energiespeicher, und ideal-viskosem Dämpfer nach NEWTON'schen Voraussetzungen als Dissipationsglied, und damit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung mit einem Freiheitsgrad, wird in der Mechanik durch die Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + c x = f(t) \quad (7.19)$$

beschrieben [14], [18]. Darin ist  $m$  die Masse (in kg),  $d$  die Dämpfungskonstante (in Ns/m) und  $c$  die Steifigkeit (in N/m) [150]. Gleichung (7.19) enthält zunächst alle Glieder der mathematischen Definition einer gewöhnlichen, inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Durch eventuelle Vernachlässigbarkeit oder das Fehlen entsprechender Anfangsbedingungen vereinfacht sich die Differentialgleichung und die zugehörige Lösung, da Glieder entfallen.

Bei fehlender Anregung  $f(t) = 0$  reduziert sich Gleichung (7.19) auf die Differentialgleichung der freien viskos gedämpften Schwingung nach Normieren mit der Masse  $m$  zu [150]

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad (7.20)$$

wobei es für die folgenden Ausführungen günstig ist, die Substitutionen

$$2\delta = \frac{d}{m} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} , \quad (7.21)$$

jeweils in  $\frac{1}{s}$ , zu verwenden [14], [18], [150]. Dabei ist  $\delta$  der sog. Abklingkoeffizient und  $\omega_0$  die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung. Die Differentialgleichung (7.20) ist von zweiter Ordnung, gewöhnlich, homogen, linear und mit konstanten Koeffizienten. Sie beschreibt das Verhalten eines nach Anregung sich selbst überlassenen (frei ausschlagenden) Einmassenschwingers.

Zur Ermittlung der Gesamtheit aller Lösungen genügt die Kenntnis von zwei linear unabhängigen Lösungen. Dazu wird der Exponentialansatz

$$x(t) = A e^{\lambda t} \quad (7.22)$$

mit der unbestimmten Konstanten der Amplitude  $A$  und der komplexen Konstanten  $\lambda \in \mathbb{C}$  in die Differentialgleichung (7.20) eingesetzt. Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung zu [14], [18], [150]

$$\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2 = 0 . \quad (7.23)$$

Die Lösungen ergeben sich nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen zu

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (7.24)$$

Für  $\delta \neq \omega_0$  gilt  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  und es ergeben sich die beiden Lösungen

$$x_k(t) = A e^{\lambda_k t}, \quad \text{mit} \quad k = 1, 2. \quad (7.25)$$

Deren lineare Unabhängigkeit wird durch die WRONSKI<sup>1</sup>-Determinante überprüft [42]. Es gilt

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1'(0) & x_2'(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0. \quad (7.26)$$

Die beiden Lösungen bilden damit ein Lösungsfundamentalsystem [42].

Zusätzlich zu den Substitutionen (7.21) ist es für die weiteren Ausführungen günstig, das dimensionslose sog. LEHR<sup>2</sup>'sche Dämpfungsmaß

$$D = \frac{d}{2\sqrt{cm}} = \frac{d}{2m\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_0} \quad (7.27)$$

einzuführen [52], [150]. Damit lautet Gleichung (7.24)

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}, \quad (7.28)$$

sodass eine Fallunterscheidung bezüglich der Intensität des LEHR'schen Dämpfungsmaßes  $D$  für drei Fälle durchzuführen ist. Die Fallunterscheidung der drei Fälle erfolgt nach dem Wert des Radikanden aus (7.28) in [52], [150]

- schwach gedämpfte Systeme mit  $0 < D < 1$ ,
- stark gedämpfte Systeme (sog. Kriechvorgänge) mit  $D > 1$  und
- aperiodische Grenzfälle mit  $D = 1$ .

Für die in Abschnitt 11.2.1 dargestellten Auswertungen der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen, wie in Abschnitt 10.5 beschrieben, ist dabei der erste Fall relevant.

### 7.3.1 Ungedämpfte Schwingung

Trotz der zuvor getroffenen Fallunterscheidung wird in diesem Abschnitt zunächst auf die ungedämpfte Schwingung eingegangen. Im Fall fehlender Dämpfung  $D = 0$  bzw.  $\delta = 0$  ist  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , wobei  $i$  die imaginäre Einheit  $i = \sqrt{-1}$  darstellt. Die beiden Funktionen  $x_{\pm}(t) = A e^{\pm i\omega_0 t}$  bilden ein Lösungsfundamentalsystem. Geeignete Linearkombinationen erlauben, unter der Berücksichtigung der EULER'schen Formeln, die Umrechnung von Exponentialfunktionen mit komplexen Argumenten auf Linearkombinationen trigonometrischer Funktionen mit reellen Argumenten. In diesem Fall lautet das reelle Lösungsfundamentalsystem [42]

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} (x_+(t) + x_-(t)) = \cos(\omega_0 t), \\ x_2(t) &= \frac{1}{2i} (x_+(t) - x_-(t)) = \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (7.29)$$

<sup>1</sup> JÓSEF MARIA HOËNÉ-WROŃSKI, eigentlich Józef Hoëné, \* 23. August 1776 in Wolsztyn, Polen, † 9. August 1853 in Paris. Polnischer Philosoph und Mathematiker.

<sup>2</sup> ERNST LEHR, \* 4. Juli 1896 in Groß-Eichen, † 24. März 1944 in Berlin. Deutscher Physiker, Werkstoffforscher und Maschinenbauer.

Die lineare Unabhängigkeit von  $x_1$  und  $x_2$  folgt aus der umgekehrten linearen Kombinierbarkeit von  $x_+$  und  $x_-$  aus  $x_1$  und  $x_2$ .

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7.20) ergibt sich aus den linear unabhängigen Lösungen bzw. Fundamentallösungen (7.29) zu

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) , \\ &= C \cos(\omega_0 t - \alpha) . \end{aligned} \quad (7.30)$$

Die reellen Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $\alpha$  werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt [52], [150]. Mit ihrer Kenntnis und durch Superposition der beiden gleichfrequenten harmonischen Schwingungen (Anwendung des Superpositionsprinzips der Physik) ist es möglich, die beiden linear unabhängigen Lösungen als eine harmonische Schwingung zu formulieren. Dabei ist  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  die resultierende Amplitude und  $\tan \alpha = -\frac{B}{A}$  die Phasenverschiebung (vgl. Zeigeraddition in der komplexen Ebene).

Für  $\delta = 0$  sind alle Lösungen periodisch. Mit der Periode  $T$  und der Frequenz  $f$  gilt  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ , vgl. Gleichung (8.48) in Abschnitt 8.2.4. Es findet eine Schwingung mit der Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung  $\omega_0$ , bzw. mit der Eigenfrequenz  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , statt [52], [150].

### 7.3.2 Schwache Dämpfung

Im Fall schwacher Dämpfung ist  $0 < D < 1$  bzw.  $0 < \delta < \omega_0$  und der Radikand in Gleichung (7.28) wird negativ. Die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung lauten

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_0 \sqrt{1 - D^2} = -\delta \pm i\omega_d , \quad (7.31)$$

als zwei zueinander konjugiert komplexe Eigenwerte [52], [150]. Dabei ist die Substitution  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$  die Eigenkreisfrequenz des schwach gedämpften Systems.

Die Funktionen  $x_{\pm}(t) = A e^{-\delta t} e^{\pm i\omega_d t}$  bilden ein Lösungsfundamentalsystem. Das reelle Fundamentalsystem ergibt sich zu [42]

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\delta t} \cos(\omega_d t) , \\ x_2(t) &= e^{-\delta t} \sin(\omega_d t) . \end{aligned} \quad (7.32)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7.20) ergibt sich aus den linear unabhängigen Lösungen bzw. Fundamentallösungen (7.32) zu [42]

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) , \quad (7.33)$$

und mit der EULER'schen Formel [14], [18] ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\delta t} [(A_1 + A_2) \cos(\omega_d t) + i (A_1 - A_2) \sin(\omega_d t)] = \\ &= e^{-\delta t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)] \end{aligned} \quad (7.34)$$

mit den reellen Integrationskonstanten  $A$  und  $B$ . Mit ihrer Kenntnis und durch Superposition der beiden gleichfrequenten harmonischen Schwingungen (Anwendung des Superpositionsprinzips der Physik) ist es möglich, die beiden linear unabhängigen Lösungen als eine harmonische Schwingung zu formulieren. Mit der resultierenden Amplitude  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  und der Phasenverschiebung  $\tan \alpha = -\frac{B}{A}$  (vgl. Zeigeraddition in der komplexen Ebene) lautet die allgemeine



Lösung der Differentialgleichung des viskos gedämpften Einmassenschwingers [52], [150]

$$x(t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \alpha) . \quad (7.35)$$

Es findet eine Schwingung mit der Kreisfrequenz der schwach gedämpften Schwingung  $\omega_d$ , bzw. mit der Eigenfrequenz  $f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{\omega_0 \sqrt{1-D^2}}{2\pi}$ , statt. Diese ist dabei stets geringfügig kleiner als die der ungedämpften Schwingung,  $\omega_d < \omega_0$ , bzw. die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung ist geringfügig größer als die der ungedämpften,  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} > T \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Die Amplitude  $C$  (bzw.  $A$  und  $B$ ) nimmt entsprechend des Vorfaktors  $e^{-\delta t}$  exponentiell ab. Der Vorfaktor beschreibt damit die Hüllkurve der über die Zeit abklingenden Schwingung als sog. Einhüllende [52], [150]. Die Integrationskonstanten  $C$  und  $\alpha$  sind in Abhängigkeit von den Anfangs- und Randbedingungen zu bestimmen. Für  $t \rightarrow \infty$  geht der Ausschlag  $x(t)$  gegen Null.

### Definition des logarithmischen Dekrements $\Lambda$

Die Schwingung beträgt zum Zeitpunkt  $t$  bzw. zum Zeitpunkt  $t + T_d$  [42]

$$\begin{aligned} x(t) &= C e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \alpha) && \text{bzw.} \\ x(t + T_d) &= C e^{-\delta(t+T_d)} \cos[\omega_d(t + T_d) - \alpha] = \\ &= C e^{-\delta(t+T_d)} \cos(\omega_d t - \alpha) . \end{aligned} \quad (7.36)$$

Das Verhältnis von aufeinanderfolgenden Ausschlägen im Zeitabstand  $T_d$  ist [42]

$$\frac{x(t)}{x(t + T_d)} = e^{\delta T_d} . \quad (7.37)$$

Der natürliche Logarithmus des Verhältnisses (7.37) ist [52], [150]

$$\Lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t + T_d)} = \delta T_d = \frac{2\pi\delta}{\omega_d} = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} , \quad (7.38)$$

und wird entsprechend als *logarithmisches Dekrement*  $\Lambda$  bezeichnet. Es lässt sich aus experimentellen Untersuchungen meist verhältnismäßig einfach bestimmen, und ermöglicht damit die Berechnung des LEHR'schen Dämpfungsmaßes  $D$  bzw. der Abklingkonstante  $\delta$  bei bekannter Kreisfrequenz der schwach gedämpften Schwingung  $\omega_d$  nach Gleichung (7.38) [52], [150].

### 7.3.3 Starke Dämpfung

Im Fall starker Dämpfung ist  $D > 1$  bzw.  $\delta > \omega_0$ . Mit  $\mu = \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}$  ergeben sich als Lösungen die charakteristischen Gleichungen (7.28)

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mu \quad \text{mit} \quad \lambda_2 < -\delta < \lambda_1 < 0 . \quad (7.39)$$

als zwei reelle, negative Werte [52], [150]. Das Lösungsfundamentalsystem besteht demnach aus zwei exponentiell abfallenden Funktionen [42]

$$x_1(t) = e^{-(\delta-\mu)t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-(\delta+\mu)t} . \quad (7.40)$$

Zu jedem  $\lambda_{1,2}$  gehört nunmehr eine Lösung, sodass sich die allgemeine Lösung aus der Linearkombination der beiden Teillösungen ergibt zu [42]

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 t e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{\mu t} + A_2 e^{-\mu t}) . \quad (7.41)$$

Die beiden Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Wegen  $\delta > \mu$  stellt die allgemeine Lösung für den Fall starker Dämpfung (7.41) eine exponentiell abklingende Bewegung dar. Im Detail weist der Ausschlag höchstens einen Extremwert und höchstens einen Nulldurchgang auf [42]. Da die beschriebene Bewegung keine Schwingung im engeren Sinn darstellt, wird sie Kriechbewegung genannt [52], [150].

### 7.3.4 Aperiodischer Grenzfall

Der aperiodische Grenzfall ist charakterisiert durch  $D = 1$  bzw.  $\delta = \omega_0$  [14], [18], [52], [150]. Gleichung (7.28) liefert die beiden zusammenfallenden Wurzeln  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$  als identische reelle, negative Lösung. Entsprechend liefert der Ansatz (7.22) lediglich eine unabhängige Lösung  $x_1(t) = e^{-\delta t}$ . Um eine zweite, davon linear unabhängige, Lösung zu erhalten, wird eine Grenzwertbetrachtung durchgeführt [42]. Ausgehend vom Fall starker Dämpfung  $\delta > \omega_0$  wird der Grenzwert für  $\delta \rightarrow \omega_0$  betrachtet. Dann strebt  $\mu = \omega_0 \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$  gegen 0. Für  $\mu > 0$  ist

$$\Psi(\mu, t) = \frac{1}{2\mu} \left( e^{(-\delta+\mu)t} - e^{(-\delta-\mu)t} \right) = \frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{2\mu} e^{-\delta t} \quad (7.42)$$

eine Lösung der Differentialgleichung [42]. Es ist

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{e^{\delta t} - e^{-\mu t}}{2\mu} = \frac{d}{d\mu} \sinh(\mu t) \Big|_{\mu=0} = t ,$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Psi(\mu t) = t e^{-\delta t} = x_2(t) .$$

Die lineare Unabhängigkeit der beiden Lösungen  $x_1(t) = e^{-\delta t}$  und  $x_2(t) = t e^{-\delta t}$  wird durch die WRONSKI-Determinante überprüft. Im Nullpunkt ist [42]

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1'(0) & x_2'(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 . \quad (7.43)$$

Die beiden Lösungen bilden damit ein Lösungsfundamentalsystem im aperiodischen Grenzfall, und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7.20) lautet

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 t e^{\lambda_1 t} = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t} . \quad (7.44)$$

Gleichung (7.44) beschreibt, analog zur allgemeinen Lösung bei starker Dämpfung (7.41), eine exponentiell abklingende Bewegung, die ebenfalls kriechend erfolgt [52], [150]. Da im Grenzfall  $\delta = \omega_0$  gilt, ergibt sich die Dämpfungskonstante zu  $d = 2\sqrt{m c}$ . Im Detail geht der Ausschlag im aperiodischen Grenzfall  $D = 1$  schneller gegen Null, als bei starker Dämpfung [52].

## 7.4 Dynamisches Materialgesetz

Die Frequenzbereichsdarstellung linear viskoelastischer Stoffgesetze sowie die Einführung des komplexen Moduls ist in BRINSON und BRINSON 2008 [16] sowie POPOV 2012 [133] beschrieben, und in den Ausführungen von SCHMIDT und GAUL 2007 [144] bzw. SCHMIDT 2003 [145] angewendet.

### 7.4.1 Gedächtnisintegral

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen wird durch den Elastizitätsmodul bzw. die Steifigkeit eines Materials dargestellt. Er unterscheidet sich dabei nach der Art der Belastung. Bei (quasi-)statischer Belastung ist der entsprechend (quasi-)statische Elastizitätsmodul bzw. die (quasi-)statische Steifigkeit ein konstanter, zeitinvarianter Werkstoffkennwert,  $E(\infty)$ , wie in den Ausführungen in Kapitel 4 vorausgesetzt. Bei dynamischer Belastung ist der entsprechend dynamische Elastizitätsmodul bzw. die dynamische Steifigkeit ein zeitabhängiger Werkstoffkennwert,  $E(t)$  [16], [133].

Zunächst wird eine beliebige, zeitabhängige Verzerrung  $\varepsilon(t)$  vorausgesetzt. Die Approximation von deren Verlauf über die Zeit erfolgt über die Summation von sich zeitlich über die infinitesimalen Zeitintervalle  $dt'$  ändernde Stufenfunktionen. Die zum Zeitpunkt  $t'$  zugehörige infinitesimale Amplitude ist  $d\varepsilon(t') = \dot{\varepsilon}(t') dt'$ . Die resultierende infinitesimale Spannungsänderung in jedem infinitesimalen Zeitintervall ist  $d\sigma = E(t-t') \dot{\varepsilon}(t') dt'$  als linearer Zusammenhang der momentanen Steifigkeit und der infinitesimalen Veränderung der Verzerrung [133]. Dabei stellt der Ausdruck  $(t-t')$  die Zeitdauer zwischen dem Beginn des infinitesimalen Betrachtungszeitraumes  $t'$  und dem momentanen Zeitpunkt  $t$  dar [133]. Die gesamte resultierende Spannung zu jedem Zeitpunkt  $t$  ergibt sich über Integration zu

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-t') \dot{\varepsilon}(t') dt' . \quad (7.45)$$

Die Voraussetzung einer beliebigen, zeitabhängigen Spannung  $\sigma(t)$  führt auf den inversen Zusammenhang (vgl. Gleichung (4.10) in Kapitel 4, Abschnitt 4.1.1) für die gesamte resultierende Verzerrung zu jedem Zeitpunkt  $t$  durch Integration zu

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t S(t-t') \dot{\sigma}(t') dt' . \quad (7.46)$$

Die beiden Gleichungen (7.45) und (7.46) liefern  $\sigma(t)$  als die resultierenden Spannungen bei vorgegebener Verzerrung bzw.  $\varepsilon(t)$  als die resultierenden Verzerrungen bei vorgegebener Spannung, jeweils zum Zeitpunkt  $t$ . Die Größen ergeben sich dabei durch Gewichtung der dynamischen Steifigkeit  $E(t)$  bzw. der dynamischen Nachgiebigkeit  $S(t)$ , jeweils als zeitabhängiger Werkstoffkennwert, mit der zeitabhängigen Veränderung der Verzerrungen  $\varepsilon(t)$  bzw. der Spannungen  $\sigma(t)$ . Deshalb werden die dynamische Steifigkeit  $E(t)$  bzw. die dynamische Nachgiebigkeit  $S(t)$  als zeitabhängige Werkstoffkennwerte auch als sog. Gedächtnisfunktionen nach BOLTZMANN<sup>3</sup> bezeichnet [133].

Die streng mathematische Formulierung der beiden Gleichungen (7.45) und (7.46) als uneigentliche Integrale mit der unteren Integrationsgrenze  $-\infty$  scheint dabei nicht sofort einsichtig, da in den meisten strukturmechanischen Problemstellungen der Zeitpunkt des Beginns einer strukturmechanisch relevanten Belastung ((quasi-)statisch oder dynamisch) bekannt ist. Dabei ist es jedoch v. a. bei Kunststoffen als polymere Werkstoffe notwendig, vorhergegangene Belastungsereignisse, eventuell bis hin zur Polymerisation bzw. zum Produktionsprozess, sorgfältig zu berücksichtigen [16]. Darüber hinaus ist eventuell die Berücksichtigung vorhergegangener Temperaturbelastungen und/oder Umwelteinflüsse relevant, die zu resultierenden, als im Material verbliebene, sog. eingefrorenen, Spannungen (auch Eigenspannungen) führen können. Die zuvor genannten Effekte können Auswirkungen auf die molekulare Struktur des Material haben, sodass diese in der strukturmechanischen Berechnung nicht mehr vernachlässigbar sind. Charakteristische Materialeigenschaften sind in Abschnitt 3.3 exemplarisch für Epoxidharze als

<sup>3</sup> LUDWIG EDUARD BOLTZMANN, \* 20. Februar 1844 in Wien, † 5. September 1906 in Duino bei Triest. Österreichischer Physiker und Philosoph.

Duroplaste detailliert beschrieben, die als polymerer Matrixwerkstoff häufig in faserverstärkten Kunststoffen verwendet werden. Effekte von, im Verbundmaterial verbliebenen, Eigenspannungen aufgrund der Schwindung bzw. Temperaturbelastung in der Faser-Matrix-Grenzfläche als Schubspannungen, sind entsprechend beispielsweise in BODE 1996 [15] untersucht worden [16].

## 7.5 Frequenzbereichsdarstellung

Die Frequenzbereichsdarstellung linear viskoelastischer Werkstoffgesetze erfolgt unter der Voraussetzung einer harmonischen Veränderung der Verzerrungen

$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon} \cos(\omega t) , \quad (7.47)$$

als Erregung, die, nach einem eventuellen inhomogenen Einschwingvorgang, eine periodische Änderung der Spannungen  $\sigma(t)$  mit gleicher Frequenz  $\omega$  bedingt [133]. Die reelle Funktion  $\cos(\omega t)$  lässt sich über die EULER'schen Formeln als Summe mit zwei betragsgleichen komplexen Exponenten mit entgegengesetztem Vorzeichen formulieren,

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) . \quad (7.48)$$

Aufgrund der Gültigkeit des Superpositionsprinzips ergeben sich die Spannungen basierend auf den beiden komplexen Schwingungen

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{-i\omega t} \quad (7.49)$$

mit anschließender Summation. Einsetzen von  $\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t}$  in Gleichung (7.45) liefert die Spannungen

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-t') i\omega \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t'} dt' . \quad (7.50)$$

Die Substitution  $\tau = t - t'$  führt auf eine alternative Formulierung des uneigentlichen Integrals mit der oberen bzw. der unteren Integrationsgrenze 0 bzw.  $\infty$  [133]. Sie lautet

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= i\omega \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} \int_0^{\infty} E(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= E^*(\omega) \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (7.51)$$

$$= E^*(\omega) \varepsilon(t) . \quad (7.52)$$

Der, im allgemeinen Fall komplexe, Proportionalitätskoeffizient

$$E^*(\omega) = i\omega \int_0^{\infty} E(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (7.53)$$

wird als sog. komplexer Modul, komplexe Steifigkeit oder komplexer Elastizitätsmodul bezeichnet [16], [133]. Dabei wird der Realteil  $E'(\omega) = \text{Re } E^*(\omega)$  als Speichermodul, und der Imaginärteil  $E''(\omega) = \text{Im } E^*(\omega)$  als Verlustmodul bezeichnet.

Die Amplitude der resultierenden Spannungen  $|\sigma(t)|$  ergibt sich durch die Betragsbildung des komplexen Ausdrucks zu

$$|\sigma(t)| = |E^*(\omega) \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t}| = |E^*(\omega)| |\tilde{\varepsilon}| |e^{i\omega t}| , \quad (7.54)$$

und wegen  $|e^{i\omega t}| = 1$  folgt

$$|\sigma(t)| = |E^*(\omega)| |\tilde{\varepsilon}| . \quad (7.55)$$

Damit hängen die Amplituden der Spannungen bzw. der Verzerrungen direkt vom Betrag des komplexen Moduls ab [133].

## 7.6 Komplexe strukturdynamische Werkstoffkennwerte

Zunächst wird eine harmonische Veränderung der Verzerrungen vorausgesetzt,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} . \quad (7.56)$$

In der Realität entspricht dies entweder dem Realteil oder dem Imaginärteil als Kosinus- bzw. Sinusschwingung, wobei in der analytischen Betrachtung die Formulierung als Exponentialfunktion mit komplexem Exponent günstiger ist. Zusätzlich sind die weiteren Ausführungen lediglich für den stationären Zustand als homogene Frequenzantwort gültig, der sich nach einem eventuellen inhomogenen Einschwingvorgang einstellt [16]. Die Voraussetzung (7.56) führt auf

$$\sigma(t) = \sigma^* e^{i\omega t} \quad (7.57)$$

als resultierende Spannungen in der Formulierung als Exponentialfunktion mit komplexem Exponent. Dabei ist  $\omega$  die Kreisfrequenz der harmonischen Veränderung der Verzerrungen. Für die komplexe Größe  $\sigma^*$  gilt weiterhin

$$\sigma^* = \varepsilon_0 E^*(i\omega) \quad (7.58)$$

sodass sich die resultierenden Spannungen ergeben zu

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E^*(i\omega) e^{i\omega t} . \quad (7.59)$$

Dabei ist  $E^*$  der sog. komplexe Modul, als Summe von Realteil und Imaginärteil,

$$E^*(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) . \quad (7.60)$$

Der Realteil ist der sog. Speichermodul,  $\text{Re } E^*(i\omega) = E'(\omega)$ , und der Imaginärteil ist der sog. Verlustmodul,  $\text{Im } E^*(i\omega) = E''(\omega)$  [16].

Aus den Gleichungen (7.56) und (7.59) folgt der direkte Zusammenhang zwischen den zeitabhängigen Spannungen und den zeitabhängigen Verzerrungen über den komplexen Modul im Falle einer harmonischen Belastung zu

$$\sigma(t) = E^*(i\omega) \varepsilon(t) . \quad (7.61)$$

Bei harmonischer Veränderung der Spannungen anstatt der Verzerrungen, wie in Gleichung (7.56) vorausgesetzt, liefert die analoge Vorgehensweise die komplexe Nachgiebigkeit  $S^*(i\omega) = S'(\omega) + iS''(\omega)$ . Dabei ist der Realteil die sog. Speichernachgiebigkeit,  $\text{Re } S^*(i\omega) = S'(\omega)$ , und der Imaginärteil ist die sog. Verlustnachgiebigkeit,  $\text{Im } S^*(i\omega) = S''(\omega)$  [16]. Der inverse Zusammenhang zwischen den zeitabhängigen Verzerrungen und den zeitabhängigen Spannungen über die komplexe Nachgiebigkeit lautet  $\varepsilon(t) = S^*(i\omega) \sigma(t)$  (vgl. Gleichung (4.10) in Kapitel 4, Abschnitt 4.1.1).

### 7.6.1 KELVIN-VOIGT-Element

Als sog. KELVIN<sup>4</sup>-VOIGT<sup>5</sup>-Element (teilweise auch nur KELVIN-Element) wird, der bereits in Abschnitt 7.3 behandelte, harmonische Oszillator als Einmassenschwinger bezeichnet. Dabei handelt es sich im Detail um eine Parallelschaltung der beiden rheologischen Modellkörper einer idealen linear-elastischen Feder und eines idealen linear-viskosen Dämpfers [16], [133]. Der komplexe Modul des KELVIN-VOIGT-Elements ist

$$E^*(i\omega) = E + id\omega = E(1 + i\eta\omega) , \quad (7.62)$$

wobei  $d$  die sog. Dämpfungskonstante ist (vgl. Gleichung (7.19) und  $\eta = \frac{d}{E}$  gilt [16]. Der Realteil und der Imaginärteil in Gleichung (7.62) sind der Speichermodul und Verlustmodul

$$E'(\omega) = E \quad \text{und} \quad E''(\omega) = d\omega . \quad (7.63)$$

Die komplexe Nachgiebigkeit ergibt sich aus dem inversen Zusammenhang zu  $D^*(i\omega) = \frac{E-id\omega}{E^2+d^2\omega^2}$ , mit der Speichernachgiebigkeit  $D'(\omega) = \frac{E}{E^2+d^2\omega^2}$  und der Verlustnachgiebigkeit  $D''(\omega) = \frac{-d\omega}{E^2+d^2\omega^2}$ .

Die zuvor formulierten Zusammenhänge ergeben sich analog durch die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung des KELVIN-VOIGT-Elements (7.19), unter der Voraussetzung harmonischer Veränderung der Verzerrungen,  $\varepsilon_0 [\cos(\omega t)]$ .

### 7.6.2 Physikalische Interpretation

Zur physikalischen Interpretation des Materialverhaltens unter harmonischer Belastung sowie des komplexen Moduls als Summe des Speichermoduls und Verlustmoduls werden die Realteile der komplexen Verzerrungen bzw. der resultierenden komplexen Spannungen betrachtet,

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \text{Re} (\varepsilon_0 e^{i\omega t}) = \\ &= \varepsilon_0 \cos(\omega t) \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \text{Re} [\varepsilon_0 E^*(i\omega) e^{i\omega t}] = \\ &= \text{Re} \{ \varepsilon_0 [E'(\omega) + iE''(\omega)] [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \} = \\ &= \varepsilon_0 [E'(\omega) \cos(\omega t) - E''(\omega) \sin(\omega t)] . \end{aligned} \quad (7.65)$$

Die zuvor formulierten Zusammenhänge stellen das linear viskoelastische Materialverhalten unter harmonischer Belastung dar. Die kosinusförmige Veränderung der Verzerrungen über die Zeit verursacht entsprechend kosinusförmige resultierende Spannungen. Die Spannungen sind zu den Verzerrungen jedoch phasenverschoben, wobei die Spannungen den Verzerrungen nachlaufen [16].

Die Ursache für die Phasenverschiebung  $\delta$  bzw. das Nachlaufen der resultierenden Spannungen zu den aufgebrachten Verzerrungen wird durch die Formulierung des komplexen Moduls mit Betrag und Phasenwinkel in der komplexen Ebene veranschaulicht. Dabei ist

$$E^*(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = |E^*(i\omega)| e^{i\delta(\omega)} \quad (7.66)$$

<sup>4</sup> WILLIAM THOMSON, 1. BARON KELVIN, meist Lord Kelvin oder Kelvin of Largs, \* 26. Juni 1824 in Belfast (Nordirland), † 17. Dezember 1907 in Netherhall bei Largs (Schottland). In Irland geborener britischer Physiker.

<sup>5</sup> WOLDEMAR VOIGT, \* 2. September 1850 in Leipzig, † 13. Dezember 1919 in Göttingen. Deutscher Physiker; Gilt als Begründer der Festkörperphysik

wobei für den Betrag des komplexen Moduls bzw. den Phasenwinkel gilt

$$|E^*(i\omega)| = \sqrt{E'(\omega)^2 + E''(\omega)^2} \quad \text{bzw.} \quad \tan \delta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}. \quad (7.67)$$

Die resultierenden Spannungen  $\sigma(t)$  unter der Voraussetzung einer harmonischen Veränderung der Verzerrungen  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$  ergeben sich entsprechend zu

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \operatorname{Re} \left( \varepsilon_0 |E^*(i\omega)| e^{i(\omega t + \delta(\omega))} \right) = \\ &= \varepsilon_0 |E^*(i\omega)| \cos(\omega t + \delta(\omega)), \end{aligned} \quad (7.68)$$

wobei die resultierenden Spannungen  $\sigma(t)$  der aufgebrachten harmonischen Veränderung der Verzerrungen  $\varepsilon(t)$  deutlich um den Phasenwinkel  $\delta(\omega)$  nachlaufen. Der Phasenwinkel  $\delta(\omega)$  ist ein charakteristischer Materialkennwert, der i. a. von der Kreisfrequenz  $\omega$  abhängt, und in der Literatur teilweise unterschiedliche Bezeichnungen hat [16].

### 7.6.3 Energiedissipation

Hier wird auf die Ermittlung der, in einem linear viskoelastischen Material während eines vollständigen Belastungszyklus bei dynamischer Belastung, dissipierten Energie eingegangen. Dabei wird eine symmetrische Belastung vorausgesetzt, d. h. eine anfängliche Belastung, ausgehend vom unverformten Zustand in den verformten Zustand aufgrund resultierender Verzerrungen, mit darauf folgender Entlastung vom verformten Zustand in den unverformten Zustand (also zur Ausgangskonfiguration), und damit Wegnahme aller Verzerrungen. Der Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie wird schließlich zeigen, dass die dissipierte Energie direkt proportional zum Verlustmodul ist [16]. Die Arbeit einer Einheitszelle eines beanspruchten Materials ist

$$W = \int \sigma d\varepsilon = \int_0^t \sigma \dot{\varepsilon} dt. \quad (7.69)$$

Unabhängig vom vorausgesetzten bzw. realen Materialverhalten (ideal-elastisch, linear-viskoelastisch, etc.) verursacht ein vollständiger Zyklus einer harmonischen, sog. symmetrischen, Belastung die Speicherung von Energie in den, durch die Beanspruchungen verursachten, verformten Zustand durch Verzerrungen. Eine anschließende Entlastung bis zum Verschwinden der Beanspruchungen bei gleichzeitigem Rückgang in den ursprünglichen, unverformten Zustand setzt die gesamte, zunächst gespeicherte, (Verzerrungs-)Energie wieder frei, sodass keine weitere Energie mehr gespeichert ist. Der Betrag der, in einem vollständigen Belastungszyklus, dissipierten Energie  $W_{\text{diss}}$  ergibt sich entsprechend durch die Integration von Gleichung (7.69) über die Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  zu [16]

$$W_{\text{diss}} = \oint \sigma d\varepsilon = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sigma \dot{\varepsilon} dt. \quad (7.70)$$

Unter der Voraussetzung eines linear-viskoelastischen Materialverhaltens ergibt sich die resultierende Spannung als Funktion der aufgebrachten Verzerrungen über den komplexen Modul, wie in Gleichung (7.61) angegeben. Die Formulierung mit dem komplexen Modul in den Termen des Speichermoduls und des Verlustmoduls liefert

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E^*(i\omega) \varepsilon(t) = \\ &= E'(\omega) \varepsilon(t) + \frac{E''(\omega)}{\omega} i\omega t \varepsilon(t) = \end{aligned}$$

$$= E'(\omega) \varepsilon(t) + \frac{E''(\omega)}{\omega} \dot{\varepsilon}(t) . \quad (7.71)$$

Die Berechnung der, während eines vollständigen Belastungszyklus, dissipierten Energie  $W_{\text{diss}}$  erfolgt durch Einsetzen von Gleichung (7.71) in Gleichung (7.70). Für sinusförmig aufgebrachte Verzerrungen  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$  gilt

$$\begin{aligned} W_{\text{diss}} &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sigma \dot{\varepsilon} dt = \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[ E'(\omega) \varepsilon(t) + \frac{E''(\omega)}{\omega} \dot{\varepsilon}(t) \right] \dot{\varepsilon} dt = \\ &= \varepsilon_0^2 \omega \pi E'' . \end{aligned} \quad (7.72)$$

Gleichung (7.72) stellt die zuvor genannte, direkte Proportionalität zwischen der, während eines vollständigen Belastungszyklus, dissipierten Energie  $W_{\text{diss}}$  und dem Verlustmodul  $E''$  dar [16].



## 8 Transversalschwingungen von Balken

Die beschreibenden Differentialgleichungen eines Tragwerks können, abhängig von den getroffenen Voraussetzungen, Annahmen und Randbedingungen, mit mehreren Methoden hergeleitet werden. Die gewonnenen Differentialgleichungen beschreiben die Zusammenhänge von Belastungen, Verformungen und Beanspruchungen des Tragwerks. Eine Möglichkeit der Herleitung basiert auf dem NEWTON'schen Grundgesetz. Dabei werden nacheinander [53]

- die Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Element formuliert, die den Zusammenhang zwischen äußeren Lasten und inneren Kräften (Schnittgrößen) beschreiben,
- die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen vom unverformten zum verformten Tragwerk formuliert, die die Verschiebungsgrößen mit den Verzerrungsgrößen verbindet, und
- ein zu Grunde gelegtes Materialgesetz, das die Beziehung zwischen Kraft- und Deformationsgrößen beschreibt, formuliert und eingesetzt.

Analog dazu führt die Anwendung des Arbeitsbegriffes der Mechanik mit dem HAMILTON<sup>1</sup>'schen Prinzips und der LAGRANGE<sup>2</sup>'schen Gleichung ebenfalls auf die beschreibenden Differentialgleichungen eines Tragwerks. Für die Transversalschwingungen des homogenen isotropen Balkens ist dies beispielsweise in HAGEDORN 1989 [58] aufgezeigt, während die analogen Zusammenhänge für den Laminatbalken in ALTENBACH, ALTENBACH und KISSING 2004 [1] zu finden sind.

Entsprechend der, in unterschiedlichem Maße, vereinfachend getroffenen Voraussetzungen, führen diese Vorgehen auf Theorien erster bzw. höherer Ordnung. Theorien erster Ordnung bedingen teilweise stark vereinfachende Voraussetzungen und damit Einschränkungen für die Gültigkeit bzw. Anwendbarkeit. Höherwertige Theorien beschreiben die Zusammenhänge meist allgemeiner und realitätsnäher, sind jedoch komplexer in ihrer Formulierung und v. a. in ihrer Lösung. Eine große Auswahl bekannter Balkentheorien ist in KARNOVSKY und LEBED 2004 [73] ausführlich dargestellt. Ein ausführlicher Beitrag zur historischen Entwicklung ist in GEBBEKEN 1988 [45] gegeben [46]. Dabei wird auf die Balkentheorien nach BRESSE<sup>3</sup>-TIMOSHENKO<sup>4</sup> (auch nur TIMOSHENKO) und nach EULER<sup>5</sup>-BERNOULLI<sup>6</sup> (auch nur BERNOULLI) eingegangen.

Die folgenden Ausführungen orientieren sich v. a. an ALTENBACH, ALTENBACH und KISSING 2004 [1], ALTENBACH, ALTENBACH und RIKARDS 1996 [2], DRESIG und FIDLIN 2014 [28], GROSS et al. 2011 [51] und GROSS et al. 2004 [53], JONES 1999 [69], SZABO 2003 [154], SZABO 2001 [155] und WEIGAND 1962 [167].

Im Hinblick auf die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen der flachen stabförmigen Probekörper, wie in Kapitel 10 beschrieben, stehen Biegewellen von Balken im Mittelpunkt.

---

<sup>1</sup> WILLIAM ROWAN HAMILTON, \* 4. August 1805 in Dublin, † 2. September 1865 in Dunsink bei Dublin. Irischer Mathematiker und Physiker.

<sup>2</sup> JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE, \* 25. Januar 1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia, † 10. April 1813 in Paris. Italienischer Mathematiker und Astronom.

<sup>3</sup> JACQUES ANTOINE CHARLES BRESSE, \* 9. Oktober in Vienne, † 22. Mai 1883 in Paris. Französischer Ingenieur und Mathematiker.

<sup>4</sup> STEPAN PROKOPOWYTSCH TYMOSCHENKO, \* 23. Dezember 1878 in Schpotiwka bei Poltawa, Ukraine, † 29. Mai 1972 in Wuppertal-Elberfeld. Pionier der angewandten Mechanik.

<sup>5</sup> LEONHARD EULER, \* 15. April 1707 in Basel, † 18. September 1783 in Sankt Petersburg. Schweizer Mathematiker; wird als einer der bedeutendsten gesehen.

<sup>6</sup> JAKOB I. BERNOULLI, \* 6. Januar 1655 in Basel, † 16. August 1705 ebd.. Schweizer Mathematiker und Physiker; Onkel von DANIEL BERNOULLI.

Dabei handelt es sich um Transversalwellen als Verschiebungen quer zur Balkenachse infolge von Biegemomenten und Querkräften unter Trägheitseinfluß [54]. Aus Gründen der Einfachheit werden hier alle thermischen und hygrothermalen Effekte (Einfluss der Temperatur und Feuchte) vernachlässigt. Diese können jedoch v. a. beim Einsatz geschichteter Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen relevant sein.

## 8.1 Eigenschaften des Balkens als mechanisches Tragwerk

Balken sind Tragwerke, bei denen die Abmessung in eine Dimension (Längsrichtung, meist  $x$ -Richtung) gegenüber den beiden dazu senkrechten Querschnittsdimensionen ( $y$ -Richtung aus der Ebene heraus und  $z$ -Richtung nach unten) dominiert. Die Balkenachse  $z = 0$  ist die ursprünglich gerade Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte [154]. Aus diesem Grund zählen Balken zu den Linientragwerken [53]. Bezüglich der sog. neutralen Faser sind Biegung und Verzerrung voneinander entkoppelt. Die Schnittgrößen eines Balkens sind im allgemeinen Querkräfte in  $z$ -Richtung  $Q_z$ , Längs- oder Normalkräfte in  $x$ -Richtung  $N_x$  und Biegemomente um die  $y$ -Achse  $M_y$ . Sie werden durch die Belastungen in Richtung der Balkenachse  $p_x$  und senkrecht dazu  $q_z$  hervorgerufen. Die zugehörigen Differentialgleichungen der Biegung und den dazugehörigen Biegeschwingungen werden unter verschiedenen vereinfachenden Voraussetzungen hergeleitet [154]. Dabei ist das Ziel der differentiellen Beschreibung der Deformation des Balkens durch die Biegelinie  $w$  (auch elastische Linie oder Elastika) der Balkenachse  $x = [0; L]$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , die, neben den physikalischen Parametern der Dichte  $\rho$  und der Steifigkeit  $E$  bzw.  $G$  sowie den geometrischen Parametern der Querschnittsfläche  $A$  bzw. des Flächenträgheitsmomentes 2. Ordnung  $I$ , als Variablen lediglich noch die Verformungen und die entsprechenden Belastungen enthält.

Während die Beanspruchungen im Balken bei statischer bzw. quasi-statischer Belastung lediglich vom Ort  $x$  abhängig sind, sind die Beanspruchungen beim transversalschwingenden Balken von Ort  $x$  und Zeit  $t$  abhängig. Balkenschwingungen können als linear schwingendes kontinuierliches mechanisches System behandelt werden [58]. Im Gegensatz zu diskreten Systemen sind die für die Schwingungen maßgeblichen physikalischen Größen, wie z. B. Masse und Steifigkeit, kontinuierlich verteilt. Sie besitzen unendlich viele Freiheitsgrade wobei unendlich viele Eigenkreisfrequenzen bzw. Eigenfrequenzen und Eigenformen auftreten. Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme werden durch partielle Differentialgleichungen beschrieben [53].

### Anmerkung zu Bezeichnung und Indizierung

Die Bezeichnung und Indizierung von Größen bei der Beschreibung von Tragwerken in der technischen Mechanik hängt von der Art des Tragwerks ab. Dabei ist hier die Anwendung auf Linientragwerke und Flächentragwerke relevant.

Bei der mechanischen Betrachtung von Balken hängen alle ortsabhängigen Größen lediglich von der Position  $x$  auf dem Tragwerk ab. Damit sind Balken sog. eindimensionale Tragwerke oder Linientragwerke. Im Falle von Laminatbalken muss jedoch zur eindeutigen Behandlung zunächst auf die Behandlung als Flächentragwerk zurückgegriffen werden, wie in Kapitel 6 in Abschnitt 6.3 dargestellt. Die mechanische Beschreibung von geschichteten Balken basiert auf der zweidimensionalen Laminattheorie, die um die Dimension der Breite reduziert wird. Die Laminattheorie basiert ihrerseits auf der Plattentheorie, und damit auf der Betrachtung als Flächentragwerk.

Die allgemeine Belastungen  $q$  senkrecht zur Tragwerksebene bzw. Tragwerksachse werden in beiden Fällen mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Die Belastung  $q$  bei Flächentragwerken wird als Flächenlast  $q(x, y)$  bzw.  $q(x, y, t)$  vorausgesetzt, mit  $[q] = \frac{N}{m^2}$ . Bei Linientragwerken wird sie als Linienlast  $q(x)$  bzw.  $q(x, t)$  angenommen, mit  $[q] = \frac{N}{m}$ .

Schnittgrößen und Eigenschaften werden abhängig von der Art des Tragwerks bezeichnet und indiziert. Die Schnittgrößen und Eigenschaften von Flächentragwerken werden in der Literatur

oft mit Kleinbuchstaben angegeben. Die Indizierung erfolgt in diesem Fall nach der Orientierung der hervorrufenden Spannungen. Dies führt auf eine doppelte Indizierung. Sie gibt an erster Stelle die Achse an, zu der das jeweilige Schnittufer senkrecht ist, und an zweiter Stelle die Orientierung der verursachenden Spannungen. Bei Flächentragwerken sind die Schnittgrößen stets längenbezogen. Für Momentenschnittgrößen gilt  $[m] = \frac{Nm}{m}$  und für Kraftschnittgrößen  $[n] = [q] = \frac{N}{m}$ . Die entsprechenden Zusammenhänge für Flächentragwerke sind in Abschnitt 6.3.4 dargestellt. Bei Linientragwerken werden die Schnittgrößen und Eigenschaften meist mit Großbuchstaben angegeben. Sie werden nach der Orientierung der Größe indiziert. Damit lauten die Schnittgrößen im Einzelnen, für die Querkraft in  $z$ -Richtung  $Q_z$ , für die Längs- oder Normalkraft in  $x$ -Richtung  $N_x$  und für das Biegemoment um die  $y$ -Achse  $M_y$ . Die Einheit der Schnittgröße entspricht der Art der Schnittgröße,  $[Q] = [N] = N$  und  $[M] = Nm$ .

In den folgenden Herleitungen der beschreibenden Differentialgleichungen wird aus Gründen der Eindeutigkeit sowie aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Indizierung verzichtet.

In der ausgeführten, transienten Betrachtung treten gleichzeitig Abhängigkeiten vom Ort  $x$  oder von der Zeit  $t$  auf. Zur zusätzlichen Vereinfachung wird auf die Angabe der Abhängigkeiten vom Ort  $x$  oder von der Zeit  $t$  teilweise ebenfalls verzichtet, und lediglich an geeigneter Stelle angegeben. Im Gegensatz zur (quasi-)statischen Betrachtung, bei der gewöhnliche Differentiale  $d$  auftreten, treten im Zuge der transienten Betrachtung partielle Differentiale  $\partial$  auf. Dabei werden die in der Mechanik üblichen Abkürzungen

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = (\cdot)' \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = (\cdot) \dot{\quad} \quad (8.1)$$

für die jeweilige partielle Differentiation nach dem Ort  $x$  bzw. nach der Zeit  $t$  verwendet.

### Einschränkungen im Hinblick auf die Geometrie der Probekörper

Im Hinblick auf die Geometrie der in den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen verwendeten Probekörper, wie in Kapitel 10 in Abschnitt 10.3.2 beschrieben, werden die folgenden Zusammenhänge unter der Vernachlässigung nicht relevanter Größen und Abhängigkeiten dargestellt. Im Einzelnen sind dies:

- Die Breite  $b$  und die Dicke des Tragwerks  $h$  als geometrischen Abmessungen der Querschnittsfläche  $A$  und damit das Flächenträgheitsmoment 2. Ordnung um die  $y$ -Achse  $I = I_y$  als geometrische Parameter werden über die Länge in  $x$ -Richtung als konstant vorausgesetzt,  $A_{(x)} = A = \text{const.}$  und  $I_{(x)} = I_{y(x)} = I = \text{const.}$ .
- Die Dichte  $\rho$  und die Steifigkeit  $E$  bzw.  $G$  als physikalische Parameter werden über die Länge in  $x$ -Richtung als konstant vorausgesetzt,  $\rho_{(x)} = \rho = \text{const.}$  und  $E_{(x)} = E = \text{const.}$ .
- Es treten keine Belastungen  $p = p_x$  und damit Beanspruchungen  $N = N_x$  in Richtung der Balkenachse auf. Sie werden vernachlässigt, und es gilt  $p = p_x = 0$ .
- Außerdem sind die Ausführungen auf gerade bzw. einachsige Biegung beschränkt. Unter dieser Voraussetzung sind die  $y$ -Achse und die  $z$ -Achse Hauptachsen des Querschnitts. Belastungen verursachen als Schnittkräfte lediglich Querkräfte in  $z$ -Richtung  $Q = Q_z$  und Momente um die  $y$ -Achse  $M = M_y$  [51].
- Aufgrund des in Abschnitt 10.4 beschriebenen Versuchsaufbaus wird abschließend stets der Fall des einseitig fest eingespannten Balkens, auch Kragbalken genannt, ausführlich dargestellt. Die Lösungen werden speziell für die Randbedingungen fest-frei ausgeführt.

## 8.2 Homogener isotroper Balken

Besitzt ein Tragwerk die zuvor genannten Eigenschaften, und besteht er aus einem einzigen Material, das zudem keine richtungsabhängigen Eigenschaften besitzt, handelt es sich um einen homo-

genen isotropen Balken. Es werden zunächst die Gleichgewichtsbedingungen, die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen und das Materialgesetz dargestellt. Unter vereinfachenden Voraussetzungen wird das Elastizitätsgesetz für das Biegemoment und das Elastizitätsgesetz der Querkraft ermittelt. Die Berücksichtigung der schubweichen Kinematik führt auf die allgemeinere Theorie nach BRESSE-TIMOSHENKO. Weitere Vereinfachungen zur schubstarrten Kinematik des Balkenquerschnitts liefern die Theorie nach EULER-BERNOULLI. Die Zusammenhänge werden zunächst basierend auf dem NEWTON'schen Grundgesetz und anschließend unter der Anwendung des HAMILTON'schen Prinzips hergeleitet.

### 8.2.1 Gleichgewicht, Verschiebung-Verzerrung, Materialgesetz

Die Gleichgewichtsbedingungen und die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen für ein infinitesimales Balkenelement werden dargestellt. Das zugrunde gelegte Materialgesetz wird angegeben.

#### Gleichgewichtsbedingungen

In Abbildung 8.1 sind Belastungen und Schnittgrößen am infinitesimalen Balkenelement dargestellt. Die Belastungen und die daraus resultierenden Schnittgrößen werden am unverformten infinitesimalen Balkenelement angesetzt, sodass eine geometrisch lineare Theorie folgt [76]. Die infinitesimale Änderung der Koordinate von  $x$  auf  $x + dx$  verursacht die differentiell kleinen Änderungen der Schnittgrößen [154]. Die Belastungen verursachen die Schnittgrößen und rufen so Spannungen im Tragwerk hervor. Terme, die von zweiter oder höherer Ordnung klein sind, werden vernachlässigt.

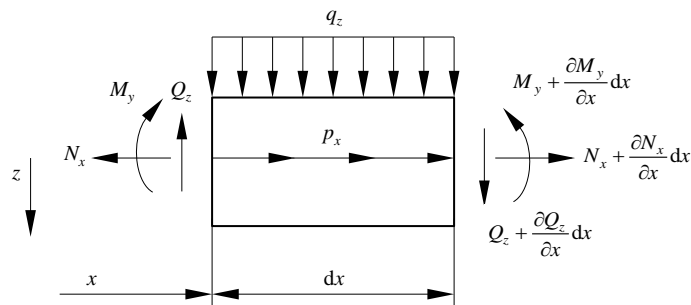


Abbildung 8.1: Belastungen und Schnittgrößen am infinitesimalen Balkenelement.

Das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung betrachtet die entsprechenden Kraftschnittgrößen, und führt auf  $\frac{\partial N}{\partial x} = -p$ . Aufgrund der getroffenen vereinfachenden Voraussetzung  $p = 0$  ist die axiale Gleichgewichtsbedingung hier nicht relevant.

Das Kräftegleichgewicht in  $z$ -Richtung betrachtet die entsprechenden Kraftschnittgrößen, und führt auf

$$\begin{aligned}
 -Q + \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) + q dx &= dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} , \\
 \frac{\partial Q}{\partial x} + q &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} , \\
 Q' + q &= \rho A \ddot{w} , \tag{8.2}
 \end{aligned}$$

wobei  $dF = dm \ddot{w} = \rho A \ddot{w}$  die Massenträgheit des infinitesimalen Balkenelementes ist.

Das Momentengleichgewicht um die  $y$ -Achse betrachtet die entsprechenden Momentenschnitt-

größen, und führt auf

$$\begin{aligned} -M + \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - Q dx &= dJ_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M}{\partial x} - Q &= \rho I_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ M' - Q &= \rho I_y \ddot{\psi}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

wobei  $I_y = I$  das Flächenträgheitsmoment um die  $y$ -Achse und  $dM = dJ_y \ddot{\psi} = \rho I_y \ddot{\psi}$  die Rotationsträgheit des infinitesimalen Balkenelements um die  $y$ -Achse ist.

Bei (quasi-)statischer Betrachtung werden die Trägheitsterme in den Gleichungen (8.2) und (8.3) vernachlässigt. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen der Kraftschnittgrößen und Momentenschnittgrößen am infinitesimalen Balkenelement lauten damit [51], [154]

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} = -q \quad \text{und} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -q \quad \text{und kurz} \\ Q' = -q \quad \text{und} \quad M' = Q \quad \text{bzw.} \quad M'' = Q' = -q. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Dabei ist das Biegemoment  $M$  die resultierende Reaktion der über den Querschnitt verteilten Normalspannungen  $\sigma$  und die Querkraft  $Q$  die resultierende Reaktion der über den Querschnitt verteilten Schubspannungen  $\tau$ . Sie ergeben sich zu [51]

$$M = \int_A z \sigma dA \quad \text{und} \quad Q = \int_A \tau dA. \quad (8.5)$$

Die Normalkraft  $N = \int_A \sigma dA$  ist die resultierende Reaktion aufgrund der Belastungen  $p$ , die jedoch im weiteren Verlauf vernachlässigt wird.

### Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen

Mit den Verschiebungen  $u$  in  $x$ -Richtung und  $w$  in  $z$ -Richtung gilt

$$\varepsilon_x = \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = u' \quad \text{und} \quad \gamma_{xz} = \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w' + \psi. \quad (8.6)$$

Der Zusammenhang in Gleichung (8.6) folgt aus der getroffenen Voraussetzung einer geraden bzw. einachsigen Biegung. Im Detail reduzieren sich die Gleichungen (4.15) und (4.16) auf den eindimensionalen Fall. Deshalb kann zunächst auf die Indizes verzichtet werden. Die Verzerrung  $\varepsilon$  und die Gleitung  $\gamma$  entsprechen der Deformation eines beliebigen Balkenelements  $dx dz$ .

### Materialgesetz

Der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen  $\varepsilon$  und den Normalspannungen  $\sigma$  sowie zwischen den Gleitungen  $\gamma$  und den Schubspannungen  $\tau$  ist bei homogenem isotropem Material durch die Elastizitätsgesetze

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{und} \quad \tau = G \gamma \quad (8.7)$$

gegeben. Sie beschreiben linear elastisches Materialgesetz nach HOOKE. Auch hier ergibt sich Gleichung (8.7) im Detail aus der Reduktion der Gleichung (4.9) auf den eindimensionalen Fall. Dabei ist das Schubmodul  $G$  kein unabhängiger Werkstoffkennwert. Bei homogenen isotropen Werkstoffen sind der Schubmodul  $G$  und der Elastizitätsmodul  $E$  mit der Querverformungszahl  $\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{quer}}}{\varepsilon_{\text{längs}}}$ , wie in Gleichung (4.4) definiert, gekoppelt, und es gilt  $E = 2(1 + \nu) G$  bzw.  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ , wie in Gleichung (4.5) angegeben.

### Vereinfachende Voraussetzungen

Die angegebenen Gleichungen lassen zunächst keine eindeutige Ermittlung der Spannungen und der Verschiebungen zu. Dafür werden sinnvoll zwei Annahmen über die Verschiebung der Punkte eines Balkenquerschnitts an beliebiger Stelle  $x$  getroffen:

- Die Verschiebungen  $w$  in  $z$ -Richtung sind unabhängig von  $z$ . Sie hängen lediglich von  $x$  ab,  $w = w_{(x)}$ . Alle Punkte eines Querschnitts erfahren die gleiche Durchbiegung. Dabei ändert sich die Balkenhöhe nicht,  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ .
- Querschnitte, die vor der Deformation eben waren, sind auch im deformierten Zustand eben. Ein Querschnitt erfährt neben der Durchbiegung  $w$  eine reine Drehung  $\psi = \psi_{(x)}$ . Für einen Punkt mit beliebigem Abstand  $z$  von der Balkenachse wird die Verschiebung  $u$  in  $x$ -Richtung zu  $u = \psi z$  bzw.  $u_{(x,z)} = \psi_{(x)} z$ .

### Elastizitätsgesetz der Biegung und Elastizitätsgesetz der Querkraft

Die zuvor getroffenen Annahmen in Gleichung (8.7) eingesetzt liefern mit der Abkürzung  $\frac{d(\ )}{dx} = (\ )'$

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \psi' z , \quad (8.8)$$

$$\tau = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G (w' + \psi) , \quad (8.9)$$

mit  $w'$  als Neigung der deformierten Balkenachse. Da  $|w'| \ll 1$ , wird der Neigungswinkel mit  $\alpha = w'$  angenähert. Mit Gleichung (8.8) folgt aus (8.5) für das Moment

$$M = E \psi' \int z^2 dA \quad (8.10)$$

und für die Normalkraft  $N = E \psi' \int z dA$ , die jedoch aufgrund der Wahl des Koordinatensystems mit der  $y$ -Achse als Schwereachse und dem Koordinatenursprung des  $y$ - $z$ -Koordinatensystems als Schwerpunkt des Querschnitts verschwindet. Mit dem Flächenträgheitsmoment

$$I = I_y = \int z^2 dA \quad (8.11)$$

wird Gleichung (8.10) zu

$$M = EI \psi' . \quad (8.12)$$

Gleichung (8.12) ist das Elastizitätsgesetz für das Biegemoment, wobei der Proportionalitätsfaktor  $EI$  als Biegesteifigkeit bezeichnet wird. Dabei ist die Änderung  $d\psi$  über die Länge  $dx$  proportional zum wirkenden Moment  $M$ .

Gleichung (8.9) liefert eine über die Querschnittsfläche konstante Schubspannung  $\tau$ , als Folge der vereinfachend getroffenen Annahmen. Dies trifft in der Realität jedoch nicht zu. Die Schubspannung  $\tau$  ist über die Querschnittsfläche veränderlich und am oberen und unteren Rand  $z = \pm \frac{h}{2}$  Null,  $\tau_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$ , was sich anhand des Satzes über die Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen begründen lässt [51]. Die veränderliche Verteilung der Schubspannungen  $\tau_{(z)}$  wird durch einen Korrekturfaktor berücksichtigt, sodass mit Gleichung (8.9) aus Gleichung (8.5) für die Querkraft mit dem sog. Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} Q &= \kappa G A (w' + \psi) , \\ Q &= G A_S (w' + \psi) . \end{aligned} \quad (8.13)$$

Dabei wird die Abkürzung  $A_S = \kappa A$  als sog. Schubfläche bezeichnet. Unter der Wirkung der

Querkraft  $Q$  erfährt das Balkenelement eine Schubverzerrung bzw. Gleitung ( $w' + \psi$ ). Gleichung (8.13) ist das Elastizitätsgesetz für die Querkraft.

Der Schubfaktor oder Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  berücksichtigt die ungleichförmige Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt, sodass

$$A_S = \kappa A \quad \text{mit} \quad \kappa < 1 \quad \text{und damit} \quad A_S < A \quad (8.14)$$

gilt [1], [53]. Der Faktor  $\kappa$  hängt dabei von der Form des Querschnitts ab. Für die relevanten, rechteckförmigen Querschnitte gilt  $\kappa = \frac{5}{6}$  (vgl. auch Abschnitt 8.4).

### 8.2.2 Schubdeformationstheorie erster Ordnung nach TIMOSHENKO

Die Schubdeformationstheorie erster Ordnung für Balken nach TIMOSHENKO berücksichtigt neben der reinen Biegung die Rotationsträgheit des Balkenquerschnitts sowie den Einfluss der Schubdeformation infolge von Querkraften. Die zugehörige Theorie wird meist nach TIMOSHENKO (1878-1972) benannt, der 1922 dazu veröffentlicht hat. Die vollständigen Differentialgleichungen sind jedoch bereits 1859 von BRESSE in seinem Lehrbuch angegeben worden, wie in HAGEDORN 1989 angegeben [58]. Die Theorie führt zu einer realitätsnahen mathematischen Beschreibung der Biegeschwingungen von Balken.

#### Kinematik des TIMOSHENKO-Balkens

Die Formulierung der Differentialgleichung geschieht durch die Berücksichtigung der Rotationsträgheit des Querschnitts,  $\rho I$ , sowie durch die Voraussetzung eines schubweichen Querschnitts,  $GA_S$ . Die Voraussetzung der Schubweichheit als TIMOSHENKO-Kinematik, wie in Abbildung 8.2 dargestellt, führt schließlich auf die sog. Schubdeformationstheorie erster Ordnung. Die TIMOSHENKO-Hypothese setzt voraus, dass vor der Deformation zur Balkenachse senkrechte Querschnittsebenen auch nach der Deformation eben sind, d. h. keine Verwölbung erleiden, sich jedoch in Richtung der Balkenachse (in  $x$ -Richtung) und senkrecht dazu in Dickenrichtung (in  $z$ -Richtung) verschieben können, sowie um die Dimension der Breite (um die  $y$ -Achse) verdrehen können, ( $w' + \psi$ )  $\neq 0$  bei endlich großer Querkraft  $Q$  [2]. Der Querschnitt hat damit den kinematischen Freiheitsgrad 3 [1].

Dabei setzt sich die Verschiebung der Mittellinie  $w = w(x,t)$  im vorliegenden Fall aus den Anteilen der Biegung und der Verformung durch Querkraft zusammen. Dabei wird der Winkel der Drehung der Querschnitte aufgrund der Biegeverformung mit  $\psi$  bezeichnet. Die Neigung aufgrund der Schubverformung  $w' - \psi$  ist die Differenz der gesamten Neigung des Querschnitts  $w'$  und dem Anteil der Biegeverformung  $\psi$ . Abbildung 8.2 zeigt die Kinematik des TIMOSHENKO-Balkens.

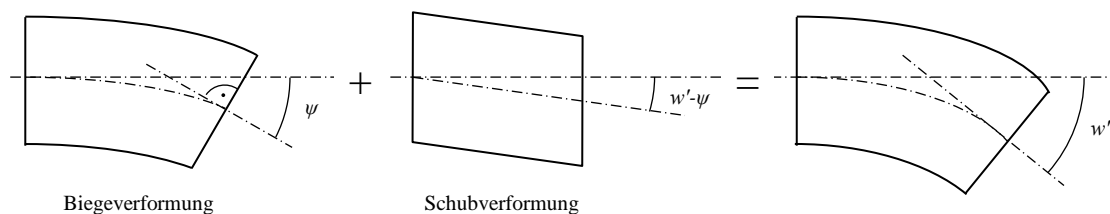


Abbildung 8.2: Kinematik des TIMOSHENKO-Balkens.

Die Differentialgleichungen der Kinematik des Biegebalkens mit Schubanteil lauten ausführlich [87] (vgl. auch erste Gleichung (6.46))

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} - z \frac{\partial \psi_y(x)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \psi_y(x) = -\frac{\partial w(x)}{\partial x} + \gamma_{xz}(x) \quad \text{bzw. kurz}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} = u' - z \psi' \quad \text{und} \quad \psi = -\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma = -w' + \gamma . \quad (8.15)$$

Es sind somit eine Verzerrung und eine Gleitung von Null verschieden [1].

### NEWTON'sches Prinzip

Mit den Gleichungen (8.2), (8.3), (8.12) und (8.13) stehen vier Differentialgleichungen zur Bestimmung der vier unbekanntenen Größen  $M$ ,  $Q$ ,  $w$  und  $\psi$  zur Verfügung.

Die beiden Elastizitätsgesetze (8.12) und (8.13) werden in die beiden statischen Gleichgewichtsbedingungen (8.2) und (8.3) eingesetzt. Im Einzelnen wird dafür die Differentiation des Elastizitätsgesetzes der Querkraft (8.13) nach  $x$  in das Gleichgewicht (8.2) eingesetzt. Die Differentiation des Elastizitätsgesetzes des Biegemoments (8.12) nach  $x$  und das Elastizitätsgesetz der Querkraft (8.13) wird in den Drallsatz (8.3) eingesetzt. Das Vorgehen liefert

$$\varrho A \ddot{w} - [G A_S (w' + \psi)]' = q , \quad (8.16)$$

$$\varrho I \ddot{\psi} - [E I \psi']' + G A_S (w' + \psi) = 0 . \quad (8.17)$$

In den beiden Gleichungen (8.16) und (8.17) sind die Schnittgrößen  $M$  und  $Q$  eliminiert. Die beiden Gleichungen sind zwei gekoppelte, partielle, transiente, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, von denen die erste inhomogen und die zweite homogen ist.

Unter den vorher genannten vereinfachenden Einschränkungen im Hinblick auf die geometrischen und physikalischen Parameter ( $A = \text{const.}$ ,  $I = \text{const.}$ ,  $\varrho = \text{const.}$ ,  $E = \text{const.}$ ,  $G = \text{const.}$ ,  $\kappa = \text{const.}$  [54]) und der im weiteren Verlauf experimentell strukturdynamisch untersuchten Probekörper lassen sich die Gleichungen (8.16) und (8.17) weiter vereinfachen und schließlich entkoppeln. Dazu wird im Elastizitätsgesetz des Biegemoments (8.12) und der Querkraft (8.13) nacheinander das Biegemoment  $M$ , der Term  $(w' + \psi)$  und die Querkraft  $Q$  durch Differentiation und sinnvolle Ergänzung eliminiert.

Das detaillierte Vorgehen zur Entkopplung der beiden gekoppelten Differentialgleichungen (8.16) und (8.17) setzt sich aus folgenden Einzelschritten zusammen:

- Die Gleichung (8.12) wird mit  $E I w''$  und die Gleichung (8.3) mit  $\varrho I \ddot{w}'$  ergänzt. Umstellen und Ausklammern von  $E I$  bzw.  $\varrho I$  ermöglicht das Ausklammern des Terms der Schubverzerrung  $(w' + \psi)$ . Umgestellt ergeben sich

$$M = E I (w' + \psi)' - E I w'' , \quad (8.18)$$

$$\varrho I (w' + \psi)'' - \varrho I \ddot{w}' - M' + Q = 0 . \quad (8.19)$$

- Zweimalige Differentiation von Gleichung (8.18) nach  $x$  und Auflösen nach  $M''$  liefert

$$M'' = E I (w' + \psi)''' - E I w^{IV} . \quad (8.20)$$

und die Differentiation von Gleichung (8.19) nach  $x$  liefert

$$\varrho I (w' + \psi)''' - \varrho I \ddot{w}'' - M'' + Q' = 0 . \quad (8.21)$$

- Gleichung (8.20) wird in Gleichung (8.21) eingesetzt, sodass

$$\varrho I (w' + \psi)''' - \varrho I \ddot{w}'' - E I (w' + \psi)''' + E I w^{IV} + Q' = 0 . \quad (8.22)$$

als entkoppelte Differentialgleichung folgt.



- Zur Elimination des Terms der Schubverzerrung ( $w' + \psi$ ) wird das Elastizitätsgesetz der Querkraft (8.13) in der Form  $(w' + \psi) = \frac{Q}{G A_S}$  in Gleichung (8.22) eingesetzt. Zur Elimination der verbliebenen Terme der Ableitung der Querkraft nach dem Ort  $Q'$  wird schließlich das Gleichgewicht (8.2) in der Form  $Q' = \varrho A \ddot{w} - q$  eingesetzt.

Ausmultiplizieren und Umformen liefert

$$E I w^{IV} + \varrho A \ddot{w} - \varrho I \left( 1 + \frac{E A}{G A_S} \right) \ddot{w}'' + \varrho A \frac{\varrho I}{G A_S} \ddot{\ddot{w}} = q + \frac{\varrho I}{G A_S} \ddot{q} - \frac{E I}{G A_S} q'' \quad (8.23)$$

als entkoppelte, partielle, transiente, lineare, inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Gleichung (8.24) beschreibt die Transversalschwingungen des schubbelastischen TIMOSHENKO-Balkens. Sie enthält die physikalischen und geometrischen Parameter, sowie als Variablen lediglich noch die Durchbiegung  $w = w(x,t)$  und die senkrechte Belastung  $q = q(x,t)$ . Für freie Schwingungen von Balken mit konstantem Querschnitt gilt  $q = q(x,t) = 0$  und die Differentialgleichung (8.23) wird zur homogenen Differentialgleichung

$$E I w^{IV} + \varrho A \ddot{w} - \varrho I \left( 1 + \frac{E A}{G A_S} \right) \ddot{w}'' + \varrho A \frac{\varrho I}{G A_S} \ddot{\ddot{w}} = 0 . \quad (8.24)$$

Die Differentialgleichungen des TIMOSHENKO-Balkens enthalten neben der vierten Ableitung von  $w = w(x,t)$  nach dem Ort  $x$  und nach der Zeit  $t$  getrennt voneinander auch gemischte Ableitungen nach Ort  $x$  und Zeit  $t$ .

Die Entkopplung der beiden Differentialgleichungen (8.16) und (8.17) zu (8.23) bzw. (8.24) erhöht die Kontinuitätsanforderungen an die Durchbiegung  $w = w(x,t)$ . Im Falle einer numerischen Lösung würde die Elimination des Verdrehwinkels  $\psi = \psi(x,t)$  deshalb nicht durchgeführt [54].

### HAMILTON'sches Prinzip

Die Bewegungsgleichungen des schubbelastischen Balkens werden zusätzlich nach dem Hamilton'schen Prinzip, wie beispielsweise in HAGEDORN 1989 [58] ausgeführt, hergeleitet.

Die potentielle Energie (Formänderungsenergie) ist in diesem Fall

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l E I \psi'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l G A_S (\psi - w')^2 dx . \quad (8.25)$$

Der Ausdruck der potentiellen Energie der Scherung ist um den von der Krümmung der Balkenachse durch Biegemomente hervorgerufenen Anteil  $\psi$  auf  $(\psi - w')$  zu korrigieren.

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \varrho A \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \varrho I \dot{\psi}^2 dx , \quad (8.26)$$

und setzt sich zusammen aus der translatorischen Trägheit der Balkenachse in  $z$ -Richtung und dem rotatorischen Anteil des Querschnitts um die  $y$ -Achse.

Mit der LAGRANGE'schen Funktion  $L = T - U$  und unter der Voraussetzung, dass lediglich eine Streckenlast  $q = q(x,t)$  und keine davon unabhängigen Momente den Balken belasten, ergibt sich nach dem HAMILTON'schen Prinzip für den frei schwingenden Balken

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x=0}^l \frac{1}{2} \left[ \varrho A \dot{w}^2 + \varrho I \dot{\psi}^2 - E I \psi'^2 - G A_S (\psi - w')^2 \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x=0}^l q \delta w dx dt = 0 . \quad (8.27)$$

Die Variation der potentiellen Energie  $U$  ergibt sich nach zweimaliger Teilintegration zu

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{x=0}^l E I \psi' \delta \psi' dx + \int_{x=0}^l G A_S (\psi - w') \delta (\psi - w') dx = \\ &= \int_{x=0}^l \left\{ [G A_S (\psi - w')] \delta w + [G A_S (\psi - w') - (E I \psi')'] \delta \psi \right\} dx - \\ &\quad - G A_S (\psi - w') \delta w \Big|_0^l + [E I \psi'] \delta \psi \Big|_0^l . \end{aligned} \quad (8.28)$$

Die Variation der kinetischen Energie ist

$$\delta T = \int_0^l [\varrho A \dot{w} \delta \dot{w} + \varrho I \dot{\psi} \delta \dot{\psi}] dx \quad (8.29)$$

und daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{x=0}^l \left\{ \varrho A \dot{w} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \varrho A \ddot{w} \delta w dt + \varrho I \dot{\psi} \delta \psi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \varrho I \ddot{\psi} \delta \psi dt \right\} dx . \quad (8.30)$$

Im HAMILTON'schen Prinzip verschwinden die Variationen der verallgemeinerten Koordinaten  $\delta w = \delta w_{(x,t)}$  und  $\delta \psi = \delta \psi_{(x,t)}$  für  $t_1$  und  $t_2$ , und (8.30) wird zu

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{x=0}^l \varrho A \ddot{w} \delta w dx + \int_{x=0}^l \varrho I \ddot{\psi} \delta \psi dx \right\} dt . \quad (8.31)$$

Damit führt das HAMILTON'sche Prinzip  $L = T - U$  schließlich auf

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{x=0}^l \left[ - [G A_S (\psi - w')] - \varrho A \ddot{w} + q \right] \delta w dx + \right. \\ \left. + \int_{x=0}^l \left[ -\varrho I \ddot{\psi} - G A_S (\psi - w') + [E I \psi']' \right] \delta \psi dx + \right. \\ \left. + G A_S (\psi - w') \delta w \Big|_{x=0}^l - E I \psi' \delta \psi \Big|_{x=0}^l \right\} dt = 0 . \end{aligned} \quad (8.32)$$

Die Bewegungsgleichungen des schubweichen Balkens nach TIMOSHENKO ergeben sich wie im vorherigen Abschnitt zu den gekoppelten Differentialgleichungen (8.16) und (8.17).

### 8.2.3 Schubstarre Theorie nach EULER-BERNOULLI

Die schubstarre Theorie für Balken nach LEONHARD EULER (1707-1783), der v.a. Untersuchungen zur elastischen Linie und zum Knicken anstellte [58], und JAKOB BERNOULLI (1655-1705), der den Zusammenhang zwischen Belastung und Biegung untersuchte [58], basiert auf weiteren vereinfachenden Voraussetzungen. Durch Vernachlässigung der Rotationsträgheit des Balkenquerschnitts sowie des Einflusses der Schubdeformation infolge von Querkraften wird in diesem Fall lediglich die reine Biegung berücksichtigt. Die zugehörige Theorie wird meist EULER-BERNOULLI oder kurz BERNOULLI-Theorie genannt. Die z.T. stark vereinfachten Differentialgleichungen beschreiben die Biegeschwingungen von Balken weniger realitätsnah, sind jedoch mathematisch einfacher zu behandeln.

### Kinematik des BERNOULLI-Balkens

Die Vereinfachung der Differentialgleichung geschieht durch die Vernachlässigung der Rotationssträgheit des Querschnitts,  $\rho I \rightarrow 0$ , sowie durch die Voraussetzung eines schubstarreren Querschnitts,  $G A_S \rightarrow \infty$ . Die Voraussetzung der Schubstarrheit führt auf die sog. Normalenhypothese bzw. die sich daraus ableitende BERNOULLI-Kinematik. Die sog. BERNOULLI-Hypothese setzt voraus, dass vor der Deformation zur Balkenachse senkrechte Querschnittsebenen auch nach der Deformation eben sind, d. h. keine Verwölbung erleiden und zur elastischen Linie senkrecht stehen,  $(w' + \psi) = 0$  bzw.  $w' = -\psi$  bei endlich großer Querkraft  $Q$  [51], [70], [154]. Aus den, in Abbildung 8.3 dargestellten, vereinfachten Zusammenhängen ergibt sich die Kinematik des BERNOULLI-Balkens.

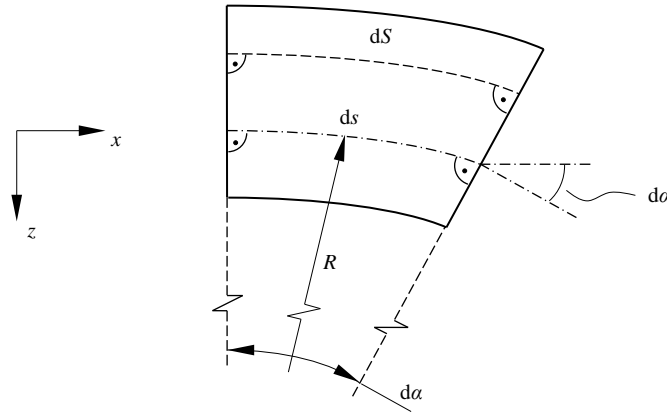


Abbildung 8.3: Kinematik des BERNOULLI-Balkens.

Unter der Voraussetzung kleiner Durchbiegungen ist die Neigung der Balkenachse  $\sin \alpha = \frac{dw}{dx} = w'_{(x)} = w'$  klein. Das erlaubt die Vernachlässigung des Quadrats der Neigung im Ausdruck der Krümmung der Balkenachse,  $w'_{(x)} \ll 1$  bzw.  $w' \ll 1$ . Die Krümmung der Balkenachse ergibt sich somit zu [51], [155]

$$\frac{1}{R} = \frac{w''}{\pm [1 + w'^2]^{3/2}} \approx w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} . \quad (8.33)$$

Jede Faser wird als konzentrischer Kreisbogen betrachtet. Mit dem Krümmungsradius  $R$  folgt für die Länge einer beliebigen Faser

$$\begin{aligned} dS &= (R + z) d\alpha = R d\alpha + z d\alpha \\ &= ds + z d\alpha . \end{aligned}$$

Die Verzerrung ist die relative Längenänderung bezogen auf die ursprüngliche Länge bzw. auf die längenkonstant angenommene neutrale Faser. Mit dem linearisierten Zusammenhang von Krümmungsradius und Winkel (8.33) gilt

$$\varepsilon = \frac{dS - ds}{ds} = z \frac{d\alpha}{ds} = \frac{z}{R} = w'' z = -\kappa z . \quad (8.34)$$

### NEWTON'sches Prinzip

Aus den getroffenen Voraussetzungen folgen die vier vereinfachten Balkengleichungen zu

$$\rho A \ddot{w} = Q' + q , \quad M' = Q , \quad EI \psi' = M , \quad w' = -\psi . \quad (8.35)$$

Die Differentiation der letzten Gleichung, die als Elastizitätsgesetz der Querkraft die Schubstarrheit des Balkens beschreibt, nach  $x$  und Einsetzen in die dritte Gleichung, die das Elastizitätsgesetz für das Biegemoment beschreibt, folgt die Differentialgleichung der Biegelinie zu

$$w'' = -\frac{M}{EI}. \quad (8.36)$$

Wenn der Verlauf des Biegemoments über die Länge  $L$  sowie die Biegesteifigkeit  $EI$  bekannt sind, ermöglicht Gleichung (8.36) durch einfache Integration die Berechnung der Neigung  $w'$  und durch nochmalige Integration die Berechnung der Durchbiegung oder Biegelinie  $w$ .

Unter der Berücksichtigung des Ausdrucks der Krümmung nach Gleichung (8.33), der unter der Voraussetzung kleiner Durchbiegungen näherungsweise gilt [51], [155], ist nach der Gleichung (8.36) die Krümmung des Balkens proportional zum Moment und es gilt  $\kappa < 0$  für  $M > 0$  bzw.  $\kappa > 0$  für  $M < 0$ , vgl. Gleichung (8.34).

Weiteres Einsetzen der ersten beiden Gleichungen von (8.35) (Schwerpunktsatz und Drallsatz, ggf. durch vorhergegangene Differentiation nach  $x$ ) ermöglicht die Elimination zunächst von  $M$  und anschließend von  $Q$ . Es folgt die Differentialgleichung der Biegelinie als Bewegungsgleichung zu

$$(EI w'')'' + \rho A \ddot{w} = q, \quad (8.37)$$

die unter der Voraussetzung von  $EI = \text{const.}$  zu

$$EI w^{IV} + \rho A \ddot{w} = q \quad (8.38)$$

wird. Die Gleichung (8.37) bzw. (8.38) ist eine partielle, transiente, lineare, inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie beschreibt die Transversalschwingungen des schubstarrten EULER-BERNOULLI-Balkens. Für freie Schwingungen von Balken mit konstantem Querschnitt gilt  $q = q(x,t) = 0$  und die Differentialgleichung (8.38) wird zur homogenen Differentialgleichung

$$EI w^{IV} + \rho A \ddot{w} = 0. \quad (8.39)$$

Die Differentialgleichungen nach BERNOULLI enthalten lediglich eine vierte Ableitungen nach dem Ort  $x$  und eine zweite Ableitung nach der Zeit  $t$ , wobei beide davon jeweils getrennt voneinander auftreten. Damit werden durch die Differentialgleichung lediglich die Durchbiegungen der Balkenquerschnitte linear berücksichtigt und die Verschiebung der Mittellinie  $w$  wird lediglich durch die Biegung angenommen. Die Neigung des Querschnitts  $\psi$  aufgrund der endlichen Querkraft  $Q$ , sowie die Rotationsträgheit der Balkenquerschnitte werden vernachlässigt.

Wenn der Verlauf der Belastung  $q = q(x)$  über die Länge  $L$  sowie die Biegesteifigkeit  $EI$  bekannt sind, ermöglicht Gleichung (8.39) durch vierfache Integration die Berechnung der Durchbiegung oder Biegelinie  $w = w(x)$ .

### HAMILTON'sches Prinzip

Die Bewegungsgleichungen des schubstarrten Balkens werden zusätzlich nach dem HAMILTON'schen Prinzip hergeleitet. Die Ausführung findet sich analog beispielsweise in HAGEDORN 1989 [58].

In der linearen Theorie und bei gerader Biegung beim frei schwingenden schubstarrten Balken der Länge  $l$  ist die potentiellen Energie  $U$  als Energie der elastischen Verformung

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l EI w''^2 dx. \quad (8.40)$$

Die kinetische Energie wird beschrieben durch

$$T = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \varrho A \dot{w}^2 dx \quad (8.41)$$

Mit der LAGRANGE'schen Funktion  $L = T - U$  ergibt sich nach dem HAMILTON'schen Prinzip für den frei schwingenden Balken

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x=0}^l \frac{1}{2} [\varrho A \dot{w}^2 - E I w''^2] dx dt = 0 . \quad (8.42)$$

Unter Vertauschung der Reihenfolge der Integrale führen Teilintegrationen zur entsprechenden Differentialgleichung. Dazu wird in (8.42) zunächst bezüglich  $t$  einmalig partiell im ersten Integral integriert,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \varrho A \dot{w}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \varrho A \dot{w} \delta \dot{w} dt = \varrho A \dot{w} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \varrho A \ddot{w} \delta w dt , \quad (8.43)$$

anschließend wird bezüglich  $x$  zweimalig partiell im zweiten Integral integriert,

$$\begin{aligned} \delta \int_{x=0}^l \frac{1}{2} E I w''^2 dx &= \int_{x=0}^l E I w'' \delta w'' dx = \\ &= E I w'' \delta w' \Big|_0^l - \int_{x=0}^l (E I w'')' \delta w' dx = \\ &= E I w'' \delta w' \Big|_0^l - (E I w'')' \delta w \Big|_0^l + \int_{x=0}^l (E I w'')'' \delta w dx . \end{aligned} \quad (8.44)$$

Die Variationen  $\delta w$  für  $t_1$  und  $t_2$  verschwinden im HAMILTON'schen Prinzip. Die Ausdrücke (8.43) und (8.44) in die Ausgangsgleichung (8.42) eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{x=0}^l [-\varrho A \ddot{w} - (E I w'')''] \delta w dx - \right. \\ &\quad \left. - E I w'' \delta w' \Big|_0^l + (E I w'')' \delta w \Big|_0^l \right\} dt = 0 . \end{aligned} \quad (8.45)$$

Die Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  sind beliebig. Dadurch verschwindet der Ausdruck in der geschweiften Klammer von (8.45) für alle  $t$ . Der Fundamentalsatz der Variationsrechnung verlangt, dass die eckige Klammer in (8.45) gleich Null sein muss. Für die beliebige Variation  $\delta w$  sind höchstens die Randwerte definiert und es gilt die Bewegungsgleichung analog zu Gleichung (8.39).

### 8.2.4 Lösung durch Separationsansatz

Zur Lösung der Differentialgleichungen des transversalschwingenden Balkens nach BERNOULLI (8.37) wird üblicherweise der sog. Separations- oder Produktansatz nach DANIEL BERNOULLI<sup>7</sup> (1700-1782) angewendet. Der partikuläre Ansatz ermöglicht die Separation der Variablen in rein ortsabhängige und rein transiente Gleichungen. Der Ansatz beschreibt eine Bewegung, bei der sich alle Punkte des Kontinuums nach dem gleichen Zeitgesetz (synchron) bewegen. Im

<sup>7</sup> DANIEL BERNOULLI, \* 8. Februar 1700 in Groningen, † 17. März 1782 in Basel. Schweizer Mathematiker und Physiker; Neffe von JAKOB I. BERNOULLI; arbeitete mit LEONHARD EULER.

Gegensatz zur D'ALEMBERT<sup>8</sup>'schen Lösung durch Integration, der Wellen beschreibt und auf eine allgemeine Lösung führt, werden mit der BERNOULLI'schen Lösung direkt Schwingungen beschrieben, die auf partikuläre Lösungen führt [53].

Die Beschreibung der freien ungedämpften Schwingungen des Balkens ist ein Eigenwertproblem. Es wird durch die homogene Differentialgleichung der elastischen Linie des Balkens entsprechend der jeweiligen Theorien beschrieben, da für die von außen aufgebrachte Belastung  $q = q(x,t) = 0$  gilt. Zur Lösung müssen außerdem die zugehörigen Randbedingungen bekannt sein. Wenn die gewählten Ansatzfunktionen die Randbedingungen erfüllen, ermöglicht der Separationsansatz die Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen bzw. Eigenfrequenzen sowie der Eigenformen des Tragwerks. Der Produktansatz lautet

$$w_{(x,t)} = W_{(x)} T_{(t)} \quad \text{bzw.} \quad w = W T . \quad (8.46)$$

Er wird zunächst zur Lösung der Differentialgleichungen des transversalschwingenden Balkens zunächst nach EULER-BERNOULLI (8.37) dargestellt. Er ermöglicht die Formulierung der Gleichung in der Art, dass eine Seite lediglich von  $x$  und die andere lediglich von  $t$  abhängt. Für alle  $x$  und  $t$  ist das nur dann möglich, wenn beide Seiten einer Konstanten gleich sind. Es zeigt sich für den weiteren Verlauf günstig, die Konstante mit  $-\omega^2$  zu bezeichnen.

### Eigenkreisfrequenzen sowie Eigenfrequenzen und Eigenformen

Der Produktansatz für Schwingungen kontinuierlicher Systeme (8.46) wird hinsichtlich der Ordnung der Schwingung  $k$  im Index erweitert. Ein kontinuierlichen System hat unendlich viele Freiheitsgrade. Somit besitzt es  $k$  Eigenwerte  $\lambda$ , also  $\lambda_k$ , wobei  $k$  gegen unendlich geht,  $k \rightarrow \infty$ . Jedem Eigenwert  $\lambda$  der Ordnung  $k$  kann eine Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  bzw. eine Eigenfrequenz  $f_k$  mit zugehöriger Eigenform  $W_k$  zugeordnet werden. Aus diesem Grund wird der Separationsansatz (8.46) zum sog. erweiterte Produktansatz

$$w_{k(x,t)} = W_{k(x)} T_{k(t)} \quad \text{bzw.} \quad w_k = W_k T_k . \quad (8.47)$$

modifiziert, wobei bei den Eigenkreisfrequenzen der triviale Fall  $\omega_0 = 0$  für  $k = 0$ , sowie die physikalisch nicht sinnvollen Lösungen  $\omega_k < 0$  für  $k = -1, -2, \dots$  nicht berücksichtigt werden.

Die allgemeine Lösung von gewöhnlichen, homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist im Anhang A.2 exemplarisch nach der Zeit  $t$  dargestellt. Die kleinste Eigenkreisfrequenz ergibt sich für  $k = 1$  zu  $\omega_1$ , und die zugehörige Eigenfrequenz beträgt  $f_1$ . Sie wird als Grundfrequenz bezeichnet. Die zugehörige Eigenform heißt Grundschwingung  $W_{1(x)}$ . Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenformen der Ordnung  $k > 1$  werden als Oberfrequenzen und zugehörigen Oberschwingungen bezeichnet.

Dabei gilt zwischen der Kreisfrequenz  $\omega$ , der Frequenz  $f$  und der Periodendauer bzw. Schwingungsdauer  $T$  allgemein bzw. jeder Ordnung  $k$  der Zusammenhang

$$\omega = 2 \pi f = \frac{2 \pi}{T} \quad \text{bzw.} \quad \omega_k = 2 \pi f_k = \frac{2 \pi}{T_k} . \quad (8.48)$$

Bezüglich der Einheit der Kreisfrequenz gilt  $[\omega] = s^{-1}$ , während für die Frequenz gilt  $[f] = s^{-1} = \text{Hz}$ . Obwohl sich die Dimensionen der beiden Größen  $\omega$  und  $f$  entsprechen,  $[\omega] = [f] = T^{-1}$  lautet die Einheit lediglich bei der Frequenz  $f$  Hz nach HERTZ<sup>9</sup>, nicht jedoch bei der Kreisfrequenz  $\omega$ .

Der erweiterte Produktansatz (8.47) liefert die Eigenwerte  $\lambda_k$  als partikuläre Lösungen, die die Randbedingungen erfüllen [53]. Da die zuvor dargestellten Differentialgleichungen linear bzw.

<sup>8</sup> JEAN-BAPTISTE LE ROND genannt D'ALEMBERT, \* 16. November 1717 in Paris, † 29. Oktober 1783 ebd.. Französischer Mathematiker und Physiker sowie Philosoph der Aufklärung.

<sup>9</sup> HEINRICH RUDOLF HERTZ, \* 22. Februar 1857 in Hamburg, † 1. Januar 1894 in Bonn. Deutscher Physiker mit Arbeiten zum experimentellen Nachweis elektromagnetischer Wellen.

linearisiert sind, stellt die Summe der Eigenschwingungen mit der jeweiligen Eigenfrequenz ebenfalls eine Lösung dar, die den Randbedingungen genügt. Dies ist eine Folgerung aus dem Superpositionsprinzip der Mechanik. Die Überlagerung aller Eigenschwingungsformen mit den zugehörigen Eigenfrequenzen liefert schließlich die allgemeine Lösung

$$w_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} W_{k(x)} T_k(t) \quad \text{bzw.} \quad w = \sum_{k=1}^{\infty} W_k T_k . \quad (8.49)$$

Die Formulierung der allgemeinen Lösung (8.49) stellt die Auslenkung  $W = W_{(x)}$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  als harmonische Schwingung dar. Sie beschreibt für jedes  $k$  eine stehende Welle [167] und kann für alle  $k$  als FOURIER<sup>10</sup>-Reihe interpretiert werden. Da jede beliebige Funktion stets durch eine FOURIER-Reihe dargestellt bzw. angenähert werden kann, ist die BERNOULLI'sche Lösung der Lösung nach D'ALEMBERT äquivalent [53].

Die allgemeine Lösung von gewöhnlichen, homogenen Differentialgleichungen vierter Ordnung ist im Anhang A.2 exemplarisch nach dem Ort  $x$  dargestellt. Sie lautet mit den sich ergebenden vier Konstanten  $C_{ki}$  mit  $i = 1, \dots, 4$  [18], [130]

$$W_{k(x)} = C_{k1} \cos(\lambda x) + C_{k2} \sin(\lambda x) + C_{k3} \sinh(\lambda x) + C_{k4} \cosh(\lambda x) . \quad (8.50)$$

Stellen  $x$  an denen gilt  $W_{k(x)} = 0$  sind Schwingungsknoten oder Knoten. Bei der Eigenform, die in der jeweiligen Eigenfrequenz auftritt, findet an diesen Stellen keine Auslenkung statt. Stellen  $x$  an denen gilt  $W_{k(x)} = \max.$  sind Schwingungsbäuche. Bei der Eigenform, die in der jeweiligen Eigenfrequenz auftritt, findet an diesen Stellen die maximale Auslenkung statt. Entsprechend bildet sich bei Schwingungen in der Grundfrequenz  $\omega_1$  wegen  $k = 1$  die geringste Anzahl von Knoten aus. Bei Oberschwingungen  $\omega_k$  mit  $k > 1$  erhöht sich mit der Ordnung von  $k$  die Anzahl der Schwingungsknoten bzw. Schwingungsbäuche.

Wie bei allen Eigenwertproblemen sind dabei die Amplituden in Betrag und Richtung unbestimmt [70]. Bei schwingenden Systemen ist dabei meist die erste Eigenfrequenz, die sog. Grundfrequenz, mit der zugehörigen ersten Eigenform, der sog. Grundschiwingung, relevant. Sie führen i. a. zu hohen Amplituden und somit zu kritischen Belastungen. Dabei schwingt das Tragwerk in Resonanz und kann so zu katastrophalem Versagen führen [37], [53], [70].

### 8.2.5 Einseitig fest eingespannter Balken

Da die Differentialgleichungen des schubweichen und des schubstarrten Balkens von vierter Ordnung nach dem Ort  $x$  sind, werden zur Lösung vier Randbedingungen benötigt. Sie erlauben die Bestimmung von Integrationskonstanten. Das Einsetzen der Randbedingungen für den relevanten Fall des einseitig fest eingespannten Balkens ermöglicht die Bestimmung der charakteristischen Gleichung. Die charakteristische Gleichung ermöglicht die Bestimmung der Eigenwerte  $\lambda_k$ , mit denen schließlich die Eigenformen  $W_k$  und die Eigenfrequenzen  $\omega_k$  ermittelt werden [53].

#### *Randbedingungen*

Für einen Kragbalken mit einer einseitig festen Einspannung bei  $x = 0$  und freiem Ende und damit Querkraft- und Momentenfreiheit bei  $x = L$  lauten die Randbedingungen an der Einspannung bei  $x = 0$  bzw. am freien Ende bei  $x = L$

$$w_{(0,t)} = 0 \quad \text{und} \quad w'_{(0,t)} = 0 , \quad \text{bzw.} \quad (8.51)$$

<sup>10</sup> JEAN-BAPTISTE-JOSEPH FOURIER, \* 21. März 1768 bei Auxerre, † 16. Mai 1830 in Paris. Französischer Mathematiker und Physiker.

$$M_{(L,t)} = -EI w''_{(L,t)} = 0 \quad \text{und} \quad Q_{(L,t)} = -EI w'''_{(L,t)} = 0. \quad (8.52)$$

wegen  $M_{(x=L)} = 0$  bzw. wegen  $Q_{(x=L)} = M'_{(x=L)} = 0$ . Dabei werden die Randbedingungen, die die Verschiebung  $w_{(x,t)}$  oder die Neigung  $w'_{(x,t)}$  der Mittellinie  $z = 0$  beschreiben, als geometrische (auch wesentliche, kinematische oder DIRICHLET<sup>11</sup>'sche) Randbedingungen bezeichnet. Randbedingungen, die die Kraft- bzw. Schnittgrößen beschreiben, werden als natürliche (auch restliche, statische oder NEUMANN<sup>12</sup>'sche) Randbedingungen bezeichnet [51].

### Charakteristische Gleichung und Eigenwerte

Der Produktansatz (8.46) in die homogene Differentialgleichung (8.38) eingesetzt liefert [53]

$$W^{IV} - \lambda^4 W = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI} = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (8.53)$$

als gewöhnliche homogene Differentialgleichung vierter Ordnung. Aus der Formulierung ergibt sich durch Umstellen die sog. Strukturkonstante des BERNOULLI-Balkens zu  $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$  mit  $[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , und damit keiner Wellenausbreitungskonstante im engeren Sinn [54]. Unter der Bedingung der Existenz nichttrivialer Lösungen  $\lambda \neq 0$  liefern die Randbedingungen (8.51) und (8.52) in die allgemeine Lösung bzw. deren erste bis dritte Ableitung nach dem Ort  $x$  nach Gleichung (8.50) eingesetzt

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 & A + C &= 0 \\ W'_0 &= 0 & \lambda B + \lambda D &= 0 \\ W''_L &= 0 & -\lambda^2 A \cos(\lambda L) - \lambda^2 B \sin(\lambda L) + \lambda^2 C \cosh(\lambda L) + \lambda^2 D \sinh(\lambda L) &= 0 \\ W'''_L &= 0 & \lambda^3 A \sin(\lambda L) - \lambda^3 B \cos(\lambda L) + \lambda^3 C \sinh(\lambda L) + \lambda^3 D \cosh(\lambda L) &= 0. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Dabei sind die Argumente der trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen stets das Produkt aus Eigenwert  $\lambda$  und der Länge  $L$  des Balkens,  $(\lambda L)$ . Aus den ersten beiden Gleichungen von (8.54) folgt  $C = -A$  und  $D = -B$ . Sie werden in den letzten beiden Gleichungen von (8.54) eliminiert, sodass diese lauten

$$\begin{aligned} A [\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L)] + B [\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)] &= 0 \\ A [-\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)] + B [\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L)] &= 0. \end{aligned} \quad (8.55)$$

### Charakteristische Gleichung des BERNOULLI-Balkens

Das lineare homogene Gleichungssystem für die Konstanten  $A$  und  $B$  hat unendlich viele reelle (nichttriviale) Lösungen  $\lambda = \lambda_k$ , wenn die Koeffizientendeterminante in (8.55) zu Null wird. Dabei gilt zwischen den hyperbolischen Funktionen mit gleichem Argument  $\cosh^2(\dots) - \sinh^2(\dots) = 1$ . Mit dem hier jeweils auftretenden Argument  $(\dots) = (\lambda L)$  als Eigenwert lautet der Zusammenhang  $\cosh^2(\lambda L) - \sinh^2(\lambda L) = 1$ . Dies führt schließlich auf

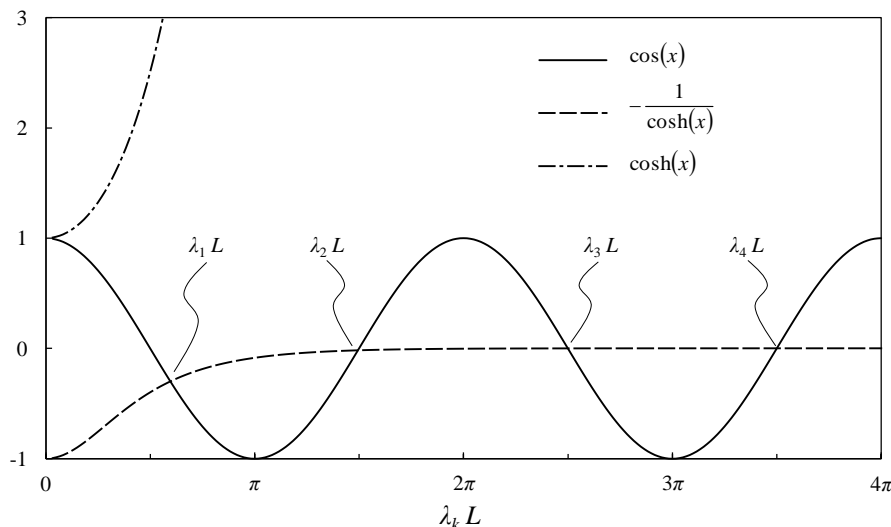
$$\begin{aligned} \cos(\lambda L) \cosh(\lambda L) + 1 &= 0 \\ \cos(\lambda L) &= -\frac{1}{\cosh(\lambda L)} \end{aligned} \quad (8.56)$$

<sup>11</sup> JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET, \* 13. Februar 1805 in Düren, † 5. Mai 1859 in Göttingen. Deutscher Mathematiker.

<sup>12</sup> CARL GOTTFRIED NEUMANN, \* 7. Mai 1832 in Königsberg (Preußen), † 27. März 1925 in Leipzig. Deutscher Mathematiker.



als Eigenwertgleichung oder charakteristischer Gleichung. Ihre Auswertung liefert das gesuchte Produkt  $(\lambda_k L)$  als Eigenwerte, aus denen schließlich die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_k$  bzw. die Eigenfrequenzen  $f_k$  bestimmt werden können. Abbildung 8.4 zeigt die Grundfunktionen der charakteristischen Gleichung (8.56). Dabei ermöglicht die zweite Formulierung von Gleichung (8.56) die günstige graphische Bestimmung der Eigenwerte  $(\lambda_k L)$ .



**Abbildung 8.4:** Grundfunktionen der charakteristischen Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte  $(\lambda_k L)$  des schwingenden Kragbalkens mit BERNOULLI-Kinematik.

Daraus gehen die Eigenwerte

$$\lambda_k L = \frac{2k-1}{2}\pi + e_k \quad (8.57)$$

hervor. Der Term  $e_k$  besitzt ein alternierendes Vorzeichen. Sein Betrag nimmt mit größer werdendem  $k$  rasch ab, und es gilt  $e_1 = 0,3042$ ,  $e_2 = -0,018$  und  $e_3 = 0,001$ . Im Detail sind die ersten drei Eigenwerte des schwingenden Kragbalkens [155, 53, 49]

$$\lambda_{k=1} L = 1,875 \quad , \quad \lambda_{k=2} L = 4,694 \quad \text{und} \quad \lambda_{k=3} L = 7,855 \quad . \quad (8.58)$$

Für große  $k$  gilt die Näherung  $\lambda_{k+1} L - \lambda_k L = \pi$ , da der Betrag von  $e_k$  stetig abnimmt.

#### *Eigenformen und Eigenfrequenzen des BERNOULLI-Balkens*

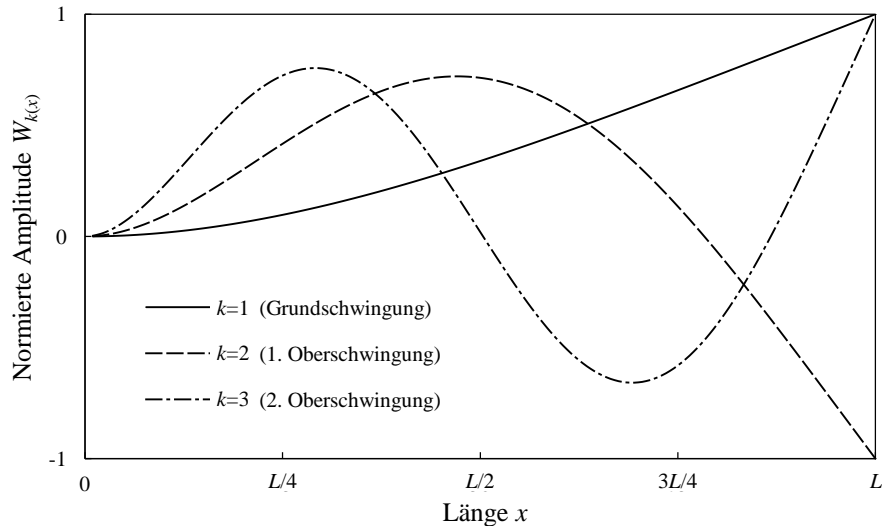
Im Gleichungssystem (8.55) kann wegen  $B = -D$  aus der ersten Gleichung die Konstante  $B$  geschrieben werden als  $B = -A \frac{\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L)}{\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)}$ . Es verbleibt  $A$  als einziger beliebiger Faktor, der in Betrag und Amplitude unbestimmt ist. Die Ortsfunktion der  $k$ -ten Eigenschwingung des einseitig fest eingespannten Balkens und freiem Ende ist

$$W_{k(x)} = A_k \left[ \cos(\lambda_k x) - \cosh(\lambda_k x) - \frac{\cos(\lambda_k L) + \cosh(\lambda_k L)}{\sin(\lambda_k L) + \sinh(\lambda_k L)} \left( \sin(\lambda_k x) - \sinh(\lambda_k x) \right) \right] \quad . \quad (8.59)$$

Die Lösungsfunktionen basieren auf trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen. Diese sind orthogonal im Sinne eines sog.  $L_2$ -Skalarproduktes [54],

$$\int_{x=0}^L W_{n(x)} W_{m(x)} dx \quad \forall \quad n \neq m \quad . \quad (8.60)$$

Sie sind für die Einarbeitung der Anfangsbedingungen notwendig. Abbildung 8.5 zeigt die ersten drei Eigenfunktionen  $W_{1(x)}$ ,  $W_{2(x)}$  und  $W_{3(x)}$  für den einseitig eingespannten Balken mit BERNOULLI-Kinematik. Dabei sind die Werte im dargestellten Intervall  $x \in [0, L]$  auf das jeweilige Maximum  $\max \{W_{k(x)}\}$  normiert, sodass gilt  $\max \{W_{k(x)}\} = 1$  [58]. Die Grundschwingung des schwingenden Kragbalkens für  $k = 1$  besitzt keinen Schwingungsknoten. Der Schwingungsknoten der ersten Oberschwingung  $k = 2$  befindet sich bei  $x_{k=2} = 0,783 L$ . Die beiden Schwingungsknoten der zweiten Oberschwingung  $k = 3$  befinden sich bei  $x_{1,k=3} = 0,5 L$  bzw.  $x_{2,k=3} = 0,868 L$ .



**Abbildung 8.5:** Eigenformen des schwingenden Kragbalkens mit BERNOULLI-Kinematik für  $k = 1$ ,  $k = 2$  und  $k = 3$ .

#### *Charakteristische Gleichung des TIMOSHENKO-Balkens*

Mit dem Produktansatz (8.46) und der Bedingung zur Existenz nichttrivialer Lösungen  $\lambda \neq 0$  folgt aus der homogenen Differentialgleichung (8.24) [53]

$$W^{IV} + \lambda^4 i^2 (1 + \alpha) W'' - \lambda^4 (1 - \lambda^4 i^4 \alpha) W = 0, \quad (8.61)$$

wobei die Abkürzungen  $\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}$ ,  $i^2 = \frac{I}{A}$  (mit  $i$  als sog. Trägheitsradius [51], [53]) und  $\alpha = \frac{EA}{GA_s}$  verwendet werden.

Im Gegensatz zur Differentialgleichung freier Schwingungen des BERNOULLI-Balkens (8.39) kann die Wellengleichung des TIMOSHENKO-Balkens (8.61) formal nicht mit dem Separationsansatz nach BERNOULLI (8.46) gelöst werden [54]. Aufgrund der gemischt auftretenden partiellen Ableitung ist die Separation in ein Randwertproblem und ein Anfangswertproblem per se nicht möglich. Aus diesem Grund wird vereinfachend angenommen, dass die Eigenfunktionen  $W_k(x)$  des TIMOSHENKO-Balkens mit denen des BERNOULLI-Balkens identisch sind, und dass die zugehörigen zeitlichen Lösungen  $T_k(t)$  periodisch sind [54]. Unter diesen Voraussetzungen sind analytische Lösungen ausführlich in DRESIG und FIDLIN 2014 [28] sowie WEIGAND 1962 [167] angegeben.

### 8.3 Laminatbalken

Besteht ein Balken aus mehreren Schichten gleichen oder unterschiedlichen Materials, oder besitzen die Einzelschichten richtungsabhängige Eigenschaften, wird das Tragwerk als geschichteter Balken oder Laminatbalken bezeichnet. Das Vorgehen zur strukturmechanischen Beschreibung von Laminatbalken basiert dabei sowohl auf der Beschreibung homogener isotroper Balken, wie

in Abschnitt 8.2 dargestellt, als auch auf der Makromechanik eines Laminats als Mehrschichtverbund, wie in Abschnitt 6.3 dargestellt. Im Detail wird die zweidimensionalen Laminattheorie um die Dimension der Breite reduziert.

Zunächst wird die schubweiche Kinematik nach TIMOSHENKO, die auf die Schubdeformationstheorie erster Ordnung führt, und schließlich die schubstarre Kinematik nach BERNOULLI, die auf die klassische bzw. technische (Biege-)Theorie führt, behandelt (vgl. Vorgehen beim homogenen isotropen Balken in Abschnitt 8.2). Dabei ist die Unterscheidung zwischen Balken- und Plattenschnittgrößen, die diskrete Verteilung der Steifigkeiten über den Querschnitt und der zugehörigen Wahl des Bezugssystems in Dickenrichtung zu beachten. Dabei ermöglichen in beiden Fällen vereinfachende Voraussetzungen die analytische Beschreibung. Diese sind u. a., dass die Einzelschichten ideal miteinander verbunden sind, und dass die Einzelschichten der Laminatbalken unidirektional verstärkt sind.

### Schubdeformationstheorie erster Ordnung nach TIMOSHENKO

Da der Querschnitt des gesamten Laminats betrachtet wird, gelten für den Laminatbalken, analog zum homogenen isotropen Balken, die Differentialgleichungen der Kinematik des Biegebalkens mit Schubanteil, wie in Gleichung 8.15 angegeben [1], [87]

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} = u' - z \psi' \quad \text{und} \quad \psi = -\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma = -w' + \gamma . \quad (8.62)$$

Die Definitionen der Schnittgrößen  $M$  und  $Q$  des Laminatbalkens ergeben sich analog zu den Gleichungen (6.48) bzw. (8.5) durch Integration der über den Querschnitt  $A$  verteilten Normalspannungen  $\sigma$  und Schubspannungen  $\tau$  zu

$$N = \int_A \sigma \, dA , \quad M = \int_A \sigma z \, dA , \quad Q = \int_A \tau \, dA , \quad (8.63)$$

Mit dem verallgemeinerten HOOKE'schen Gesetz für orthotrope Werkstoffe folgen unter der Berücksichtigung der Kinematik nach TIMOSHENKO (8.62) die konstitutiven Gleichungen der Schnittgrößen des TIMOSHENKO-Balkens zu

$$N = \bar{A}_{11} \varepsilon + \bar{B}_{11} \kappa , \quad M = \bar{B}_{11} \varepsilon + \bar{D}_{11} \kappa , \quad Q = \kappa_S \bar{A}_{55} \gamma , \quad (8.64)$$

wobei zur Unterscheidung die Krümmung des Laminatbalkens mit  $\kappa$  und der Schubkorrekturfaktor entsprechend der Form des Querschnitts mit  $\kappa_S$  bezeichnet werden.

Die Größen  $\bar{A}_{11}$ ,  $\bar{A}_{55}$ ,  $\bar{B}_{11}$  und  $\bar{D}_{11}$  in Gleichung (8.64) sind die Steifigkeiten des Laminatbalkens. Sie ergeben sich durch die Multiplikation der Laminatsteifigkeiten des Mehrschichtverbundes nach Gleichung (6.58) mit der Breite des Laminatbalkens  $b$  zu

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= b A_{11} = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k (z_k - z_{k-1}) = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k h_k , \\ \bar{A}_{55} &= b A_{55} = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{55}^k (z_k - z_{k-1}) = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{55}^k h_k , \\ \bar{B}_{11} &= b B_{11} = b \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k h_k \bar{z}_k , \\ \bar{D}_{11} &= b D_{11} = b \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k h_k \left( \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^2}{12} \right) h_k . \end{aligned} \quad (8.65)$$

Es sind  $\bar{A}_{11} = b A_{11}$  die Dehnsteifigkeit,  $\bar{A}_{55} = b A_{55}$  die (Quer-)Schubsteifigkeit,  $\bar{D}_{11} = b D_{11}$  die Biegesteifigkeit und  $\bar{B}_{11} = b B_{11}$  die Kopplungssteifigkeit des schubweichen Laminatbalkens. Die Größen basieren damit auf den elastischen Kennwerten  $\bar{Q}_{ij}^k$  jeder  $k$ -ten Einzelschicht im globalen Koordinatensystem sowie deren Dicke und Position im Lagenaufbau. Dabei ist besonders die Berechnung der (Quer-)Schubsteifigkeit  $\bar{A}_{55} = b A_{55}$  deutlich anspruchsvoller, und wird deshalb meist lediglich näherungsweise bestimmt [1].

Unter der Voraussetzung eines symmetrisch zur Mittelebene geschichteten Laminatbalkens gilt für die Terme der Kopplungssteifigkeit  $B_{11} = 0$ . Die Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen (8.64) liefern

$$\begin{aligned} M &= \bar{D}_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \text{und} & & Q &= \kappa_S \bar{A}_{55} \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \text{und kurz} \\ M &= \bar{D}_{11} \psi' & \text{und} & & Q &= \kappa_S \bar{A}_{55} (\psi + w') . \end{aligned} \quad (8.66)$$

als Elastizitätsgesetz der Biegung und Elastizitätsgesetz der Querkraft, analog zu den Gleichungen (8.12) und (8.13).

Einsetzen der Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen (8.66) in die Gleichgewichtsbedingungen mit den entsprechenden Trägheitstermen (8.2) und (8.3) liefert analog zu den beiden gekoppelten Differentialgleichungen (8.16) und (8.17)

$$\begin{aligned} \kappa_S \bar{A}_{55} [\psi + w']' - \varrho_0 \ddot{w} &= -q & \text{und} \\ [\bar{D}_{11} \psi']' - \kappa_S \bar{A}_{55} [\psi + w'] - \varrho_2 \ddot{\psi} &= 0 , \end{aligned} \quad (8.67)$$

mit den Termen der translatorischen Trägheit und der rotatorischen Trägheit

$$\varrho_0 = b \sum_{k=1}^n \varrho^k (z_k - z_{k-1}) \quad \text{und} \quad \varrho_2 = b \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \varrho^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) . \quad (8.68)$$

Die beiden Gleichungen (8.67) sind zwei gekoppelte Differentialgleichungen der Biegung für einen symmetrischen Laminatbalken mit schubweicher Kinematik nach TIMOSHENKO, unter der Voraussetzung für über die Länge  $L$  des Laminatbalkens konstante Größen der Dicke  $h$ , der Breite  $b$ , der Querschnittsfläche  $A$ , der Biegesteifigkeit  $\bar{D}_{11}$  und der Dichte  $\varrho$ . Im Falle freier Transversalschwingungen gilt für die senkrechte Belastung  $q = q(x, t) = 0$ , sodass als homogene Differentialgleichungen folgen

$$\begin{aligned} \kappa_S \bar{A}_{55} [\psi + w']' - \varrho_0 \ddot{w} &= 0 & \text{und} \\ [\bar{D}_{11} \psi']' - \kappa_S \bar{A}_{55} [\psi + w'] - \varrho_2 \ddot{\psi} &= 0 . \end{aligned} \quad (8.69)$$

### Schubstarre Theorie nach EULER-BERNOULLI

Es wird der Querschnitt des gesamten Laminats betrachtet, sodass für den schubstarken Laminatbalken, analog zum homogenen isotropen Balken, die Differentialgleichungen der Kinematik, wie in Abschnitt 8.2.3 dargestellt, gelten. Die Voraussetzung der schubstarken Kinematik nach BERNOULLI vernachlässigt die Rotationsträgheit des Querschnitts, und setzt einen schubstarken Querschnitt voraus. Dabei gelten die beiden gekoppelten kinematischen Beziehungen [1]

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} = u' - z \psi' \quad \text{mit} \quad \psi = -\frac{\partial w}{\partial x} = -w' . \quad (8.70)$$

Die differentiellen Zusammenhänge für den schubstarrten Laminatbalken ergeben sich analog aus der Reduktion der zweidimensionalen Laminattheorie (vgl. Abschnitt 6.3) um die  $y$ -Richtung in die Breite.

Die Schnittgrößen des schubstarrten Laminatbalkens und die Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen ergeben sich analog zu denen des schubweichen Laminatbalkens, wie in den Gleichungen (8.63) und (8.64) angegeben. Aufgrund der vereinfachend vorausgesetzten Schubstarrheit gibt es keine konstitutive Gleichungen für den Zusammenhang der Querkraft  $Q$ , der Querschubsteifigkeit  $\bar{A}_{55}$  und der Schubverformung  $\gamma$ .

Die Steifigkeiten des schubstarrten Laminatbalkens ergeben sich ebenfalls analog zu Gleichung (8.64) aus der Multiplikation der Laminatsteifigkeiten des Mehrschichtverbundes nach Gleichung (6.58) mit der Breite des Laminatbalkens  $b$ . Es gibt jedoch wiederum keine konstitutive Gleichung für die Zusammenhänge in Querrichtung, sodass gilt

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11} &= b A_{11} = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k (z_k - z_{k-1}) = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k h_k , \\ \bar{B}_{11} &= b B_{11} = b \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k h_k \bar{z}_k , \\ \bar{D}_{11} &= b D_{11} = b \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k h_k \left( \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^2}{12} \right) h_k .\end{aligned}\tag{8.71}$$

Es sind  $\bar{A}_{11} = b A_{11}$  die Dehnsteifigkeit,  $\bar{D}_{11} = b D_{11}$  die Biegesteifigkeit und  $\bar{B}_{11} = b B_{11}$  die Kopplungssteifigkeit des schubstarrten Laminatbalkens. Die Größen basieren damit auf den elastischen Kennwerten  $\bar{Q}_{ij}^k$ , jeder  $k$ -ten Einzelschicht im globalen Koordinatensystem sowie deren Dicke und Position im Lagenaufbau.

Unter der Voraussetzung eines symmetrisch zur Mittelebene geschichteten Laminatbalkens gilt für die Terme der Kopplungssteifigkeit  $B_{11} = 0$ . Die Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen liefern

$$\begin{aligned}M &= -\bar{D}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \text{und} & & Q &= - \left[ \bar{D}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]' & \text{und kurz} \\ M &= -\bar{D}_{11} w'' & \text{und} & & Q &= - [\bar{D}_{11} w'']' .\end{aligned}\tag{8.72}$$

Einsetzen der Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen (8.72) in die Gleichgewichtsbedingungen mit den entsprechenden Trägheitstermen (8.2) und (8.3) liefert

$$\bar{D}_{11} w^{IV} + \varrho A \ddot{w} = q ,\tag{8.73}$$

mit der Dichte des Laminatbalkens

$$\varrho = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \varrho^k h_k .\tag{8.74}$$

als Differentialgleichung der Biegung für einen symmetrischen Laminatbalken mit schubstarrer Kinematik nach BERNOULLI, unter der Voraussetzung für über die Länge  $L$  des Laminatbalkens konstante Größen der Dicke  $h$ , der Breite  $b$ , der Querschnittsfläche  $A$ , der Biegesteifigkeit  $\bar{D}_{11}$  und der Dichte  $\varrho$ . Im Falle freier Transversalschwingungen von Balken gilt  $q = q(x, t) = 0$  und

Gleichung (8.73) wird analog zu Gleichung (8.39) zur homogenen Differentialgleichung

$$\bar{D}_{11} w^{IV} + \varrho A \ddot{w} = 0 . \quad (8.75)$$

#### Lösung für Kragbalken

Die Lösung der Differentialgleichung freier Transversalschwingungen eines symmetrischen Laminatbalkens mit schubstarrer Kinematik nach BERNOULLI (8.75) erfolgt ebenfalls mit dem Produktansatz  $w_k = W_k T_k$  nach Gleichung (8.46) bzw. (8.47). Für einen Kragbalken (Randbedingungen fest-frei) sind die Randbedingungen für das feste bzw. freie Ende in den beiden Gleichungen (8.51) und (8.52) angegeben. Einsetzen des Produktansatzes (8.46) in die homogene Differentialgleichung (8.75) liefert

$$W^{IV} - \lambda^4 W = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \omega^2 \frac{\varrho A}{\bar{D}_{11}} = \omega^2 \frac{\varrho A}{b D_{11}} = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (8.76)$$

analog zu Gleichung (8.53), wobei als Biegesteifigkeit des schubstarren Laminatbalkens  $\bar{D}_{11} = b D_{11}$  anstelle der Biegesteifigkeit des homogenen isotropen Balkens  $E I$  berücksichtigt ist. Einsetzen der Randbedingungen (8.51) und (8.52) in die allgemeine Lösung (8.50) liefert analog das lineare Gleichungssystem (8.55). Die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte ( $\lambda_k L$ ) entspricht Gleichung (8.56). Damit ergeben sich die gleichen Eigenwerte, wie in Gleichung (8.58) angegeben.

## 8.4 Anmerkungen

Aufgrund der getroffenen Voraussetzungen wird kurz auf die sich ergebende einachsige Elastizität eingegangen, und die analytische Bestimmung des Schubkorrekturfaktors  $\kappa$  für homogene isotrope Balken angegeben.

### Einachsige Elastizität

Die teilweise stark vereinfachend getroffenen Voraussetzungen beschränken die Gültigkeit des Modells und liefert Grenzen des Modells. Die in Abschnitt 6.1.3 dargestellten Grenzen der Idealisierung zur Beschreibung der ebenen Elastizität in Abschnitt 6.1 gelten analog für die zuvor dargestellten Zusammenhänge. Dabei werden zusätzlich die Größen in Breitenrichtung ( $y$ -Richtung) vernachlässigt, sodass die ausgeführte Betrachtung eine einachsige Elastizität voraussetzt.

Beim Balken werden die Effekte der Querverformung in beide Dimensionen des Querschnitts (sowohl in die Breite in  $y$ -Richtung als auch in die Dicke in  $z$ -Richtung) vernachlässigt. Die Vernachlässigung der Effekte in  $y$ -Richtung erfolgt über die Multiplikation der Laminatsteifigkeiten mit der Breite  $b$  des Laminatbalkens. Dadurch reduziert sich die Dimension der ursprünglich zweidimensionalen Laminatsteifigkeiten nach Gleichung (6.58) auf die eindimensionalen Steifigkeiten des Laminatbalkens in Längsrichtung. Die Vernachlässigung der Effekte in Dickenrichtung erfolgt durch die Voraussetzung einer Kinematik vom unverformten zum verformten Querschnitt (vgl. BRESSE-TIMOSHENKO vs. EULER-BERNOULLI). Damit sind die reduzierte Steifigkeit  $\bar{Q}_{11}^k$ , die Steifigkeit  $C_{11}^k$  und der elastischen Kennwerte  $C_{ij}^k$ , jeweils in der  $k$ -ten Einzelschicht im globalen Koordinatensystem in Längsrichtung identisch, und es gilt

$$\bar{Q}_{11}^k = C_{11}^k = E_x^k = E^k \quad \text{und} \quad C_{55}^k = G_{xz}^k = G^k . \quad (8.77)$$

Dabei ist  $E_x^k = E^k$  der Elastizitätsmodul der  $k$ -ten Einzelschicht im globalen Koordinatensystem in Längsrichtung ( $x$ -Richtung) und  $G_{xz}^k = G^k$  der zugehörige, auf die Querrichtung ( $z$ -Richtung) bezogene, Schubmodul [1].

### Querschubsteifigkeit

Homogene isotrope Balken weisen i. a. eine höhere Querschubsteifigkeit als Laminatbalken auf. Der Einfluss der Schubspannungen aufgrund von Querkräften hat damit bei Laminatbalken größeren Einfluss auf das strukturmechanische Verhalten als bei homogenen isotropen Balken. Im Gegensatz zu homogenen isotropen Balken, die in guter Näherung mit der schubstarrten Kinematik nach BERNOULLI beschrieben werden können, bietet sich zur realitätsnäheren Beschreibung von Laminatbalken die Anwendung der Schubdeformationstheorie erster Ordnung an [1], [49].

### Anmerkungen zum Schubkorrekturfaktor $\kappa$

Der im Abschnitt 8.2.1 in Gleichung (8.13) eingeführte Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  liefert mit der Querschnittsfläche  $A$  die sog. Schubfläche  $A_S = \kappa A$ . Der Faktor  $\kappa$  berücksichtigt die ungleichförmige Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt. Sein Betrag hängt dabei von der Form des Querschnitts des Balkens ab. Wie zuvor erwähnt, beträgt er für rechteckförmige Querschnitte  $\kappa = \frac{5}{6}$ .

Bei der Berechnung der Schubfläche  $A_S$  nach Gleichung (8.14) gilt bei der Verwendung unterschiedlicher Literatur zu beachten, dass stets gilt

$$A_S < A. \quad (8.78)$$

Der Zusammenhang in Gleichung (8.14) wird in der angelsächsischen Literatur nämlich teilweise invers als sog. Schubformfaktor (engl. form factor for shear),  $A_S = \frac{1}{\kappa} A$  für  $\kappa > 1$  verwendet [58], [87]. In diesem Fall ist entsprechend der Kehrwert des angegebenen Werts zu verwenden, sodass zwischen Schubfläche  $A_S$  und Querschnittsfläche  $A$  stets  $A_S < A$  nach Gleichung (8.14) gilt.

### Exemplarische Herleitung des Schubkorrekturfaktors $\kappa$ für rechteckförmige Querschnitte

Der Schubkorrekturfaktor wird exemplarisch für die in der vorliegenden Arbeit relevanten rechteckförmigen Querschnitte nach ALTENBACH, ALTENBACH und KISSING 2004 [1] hergeleitet. Die analytische Ermittlung erfolgt dabei über die Bedingung der Gleichheit der Verzerrungsenergie aufgrund der klassischen Querschubspannungen  $W_1$  mit der Verzerrungsenergie aufgrund der Schubdeformationstheorie erster Ordnung  $W_2$ . Im Falle eines homogenen isotropen Balkens mit rechteckförmigem Querschnitt  $A = bh$  lautet die Schubspannungsverteilung

$$\tau = \tau_{xz} = \tau_1 = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad \forall \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}. \quad (8.79)$$

Die getroffenen Voraussetzung der Schubdeformationstheorie erster Ordnung liefern eine über die Querschnittsfläche bzw. über die Dicke  $h$  konstant verteilte Schubspannung (vgl. Gleichung (8.9))  $\tau$  und damit

$$\tau = \tau_{xz} = \tau_2 = \frac{Q}{bh} \quad \text{bzw.} \quad \gamma = \gamma_{xz} = \gamma_2 = \frac{Q}{\kappa G}. \quad (8.80)$$

Die Forderung der Gleichheit der beiden Formulierungen der Verzerrungsenergie  $W_1 = W_2$  liefert

$$\frac{1}{2} \int_{(A)} \frac{\tau_1^2}{G} dA = \frac{1}{2} \int_{(A)} \frac{\tau_2^2}{\kappa G} dA, \\ \frac{3}{5} \frac{Q^2}{Gbh} = \frac{1}{\kappa} \frac{Q^2}{2Gbh},$$

und führt schließlich auf den Schubkorrekturfaktor für rechteckförmige Querschnitte  $\kappa = \frac{5}{6}$ .

## Lösungen

Alle Lösungen der elementaren Balkentheorie für homogene isotrope Balken können im Wesentlichen auf geschichtete Balken übertragen werden [1]. Dabei ist zu beachten, dass sich geschichtete Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen i. a. schubweicher verhalten als metallische Materialien, wie zuvor erwähnt. Dabei ist im Falle des schubstarren Laminatbalkens die Biegesteifigkeit  $\bar{D}_{11} = b D_{11}$  anstelle der Biegesteifigkeit des homogenen isotropen Balkens  $EI$  zu berücksichtigen.

Einsetzen der Randbedingungen (8.51) und (8.52) in die allgemeine Lösung (8.50) liefert analog das lineare Gleichungssystem (8.55). Die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte ( $\lambda_k L$ ) entspricht Gleichung (8.56). Damit ergeben sich die gleichen Eigenwerte, wie in Gleichung (8.58) angegeben.

Unter der Voraussetzung einer schubstarren Kinematik nach BERNOULLI können die Differentialgleichungen freier Transversalschwingungen sowohl für homogene isotrope Balken (8.39) als auch für Laminatbalken (8.75) mit dem Separationsansatz (8.46) gelöst werden. Unter der Voraussetzung einer schubweichen Kinematik nach TIMOSHENKO ist dies für die Differentialgleichungen freier Transversalschwingungen weder für homogene isotrope Balken (8.24) noch für Laminatbalken (8.69) formal möglich, da die partiellen Ableitungen nach dem Ort  $x$  und nach der Zeit  $t$  auch gemischt auftreten [54]. Aus diesem Grund wird vereinfachend angenommen, dass die Eigenfunktionen  $W_k(x)$  des TIMOSHENKO-Balkens mit denen des BERNOULLI-Balkens identisch sind, und dass die zugehörigen zeitlichen Lösungen  $T_k(t)$  periodisch sind [54].



# 9 Analytische und numerische Untersuchungen

Die angenommene mesomechanische Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund geometrischer Zusammenhänge wird analytisch und numerisch behandelt. Das Modell beschränkt sich dabei auf eine eindimensionale Beschreibung einer vollständigen Ondulation in Richtung eines Rovingstranges im Gewebe. Dies entspricht einer Betrachtung als ebene repräsentative Sequenz (ERS) in einem eindimensionalen Kontinuum analog zu einem sog. repräsentativen Volumenelement (RVE) in einem dreidimensionalen Kontinuum. Dafür werden bezüglich der geometrischen und strukturmechanischen Verhältnisse vereinfachende Voraussetzungen getroffen. Im Detail werden Leinwandgewebe und Köpergewebe 2/2 betrachtet. Die Ergebnisse der FE-Berechnungen dienen der Verifizierung des analytischen Modells. Zur Validierung von strukturmechanischen Werkstoffkennwerten von basaltfaserverstärkte Kunststoffen, die im Zugversuch ermittelt worden sind, sind vergleichbare Untersuchungen mit repräsentativen Volumenelementen in MAZZEO, TENUTA et al. 2012 [86], TREVISO, MUMOLI et al. 2013 [159], VALENTINO et al. 2013 [163] und VALENTINO et al. 2014 [164] nach [44] beschrieben.

## 9.1 Mesomechanische Betrachtung von Geweben

Das Phänomen der Ondulation in gewebeverstärkten Einzellagen wird in der sog. mesomechanischen Betrachtungsebene untersucht. Sie liegt zwischen der mikromechanischen Ebene und der makromechanischen Ebene. Während in der Mikromechanik beispielsweise die Homogenisierungsansätze abgeleitet werden, werden in der Makromechanik globale Reaktionen eines idealisierten mechanischen Tragwerks betrachtet.

Die mesomechanische Betrachtungsebene ist dabei v. a. bei der strukturmechanischen Beschreibung von gewebeverstärkten Einzellagen (orthotrop im lokalen Koordinatensystem, vgl. Abschnitt 4.2.3) und Lagenaufbauten relevant. Die Kettstränge werden senkrecht von den Schusssträngen alternierend auf Ober- und Unterseite gekreuzt. Die Reihenfolge und das sich ergebende Muster sind für die jeweilige Art der Gewebeverstärkung (Leinwand, Köper, etc.) charakteristisch. Die dadurch verursachte Ondulation (auch Flottierung [92]) von Rovingsträngen in Geweben als textiles Halbzeug wird in der mesomechanischen Betrachtungsebene untersucht. Dabei wird meist vereinfachend vorausgesetzt, dass der ondulierte Verlauf der Rovingstränge sich regelmäßig wiederholend und kontinuierlich ist. Die geometrischen Dimensionen hängen dabei signifikant von den verwendeten Rovingsträngen und der Gewebekonstruktion ab. Verbreitete Gewebekonstruktionen sind dabei das Leinwand- und das Köpergewebe 2/2. Während beim Leinwandgewebe jeder kreuzende Rovingstrang onduliert wird, wird beim Köpergewebe 2/2 lediglich jeder zweite Rovingstrang onduliert. Wenn in Kett- und Schussrichtung Rovingstränge mit gleichen geometrischen und mechanischen Kennwerten verwendet werden, wird das Gewebe als ausgeglichen bezeichnet.

Das kleinste sich regelmäßig wiederholende Element bzw. die kleinste sich wiederholende Sequenz ist eine vollständige Ondulation der Rovingstränge in Kett- bzw. Schussrichtung. Sie besteht aus den als unidirektional verstärkt vorausgesetzten Rovingsträngen und Bereichen mit Reinharz ohne Faserverstärkung. Bei unidirektional verstärkten Einzellagen und Lagenaufbauten daraus ist die mesomechanische Betrachtungsebene praktisch nicht relevant, da direkt über mikromechanische Homogenisierungsansätze, wie in Kapitel 5 beschrieben, die makromechanischen Eigenschaften

ten der Einzelschicht bestimmt werden, und Schichtungen, wie in Kapitel 6 dargestellt, erfasst werden können. Zur Ermittlung der fünf voneinander unabhängigen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte für unidirektional verstärkte Einzellagen im lokalen Koordinatensystem (transversalisotrop, vgl. Abschnitt 4.2.4) werden mikromechanische Homogenisierungsansätze, wie in Kapitel 5 beschrieben, angewendet. Die kleinsten sich regelmäßig wiederholenden Elemente bzw. Sequenzen sind Verstärkungsfaser und Matrixwerkstoff in der mikromechanischen Betrachtungsebene. Die makroskopische strukturmechanische Beschreibung des Tragwerks erfolgt in jedem Fall anschließend direkt über eine Schichtverbundanalyse, wie beispielsweise in Abschnitt 8.3 für den geschichteten Balken dargestellt.

In der mesomechanischen Betrachtungsebene wird, analog zu den Überlegungen der mikromechanischen Homogenisierungsansätze in Kapitel 5, die Frage behandelt, wie die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte einer gewebeverstärkten Einzellage oder von Lagenaufbauten daraus als makroskopisches Verbundmaterial von mesomechanischen Zusammenhängen abhängen. Unter der Voraussetzung, dass die repräsentativen Elemente bzw. sich wiederholenden Sequenzen der mesomechanischen Betrachtungsebene in der makromechanischen nicht mehr als solche erkennbar sind, wird exemplarisch ein Element bzw. eine Sequenz analysiert. Die Ergebnisse dienen der Vorhersage des strukturmechanischen Verhaltens des makroskopischen Modells. Dabei werden unidirektional verstärkte Rovingstränge und Bereiche mit Reinharz ohne Faserverstärkung als unterschiedliche Bereiche der Elemente bzw. Sequenzen vorausgesetzt. Das strukturmechanische Verhalten des repräsentativen Elements bzw. der repräsentativen Sequenz hängt von der mesomechanischen Geometrie ab.

## 9.2 Geometrie und Strukturmechanik

In diesem Abschnitt werden die geometrischen Verhältnisse und die strukturmechanischen Eigenschaften der mesomechanischen Ondulation betrachtet. Dabei wird vereinfachend vorausgesetzt, dass die Geometrien der ebenen repräsentativen Sequenz sowohl des analytischen Modells als auch der numerischen FE-Berechnungen auf mathematisch verhältnismäßig einfach zu behandelnden Sinus-Funktionen basieren. Die ondulierten Rovingstränge werden strukturmechanisch als ideal parallel unidirektional verstärkt vorausgesetzt, umgeben von Bereichen mit Reinharz ohne Faserverstärkung.

Die vereinfachende Voraussetzung lautet analytisch formuliert

$$y(x) = A \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right). \quad (9.1)$$

Dabei sind die geometrischen Parameter zunächst die Amplitude  $A$ , und die Länge einer vollständigen Ondulation  $L$ , wie in Abbildung 9.1 oben links dargestellt. Mit diesen geometrischen Parametern ergibt sich, wie in Abschnitt 9.3 dargestellt, der Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  nach Gleichung (9.9). Derartige repräsentative Sequenzen können zur Abbildung größerer Längenabschnitte beliebig oft in aufeinanderfolgender Reihenschaltung betrachtet werden. Zusätzlich ist der Verlauf der Ondulation über den gesamten Definitionsbereich stetig und differenzierbar.

### 9.2.1 Geometrische Verhältnisse

Ein senkrechter Schnitt einer gewebeverstärkten Einzellage entlang der theoretischen Mittellinie eines Rovingstranges erlaubt die Ermittlung aller relevanten geometrischen Parameter einer Ge-webeondulation. Diese sind im Einzelnen, wie zuvor erwähnt, die Amplitude  $A$  und die Länge der Ondulation  $L$  bzw. die Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$ , wie in Abbildung 9.1 dargestellt. Der Schnitt schneidet die kreuzenden Rovingstränge senkrecht. Die Reihenfolge bzw. das

Muster der Ondulation der längs geschnittenen Rovingstränge wiederholt sich dabei regelmäßig. Die Änderung der Vorzugsrichtung des längs geschnittenen ondulierten Rovingstranges um die quer geschnittenen kreuzenden Rovingstränge ist kontinuierlich. Die Dicke eines Rovingstranges wird über die Länge als konstant angenommen. Der senkrechte Querschnitt der Rovingstränge ist üblicherweise flach und linsenförmig bzw. ellipsenförmig.

### Repräsentative Sequenz im analytischen Modell

Im analytischen Modell wird die repräsentative Sequenz eines ondulierten Rovingstrangs geometrisch lediglich über den Verlauf seiner Mittellinie approximiert. Dabei wird vereinfachend vorausgesetzt, dass die Ondulation auf einer mathematisch verhältnismäßig einfach zu behandelnden Sinus-Funktion basiert. Der Verlauf ist damit eindeutig durch die geometrischen Parameter definiert. Für unterschiedliche Gewebekonstruktionen ergibt sich die Länge der Ondulation  $L$  durch die Multiplikation der Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$  mit einem für die jeweilige Gewebekonstruktion spezifischen Faktor  $\lambda$  zu

$$L = L_G = \lambda L_R , \quad (9.2)$$

wobei die Indizes G und R die Eigenschaft des Gewebes bzw. des Rovings bezeichnen. Für Leinwandgewebe, bei dem jeder Rovingstrang onduliert wird, ergibt sich die Länge der Ondulation  $L$  durch die Multiplikation der Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$  mit dem Faktor  $\lambda = 2$ ,

$$L_{LW} = 2 L_R , \quad (9.3)$$

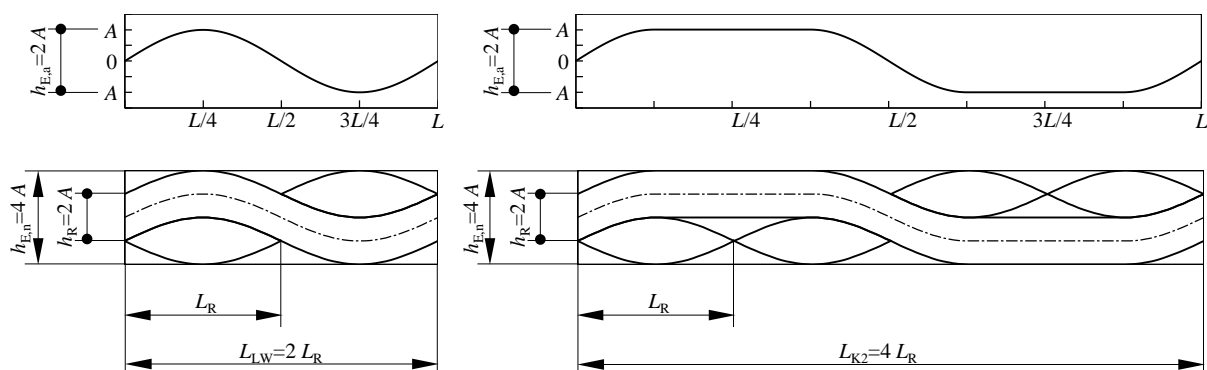
während sie sich für Köpergewebe  $2/2$  durch die Multiplikation mit dem Faktor  $\lambda = 4$  ergibt,

$$L_{K2} = 4 L_R , \quad (9.4)$$

wobei die Indizes LW und K2 die Eigenschaft eines Leinwandgewebes bzw. eines Köpergewebes  $2/2$  bezeichnen. Der Linienzug der Ondulation einer gewebeverstärkten Einzellage beträgt für beide Arten der Gewebekonstruktion

$$h_{E,a} = 2 A , \quad (9.5)$$

beschreibt jedoch gewebeverstärkte Einzellagen mit  $h_{E,n} = 4 A$ . Abbildung 9.1 oben zeigt exemplarisch die repräsentativen Sequenzen im analytischen Modell, links für Leinwandgewebe und rechts für Köpergewebe  $2/2$ .



**Abbildung 9.1:** Repräsentative Sequenz eines ondulierten Rovingstranges im analytischen Modell (oben) und für die numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode (unten), jeweils eindeutig durch die geometrischen Parameter der Amplitude  $A$  und der Länge der Ondulation  $L = L_G = \lambda L_R$ .

### Repräsentative Sequenz in FE-Berechnungen basierend auf analytischen Funktionen

Analog zum analytischen Modell der Gewebeondulation werden für die FE-Berechnungen ebene repräsentative Sequenzen für gewebeverstärkte Einzellagen basierend auf analytischen trigonometrischen Sinus-Funktionen vorausgesetzt. Die Dimension des längs geschnittenen Rovingstranges (hier: Kettstrang) in Dickenrichtung wird dabei durch ein Verschieben der theoretischen Mittellinie um  $+A$  bzw.  $-A$  berücksichtigt. Die Dicke eines Rovingstranges  $h_R$  entspricht dem doppelten Betrag der jeweiligen Verschiebungen

$$h_R = 2 A \quad (9.6)$$

Die Bereiche der quer geschnittenen Rovingstränge (hier: Schussstränge) in Dickenrichtung werden durch Spiegeln der theoretischen Mittellinie an der Längsachse (entspricht einer Multiplikation der Funktion mit dem Faktor  $-1$ ) und Verschieben um  $+A$  bzw.  $-A$  begrenzt. Die Länge der Ondulation  $L$  ergibt sich analog zur repräsentativen Sequenz des analytischen Modells nach Gleichung (9.2) durch die Multiplikation der Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$  mit dem Faktor  $\lambda$ . Die Dicke der gewebeverstärkten Einzellage in den numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode  $h_{E,n}$  entspricht im Fall der repräsentativen Sequenzen für beide Arten der Gewebekonstruktion jedoch der vierfachen Amplitude  $A$ ,

$$h_{E,n} = 4 A . \quad (9.7)$$

Abbildung 9.1 unten zeigt exemplarisch die repräsentativen Sequenzen für die FE-Berechnungen basierend auf analytischen Funktionen, links für Leinwandgewebe und rechts für Köpergewebe  $2/2$ .

### 9.2.2 Strukturmechanische Voraussetzungen

Mit den parametrischen Abmessungen, wie in Abbildung 9.1 dargestellt, werden vereinfachend sowohl in den analytischen Untersuchungen als auch in den numerischen FE-Berechnungen idealisierte bzw. vereinfachte Verhältnisse bezüglich der Steifigkeit der relevanten Komponenten vorausgesetzt. In den analytischen Modellen wird dabei für die Gewebeondulation zunächst ein ideal steifer Strang in Längsrichtung und gleichzeitig ideal biegeschlaffer Strang in Querrichtung angenommen,  $E_l = E_1 \rightarrow \infty \wedge E_b = E_2 \rightarrow 0$ . Dabei werden zunächst die (visko-)elastischen Parameter vernachlässigt. In den FE-Berechnungen wird die Elastizität berücksichtigt. Dabei ergeben sich in den repräsentativen Sequenzen von gewebeverstärkten Einzellagen in den FE-Berechnungen drei Bereiche mit unterschiedlichen strukturmechanischen Werkstoffkennwerten. Die drei Bereiche sind im Einzelnen der längs geschnittene Rovingstrang (hier: Kettstrang), die quer geschnittenen Rovingstränge (hier: Schussstränge) und umgebende Bereiche mit reinem Matrixwerkstoff ohne Faserverstärkung.

Die drei Bereiche unterscheiden sich v. a. bezüglich der jeweiligen Steifigkeiten. Dabei wird vereinfachend vorausgesetzt, dass die betrachteten Rovingstränge ideal parallel unidirektional verstärkte Bereiche sind und jeweils den gleichen (lokalen) Faservolumengehalt  $\varphi_{f,R}$  aufweisen. Unter der zuvor formulierten Voraussetzung der einzelnen Rovingstränge als unidirektional verstärkte Bereiche ergeben sich die fünf voneinander unabhängigen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte bei bekanntem bzw. vorausgesetzten gleichen Faservolumengehalt  $\varphi_f$  im lokalen Koordinatensystem (transversalisotrop, vgl. Abschnitt 4.2.4) nach den mikromechanischen Homogenisierungsansätzen, wie in Kapitel 5 dargestellt. Bezüglich der jeweiligen Steifigkeiten als charakteristische mechanische Werkstoffkennwerte sind dies im Einzelnen

- der längs geschnittene Rovingstrang (hier: Kettstrang) mit der Vorzugsrichtung der Verstärkungsfasern entlang dem sinusförmigen Verlauf, und damit  $E_1$  parallel der sinusförmigen Kontur und  $E_2$  senkrecht dazu,

- die quer geschnittenen Rovingstränge (hier: Schussstränge) mit der Vorzugsrichtung der Verstärkungsfasern senkrecht um Querschnitt, und damit  $E_2 = E_3$  im untersuchten ebenen Modell und
- die Bereiche mit reiner Matrix ohne jegliche Faserverstärkung mit  $E_m$ .

### 9.3 Grad der Ondulation

Zur Beschreibung des Grades bzw. der Intensität der Ondulation wird ein spezifischer Kennwert  $\tilde{O}$  basierend auf mesomechanischen geometrischen Parametern eingeführt. Die dimensionslose Kennzahl ist ein Maß für die Intensität der Ondulation. Die relevanten mesomechanischen geometrischen Parameter sind dabei die Amplitude  $A$  und die Länge der Ondulation  $L$  bzw. die Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$ , die dafür zueinander ins Verhältnis gesetzt werden. Die Art der Gewebekonstruktion (Leinwand, Köper 2/2, etc.) wird dabei mit  $L = L_G = \lambda L_R$  nach Gleichung (9.2) berücksichtigt. Der Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  ermöglicht die Vergleichbarkeit der repräsentativen Sequenzen des analytischen Modells mit denen der numerischen FE-Berechnungen. Die geometrische Vergleichbarkeit aus dem definierten Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  ist Voraussetzung zur Verifizierung des analytischen Modells mit den Ergebnissen der numerischen FE-Berechnungen.

Für die Einführung des Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  wird die Wellensteilheit

$$S = \frac{H}{L} = \frac{2A}{L}, \quad (9.8)$$

mit den geometrischen Parametern der (Wellen-)Höhe  $H$  und der Wellenlänge  $L$ , wie sie in der Nautik z. B. nach BÜSCHING 2001 [20] oder BÜSCHING 2002 [21] definiert ist, zum Grad der Ondulation in gewebeverstärkten Einzellagen modifiziert zu

$$\tilde{O} = \frac{A}{L} = \frac{A}{L_G} = \frac{A}{\lambda L_R}. \quad (9.9)$$

Dabei ist  $A$  die Amplitude und  $L$  bzw.  $L_{GW}$  die Länge einer vollständigen Ondulation nach Gleichung (9.2), die von der Art der Gewebekonstruktion (Leinwand, Köper 2/2, etc.) abhängt. Unter der Voraussetzung gleicher Amplitude  $A$  und gleicher Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$  folgt für die hier untersuchten Gewebekonstruktionen Leinwand- und Köpergewebe 2/2 wegen den charakteristischen Faktoren  $\lambda = 2$  bzw.  $\lambda = 4$ , dass sich die entsprechenden Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  um den Faktor 2 unterscheiden. Damit wird die unterschiedliche Anzahl der Ondulationen in der jeweiligen Gewebekonstruktion berücksichtigt, obwohl die geometrische Intensität der Umlenkung gleich ist.

Der Kennwert der Wellensteilheit  $S$  nach Gleichung (9.8) wird modifiziert, da im Vergleich zur Intention der Einführung eines Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  nach Gleichung (9.9) ein anderes Motiv vorliegt. In der Nautik ist die Charakterisierung der absoluten Belastung für eine Struktur relevant. Aus diesem Grund wird der doppelte Betrag der Amplitude  $A$  als absolute Höhe einer Welle  $H$  für die Berechnung der Wellensteilheit  $S$  verwendet [20], [21]. Im Gegensatz dazu steht bei der mesomechanischen Betrachtung gewebeverstärkter Einzellagen in faserverstärkten Kunststoffen die Beschreibung der Abweichung des realen, durch das Gewebe ondulierten, Verlaufes der Faserverstärkung von der unidirektional verstärkten Einzelschicht im Mittelpunkt [151]. Die Verwendung der Amplitude  $A$  für die Berechnung des Kennwerts kann ebenfalls als Grad der Exzentrizität bezüglich einer unidirektional verstärkten Einzelschicht mit ideal geradlinig und parallel verlaufenden Verstärkungsfasern ohne Ondulationen betrachtet werden.

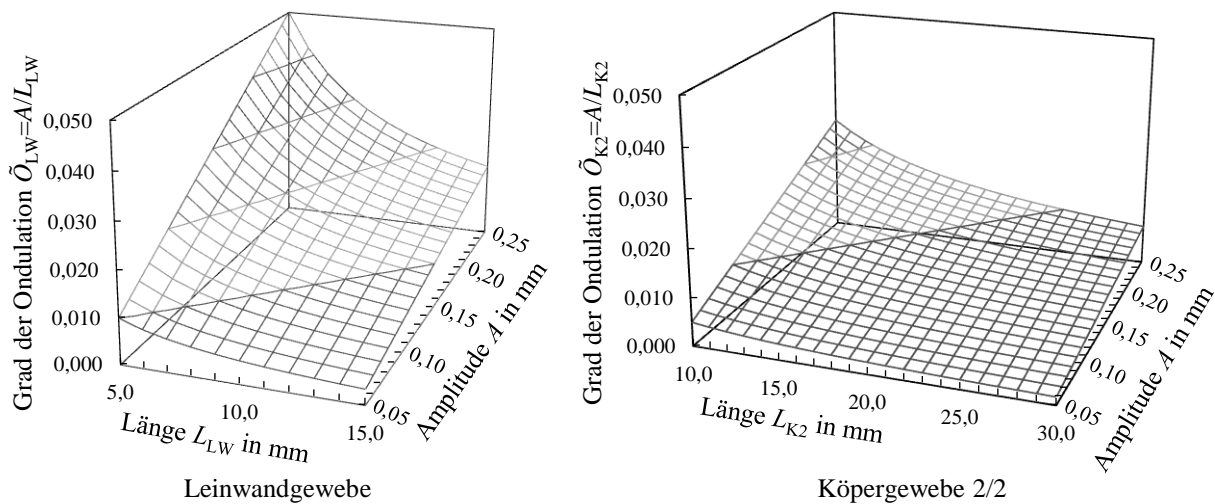
### Geometrische Abmessungen mesomechanischer Gewebeondulationen

Zur Identifikation der angenommenen mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund der geometrischen Parameter werden diese in ausgewählten und zugleich realistischen, äquidistanten Schritten variiert. Während die Amplitude  $A$  von 0,05 mm bis 0,25 mm in fünf äquidistanten Schritten von jeweils 0,05 mm variiert wird (0,05 mm; 0,10 mm; 0,15 mm; 0,20 mm; 0,25 mm), wird die Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$  von 2,5 mm bis 7,5 mm in fünf äquidistanten Schritten von jeweils 1,25 mm variiert (2,5 mm; 3,75 mm; 5,0 mm; 6,25 mm; 7,5 mm).

Der zuvor beschriebene Bereich der Variation der geometrischen Parameter ist im Hinblick auf die, in Kapitel 10 verwendeten, drei Sätze vergleichbarer Probekörper für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen gewählt worden. Die jeweiligen relevanten bzw. realistischen, äquidistanten Schrittweiten gehen dabei im Wesentlichen aus den Datenblättern der Leinwand- und Köpergewebe 2/2 [121] und [122] basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123] (Satz 1), [120] und [119] basierend auf dem PYROFIL TR50S 6K [117] (Satz 2) und den Kohlenstofffaser-Prepregs G947 und G939 von HEXCEL [114] (Satz 3) hervor. Ähnliche Bereiche der geometrischen Abmessungen werden beispielsweise auch in BALLHAUSE 2007 [6] und MATSUDA et al. 2007 [84] verwendet.

### Grad der Ondulation für Leinwand- und Köpergewebe 2/2

Für die untersuchten Gewebekonstruktionen Leinwandgewebe und Köpergewebe 2/2 ergeben sich die geometrischen Abmessungen nach den in Abbildung 9.1 dargestellten Zusammenhängen. Bei der Berechnung des Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  nach Gleichung (9.9) hängt die Länge einer vollständigen Ondulation  $L = L_G$  von der Art der Gewebekonstruktion ab. Sie ergibt sich nach Gleichung (9.2). Die Amplitude  $A$  hängt dagegen nicht von der Art der Gewebekonstruktion ab, sondern ergibt sich aus der Dicke eines Rovingstrangs  $h_R$  nach Gleichung (9.6).



**Abbildung 9.2:** Graphische Darstellung des Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  über einer Ebene, aufgespannt von den Achsen der beiden geometrischen Parameter Amplitude  $A$  und Länge einer vollständigen Ondulation  $L$  mit Isolinien: Leinwandgewebe  $\tilde{O}_{LW}$  (links) und Köpergewebe 2/2  $\tilde{O}_{K2}$  (rechts).

Zur Berechnung des Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  ergeben sich damit ein Wertebereich für die Amplitude  $A$  von 0,05 mm bis 0,25 mm, variiert in fünf äquidistanten Schritten von jeweils 0,05 mm (0,05 mm; 0,10 mm; 0,15 mm; 0,20 mm; 0,25 mm), und zwei Wertebereiche für die Länge einer vollständigen Ondulation  $L$ . Die Länge einer vollständigen Ondulation eines Leinwandgewebes  $L_{LW}$  beinhaltet den Wertebereich von 5,0 mm bis 15,0 mm, variiert in fünf äquidistanten Schritten von jeweils 2,5 mm (5,0 mm; 7,5 mm; 10,0 mm; 12,5 mm; 15,0 mm), während die Länge einer voll-

ständigen Ondulation eines Köpergewebes  $2/2 L_{K2}$  den Wertebereich von 10,0 mm bis 30,0 mm, variiert in fünf äquidistanten Schritten von jeweils 5,0 mm (10,0 mm; 15,0 mm; 20,0 mm; 25,0 mm; 30,0 mm), beinhaltet.

Zur vollständigen Charakterisierung werden alle Permutationen der geometrischen Parameter Amplitude  $A$  und der Längen einer vollständigen Ondulation eines Leinwandgewebes  $L_{LW}$  und der Längen einer vollständigen Ondulation eines Köpergewebes  $2/2 L_{K2}$  betrachtet. Für beide Arten der Gewebekonstruktionen ergeben sich jeweils 25 unterschiedliche Kombinationen der geometrischen Parameter und damit 25 unterschiedliche Werte für den Grad der Ondulation  $\tilde{O}_{LW}$  bzw.  $\tilde{O}_{K2}$ . Abbildung 9.2 stellt grafisch den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  mit Isolinien über eine Ebene dar, die von den Achsen der beiden geometrischen Parameter Amplitude  $A$  und die Länge einer vollständigen Ondulation  $L$  aufgespannt wird. Dabei ist links der Grad der Ondulation  $\tilde{O}_{LW}$  für Leinwandgewebe dargestellt und rechts der Grad der Ondulation  $\tilde{O}_{K2}$  für Köpergewebe  $2/2$ , jeweils basierend auf den gleichen geometrischen Parametern Amplitude  $A$  und Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$ . Dabei liefert der Grad der Ondulation für Leinwandgewebe  $\tilde{O}_{LW}$  Werte im Bereich von 0,00333 bis 0,05000 und der Grad der Ondulation für Köpergewebe  $\tilde{O}_{K2}$  liefert Werte im Bereich von 0,00166 bis 0,02500. Damit gilt  $\tilde{O}_{LW} = 2\tilde{O}_{K2}$ .

## 9.4 Analytisches Modell

Die Untersuchungen eines Modells, das lediglich auf rein analytischen Annahmen und Voraussetzungen basiert, werden hier beschrieben. Es wird auf die Berechnung und Auswertung der relevanten Größen eingegangen.

### 9.4.1 Mathematisches Modell und Voraussetzungen

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Einführung eines mathematischen Modells zur Beschreibung der Ondulation in faserverstärkten Kunststoffen mit Gewebeverstärkung. Um die Komplexität auf ein eindimensionales Problem zu reduzieren, wird dabei lediglich die Mittellinie eines ondulierten Kettstrangs betrachtet. Die sich dadurch ergebende Geometrie im mesomechanischen Maßstab kann dann näherungsweise durch eine mathematische Sinus-Funktion beschrieben werden. Für eine repräsentative Längeneinheit einer kompletten Ondulation

$$y(x) = A \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \quad (9.10)$$

wird das Argument der trigonometrischen Funktion im Intervall  $(2\pi \frac{x}{L}) \in [0, 2\pi]$  vorausgesetzt, was zur Definitionsmenge  $x \in [0, L]$  führt. Die Vorteile der Wahl einer trigonometrischen Funktion sind Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit im gesamten Definitionsbereich [18], [130]. Darüber hinaus kann der repräsentative Definitionsbereich aufgrund von Symmetriegründen auf die Wellenlänge einer kompletten Ondulation  $\mathbb{D} = [0, L]$  reduziert werden. Mit beliebiger Amplitude  $A$  und  $x \in [0, L]$  ergibt sich das repräsentative Intervall des Arguments der trigonometrischen Funktion  $\mathbb{D} = [0, 2\pi]$ .

In der dargestellten analytischen Näherung wird vorausgesetzt, dass der ondulierte Strang keine Verzerrung durch Dehnung oder Stauchung erfährt, sondern stets seine ursprüngliche Länge beibehält. Mechanisch wird diese Voraussetzung als unendlich hohe Steifigkeit in Längsrichtung formuliert,

$$E_1 = E_1 \rightarrow \infty . \quad (9.11)$$

Gleichzeitig wird vorausgesetzt, dass der ondulierte Strang biegeschlaff ist. Diese Voraussetzung

wird mechanisch als unendlich kleine Biegesteifigkeit in Querrichtung formuliert zu

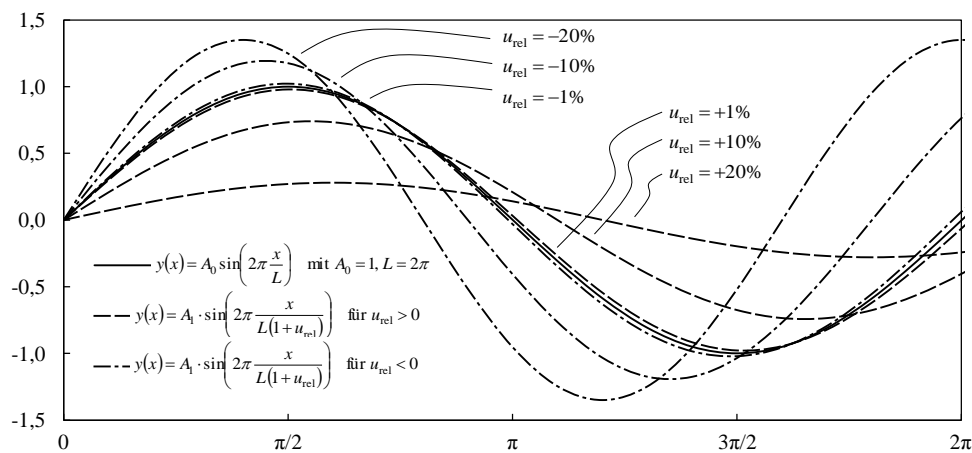
$$E_q = E_2 \rightarrow 0. \quad (9.12)$$

Die beiden Voraussetzungen (9.11) und (9.12) beschreiben damit einen ideal steifen und gleichzeitig ideal biegeschlaffen Strang.

Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass der sinusförmige Strang bei  $x = 0$  unverschieblich in  $x$ -Richtung jedoch drehbar um die senkrecht dazu stehende  $y$ -Richtung gelagert ist. Am Nulldurchgang bei  $x = L$  werden dabei unterschiedliche Verschiebungen in  $x$ -Richtung aufgebracht. Unter den dargestellten Voraussetzungen kann eine Kinematik abgeleitet werden, die lediglich von geometrischen Bedingungen abhängt. Zur Definition eines vergleichbaren und aussagekräftigen Maßes für eine Deformation, die auf einer Verschiebung des Endpunktes der repräsentativen Längeneinheit in  $x$ -Richtung beruht, wird die Summe aus ursprünglicher Länge der repräsentativen Längeneinheit  $l_0 = L$  und der aufbrachten Verschiebung  $\Delta l = l_1 - l_0 = l_1 - L$  und auf die ursprüngliche Länge des repräsentativen Längeneinheit  $l_0 = L$  normiert und

$$u_{\text{rel}} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta l}{L} = \frac{l_1 - L}{L} = \frac{l_1}{L} - 1 \quad (9.13)$$

als normierte Verschiebung eingeführt. Die normierte Verschiebung ist positiv für eine Verschiebung in positive  $x$ -Richtung,  $u_{\text{rel}} > 0$  für  $\Delta l > 0$  und negativ für eine Verschiebung in negative  $x$ -Richtung,  $u_{\text{rel}} < 0$  für  $\Delta l < 0$ . Die durch die aufbrachten Verschiebungen folgenden Deformationen des ideal steifen und gleichzeitig ideal biegeschlaffen Strangs beruhen damit lediglich auf kinematischen und geometrischen Zusammenhängen.



**Abbildung 9.3:** Graphische Darstellung der Annahme sich lediglich geometrisch verformender Sinuskurven mit  $A_0 = 1$  und  $L = 2\pi$ : Ursprünglicher Graph: Volllinie; Positiv deformierte Graphen: Strichlinie; Negativ deformierte Graphen: Strichpunktlinie.

Die zuvor getroffenen Voraussetzungen bedingen zwei verschiedene Effekte, wenn auf das Modell positiv bzw. negativ definierte Deformationen aufgebracht werden. Positiv definierte Deformationen führen zu einer Glättung bzw. Abflachung. Die Amplitude nimmt ab. In diesem Fall ist der Grenzwert der maximal aufbringbaren Deformation dann erreicht, wenn der Strang komplett gestreckt ist und die Amplitude  $A = 0$  ist. Dagegen nimmt die Amplitude zu, wenn eine negativ definierte Deformation aufgebracht wird. Negativ definierte Deformationen führen zu einer Aufstauchung. In diesem Fall ist der Grenzwert der maximal aufbringbaren negativen Deformation die Grenze des Definitionsbereichs. Abbildung 9.3 zeigt die ursprünglich undeformierte Sinuskurve als breite Volllinie, die sich ergebenden sin-Kurven für positiv definierte Deformationen als dünne Strichlinien und für negative Deformationen als dünne Strichpunktlinien.



### 9.4.2 Analytischer Lösungsansatz

Die Bogenlänge einer Funktion ist durch

$$s = \int_0^L \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad (9.14)$$

definiert [18], [130]. Einsetzen der vorausgesetzten Sinus-Funktion (9.10) für den idealisiert vorausgesetzten Verlauf einer Ondulation in Gleichung 9.14 liefert durch Umformung ein elliptisches Integral zweiter Ordnung [18], [32], [130]

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi. \quad (9.15)$$

Für die Beschreibung realer geometrischer Dimensionen ist die Berücksichtigung einer beliebigen Amplitude  $A$  und einer beliebigen Länge  $L$  als zwei voneinander unabhängiger Parameter notwendig. Die Bogenlänge einer Sinus-Funktion wird schließlich über die Formulierung eines vollständigen elliptischen Integrals zweiter Ordnung berechnet. Dafür wird die Beziehung  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  zwischen jeweils quadriertem Sinus und Kosinus mit gleichem Argument angewendet. Zusätzlich wird die untere Integrationsgrenze zu 0 und die obere Integrationsgrenze zu  $\frac{\pi}{2}$  gesetzt. Durchführung der Substitution  $\tilde{x} = 2\pi \frac{x}{L}$  ermöglicht die Berechnung eines Viertels der Bogenlänge zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2 \cos^2 \left(2\pi \frac{x}{L}\right)} \, dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2 \left[1 - \sin^2 \left(2\pi \frac{x}{L}\right)\right]} \, dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2\right] - \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2 \sin^2 \left(2\pi \frac{x}{L}\right)} \, dx = \\ &= \sqrt{1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2}{1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2} \sin^2 \left(2\pi \frac{x}{L}\right)} \, dx. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Die Anwendung der zuvor genannten Substitution  $\tilde{x} = 2\pi \frac{x}{L}$ , liefert für das Differential  $dx = d\tilde{x} \frac{L}{2\pi}$ , und führt auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} s &= \sqrt{1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2}{1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2} \sin^2 \tilde{x}} \, d\tilde{x} \cdot \frac{L}{2\pi} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 + A^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2}{1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2} \sin^2 \tilde{x}} \, d\tilde{x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 + A^2} \cdot \text{E} \left( \frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{(2\pi \frac{A}{L})^2}{1 + (2\pi \frac{A}{L})^2}} \right) = \\
&= \sqrt{\frac{L^2 + 4\pi^2 A^2}{4\pi^2}} \cdot \text{E} \left( \frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{4\pi^2 A^2}{L^2 + 4\pi^2 A^2}} \right), \tag{9.17}
\end{aligned}$$

wobei der Faktor  $\sqrt{\frac{L^2 + 4\pi^2 A^2}{4\pi^2}}$  als Verminderungsfaktor interpretiert, und das Argument  $\sqrt{\frac{4\pi^2 A^2}{L^2 + 4\pi^2 A^2}}$  als elliptischer Modul  $k$  identifiziert werden kann. Die Bogenlänge einer kompletten Ondulation  $s$  kann durch einfache Multiplikation mit 4 als Anzahl der sich wiederholenden Viertel-Sequenzen  $\frac{1}{4}s$  in einer gesamten Ondulation berechnet werden zu

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(2\pi \frac{A}{L}\right)^2 \cos^2\left(2\pi \frac{x}{L}\right)} dx = \\
&= 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 + A^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{(2\pi \frac{A}{L})^2}{1 + (2\pi \frac{A}{L})^2} \sin^2 \tilde{x}} d\tilde{x} = \\
&= 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 + A^2} \cdot \text{E} \left( \frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{(2\pi \frac{A}{L})^2}{1 + (2\pi \frac{A}{L})^2}} \right). \tag{9.18}
\end{aligned}$$

Die vorher getroffenen vereinfachenden Voraussetzungen und Randbedingungen müssen erfüllt werden, um eine Kinematik abzuleiten, die lediglich auf geometrischen Bedingungen beruht. Dafür muss die Bogenlänge auch nach aufbringen unterschiedlicher Maße von Deformation in  $x$ -Richtung  $u_{\text{rel}}$  konstant bleiben. Daraus folgt die beschreibende Gleichung zur Berechnung der sich ergebenden Amplitude  $A_1$  zu

$$f(A_1) = s(u_{\text{rel}}) - s(u_{\text{rel}} = 0) = 0, \tag{9.19}$$

die zur Berechnung der Wurzel  $A_1$ , die der sich ergebenden Amplitude entspricht, lediglich numerisch gelöst werden kann. Für jedes ausgewählte Maß der Deformation  $u_{\text{rel}}$  ergibt sich auf diese Weise eine zugehörige Änderung der Amplitude  $\Delta A$ . Nach der numerischen Berechnung der sich ergebenden Amplitude folgt für die Änderung der Amplitude zu

$$\Delta A = A(u_{\text{rel}}) - A(u_{\text{rel}} = 0) = A_1 - A_0, \tag{9.20}$$

die vom aufgebrachten Maß der Deformation in  $x$ -Richtung  $u_{\text{rel}}$  abhängt. Für den weiteren Verlauf der Untersuchungen erweist es sich als günstig, die normierte Änderung der Amplitude

$$w_{\text{rel}} = \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_1 - A_0}{A_0} = \frac{A_1}{A_0} - 1 \tag{9.21}$$

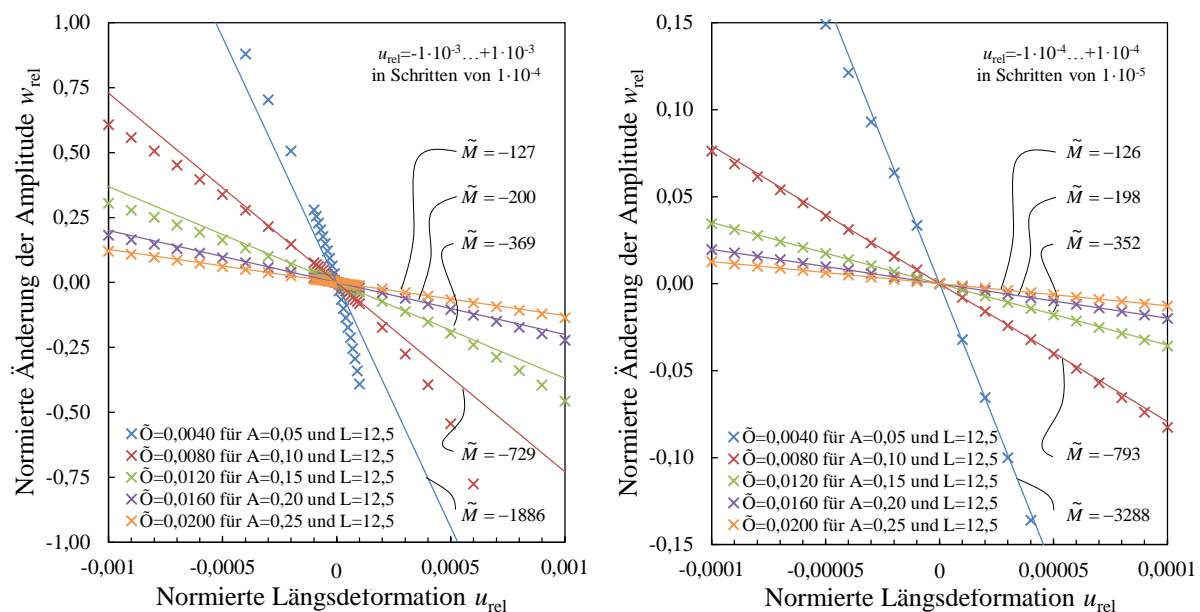
einzuführen, um eine weitere normierte Dimension zu erhalten. Damit kann die normierte Änderung der Amplitude  $w_{\text{rel}}$  über der normierten Verschiebung in  $x$ -Richtung  $u_{\text{rel}}$  dargestellt werden, sodass  $w_{\text{rel}}$ - $u_{\text{rel}}$ -Diagramme folgen. Der Zusammenhang hat einen Grenzwert für den Wert der normierten Verschiebung in  $x$ -Richtung

$$u_{\text{rel, max}} = \frac{s_{A_0} - l_0}{l_0}. \tag{9.22}$$

Für diesen Wert der Deformation weist der Algorithmus zur numerischen Bestimmung der Änderung der Amplitude eine Singularität auf. In diesem Fall entspricht die Singularität dem Zustand, bei dem die ursprünglich sinusförmige Kurve durch die aufgebrauchte positive Deformation komplett geglättet wird und vollständig abflacht. Die Amplitude  $A$  fällt auf Null ab. Im Gegensatz dazu führen aufgebrauchte negativ definierte Deformation zu einer geringeren Veränderung der Amplitude  $A$  zu höheren Werten. Im Fall aufgebrauchter negativer Deformationen kann mit dem Modell unter den getroffenen Voraussetzungen die Zunahme der Amplitude  $A$  bis zum Minimalwert des Grades der Deformation  $u_{\text{rel}} = -1$  beschrieben werden. Dieser Zustand entspricht vollständiger Stauchung. Für diesen Wert weist der Algorithmus zur numerischen Bestimmung der Änderung der Amplitude eine weitere Singularität auf. Der Zustand beschreibt die komplette Stauchung der ursprünglichen Sinuskurve über die repräsentative Längeneinheit aufgrund der aufgebrauchten negativen Deformation.

### Aspekte zur Auswertung bzw. zum grundsätzlichen Verhalten

Die Berechnungen werden für die ausgewählten geometrischen Parameter Amplitude  $A$  und Länge  $L$  des Modells durchgeführt. Dabei wird die Amplitude  $A$  von 0,05 mm bis 0,25 mm in fünf Schritten von 0,05 mm und die Länge  $L$  von 5 mm bis 15 mm in fünf Schritten von 2,5 mm variiert. Die Auswertung der graphisch Darstellung der Kinematik unter der Berücksichtigung realer geometrischer Dimensionen wird exemplarisch beschrieben.



**Abbildung 9.4:** Normierte Änderung der Amplitude  $w_{\text{rel}}$  über die aufgebrauchte normierte Längsdeformation  $u_{\text{rel}}$  im großen Intervall  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-3} \dots +1 \cdot 10^{-3}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-4}$  (links) und im kleinen Intervall  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-4} \dots +1 \cdot 10^{-4}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-5}$  für die 5 ausgewählten Schritte der Amplitude  $A$  bei der Länge  $L=12,5$  mm [129].

Abbildung 9.4 zeigt exemplarisch das  $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm für die fünf ausgewählten Schritte der Amplitude  $A$  bei der Länge  $L=12,5$  mm. Die aufgebrauchten Deformationen in  $x$ -Richtung  $u_{\text{rel}}$  sind in relevanten Bereichen für die Strukturmechanik von faserverstärkten Kunststoffen definiert worden. Dabei werden zwei Dekaden betrachtet. Das große Intervall beträgt  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-3} \dots +1 \cdot 10^{-3}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-4}$ , wie in Abbildung 9.4 links dargestellt, und das kleine Intervall beträgt  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-4} \dots +1 \cdot 10^{-4}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-5}$ , wie in Abbildung 9.4 rechts dargestellt. Mit Berücksichtigung des Nulldurchgangs ergeben sich damit 39 Schritte für das große bzw. 21 Schritte für das kleine Intervall bezüglich der aufgebrauchten Deformationen in  $x$ -Richtung  $u_{\text{rel}}$ .

Das zuvor beschriebene Verhalten führt auf Zusammenhänge mit negativer Steigung. Die Auswertung erfolgt, wie in Abschnitt 11.1.1 und analog zu OTTAWA et al. 2012 [129] beschrieben, nach Gleichung (11.2) mit dem Kennwert  $\tilde{M}$ . In den aufgebrachten Bereichen der normierten Deformation in  $x$ -Richtung  $u_{\text{rel}}$  und der normierten Änderung der Amplitude  $w_{\text{rel}}$  kann ein quasi-linearer Zusammenhang v. a. im kleineren Intervall identifiziert werden. Damit kann eine direkte lineare Kopplung zwischen Deformation und Form der Ondulation in gewebeverstärkten Einzellagen postuliert werden, wobei der Betrag der negativen Steigung die Sensitivität bezüglich der mesomechanischen Kinematik darstellt.

Das analytische Modell liefert für die fünf ausgewählten Schritte der Amplitude  $A$  bei der exemplarisch betrachteten Länge  $L=12,5$  mm einen größeren Betrag der negativen Steigung mit kleinerem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ . Dies entspricht einer höheren Sensitivität bezüglich der mesomechanischen Kinematik bei kleinem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ , da in diesem Fall die geometrische Intensität der Umlenkung, und damit die Abweichung von einem geradlinigen Verlauf, sehr gering ist. Der Zusammenhang ist jedoch sensitiv bzgl. dem Vorzeichen der aufgebrachten Deformation, wenn relativ große Werte für die positiv definierte Deformation  $u_{\text{rel}}$  aufgebracht werden und daraus eine Dehnung der Ondulation resultiert. Da relativ hohe Werte für die Dehnung bereits in Nähe der Singularität liegen, resultiert daraus eine signifikant stärkere Abnahme der Amplitude  $A$ .

Der lineare Zusammenhang erreicht Grenzen, wenn die aufgebrachten positiv definierten Deformationen die Grenzen des rein analytischen Modells erreichen. Wie bereits erwähnt, stellt die Singularität des Modells in diesem Fall den Zustand dar, bei dem die ursprünglich sinusförmige Kurve durch die aufgebrachte positive Deformation komplett geglättet wird und vollständig abflacht. Darüber hinaus ist die Sensitivität zur ausgewählten Amplitude sehr groß. Während bei der Länge  $L=12,5$  mm im größeren Intervall der aufgebrachten Deformation  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-3} \dots + 1 \cdot 10^{-3}$  der Zusammenhang für die beiden Amplituden  $A_{01}=0,05$  mm und  $A_{02}=0,10$  mm bereits nichtlinear wird, gilt für die größeren Amplituden  $A_{03}=0,15$  mm,  $A_{04}=0,20$  mm und  $A_{05}=0,25$  mm noch der quasi-lineare Zusammenhang, wie in Abbildung 9.4 links dargestellt. Im Gegensatz dazu kann der direkte quasi-lineare Zusammenhang im kleineren Intervall der aufgebrachten Deformation  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-4} \dots + 1 \cdot 10^{-4}$  für alle Kombinationen der geometrischen Parameter identifiziert werden, wie in Abbildung 9.4 rechts dargestellt.

## 9.5 Numerische Untersuchungen mit der FE-Methode

Zur Verifikation des analytischen Modells, wie zuvor in Abschnitt 9.4 dargestellt, werden numerische Untersuchungen mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) durchgeführt. Die Variation der geometrischen Parameter, wie in Abschnitt 9.3 beschrieben, dient zur Parameteridentifikation der angenommenen mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge in gewebeverstärkten Einzellagen. Die FE-Berechnungen erlauben die Berücksichtigung elastischer Anteile, die im rein analytischen Modell aufgrund der getroffenen stark vereinfachenden Voraussetzungen zunächst vernachlässigt werden. Im Detail werden linear-elastische statische FE-Berechnungen durchgeführt. Um die angenommene mesomechanische Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge zu identifizieren, werden Nichtlinearitäten, Versagensmechanismen und Reibungseffekte dabei vernachlässigt. Im Detail werden die Berechnungen mit dem FE-Programm ANSYS Workbench [95] durchgeführt.

### 9.5.1 Vorbemerkungen

Zu den numerischen Untersuchungen bedarf es einiger Vorbemerkungen, die für eine stringente und abschließend korrekte Durchführung und Auswertung der FE-Berechnungen wesentlich sind:

### 1. Orientierung des globalen Koordinatensystems

Das analytische Modell, wie zuvor in Abschnitt 9.4 dargestellt, folgt zunächst mathematischen Konventionen. Dabei werden eindimensionale Zusammenhänge üblicherweise als Funktion  $y(x)$  der abhängigen Variable  $y$  (Ordinate) über die unabhängige Variable  $x$  (Abszisse) in der  $x$ - $y$ -Ebene eines orthogonalen kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Im vorliegenden Fall spiegelt die  $x$ -Richtung die Dimension der Längsrichtung  $L$  und die  $y$ -Richtung die Dimension der Dickenrichtung  $h$  wider. Dies unterscheidet sich zu den Konventionen der strukturmechanischen Betrachtung von Tragwerken, wie in den Abschnitten 6.3 und 8.1 dargestellt ( $z$ -Richtung als Dimension der Dickenrichtung  $h$  nach unten positiv und  $x$ - $y$ -Ebene als Längs- bzw. Querdimensionen), schafft jedoch die direkte Vergleichbarkeit zum analytischen Modell und erleichtert dessen Verifikation.

### 2. Indizierung und Definition der Querverformungszahl $\nu$

Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Definition der doppelten Indizierung der Querverformungszahlen ist in Abschnitt 5.3 beschrieben. Sie folgt der Reihenfolge von Ursache und Wirkung. Das FE-Programm ANSYS Workbench [95] verwendet die gleiche Indizierung bzw. Definition für die Eingabe der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte für die elastostatischen FE-Berechnungen für orthotrope Materialien im FE-Preprocessor (vgl. große Querverformungszahl  $\nu_{12}$  (engl.: *major* POISSON's ratio) und kleine Querverformungszahl  $\nu_{21}$  (engl.: *minor* POISSON's ratio) [149], wie in Abschnitt 5.3 dargestellt).

### 3. Bezeichnung der Variablen des globalen und lokalen Koordinatensystems

Bei der strukturmechanischen Betrachtung von Tragwerken bezeichnet das  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem das globale Koordinatensystem, während das 1-2-3-Koordinatensystem das lokale Koordinatensystem darstellt. Dieser Konvention wird in der vorliegenden Arbeit gefolgt (vgl. Abschnitte 6.3 und 8.1). Im Gegensatz dazu bezeichnet die Eingabemaske des FE-Preprocessors die lokalen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte mit dem  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem, während die in Tabelle 9.3 angeführten Eingabewerte aus Gründen der konsistenten strukturmechanischen Betrachtung im 1-2-3-Koordinatensystem angegeben sind. Dabei sind die ebenen repräsentativen Sequenzen in den FE-Berechnungen, wie in Abbildung 9.1 unten dargestellt, aus Gründen der Vergleichbarkeit, Parameteridentifikation und Verifikation entsprechend der mathematischen Konvention in der  $x$ - $y$ -Ebene modelliert.

### 4. Eingabe der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte

Zur Eingabe der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte für die elastostatischen FE-Berechnungen werden die Eingabemasken des FE-Preprocessors in der verwendeten Version des FE-Programms ANSYS Workbench [95] verwendet. Das Materialverhalten bzw. die Materialsymmetrie der einzelnen Bereiche der repräsentativen Sequenzen werden dabei entsprechend den strukturmechanischen Voraussetzungen, wie in Abschnitt 9.2.2 beschrieben, gewählt. Da in der verwendeten Version des FE-Programms ANSYS Workbench [95] keine Eingabemaske für transversalisotropes Materialverhalten hinterlegt ist, werden für die unidirektional verstärkten Bereiche, im Einzelnen des längs geschnittenen Rovingstrangs (hier: Kettstrang) und der quer geschnittenen Rovingstränge (hier: Schussstränge), die Eingabemasken für orthotrope Materialeigenschaften verwendet. Die Eingabe der neun unabhängigen Werkstoffkennwerte erfolgt derart, dass durch die Eingabe paarweise gleicher Werte in der transversalen Isotropieebene den Bereichen transversalisotropes Materialverhalten basierend auf fünf unabhängigen Werkstoffkennwerten zugeordnet wird. Dabei verläuft die jeweilige Achse der Transversalisotropie und damit die Richtung der unidirektional vorausgesetzten Faserverstärkung im Falle des längs geschnittenen Rovingstranges entlang der theoretischen Mittellinie bzw. entlang der Kontur des längs geschnittenen Rovingstranges (hier: Kettstrang) sowie senkrecht zum Querschnitt der quer geschnittenen Rovingstränge (hier: Schussstränge). Tabelle 9.3 enthält die Eingabewerte der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte für die elastostatischen FE-Berechnungen.

#### 5. Zweidimensionale FE-Berechnung

Zur Validierung der dämpfungserhöhenden Wirkung der angenommenen mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen werden, wie in Kapitel 10 dargestellt, experimentelle strukturdynamische Untersuchungen mit flachen stabförmigen Probekörpern durchgeführt. Der Ausschwingvorgang der einseitig fest eingespannten Probekörper wird strukturmechanisch als transversal schwingender Balkens beschrieben. Wie in Abschnitt 8.1 beschrieben, ist der Balken ein eindimensionales mechanisches Tragwerk. Dabei wird die Dimension der Breite  $b$  vernachlässigt. In diesem Zusammenhang sind die Gewebeondulationen ein Effekt in Längs- und Dickenrichtung ( $x$ - $z$ -Ebene bei strukturmechanischer Betrachtung bzw.  $x$ - $y$ -Ebene bei mathematischer Betrachtung). Aus diesem Grund sind die FE-Modelle der repräsentativen Sequenzen, wie in Abbildung 9.1 unten dargestellt, eben modelliert und werden zweidimensional berechnet. Aus Gründen der Konsistenz des FE-Modells wird in der Eingabemaske des FE-Preprocessors der verwendeten Version des FE-Programms ANSYS Workbench [95] für elastostatische Berechnungen im Falle orthotroper Materialeigenschaften jedoch die Eingabe dreidimensionalen Werkstoffkennwerte, wie in Tabelle 9.3 angeführt, verlangt.

#### 6. Orientierung der Werkstoffkennwerte am Elementkoordinatensystem

Im Falle der verwendeten Version des FE-Programms ANSYS Workbench [95] orientieren sich die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte für die durchgeführten elastostatischen Berechnungen am Elementkoordinatensystem. Dies ist v. a. bei der korrekten Modellierung des längs geschnittenen Rovingstranges (hier: Kettstrang), wie im Abschnitt 9.5.3 beschrieben, relevant. Zur Modellierung des Verlaufs der unidirektional vorausgesetzten Faserverstärkung entlang der theoretischen Mittellinie bzw. entlang der Kontur des längs geschnittenen Rovingstranges (hier: Kettstrang) folgt, wird das Elementkoordinatensystem der Elemente in diesem Bereich entsprechend orientiert. Im Detail wird den Elementen im relevanten Bereich eine Elementformulierung zugewiesen, die die Elementkoordinatensysteme an den primären Elementachsen und nicht am globalen Koordinatensystem ausrichtet.

#### 7. Aufgebrachte Deformationen bzw. Verzerrungen in $x$ -Richtung $u_{\text{rel}}$ bzw. $\varepsilon_x$

Während im analytischen Modell aufgrund der vereinfachend getroffenen Voraussetzungen der idealen Steifigkeit in Längsrichtung die aufgebrachten Deformationen als auf die Länge  $L$  normierte Verschiebungen strenggenommen keine Verzerrungen sind, können die aufgebrachten Verschiebungen im FE-Modell wegen der Berücksichtigung linear-elastischer Anteile auch als Verzerrungen betrachtet werden.

### 9.5.2 FE-Modell der ebenen repräsentativen Sequenzen

Die mesomechanische Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund geometrischer Zusammenhänge wird für Leinwand- und Köpergewebe 2/2 durch die definierte Variation sowohl der mesomechanischen geometrischen Parameter Amplitude  $A$  und Länge der Ondulation  $L$  bzw. Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$ , als auch der Materialeigenschaften und Randbedingungen parametrisch untersucht. Für die FE-Berechnungen werden ebene repräsentative Sequenzen von gewebeverstärkten Einzellagen modelliert.

Die FE-Modelle der ebenen repräsentativen Sequenzen orientieren sich an dem in Abschnitt 9.2.1 beschriebenen und in Abbildung 9.1 unten dargestellten Prinzip, und basieren auf analytischen Sinus-Funktionen. Zur genaueren Charakterisierung werden zunächst die Flächeninhalte der drei unterschiedlichen Bereiche der repräsentativen Sequenzen analytisch bestimmt. Zur direkten Verwendung der ebenen repräsentativen Sequenzen als FE-Modelle bedarf es an relevanten Stellen und Bereichen im Detail zusätzlich noch geringfügiger Modifikationen.

**Analytische Bestimmung der Flächeninhalte der drei unterschiedlichen Bereiche**

Die Geometrien der ebenen repräsentativen Sequenzen von gewebeverstärkten Einzellagen, wie in Abschnitt 9.2.1 dargestellt, basieren auf der analytischen Sinus-Funktion, Gleichung (9.1). Zur weiteren Charakterisierung werden die Anteile der einzelnen Bereiche an der repräsentativen Sequenz über ihre Flächeninhalte analytisch berechnet. Die Fläche der ebenen repräsentativen Sequenz ergibt sich mit der Dicke der repräsentativen Sequenz in den FE-Berechnungen  $h_{E,n} = 4A$  nach Gleichung (9.7) und der Länge einer vollständigen Gewebeondulation  $L = L_G = \lambda L_R$  nach Gleichung (9.2) für Leinwandgewebe mit  $\lambda = 2$  und Köpergewebe 2/2 mit  $\lambda = 4$  zu

$$A_{ERS} = h_{E,n} L_G = 4 \lambda A L_R . \quad (9.23)$$

Der Flächeninhalt unter der Halbwelle einer Sinus-Funktion, wie in Gleichung (9.1) beschrieben, ergibt sich durch Integration zu

$$A_{\sin} = \int_0^{\frac{L}{2}} A \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) = -A \frac{L}{2\pi} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right]_0^{L/2} = \frac{1}{\pi} A L . \quad (9.24)$$

Die Sinus-Funktion in Gleichung (9.1) entspricht dabei dem Leinwandgewebe mit  $\lambda = 2$ , und Gleichung (9.2) liefert  $L = L_{LW} = \lambda L_R = 2 L_R$ . Einsetzen des Zusammenhangs in Gleichung (9.24) liefert

$$A_{\sin} = \frac{2}{\pi} A L_R . \quad (9.25)$$

als Flächeninhalt unter der Halbwelle einer Sinus-Funktion ausgedrückt mit der Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$ .

Der Flächeninhalt des längs geschnittenen Rovingstranges (hier: Kettstrang) ergibt sich mit der Dicke eines Rovingstranges  $h_R = 2A$  nach Gleichung (9.6) und der Länge einer vollständigen Gewebeondulation  $L_G = \lambda L_R$  nach Gleichung (9.2) für Leinwandgewebe mit  $\lambda = 2$  und Köpergewebe 2/2 mit  $\lambda = 4$  zu

$$A_K = h_R L_G = 2 \lambda A L_R . \quad (9.26)$$

Der Flächeninhalt eines quer geschnittenen Rovingstranges (hier: Schussstrang) entspricht dem doppelten Flächeninhalt unter der Halbwelle einer Sinus-Funktion  $A_{\sin}$  nach Gleichung (9.25),

$$A_{1,S} = 2 A_{\sin} = \frac{4}{\pi} A L_R \approx 1,273 A L_R . \quad (9.27)$$

Der Flächeninhalt aller quer geschnittenen Rovingstränge der jeweiligen Gewebekonstruktion ergibt sich mit der Multiplikation des Flächeninhalts eines quer geschnittenen Rovingstranges  $A_{1,S}$  nach Gleichung (9.27) für Leinwandgewebe mit  $\lambda = 2$  und Köpergewebe 2/2 mit  $\lambda = 4$  zu

$$A_{\lambda,S} = \lambda A_{1,S} = \frac{4}{\pi} \lambda A L_R \approx 1,273 \lambda A L_R . \quad (9.28)$$

Der Flächeninhalt der verbleibenden Bereiche, die gefüllt mit reiner Matrix ohne jeglicher Faserverstärkung vorausgesetzt werden,  $A_M$  ergibt sich aus der Differenz der Gesamtfläche der ebenen repräsentativen Sequenz  $A_{ERS}$  nach Gleichung (9.23) mit der Summe der faserverstärkten Bereiche  $A_K$  und  $A_{\lambda,S}$  nach den Gleichungen (9.26) und (9.28) zu

$$A_M = A_{ERS} - (A_K + A_{\lambda,S}) = 4 \lambda A L_R - \left( 2 \lambda A L_R + \frac{4}{\pi} \lambda A L_R \right) =$$

$$= 2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \lambda A L_R \approx 0,727 \lambda A L_R . \quad (9.29)$$

Zusätzlich werden die relativen Anteile der Flächeninhalte der längs und/oder quer geschnittenen Rovingstränge,  $A_K$ ,  $A_{\lambda,S}$  zur ebenen repräsentativen Sequenz  $A_{ERS}$  angegeben. Der Anteil des längs geschnittenen Rovingstranges  $A_K$  nach Gleichung (9.26) an der ebenen repräsentativen Sequenz  $A_{ERS}$  nach Gleichung (9.23) ergibt sich zu

$$\frac{A_K}{A_{ERS}} = \frac{2 \lambda A L_R}{4 \lambda A L_R} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50 \% . \quad (9.30)$$

Der Anteil der quer geschnittenen Rovingstränge  $A_{\lambda,S}$  nach Gleichung (9.28) an der ebenen repräsentativen Sequenz  $A_{ERS}$  nach Gleichung (9.23) ergibt sich zu

$$\frac{A_{\lambda,S}}{A_{ERS}} = \frac{\frac{4}{\pi} \lambda A L_R}{4 \lambda A L_R} = \frac{1}{\pi} \approx 0,318 = 31,8 \% . \quad (9.31)$$

Der Anteil der faserverstärkt vorausgesetzten Bereiche  $A_K$  mit  $A_{\lambda,S}$  nach den Gleichungen (9.26) und (9.28) an der ebenen repräsentativen Sequenz  $A_{ERS}$  nach Gleichung (9.23) ergibt sich zu

$$\frac{A_K + A_{\lambda,S}}{A_{ERS}} = \frac{A_K}{A_{ERS}} + \frac{A_{\lambda,S}}{A_{ERS}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \approx 0,818 = 81,8 \% . \quad (9.32)$$

Der Anteil der verbleibenden Bereiche, die gefüllt mit reiner Matrix ohne jeglicher Faserverstärkung vorausgesetzt werden,  $A_M$  nach Gleichung (9.29) an der ebenen repräsentativen Sequenz  $A_{ERS}$  nach Gleichung (9.23) ergibt sich zu

$$\frac{A_M}{A_{ERS}} = \frac{2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \lambda A L_R}{4 \lambda A L_R} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \approx 0,182 = 18,2 \% . \quad (9.33)$$

Dabei werden die parametrischen Zusammenhänge bezüglich der relativen Anteile der Flächeninhalte in den Gleichungen (9.32) und (9.33) zur Berechnung der elastischen Bettung  $k_{el}$  (vgl. Abschnitte 9.5.4 und 9.5.5) sowie zur Berechnung des globalen Faservolumengehalts der gesamten repräsentativen Sequenz  $\varphi_{ERS}$  (vgl. Abschnitt 9.5.5) verwendet.

### Modellierung der repräsentativen Sequenzen und Modifikationen

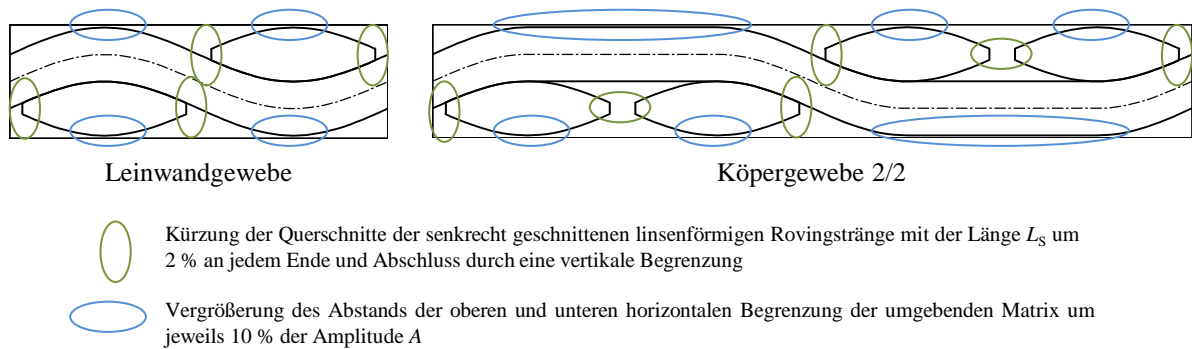
Die Modellierung der ebenen repräsentativen Sequenzen orientiert sich an dem in Abschnitt 9.2.1 beschriebenen und in Abbildung 9.1 unten dargestellten Prinzip. Um die in Abschnitt 9.5.3 beschriebenen notwendigen Analyseinstellungen der FE-Berechnungen zu definieren, bedarf es an relevanten Stellen und Bereichen im Detail noch geringfügiger Modifikationen. Ziel der Modifikationen ist die Vermeidung spitzer Winkel, bzw. die Schaffung verhältnismäßig großer Innenwinkel an relevanten Stellen und Bereiche.

Im Detail werden die Querschnitte der senkrecht geschnittenen, linsenförmigen Rovingstränge (hier: Schussstränge) mit der Länge  $L_R$  um 2 % an jedem Ende gekürzt und durch eine vertikale Begrenzung abgeschlossen. Die Längen der Querschnitte der senkrecht geschnittenen linsenförmigen Rovingstränge (hier: Schussstränge) betragen damit  $L_{R,mod} = 0,96 L_R$ . Die Länge der vollständigen Ondulation  $L_G$  nach Gleichung (9.2) bleibt davon unberührt. Zusätzlich wird der Abstand der oberen und unteren horizontalen Begrenzung der umgebenden Matrix um jeweils 10 % der Amplitude  $A$  vergrößert. Damit beträgt die Dicke der FE-Modelle der ebenen repräsentativen Sequenzen im Gegensatz zu Gleichung (9.7)  $h_{E,n} = 4,2 A$ .

Die modifizierten ebenen repräsentativen Sequenzen für die FE-Berechnungen sind in Abbildung 9.5 links für Leinwandgewebe und rechts für Köpergewebe 2/2 dargestellt. Die Modifikationen ermöglichen schließlich die Vernetzung des gesamten FE-Modells mit Viereckselementen. Wie in



Abschnitt 9.5.3 beschrieben, werden damit insgesamt verhältnismäßig kleine Elemente vermieden, die Berechnungsdauer reduziert und die Applikation der benötigten Elementformulierungen sowie Modellierung der Bedingungen zwischen den einzelnen Bereichen ermöglicht.



**Abbildung 9.5:** Modifikationen der FE-Modelle der ebenen repräsentativen Sequenzen einer gewebeverstärkten Einzellage für Leinwandgewebe (links) und Köpergewebe 2/2 (rechts): 1. Kürzung der Querschnitte der senkrecht geschnittenen linsenförmigen Rovingstränge mit der Länge  $L_R$  um 2 % an jedem Ende und Abschluss durch eine vertikale Begrenzung, 2. Vergrößerung des Abstands der oberen und unteren horizontalen Begrenzung der umgebenden Matrix um jeweils 10 % der Amplitude  $A$ .

### 9.5.3 Einstellungen der FE-Analyse

Die Einstellungen zur Durchführung der numerischen Berechnungen mit dem FE-Programm ANSYS Workbench [95] werden beschrieben. Sie beziehen sich auf die Vernetzung und die Elementformulierung der unterschiedlichen Bereiche der ebenen repräsentativen Sequenzen sowie die Modellierung der Bedingungen zwischen den einzelnen Bereichen. Die gewählten Einstellungen basieren auf den Ergebnissen der Untersuchungen in OTTAWA et al. 2012 [129]. Sie enthalten u. a. Betrachtungen unterschiedlicher Elementformulierungen, der Anzahl der Elemente (Grad der Diskretisierung) und des Konvergenzverhaltens.

#### Vernetzung

Da Gewebeeindulationen ein Effekt in Längs- und Dickenrichtung sind, und die Validierung der FE-Berechnungen mit flachen stabförmigen Probekörpern als eindimensionales mechanisches Tragwerk erfolgt, wird wie in Abschnitt 9.5.1 beschrieben, eine zweidimensionale FE-Berechnung durchgeführt. Dafür wird die ebene repräsentative Sequenz mit Elementen mit einer durchschnittlichen Kantenlänge bzw. Elementgröße von  $1 \cdot 10^{-3}$  mm diskretisiert. Da das FE-Modell einen Querschnitt durch eine Struktur darstellt, wird ein ebener Verzerrungszustand definiert. Dafür werden jedem Bereich ebene vierknotige Elemente ohne Mittelknoten und damit linearen Ansatzfunktionen in den Verschiebungen zugewiesen. Entsprechend den vereinfachenden strukturmechanischen Voraussetzungen in Abschnitt 9.2.2, wird den Bereichen der längs und quer geschnittenen Rovingstränge orthotropes Materialverhalten zugewiesen. Zur korrekten Modellierung des Bereichs des längs geschnittenen Rovingstranges (hier: Kettstrang) sind dabei, zusätzliche Einstellungen notwendig. Dies ermöglicht schließlich die Zuweisung der vorausgesetzten transversalisotropen Materialeigenschaften entsprechend der jeweiligen Vorzugsrichtung der Faserverstärkung. Den Bereichen der umgebenden Matrix werden dagegen isotrope Materialeigenschaften zugewiesen.

#### Elementformulierung

Dem Bereich des längs geschnittenen Rovingstranges (hier: Kettstrang) werden Elemente der Formulierung PLANE42 über APDL (Ansys Parametric Design Language) zugewiesen. Den bei-

den anderen Bereichen, im Einzelnen quer geschnittene Rovingstränge (hier: Schussstränge) und umgebende Matrix, werden standardmäßig Elemente der Formulierung PLANE182 zugewiesen, die für die weiteren Berechnungen beibehalten werden. Bei den beiden Elementformulierungen PLANE42 und PLANE182 handelt es sich um vierknotige Elemente ohne Mittelknoten und damit um lineare Ansatzfunktionen in den Verschiebungen [95]. Die standardmäßige Elementformulierung PLANE182 unterscheidet sich jedoch in einer für die Berechnungen relevanten Eigenschaft von der Elementformulierung PLANE42.

Die Elementformulierung PLANE42 wird dem Bereich des längs geschnittenen Rovingstranges (hier: Kettstrang) zugewiesen, da die Aktivierung der ersten Zusatzfunktion die Orientierung des Elementkoordinatensystems parallel zur Kontur des sinusförmigen Verlaufs ermöglicht. Im Detail bedingt die Aktivierung von KEYOPT(1) die Ausrichtung des Elementkoordinatensystems derart, dass die lokale  $x$ -Achse mit der  $I$ - $J$ -Achse des Elements zusammenfällt. Da für den Bereich zusätzlich ein strukturiertes Netz definiert wird, bedingt die aktivierte Zusatzoption für die Elementformulierung PLANE42 die Orientierung der  $I$ - $J$ -Achsen des Elements und damit der  $x$ -Achse des Elementkoordinatensystems parallel zur sinusförmigen Kontur bzw. Mittellinie des längs geschnittenen Rovingstranges. Die standardmäßige Elementformulierung PLANE182 bietet die zuvor beschriebene Möglichkeit nicht. Da sich die Vorzugsrichtungen von orthotropen oder anisotropen Materialmodellen im Falle der verwendeten Version des FE-Programms ANSYS Workbench [95] an den Elementkoordinatensystemen orientieren, ist die zuvor beschriebene Modifikation bezüglich der Elementformulierung die Voraussetzung für eine wirklichkeitstreue Abbildung der Realität in den FE-Berechnungen.

Mit den zuvor beschriebenen Modifikationen bezüglich der Elementformulierung PLANE42 mit aktivierter Zusatzoption KEYOPT(1) für den längs geschnittenen Rovingstrang werden die vereinfachenden strukturmechanischen Voraussetzungen, wie in Abschnitt 9.2.2 beschrieben, in den FE-Berechnungen abgebildet. Wenn diese Modifikationen nicht durchgeführt werden, würden dafür standardmäßig Elemente der Formulierung PLANE182 verwendet werden. Dabei würden die Elementkoordinatensysteme und damit die gerichteten Materialeigenschaften mit den Achsen des globalen Koordinatensystems zusammen fallen. Dies würde nicht den vereinfachenden strukturmechanischen Voraussetzungen, wie in Abschnitt 9.2.2 dargestellt, entsprechen, und wäre damit keine wirklichkeitstreue Abbildung der Realität in den FE-Berechnungen.

### **Modellierung der Bedingungen zwischen den einzelnen Bereichen**

Bezüglich der Bedingungen zwischen den unterschiedlichen Bereichen der ebenen repräsentativen Sequenzen in den FE-Berechnungen werden, als vereinfachende Annahme für die realen Verhältnisse, koinzidente Knoten modelliert. Das bedeutet, dass die Knoten zwischen den aneinander grenzenden unterschiedlichen Bereichen identisch sind, wobei die strukturmechanischen Materialeigenschaften elementabhängig sind, und von den unterschiedlichen Bereichen abhängen. Da zwischen den aneinander grenzenden unterschiedlichen Bereichen zunächst eine ideale Haftung ohne Durchdringung vorausgesetzt wird, entspricht die Modellierung damit einer wirklichkeitstreuen Abbildung.

### **9.5.4 Randbedingungen und Verschiebungen**

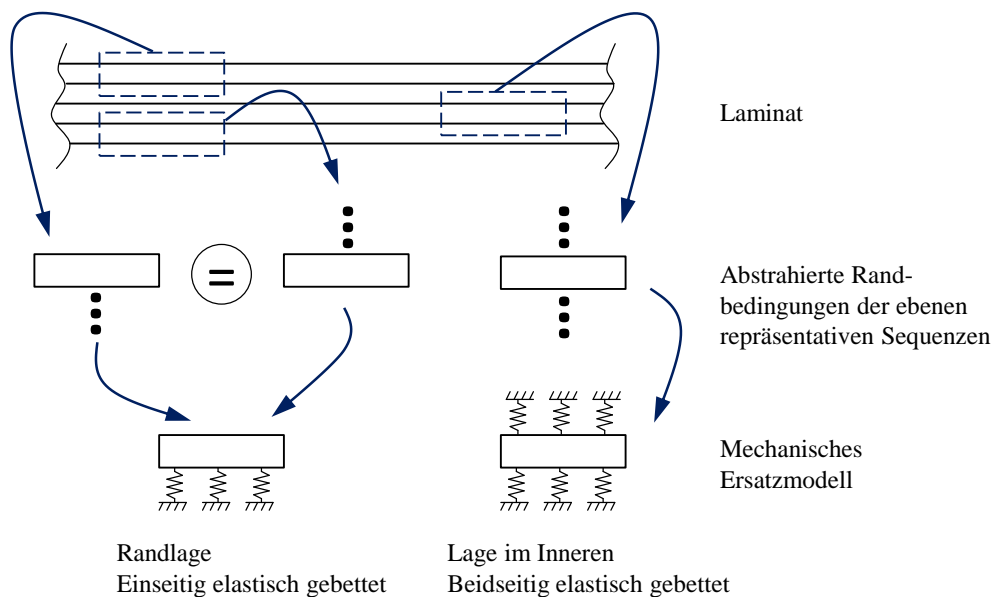
Die Randbedingungen und aufgebrachten Deformationen als Verschiebungen werden beschrieben. Zusätzlich werden zwei Fälle für die grundsätzlich unterschiedliche Position der modellierten repräsentativen Sequenz einer gewebeverstärkten Einzellage im Lagenaufbau unterschieden. Um realistische Randbedingungen zu modellieren und Querverformungseffekte nicht zu behindern, erlauben alle definierten Randbedingungen sowohl an den vertikalen Rändern als auch an den horizontalen Rändern der ebenen repräsentativen Sequenz Verschiebungen in Dickenrichtung.

### Randbedingungen an den vertikalen Rändern

An einer vertikalen Begrenzung, hier auf der linken Seite der ebenen repräsentativen Elemente, wie in den Abbildungen 9.1 unten bzw. 9.5 dargestellt, wird eine sog. feste Einspannung definiert. Dabei wird für die Knoten auf dieser vertikalen Begrenzung keine Verschiebung in Längsrichtung zugelassen. Auf der gegenüberliegenden vertikalen Begrenzung, hier auf der rechten Seite, wird ein sog. freies Ende definiert. An den Knoten dieser vertikalen Begrenzung werden die beschriebenen, ausgewählten Deformationen als Verschiebungen aufgebracht. Die Definitionen der Randbedingungen für die Knoten an beiden vertikalen Begrenzungen erlauben dabei freie Verschiebungen in Dickenrichtung und Rotation um die  $z$ -Achse, um Querverformungseffekte nicht zu behindern.

### Fallunterscheidung der Randbedingungen an den horizontalen Rändern

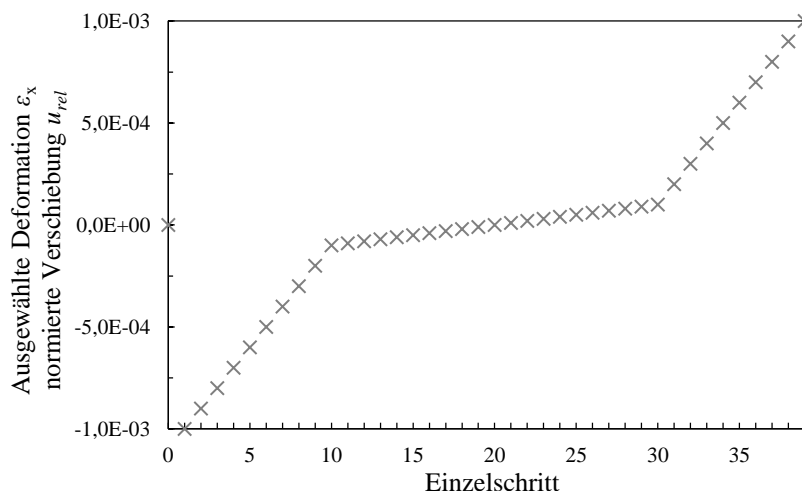
Bezüglich der Randbedingungen an den horizontalen Begrenzungen, d. h. der Ober- bzw. Unterseite des FE-Modells der ebenen repräsentativen Sequenz, existieren zwei grundlegend unterschiedliche Randbedingungen, wie in Abbildung 9.6 schematisch dargestellt. Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen mit Gewebeerstärkung bestehen üblicherweise aus mehr als einer und meistens aus einer geraden Anzahl von Einzellen  $N$ . Deshalb kann eine Einzelle als beidseitig elastisch gebettet betrachtet werden, wenn sie sich im Inneren eines Lagenaufbaus befindet. Handelt es sich um eine Randlage, d. h. oberste oder unterste Lage, eines Lagenaufbaus, kann diese als einseitig elastisch gebettet betrachtet werden. Abbildung 9.6 stellt die Fallunterscheidung schematisch dar, die im weiteren Verlauf der FE-Berechnungen berücksichtigt wird. Die Berechnung des jeweiligen Werts der elastischen Bettung  $k_{el}$  erfolgt in Abschnitt 9.5.5 über das gewichtete Mittel der Steifigkeiten in der Ebene der repräsentativen Sequenz, basierend auf den relativen Anteilen der Flächeninhalte der unterschiedlichen Bereiche (vgl. Abschnitt 9.5.2). Die Steifigkeiten hängen dabei von der jeweiligen Art der Verstärkungsfaser und dem vorausgesetzten Faservolumengehalt  $\varphi_f$  ab. Die detaillierte Berechnung wird in Abschnitt 9.5.5 beschrieben. Auch diese Fallunterscheidung der Randbedingungen an den horizontalen Rändern erlaubt über die gesamte Länge der repräsentativen Sequenz freie Verschiebungen in Dickenrichtung, um Querverformungseffekte nicht zu behindern.



**Abbildung 9.6:** Schematische Darstellung der beiden grundlegend unterschiedlichen Randbedingungen einer gewebeerstärkten Einzelle: Einseitig elastisch gebettet, im Falle einer Randlage (links) und beidseitig elastisch gebettet, im Falle einer Lage im Inneren eines Lagenaufbaus (rechts).

### Ausgewählte Deformationen als normierte Verschiebungen

An den Knoten der zuvor als freies Ende definierten vertikalen Begrenzung werden ausgewählte Deformationen als normierte Verschiebungen aufgebracht. Da dabei jeweils ein diskreter Funktionswert vorgegeben wird, handelt es sich im Detail um ein sog. DIRICHLET<sup>1</sup>-Randwertproblem. Sie werden dabei in zwei Dekaden mit jeweils zehn äquidistanten Schritten aufgebracht. Die Intervalle der beiden Dekaden sind  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-3} \dots + 1 \cdot 10^{-3}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-4}$  und  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-4} \dots + 1 \cdot 10^{-4}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-5}$ . Die normierten Verschiebungen werden damit in 39 Schritten am freien Ende, hier auf der rechten Seite, in Längs- bzw.  $x$ -Richtung aufgebracht. Die 39 Schritte werden in einem, für die spätere Auswertung, sinnvollen Verlauf aufgebracht, wie in Abbildung 9.7 dargestellt.



**Abbildung 9.7:** Darstellung des, für die spätere Auswertung sinnvollen, Verlaufs der 39 Schritte der normierten Verschiebung in Längs- bzw.  $x$ -Richtung in den beiden Dekaden  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-3} \dots + 1 \cdot 10^{-3}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-4}$  und  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-4} \dots + 1 \cdot 10^{-4}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-5}$ .

### 9.5.5 Strukturmechanische Werkstoffkennwerte

Als Verstärkungsfasern werden exemplarisch HT-Kohlenstofffasern betrachtet. Sie werden entsprechend ihrer strukturmechanischen Eigenschaften und Werkstoffkennwerte in mechanisch (hoch-)beanspruchten, lasttragenden Strukturen eingesetzt. Die Berechnung der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte und deren Eingabe in die Eingabemaske des FE-Preprocessors der verwendeten Version des FE-Programms ANSYS Workbench [95] für elastostatische Berechnungen wird beschrieben. Die Ergebnisse erlauben die Identifikation des Einflusses der jeweiligen Art der Verstärkungsfasern auf die angenommene mesomechanische Kinematik aufgrund geometrischer Parameter in gewebeverstärkten Einzellagen.

#### Strukturmechanische Eigenschaften von HT-Kohlenstofffasern

In den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen, wie in Kapitel 10 dargestellt, werden flache stabförmige Probekörper zur Validierung der angenommenen mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge untersucht. Die drei Sätze vergleichbarer Probekörper sind aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff, die jeweils  $0^\circ$ -unidirektional verstärkt oder  $0^\circ$ -gewebeverstärkt (in Kettrichtung) sind. Bei den verwendeten Rovings, aus denen auch die zugehörigen Gewebe hergestellt sind, handelt es sich um sog. HT-Kohlenstofffasern, wie in Kapitel 3 beschrieben [123] mit [122], [121] und [117] mit [120], [119] sowie [114].

<sup>1</sup> PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET, \* 13. Februar 1805 in Düren, † 5. Mai 1859 in Göttingen. Deutscher Mathematiker.

Es wird vorausgesetzt, dass die HT-Kohlenstofffasern im gleichen Epoxidharz (vergleichbar mit ARALDITE LY 556/ARADUR 917/ACCELERATOR DY 070 von HUNTSMAN [96] bzw. HEXPLY M18/1 [114] von HEXCEL, wie in den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen in Kapitel 10 verwendet) als duroplastisches Matrixsystem mit einem Elastizitätsmodul  $E_m=3,3$  GPa und einer Querverformungszahl  $\nu_m=0,35$  eingebettet sind.

**Tabelle 9.1:** Strukturmechanische Werkstoffkennwerte der Einzelkomponenten: Links: HT-Kohlenstofffasern [114], [117], [123], [124], [149]. Rechts: Epoxidharz als polymeres, duroplastisches Matrixsystem [114], [96], [149].

| Art der Verstärkungsfaser                      | HT-Kohlenstofffaser               | Polymeres Matrixsystem                 | Epoxidharz als duroplastisches Matrixsystem |
|--|-----------------------------------|--|---|
| <i>Strukturmechanische Eigenschaft</i>         | <i>Wert</i>                       | <i>Strukturmechanische Eigenschaft</i> | <i>Wert</i>                                 |
| Längssteifigkeit $E_{f,1}$                     | 230 GPa                           | Steifigkeit $E_m$                      | 3,3 GPa                                     |
| Quersteifigkeit $E_{f,2}$                      | 28 GPa                            | Schubsteifigkeit $G_m^*$               | 1,22 GPa *                                  |
| Längs-Quer-Schubsteifigkeit $G_{f,12}$         | 50 GPa                            | Querverform. $\nu_m$                   | 0,35  |
| Quer-Quer-Schubsteifigkeit $G_{f,23}^*$        | 11,4 GPa *                        |  |   |
| Querverf. senkr. b. Längsverf. $\nu_{f,12}$    | 0,230                             |  |   |
| Querverf. längs b. Querverf. $\nu_{f,21}^{**}$ | 0,028 **                          |  |   |
| Querverf. senkr. b. Querverf. $\nu_{f,23}$     | 0,225                             |  |   |
| <b>Quellen</b>                                 | [114], [117], [123], [124], [149] | <b>Quellen</b>                         | [96], [114], [149]                          |

\* kein unabh. Werkstoffkennwert, ermittelt nach Gl. (4.50) wg. (Quasi-)Isotropie

\*\* kein unabh. Werkstoffkennwert, ermittelt nach MAXWELL-BETTI-Beziehung (5.10)

Tabelle 9.1 enthält die strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der Einzelkomponenten, links der HT-Kohlenstofffasern als Verstärkungsfasern sowie rechts des Epoxidharzes als polymeres, duroplastisches Matrixsystem [96], [114], [117], [123], [124], [149]. Zusätzlich werden die Dichten der Einzelkomponenten  $\varrho$  als physikalischer Werkstoffkennwert angegeben. In der Literatur oder entsprechenden technischen Datenblättern werden die Dichten für HT-Kohlenstofffasern mit  $\varrho_{\text{HT-Carbon}} = 1,74 \text{ g/cm}^3$  angegeben. Eine typische Angabe der Dichte von Epoxidharz als polymeres, duroplastisches Matrixsystem ist  $\varrho_m = 1,20 \text{ g/cm}^3$ .

### Homogenisierte strukturmechanische Werkstoffkennwerte der 0°-unidirektional verstärkten Einzelschicht

Wie in Abschnitt 9.2.2 wird vereinfachend vorausgesetzt, dass die betrachteten Rovingstränge ideal parallel unidirektional verstärkt sind und jeweils den gleichen (lokalen) Faservolumengehalt  $\varphi_{f,R}$  aufweisen. Aufgrund des vorausgesetzten transversalisotropen Materialverhaltens bezüglich der Richtung der Faserverstärkung ergeben sich damit im lokalen Koordinatensystem fünf voneinander unabhängige strukturmechanische Werkstoffkennwerte, wie in Abschnitt 4.2.4) dargestellt. Die Berechnung der makroskopischen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der 0°-unidirektional faserverstärkten Bereiche erfolgt für HT-kohlenstofffaserverstärktes Epoxidharz im lokalen 1-2-3-Koordinatensystem nach den mikromechanischen Homogenisierungsansätzen, wie in Kapitel 5 dargestellt. Als lokaler Faservolumengehalt wird dabei  $\varphi_{f,R} = 65\%$  vorausgesetzt. Der Wert wird abschließend in Abschnitt 12.3 diskutiert.

Die Steifigkeit der unidirektional verstärkten Einzelschicht in Faserlängsrichtung  $E_1$  wird nach Gleichung (5.1), als mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$  gewichtetes Mittel der Steifigkeiten der Einzelkomponenten, berechnet. Die Steifigkeit der unidirektional verstärkten Einzelschicht quer zur Faserlängsrichtung  $E_2$  wird nach CHAMIS 1983 [24] bzw. CHAMIS 1984 [25] nach Gleichung (5.3) berechnet. Dabei gilt aufgrund der Transversalisotropie  $E_2 = E_3$ . Die Schubsteifigkeit der unidirektional verstärkten Einzelschicht parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung  $G_{12}$  ergibt sich ebenfalls nach CHAMIS 1983 [24] bzw. CHAMIS 1984 [25] nach Gleichung (5.5), und es gilt  $G_{12} = G_{13}$ . Die Schubsteifigkeit der unidirektional verstärkten Einzelschicht senkrecht/senkrecht zur Faserlängsrichtung  $G_{23}$ , und damit in der Isotropieebene, wird nach TSAI 1980 [161] nach Gleichung (5.8) berechnet. Die Querverformungszahl der unidirektional verstärkten Einzelschicht senkrecht bei Längsverformung  $\nu_{12}$  wird nach Gleichung (5.9), als mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$  gewichtetes Mittel der Querverformungszahlen der Einzelkomponenten, berechnet. Aufgrund der Transversalisotropie gilt  $\nu_{12} = \nu_{13}$ . Die Querverformungszahl der unidirektional verstärkten Einzelschicht längs bei Querverformung  $\nu_{21}$  ergibt sich nach der sog. MAXWELL-BETTI-Beziehung nach Gleichung (5.10). Hier gilt aufgrund der Transversalisotropie  $\nu_{21} = \nu_{31}$ . Die Querverformungszahl der unidirektional verstärkten Einzelschicht quer bei Querverformung  $\nu_{23}$  ergibt sich nach FOYE 1972 [43] nach Gleichung (5.13), wobei  $\nu_{23} = \nu_{32}$  gilt. Tabelle 9.2 enthält die homogenisierten strukturmechanischen Werkstoffkennwerte der unidirektional verstärkten Einzelschicht aus HT-kohlenstofffaserverstärktem Epoxidharz im lokalen 1-2-3-Koordinatensystem mit einem vorausgesetzten (lokalen) Faservolumengehalt im Rovingstrang  $\varphi_{f,R} = 65\%$ . Zusätzlich ist die Dichte des Verbundmaterials  $\rho_c$  nach Gleichung (5.16), als mit dem Faservolumengehalt  $\varphi_f$  gewichtetes Mittel der Dichten der Einzelkomponenten, berechnet worden. Der physikalischer Werkstoffkennwert beträgt für HT-kohlenstofffaserverstärktes Epoxidharz  $\rho_{c,HT-Carbon-EP} = 1,55 \text{ g/cm}^3$ .

### Berechnung der elastischen Bettung

Wie in Abschnitt 9.5.4 beschrieben und in Abbildung 9.6 schematisch dargestellt, bedarf es einer Fallunterscheidung bezüglich der Randbedingungen an den horizontalen Rändern. Mit der identifizierten einseitigen oder beidseitigen Bettung ergibt sich zusätzlich zu den drei Bereichen der repräsentativen Sequenzen (längs und quer geschnittene unidirektional faserverstärkte Rovingstränge sowie Bereiche mit Reinharz ohne Faserverstärkung) die elastische Bettung  $k_{el}$  als vierter Bereich. Da eine zweidimensionale Analyse durchgeführt wird, erfolgt die Berechnung des jeweiligen Wertes der elastischen Bettung  $k_{el}$  über das gewichtete Mittel der Steifigkeiten in der Ebene der repräsentativen Sequenz, basierend auf den relativen Anteilen der Flächeninhalte der unterschiedlichen Bereiche, wie in den Gleichungen (9.32) und (9.33) parametrisch ausgedrückt (vgl. Abschnitt 9.5.2). Die Steifigkeiten in der Ebene der repräsentativen Sequenz sind für die Bereiche der längs und quer geschnittenen Rovingstränge jeweils die Quersteifigkeit  $E_2$  sowie für den Bereich der umgebenden Matrix die Steifigkeit des Reinharzes  $E_m$ . Abhängig von der Art

der Verstärkungsfaser ergibt sich für die elastische Bettung

$$\begin{aligned}
 k_{\text{el}} &= \frac{A_K + A_{\lambda,S}}{A_{\text{ERS}}} E_2 + \frac{A_M}{A_{\text{ERS}}} E_m \\
 &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) E_2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) E_m \\
 &\approx 0,818 E_2 + 0,182 E_m .
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

Dieser Zusammenhang führt auf  $k_{\text{el, HT-Carbon}} \approx 9,5 \text{ GPa}$  für HT-Kohlenstoffaserverstärkung als Wert für die elastische Bettung an den horizontalen Rändern. Die verhältnismäßig geringe Steifigkeit der unidirektional HT-kohlenstoffaserverstärkten Bereiche in Querrichtung resultiert aus dem zuvor erwähnten anisotropen Materialverhalten der HT-Kohlenstofffaser selbst.

**Tabelle 9.2:** Homogenisierte strukturmechanische Werkstoffkennwerte der 0°-unidirektional verstärkten Einzelschicht (0°-UD-ES) aus HT-kohlenstoffaserverstärktem Epoxidharz im lokalen 1-2-3-Koordinatensystem mit einem vorausgesetzten (lokalen) Faservolumengehalt im Rovingstrang  $\varphi_{f,R} = 65 \%$ .

| Art der Faser-<br>verstärkung<br>der 0°-UD-ES           | HT-kohlenstoff-<br>faserverstärktes<br>Epoxidharz | mikromechanischer<br>Homogenisierungs-<br>ansatz nach |
|---|---|---|
| Längssteifigkeit<br>$E_1$                               | 150,7 GPa   | gew. Mittel Steifigk.<br>Gleichung (5.1)              |
| Quersteifigkeit<br>$E_2 = E_3$                          | 11,4 GPa  | CHAMIS 1983/84 [24], [25]<br>Gleichung (5.3)          |
| Längs-Quer-Schub-<br>steifigkeit $G_{12} = G_{13}$      | 5,7 GPa   | CHAMIS 1983/84 [24], [25]<br>Gleichung (5.5)          |
| Quer-Quer-Schub-<br>steifigkeit $G_{23} = G_{32}^*$     | 3,7 GPa *   | TSAI 1980 [161]<br>Gleichung (5.8)                    |
| Querverf. quer. b.<br>Längsverf. $\nu_{12} = \nu_{13}$  | 0,272   | gew. Mittel Querverf.<br>Gleichung (5.9)              |
| Querverf. längs b.<br>Querverf. $\nu_{21} = \nu_{31}^*$ | 0,021 *   | MAXWELL-BETTI<br>Gleichung (5.10)                     |
| Querverf. Quer b.<br>Querverf. $\nu_{23} = \nu_{32}$    | 0,333   | FOYE 1972 [43]<br>Gleichung (5.13)                    |

\* kein unabhängiger Werkstoffkennwert für transversalisotropes Materialverhalten

### Zuweisung der Materialeigenschaften zu den unterschiedlichen Bereichen

Wie zuvor in Abschnitt 9.2.2 beschrieben, werden im FE-Modell der ebenen repräsentativen Sequenz bezüglich der jeweiligen Steifigkeiten als charakteristische mechanische Werkstoffkennwerte drei unterschiedliche Bereiche (längs und quer geschnittene unidirektional faserverstärkte Rovingstränge sowie Bereiche mit Reinharz ohne Faserverstärkung) zuzüglich des vierten Bereiches der elastischen Bettung vorausgesetzt. Die Zuweisung erfolgt über die entsprechenden Eingabemasken des FE-Preprocessors [95].

Tabelle 9.3 enthält die Eingabewerte der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte für die Eingabemaske des FE-Preprocessors der verwendeten Version des FE-Programms ANSYS Workbench [95] für orthotrope Materialeigenschaften für die HT-kohlenstofffaserverstärkten Bereiche. Für eine konsistente Berechnung ist die Eingabe der dreidimensionalen Eigenschaften erforderlich, obwohl aufgrund der zuvor definierten Einstellung einer zweidimensionalen elastostatischen Analyse lediglich die zweidimensionalen Eigenschaften verwendet werden. Den Bereichen mit reiner Matrix ohne jegliche Faserverstärkung werden die isotropen Materialeigenschaften  $E_m = 3,3 \text{ GPa}$  und  $\nu_m = 0,35$  zugewiesen, wie in Tabelle 9.1 angegeben. An den horizontalen Rändern, wird entsprechend der Fallunterscheidung einer einseitigen oder einer beidseitigen Bettung, abhängig von der untersuchten Art der Faserverstärkung die in senkrechte Richtung wirkende elastische Bettung mit  $k_{\text{el, HT-Carbon}} \approx 9,5 \text{ GPa}$  für HT-Kohlenstofffaserverstärkung definiert (detaillierte Beschreibung in [95]). Wie in Abschnitt 9.5.1 beschrieben, ist dabei zu beachten, dass die Eingabemaske des FE-Preprocessors die lokalen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte mit dem  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem bezeichnet und am Elementkoordinatensystem orientiert, und nicht mit dem 1-2-3-Koordinatensystem, wie in der strukturmechanischen Betrachtung von Tragwerken üblich.



**Tabelle 9.3:** Eingabewerte der strukturmechanischen Werkstoffkennwerte in die Eingabemaske des FE-Preprocessors von ANSYS Workbench [95] zur Abbildung der unidirektionalen HT-Kohlenstofffaserverstärkung der Rovingstränge bei (lokalem) Faservolumengehalt  $\varphi_{f,R} = 65\%$ .

| Art der Faser-<br>verstärkung   | HT-Kohlenstofffaserverstärkt   |  |
|---|--|--|
|   | <i>längs geschnitten<br/>(Kettstrang)</i>  | <i>quer geschnitten<br/>(Schussstrang)</i> |
| Längssteifigkeit<br>$E_1$   | 150,7 GPa  | 11,4 GPa                                   |
| Quersteifigkeit<br>$E_2$  | 11,4 GPa   | 11,4 GPa                                   |
| Quersteifigkeit<br>$E_3$  | 11,4 GPa   | 150,7 GPa                                  |
| Längs-Quer-Schub-<br>steifigkeit $G_{12}$   | 5,7 GPa  | 3,7 GPa *                                  |
| Quer-Quer-Schub-<br>steifigkeit $G_{23}$  | 3,7 GPa *  | 5,7 GPa                                    |
| Längs-Quer-Schub-<br>steifigkeit $G_{13}$   | 5,7 GPa  | 5,7 GPa                                    |
| Querverf. quer. b.<br>Längsverf. $\nu_{12}$   | 0,272  | 0,333                                      |
| Querverf. quer b.<br>Querverf. $\nu_{23}$   | 0,333  | 0,021 *                                    |
| Querverf. längs b.<br>Querverf. $\nu_{13}$  | 0,272  | 0,021 *                                    |
| <i>9 unabh. Kennwerte<br/>der Eingabemaske<br/>des FE-Preprocessors<br/>ANSYS Workbench [95]<br/>für Orthotropie<br/>(vgl. Abschnitt 4.2.3)</i> | <i>5 unabh. Kennwerte<br/>der 0°-UD verstärkten Bereiche<br/>(vgl. Abschnitt 9.2.2)<br/>mit paarw. gleichen Eingaben<br/>in der Isotropieebene<br/>zur Abbildung der Transversalisotropie<br/>(vgl. Abschnitt 4.2.4)</i> |  |

\* kein unabhängiger Werkstoffkennwert für transversalisotropes Materialverhalten



## 10 Experimentelle Untersuchungen

Das Ziel der durchgeführten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen ist der Nachweis der Wirkung der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge in gewebeverstärkten Einzellagen. Die numerischen Untersuchungen in Kapitel 9 werden damit validiert. Gewebe sind zweidimensionale textile Halbzeuge. Die alternierende Kreuzung von Kett- und Schusssträngen verursacht regelmäßige und stetige Ondulationen der verwebten Rovingstränge. Unter der Voraussetzung, dass das wiederholte Wirken der mesomechanischen Kinematik Energie dissipiert, wirkt sie sich erhöhend auf die strukturdynamische Werkstoffdämpfung aus. Bei zyklischer viskoelastischer Deformation trägt sie zur reinen viskoelastischen Werkstoffdämpfung in gewebeverstärkten Einzellagen bei. Zum Nachweis des mechanischen Wirkprinzips und zur Validierung der numerischen Untersuchungen in Kapitel 9 werden strukturdynamische experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Dabei werden drei untereinander vergleichbare Sätze kohlenstoffaserverstärkter Probekörper untersucht. Die dargestellte Vorgehensweise ist analog für die Untersuchungen in MICKLITZ et al. 2014 [89], ROMANO et al. 2014 [140] und ROMANO et al. 2014 [141] verwendet worden.

Die Probekörper sind entweder 0°-unidirektional verstärkt oder 0°-gewebeverstärkt (in Kettrichtung). Im Detail wird das Abklingverhalten freier Schwingungen von flachen stabförmigen Probekörpern unter einseitig fester Einspannung untersucht. Die experimentellen Untersuchungen werden dabei sowohl unter der Voraussetzung konstanter geometrischer Bedingungen, d. h. bei gleichen Auskraglängen  $l = l_{UD} = l_G$ , als auch unter der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen, d. h. bei gleichen Grundfrequenzen  $f = f_{UD} = f_G$ , durchgeführt. Die Definition konstanter Bedingungen ist im Abschnitt 10.5.5 dargestellt.

Zur Untersuchung mechanisch hochwertiger Probekörper sind Prüfplatten aus trockenen textilen Halbzeugen (Rovings, Leinwand- und Köpergewebe 2/2 aus Kohlenstofffasern) sowie voripm-rägrierten textilen Halbzeugen (unidirektional und gewebeverstärktes Kohlenstofffaser-Prepreg) hergestellt worden, wie in den Tabellen 10.1 und 10.2 in Abschnitt 10.1 angegeben. Die Herstellung der Prüfplatten, aus denen die Probekörper im Wasserstrahlschneidverfahren ausgeschnitten worden sind, ist im Heißluftautoklavverfahren erfolgt, wie im Abschnitt 10.2 beschrieben. Dieses Herstellungsverfahren stellt eine mechanisch hohe und reproduzierbare Materialqualität sicher. Dies bestätigen die durchgeführten Untersuchungen zur Materialcharakterisierung. Die entsprechende Präparation der Probekörper stellt die Vergleichbarkeit der unidirektional und gewebeverstärkten Probekörper zueinander sicher, und ist in Abschnitt 10.3 dargestellt.

Im Mittelpunkt stehen die experimentellen Untersuchungen des strukturdynamischen Verhaltens der flachen stabförmigen Probekörper, wie in den Abschnitten 10.4 und 10.5 beschrieben, die zur Identifikation der Auswirkung von Gewebeondulationen auf die strukturdynamische Werkstoffdämpfung dienen. Im Detail werden die Probekörper unter reproduzierbaren definierten Bedingungen einseitig fest eingespannt. Eine reproduzierbare definierte und normierte Weganregung regt den flachen stabförmigen Probekörper zu frei abklingenden Transversalschwingungen an. Die Geometrie der Probekörper erlaubt deren strukturmechanische Beschreibung als transversalschwingender Kragbalken. Die Anwendung der eindimensionalen Balkentheorie erlaubt die Rückführung auf ebene Zusammenhänge, und schließlich die Validierung der numerischen Untersuchungen aus Kapitel 9. Basierend auf dem eingeführten Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  und den Ergebnissen der numerischen Untersuchungen wird jeder verwendeten Gewebeart die spezifische

Dämpfungserhöhung aufgrund der Gewebeondulation zugeordnet.

Die Probekörper werden mit einem Laser-Scanning Vibrometer vom Typ PSV 400 des Herstellers POLYTEC [116] berührungslos vermessen. Aus dem ursprünglichen Geschwindigkeits-Zeit-Signal wird das Weg-Zeit-Signal ermittelt und im Zeit- sowie im Frequenzbereich analysiert. Der Vergleich der ausgewerteten Ergebnisse vergleichbarer Probekörper mit unterschiedlichen Arten der Faserverstärkung liefert Aussagen zu deren Einfluss auf die Strukturodynamik der Probekörper.

Dabei liefert die Auswertung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen sowohl unter konstanten geometrischen Bedingungen,  $l = l_{UD} = l_G$ , als auch unter konstanten dynamischen Bedingungen,  $f = f_{UD} = f_G$ , erhöhte Dämpfungseigenschaften der Probekörper mit Gewebeverstärkung verglichen mit denen der Probekörper mit unidirektionaler Verstärkung. Die Ergebnisse belegen und rechtfertigen die angenommene Wirkung einer mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Bedingungen.

Zunächst werden die verwendeten Materialien (Rovings und Gewebe aus Kohlenstofffasern mit warmahärtendem duroplastischen Matrixsystem und Kohlenstofffaser-Prepregs), der Herstellungsprozess der Prüfplatten und die Präparation der Probekörper beschrieben. Zusätzlich wird die experimentelle Bestimmung des Faservolumengehalts für kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe dargestellt. Das Prinzip der Laservibrometrie als geeignetes, berührungsloses Referenzverfahren für Schwingungsanalysen von Strukturen wird kurz erklärt. Der Versuchsaufbau und die Durchführung der strukturdynamischen Untersuchungen werden detailliert beschrieben, und entsprechende Regelwerke und Normen (DIN, EN, ISO, VDI etc.) angegeben.

Um die Reproduzierbarkeit der durchgeführten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen nachzuweisen werden die Sensitivitäten der Ergebnisse hinsichtlich einer Parameteridentifikation durch definierte Variation der Rand- bzw. Einspannbedingungen, der Anregung sowie der Berücksichtigung von Störgrößen analysiert. Der Nachweis der Reproduzierbarkeit und die Sensitivitätsanalyse der ausgewerteten Ergebnisse sind im Anhang A.1 dargestellt.

## 10.1 Verwendete Materialien

Zur direkten Vergleichbarkeit unidirektional und gewebeverstärkter Probekörper basieren die Faserverstärkungen auf dem gleichen Roving. Das bedeutet, dass die in den gewebeverstärkten Einzellagen verarbeiteten Rovings auch in den unidirektional verstärkten Einzellagen vorliegen. Zusätzlich muss jeweils das gleiche Matrixsystem verwendet worden sein.

Aus diesem Grund und trotz der Herstellung der Prüfplatten im Heißluftautoklavverfahren sind bei der Auswahl der Materialien neben Prepregs v. a. auch trockene textile Halbzeuge berücksichtigt worden. Während bei handelsüblichen Prepreg-Systemen keine Möglichkeit zur Wahl des Matrixsystems besteht, erlaubt die Imprägnierung trockener textiler Halbzeuge die Auswahl eines geeigneten Matrixsystems. Wenn bei diesen die in den Geweben verarbeiteten Rovings auch aufgespult als sog. Endlosrovings erhältlich sind, ist die Herstellung unidirektional und gewebeverstärkter Einzellagen mit gleicher Verstärkungsfaser und gleichem Matrixsystem möglich. Die Imprägnierung der trockenen Halbzeuge in der Vorlaminat- und Wickeltechnik, wie in Abschnitt 10.2.1 vorgestellt, garantiert, im Rahmen der durchgeführten Arbeiten, die Reproduzierbarkeit der hergestellten Materialien und der darauf basierenden Ergebnisse. Durch die Verwendung des gleichen Matrixsystems werden die Voraussetzungen zur direkten Vergleichbarkeit, und die Untersuchung des Einflusses der jeweiligen Verstärkungsfaser geschaffen.

Unter den zuvor beschriebenen Anforderungen sind drei Sätze vergleichbarer Materialien verwendet worden. Im Detail sind zwei Sätze vergleichbarer Probekörper basierend auf trockenen textilen Halbzeugen (Kohlenstofffaser-Roving und entsprechendes Leinwand- sowie Köpergewebe 2/2) und ein Satz vergleichbarer Probekörper basierend auf unidirektional und gewebever-

stärkten Kohlenstofffaser-Prepregs untersucht worden. Die Imprägnierung der trockenen textilen Halbzeuge ist in Abschnitt 10.2.1 beschrieben. Im Falle der Herstellung der beiden Sätze vergleichbarer Probekörper basierend auf trockenen textilen Halbzeugen, wird das gleiche Matrixsystem verwendet. Dadurch sind diese beiden Sätze direkt zueinander vergleichbar. Zusätzlich sind Reinharzproben hergestellt worden. Im Gegensatz dazu sind die Kohlenstofffaser-Prepregs bereits mit einem Matrixsystem imprägniert. Dieser Satz von Probekörpern ist in diesem Sinne nicht direkt mit den beiden anderen Sätzen von Probekörpern vergleichbar. Außerdem sind keine Reinharzproben des Matrixsystems der Prepregs herstellbar. Tabelle 10.1 stellt die jeweiligen Vergleichbarkeiten der drei unterschiedlichen Sätze von Probekörper zueinander dar.

Die Tabellen 10.1 und 10.2 enthalten die relevanten Eigenschaften der ausgewählten textilen Arten der Faserverstärkung sowie der Matrixsysteme. Die Ergebnisse der Materialcharakterisierung der im Heißluftautoklavverfahren hergestellten Prüfplatten sind in Tabelle 10.3 enthalten. Sie verdeutlichen die zuvor beschriebene direkte Vergleichbarkeit von unidirektional und gewebeverstärkten Probekörpern. Lediglich unter dieser Voraussetzung ist die Validierung sowie die Parameteridentifikation der in Kapitel 9 beschriebenen mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen zulässig, korrekt, und eindeutig.

### 10.1.1 Trockene textile Halbzeuge und Matrixsystem

Im Fall der trockenen textilen Halbzeuge basiert der erste Satz vergleichbarer Probekörper auf dem Kohlenstofffaser-Roving TENAX HTS40 [123] mit einer linearen Dichte von ca. 800 tex (= 12 k) vom Hersteller TOHO TENAX Europe in Wuppertal (Deutschland). Das entsprechende Leinwandgewebe ist vom Typ STYLE 427 [122] mit einem Flächengewicht von ca. 400 g/m<sup>2</sup> und das entsprechende Köpergewebe 2/2 ist vom Typ STYLE 404 [121] mit einem Flächengewicht von ca. 600 g/m<sup>2</sup>. Beide Gewebe sind von ECC in Heek (Deutschland) hergestellt worden [81].

Der zweite Satz vergleichbarer Probekörper basiert auf dem Kohlenstofffaser-Roving PYROFIL TR50S 6K [117] mit einer linearen Dichte von ca. 400 tex (= 6 k) vom Hersteller GRAFIL Inc. in Sacramento (USA). Das entsprechende Leinwandgewebe ist vom Typ SIGRATEx KDL 8051/120 [120] mit einem Flächengewicht von ca. 300 g/m<sup>2</sup> und das entsprechende Köpergewebe 2/2 ist vom Typ SIGRATEx KDL 8052/120 [119] mit einem Flächengewicht von ca. 300 g/m<sup>2</sup>. Beide Gewebe sind von SGL TECHNOLOGIES in Wackersdorf (Deutschland) hergestellt worden [17].

#### Matrixsystem

Zur Vergleichbarkeit der beiden Sätze vergleichbarer Probekörper, die auf den zuvor beschriebenen trockenen textilen Halbzeugen basieren, ist bei der Herstellung das gleiche Matrixsystem verwendet worden. Im Detail handelt es sich um das warmaushärtende duroplastische Epoxidharzsystem vom Typ ARALDITE LY 556/ARADUR 917/ACCELERATOR DY 070 [96] vom Hersteller HUNTSMAN. Es ist als geeignetes Matrixsystem zur Imprägnierung der trockenen textilen Halbzeuge in der Vorlaminattechnik und Wickeltechnik identifiziert worden. Dabei handelt es sich um ein dreikomponentiges anhydridisches 160 °C-System. Das warmaushärtende, niedrigviskose Wickelharzsystem eignet sich wegen der verhältnismäßig langen Topfzeit und relativ hohen Aushärtetemperatur besonders für die angewendeten Methoden zur Vorimprägnierung trockener Halbzeuge, und schließlich zur Herstellung von Prüfplatten im Heißluftautoklavverfahren [96], [134]. Durch die hohe Aushärtetemperatur von 160 °C wird ein verhältnismäßig hoher Vernetzungsgrad erreicht. Dies stellt eine hohe mechanische Qualität der Probekörper sicher [40], [149]. In den beiden angewendeten Verfahren zur Imprägnierung trockener Halbzeuge wird das angemischte Harzsystem entsprechend den Empfehlungen im Datenblatt [96] zusätzlich auf ca. 50 °C aufgeheizt. Dies bedingt eine geringere Viskosität und stellt durch eine Verbesserung der Imprägnierung der trockenen Halbzeuge eine verbesserte Faser-Matrix-Haftung im ausgehärteten Laminat sicher.

**Tabelle 10.1:** Ausgewählte Arten unterschiedlicher Faserverstärkungen der drei Sätze vergleichbarer Probekörper sowie relevante Eigenschaften der textilen Halbzeuge (mit Matrixsystem). Satz 1: Basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123], Satz 2: Basierend auf dem PYROFIL TR50S 6K [117] und Satz 3: Kohlenstofffaser-Prepregs G947 und G939 von HEXGEL [114].

| PK-Satz | PK-ID  | Faserverstärkung          | Typ                   | Filamentdurchm. | Lin. Dichte/<br>Flächengew. | Dichte $\rho_f$        | Elastizitätsmodul $E_{1,f}$ | Quelle | Matrixsystem       |
|---------|--------|---------------------------|-----------------------|-----------------|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|--------|--------------------|
|         | Ten-UD | Roving                    | Tenax HTS40           | 7 $\mu\text{m}$ | 12 k<br>(800 tex)           | 1,77 g/cm <sup>3</sup> | 240 GPa                     | [123]  |                    |
| Tenax   | Ten-LW | Leinwand                  | Style 427             | -               | 400 g/m <sup>2</sup>        | -                      | -                           | [122]  |                    |
|         | Ten-K2 | Körper 2/2                | Style 404             | -               | 600 g/m <sup>2</sup>        | -                      | -                           | [121]  | Huntsman           |
|         | Pyr-UD | Roving                    | Pyrofil TR50S 6K      | 7 $\mu\text{m}$ | 6 k<br>(400 tex)            | k. A.                  | 235 GPa                     | [117]  | [96]               |
| Pyrofil | Pyr-LW | Leinwand                  | Sigratex KDL 8051/120 | -               | 300 g/m <sup>2</sup>        | -                      | -                           | [120]  |                    |
|         | Pyr-K2 | Körper 2/2                | Sigratex KDK 8052/120 | -               | 300 g/m <sup>2</sup>        | -                      | -                           | [119]  |                    |
| Hexcel  | Hex-UD | UD-Prepreg Gewebe-Prepreg | Hexcel G947 UD        | k. A.           | 3 k<br>(200 tex)            | 1,78 g/cm <sup>3</sup> | 229 GPa *                   | [114]  | HexPly M18/1 [114] |
|         | Hex-GW |                           | Hexcel G939 Fabric    | -               | 220 g/m <sup>2</sup>        | -                      | -                           |        |                    |

\* Auswertung der Mischungsregel nach Gleichung (5.1) mit Angaben aus technischem Datenblatt der Kohlenstofffaser-Prepregs von HEXCEL [114]

**Tabelle 10.2:** Verwendete Matrixsysteme: HUNTSMAN ARALDITE LY 556/ARADUR 917/ACCELERATOR DY 070 [96] für Satz 1 (Tenax) und Satz 2 (Pyrofil) der vergleichbaren Probekörper sowie HEXGEL HEXPLY M18/1 [114] für Satz 3 (Hexcel) der vergleichbaren Probekörper.

| Matrixsystem | Einzelkomponenten                                   | Typ   | Aushärte-temp. $T$ | Dichte $\rho_m$                 | Elastizitätsmodul $E_m$ | Querverf.-zahl $\nu$ | Quelle | PK-Satz |
|--------------|---|---|--------------------|---------------------------------|-------------------------|----------------------|--------|---------|
| Huntsman     | Araldite LY 556<br>Aradur 917<br>Accelerator DY 070 | dreikomponentiges,<br>anhydridisches<br>Wickelhartzsystem | 160 °C             | 1,17...1,22 g/cm <sup>3</sup> * | 3,1...3,3 GPa           | 0,35                 | [96]   | Ten/Pyr |
| HexPly M18/1 | k. A.   | Prepreg-Hartzsystem                                       | 180 °C             | 1,22 g/cm <sup>3</sup>          | 4,2 GPa                 | k. A.                | [114]  | Hex     |

\* Die experimentelle Ermittlung der Dichte des Matrixsystems Huntsman [96] nach DIN EN ISO 1183-1 [108] liefert  $\rho_m = 1,20 \text{ g/cm}^3$ .

### 10.1.2 Prepregs

Im Fall der Prepregs basiert der Satz vergleichbarer Probekörper auf Kohlenstofffaser-Prepregs vom Hersteller HEXCEL Co. (USA) mit dem gleichen warmaushärtenden duroplastischen Matrixsystem HEXPLY M18/1 [114] als 180 °C-System. Das unidirektional verstärkte Prepreg (sog. UD-Prepreg) ist vom Typ HEXCEL G947 [114] mit einer linearen Dichte von ca. 200 tex (= 3 k) mit einem Flächengewicht von ca. 160 g/m<sup>2</sup> und das gewebeverstärkte Prepreg (sog. Gewebe-Prepreg) ist vom Typ HEXCEL G939 [114] mit einem Flächengewicht von ca. 220 g/m<sup>2</sup>.

## 10.2 Herstellung der Prüfplatten

Die Prüfplatten, aus denen die Probekörper ausgeschnitten und anschließend für die experimentellen Untersuchungen präpariert werden, werden im Heißluftautoklavverfahren hergestellt. Aus den einzelnen textilen Halbzeugen sind mit entsprechenden Herstellungsverfahren ausgewählte Lagenaufbauten aufgebaut worden. Die trockenen textilen Halbzeuge Rovings und Gewebe sind dafür in einer Vorstufe vorimprägniert worden. Während die Rovings im Wickelverfahren auf ein Zweiflach nach DIN 65071-1 [100] vorimprägniert werden, werden die Gewebe im Vorlaminatverfahren nach DIN 65071-2 [101] vorimprägniert. Diese Vorstufe der Vorimprägnierung ist bei den bereits vorimprägnierten textilen Halbzeugen, den sog. Prepregs, nicht nötig.

### 10.2.1 Vorimprägnierung der trockenen textilen Halbzeuge

Zur Vorimprägnierung der in Abschnitt 10.1.1 dargestellten trockenen Halbzeuge wird die Wickeltechnik nach DIN 65071-1 [100] und die Vorlaminattechnik nach DIN 65071-2 [101] verwendet.

Die durch die Wickeltechnik nach DIN 65071-1 [100] und Vorlaminattechnik nach DIN 65071-2 [101] vorimprägnierten trockenen Halbzeuge unterscheiden sich dabei von handelsüblichen Prepregs. Während handelsübliche Prepregs vorimprägniert und bei tiefen Temperaturen von ca. -18 °C für eine definierte Zeitdauer lagerfähig sind [40], [149], sind die Halbzeuge durch die beschriebenen Verfahren nicht lagerfähig im eigentlichen Sinne [96], [134]. Sie müssen innerhalb der sog. Topfzeit des Harzsystems (im vorliegenden Fall ca. 100 h) verarbeitet werden [96]. Das Matrixsystem erreicht auch nicht die Vorvernetzungsstufe (sog. B-Stage oder Beta-Phase), sodass es während des gesamten Imprägnier- und Legeprozesses der Prüfplatten deutlich niedrigviskoser ist [40], [96], [134], [149].

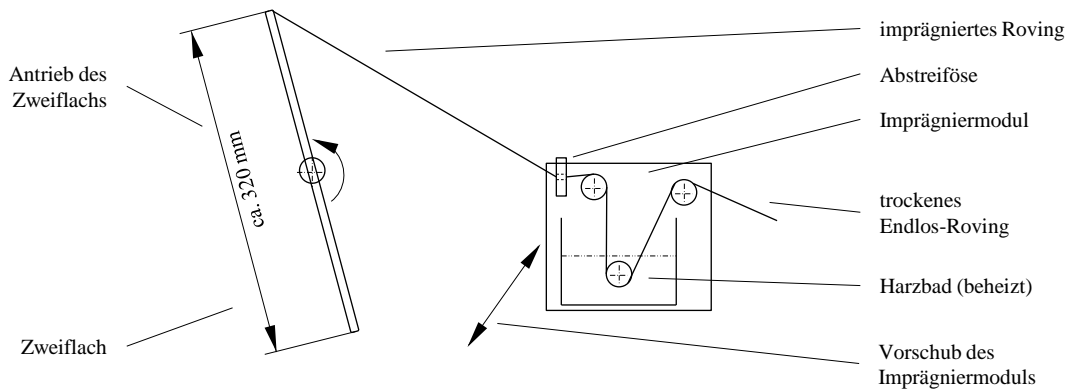
#### Wickeltechnik

Bei der Wickeltechnik steht die Herstellung eines unidirektionalen vorimprägnierten Halbzeugs im Vordergrund. Das Vorimprägnieren der unidirektionalen Einzelschichten erfolgt in Anlehnung an die DIN 65071-1 [100]. Der Prozess wird auf einer Drehmaschine durchgeführt. Dazu wird die Rovingspule waagrecht drehend vor der Drehmaschine gelagert. Der trockene Rovingstrang wird durch ein Harzbad gezogen und auf ein Zweiflach aufgewickelt. Die Menge des Harzes wird durch eine Abstreiföse bestimmt, deren Größe in Abhängigkeit von der Dicke des Rovingstranges nach der DIN 65071-1 [100] berechnet wird. Abbildung 10.1 zeigt schematisch die Herstellung und Imprägnierung einer unidirektional verstärkten Einzellege in der Wickeltechnik nach DIN 65071-1 [100], wie u. a. in [71] und [74] angewendet.

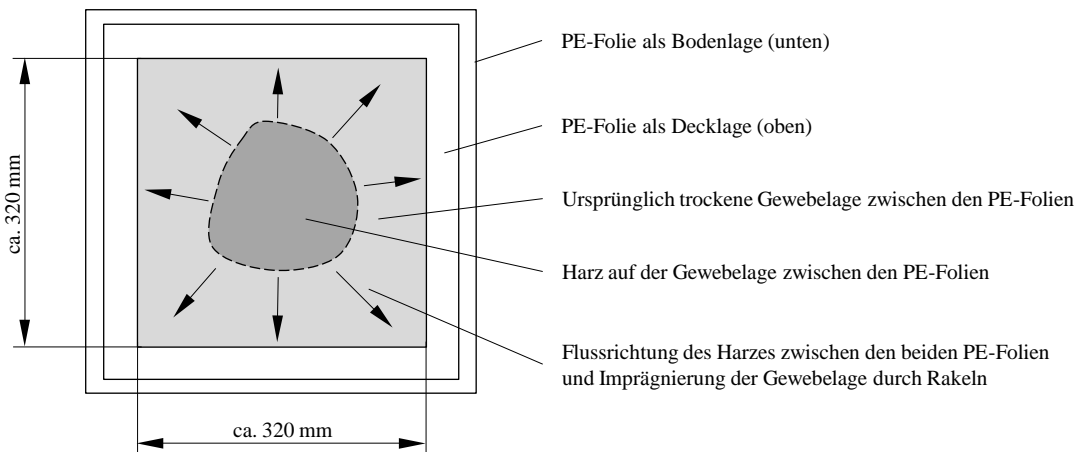
#### Vorlaminattechnik

In der Vorlaminattechnik werden ebene Halbzeuge, wie z. B. unterschiedliche Gewebe, in Anlehnung an die DIN 65071-2 [101] vorimprägniert. Dazu werden die trockenen Halbzeuge zwischen zwei Folien aus Polyethylen (PE) vorimprägniert. Die Gewebelage wird auf eine Folie gelegt. Das angemischte Harz wird in kleinen Mengen auf das Gewebe geschüttet. Nach Auflegen der zweiten

Folie wird das Harz mit einer Rakel langsam und gleichmäßig in das trockene Gewebe gestrichen. Abbildung 10.2 zeigt schematisch die Herstellung und Imprägnierung einer Gewebelage in der Vorlaminattechnik nach DIN 65071-2 [101], wie u. a. in [71] und [74] angewendet.



**Abbildung 10.1:** Schematische Darstellung der Herstellung und Imprägnierung einer unidirektional verstärkten Einzellege in der Wickeltechnik nach DIN 65071-1 [100], wie u. a. in [71] und [74] angewendet.



**Abbildung 10.2:** Schematische Darstellung der Herstellung und Imprägnierung einer Gewebelage in der Vorlaminattechnik nach DIN 65071-2 [101], wie u. a. in [71] und [74] angewendet.

### 10.2.2 Aufbau der Prüfplatten

Die seitlichen Abmessungen der hergestellten Prüfplatten betragen ca. 320 mm x 320 mm. Dabei wird eine Nenndicke von ca. 2 mm angestrebt. Die dafür benötigte Anzahl an Einzellagen ergibt sich aus der Dicke der Einzellagen. Die Dicken der Einzellagen hängen dabei von der linearen Dichte bzw. vom Flächengewicht des Halbzeugs ab. Die Anzahl der Einzellagen wird zusätzlich stets so gewählt, dass ein symmetrischer Lagenaufbau, d. h. eine gerade Anzahl an Einzellagen, vorliegt. Damit ergibt sich für die Prüfplatten, basierend auf dem Kohlenstofffaser-Roving TENAX HTS40 [123], eine Anzahl von vier Einzellagen. Im Fall der Prüfplatten, basierend auf dem Kohlenstofffaser-Roving PYROFIL TR50S 6K [117], bzw. basierend auf den Kohlenstofffaser-Prepregs G947 und G939 von HEXCEL [114], werden acht Einzellagen verwendet.

In den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen werden 0°-unidirektional oder 0°-gewebeverstärkte (in Kettrichtung verstärkte) Probekörper charakterisiert. Der Lagenaufbau

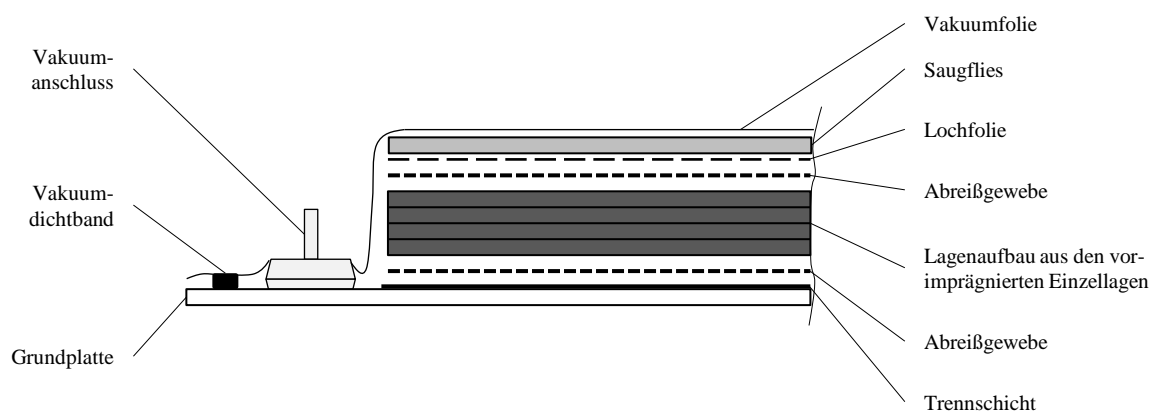


der Prüfplatten bestimmt den Lagenaufbau und damit die Vorzugsrichtungen der Faserverstärkung in den Probekörpern. Aus diesem Grund werden entsprechend 0°-unidirektional oder 0°-gewebeverstärkte (in Kettrichtung verstärkte) Prüfplatten, mit den entsprechenden Lagenaufbauten  $[0]_{nS}^C$  oder  $[(0/90)]_{nS}^C$  mit  $n = 2$  bzw.  $n = 4$ , aufgebaut. Tabelle 10.3 enthält die unterschiedlichen Lagenaufbauten der Prüfplatten und damit der Probekörper.

### 10.2.3 Verwendete Heißluftautoklavzyklen

Die Prüfplatten mit ausgewählten Lagenaufbauten werden im Heißluftautoklavverfahren nach DIN EN 2565 [104] hergestellt. Dafür ist ein Heißluftautoklav der Firma SCHOLZ [118] verwendet worden. Das Heißluftautoklavverfahren liefert mechanisch hochwertige und gleichzeitig reproduzierbare Materialqualitäten. Dabei ist der Faservolumengehalt  $\varphi_f$  ein charakteristischer Kennwert bezüglich der Qualität und Reproduzierbarkeit des hergestellten Materials. Die Prozessparameter des Autoklavprozesses Temperatur  $T$ , Druck  $p$  und Vakuum beeinflussen in Betrag und Verlauf über die Prozessdauer  $t$  u. a. den Faservolumengehalt  $\varphi_f$  signifikant. Die experimentelle Ermittlung des Faservolumengehaltes  $\varphi_{f, \text{experimentell}}$  wird im Abschnitt 10.3.1 genauer beschrieben.

Für die experimentellen Untersuchungen ist eine größtmögliche Vergleichbarkeit der Ergebnisse nur zulässig, wenn die Faservolumengehalte  $\varphi_f$  der Probekörper bzw. der Prüfplatten lediglich in sehr engen Grenzen variieren. Abhängig vom textilen Halbzeug werden entsprechend geeignete Heißluftautoklavzyklen verwendet. Für die in der Vorlaminattechnik und in der Wickeltechnik vorimprägnierten trockenen Halbzeuge, wie in Abschnitt 10.2.1 beschrieben, orientiert sich der Heißluftautoklavzyklus bezüglich Temperatur  $T$  über die Prozessdauer  $t$  an den Angaben im technischen Datenblatt des Harzsystems HUNTSMAN [96]. Bezüglich des applizierten Drucks  $p$  und Vakuums über die Prozessdauer  $t$  sind hinsichtlich eines vergleichbaren Faservolumengehaltes  $\varphi_f$  geeignete Verläufe der Parameter identifiziert worden [71], [74]. Im Gegensatz dazu ist für die Prüfplatten aus den Kohlenstofffaser-Prepregs als vorimprägnierte textile Halbzeuge ein entsprechender Heißluftautoklavzyklus im Datenblatt vorgegeben [114].



**Abbildung 10.3:** Schematische Querschnitt eines Vakuumaufbaus beim Aushärteprozess im Heißluftautoklavprozess [71].

In beiden Fällen befindet sich das auszuhärtende Laminat unter einem Vakuumaufbau. Dabei ist der Vakuumaufbau beim Aushärteprozess im Heißluftautoklaven sowohl für die vorimprägnierten trockenen textilen Halbzeuge als auch für die Prepregs stets gleich. Abbildung 10.3 zeigt einen schematischen Querschnitt eines Vakuumaufbaus beim Aushärteprozess im Heißluftautoklaven. Zusätzlich ist in beiden Fällen der Verlauf des applizierten Vakuums über die Prozessdauer  $t$  gleich. Im Detail wird lediglich zu Anfang des Heißluftautoklavzyklus ein Vakuum von  $-0,8$  bar (relativ) appliziert. Dieses wird im weiteren Verlauf über die Prozessdauer  $t$  auf  $-0,15$  bar (relativ)

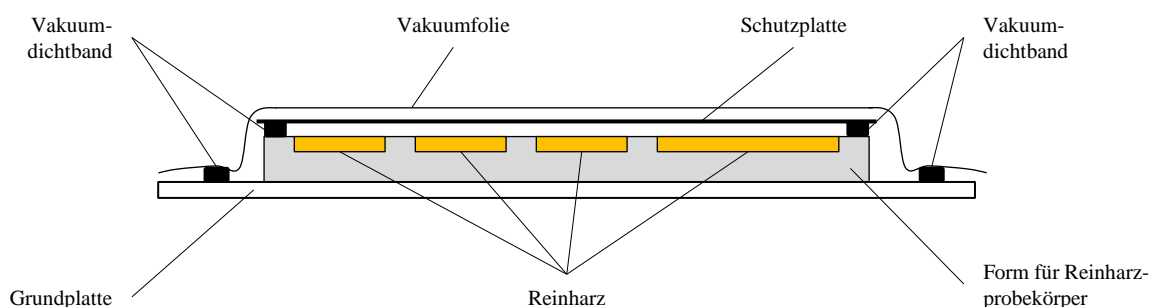
tiv) reduziert. Dabei unterstützt das anfangs kurzzeitig größere Vakuum die Kompaktierung des Laminats, während das folgende kleinere Vakuum die Absaugung von evtl. beim Aushärtprozess austretenden Prozessgasen etc. über die verbleibende Prozessdauer  $t$  sicherstellt [32].

### Heißluftautoklavzyklen zur Aushärtung der Prüfplatten aus vorimprägnierten trockenen textilen Halbzeugen

Der Heißluftautoklavzyklus zur Aushärtung der Prüfplatten aus den vorimprägnierten trockenen textilen Halbzeugen ist in Abbildung 10.5 oben dargestellt. Aufgrund der niedrigen Viskosität des Matrixsystems HUNTSMAN [96] führt bereits die Applikation eines relativ geringen Überdrucks zu einer reproduzierbaren ausreichenden Kompaktierung sowie zu technisch geeigneten und gleichmäßig hohen vergleichbaren Faservolumengehalten des Laminats  $\varphi_f$  [82]. Die begünstigte Ansammlung von Harznestern an den Kreuzungspunkten von Kett- und Schusssträngen in Geweben, und damit geringfügig niedrigere Werte für den Faservolumengehalt  $\varphi_f$  traten nicht auf, wie aus Tabelle 10.3 hervorgeht. Diese Effekte sind in ähnlichem Zusammenhang, jedoch mit deutlich höherviskosem kaltausärtenden Matrixsystem und der Herstellung der Prüfplatten im Handauflegeverfahren mit anschließendem Aushärten im Vakuumsack-Verfahren, in SCHMID et al. 2012 [143] beschrieben.

### Herstellung der Reinharzproben

Abbildung 10.5 unten zeigt den Heißluftautoklavzyklus zur Aushärtung der Reinharzproben aus dem warmaushärtenden duroplastischen 160 °C-Epoxidharzsystem von HUNTSMAN [71], [96]. Die schematische Darstellung des Aufbaus im Heißluftautoklaven ist in Abbildung 10.4 dargestellt. Dabei handelt es sich nicht um einen Vakuumaufbau. Die Schutzplatte hält die Vakuumfolie vom zunächst niedrig viskosen Harzsystem fern und schützt es vor den Strömungsverhältnissen der zirkulierenden Luft im Heißluftautoklaven. Sie wird mit definiertem Abstand aufgelegt und befestigt, nicht jedoch abgedichtet. Dies ermöglicht die Applikation des Autoklavdruckes von  $p = 6$  bar (relativ) über die gesamte Prozessdauer  $t$  als hydrostatischen Druck, nicht jedoch als Druckdifferenz. Die beschriebene Möglichkeit der Applikation des hydrostatischen Druckes bei der Aushärtung der Reinharzproben im Heißluftautoklaven verhindert dabei weitgehend die Bildung von Lunkern und Poren [82], [143]. Bei der Aushärtung von Prüfplatten wird dagegen, u. a. zur Kompaktierung des auszuhärtenden Laminats, zum gleichen Zweck durch die Applikation von Vakuum unter einem Vakuumaufbau in Verbindung mit von außen appliziertem Druck eine Druckdifferenz verwendet.



**Abbildung 10.4:** Schematische Darstellung des Aufbaus im Heißluftautoklaven (kein Vakuumaufbau) zur Herstellung der Reinharzproben aus dem warmaushärtenden duroplastischen 160 °C-Epoxidharzsystem vom Typ ARALDITE LY 556/ARADUR 917/ACCELERATOR DY 070 [96] von HUNTSMAN.

### Heißluftautoklavzyklus zur Aushärtung der Prüfplatten aus Prepregs

Der Heißluftautoklavzyklus zur Aushärtung der in der Prepreg-Technik hergestellten Prüfplatten ist in Abbildung 10.5 mitte dargestellt. Der Faservolumengehalt ergab sich zu  $\varphi_f = 55\%$ , und entspricht damit dem im Datenblatt [114] angegebenen Wert. Dabei ist im Heißluftautoklavzyklus, entgegen der Empfehlung im Datenblatt [114], auf die Haltestufe der Temperatur verzichtet

worden, da diese lediglich für eine optimale Aushärtung des Bauteils bzw. Imprägnierung der Verstärkungsfasern bei verhältnismäßig dickwandigen Bauteilen vorgesehen ist [32]. Vom wärmaushärtenden duroplastischen 180 °C-Matrixsystem HEXPLY M18/1 [114] der unidirektional und gewebeverstärkten Kohlenstofffaser-Prepregs G947 und G939 von HEXCEL [114] konnten keine Reinharzprobekörper hergestellt werden.

## 10.3 Materialcharakterisierung und Präparation der Probekörper

Hier werden die experimentellen Untersuchungen der Materialqualität der Prüfplatten und die Präparation der Probekörper beschrieben. Die experimentelle Charakterisierung des Materials der Prüfplatten enthält die Bestimmung der Dichte des Materials der Prüfplatten  $\rho_c$  und des Reinharzes  $\rho_m$  nach DIN EN ISO 1183-1 [108]. Mit der Kenntnis der Dichte des Materials der Prüfplatten wird anschließend der Faservolumengehalt des Materials  $\varphi_f$  bestimmt. Für Kohlenstofffasern als organische Verstärkungsfasern im duroplastischen Matrixsystem, wird dieser charakteristische Materialkennwert nach DIN EN 2564 [103] bestimmt. Als grundlegende Methode wird für diese Faser-Matrix-Kombination die sog. (nass-)chemische Extraktion der Verstärkungsfasern angewendet. Der Faservolumengehalt  $\varphi_f$  ist dabei ein signifikanter Indikator der mechanischen Eigenschaften des Verbundmaterials und der Reproduzierbarkeit der Herstellungsverfahren. Außerdem ist er meist die Basis für die Berechnung von strukturmechanischen Eigenschaften mit sog. Homogenisierungsansätzen der Mikromechanik, wie in Kapitel 5 beschrieben. Schließlich werden flache stabförmige Probekörper aus den Prüfplatten ausgeschnitten, geometrisch vermessen und für die strukturdynamischen Untersuchungen präpariert.

### 10.3.1 Experimentelle Bestimmung von Dichte und Faservolumengehalt

Zur experimentellen Bestimmung der Dichte  $\rho_c$  und des Faservolumengehaltes  $\varphi_f$  werden fünf Probekörper pro Prüfplatte mit geometrischen Abmessungen von ca. 20 mm x 10 mm x  $h$  entnommen. Die gleichen Probekörper werden zunächst zur nichtzerstörenden experimentellen Ermittlung der Dichte und anschließend zur zerstörenden experimentellen Bestimmung des Faservolumengehalts verwendet. Die Anzahl  $n = 5$  stellt dabei eine minimale Stichprobe für statistische Auswertungen dar [38], [111], [130]. Entsprechende Aspekte zur statistischen Auswertung von Versuchsergebnissen sind in Anhang A.3 beschrieben. Die örtliche Verteilung der entnommenen Probekörper über die Prüfplatte stellt zusätzlich eine statistische Absicherung der Ergebnisse dar. Im Detail befinden sich die Positionen in der Nähe der Ecken und in der Mitte, jedoch nicht zu nah am Randbereich.

Tabelle 10.3 enthält den Lagenaufbau der Prüfplatten bzw. der Probekörper und die Ergebnisse der experimentellen Bestimmung der Dichte  $\rho_c$  und des Faservolumengehalts  $\varphi_f$  der Prüfplatten. Da die drei Sätze vergleichbarer Probekörper jeweils auf gleichen Kohlenstofffaser-Rovings mit duroplastischem Matrixsystem basieren und im Heißluftautoklavverfahren hergestellt worden sind, sind die Dichte  $\rho_c$  und der Faservolumengehalt  $\varphi_f$  jeweils ähnlich. Der experimentell ermittelte Faservolumengehalt für die Prüfplatten und damit für alle präparierten Probekörper beträgt für das Prepreg-Material ca.  $\varphi_f = 55\%$  und für das Material aus den trockenen textilen Halbzeugen ca.  $\varphi_f = 60\%$ . Die Ergebnisse verdeutlichen die zuvor beschriebene Vergleichbarkeit der jeweiligen Materialien.

#### Experimentelle Bestimmung der Dichte von Verbundmaterial und Reinharz

Die experimentelle Bestimmung der Dichte des Materials der Prüfplatten und des Reinharzes ist nach DIN EN ISO 1183-1 [108] erfolgt. Die Probekörper sind bei Raumtemperatur an Luft und in einer sog. Eintauchflüssigkeit mit bekannter Dichte gewägt worden. Die Dichte des Verbund-

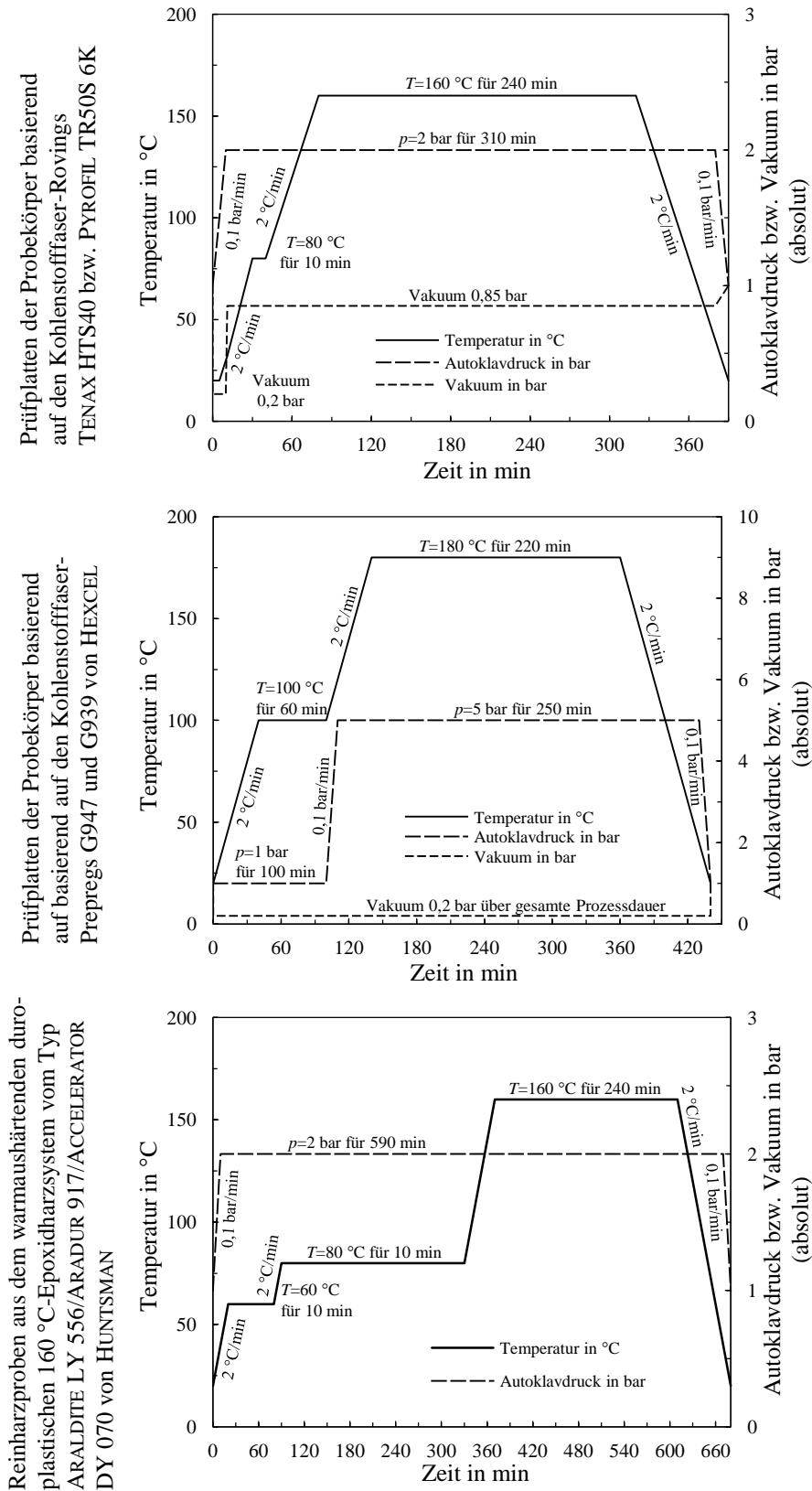


Abbildung 10.5: Heißluftautoklavzyklen zur Herstellung der Prüfplatten mit gleichmäßig hohem und damit vergleichbarem Faservolumengehalt [71], [74].

materials ergibt sich zu

$$\varrho_c = \frac{m_a \varrho_l}{m_a + m_l}, \quad (10.1)$$

mit  $m$  als Masse und  $\varrho$  als Dichte, wobei der Index a die Größe in Luft (air), der Index l die Größe in der Eintauchflüssigkeit (liquid) und der Index c die Größe des Verbundmaterials (composite) bezeichnet.

### Experimentelle Bestimmung des Faservolumengehalts

Die experimentelle Bestimmung des Faservolumengehaltes  $\varphi_f$  ist nach der DIN EN 2564 [103] nach der Methode der sog. (nass-)chemischen Extraktion erfolgt. Dazu werden die Dichten der Einzelkomponenten, im Einzelnen der Verstärkungsfasern  $\varrho_f$  und des Matrixsystems  $\varrho_m$ , sowie des Verbundmaterials benötigt. Im Falle der Verstärkungsfasern [123], [117], [114] und des Matrixsystems der Prepregs HEXCEL HexPly M18/1 [114] sind die Angaben den technischen Datenblättern entnommen. Die Dichten der Verbundmaterialien sowie des Matrixsystems HUNTSMAN [96] liegen aus der zuvor beschriebenen experimentellen Ermittlung der Dichte nach DIN EN ISO 1183 [108] vor.

Die Masse  $m$  jedes Probekörpers ist durch Wägen auf einer Präzisionswaage bereits zur Bestimmung der Dichte des Verbundmaterials ermittelt worden. Die Probekörper werden getrennt voneinander in 96 %-iger Schwefelsäure auf 160 °C erhitzt. Die Säure zersetzt den duroplastischen Matrixwerkstoff und löst diesen von den organischen Verstärkungsfasern, ohne die Dichte bzw. chemische Struktur der Kohlenstofffasern zu beeinflussen. Die Zugabe von Wasserstoffperoxid lässt die zunächst braune Lösung wieder transparent werden. Dies ist ein Indikator, dass die organischen Verstärkungsfasern vollständig aus dem Matrixsystem extrahiert sind. Nach dem Spülen der verbliebenen Verstärkungsfasern mit destilliertem Wasser werden diese rückgetrocknet. Die Bestimmung der Masse der extrahierten und nun trockenen Verstärkungsfasern durch Wägen auf einer Präzisionswaage ermöglicht die Ermittlung des Faservolumengehalts  $\varphi_f$ .

Mit der Kenntnis der Masse der Probekörper des Materials vor der Extraktion der Verstärkungsfasern  $m_c$  und der Masse der extrahierten trockenen Verstärkungsfasern  $m_f$  ergibt sich zunächst der Fasermassenanteil

$$\psi_f = \frac{m_f}{m_c}. \quad (10.2)$$

Dabei ist  $m$  die Masse und die Indizes f und c bezeichnen die jeweilige Eigenschaft der Verstärkungsfasern bzw. des Verbundmaterials. Der Faservolumengehalt  $\varphi_f$  ergibt sich durch die Auswertung des Zusammenhangs [103], [149]

$$\varphi_f = \frac{V_f}{V_c} = \frac{V_f}{V_f + V_m} = \frac{\frac{m_f}{\varrho_f}}{\frac{m_f}{\varrho_f} + \frac{m_c - m_f}{\varrho_m}} = \frac{1}{1 + \frac{1 - \psi_f}{\psi_f} \cdot \frac{\varrho_f}{\varrho_m}}. \quad (10.3)$$

### 10.3.2 Präparation der Probekörper

Aus den Prüfplatten werden im Wasserstrahl-schneidverfahren zunächst sieben flache stabförmigen Probekörper mit seitlichen Abmessungen  $l = l_{PK} = 250 \text{ mm} \times b = 25 \text{ mm}$  ausgeschnitten. Davon werden schließlich drei repräsentative Probekörper mit gleichem Lagenaufbau, zur Identifikation unterschiedlicher Parameter, experimentell vermessen. Die gleichen Abmessungen sowie die gleiche Qualität des Schnitts werden durch die Verwendung eines digital hinterlegten Schnittmusters auf einer Anlage sichergestellt [71], [158]. Der Lagenaufbau der Prüfplatten bestimmt den Lagenaufbau und damit die Vorzugsrichtungen der Faserverstärkung in den Probekörpern.

Tabelle 10.3 bzw. Tabelle 11.7 enthalten die unterschiedlichen Lagenaufbauten der Prüfplatten und damit der Probekörper sowie relevante geometrische und physikalische Eigenschaften der Probekörper. Die Probekörper werden für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen zur Bestimmung der Werkstoffdämpfung verwendet. Die untersuchenden Eigenschaften umfassen die Ermittlung der Werkstoffdämpfung und der dynamischen Steifigkeit.

**Tabelle 10.3:** Lagenaufbau der Prüfplatten bzw. der Probekörper, Dichte  $\rho_c$  der Prüfplatten nach DIN EN ISO 1183-1 [108] und Faservolumengehalt  $\varphi_f$  der Prüfplatten nach DIN EN 2564 [103] der drei Sätze vergleichbarer Probekörper: Satz 1: Basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123], Satz 2: Basierend auf dem PYROFIL TR50S 6K [117] und Satz 3: Kohlenstofffaser-Prepregs G947 und G939 von HEXCEL [114].

| PK-Satz | PK-ID  | Lagenaufbau       | Dichte $\rho_c$<br>DIN EN ISO<br>1183-1 [108] | Faservol-<br>gehalt $\varphi_f$<br>DIN EN<br>2564 [103] | Quelle | Matrix-<br>system     |
|---------|--------|-------------------|---|---|--------|-----------------------|
|         | Ten-UD | $[0]_{2s}^C$      | 1,52 g/cm <sup>3</sup>                        | 60,0 %  | [123]  |                       |
| Tenax   | Ten-LW | $[(0/90)]_{2s}^C$ | 1,51 g/cm <sup>3</sup>                        | 61,0 %  | [122]  |                       |
|         | Ten-K2 | $[(0/90)]_{2s}^C$ | 1,52 g/cm <sup>3</sup>                        | 60,0 %  | [121]  | Huntsman              |
|         | Pyr-UD | $[0]_{4s}^C$      | 1,54 g/cm <sup>3</sup>                        | 60,3 %  | [117]  | [96]                  |
| Pyrofil | Pyr-LW | $[(0/90)]_{4s}^C$ | 1,53 g/cm <sup>3</sup>                        | 60,7 %  | [120]  |                       |
|         | Pyr-K2 | $[(0/90)]_{4s}^C$ | 1,54 g/cm <sup>3</sup>                        | 59,8 %  | [119]  |                       |
| Hexcel  | Hex-UD | $[0]_{4s}^C$      | 1,52 g/cm <sup>3</sup>                        | 54,7 %  | [114]  | HexPly<br>M18/1 [114] |
|         | Hex-GW | $[(0/90)]_{4s}^C$ | 1,51 g/cm <sup>3</sup>                        | 54,1 %  |        |                       |

Die Geometrie der Probekörper orientiert sich an den Normen DIN EN 2561 [102] (Länge  $l = l_{PK} = 250$  mm und Dicke  $h \approx 2$  mm) bzw. DIN EN 2747 [105] (Breite  $b = 25$  mm), die den Zugversuch parallel zur Faserrichtung für unidirektional kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe bzw. für glasfaserverstärkte Kunststoffe beschreiben. Die Geometrie der Probekörper, die ursprünglich für die zerstörende Werkstoffkennwertermittlung im (quasi-)statischen Zugversuch definiert ist, ist auch für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen gewählt worden. Die untaillierte Geometrie sowie die geometrischen Verhältnisse (Länge  $l = l_{PK} = 250$  mm zu Breite  $b = 25$  mm bzw. Länge  $l = l_{PK} = 250$  mm zu Dicke  $h \approx 2$  mm) implizieren einen einachsigen Spannungszustand im Zugversuch. Unter dieser Voraussetzung und anderen Randbedingungen (Einspannung und Anregung) werden die Probekörper als transversalschwingender Balken betrachtet.

Die Prüfplatten sind im Heißluftautoklavverfahren hergestellt worden. Die Probekörper sind im Wasserstrahlschneidverfahren mit den seitlichen Abmessungen  $l = l_{PK} = 250$  mm x  $b = 25$  mm als Nennmaße ausgeschnitten worden. Die anschließende Vermessung der Probekörper liefert schließlich die exakten geometrischen Abmessungen. Während die Länge  $l = l_{PK}$  und die Breite  $b$  mit einem, für das jeweilige Nennmaß geeigneten, Messschieber gemessen worden sind, ist die Dicke  $h$  mit einer Bügelmessschraube gemessen worden. Breite  $b$  und Dicke  $h$  sind für jeden Probekörper an fünf, bezüglich der Länge  $l = l_{PK}$  äquidistanten, Positionen vermessen worden.

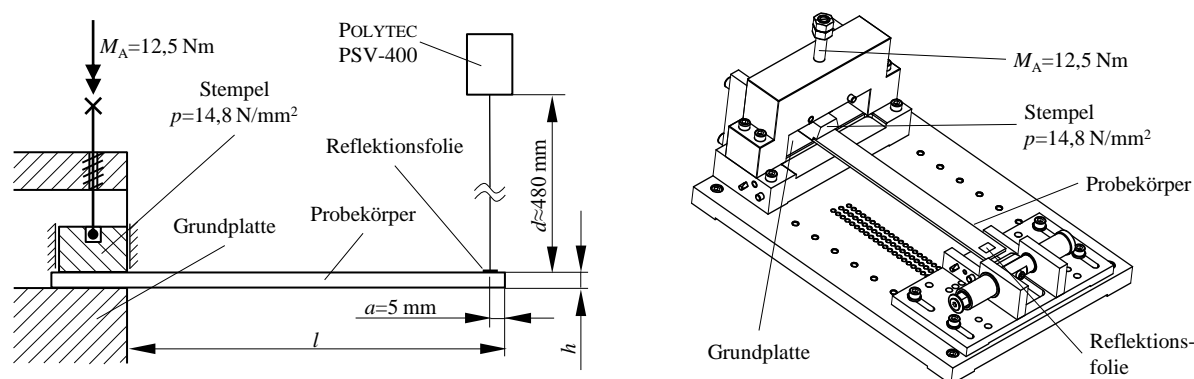
## 10.4 Versuchsaufbau

Die verwendete Versuchstechnik zur Durchführung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen zur mechanischen Charakterisierung der Probekörper wird beschrieben. Sie enthält die Laservibrometrie als verwendetes berührungsloses Verfahren zur Aufnahme von strukturdynamischen Schwingungen sowie den Versuchsaufbau mit der Einspannvorrichtung und der Weganregung.

Für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen werden die flachen stabförmigen Probekörper definiert reproduzierbar einseitig fest eingespannt und am freien Ende durch eine definierte reproduzierbare Weganregung zu freien Schwingungen angeregt. Aufgrund der fest-frei Randbedingung können die Probekörper mechanisch als Kragbalken beschrieben werden. Der freie Ausschwingvorgang der Struktur wird mit einem Laser-Scanning Vibrometer POLYTEC PSV 400 [116] vermessen. Zunächst wird der Versuchsaufbau beschrieben. Er enthält im Detail das Laservibrometer, die Einspannvorrichtung mit Positionierung, Orientierung und Einspannung des Probekörpers sowie die definierte reproduzierbare Weganregung.

Die Einspann- und Anregevorrichtung ist auf der sog. standardoptischen Platte befestigt. Die Platte hat ein quadratisches Bohrungsmuster mit 25 mm Lochabstand. Die Bohrungen haben ein M6 Innengewinde, sodass die Einspann- und Anregevorrichtung an ihren Ecken mit vier Innensechskantschrauben M6, die jeweils mit 5 Nm Drehmoment angezogen werden, definiert und reproduzierbar darauf befestigt ist. Auf der standardoptischen Platte ist zusätzlich der sog. vertikale Teststand verschraubt, an dem das Laservibrometer definiert und reproduzierbar befestigt ist. Der Laserstrahl ist senkrecht nach unten auf den Probekörper gerichtet, der definiert und reproduzierbar in der Einspann- und Anregevorrichtung eingespannt ist.

Abbildung 10.6 links zeigt den Versuchsaufbau schematisch in der Seitenansicht. Er besteht von links nach rechts betrachtet aus dem Klemmmechanismus der Einspannung, dem Probekörper, dem Mechanismus der Anregung und dem Laser-Scanning Vibrometer POLYTEC PSV 400 [116]. Abbildung 10.6 rechts zeigt die isometrische Ansicht auf die Einspannvorrichtung mit Probekörper und Anregemechanismus.



**Abbildung 10.6:** Schematische Seitenansicht des Versuchsaufbaus mit (von links nach rechts) Klemmmechanismus der Einspannung, Probekörper Mechanismus der Anregung und Laser-Scanning Vibrometer POLYTEC PSV 400 [116] (links). Isometrische Ansicht auf die Einspannvorrichtung mit Probekörper und Anregemechanismus (rechts).

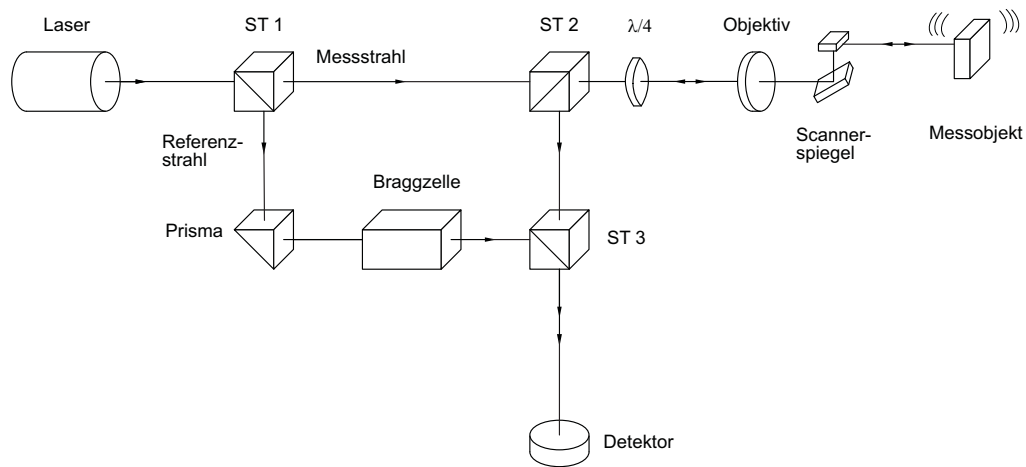
### 10.4.1 Laser-Doppler-Vibrometer

Für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen ist ein Laser-Scanning-Vibrometer vom Typ PSV 400 des Herstellers POLYTEC [116] verwendet worden. Die sog. Laservibrometrie

und das zugehörige Messprinzip als berührungsloses Referenzverfahren für Schwingungsanalysen von Strukturen wird kurz beschrieben. Dafür sind die technischen Informationen [113] und Datenblätter [116] sowie die Arbeiten von JOHANSMANN, SIEGMUND und PINEDA 2005 [68] sowie SCHMIDTCHEN 2013 [146] verwendet worden.

### Prinzipielle Funktionsweise

Ein Laser-Vibrometer ermöglicht die berührungslose experimentelle Vermessung strukturdynamischer Schwingungen. Das berührungslose Messverfahren misst ursprünglich die Geschwindigkeit der Oberfläche der schwingenden Struktur mit einem niederenergetischen, monochromen kohärenten Laserstrahl. Das Messprinzip beruht auf der interferometrischen Auswertung der Frequenz eines Laserstrahls, der durch eine Objektbewegung moduliert wird [113]. Abbildung 10.7 zeigt schematisch den optischen Aufbau des Interferometers im Vibrometer [116].



**Abbildung 10.7:** Schematische Darstellung des optischen Aufbaus des Interferometers im Vibrometer [116].

### DOPPLER-Effekt

Das Messprinzip eines Laservibrometers basiert auf dem Prinzip des DOPPLER-Effektes (deshalb auch oft: Laser-DOPPLER-Vibrometer). Eine Relativbewegung zwischen Sender und Empfänger einer Welle verursacht eine geschwindigkeitsabhängige Frequenzverschiebung  $f_D = 2 \frac{v}{\lambda_L}$ , mit der vorzeichenbehafteten Geschwindigkeit der Oberfläche in Richtung der Laserlichtquelle  $v$  und der ursprünglichen Wellenlänge  $\lambda$ . Die Ermittlung der Geschwindigkeit erfolgt bei bekannter Wellenlänge  $\lambda_L$  durch die gemessene Frequenzverschiebung.

### Interferometrie

Die optische Interferometrie ermöglicht die Messung von Längen durch die Bestimmung der Gesamtintensität  $I_{\text{tot}}$  zweier zeitlich kohärenter Lichtstrahlen unterschiedlicher Einzelintensitäten  $I_1$  und  $I_2$  [113]. Dafür werden gleiche Amplituden und Anfangsphasen sowie unterschiedlicher Kreisfrequenzen vorausgesetzt. Die Überlagerung von zwei Wellen erfolgt durch die Addition der Einzelwellen,  $E = E_1 + E_2$ . Dabei ist die Intensität der überlagerten Einzellwellen direkt proportional zum Quadrat der Summe der Einzelwellen,  $I_{\text{tot}} \sim |E|^2$  [146]. Damit ergibt sich die resultierende Intensität  $I_{\text{tot}}$  der Welle zu  $I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[2\pi \frac{(r_1 - r_2)}{\lambda}]$ , wobei  $r_2 = \text{const.}$  der optische Weg des zeitlich konstanten Referenzstrahls und  $r_1 = r(t)$  der zeitlich variable Abstand als Bewegung des Messobjekts ist. Unter der Voraussetzung gleicher Einzelintensitäten  $I = I_1 = I_2$  ergibt sich bei konstruktiver Interferenz die maximale Intensität  $I_{\text{max}} = 4I$ , und bei destruktiver Interferenz die minimale Intensität  $I_{\text{min}} = 0$ . Die Formulierung der Interferenz zweier sich überlagernder Wellen unterschiedlicher Frequenzen lautet  $I_{\text{tot}}(\varphi) = \frac{I_{\text{max}}}{2} (1 + \cos(\varphi))$ , wobei  $\varphi$  die Phasendifferenz zwischen Referenz- und Messstrahl ist. Diese ergibt sich durch die



Bewegung des Messobjekts. Im Detail unterscheiden sich die Kreisfrequenzen der beiden Strahlen lediglich geringfügig voneinander. Werden die beiden Strahlen interferiert, wird eine Schwebung mit der zuvor genannten DOPPLERfrequenz  $f_D$  hervorgerufen [113], [146].

### Optischer Aufbau

Ein Strahlteiler teilt den Laserstrahl im Vibrometer in einen Referenz- und einen Messstrahl. Der von der Oberfläche der schwingenden Struktur zurück ins Vibrometer reflektierte Messstrahl wird mit dem Referenzstrahl auf einem Detektor überlagert. Dies erzeugt ein für die Interferometrie typisches Hell-Dunkel-Muster auf dem Detektor. Dabei entspricht ein vollständiger Hell-Dunkel-Zyklus auf dem Detektor einer Verschiebung des Objekts genau um den Betrag der halben Wellenlänge, hier:  $\frac{\lambda}{2} = 316 \text{ nm}$  [113].

Die zeitliche Änderung der optischen Weglänge entspricht der Frequenzverschiebung  $f_D = 2 \frac{|v|}{\lambda_L}$  (Doppler-Verschiebung aufgrund des Doppler-Effektes). Sie wird über die Modulationsfrequenz des Interferenzmusters bestimmt, die direkt proportional zur Geschwindigkeit des Messobjektes ist. Das Vorgehen ist jedoch nicht vorzeichensensitiv. Zur Identifikation der Bewegungsrichtung wird der Referenzstrahl mit einer sog. BRAGG-Zelle in seiner Frequenz um  $f_B = 40 \text{ MHz}$  verschoben. Diese Frequenz entspricht dann einem stillstehenden Objekt. Eine höhere Modulationsfrequenz entspricht einer Entfernung des Objekts vom Detektor während eine niedrigere Modulationsfrequenz einer Annäherung des Objekts vom Detektor entspricht. Die resultierende Frequenz am Detektor ergibt sich nun vorzeichensensitiv zu  $f_{\text{mod}} = f_B + 2 \frac{v}{\lambda_L}$ . Sog. richtungs-sensitive Interferometer werden heterodyn genannt [113], [146].

### Messung von Weg und Geschwindigkeit

Mit den im Laservibrometer genutzten physikalischen Wirkprinzipien ist neben der Messung der Geschwindigkeit auch die Messung der Verschiebung bzw. des Weges möglich. Während bei der Geschwindigkeitsmessung die Frequenzverschiebung  $f_D$  in eine geschwindigkeitsproportionale Spannung umgewandelt wird, werden bei der Wegmessung die Hell-Dunkel-Übergänge auf dem Detektor gezählt. Dabei erlauben geeignete Interpolation bzw. Demodulation eine sehr hohe Messgenauigkeit bei der Wegmessung. Das gleiche Messprinzip erlaubt damit die Auswertung unterschiedlicher Aspekte am Detektor. Die Auswertung der Frequenzverschiebung liefert die Geschwindigkeit der Oberfläche  $v$ , während die Auswertung der Phasenverschiebung die Verschiebung  $w$  der Oberfläche liefert [68].

### Technische Daten

Das Laser-Scanning-Vibrometer PSV 400 von POLYTEC basiert auf einem Helium-Neon-Laser, der eine Wellenlänge von  $\lambda = 633 \text{ nm}$  bei einer maximalen Ausgangsleistung  $P < 1 \text{ mW}$  emittiert. Dies entspricht der sog. Klasse 2 nach EN 60825-1 [116]. Dabei ist die Laserstrahlung lediglich im sichtbaren Spektralbereich (400 nm bis 700 nm), und deshalb auch bei kurzzeitiger Bestrahlungsdauer für das Auge ungefährlich. Das Laservibrometer besteht aus den unterschiedlichen Komponenten: Messkopf mit integriertem Laser-Interferometer, Scanner mit Videokamera, Zentraleinheit mit Datenerfassung und Controller sowie dem zur Datenverarbeitung und Gerätesteuerung benötigten Softwarepaket.

### Vorteile

Ein wesentlicher Vorteil der Laservibrometrie ist, dass die Messungen berührungslos sind. Es ist kein direkter mechanischer Kontakt zum Probekörper nötig. Die Schwingungen des Probekörpers werden nicht durch die Applikation von Sensoren oder anderweitiger Instrumentierung beeinflusst, die evtl. Störgrößen und/oder Messfehler verursachen würden. Eine solche Applikation bzw. Instrumentierung würde außerdem idealisiert Punktmassen darstellen, und müssten bei der analytischen Beschreibung des mechanischen Systems entsprechend berücksichtigt werden. Es muss lediglich eine ausreichend hohe Reflexion der Oberfläche gegeben sein, um den Messstrahl in das Gerät zurück zu reflektieren. In den durchgeführten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen sind aufgrund der schlechten Reflexionseigenschaften der Oberfläche

des Probekörpers am jeweiligen Messpunkt in geringem Ausmaß (ca. 5 mm x 5 mm) Reflexionsfolien aufgebracht worden. Da die bereits absolut sehr geringe Masse der Reflexionsfolie v. a. im Verhältnis zur Masse des Probekörpers vernachlässigbar ist, ist diese als vernachlässigbar klein vorausgesetzt worden. Die ausgewerteten Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen sind zusätzlich insoweit direkt vergleichbar, da auf alle Probekörper am Messpunkt Reflexionsfolie in diesem geringen Ausmaß aufgebracht worden ist. Die Laservibrometrie weist zusätzlich eine hohe Sensitivität und die Möglichkeit zur Messung einer großen Bandbreite von Frequenzen auf. Die zuvor genannten Eigenschaften sind gleichzeitig die Anforderungen an das Messverfahren für die durchgeführten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen. Damit ermöglicht die Anwendung der Laservibrometrie einen relativ einfach gestalteten Versuchsaufbau mit der geforderten Genauigkeit und Reproduzierbarkeit. Für weitere experimentelle strukturdynamische Untersuchungen bietet ein Laser-Scanning-Vibrometer zusätzlich die Möglichkeit der sequentiellen Vermessung mehrerer definierter Positionen, wenn eine kontinuierliche Anregung verwendet wird.

### 10.4.2 Einspann- und Anregevorrichtung

Die Entwicklung und Konstruktion einer Einspannvorrichtung sowie der benötigten Weganregung ist nach den Schritten der Konstruktionsmethodik durchgeführt worden [34]. Die Einzelschritte in der Phase der Konzeptfindung beinhalten das Erstellen einer Anforderungsliste, einer Funktionsstruktur sowie eines morphologischen Kastens. Damit werden Lösungsvarianten definiert, die anschließend in einer wirtschaftlichen und technischen Bewertung (Nutzwertanalyse) gegeneinander verglichen werden. Der sich daraus ergebende konstruktive Entwurf für eine Einspannung sowie für eine Weganregung ist realisiert worden und wird kurz beschrieben.

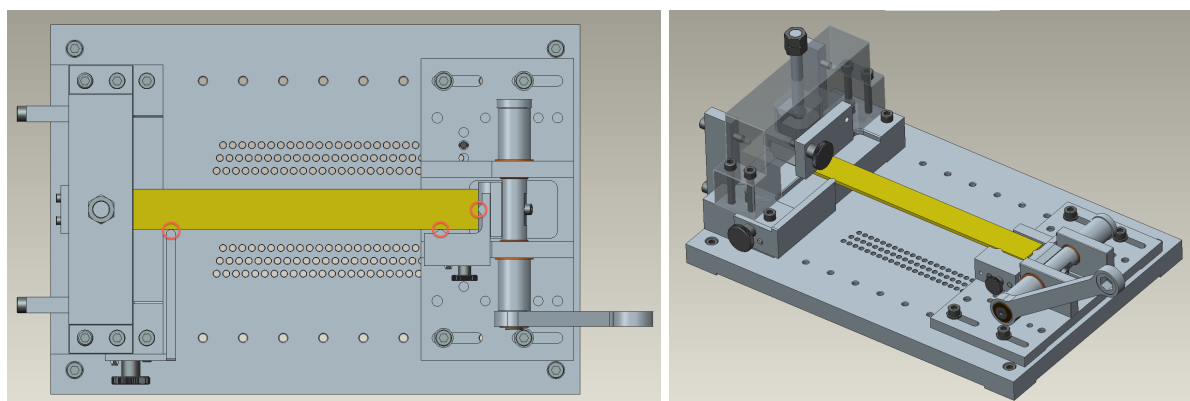
#### **Positionierung, Orientierung und Einspannung des Probekörpers**

Die Funktion der Einspannvorrichtung ist die definierte reproduzierbare Positionierung, Orientierung und Einspannung eines flachen stabförmigen Probekörpers mit den zuvor beschriebenen geometrischen Abmessungen, sodass dieser strukturmechanisch als Kragbalken betrachtet werden kann. Gleichzeitig muss sichergestellt sein, dass der Probekörper nach Anregung freie abklingende Transversalschwingungen ausführt, die berührungslos mit einem Laser-Doppler-Vibrometer vermessen werden können. Die dafür formulierten Hauptanforderungen an die Einspannvorrichtung sind eine im Verhältnis zum Probekörper steife Konstruktion, sowie eine jeweils definierte und reproduzierbare Positionierung, Orientierung und Klemmung. Dafür werden an ausgewählten Stellen Anschläge verwendet, die nach dem Positionieren, Orientieren und Einspannen des Probekörpers wieder entfernt werden. Damit ist sichergestellt, dass der Probekörper frei schwingt und die Transversalschwingungen frei abklingen.

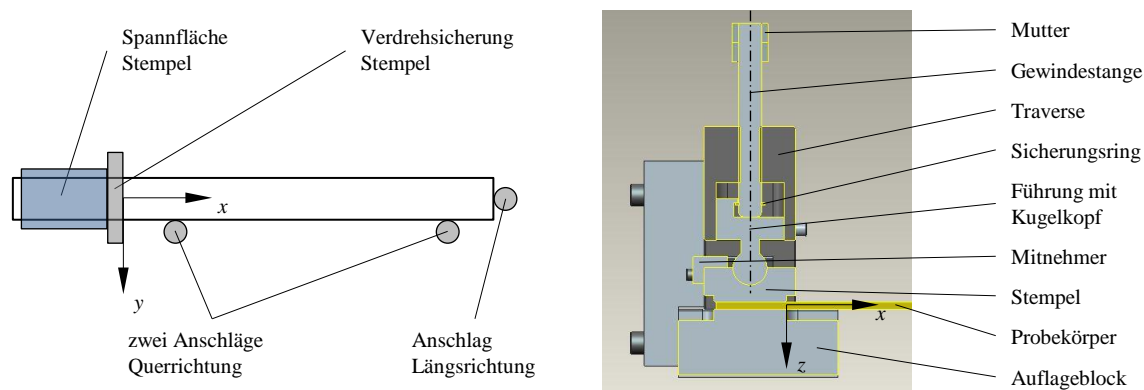
Die reproduzierbare Positionierung des Probekörpers erfolgt in Längsrichtung mit einem punktförmigen Anschlag und in Querrichtung mit zwei punktförmigen Anschlägen. Aufgrund der zu erwartenden Frequenzabhängigkeit der strukturdynamisch ermittelten Werkstoffkennwerte [49] ist der punktförmige Anschlag in Längsrichtung in diskreten Schritten variabel. Ein definiertes Bohrmuster erlaubt die reproduzierbare Variation der Auskraglänge des Probekörpers in definierten Schritten von 2 mm. Da die konstruktive Lösung der Einspannung eine Mindestklemmlänge bzw. Mindestspannlänge von 30 mm erfordert, beträgt die maximale Auskraglänge der Probekörper  $l = 220$  mm. Damit ist die Auskraglänge im Bereich von maximal 220 mm bis minimal 66 mm in diskreten Schritten von 2 mm variierbar [34]. Abbildung 10.8 zeigt links die Draufsicht und rechts die isometrische Ansicht der Einspann- und Anregevorrichtung mit eingespannter Reinharzprobe und montierten Anschlägen in Quer- und Längsrichtung als CAD-Modell.

Der Probekörper wird durch ein Niederschrauben eines Stempels auf den Probekörper, der auf einer Grundfläche aufliegt, geklemmt. Dabei sind der Stempel und die Gewindestange mit einem Kugelgelenk verbunden. Das Kugelgelenk entkoppelt die Rotationsbewegung der Gewindestange

von der Translationsbewegung des Stempels. Zusätzlich ermöglicht das Kugelgelenk eine plane Auflage des Stempels auf dem Probekörper. Ein Anschlag an der Stirnseite der Traverse sorgt dafür, dass die Vorderkante des Stempels und die Vorderkante der Grundfläche, auf der der Probekörper aufliegt, parallel verlaufen und übereinander liegen. Eine definierte und reproduzierbare Klemmung bezüglich der Klemmkraft erfolgt durch das Anziehen der Gewindestange mit einem Drehmomentschlüssel. Abbildung 10.9 zeigt links die schematische Darstellung des Probekörpers mit Spannfläche des Stempels und Verdrehsicherung sowie punktförmige Anschläge in Quer- und Längsrichtung in der Draufsicht sowie rechts den Längsschnitt durch die Einspannvorrichtung als CAD-Modell, der den beschriebenen Mechanismus verdeutlicht.



**Abbildung 10.8:** Draufsicht (links) und isometrische Ansicht (rechts) der Einspann- und Anzegevorrichtung mit eingespannter Reinharzprobe und montierten Anschlägen in Quer- und Längsrichtung als CAD-Modell [34].

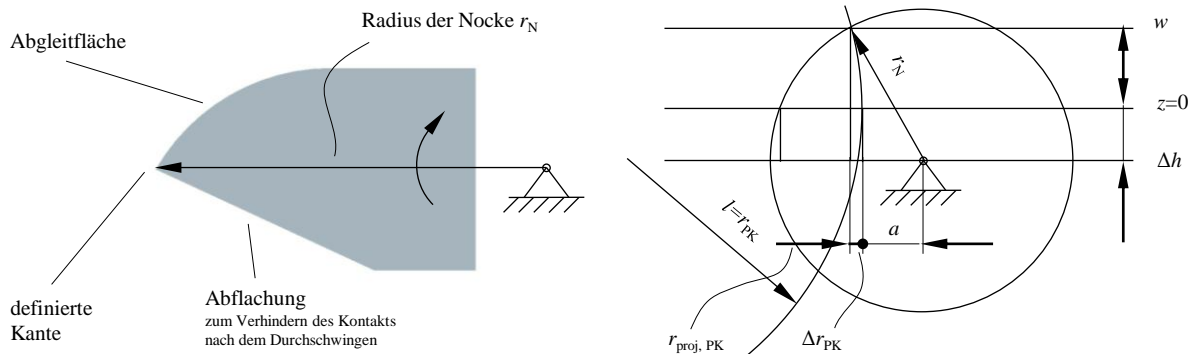


**Abbildung 10.9:** Schematische Darstellung des Probekörpers mit Spannfläche des Stempels und Verdrehsicherung sowie punktförmige Anschläge in Quer- und Längsrichtung in der Draufsicht (links) und Längsschnitt durch die Einspannvorrichtung als CAD-Modell (rechts): Definierte und reproduzierbare Klemmung des Probekörpers durch Niederschrauben des Stempels. Entkopplung der Rotationsbewegung der Gewindestange von der Translationsbewegung des Stempels durch das Kugelgelenk.

### Weganregung

In verschiedenen Regelwerken sind unterschiedliche Versuchsaufbauten zur Durchführung experimenteller strukturdynamischer Untersuchungen vorgesehen (vgl. DIN 1311 [98], DIN 53440 [99], DIN EN ISO 6721 [109], VDI 3830 [125]). Da in vorangegangenen Arbeiten, wie in Kapitel 2 dargestellt, unterschiedliche Versuchsaufbauten verwendet worden sind, sind die Ergebnisse untereinander nicht vergleichbar. Zusätzlich wird aufgrund der teilweise berichteten geringen Reproduzierbarkeit von Impulsanregungen [32], [132] zunächst eine in Stufen definierte Weganregung gefordert.

Die definierte reproduzierbare Weganregung erfolgt durch eine Nocke. Diese befindet sich auf der Einspannvorrichtung am freien Ende des Probekörpers. Sie ist drehbar gelagert, wobei das freie Ende der Nocke geringfügig kürzer gespannt ist, als das freie Ende des Probekörpers auskragt. Zusätzlich befindet sich der Drehpunkt unter dem Niveau der Unterseite des Probekörpers. Durch Rotation der Welle, lenkt die Nocke zunächst den Probekörper nach oben aus. Wenn dies ausreichend langsam geschieht, gleitet die Oberseite der Nocke unter der Unterkante des Probekörpers. Dabei wird der Probekörper vergleichbar mit einer (quasi-)statischen Querkraft am freien Ende belastet. Bei weiterer Rotation der Welle bricht der Kontakt der Nocke mit dem freien Ende des Probekörpers ab, und der Probekörper schwingt nach unten durch. Damit wird v. a. die erste Eigenform und damit die Grundfrequenz der Transversalschwingungen des einseitig eingespannten flachen stabförmigen Probekörpers als Kragbalken angeregt. Abbildung 10.10 links zeigt die Nocke im Schnitt mit ihren unterschiedlichen Funktionsflächen.



**Abbildung 10.10:** Nocke zur definierten Wegauslenkung mit Bezeichnung der unterschiedlichen Funktionsflächen (links) und den geometrischen Abmessungen zur näherungsweisen Berechnung der Wegauslenkung (rechts).

Mit dem zuvor beschriebenen Mechanismus ist es möglich, eine definierte Weganregung am freien Ende des Probekörpers sicherzustellen. Eine näherungsweise Berechnung des Betrags der Wegauslenkung  $w$  erfolgt vereinfachend auf rein geometrischen Zusammenhängen. Dabei genügt die Anwendung des pythagoreischen Zusammenhangs im rechtwinkligen Dreieck [18], [130]. Die dafür verwendeten geometrischen Abmessungen sind in Abbildung 10.10 rechts dargestellt. Es wird vereinfachend vorausgesetzt, dass weder der Probekörper noch die Nocke eine Ausdehnung in Dickenrichtung besitzen. Zusätzlich wird angenommen, dass sich sowohl der Endpunkt des Probekörpers am freien Ende als auch der Endpunkt der Nocke kreisförmig um die Einspannung bzw. um die Lagerung bewegen. Die Anwendung des pythagoreischen Zusammenhangs im rechtwinkligen Dreieck liefert  $(w + \Delta h)^2 + (a + \Delta r_{PK})^2 = r_N^2$ . Für eine exakte Bestimmung des Rücksprungs als Längskomponente  $\Delta r_{PK} = r_{PK} - r_{proj, PK}$  bedingt durch die Auslenkung  $w$  des Probekörpers wird der Zusammenhang nochmals angewendet,  $w^2 + r_{PK}^2 = r_{proj, PK}^2$  und daraus  $r_{proj, PK} = \sqrt{w^2 + r_{PK}^2}$ . Mit  $\Delta r_{PK} = r_{PK} - \sqrt{w^2 + r_{PK}^2}$  folgt als geometrischer Zusammenhang  $(w + \Delta h)^2 + (a + r_{PK} - \sqrt{w^2 + r_{PK}^2})^2 = r_N^2$ . Unter der Voraussetzung von im Verhältnis zur Auskraglänge des Probekörpers  $l$  bzw.  $r_{PK}$  kleine Auslenkungen  $w$  folgt  $\sqrt{w^2 + r_{PK}^2} \approx \sqrt{r_{PK}^2} = r_{PK}$ . Aus dem Zusammenhang  $(w + \Delta h)^2 + a^2 = r_N^2$  lässt sich die Auslenkung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen zu  $w = \sqrt{r_N^2 - a^2} - \Delta h$  berechnen, wobei diese Lösung mit positivem Vorzeichen vor der Quadratwurzel die physikalisch sinnvolle Lösung darstellt.

Der Betrag der Wegauslenkung  $w$  hängt somit von der Länge der Nocke  $r_N$ , dem horizontalen Abstand  $a$  und dem vertikalen Abstand  $\Delta h$  des freien Endes des Probekörpers vom Drehpunkt der Nocke. Die zuvor beschriebenen vereinfachenden Voraussetzungen und Näherungen ermöglichen die analytische Berechnung der Auslenkung  $w$  auf der Basis idealisierter geometrischer Abmessungen. Eine realitätsnähere Berechnung ist durch die Berücksichtigung der Biegelinie

eines Kragbalkens und der maximalen Verschiebung  $w_{\max} = w_{(x=l)}$ , die stets von der Biegesteifigkeit des jeweiligen Probekörpers abhängt, möglich. In der ausgeführten Konstruktion wird der Betrag der Auslenkung durch die Länge der Nocke  $r_N$  variiert, von der mehrere Varianten unterschiedlicher Länge in Schritten von 1 mm zur Verfügung stehen.

## 10.5 Versuchsdurchführung

Die Versuchsdurchführung enthält zunächst die definierte reproduzierbare Positionierung, Orientierung und Einspannung des Probekörpers. Mit dem Laservibrometer werden die Positionen der Messpunkte kalibriert und definiert. Anschließend werden die ausgewählten messtechnischen Parameter, die in der Software des Signalprozessors des Laser-Scanning Vibrometers POLYTEC PSV 400 [116] definiert eingegeben werden, angegeben. Nach definierter reproduzierbarer Weganregung wird die Aufnahme des Messsignals bei einer relativ zur Dicke des Probekörpers konstanten Schwingungsamplitude getriggert. Schließlich wird beschrieben, wie konstante geometrische Bedingungen,  $l = l_{UD} = l_G$ , und konstante dynamische Bedingungen,  $f = f_{UD} = f_G$  geschaffen werden.

Die Auswertung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen ist in Abschnitt 11.2.1 beschrieben. Die Vergleichbarkeit der ausgewerteten Ergebnisse wird zusätzlich durch eine Analyse der Reproduzierbarkeit und der Sensitivität der ausgewerteten Ergebnisse bezüglich definierter variiert experimenteller Randbedingungen nachgewiesen. Die entsprechenden Aspekte sind im Anhang A.1 dargestellt.

### 10.5.1 Einspannung und Anregung des Probekörpers

Der Probekörper wird in die Einspannvorrichtung eingelegt und an die in Abbildung 10.8 rechts schematisch dargestellten montierten Anschläge angelegt. Der Stempel wird stirnseitig gegen die montierte Verdrehsicherung angelegt. Der Probekörper wird zunächst durch handfestes Festdrehen der Mutter bzw. der Gewindestange vorgeklemmt, bevor er durch das reproduzierbare und definierte Aufbringen eines Drehmoments von  $M_A = 12,5 \text{ Nm}$  geklemmt wird. Dies entspricht einer Flächenpressung von  $p = 14,8 \text{ MPa}$  in der Klemmfuge. Da der Stempel bezüglich der Breite des Probekörpers ein beidseitiges Übermaß aufweist, ist die Fläche der Klemmfuge durch die Länge des Stempels und die Breite des Probekörpers definiert,  $l_{\text{Stempel}} = 30 \text{ mm} \times b_{\text{Probekörper}} = 25 \text{ mm} = 750 \text{ mm}^2$ . Schließlich werden die montierten Anschläge für den Probekörper und die montierte Verdrehsicherung für den Stempel entfernt. Damit ist der Probekörper definiert und reproduzierbar einseitig fest eingespannt.

Die Orientierung der Probekörper ist dabei immer gleich. Bezüglich der Definition von Ober- und Unterseite befindet sich die bei der Aushärtung im Heißluftautoklav oben befindende Seite auch bei den durchgeführten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen oben. Bezüglich der Definition der Auskragrichtung befindet sich der durch den Wasserstrahlschnitt ergebende Anschnitt unter bzw. hinter dem Klemmbereich des Stempels. Dies ist definiert worden, da bei einigen Probekörpern durch den Wasserstrahlschnitt geringfügige Delaminationen im Bereich des Anschnitts auftraten. Damit wird sichergestellt, dass der auskragende Teil des Probekörpers definierte kontinuierlich hergestellte Kanten aufweist.

### 10.5.2 Position des Messpunktes

Um bei der Auswertung aussagekräftige Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen zu erhalten, wird die Position des Messpunktes auf dem Probekörper definiert.

Dies geschieht über die Kamera-Software des Laser-Scanning Vibrometers POLYTEC PSV 400 [116]. Nach vorhergehender Kalibrierung des Messbereiches des Lasers mit der Kamera (sog. 2D-Abgleich) wird die Position der Messpunkte auf jedem Probekörper 5 mm entfernt vom freien Ende und mittig bezüglich der Breite der Probekörper  $b = 25$  mm gewählt. Die in Abschnitt 10.4.1 beschriebene Reflexionsfolie mit seitlichen Abmessungen von ca. 5 mm x 5 mm wird so auf dem Probekörper aufgebracht, dass der Laserstrahl mittig darauf auftrifft. Schließlich wird der Laserstrahl fokussiert.

Mit der untenstehend beschriebenen Definition der Bandbreite der Messung  $B = 1000$  Hz werden in den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen maximal die ersten drei Eigenfrequenzen  $f_k(x)$  für  $k = 1, 2, 3$  und damit Eigenschwingungsformen  $W_k(x)$  für  $k = 1, 2, 3$  erfasst. Aufgrund der in Abschnitt 10.4.2 beschriebenen Weganregung wird jedoch v. a. die erste Eigenform und damit die Grundfrequenz der Transversalschwingungen des einseitig eingespannten Probekörpers angeregt. Da der als Kragbalken zu betrachtende Probekörper keine Schwingungsknoten hat, sind an dieser Position der Messpunkte alle für die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen relevanten Eigenschwingungsformen und Eigenfrequenzen detektierbar. Die bezüglich der Auskraglänge  $l$  eines Kragbalkens normierten Positionen der Schwingungsknoten ist in Abschnitt 8.2.5 angegeben.

### 10.5.3 Messtechnische Parameter

In der Software des Signalprozessors des Laser-Scanning Vibrometers POLYTEC PSV 400 [116] werden die Parameter der Messung eines Signals über die Bandbreite  $B$  und die Anzahl der FFT-Linien im Frequenzbereich  $N$  definiert [116]. Die ausgewählte Bandbreite beträgt  $B = 1000$  Hz. Die Anzahl der FFT-Linien im Frequenzbereich beträgt  $N = 12800$ . Mit diesen Parametern ergibt sich die Abtastfrequenz (sog. sampling rate)  $f_s = 2,56 \cdot B = 2560$  Hz und die gesamte Messdauer  $t_{\text{tot}} = \frac{N}{B} = 12,8$  s für jede Einzelmessung des freien Ausschlagverhaltens. Die entsprechende Auflösung im Frequenzbereich ergibt sich aus  $f_r = \frac{1}{t_{\text{tot}}} = \frac{B}{N} = 78,125$  mHz [116].

### 10.5.4 Aufzeichnung des Messsignals

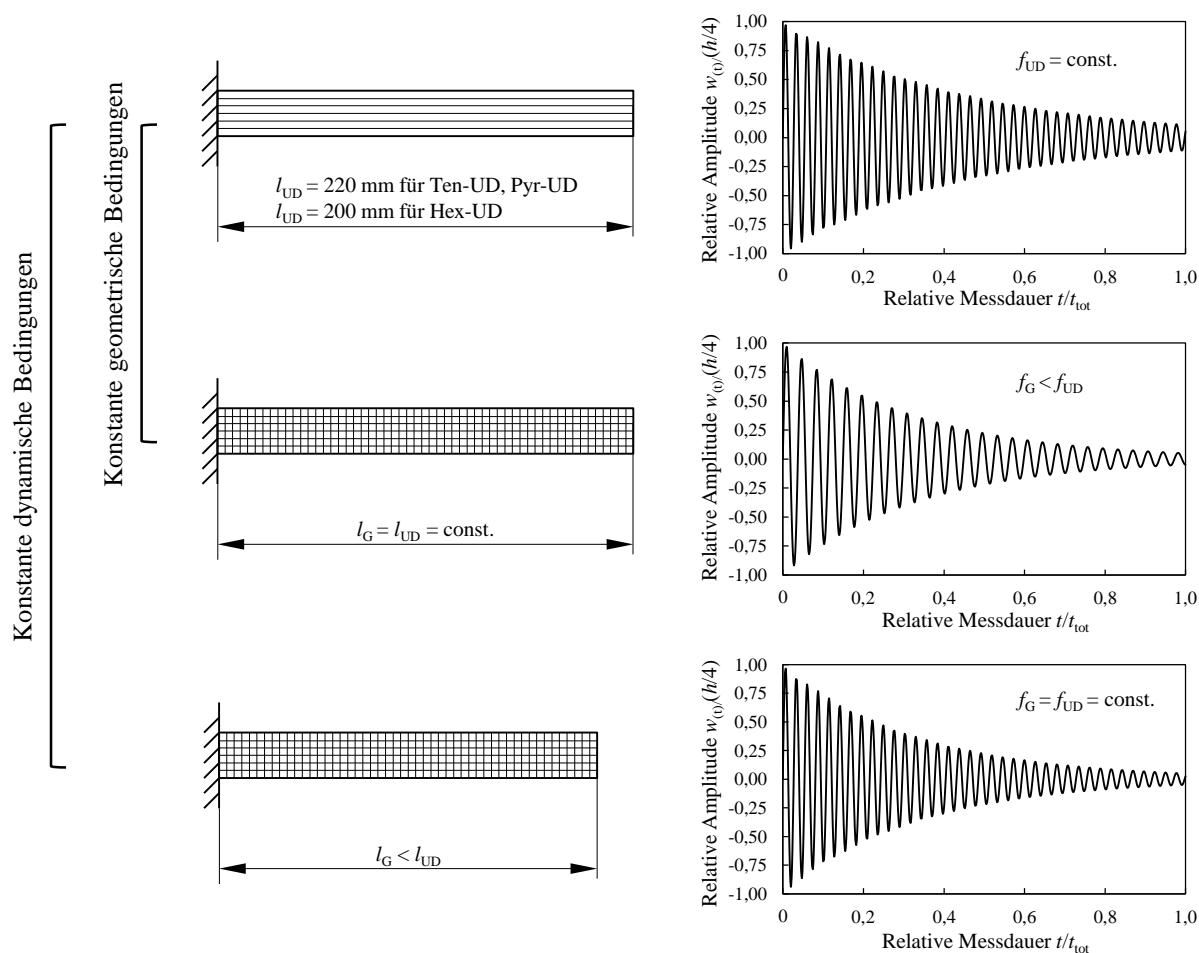
Zur reproduzierbaren und definierten Weganregung des Probekörpers, wird dieser am freien Ende mit einer Nocke mit ca. einem Drittel der Dicke des Probekörpers  $h/3$  ausgelenkt. Wenn der Betrag der Amplitude der freien abklingenden Schwingung  $|w(t)|$  ein Viertel der Dicke des Probekörpers  $h/4$  erreicht, also  $|w(t)| = h/4$ , wird die Aufnahme des Messsignals gestartet (getriggert). Im Detail ermöglicht dies ein sog. Pre-Trigger, der in der Software des Laser-Scanning Vibrometers POLYTEC PSV 400 [116] einstellbar ist. Die Notwendigkeit einer relativ konstanten Weganregung für jeden Probekörper ergibt sich aus der Anforderung, die strukturdynamischen Eigenschaften in einem vorausgesetzten linearen viskoelastischen Bereich über die gesamte Messdauer des Signals zu ermitteln.

### 10.5.5 Konstante Bedingungen

Im Einzelnen sind jeweils drei Probekörper pro Prüfplatte und damit pro Art der Faserverstärkung experimentell untersucht worden. Jeder Probekörper wird fünfmal hintereinander vermessen. Diese Voraussetzung erlaubt die Auswertung der Ergebnisse im Sinne der Statistik (Berechnung eines Mittelwerts mit zugehöriger Standardabweichung für jeden Probekörper; vgl. Anzahl  $n = 5$  als minimale Stichprobe [38], [111], [130], wie in Anhang A.3 dargestellt) und die Zuordnung der ermittelten Materialkennwerte zur Art der Faserverstärkung.

Die unidirektional verstärkten Probekörper liefern die Bezugsgrößen der experimentellen Unter-

suchungen. Es wird angenommen, dass die mesomechanische Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge für diese Art der Verstärkung nicht wirkt. Die ermittelte Werkstoffdämpfung bei unidirektional verstärkten Probekörpern wird deshalb stets geringer erwartet, als bei gewebeverstärkten Probekörpern. Die sich ergebenden Eigenfrequenzen hängen jedoch von mehreren Parametern ab. Dies sind die Dichte des Materials der Probekörper  $\rho$  als physikalischer Parameter, die Steifigkeit des Materials der Probekörper  $E$  als strukturmechanischer Parameter und die Querschnittsfläche  $A = bh$  und das Flächenträgheitsmoment  $I_y = \frac{bh^3}{12}$  (jeweils für konstante rechteckförmige Querschnitte über die Länge des Probekörpers) als geometrische Parameter. Die Steifigkeit  $E$  der Probekörper ist dabei für jedes Halbzeug bzw. jeden Lagenaufbau unveränderbar. Aufgrund der nominell größeren Steifigkeiten des Materials der unidirektional verstärkten Probekörper gegenüber den gewebeverstärkten Probekörpern,  $E_{UD} > E_G$ , weisen diese bei gleichen Querschnittsabmessungen und gleicher Auskraglänge,  $l = l_{UD} = l_G$ , stets höhere Eigenfrequenzen  $f_{UD} > f_G$  auf. Es verbleibt als definiert variierbarer geometrischer Parameter die Auskraglänge  $l$ . Die gewebeverstärkten Probekörper weisen gleiche Eigenfrequenzen,  $f = f_{UD} = f_G$ , auf, wenn deren Auskraglänge definiert reduziert wird,  $l_G < l_{UD}$ . Dabei ist der indirekt proportionale Zusammenhang der Eigenkreisfrequenzen zur quadratischen Auskraglänge,  $\omega \sim \frac{1}{l^2}$  zu beachten. Abbildung 10.11 stellt den Zusammenhang schematisch dar.



**Abbildung 10.11:** Konstante geometrische Bedingungen,  $l_{UD} = l_G$  (hier:  $l_{UD} = 220$  mm für Ten-UD und Pyr-UD sowie  $l_{UD} = 200$  mm für Hex-UD), und konstante dynamische Bedingungen,  $f_{UD} = f_G$ , unter der Voraussetzung  $E_{UD} > E_G$  sowie  $\rho = \text{const.}$ ,  $A = \text{const.}$  und  $I_y = \text{const.}$ , für die  $0^\circ$ -unidirektional und  $0^\circ$ -gewebeverstärkten flachen stabförmigen Probekörper bei einseitig fester Einspannung in der Draufsicht.

Im Falle der beiden Sätze vergleichbarer Probekörper, basierend auf trockenen textilen Halbzeugen (Roving und entsprechendes Leinwand- sowie Köpergewebe 2/2), weisen die Probekörper alle näherungsweise gleiche Querschnittsabmessungen  $b$  und  $h$  auf, sodass der zuvor genannte Zusammenhang gilt. Die Bezugsgröße der Auskraglänge wird zu  $l = 220$  mm gewählt. Im Falle des Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf den Kohlenstofffaser-Prepregs, trifft dieser Zusammenhang jedoch nicht zu. Trotz gleicher Lagenanzahl  $N = 18$  weisen die unidirektional verstärkten Probekörper eine geringere Dicke als die gewebeverstärkten Probekörper,  $h_{UD} < h_G$ , und damit auch ein deutlich kleineres Flächenträgheitsmoment,  $I_{y,UD} < I_{y,G}$ , auf. In Kombination mit der nominell größeren Steifigkeit des unidirektional verstärkten Materials,  $E_{UD} > E_G$ , weisen die unidirektional sowie die gewebeverstärkten Probekörper bereits bei gleicher Auskraglänge näherungsweise gleiche Eigenfrequenzen  $f_{UD} \approx f_G$  auf. Deshalb wird in diesem Fall die Bezugsgröße der Auskraglänge zu  $l = 200$  mm gewählt. Aufgrund der abweichenden Voraussetzungen ist zum Erreichen gleicher Eigenfrequenzen,  $f = f_{UD} = f_G$  dann teilweise sogar eine geringfügige Erhöhung der Auskraglänge,  $l_G > l_{UD}$ , nötig.

### Konstante geometrische Bedingungen

Um gleiche geometrische Bedingungen zu erreichen, wie in Abbildung 10.11 oben und mitte schematisch dargestellt, werden die gewebeverstärkten Probekörper mit der gleichen Auskraglänge  $l = l_{UD} = l_G$  wie die unidirektional verstärkten Probekörper untersucht. Bei gegebener Auskraglänge  $l$  und der ermittelten Eigenfrequenz  $f$  ergibt sich der globale Elastizitätsmodul des Materials der Probekörper  $E$  nach [48], [49], [125], [145] zu

$$E = \left( \frac{2\pi}{\lambda^2} f l^2 \right)^2 \frac{\rho A}{I} = 12 \left( \frac{2\pi}{\lambda^2} f l^2 \right)^2 \frac{\rho}{h^2}. \quad (10.4)$$

Dabei ist  $l$  die Auskraglänge,  $f$  die Grundfrequenz,  $I_y$  das Flächenträgheitsmoment,  $\rho$  die Dichte,  $A$  die Querschnittsfläche und  $h$  die Dicke des Probekörpers. Für den einseitig fest eingespannten Balken (fest-frei Randbedingungen) und den sich daraus ergebenden transversalschwingenden Kragbalken ergibt sich der Eigenwert der Eigenschwingung erster Ordnung  $\lambda$  aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung des schubstarren EULER-BERNOULLI-Balkens. Der Eigenwert der Eigenschwingung erster Ordnung (Grundschiwingung) eines transversalschwingenden Kragbalkens beträgt  $\lambda = 1,875$  [48], [49], [125], [145].

### Konstante dynamische Bedingungen

Um konstante dynamische Bedingungen zu erreichen, wie in Abbildung 10.11 oben und unten schematisch dargestellt, werden die gewebeverstärkten Probekörper zusätzlich mit einer weiteren definiert variierten Auskraglänge  $l$  experimentell strukturdynamisch untersucht. Dafür wird die Auskraglänge der gewebeverstärkten Probekörper definiert variiert, sodass diese bei gleicher Grundfrequenz wie die entsprechenden unidirektional verstärkten Probekörper bei der Auskraglänge  $l_{UD}$  schwingen. Die sich ergebende Bedingung  $f = f_{UD} = f_G$  wird als dynamisch gleich und damit vergleichbar betrachtet. Die entsprechende definiert variierte Auskraglänge ergibt sich durch Auflösen von Gleichung (10.4) nach der Auskraglänge  $l$  zu [48], [49], [125], [145]

$$l = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2\pi f} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 h}{2\pi f} \sqrt{\frac{E}{12\rho}}}, \quad (10.5)$$

wobei  $f$  die Grundfrequenz des entsprechenden unidirektional verstärkten Probekörpers bei der Auskraglänge  $l_{UD}$  ist. Im Detail werden die jeweils drei Probekörper mit einer Art der Faserverstärkung nach der Grundfrequenz  $f$  und der sich ergebenden Steifigkeit  $E$  miteinander verglichen. D. h. der gewebeverstärkte Probekörper mit der größten Grundfrequenz und Steifigkeit wird mit dem unidirektional verstärkten Probekörper mit der größten Grundfrequenz und Steifigkeit verglichen. Analog werden die Probekörper mit den mittleren Grundfrequenzen und Steifigkeiten



sowie die mit den kleinsten Grundfrequenzen und Steifigkeiten miteinander verglichen. Dabei ist zu beachten, dass die Variation der Auskraglänge  $l$  lediglich in Schritten von 2 mm möglich ist, und die maximale Frequenzauflösung  $f_r = 78,125$  mHz beträgt [34], [116].



# 11 Ergebnisse der Untersuchungen

Die Auswertungen und die Ergebnisse der analytischen und numerischen Untersuchungen in Kapitel 9 sowie der experimentellen Untersuchungen in Kapitel 10 werden dargestellt.

## 11.1 Analytische und numerische Untersuchungen

Die Ergebnisse des analytischen Modells als auch der FE-Berechnungen werden ausgewertet und miteinander verglichen. Die unterschiedlichen Mechanismen der mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund der Ondulation und ihrer Sensitivität auf geometrische Parameter, Materialeigenschaften und Randbedingungen werden identifiziert und beschrieben.

### 11.1.1 Auswertung

Die Variation der geometrischen Parameter der Ondulation  $\tilde{O}$ , Amplitude  $A$  und Länge  $L$  bzw. Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$  in jeweils fünf Schritten, wie in Abschnitt 9.3 beschrieben, liefert insgesamt 25 Kombinationen für die betrachteten Grade der Ondulation. Für jeden der 25 Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  werden die ausgewählten Deformationen als normierte Verschiebungen,  $u_{\text{rel}}$  im analytischen Modell bzw.  $\varepsilon_x$  im numerischen Modell, in den beiden Dekaden mit jeweils zehn äquidistanten Schritten, wie in Abbildung 9.7 dargestellt, aufgebracht. Die relevanten Größen werden für jeden Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für jeden Einzelschritt  $n = 0, \dots, 39$  ausgewertet und über die normierten Verschiebungen aufgebracht. Dabei liefern die ausgewerteten Größen in den betrachteten Bereichen Zusammenhänge, die in guter Näherung linear sind, wie exemplarisch im  $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm in Abbildung 9.4 in Abschnitt 9.4.2 dargestellt.

Die Auswertung des jeweiligen Zusammenhangs für jeden Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  erfolgt dabei über die Betrachtung des linear vorausgesetzten Zusammenhangs zwischen aufgebrachter relativer Verschiebung und der betrachteten relevanten Größen, analog zu den Ausführungen in OTTAWA et al. 2012 [129]. Basierend auf der allgemeinen Geradengleichung

$$y(x) = m \cdot x + t, \quad (11.1)$$

mit der Steigung  $m$  mit  $m \in R$  und dem  $y$ -Abschnitt  $t$  mit  $t \in R$ , sowie unter der zusätzlichen vereinfachend getroffenen Voraussetzung, dass die einzelnen Geraden Ursprungsgeraden mit dem  $y$ -Abschnitt  $t = 0$  sind, wird die Steigung

$$y'(x) = m = \tilde{M} \quad (11.2)$$

ermittelt. Dieser weitere spezifische dimensionslose Kennwert  $\tilde{M}$  wird für jeden der 25 betrachteten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  ausgewertet.

Mit der Größe  $\tilde{M}$  wird ein weiterer spezifischer Kennwert eingeführt. Im Detail entsprechen die Steigungen  $\tilde{M}$  der Sensitivität eines bestimmten Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  bezüglich der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge. Dabei bedeutet eine größere Steigung  $\tilde{M}$  bzw. ein höherer Betrag der Steigung  $|\tilde{M}|$  eine höhere Sensitivität, während ein geringerer Wert eine geringere Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik impliziert.

### 11.1.2 Ergebnisse des analytischen Modells

Die Ergebnisse des analytischen Modells werden als Steigungen im  $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm für jeden der 25 Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  dargestellt.

Tabelle 11.1 enthält die nach Gleichung (11.2) ausgewerteten Ergebnisse der Steigungen im  $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm  $\tilde{M}$  für die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für die beiden betrachteten Intervalle der aufgebrachten Deformationen in Längsrichtung  $u_{\text{rel}}$  für alle untersuchten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  des analytischen Modells. Die Ergebnisse sind dabei von oben nach unten aufsteigend nach dem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  angeordnet.

Abbildung 11.1 stellt die Zusammenhänge der untersuchten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  und der Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik dar. In diesem Fall werden jedoch die Beträge der Steigungen im  $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm, also  $|\tilde{M}|$  betrachtet, während in allen anderen Fällen vorzeichenbehafteten Werte der Steigungen  $\tilde{M}$  betrachtet werden. Die Betrachtung der Beträge der Steigungen im  $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm  $|\tilde{M}|$  erlaubt die graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  und der Sensitivität auf die Kinematik sowohl in einem linear äquidistant skalierten Diagramm, wie in Abbildung 11.1 links dargestellt, als auch in einem doppelt-logarithmisch skalierten Diagramm, wie in Abbildung 11.1 rechts dargestellt. Dabei sind die Ergebnisse in beiden Fällen für das größere Intervall  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-3} \dots +1 \cdot 10^{-3}$  und für das kleinere betrachtete Intervall  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-4} \dots +1 \cdot 10^{-4}$  separat dargestellt. Unter der Voraussetzung einer hyperbolischen Korrelation sind die Näherungsgleichungen für jedes der beiden Intervalle angegeben. Zusätzlich ist die obere Grenze mit einer breiten Strichlinie visualisiert, die für den Exponenten -1,5 identifiziert werden kann,  $|\tilde{M}| = \tilde{O}^{-1,5}$  [57].

### 11.1.3 Auswertung der FE-Berechnungen

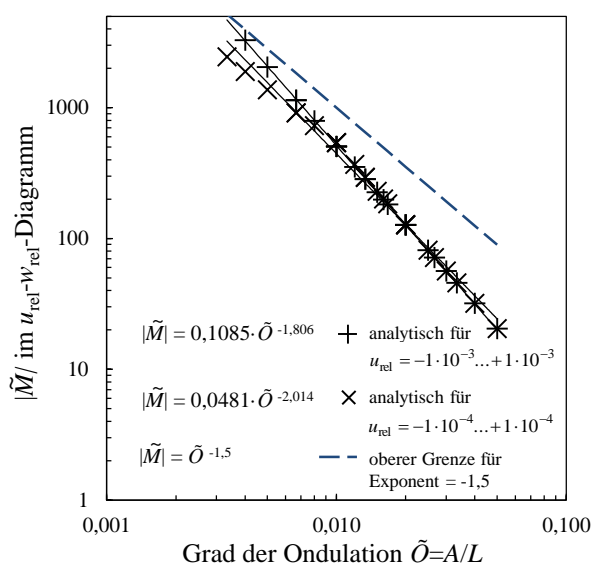
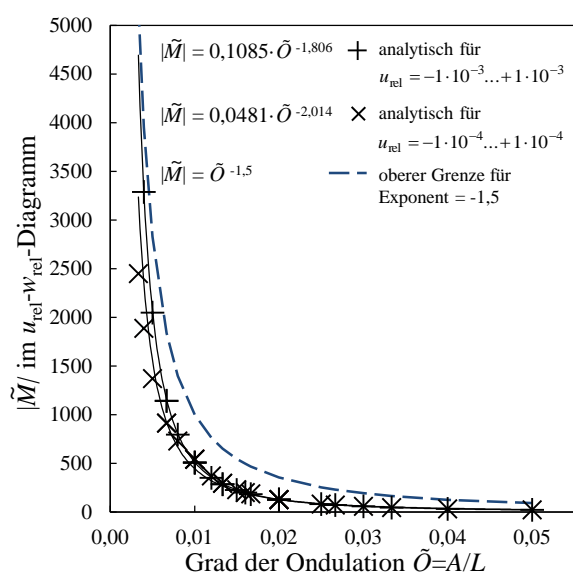
Die Auswertung der FE-Berechnungen, die in Abschnitt 9.5 beschrieben sind, wird dargestellt. Die Auswertung der Ergebnisse der FE-Berechnungen erfolgt analog zur Auswertung der Ergebnisse des analytischen Modells, wie im Abschnitt 11.1.1 dargestellt. Dafür werden die Quer- und Längskomponenten (in  $y$ - bzw.  $x$ -Richtung) der mesomechanischen Kinematik als  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  und  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  für jede einzelne Kombination der geometrischen Parameter und damit Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  an relevanten Positionen des FE-Modells ausgewertet. In den linear-elastostatischen FE-Berechnungen treten Effekte der Elastizität mit zeitgleich überlagert mit der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Parameter in gewebeverstärkten Einzellagen auf. Zur Ermittlung des kinematischen Anteils in Querrichtung wird der Anteil der Elastizität von den Querverformungseffekten separiert. Zusätzlich wird zur Ermittlung des kinematischen Anteils in Längsrichtung der Anteil der Elastizität von den Längsverformungseffekten separiert.

#### Positionen der Auswertung

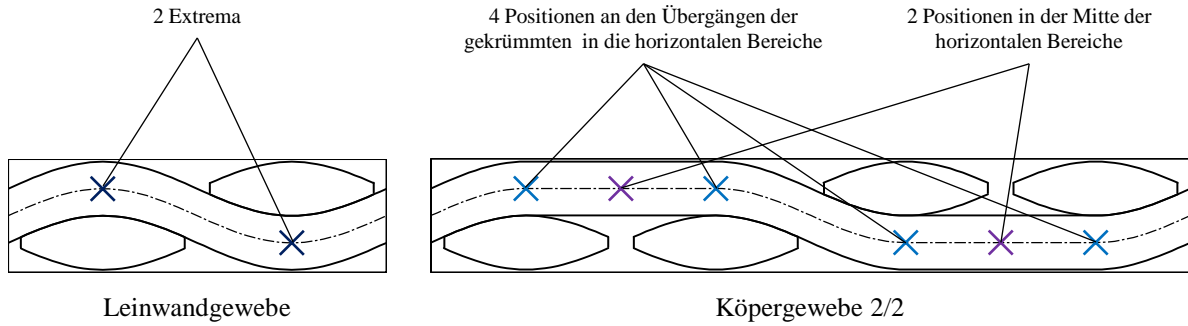
Die Auswertung der FE-Modelle erfolgt an relevanten Positionen auf der theoretischen Mittellinie des längs geschnittenen Stranges (hier: Kettstrang). Im Falle der repräsentativen Sequenz des Leinwandgewebes sind dies die beiden Extrema, im Einzelnen Maximum und Minimum. Im Falle der repräsentativen Sequenz des Köpergewebes 2/2 sind dies die vier Positionen, an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche, sowie die beiden Positionen in der Mitte der horizontalen Bereiche. Abbildung 11.2 stellt die Positionen der Auswertung für die beiden untersuchten Arten der Gewebekonstruktion, Leinwandgewebe links und Köpergewebe 2/2 rechts, schematisch dar.

**Tabelle 11.1:** Steigungen im  $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm  $\tilde{M}$  für die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für die beiden betrachteten Intervalle von  $u_{\text{rel}}$ .

| Geometrische Parameter der Ondulation |                            |   | Steigung $\tilde{M}$ im $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm                          |  |
|---------------------------------------|----------------------------|---|--|--|
| Amplitude<br>$A$                      | Länge<br>Ondulation<br>$L$ | Grad der<br>Ondulation<br>$\tilde{O} = \frac{A}{L}$ | analytisch für<br>$u_{\text{rel}} = \mp 1 \cdot 10^{-3}$<br>in Schritten $1 \cdot 10^{-4}$ | analytisch für<br>$u_{\text{rel}} = \mp 1 \cdot 10^{-4}$<br>in Schritten $1 \cdot 10^{-5}$ |
| 0,05                                  | 15,0                       | <b>0,00333</b>                                      | -2448,20   | -5040,10   |
| 0,05                                  | 12,5                       | <b>0,00400</b>                                      | -1886,70   | -3288,40   |
| 0,05                                  | 10,0                       | <b>0,00500</b>                                      | -1369,90   | -2047,40   |
| 0,10                                  | 15,0                       | <b>0,00667</b>                                      | -914,03  | -1143,40   |
| 0,05                                  | 7,5                        | <b>0,00667</b>                                      | -914,59  | -1141,30   |
| 0,10                                  | 12,5                       | <b>0,00800</b>                                      | -729,59  | -793,20  |
| 0,15                                  | 15,0                       | <b>0,01000</b>                                      | -540,08  | -507,26  |
| 0,10                                  | 10,0                       | <b>0,01000</b>                                      | -540,13  | -507,13  |
| 0,05                                  | 5,0                        | <b>0,01000</b>                                      | -540,14  | -505,79  |
| 0,15                                  | 12,5                       | <b>0,01200</b>                                      | -369,62  | -352,36  |
| 0,20                                  | 15,0                       | <b>0,01333</b>                                      | -293,84  | -285,42  |
| 0,10                                  | 7,5                        | <b>0,01333</b>                                      | -293,67  | -285,23  |
| 0,15                                  | 10,0                       | <b>0,01500</b>                                      | -229,49  | -225,43  |
| 0,20                                  | 12,5                       | <b>0,01600</b>                                      | -200,78  | -198,17  |
| 0,25                                  | 15,0                       | <b>0,01667</b>                                      | -184,74  | -182,66  |
| 0,25                                  | 12,5                       | <b>0,02000</b>                                      | -127,63  | -126,94  |
| 0,20                                  | 10,0                       | <b>0,02000</b>                                      | -127,54  | -126,90  |
| 0,15                                  | 7,5                        | <b>0,02000</b>                                      | -127,64  | -126,92  |
| 0,10                                  | 5,0                        | <b>0,02000</b>                                      | -127,50  | -126,90  |
| 0,25                                  | 10,0                       | <b>0,02500</b>                                      | -81,45   | -81,28   |
| 0,20                                  | 7,5                        | <b>0,02667</b>                                      | -71,61   | -71,49   |
| 0,15                                  | 5,0                        | <b>0,03000</b>                                      | -56,60   | -56,54   |
| 0,25                                  | 7,5                        | <b>0,03333</b>                                      | -45,86   | -45,83   |
| 0,20                                  | 5,0                        | <b>0,04000</b>                                      | -31,92   | -31,91   |
| 0,25                                  | 5,0                        | <b>0,05000</b>                                      | -20,50   | -20,50   |



**Abbildung 11.1:** Beträge der Steigungen  $|\tilde{M}|$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  in linear äquidistanter Skalierung (links) und doppelt logarithmischer Skalierung (rechts).



**Abbildung 11.2:** Positionen der Auswertung auf der theoretischen Mittellinie des Kettstrangs: Beide Extrema für Leinwandgewebe (links) und die vier Positionen an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche sowie die beiden Positionen in der Mitte der horizontalen Bereiche für Körpergewebe 2/2 (rechts).

### Ausgewertete Ergebnisse der FE-Berechnungen

Die FE-Modelle werden an den zuvor beschriebenen, und in Abbildung 11.2 dargestellten, Positionen bezüglich zwei strukturmechanischer Ergebnisse ausgewertet. Im Detail werden die Verschiebungen in Querrichtung ( $y$ -Verschiebungen  $v$ ) senkrecht zur aufgebrachtten Deformation in Längsrichtung ( $x$ -Richtung) sowie die Längsverzerrungen ( $x$ -Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ) ausgewertet.

### Separation von kinematischem und elastischem Anteil

Die Analyse der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge erfolgt über die Verschiebungen in Querrichtung ( $y$ -Verschiebung  $v$ ) für jeden Einzelschritt  $n = 0, \dots, 39$ . Die Betrachtung der Verschiebungen an den Positionen der Auswertung in Querrichtung erfolgt über die Differenz der  $y$ -Verschiebungen an den jeweiligen Positionen der Auswertung. Da die FE-Berechnungen den elastischen Anteil berücksichtigen, wird die relative Veränderung der Amplitude  $w_{rel,n}$  auf die gesamte Verzerrung in Querrichtung ( $y$ -Verzerrungen  $\varepsilon_y$ ) zurückgeführt. Diese ergibt sich aus dem Verhältnis der Differenz der  $y$ -Verschiebungen  $\Delta v$  zum ursprünglich senkrechten Abstand der Positionen der Auswertung zueinander, der in beiden Modellen der numerischen Untersuchungen die doppelte Amplitude, also  $2A$ , beträgt (vgl. Abbildungen 9.1 unten und 11.2), zur gesamten Verzerrung in Querrichtung ( $y$ -Verzerrungen  $\varepsilon_y$ )

$$\varepsilon_{y,n,ges} = \frac{\Delta v}{2A} = \frac{v_{1,n} - v_{2,n}}{2A} = w_{rel,n} \quad (11.3)$$

für jeden Einzelschritt  $n = 0, \dots, 39$ . Dabei sind  $v$  die senkrechten Verschiebungen im FE-Modell, wobei die Indizes 1 und 2 die Positionen der Auswertung oberhalb bzw. unterhalb der waagrechten Symmetrielinie  $x = 0$  bezeichnen,  $\varepsilon$  die Verzerrung,  $2A$  der ursprünglich senkrechte Abstand,  $n$  der Zähler für die Einzelschritte und die Indizes  $y$ ,  $rel$  und  $ges$  beschreiben die Orientierung bzw. die jeweilige Eigenschaft.

Die nach Gleichung (11.3) berechneten gesamten Querverzerrungen ( $y$ -Verzerrungen  $\varepsilon_{y,ges}$ ) enthalten dabei sowohl den rein kinematischen Anteil aufgrund geometrischer Bedingungen  $\varepsilon_{y,kin}$  als auch die Querverzerrungen der ebenen repräsentativen Sequenz aufgrund von Querverformungseffekten  $\varepsilon_{y,ERS}$ . Deshalb werden die Ergebnisse aus Gleichung (11.3) mit dem elastischen Anteil aufgrund der Querverformung der ebenen repräsentativen Sequenz bereinigt. Aufgelöst nach dem kinematischen Anteil aufgrund der mesomechanischen geometrischen Bedingungen folgt

$$\varepsilon_{y,n,kin} = \varepsilon_{y,n,ges} - \varepsilon_{y,n,ERS} = \frac{v_{1,n} - v_{2,n}}{2A} - \varepsilon_{y,n,ERS} \quad (11.4)$$

wobei die Indizes  $kin$ ,  $ges$  und  $ERS$  die entsprechenden Eigenschaften beschreiben. Dabei ist die

zugehörige Querverformung senkrecht bei Längsverformung der ebenen repräsentativen Sequenz

$$\varepsilon_{y,n,ERS} = -\nu_{ERS,12} \varepsilon_{x,n} = -\nu_{ERS,12} u_{rel} , \quad (11.5)$$

wie in den Gleichungen (4.4) bzw. (4.44) angegeben.

### Berechnung der Querverformungszahl senkrecht bei Längsverformung der ebenen repräsentativen Sequenz

Die Berechnung der Querverformungszahl senkrecht bei Längsverformung der ebenen repräsentativen Sequenz  $\nu_{ERS,12}$  erfolgt analog zur Berechnung der elastischen Bettung  $k_{el}$ , wie in Abschnitt 9.5.5 dargestellt. Dabei wird das gewichtete Mittel der Querverformungszahlen senkrecht bei Längsverformung der drei unterschiedlichen Bereiche in der Ebene der repräsentativen Sequenz basierend auf den jeweiligen relativen Anteilen der Flächeninhalte berechnet (vgl. Gleichungen (9.32) und (9.33) in Abschnitt 9.5.2). Für die Querverformungszahl senkrecht bei Längsverformung des längs geschnittenen Rovingstrangs (hier: Kettstrang) wird trotz der Ondulation vereinfachend der Wert einer  $0^\circ$ -unidirektional verstärkten Einzelschicht  $\nu_{12}$  vorausgesetzt. Die Querverformungszahl senkrecht bei Längsverformung der quer geschnittenen Rovingstränge (hier: Schussstränge) entspricht der Querverformungszahl in der Isotropieebene des als transversalisotrop vorausgesetzten Bereiches  $\nu_{23}$ , während die Querverformungszahl der als isotrop vorausgesetzten Bereiche mit reiner Matrix ohne Faserverstärkung der Querverformungszahl des Reinharzes  $\nu_m$  entspricht. Abhängig von der Art der Verstärkungsfaser ergibt sich für die Querverformungszahl senkrecht bei Längsverformung der ebenen repräsentativen Sequenz

$$\begin{aligned} \nu_{ERS,12} &= \frac{A_K}{A_{ERS}} \nu_{12} + \frac{A_{\lambda,S}}{A_{ERS}} \nu_{23} + \frac{A_M}{A_{ERS}} \nu_m \\ &= \frac{1}{2} \nu_{12} + \frac{1}{\pi} \nu_{23} + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \nu_m \\ &\approx 0,5 \nu_{12} + 0,318 \nu_{23} + 0,182 \nu_m . \end{aligned} \quad (11.6)$$

Mit den, für HT-Kohlenstofffaserverstärkung in den Tabellen 9.3 und 9.1 angegebenen, vergleichsweise ähnlichen und verhältnismäßig großen Werten  $\nu_{12} = 0,272$ ,  $\nu_{23} = 0,333$  und  $\nu_m = 0,35$  führt dieser Zusammenhang auf  $\nu_{ERS,12} \approx 0,306$  als Wert für die Querverformungszahl senkrecht bei Längsverformung der ebenen repräsentativen Sequenz.

### Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung

Ein zusätzlicher Indikator für das Wirken der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge ist die Differenz der aufgebrachten Verschiebungen und ausgewerteten Verzerrungen in Längsrichtung ( $x$ -Richtung)  $\Delta\varepsilon_x = \varepsilon_{x,kin}$ . Die Differenz der aufgebrachten ausgewählten Deformationen in Längsrichtung  $\varepsilon_{x,n}$  als normierte Verschiebungen, wie in Abschnitt 9.5.4 beschrieben, und den ausgewerteten Längsverzerrungen an den relevanten Positionen  $\varepsilon_{x,n,FE}$  für jeden Einzelschritt  $n = 0, \dots, 39$  ergibt sich zu

$$\varepsilon_{x,n,kin} = \Delta\varepsilon_{x,n} = \varepsilon_{x,n} - \varepsilon_{x,n,FE} . \quad (11.7)$$

Sie dient der Identifikation der elastischen Deformation der ebenen repräsentativen Sequenz bzw. des längs geschnittenen Stranges (hier: Kettstrang) im FE-Modell.

### Identifikation der Sensitivität

Die Identifikation der Sensitivität der jeweiligen mesomechanischen Geometrie und entsprechendem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  auf die mesomechanische Kinematik erfolgt analog zur Auswertung des analytischen Modells, wie in Abschnitt 11.1.1 dargestellt. Dabei wird die Steigung  $\tilde{M}$  der sich ergebenden linearen Zusammenhänge ausgewertet. Die ausgewerteten Größen  $\varepsilon_{y,n,kin}$  nach

Gleichung (11.4) und  $\varepsilon_{x,n,\text{kin}}$  nach Gleichung (11.7) werden über die aufgebrachten ausgewählten Deformationen  $\varepsilon_{x,n}$  aufgetragen. Im Folgenden werden der kinematische Anteil mit  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$ , die Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung mit  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  und die aufgebrachten ausgewählten Deformationen mit  $\varepsilon_x$  bezeichnet. Dabei sind die aufgebrachten Deformationen  $\varepsilon_x$  für jeden Einzelschritt  $n = 0, \dots, 39$  als normierte Verschiebungen  $u_{\text{rel}}$  zu betrachten. Die insgesamt 39 Lastschritte umfassen zwei Dekaden mit jeweils zehn äquidistanten Schritten. Die beiden Intervalle betragen  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-3} \dots + 1 \cdot 10^{-3}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-4}$  und  $u_{\text{rel}} = -1 \cdot 10^{-4} \dots + 1 \cdot 10^{-4}$  in Schritten von  $1 \cdot 10^{-5}$ , vgl. Abschnitt 9.5.4 und Abbildung 9.7. In beiden Fällen entspricht der Betrag der Steigung  $\tilde{M}$  der Sensitivität der jeweiligen mesomechanischen Geometrie mit entsprechendem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  auf die mesomechanische Kinematik aufgrund geometrischer Parameter.

Im Detail ergeben sich für den kinematischen Anteil aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  nach Gleichung (11.4) über die aufgebrachten ausgewählten Deformationen  $\varepsilon_x$  als normierte Verschiebungen  $u_{\text{rel}}$  stets negative Steigungen  $\tilde{M}$ . Dies bedeutet, wie in Abschnitt 9.4 beschrieben, dass eine positive normierte Verschiebung  $\varepsilon_x > 0$  bzw.  $u_{\text{rel}} > 0$  als Dehnung eine Glättung bzw. Abflachung, und eine negative normierte Verschiebung  $\varepsilon_x < 0$  bzw.  $u_{\text{rel}} < 0$  als Stauchung eine Aufstauchung bedingt. Aufgrund der Berücksichtigung der Elastizität in den FE-Berechnungen treten dabei jedoch zeitgleich und zusätzlich Querverformungseffekte auf.

Im Gegensatz dazu liefert die Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  nach Gleichung (11.7) über die aufgebrachten ausgewählten Deformationen  $\varepsilon_x$  als normierte Verschiebungen  $u_{\text{rel}}$  meist positive Steigungen  $\tilde{M}$ . Die im FE-Modell der ebenen repräsentativen Sequenz am freien vertikalen Rand aufgebrachten normierten Verschiebungen  $\varepsilon_x$  bzw.  $u_{\text{rel}}$ , wie in Abschnitt 9.5.4 beschrieben, entsprechen an den relevanten Positionen auf der theoretischen Mittellinie des längs geschnittenen Stranges (hier: Kettstrang), wie in Abbildung 11.2 dargestellt, nicht den ausgewerteten Größen. Die Glättung bzw. Abflachung der Ondulation bei positiver normierter Verschiebung  $\varepsilon_x > 0$  bzw.  $u_{\text{rel}} > 0$  sowie die Aufstauchung der Ondulation bei negativer normierter Verschiebung  $\varepsilon_x < 0$  bzw.  $u_{\text{rel}} < 0$  reduziert die auftretenden Längsverzerrungen. Dies bedeutet, dass das Wirken der mesomechanischen Kinematik die Längsverzerrung des längs geschnittenen Stranges mindert. Dies bedeutet zusätzlich, dass die ebenen repräsentativen Sequenzen in Längsrichtung aufgrund der Gewebeondulation im Bereich kleiner Verschiebungen nominell geringere Steifigkeiten aufweisen, als eine vergleichbare ebene und in Längsrichtung unidirektional verstärkte Sequenz mit vergleichbarem Faservolumengehalt  $\varphi_f$ .

#### 11.1.4 Ergebnisse der FE-Berechnungen

Wie in den Abbildungen 9.1 unten und 11.2 dargestellt, weisen die Modelle der ebenen repräsentativen Sequenzen für die numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode bezüglich der Waagrechten  $x = 0$  geometrische Symmetrie auf. Die Definition der Randbedingungen an den vertikalen Rändern lässt in jedem Fall über die gesamte Länge der repräsentativen Sequenz freie Verschiebungen in Dickenrichtung zu, um Querverformungseffekte nicht zu behindern (vgl. Abschnitt 9.5.4). Zusammen mit den Positionen der Auswertung der Ergebnisse (vgl. Abbildung 11.2 in Abschnitt 11.1.3), lässt sich damit bereits auf das tendenzielle Verformungsverhalten schließen.

Bei der Betrachtung der Querrichtung ( $y$ -Richtung) verhalten sich im Falle der beidseitig elastischen Bettung die einander gegenüberliegenden Positionen der Auswertung aufgrund der zusätzlichen Symmetrie der Randbedingungen an den horizontalen Rändern symmetrisch bzw. entgegengesetzt gleich. Im Gegensatz dazu verhalten sich im Falle der einseitig elastischen Bettung die freien Positionen am freien Rand (Index 1 in Gleichung (11.3)) deutlich sensitiver als die gebetteten Positionen am gebetteten Rand (Index 2 in Gleichung (11.3)). Bei der Betrachtung



der Längsrichtung ( $x$ -Richtung) verhalten sich in beiden Fällen der grundlegend unterschiedlichen Randbedingungen an den horizontalen Rändern die ausgewerteten Ergebnisse gleich. Damit lassen sich aus den Auswertungen der Gleichungen (11.4) und (11.7) kausale, nachvollziehbare und aussagekräftige Korrelationen ableiten, die im Folgenden dargestellt werden.

### Leinwandgewebe

Tabelle 11.2 enthält die ausgewerteten Ergebnisse  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  nach Gleichung (11.4) über die aufgebrachten Deformationen in Längsrichtung  $\varepsilon_x$  für alle untersuchten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Leinwandgewebe. Die Ergebnisse sind dabei von oben nach unten aufsteigend nach dem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  angeordnet. Analog enthält Tabelle 11.3 die ausgewerteten Ergebnisse der Steigungen  $\tilde{M}$  der Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  nach Gleichung (11.7).

Abbildung 11.3 stellt die ausgewerteten Sensitivitäten  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  graphisch dar, links für den Fall einseitig elastischer Bettung und rechts für den Fall beidseitig elastischer Bettung. Dabei zeigen die Ergebnisse sowohl bei einseitig als auch bei beidseitig elastischer Bettung mit größerem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  eine zunehmende Sensitivität  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$ . Es besteht die Möglichkeit, einen sigmoidalen Zusammenhang zu unterstellen. Dabei weist der Fall einseitig elastischer Bettung eine ca. 1,8-fach höhere Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik auf als der Fall beidseitig elastischer Bettung.

Analog stellt Abbildung 11.4 die ausgewerteten Sensitivitäten  $\tilde{M}$  der Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  graphisch dar. Auch in diesem Fall zeigen die Ergebnisse eine zunehmende Sensitivität  $\tilde{M}$  mit größerem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ . In diesem Fall besteht die Möglichkeit, einen quadratischen Zusammenhang zu unterstellen. Dabei weist der Fall einseitig elastischer Bettung lediglich eine geringfügig höhere Sensitivität auf als der Fall beidseitig elastischer Bettung.

### Köpergewebe 2/2

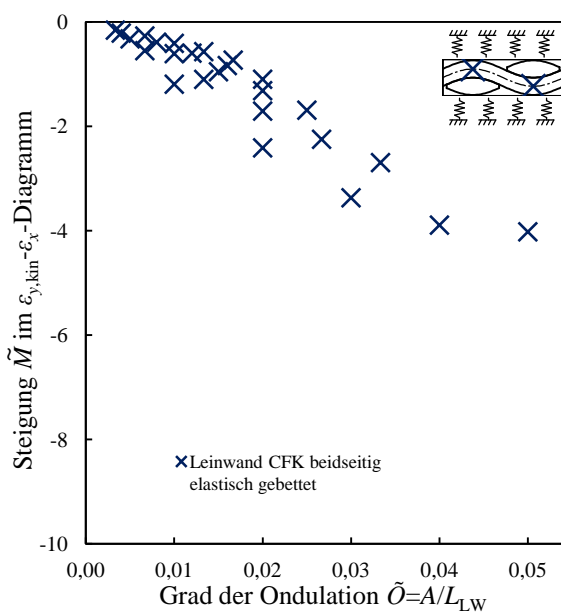
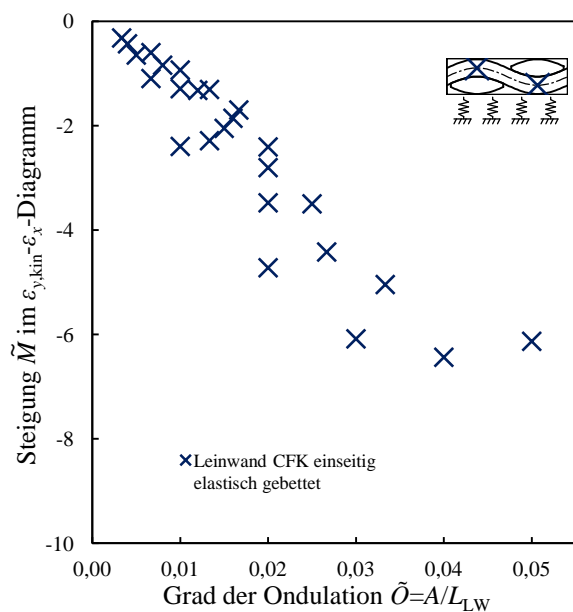
Tabelle 11.4 enthält die ausgewerteten Ergebnisse der Steigungen  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  nach Gleichung (11.4) über die aufgebrachten Deformationen in Längsrichtung  $\varepsilon_x$  für alle untersuchten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2. Die Ergebnisse sind dabei von oben nach unten aufsteigend nach dem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  angeordnet. Analog enthält Tabelle 11.5 die ausgewerteten Ergebnisse der Steigungen  $\tilde{M}$  der Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  nach Gleichung (11.7).

Abbildung 11.5 stellt die ausgewerteten Sensitivitäten  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  graphisch dar, links für den Fall einseitig elastischer Bettung und rechts für den Fall beidseitig elastischer Bettung. Bezüglich der Positionen der Auswertung sind dabei oben jeweils die Ergebnisse an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche und unten in der Mitte der horizontalen Bereiche dargestellt. Im Fall der Positionen der Auswertung an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche (oben) zeigt sich mit größerem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  eine zunehmende Sensitivität  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$ . Für die Ergebnisse in dieser Position der Auswertung besteht wiederum die Möglichkeit, einen sigmoidalen Zusammenhang zu unterstellen. Dabei weist der Fall einseitig elastischer Bettung hier eine ca. 1,6-fach höhere Sensitivität auf als der Fall beidseitig elastischer Bettung. Im Gegensatz dazu ist für die Positionen der Auswertung in der Mitte der horizontalen Bereiche (unten) keine eindeutige Tendenz identifizierbar. Damit ist in der Mitte der horizontalen Bereiche, v. a. im Fall der beidseitig elastischen Bettung, annähernd keine Sensitivität  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  identifizierbar.

Analog stellt Abbildung 11.6 die ausgewerteten Sensitivitäten  $\tilde{M}$  der Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  graphisch dar. In allen Fällen zeigen die Ergebnisse eine zunehmende Sensitivität  $\tilde{M}$  mit größerem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ . Dabei besteht in allen Fällen die Möglichkeit, einen quadratischen Zusammenhang zu unterstellen. Die Sensitivität  $\tilde{M}$  ist im Fall der Positionen der Auswertung an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche (oben) stets positiv. Im Gegensatz dazu ist die Sensitivität  $\tilde{M}$  im Fall der Positionen der Auswertung in der Mitte der horizontalen Bereiche (unten) für kleine Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  teilweise sogar negativ. In beiden Positionen der Auswertung weist jedoch der Fall einseitig elastischer Bettung (links) stets eine geringfügig höhere Sensitivität auf als der Fall beidseitig elastischer Bettung (rechts).

**Tabelle 11.2:** Steigungen im  $\varepsilon_{y,\text{kin}}-\varepsilon_x$ -Diagramm  $\tilde{M}$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Leinwandgewebe.

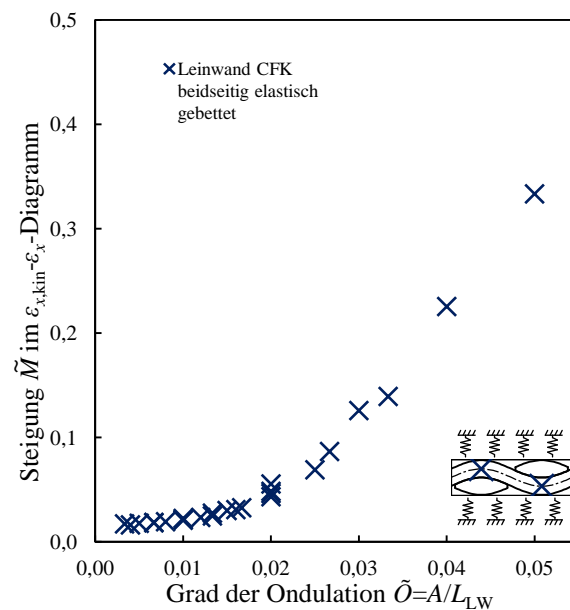
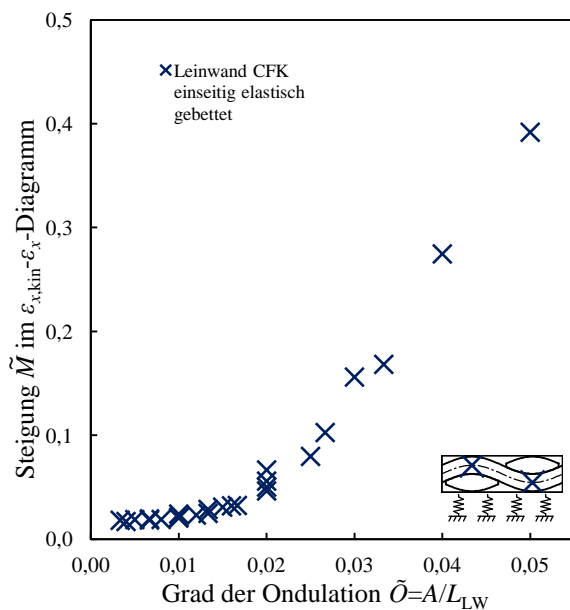
| Geometrische Parameter der Ondulation |  |  | Steigung $\tilde{M}$ im $\varepsilon_{y,\text{kin}}-\varepsilon_x$ -Diagramm |                            |
|---------------------------------------|--|--|--|----------------------------|
| Amplitude<br>$A$                      | Länge<br>Ondulation<br>Leinwand $L_{LW}$ | Grad der<br>Ondulation<br>$\tilde{O} = \frac{A}{L_{LW}}$ | CFK<br>einseitig el. geb.  | CFK<br>beidseitig el. geb. |
| 0,05                                  | 15,0                                     | <b>0,00333</b>   | -0,3180  | -0,1588                    |
| 0,05                                  | 12,5                                     | <b>0,00400</b>   | -0,4301  | -0,2156                    |
| 0,05                                  | 10,0                                     | <b>0,00500</b>   | -0,6451  | -0,3260                    |
| 0,10                                  | 15,0                                     | <b>0,00667</b>   | -0,5985  | -0,2714                    |
| 0,05                                  | 7,5                                      | <b>0,00667</b>   | -1,0954  | -0,5525                    |
| 0,10                                  | 12,5                                     | <b>0,00800</b>   | -0,8398  | -0,3902                    |
| 0,15                                  | 15,0                                     | <b>0,01000</b>   | -0,9322  | -0,4124                    |
| 0,10                                  | 10,0                                     | <b>0,01000</b>   | -1,2895  | -0,6098                    |
| 0,05                                  | 5,0                                      | <b>0,01000</b>   | -2,3964  | -1,1946                    |
| 0,15                                  | 12,5                                     | <b>0,01200</b>   | -1,3223  | -0,6001                    |
| 0,20                                  | 15,0                                     | <b>0,01333</b>   | -1,3044  | -0,5711                    |
| 0,10                                  | 7,5                                      | <b>0,01333</b>   | -2,2863  | -1,1021                    |
| 0,15                                  | 10,0                                     | <b>0,01500</b>   | -2,0499  | -0,9564                    |
| 0,20                                  | 12,5                                     | <b>0,01600</b>   | -1,8562  | -0,8374                    |
| 0,25                                  | 15,0                                     | <b>0,01667</b>   | -1,6981  | -0,7333                    |
| 0,25                                  | 12,5                                     | <b>0,02000</b>   | -2,4066  | -1,1001                    |
| 0,20                                  | 10,0                                     | <b>0,02000</b>   | -2,8025  | -1,3188                    |
| 0,15                                  | 7,5                                      | <b>0,02000</b>   | -3,4763  | -1,7109                    |
| 0,10                                  | 5,0                                      | <b>0,02000</b>   | -4,7204  | -2,4144                    |
| 0,25                                  | 10,0                                     | <b>0,02500</b>   | -3,4963  | -1,6928                    |
| 0,20                                  | 7,5                                      | <b>0,02667</b>   | -4,4191  | -2,2506                    |
| 0,15                                  | 5,0                                      | <b>0,03000</b>   | -6,0830  | -3,3707                    |
| 0,25                                  | 7,5                                      | <b>0,03333</b>   | -5,0427  | -2,6973                    |
| 0,20                                  | 5,0                                      | <b>0,04000</b>   | -6,4358  | -3,8950                    |
| 0,25                                  | 5,0                                      | <b>0,05000</b>   | -6,1304  | -4,0234                    |



**Abbildung 11.3:** Steigungen im  $\varepsilon_{y,\text{kin}}-\varepsilon_x$ -Diagramm  $\tilde{M}$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Leinwandgewebe.

**Tabelle 11.3:** Steigungen im  $\varepsilon_{x,\text{kin}}-\varepsilon_x$ -Diagramm  $\tilde{M}$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Leinwandgewebe.

| Geometrische Parameter der Ondulation |  |  | Steigung $\tilde{M}$ im $\varepsilon_{x,\text{kin}}-\varepsilon_x$ -Diagramm |                            |
|---------------------------------------|--|--|--|----------------------------|
| Amplitude<br>$A$                      | Länge<br>Ondulation<br>Leinwand $L_{LW}$ | Grad der<br>Ondulation<br>$\tilde{O} = \frac{A}{L_{LW}}$ | CFK<br>einseitig el. geb.  | CFK<br>beidseitig el. geb. |
| 0,05                                  | 15,0                                     | <b>0,00333</b>   | 0,0182   | 0,0172                     |
| 0,10                                  | 15,0                                     | <b>0,00400</b>   | 0,0170   | 0,0162                     |
| 0,15                                  | 15,0                                     | <b>0,00500</b>   | 0,0189   | 0,0177                     |
| 0,20                                  | 15,0                                     | <b>0,00667</b>   | 0,0184   | 0,0182                     |
| 0,25                                  | 15,0                                     | <b>0,00667</b>   | 0,0196   | 0,0186                     |
| 0,05                                  | 12,5                                     | <b>0,00800</b>   | 0,0189   | 0,0193                     |
| 0,10                                  | 12,5                                     | <b>0,01000</b>   | 0,0203   | 0,0207                     |
| 0,15                                  | 12,5                                     | <b>0,01000</b>   | 0,0211   | 0,0212                     |
| 0,20                                  | 12,5                                     | <b>0,01000</b>   | 0,0241   | 0,0224                     |
| 0,25                                  | 12,5                                     | <b>0,01200</b>   | 0,0232   | 0,0234                     |
| 0,05                                  | 10,0                                     | <b>0,01333</b>   | 0,0248   | 0,0248                     |
| 0,10                                  | 10,0                                     | <b>0,01333</b>   | 0,0286   | 0,0275                     |
| 0,15                                  | 10,0                                     | <b>0,01500</b>   | 0,0308   | 0,0300                     |
| 0,20                                  | 10,0                                     | <b>0,01600</b>   | 0,0321   | 0,0309                     |
| 0,25                                  | 10,0                                     | <b>0,01667</b>   | 0,0324   | 0,0326                     |
| 0,05                                  | 7,5                                      | <b>0,02000</b>   | 0,0464   | 0,0432                     |
| 0,10                                  | 7,5                                      | <b>0,02000</b>   | 0,0501   | 0,0463                     |
| 0,15                                  | 7,5                                      | <b>0,02000</b>   | 0,0559   | 0,0483                     |
| 0,20                                  | 7,5                                      | <b>0,02000</b>   | 0,0666   | 0,0554                     |
| 0,25                                  | 7,5                                      | <b>0,02500</b>   | 0,0797   | 0,0690                     |
| 0,05                                  | 5,0                                      | <b>0,02667</b>   | 0,1026   | 0,0865                     |
| 0,10                                  | 5,0                                      | <b>0,03000</b>   | 0,1560   | 0,1257                     |
| 0,15                                  | 5,0                                      | <b>0,03333</b>   | 0,1683   | 0,1392                     |
| 0,20                                  | 5,0                                      | <b>0,04000</b>   | 0,2746   | 0,2254                     |
| 0,25                                  | 5,0                                      | <b>0,05000</b>   | 0,3917   | 0,3333                     |



**Abbildung 11.4:** Steigungen im  $\varepsilon_{x,\text{kin}}-\varepsilon_x$ -Diagramm  $\tilde{M}$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Leinwandgewebe.

**Tabelle 11.4:** Steigungen im  $\varepsilon_{y,\text{kin}}\text{-}\varepsilon_x$ -Diagramm  $\tilde{M}$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2.

| Amplitude |  | Länge                 |  | Grad der Ondulation            |  | Steigung $\tilde{M}$ im $\varepsilon_{y,\text{kin}}\text{-}\varepsilon_x$ -Diagramm |         |                    |         |                     |  |
|-----------|--|-----------------------|--|--------------------------------|--|---|---------|--------------------|---------|---------------------|--|
| $A$       |  | Körper $2/2$ $L_{K2}$ |  | $\tilde{O} = \frac{A}{L_{K2}}$ |  | CFK   |         | CFK                |         | CFK                 |  |
|           |  | Ondulation            |  | Ondulation                     |  | einseitig el. geb.  |         | einseitig el. geb. |         | beidseitig el. geb. |  |
|           |  |                       |  |                                |  | Übergang gekr. hor.   |         | Mitte hor. Ber.    |         | Übergang gekr. hor. |  |
|           |  |                       |  |                                |  |   |         |                    |         | Mitte hor. Ber.     |  |
| 0,05      |  | 30,0                  |  | <b>0,00167</b>                 |  | -0,8194   | -1,1146 | -0,7305            | -0,9355 |                     |  |
| 0,05      |  | 25,0                  |  | <b>0,00200</b>                 |  | -0,8645   | -1,1556 | -0,7560            | -0,9611 |                     |  |
| 0,05      |  | 20,0                  |  | <b>0,00250</b>                 |  | -0,9513   | -1,2172 | -0,8022            | -1,0003 |                     |  |
| 0,05      |  | 15,0                  |  | <b>0,00333</b>                 |  | -1,1301   | -1,3000 | -0,8902            | -1,0498 |                     |  |
| 0,10      |  | 30,0                  |  | <b>0,00333</b>                 |  | -0,9148   | -1,1562 | -0,7510            | -0,9023 |                     |  |
| 0,10      |  | 25,0                  |  | <b>0,00400</b>                 |  | -1,0175   | -1,1978 | -0,8017            | -0,9294 |                     |  |
| 0,05      |  | 10,0                  |  | <b>0,00500</b>                 |  | -1,6886   | -1,4109 | -1,1622            | -1,1344 |                     |  |
| 0,10      |  | 20,0                  |  | <b>0,00500</b>                 |  | -1,2083   | -1,2448 | -0,8935            | -0,9622 |                     |  |
| 0,15      |  | 30,0                  |  | <b>0,00500</b>                 |  | -1,0533   | -1,1760 | -0,7976            | -0,8682 |                     |  |
| 0,15      |  | 25,0                  |  | <b>0,00600</b>                 |  | -1,2227   | -1,2008 | -0,8779            | -0,8902 |                     |  |
| 0,10      |  | 15,0                  |  | <b>0,00667</b>                 |  | -1,6375   | -1,2636 | -1,0990            | -0,9968 |                     |  |
| 0,20      |  | 30,0                  |  | <b>0,00667</b>                 |  | -1,2118   | -1,1709 | -0,8499            | -0,8335 |                     |  |
| 0,15      |  | 20,0                  |  | <b>0,00750</b>                 |  | -1,5465   | -1,1989 | -1,0313            | -0,9098 |                     |  |
| 0,20      |  | 25,0                  |  | <b>0,00800</b>                 |  | -1,4629   | -1,1634 | -0,9674            | -0,8466 |                     |  |
| 0,25      |  | 30,0                  |  | <b>0,00833</b>                 |  | -1,3982   | -1,1408 | -0,9168            | -0,7971 |                     |  |
| 0,10      |  | 10,0                  |  | <b>0,01000</b>                 |  | -2,8308   | -1,1508 | -1,7137            | -0,9722 |                     |  |
| 0,15      |  | 15,0                  |  | <b>0,01000</b>                 |  | -2,2353   | -1,1237 | -1,3750            | -0,9019 |                     |  |
| 0,20      |  | 20,0                  |  | <b>0,01000</b>                 |  | -1,9227   | -1,1112 | -1,1913            | -0,8452 |                     |  |
| 0,25      |  | 25,0                  |  | <b>0,01000</b>                 |  | -1,7313   | -1,1024 | -1,0756            | -0,7985 |                     |  |
| 0,25      |  | 20,0                  |  | <b>0,01250</b>                 |  | -2,2991   | -1,0412 | -1,3680            | -0,7792 |                     |  |
| 0,20      |  | 15,0                  |  | <b>0,01333</b>                 |  | -2,7889   | -1,0584 | -1,6618            | -0,8074 |                     |  |
| 0,15      |  | 10,0                  |  | <b>0,01500</b>                 |  | -3,7417   | -1,2302 | -2,2641            | -0,8446 |                     |  |
| 0,25      |  | 15,0                  |  | <b>0,01667</b>                 |  | -3,2462   | -1,1292 | -1,9324            | -0,7457 |                     |  |
| 0,20      |  | 10,0                  |  | <b>0,02000</b>                 |  | -4,3105   | -1,6580 | -2,6777            | -0,8575 |                     |  |
| 0,25      |  | 10,0                  |  | <b>0,02500</b>                 |  | -4,6206   | -2,1939 | -2,9474            | -0,9766 |                     |  |

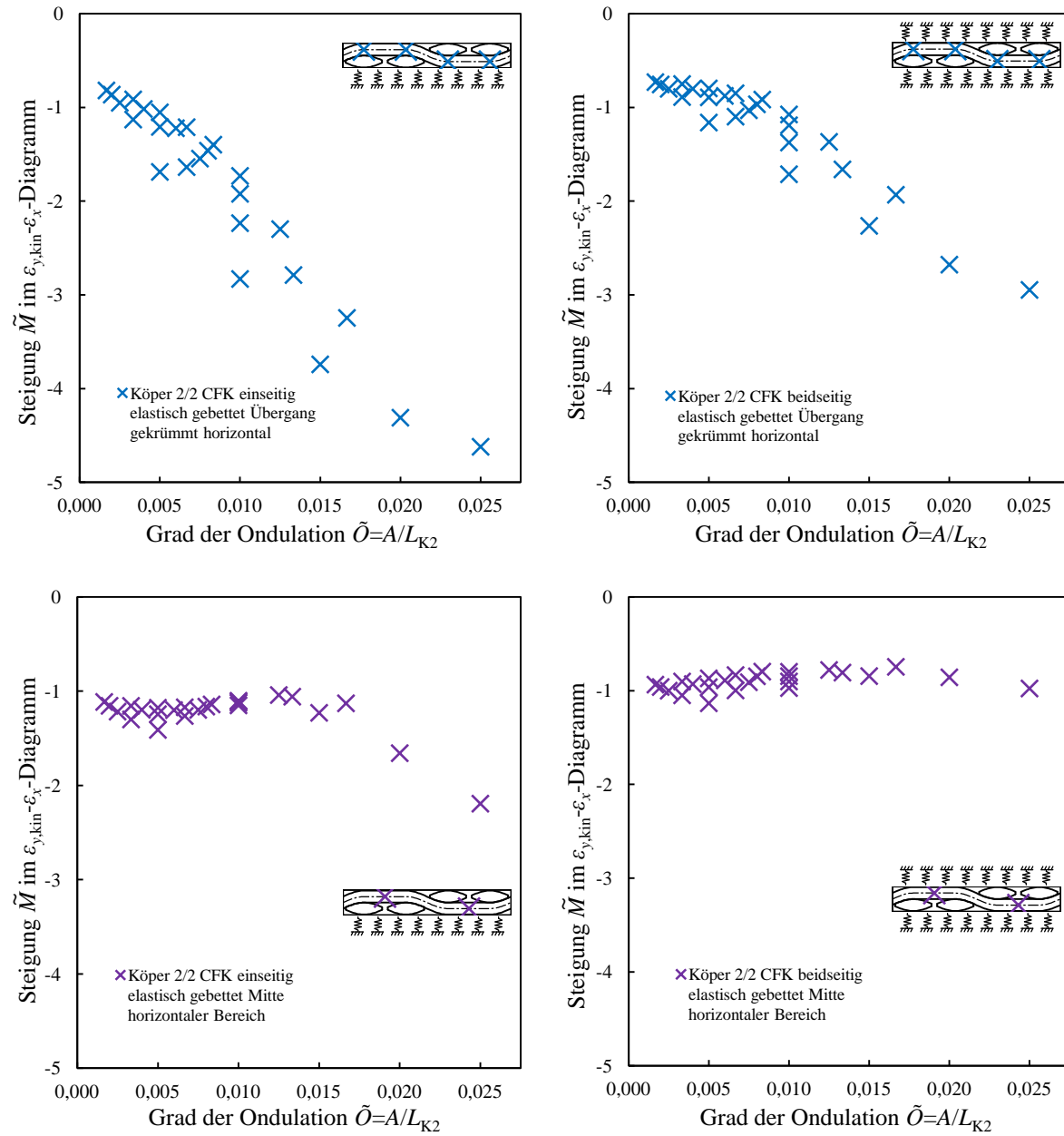
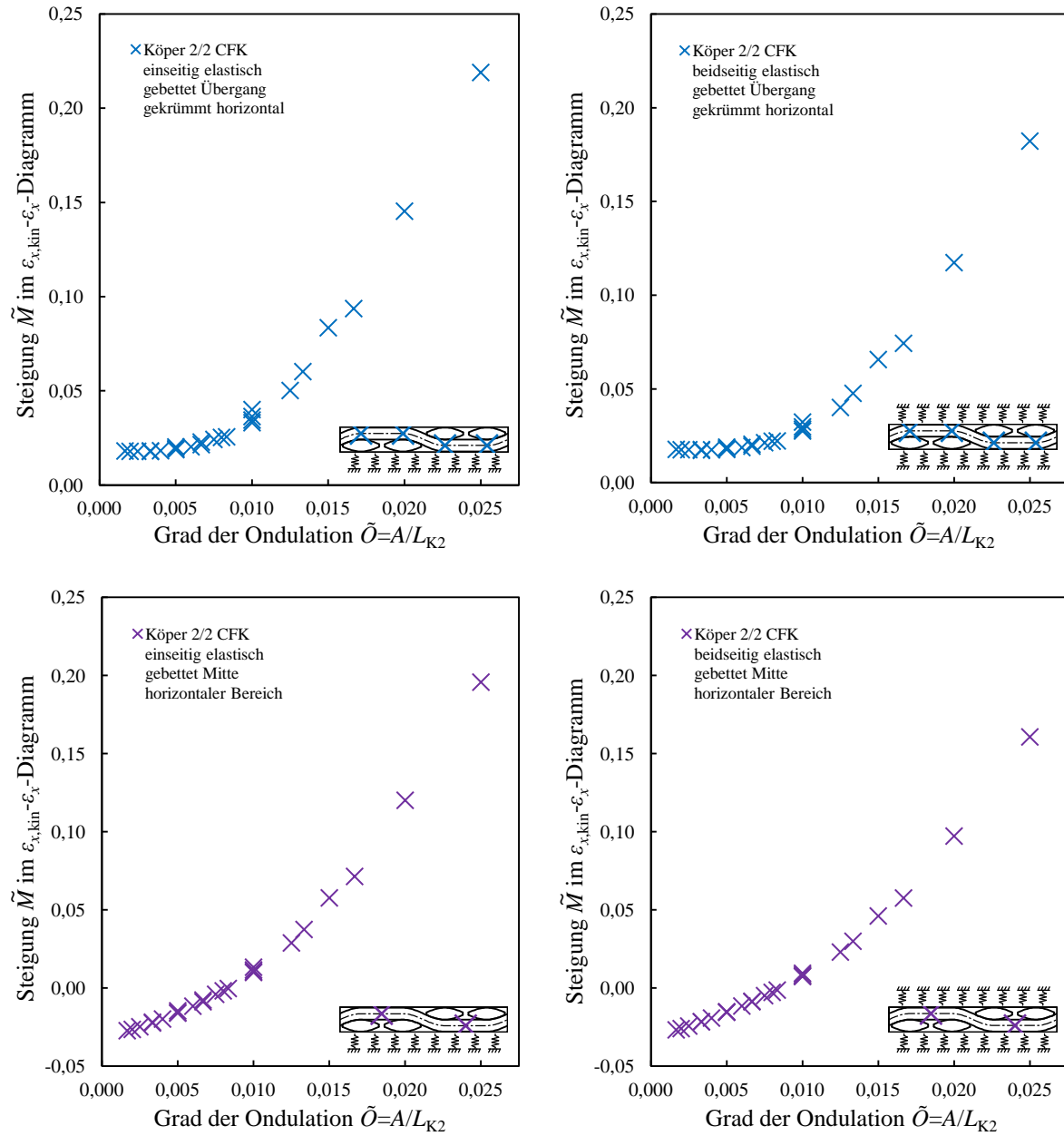


Abbildung 11.5: Steigungen im  $\varepsilon_{y,kin}-\varepsilon_x$ -Diagramm  $\tilde{M}$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2.

**Tabelle 11.5:** Steigungen im  $\varepsilon_{x,\text{kin}}\text{-}\varepsilon_x$ -Diagramm  $\tilde{M}$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2.

| Geometrische Parameter der Ondulation |  | Steigung $\tilde{M}$ im $\varepsilon_{x,\text{kin}}\text{-}\varepsilon_x$ -Diagramm |                                       |   |  |  |  |
|---------------------------------------|--|---|---------------------------------------|---|--|--|--|
| Amplitude<br>$A$                      | Länge<br>Ondulation<br>Körper $2/\lambda L_{K2}$ | Grad der<br>Ondulation<br>$\tilde{O} = \frac{A}{L_{K2}}$                            |                                       | CFK                                       |  | CFK  |  |
|                                       |  | einseitig el. geb.<br>Übergang gekr. hor.   | einseitig el. geb.<br>Mitte hor. Ber. | einseitig el. geb.<br>Übergang gekr. hor. | beidseitig el. geb.<br>Mitte hor. Ber. | beidseitig el. geb.<br>Übergang gekr. hor. | beidseitig el. geb.<br>Mitte hor. Ber. |
| 0,05                                  | 30,0   | <b>0,00167</b>  | 0,0181                                | -0,0274                                   | 0,0178                                 | -0,0269                                    |  |
| 0,05                                  | 25,0   | <b>0,00200</b>  | 0,0179                                | -0,0266                                   | 0,0176                                 | -0,0261                                    |  |
| 0,05                                  | 20,0   | <b>0,00250</b>  | 0,0179                                | -0,0249                                   | 0,0176                                 | -0,0244                                    |  |
| 0,05                                  | 15,0   | <b>0,00333</b>  | 0,0181                                | -0,0220                                   | 0,0177                                 | -0,0217                                    |  |
| 0,10                                  | 30,0   | <b>0,00333</b>  | 0,0178                                | -0,0225                                   | 0,0172                                 | -0,0217                                    |  |
| 0,10                                  | 25,0   | <b>0,00400</b>  | 0,0183                                | -0,0200                                   | 0,0175                                 | -0,0193                                    |  |
| 0,05                                  | 10,0   | <b>0,00500</b>  | 0,0202                                | -0,0147                                   | 0,0189                                 | -0,0153                                    |  |
| 0,10                                  | 20,0   | <b>0,00500</b>  | 0,0193                                | -0,0158                                   | 0,0182                                 | -0,0156                                    |  |
| 0,15                                  | 30,0   | <b>0,00500</b>  | 0,0188                                | -0,0162                                   | 0,0177                                 | -0,0156                                    |  |
| 0,15                                  | 25,0   | <b>0,00600</b>  | 0,0203                                | -0,0117                                   | 0,0187                                 | -0,0116                                    |  |
| 0,10                                  | 15,0   | <b>0,00667</b>  | 0,0228                                | -0,0078                                   | 0,0205                                 | -0,0086                                    |  |
| 0,20                                  | 30,0   | <b>0,00667</b>  | 0,0215                                | -0,0089                                   | 0,0195                                 | -0,0089                                    |  |
| 0,15                                  | 20,0   | <b>0,00750</b>  | 0,0242                                | -0,0041                                   | 0,0213                                 | -0,0050                                    |  |
| 0,20                                  | 25,0   | <b>0,00800</b>  | 0,0253                                | -0,0019                                   | 0,0221                                 | -0,0029                                    |  |
| 0,25                                  | 30,0   | <b>0,00833</b>  | 0,0256                                | -0,0004                                   | 0,0223                                 | -0,0014                                    |  |
| 0,10                                  | 10,0   | <b>0,01000</b>  | 0,0401                                | 0,0132                                    | 0,0323                                 | 0,0093                                     |  |
| 0,15                                  | 15,0   | <b>0,01000</b>  | 0,0363                                | 0,0115                                    | 0,0298                                 | 0,0083                                     |  |
| 0,20                                  | 20,0   | <b>0,01000</b>  | 0,0345                                | 0,0105                                    | 0,0285                                 | 0,0076                                     |  |
| 0,25                                  | 25,0   | <b>0,01000</b>  | 0,0331                                | 0,0099                                    | 0,0276                                 | 0,0073                                     |  |
| 0,25                                  | 20,0   | <b>0,01250</b>  | 0,0502                                | 0,0287                                    | 0,0401                                 | 0,0229                                     |  |
| 0,20                                  | 15,0   | <b>0,01333</b>  | 0,0602                                | 0,0374                                    | 0,0476                                 | 0,0298                                     |  |
| 0,15                                  | 10,0   | <b>0,01500</b>  | 0,0835                                | 0,0576                                    | 0,0657                                 | 0,0460                                     |  |
| 0,25                                  | 15,0   | <b>0,01667</b>  | 0,0937                                | 0,0713                                    | 0,0743                                 | 0,0575                                     |  |
| 0,20                                  | 10,0   | <b>0,02000</b>  | 0,1453                                | 0,1201                                    | 0,1174                                 | 0,0971                                     |  |
| 0,25                                  | 10,0   | <b>0,02500</b>  | 0,2189                                | 0,1957                                    | 0,1822                                 | 0,1606                                     |  |



**Abbildung 11.6:** Steigungen im  $\varepsilon_{x,kin}-\varepsilon_x$ -Diagramm  $\tilde{M}$  über die ausgewählten Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2.



## 11.2 Experimentelle strukturdynamische Untersuchungen

Die Auswertung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen sowie deren Ergebnisse wird dargestellt. Die Vorgehensweise entspricht dabei der in MICKLITZ et al. 2014 [89], ROMANO et al. 2014 [140] und in ROMANO et al. 2014 [141] dargestellten Auswertung. Sie ist ausführlich beispielsweise in BRINSON und BRINSON 2008 [16], GIBSON 2000 [48] sowie GIBSON 2012 [49], in der Richtlinie VDI 3830 [125] sowie in SCHMIDT 2003 [145] dargestellt.

### 11.2.1 Auswertung

Die Auswertung der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen erfolgt mit dem Weg-Zeit-Signal über die Messdauer. Dafür wird das Messsignal sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich ausgewertet. Die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen sind dabei entweder unter konstanten geometrischen Bedingungen, d. h. bei gleichen Auskraglängen  $l = l_{UD} = l_G$ , als auch unter konstanten dynamischen Bedingungen, d. h. bei gleichen Grundfrequenzen  $f = f_{UD} = f_G$ , durchgeführt und ausgewertet worden. Die Definition der beiden grundsätzlich unterschiedlichen Bedingungen ist in Abschnitt 10.5.5 dargestellt.

Die beschriebenen Auswertungen des Messsignals der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen erfolgt mit MATLAB [115].

#### Werkstoffdämpfung und Eigenfrequenzen

Die Auswertung der Werkstoffdämpfung basiert auf dem Weg-Zeit-Signal im Zeitbereich. Dabei wird zunächst das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  ausgewertet. Nach der Transformation des Weg-Zeit-Signals in den Frequenzbereich werden die Eigenfrequenzen  $f$  ausgewertet. Die ausgewerteten Ergebnisse dienen der Berechnung des komplexen Moduls  $E^*$ , ausgedrückt in Speichermodul  $E'$  und Verlustmodul  $E''$ .

##### Logarithmisches Dekrement $\Lambda$

Das logarithmische Dekrement, wie bereits in Gleichung (7.38) eingeführt, lautet allgemeiner

$$\Lambda = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{w(t_i)}{w(t_{i+n})} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \dots, n, \quad (11.8)$$

mit  $n$  als Zähler der positiven Amplituden im Weg-Zeit-Signal und  $t_i$  sowie  $t_{i+n}$  als die Zeitpunkte ihres Auftretens über die Messdauer. Gleichung (11.8) wird zunächst für jede der fünf aufeinanderfolgenden strukturdynamischen Untersuchungen der Probekörper für die gesamte Messdauer von  $t_{\text{tot}} = 12,8 \text{ s}$  ausgewertet. Dafür wird jeweils die erste und die letzte positive Amplitude in der Zeitdauer des Messsignals  $t_{\text{tot}}$  zur Auswertung verwendet.

##### Eigenfrequenzen $f$

Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen wird jedes Weg-Zeit-Signal der Messung eines Probekörpers für die gesamte Messdauer  $t_{\text{tot}} = 12,8 \text{ s}$  über den Algorithmus der FFT-Transformation in den Frequenzbereich transformiert. Die Auswertung des Signals im Frequenzbereich liefert die Eigenfrequenzen  $f$ . Dabei stellen die Maxima im Frequenzbereich die auftretenden Eigenfrequenzen der Schwingung dar. Die in Abschnitt 10.5.3 beschriebenen messtechnischen Parameter mit der Bandbreite  $B = 1000 \text{ Hz}$  erlauben Identifikation der ersten drei Eigenfrequenzen. Tatsächlich tritt bei jeder Messung jedoch lediglich eine Frequenz dominierend auf. Aufgrund vorhergehender analytischer Berechnungen und der definierten reproduzierbaren Weganregung des Probekörpers am freien Ende, die vornehmlich die erste Eigenform anregt (vgl. Abschnitt 10.5.1), lässt sich diese als die jeweilige Grundfrequenz  $f$  der Transversalschwingungen des einseitig eingespannten flachen stabförmigen Probekörpers als Kragbalken mit der Auskraglänge  $l$  identifizieren.

### Speicher- und Verlustmodul als Komponenten des komplexen Moduls

Zunächst wird die Berechnung des komplexen Moduls  $E^*$  dargestellt. Sie basiert auf der im vorherigen Abschnitt 11.2.1 beschriebenen Auswertung der Ergebnisse. Der komplexe Modul ist nach Gleichung (7.60) definiert. Ausklammern des Speichermoduls  $E'$  liefert den Verlustfaktor

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{W_{\text{diss}}}{W} \quad (11.9)$$

mit  $W$  nach Gleichung (7.69) und  $W_{\text{diss}}$  nach Gleichung (7.70), und führt schließlich auf

$$E^* = E' + iE'' = (1 + i\eta) E' . \quad (11.10)$$

Der Verlustfaktor  $\eta$  ist das Verhältnis zwischen der in einem vollständigen Belastungszyklus (d. h. während einer vollständigen Schwingung, bzw. Periode) dissipierten Energie und der gesamten in der Struktur gespeicherten Energie, wie in Abschnitt 7.6.3 ausgeführt. Unter der Voraussetzung schwacher Dämpfung  $D^2 \ll 1$ , mit  $D$  als dimensionsloses LEHR'sches Dämpfungsmaß, entspricht die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems  $\omega_d$  in guter Näherung der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems  $\omega_0$ , da gilt  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \approx \omega_0$ , wie in Abschnitt 7.3.2 beschrieben.

Im Detail wird der Speichermodul  $E'$  aus den Ergebnissen im Frequenzbereich (ermittelten Grundfrequenz  $f$  bei bekannter Auskraglänge  $l$ ) berechnet. Zur Ermittlung des Verlustmoduls  $E''$  werden zusätzlich die Ergebnisse im Zeitbereich (ermitteltes logarithmisches Dekrement  $\Lambda$  als Maß für die Werkstoffdämpfung) benötigt [48], [49], [125], [145].

#### Speichermodul $E'$

Unter der zuvor genannten Voraussetzung schwacher Dämpfung gilt  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \approx \omega_0$ . Deshalb entspricht der globale Elastizitätsmodul des Materials der Probekörper  $E$  nach Gleichung (10.4) in guter Näherung dem Speichermodul

$$E' \approx E , \quad (11.11)$$

der den Realteil des dynamischen Moduls  $E^*$  darstellt. Er wird direkt aus den Ergebnissen im Frequenzbereich (ermittelten Grundfrequenz  $f$  bei bekannter Auskraglänge  $l$ ) berechnet.

#### Verlustmodul $E''$

Der Verlustmodul  $E''$  stellt den Imaginärteil des komplexen Moduls  $E^*$  dar. Er wird näherungsweise unter der Annahme der Gültigkeit der Zusammenhänge des harmonischen Oszillators berechnet. Dafür wird das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  nach Gleichung (11.8) aus dem Zeitbereich des Messsignals berechnet. Der Zusammenhang

$$D = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \approx \frac{\Lambda}{2\pi} \quad (11.12)$$

liefert das dimensionslose LEHR'sche Dämpfungsmaß  $D$  in Termen des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  unter der Voraussetzung schwacher Dämpfung der Struktur, wie in Gleichung (7.38) in Abschnitt 7.3.2 mit Gleichung (7.27) angegeben. Zusätzlich wird die Abklingkonstante  $\delta$  (vgl. Gleichung (7.21)) in Termen des dimensionslosen LEHR'sche Dämpfungsmaßes  $D$  formuliert zu

$$\delta = D \omega_0 , \quad (11.13)$$

wie in Gleichung (7.27) definiert. Der Zusammenhang zwischen Verlustmodul  $E''$  und Speichermodul  $E'$  aus Gleichung (7.67) ergibt mit der Abklingkonstanten  $\delta$  sowie unter der vereinfachenden Voraussetzung schwacher Dämpfung, und damit  $\omega_d \approx \omega_0$ ,

$$\frac{E''}{E'} = \frac{2\delta\omega_d}{\omega_0^2} \approx \frac{2\delta}{\omega_0} . \quad (11.14)$$

Auflösen von Gleichung (11.14) nach dem Verlustmodul  $E''$  und Einsetzen der Terme des logarithmischen Dekrements von Gleichung (11.12) liefert

$$E'' = \frac{2\delta}{\omega_0} E' = \frac{2D\omega_0}{\omega_0} E' = 2D E' = 2 \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} E' \approx \frac{\Lambda}{\pi} E' . \quad (11.15)$$

Dabei wird das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  nach Gleichung (11.8) basierend auf dem Messsignal im Zeitbereich über die gesamte Messdauer ermittelt, und die exakte Formulierung statt der Näherungslösung in Gleichung (11.15) ausgewertet.

### 11.2.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse der ausgewerteten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen, sowohl unter konstanten geometrischen Bedingungen,  $l = l_{UD} = l_G$ , als auch unter konstanten dynamischen Bedingungen,  $f = f_{UD} = f_G$ , werden angegeben (Definition siehe Abschnitt 10.5.5). Die Ergebnisse werden tabellarisch angeführt, graphisch dargestellt und kurz beschrieben.

Tabelle 11.6 enthält alle Ergebnisse der ausgewerteten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen für jeden Probekörper. Dies sind im Einzelnen das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  und die Grundfrequenz  $f$  sowie der Speichermodul  $E'$  und der Verlustmodul  $E''$  als Real- und Imaginärteil des komplexen Moduls  $E^*$ .

Abbildung 11.7 veranschaulicht die im Zeitbereich ausgewerteten Ergebnisse des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  und die im Frequenzbereich ausgewerteten Ergebnisse der Grundfrequenz  $f$ . Beide Größen werden jeweils über die gesamte Messdauer  $t_{tot} = 12,8$  s ermittelt. Die darauf basierenden Ergebnisse des Speichermoduls  $E'$  und des Verlustmoduls  $E''$  als Realteil und Imaginärteil des dynamischen Moduls  $E^*$  sind in Abbildung 11.8 dargestellt. In beiden Abbildungen entspricht jeder Datenpunkt dem Mittelwert von fünf aufeinanderfolgenden Messungen für jeden strukturdynamisch untersuchten Probekörper. Bezüglich der Reihenfolge ist der erste Probekörper eines Satzes links, der zweite mittig und der dritte rechts angeordnet. Dabei zeigt in beiden Abbildungen die linke Spalte jeweils die Ergebnisse basierend auf der Voraussetzung konstanter geometrischer Bedingungen  $l_{UD} = l_G$ , und die rechte Spalte die Ergebnisse basierend auf der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen  $f_{UD} = f_G$ , wie in Abschnitt 10.5.5 definiert.

#### Konstante geometrische Bedingungen

Die Auswertung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen der unidirektional und gewebeverstärkten Probekörper bei gleichen Auskraglängen  $l = l_{UD} = l_G$  liefert die Ergebnisse unter konstanten geometrischen Bedingungen, wie in den Abbildungen 11.7 und 11.8 jeweils links oben und links unten dargestellt.

Im Falle des ersten Satzes vergleichbarer Probekörper basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123] beträgt der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der unidirektional verstärkten Probekörper  $\Lambda = 3,56$  ‰. Der Mittelwert der entsprechenden Grundfrequenz beträgt  $f = 50,8$  Hz. Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 100,2$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 36,3$  MPa. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der leinwandgewebeverstärkten Probekörper liefert  $\Lambda = 5,39$  ‰ beim Mittelwert der Grundfrequenz  $f = 29,9$  Hz. In diesem Fall liefert die Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 48,5$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 26,5$  MPa. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper liefert  $\Lambda = 4,94$  ‰ beim Mittelwert der Grundfrequenz  $f = 45,42$  Hz. In diesem Fall liefert die Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des

Speichermoduls  $E' = 55,4$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 27,7$  MPa.

Im Falle des zweiten Satzes vergleichbarer Probekörper basierend auf dem Roving PYROFIL TR50S 6K [117] beträgt der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der unidirektional verstärkten Probekörper  $\Lambda = 3,96$  ‰. Der Mittelwert der entsprechenden Grundfrequenz beträgt  $f = 55,55$  Hz. Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 105,0$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 39,3$  MPa. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der leinwandgewebeverstärkten Probekörper liefert  $\Lambda = 5,06$  ‰ beim Mittelwert der Grundfrequenz  $f = 46,82$  Hz. In diesem Fall liefert die Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 56,2$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 28,2$  MPa. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper liefert  $\Lambda = 4,84$  ‰ beim Mittelwert der Grundfrequenz  $f = 47,37$  Hz. In diesem Fall liefert die Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 58,1$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 28,1$  MPa.

Im Falle des dritten Satzes vergleichbarer Probekörper basierend auf den Kohlenstofffaser-Prepregs von HEXCEL [114] beträgt der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der unidirektional verstärkten Probekörper  $\Lambda = 5,26$  ‰. Der Mittelwert der entsprechenden Grundfrequenz beträgt  $f = 44,9$  Hz. Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 105,7$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 57,1$  MPa. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der gewebeverstärkten Probekörper liefert  $\Lambda = 6,74$  ‰ beim Mittelwert der Grundfrequenz  $f = 44,6$  Hz. In diesem Fall liefert die Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 57,5$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 39,3$  MPa.

### Konstante dynamische Bedingungen

Die Durchführung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen der gewebeverstärkten Probekörper bei gleichen Grundfrequenzen wie die unidirektional verstärkten Probekörper,  $f = f_{UD} = f_G$ , erfordert definiert variierte Auskraglängen  $l_G$ . Die entsprechend variierten Auskraglängen für die gewebeverstärkten Probekörper sind nach Gleichung (10.5), unter der Verwendung der ermittelten Steifigkeiten bei ursprünglich gleichen Auskraglängen  $l = l_{UD} = l_G$ , bestimmt worden. Die Auswertung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen liefert die Ergebnisse unter konstanten dynamischen Bedingungen, wie in den Abbildungen 11.7 und 11.8 jeweils rechts oben und links unten dargestellt..

Im Falle des ersten Satzes vergleichbarer Probekörper basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123] beträgt der Mittelwert der Grundfrequenz beider Arten gewebeverstärkter Probekörper (Leinwand und Köper 2/2)  $f = 50,6$  Hz. Dieser entspricht dabei für beide Arten der Gewebeverstärkung dem Mittelwert der Grundfrequenz der unidirektional verstärkten Probekörper bei der ursprünglichen Auskraglänge  $l = 220$  mm. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der leinwandgewebeverstärkten Probekörper unter definiert variiertes Auskraglänge  $l_G$  beträgt  $\Lambda = 5,16$  ‰. Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 62,4$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 32,6$  MPa. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper unter definiert variiertes Auskraglänge  $l_G$  beträgt

$\Lambda = 4,97\%$ . Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 55,0$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 27,2$  MPa.

Im Falle des zweiten Satzes vergleichbarer Probekörper basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123] beträgt der Mittelwert der Grundfrequenz beider Arten gewebeverstärkter Probekörper (Leinwand und Köper 2/2)  $f = 55,2$  Hz. Dieser entspricht dabei für beide Arten der Gewebeverstärkung dem Mittelwert der Grundfrequenz der unidirektional verstärkten Probekörper bei der ursprünglichen Auskraglänge  $l = 220$  mm. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der leinwandgewebeverstärkten Probekörper unter definiert variiert Auskraglänge  $l_G$  beträgt  $\Lambda = 5,35\%$ . Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 62,8$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 33,2$  MPa. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper unter definiert variiert Auskraglänge  $l_G$  beträgt  $\Lambda = 5,08\%$ . Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 57,1$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 29,0$  MPa.

Im Falle des dritten Satzes vergleichbarer Probekörper basierend auf den Kohlenstofffaser-Prepregs von HEXCEL [114] beträgt der Mittelwert der Grundfrequenz der gewebeverstärkten Probekörper  $f = 44,9$  Hz. Dieser entspricht dabei für die Gewebeverstärkung dem Mittelwert der Grundfrequenz der unidirektional verstärkten Probekörper bei der ursprünglichen Auskraglänge  $l = 200$  mm. Der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der gewebeverstärkten Probekörper unter definiert variiert Auskraglänge  $l_G$  beträgt  $\Lambda = 6,71\%$ . Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 57,6$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 39,2$  MPa.

#### *Probekörper aus Reinharz*

Zusätzlich sind unter der Voraussetzung konstanter geometrischer Bedingungen drei Probekörper aus dem warmushärtenden duroplastischen  $160^\circ\text{C}$ -Epoxidharzsystem von HUNTSMAN [96] als Reinharzprobekörper strukturdynamisch untersucht worden. Bei einer Auskraglänge  $l = 220$  mm beträgt der Mittelwert des logarithmischen Dekrements der Probekörper aus Reinharz  $\Lambda = 3,53\%$ . Der Mittelwert der entsprechenden Grundfrequenz beträgt  $f = 11,03$  Hz. Die Auswertung des dynamischen Moduls  $E^*$  liefert mit der Berücksichtigung der physikalischen und geometrischen Größen der Probekörper den Mittelwert des Speichermoduls  $E' = 3,23$  GPa. Die weitere Berücksichtigung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  liefert den Mittelwert des Verlustmoduls  $E'' = 36,53$  MPa.

Das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  als Maß für die Werkstoffdämpfung der Probekörper aus Reinharz ist damit um eine Dekade größer als das der faserverstärkten Probekörper. Die Grundfrequenz  $f$  der Probekörper aus Reinharz beträgt lediglich ca.  $1/4$  bis  $1/5$  der Grundfrequenz der faserverstärkten Probekörper. Daraus resultiert der Speichermodul  $E'$  der Probekörper aus Reinharz, der um das ca. 20-fache bis 30-fache geringer als der der faserverstärkten Probekörper ist. Die verhältnismäßig geringe Speichermodul  $E'$  liefert jedoch mit dem verhältnismäßig hohen logarithmischen Dekrement  $\Lambda$  einen Verlustmodul  $E''$  der Probekörper aus Reinharz, der im Bereich des Verlustmoduls  $E''$  der faserverstärkten Probekörper liegt.

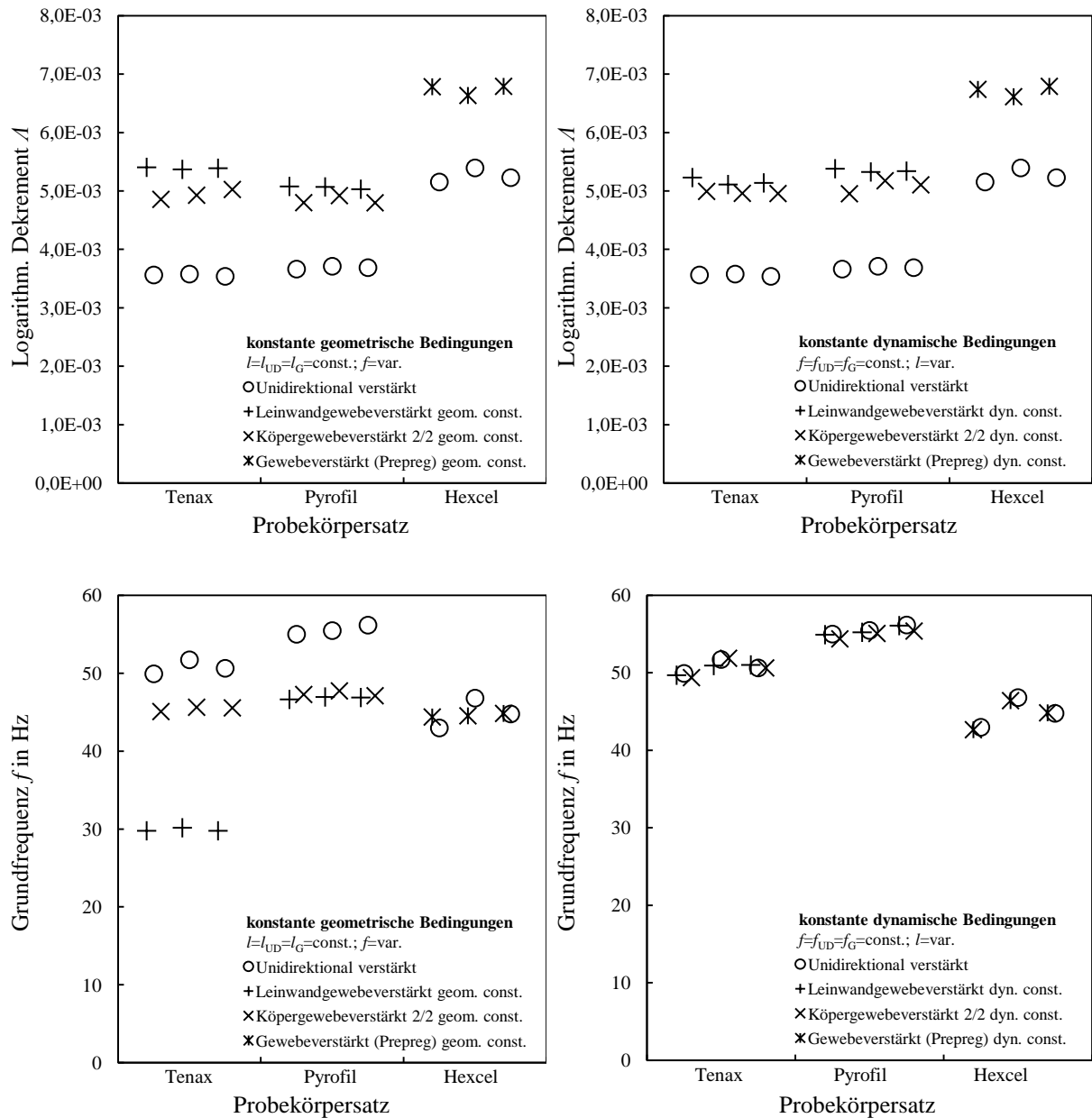
Die ausgewerteten Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen jedes Probekörpers aus Reinharz sind in Tabelle 11.6 unten angegeben. Wie zuvor beschrieben, sind die Differenzen zwischen den Ergebnissen der Probekörper aus Reinharz und denen der faserver-

verstärkten Probekörper verhältnismäßig groß. Deshalb wäre, für die beschriebenen strukturdynamischen Untersuchungen unter der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen, die Auskraglänge  $l$  unverhältnismäßig stark zu verringern gewesen. Dies ist nicht zielführend, da die geometrischen Voraussetzungen bzw. Verhältnisse die Betrachtung des Probekörpers als transversalschwingender Kragbalken nicht mehr zulassen. Aus diesem Grund sind die Probekörper aus Reinharz nicht unter der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen experimentell strukturdynamisch untersucht worden. Aus diesem Grund sind die Ergebnisse der Probekörper aus Reinharz nicht in den Abbildungen 11.7 und 11.8 dargestellt.

**Tabelle 11.6:** Logarithmisches Dekrement  $\Lambda$  und Grundfrequenz  $f$  sowie Speichermodul  $E'$  und Verlustmodul  $E''$  als ausgewertete Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen der drei Sätze vergleichbarer Probekörper: Satz 1: Basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123], Satz 2: Basierend auf dem Roving PYROFIL TR50S 6K [117] und Satz 3: Kohlenstofffaser-Prepregs G947 und G939 von HEXCEL [114].

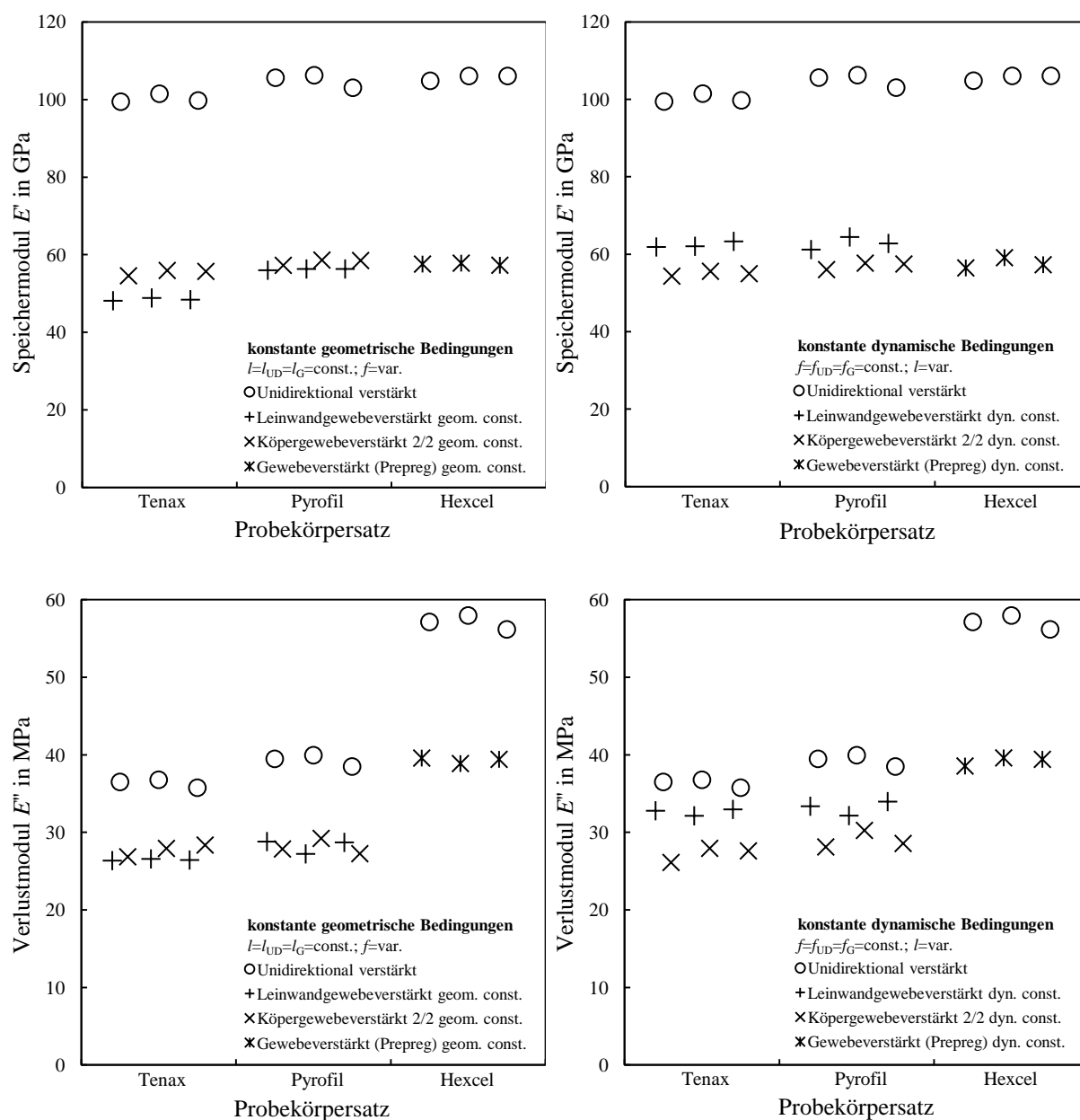
| PK-Satz  | PK-ID                  | Lagen-aufbau           | Dicke PK $h$ | Amplitude Auslenkung $h/4$ | Art der konstanten Bedingung * | Auskr-länge $l$ | log. Dek. $\Lambda$ | Grund-freq. $f$ | Speicher-modul $E'$ | Verlust-modul $E''$ | Quelle   | Matrix-system |
|----------|------------------------|------------------------|--------------|----------------------------|--------------------------------|-----------------|---------------------|-----------------|---------------------|---------------------|----------|---------------|
| Tenax    | Ten-UD                 | [0] <sub>2s</sub>      | 1,95 mm      | 0,49 mm                    | -                              | 220 mm          | 3,56E-03            | 49,92 Hz        | 99,44 GPa           | 36,50 MPa           | [123]    |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 3,58E-03            | 51,72 Hz        | 101,48 GPa          | 36,78 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 3,54E-03            | 50,63 Hz        | 99,75 GPa           | 35,76 MPa           |          |               |
|          | Ten-LW                 | [(0/90)] <sub>2s</sub> | 1,61 mm      | 0,40 mm                    | geometrisch                    | 220 mm          | 5,40E-03            | 29,77 Hz        | 48,12 GPa           | 26,35 MPa           | [122]    |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 5,37E-03            | 30,16 Hz        | 48,84 GPa           | 26,57 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 5,39E-03            | 29,77 Hz        | 48,40 GPa           | 26,43 MPa           |          |               |
| Tenax    | Ten-LW                 | [(0/90)] <sub>2s</sub> | 1,61 mm      | 0,40 mm                    | dynamisch                      | 170 mm          | 5,23E-03            | 49,69 Hz        | 61,87 GPa           | 32,78 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 168 mm          | 5,11E-03            | 50,94 Hz        | 62,05 GPa           | 32,13 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 168 mm          | 5,14E-03            | 51,02 Hz        | 63,31 GPa           | 32,96 MPa           |          |               |
|          | Ten-K2                 | [(0/90)] <sub>2s</sub> | 2,25 mm      | 0,56 mm                    | geometrisch                    | 220 mm          | 4,93E-03            | 45,63 Hz        | 55,94 GPa           | 27,93 MPa           | [121]    |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 4,86E-03            | 45,08 Hz        | 54,56 GPa           | 26,85 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 5,03E-03            | 45,55 Hz        | 55,70 GPa           | 28,36 MPa           |          |               |
| Ten-K2   | [(0/90)] <sub>2s</sub> | 2,25 mm                | 0,56 mm      | dynamisch                  | 206 mm                         | 4,96E-03        | 51,88 Hz            | 55,59 GPa       | 27,93 MPa           |                     | Huntsman |               |
|          |                        |                        |              |                            | 210 mm                         | 4,99E-03        | 49,38 Hz            | 54,35 GPa       | 26,12 MPa           |                     |          |               |
|          |                        |                        |              |                            | 208 mm                         | 4,96E-03        | 50,63 Hz            | 54,98 GPa       | 27,61 MPa           |                     |          |               |
| Pyr      | Pyr-UD                 | [0] <sub>4s</sub>      | 2,05 mm      | 0,51 mm                    | -                              | 220 mm          | 3,71E-03            | 55,47 Hz        | 106,25 GPa          | 39,95 MPa           | [117]    | [96]          |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 3,69E-03            | 56,17 Hz        | 103,03 GPa          | 38,49 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 3,66E-03            | 55,00 Hz        | 105,62 GPa          | 39,48 MPa           |          |               |
|          | Pyr-LW                 | [(0/90)] <sub>4s</sub> | 2,38 mm      | 0,60 mm                    | geometrisch                    | 220 mm          | 5,03E-03            | 46,88 Hz        | 56,32 GPa           | 28,70 MPa           | [120]    |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 5,08E-03            | 46,64 Hz        | 55,99 GPa           | 28,80 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 5,07E-03            | 46,95 Hz        | 56,32 GPa           | 27,22 MPa           |          |               |
| Pyr-LW   | [(0/90)] <sub>4s</sub> | 2,38 mm                | 0,60 mm      | dynamisch                  | 200 mm                         | 5,34E-03        | 56,09 Hz            | 62,78 GPa       | 33,96 MPa           |                     |          |               |
|          |                        |                        |              |                            | 202 mm                         | 5,38E-03        | 54,92 Hz            | 61,20 GPa       | 33,36 MPa           |                     |          |               |
|          |                        |                        |              |                            | 202 mm                         | 5,32E-03        | 55,23 Hz            | 64,44 GPa       | 32,16 MPa           |                     |          |               |
| Hexcel   | Pyr-K2                 | [(0/90)] <sub>4s</sub> | 2,28 mm      | 0,57 mm                    | geometrisch                    | 220 mm          | 4,92E-03            | 47,73 Hz        | 58,61 GPa           | 29,22 MPa           | [119]    |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 4,80E-03            | 47,27 Hz        | 57,26 GPa           | 27,85 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 4,80E-03            | 47,11 Hz        | 58,50 GPa           | 27,25 MPa           |          |               |
|          | Pyr-K2                 | [(0/90)] <sub>4s</sub> | 2,28 mm      | 0,57 mm                    | dynamisch                      | 204 mm          | 5,18E-03            | 55,08 Hz        | 57,69 GPa           | 30,25 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 204 mm          | 5,10E-03            | 54,38 Hz        | 56,03 GPa           | 28,12 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 202 mm          | 4,90E-03            | 55,39 Hz        | 57,48 GPa           | 28,57 MPa           |          |               |
| Hexcel   | Hex-UD                 | [0] <sub>4s</sub>      | 1,42 mm      | 0,36 mm                    | -                              | 200 mm          | 5,15E-03            | 42,97 Hz        | 104,82 GPa          | 57,14 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 200 mm          | 5,39E-03            | 46,80 Hz        | 106,06 GPa          | 57,97 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 200 mm          | 5,23E-03            | 44,77 Hz        | 106,07 GPa          | 56,18 MPa           |          |               |
|          | Hex-GW                 | [(0/90)] <sub>4s</sub> | 1,94 mm      | 0,49 mm                    | geometrisch                    | 200 mm          | 6,78E-03            | 44,38 Hz        | 57,58 GPa           | 39,58 MPa           | [114]    | HexPly        |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 200 mm          | 6,63E-03            | 44,53 Hz        | 57,82 GPa           | 38,87 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 200 mm          | 6,79E-03            | 44,84 Hz        | 57,29 GPa           | 39,42 MPa           |          |               |
| Hex-GW   | [(0/90)] <sub>4s</sub> | 1,94 mm                | 0,49 mm      | dynamisch                  | 204 mm                         | 6,74E-03        | 42,66 Hz            | 56,47 GPa       | 38,55 MPa           |                     |          |               |
|          |                        |                        |              |                            | 196 mm                         | 6,61E-03        | 46,41 Hz            | 59,10 GPa       | 39,60 MPa           |                     |          |               |
|          |                        |                        |              |                            | 200 mm                         | 6,79E-03        | 44,84 Hz            | 57,29 GPa       | 39,42 MPa           |                     |          |               |
| Huntsman | Hun-RH                 | -                      | 1,98 mm      | 0,50 mm                    | geometrisch                    | 220 mm          | 3,52E-02            | 10,98 Hz        | 3,25 GPa            | 36,41 MPa           | [96]     | -             |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 3,54E-02            | 10,71 Hz        | 3,09 GPa            | 34,81 MPa           |          |               |
|          |                        |                        |              |                            |                                | 220 mm          | 3,55E-02            | 11,42 Hz        | 3,34 GPa            | 38,37 MPa           |          |               |

\* ermittelt nach Gl. (10.4) und Gl. (10.5), wie in Abschnitt 10.5.5 beschrieben



**Abbildung 11.7:** Logarithmisches Dekrement  $\Lambda$  (obere Reihe) und Grundfrequenz  $f$  in Hz (untere Reihe) für jeden Probekörper ermittelt über die gesamte Messdauer  $t_{tot}$  jeweils als Mittelwert von fünf Messungen. Links: Unter der Voraussetzung konstanter geometrischer Bedingungen und gleichen Auskraglängen  $l = l_{UD} = l_G$ . Rechts: Unter der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen und gleichen Grundfrequenzen  $f = f_{UD} = f_G$ .





**Abbildung 11.8:** Speichermodul  $E'$  (obere Reihe) und Verlustmodul  $E''$  (untere Reihe) als Real- und Imaginärteil des dynamischen Moduls  $E^*$  für jeden Probekörper ermittelt über die gesamte Messdauer  $t_{tot}$  jeweils als Mittelwert von fünf Messungen. Links: Unter der Voraussetzung konstanter geometrischer Bedingungen und gleichen Ausraglängen  $l = l_{UD} = l_G$ . Rechts: Unter der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen und gleichen Grundfrequenzen  $f = f_{UD} = f_G$ .

### 11.2.3 Geometrische Verhältnisse und Grad der Ondulation

Die ausgewerteten Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen werden auf die geometrischen Verhältnisse, und damit den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ , zurückgeführt. Dabei werden analog die geometrischen Parameter bei der mesomechanischen Betrachtung von Geweben, Amplitude  $A$  und Länge der Ondulation  $L$ , wie in Abschnitt 9.2.1 beschrieben, sowie der in Abschnitt 9.3 eingeführte Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  nach Gleichung (9.9) verwendet. Während jedoch im Abschnitt 9.2 die Modellierung der ebenen repräsentativen Sequenzen für die FE-Analyse im Mittelpunkt steht, werden die mesomechanischen Verhältnisse basierend auf der makroskopischen Betrachtung der gewebeverstärkten Probekörper bzw. der gewebeverstärkten Einzellagen betrachtet.

Mit der Dicke der gewebeverstärkten Einzellage  $h_E$  ergibt sich die Dicke eines Rovingstrangs durch Halbieren,

$$h_R = \frac{1}{2} h_E , \quad (11.16)$$

und die Amplitude  $A$  durch Vierteln,

$$A = \frac{1}{4} h_E , \quad (11.17)$$

vgl. Abbildung 9.1 und Gleichungen (9.6) und (9.7). Mit der Anzahl der Rovingstränge in Kett- bzw. Schussrichtung  $n_R$  pro Längeneinheit ergibt sich die Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs in Kett- bzw. Schussrichtung durch den Kehrwert

$$L_R = \frac{1}{n_R} , \quad (11.18)$$

vgl. Gleichung (9.2). Die Länge einer Ondulation  $L$  ergibt sich mit der Berücksichtigung des für die jeweilige Gewebekonstruktion spezifischen Faktors  $\lambda$  zu

$$L = \lambda L_R = \lambda \frac{1}{n_R} , \quad (11.19)$$

mit  $\lambda = 2$  für Leinwandgewebe und  $\lambda = 4$  für Köpergewebe 2/2.

In den Datenblättern der trockenen gewebeverstärkten Einzellagen (Satz 1 (Tenax) [122], [121], Satz 2 (Pyrofil) [120], [119]) sowie in denen der Kohlenstofffaser-Prepregs (Satz 3 (Hexcel) [114]) sind die Dicken der trockenen bzw. unkompaktierten Einzellagen  $h_{E,t}$  angegeben. Zusätzlich sind im Falle der ersten beiden vergleichbaren Sätze von Probekörpern basierend auf den trockenen Geweben die Anzahl der Rovingstränge  $n_R$  pro Längeneinheit (hier: pro cm) in Kett- und Schussrichtung angegeben. Da in allen drei Sätzen vergleichbarer Probekörper die gewebeverstärkten Einzellagen ausgeglichen sind, ergeben sich in Kett- und Schussrichtung nominell die gleichen Eigenschaften und Kennwerte.

Die Dicke einer imprägnierten, kompaktierten gewebeverstärkten Einzellage im ausgehärteten Zustand im Laminat  $h_{E,L}$  ergibt sich aus der Division der gemessenen Dicke des Laminats bzw. der Probekörper  $h$  durch die Anzahl der Einzellagen  $N$  zu

$$h_{E,L} = \frac{h}{N} . \quad (11.20)$$

Mit der Länge einer Ondulation  $L = L_G = \lambda L_R$  nach Gleichung (9.2) und der ausgewählten Auskraglänge der flachen stabförmigen Probekörper  $l$  ergibt sich zusätzlich die Anzahl der

repräsentativen Sequenzen für jede Einzellage in Längsrichtung zu

$$n_{O,E} = \frac{l}{L} . \quad (11.21)$$

Die Anzahl der repräsentativen Sequenzen im gesamten Probekörper in Längsrichtung ergibt sich über die Multiplikation mit der Anzahl der Einzellagen  $N$  zu

$$n_{O,PK} = \frac{l}{L} N . \quad (11.22)$$

Tabelle 11.7 enthält die Angaben bezüglich der Dicke der trockenen Gewebe bzw. der Gewebe-Prepregs  $h_{E,t}$  aus den Datenblättern (Satz 1 (Tenax) [122], [121], Satz 2 (Pyrofil) [120], [119] und Satz 3 (Hexcel) [114]) sowie die sich nach der Auswertung von Gleichung (11.20) ergebenden Dicken der gewebeverstärkten Einzellage im Laminat  $h_{E,L}$ .

**Tabelle 11.7:** Dicken der trockenen bzw. unkompaktierten gewebeverstärkten Einzellagen  $h_{E,t}$  aus den technischen Datenblättern der trockenen Gewebe von Satz 1 (Tenax) [122], [121] und Satz 2 (Pyrofil) [120], [119] sowie des Gewebe-Prepregs von Satz 3 (Hexcel) [114] als theoretische bzw. effektive Werte mit den Dicken einer imprägnierten, kompaktierten gewebeverstärkten Einzellage im ausgehärteten Zustand im Laminat  $h_{E,L}$  nach Gleichung (11.20) als resultierende bzw. scheinbare Werte.

| PK-Satz | PK-ID  | Dicke Einzell. trocken $h_{E,t}$ | Quelle | Lagen-aufbau      | Dicke PK $h$ | Anzahl Einzell. $N$ | Dicke Einzell. Laminat $h_{E,L} = h/N$ Gl. (11.20) | Matrix-system |
|---------|--------|----------------------------------|--------|-------------------|--------------|---------------------|--|---------------|
|         | Ten-UD | -                                | [123]  | $[0]_{2s}^C$      | 1,95 mm      | 4                   | 0,488 mm   |               |
| Tenax   | Ten-LW | 0,64 mm                          | [122]  | $[(0/90)]_{2s}^C$ | 1,61 mm      | 4                   | 0,403 mm   |               |
|         | Ten-K2 | 0,85 mm                          | [121]  | $[(0/90)]_{2s}^C$ | 2,25 mm      | 4                   | 0,563 mm   | Huntsman      |
|         | Pyr-UD | -                                | [117]  | $[0]_{4s}^C$      | 2,05 mm      | 8                   | 0,256 mm   | [96]          |
| Pyrofil | Pyr-LW | 0,5 mm                           | [120]  | $[(0/90)]_{4s}^C$ | 2,38 mm      | 8                   | 0,298 mm   |               |
|         | Pyr-K2 | 0,5 mm                           | [119]  | $[(0/90)]_{4s}^C$ | 2,28 mm      | 8                   | 0,285 mm   |               |
|         | Hex-UD | 0,165 mm                         |        | $[0]_{4s}^C$      | 1,42 mm      | 8                   | 0,178 mm   | HexPly        |
| Hexcel  | Hex-GW | 0,227 mm                         | [114]  | $[(0/90)]_{4s}^C$ | 1,94 mm      | 8                   | 0,243 mm   | M18/1 [114]   |

Im Gegensatz zu den Angaben der Dicken der trockenen bzw. unkompaktierten gewebeverstärkten Einzellagen  $h_{E,t}$  in den Datenblättern der trockenen Gewebe (Satz 1 (Tenax) [122], [121] und Satz 2 (Pyrofil) [120], [119]) ergibt die Auswertung der Dicke der gewebeverstärkten Einzellage im Laminat  $h_{E,L}$  nach Gleichung (11.20) stets geringere Werte. Aufgrund der Vorimprägnierung der trockenen Gewebe (vgl. Abschnitt 10.2.1) in Kombination mit dem bei der Herstellung applizierten Druck im Heißluftautoklaven (vgl. Abschnitt 10.2.3) und der sich wahrscheinlicher ergebenden sog. „out-of-phase“-Anordnung der übereinander liegenden Gewebelagen im Laminat (vgl. Abschnitt 12.3) sind die Prüfplatten bzw. Probekörper, basierend auf den trockenen Geweben, in allen Fällen dünner als der theoretische Wert, der sich durch die sog. „in-phase“-Anordnung ergeben würde, d. h.

$$h_{E,L} = \frac{h}{N} < h_{E,t} \quad \text{bzw.} \quad h < N h_{E,t} \quad (11.23)$$

Damit entsprechen die Dicken einer trockenen bzw. unkompaktierten gewebeverstärkten Einzelle  $h_{E,t}$  aus den Datenblättern der Gewebe einem theoretischen bzw. effektiven Wert, während die Dicken einer imprägnierten, kompaktierten gewebeverstärkten Einzelle im ausgehärteten Zustand im Laminat  $h_{E,L}$  nach Gleichung (11.20) einem resultierenden bzw. scheinbaren Wert entsprechen. Im Detail betragen die resultierenden bzw. scheinbaren Dicken einer trockenen bzw. unkompaktierten gewebeverstärkten Einzelle  $h_{E,L}$  nach Gleichung (11.20) ca. 66 % bis 57 % der theoretischen bzw. effektiven Dicken  $h_{E,t}$ . Im Gegensatz dazu gilt der Zusammenhang (11.23) nicht für die Kohlenstofffaser-Prepregs (Satz 3 (Hexcel) [114]). Aufgrund der maschinellen Imprägnierung und des höherviskosen Matrixsystems (vgl. Abschnitt 3.4) weisen die verwendeten Kohlenstofffaser-Prepregs keine Sensitivität mehr bezüglich dem, bei der Herstellung applizierten, Druck im Heißluftautoklaven und der Anordnung der Einzellen zueinander auf.

Zur weiteren Verwendung werden die Dicken einer imprägnierten, kompaktierten gewebeverstärkten Einzelle im ausgehärteten Zustand im Laminat  $h_{E,L}$  nach Gleichung (11.20) verwendet. Die Werte ergeben sich als resultierende bzw. scheinbare Größen direkt aus der Dicke des Probekörpers  $h$ . Die resultierenden Größen entsprechen damit dem verwendeten Lagenaufbau aus der Anzahl  $N$  imprägnierter, kompakterter gewebeverstärkter Einzellen im ausgehärteten Zustand im Laminat. In diesem Zustand werden auch die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen zur strukturmechanischen Charakterisierung der Probekörper und schließlich die mesomechanische Kinematik in gewebeverstärkten Einzellen aufgrund geometrischer Zusammenhänge validiert. Tabelle 11.8 enthält die nach den Gleichungen (11.17) und (11.19) ausgewerteten Parameter der Ondulation der gewebeverstärkten Einzellen der drei Sätze vergleichbarer Probekörper. Wie zuvor erläutert, erfolgt dabei die Berechnung des Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  nach Gleichung (9.9) mit den Dicken der gewebeverstärkten Einzelle im Laminat  $h_{E,L}$  nach Gleichung (11.20).

Tabelle 11.9 enthält die Anzahl der repräsentativen Sequenzen für jede Einzelle  $n_{O,E}$  nach Gleichung (11.21) und im gesamten Probekörper  $n_{O,PK}$  nach Gleichung (11.22) jedes Probekörpers der drei Sätze vergleichbarer Probekörper (Satz 1: Basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123], Satz 2: Basierend auf dem Roving PYROFIL TR50S 6K [117] und Satz 3: Kohlenstofffaser-Prepregs G947 und G939 von HEXCEL [114]). Die jeweilige Anzahl ist dabei für die Auskraglängen unter der Voraussetzung geometrisch konstanter Bedingungen  $l = l_{UD} = l_G$  als auch unter der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen  $f = f_{UD} = f_G$  (mit Auskraglänge  $l$  nach Gleichung (10.5) in Abschnitt 10.5.5) angegeben, mit denen die Probekörper experimentell strukturdynamisch untersucht worden sind. Wie in Abschnitt (9.3) beschrieben, gilt unter der Voraussetzung gleicher Amplitude  $A$  und gleicher Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$  (vgl. v. a. Leinwand- und Köpergewebe 2/2 von Satz 2 [120], [119], basierend auf dem Roving PYROFIL TR50S 6K [117]), aufgrund der charakteristischen Faktoren  $\lambda = 2$  bzw.  $\lambda = 4$  für Leinwand- bzw. Köpergewebe 2/2, dass sich die entsprechenden Grade der Ondulation  $\tilde{O}$  um den Faktor 2 unterscheiden,  $\tilde{O}_{LW} = 2\tilde{O}_{K2}$ . Die Auswertung der der Anzahl der Ondulationen für jede Einzelle  $n_{O,E}$  nach Gleichung (11.21) und im gesamten Probekörper  $n_{O,PK}$  nach Gleichung (11.22) jedes Probekörpers spiegelt die unterschiedliche Anzahl der relevanten repräsentativen Sequenzen wider, während die geometrische Intensität der Umlenkung gleich ist.

**Tabelle 11.8:** Parameter der Ondulation der drei Sätze vergleichbarer Probekörper basierend auf den Dicken einer imprägnierten, kompaktierten gewebeverstärkten Einzellage im ausgehärteten Zustand im Laminat  $h_{E,L}$  nach Gleichung (11.20) als resultierender bzw. scheinbarer Wert, vgl. Tabelle 11.7.

| PK-Satz | PK-ID  | Dicke Einzell. Laminat | Dicke Rovingstrang                     | Amplitude Ondulation                 | Anzahl Rovingstränge      | Länge Querschn. Roving               | spez. Faktor Gewebekonstr. | Länge Ondulation                 | Grad Ondulation                      | Matrixsystem       |
|---------|--------|------------------------|--|--------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|----------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------------|
|         |        | $h_{E,L}$              | $h_R = \frac{1}{2} h_E$<br>Gl. (11.16) | $A = \frac{1}{4} h_R$<br>Gl. (11.17) | $n_R$                     | $L_R = \frac{1}{n_R}$<br>Gl. (11.18) | $\lambda^{**}$             | $L = \lambda L_R$<br>Gl. (11.19) | $\bar{O} = \frac{A}{L}$<br>Gl. (9.9) |                    |
| Tenax   | Ten-UD | 0,488 mm *             | -                                      | -                                    | -                         | -                                    | -                          | -                                | 0                                    | [123]              |
|         | Ten-LW | 0,403 mm *             | 0,202 mm                               | 0,101 mm                             | $2,5 \frac{1}{\text{cm}}$ | 4,0 mm                               | 2                          | 8,0 mm                           | <b>0,01263</b>                       | [122]              |
|         | Ten-K2 | 0,563 mm *             | 0,282 mm                               | 0,141 mm                             | $3,7 \frac{1}{\text{cm}}$ | 2,7 mm                               | 4                          | 10,8 mm                          | <b>0,01306</b>                       | [121]              |
|         | Pyr-UD | 0,256 mm *             | -                                      | -                                    | -                         | -                                    | -                          | -                                | 0                                    | [117]              |
|         | Pyr-LW | 0,298 mm *             | 0,149 mm                               | 0,075 mm                             | $3,7 \frac{1}{\text{cm}}$ | 2,7 mm                               | 2                          | 5,4 mm                           | <b>0,01389</b>                       | [120]              |
|         | Pyr-K2 | 0,285 mm *             | 0,143 mm                               | 0,071 mm                             | $3,7 \frac{1}{\text{cm}}$ | 2,7 mm                               | 4                          | 10,8 mm                          | <b>0,00657</b>                       | [119]              |
| Hexcel  | Hex-UD | 0,178 mm *             | -                                      | -                                    | -                         | -                                    | -                          | -                                | 0                                    | [114]              |
|         | Hex-GW | 0,243 mm *             | 0,122 mm                               | 0,061 mm                             | $5,5 \frac{1}{\text{cm}}$ | 1,8 mm                               | 4                          | 7,2 mm                           | <b>0,00847</b>                       | HexPly M18/1 [114] |

\* Dicken einer imprägnierten, kompaktierten gewebeverstärkten Einzellage im ausgehärteten Zustand im Laminat  $h_{E,L}$  nach Gleichung (11.20) als resultierender bzw. scheinbarer Wert, vgl. Tabelle 11.7

\*\* Spezifischer Faktor  $\lambda$  entsprechend der Art der Gewebekonstruktion:  $\lambda = 2$  für Leinwandgewebe,  $\lambda = 4$  für Köpergewebe 2/2

**Tabelle 11.9:** Anzahl der repräsentativen Sequenzen für jede Einzellage  $n_{O,E}$  nach Gleichung (11.21) und im gesamten Probekörper  $n_{O,PK}$  nach Gleichung (11.22) der drei Sätze vergleichbarer Probekörper (Satz 1: Basierend auf dem Roving TENAX HTS40 [123], Satz 2: Basierend auf dem Roving PYROFIL TR50S 6K [117] und Satz 3: Kohlenstoffaser-Prepregs G947 und G939 von HEXCEL [114]) für Ausraglängen  $l$  unter der Voraussetzung geometrisch und dynamisch konstanter Bedingungen (vgl. Gl. (10.5) in Abschnitt 10.5.5).

| PK-Satz | PK-ID  | Lagen-aufbau            | Anzahl Einzell. $N$ | Länge Querschn. Roving $L_R = \frac{n_R}{N}$ Gl. (11.18) | spezi. Faktor Gewebekonstr. $\lambda$ *** | Länge Ondulation $L = \lambda L_R$ Gl. (11.19) | Art der konstanten Bedingung * | Ausraglänge $l$ | Anzahl rep. Seq. je Einzell. $n_{O,E} = \frac{l}{N}$ Gl. (11.21) |             | Anzahl rep. Seq. PK $n_{O,PK} = \frac{l}{N}$ Gl. (11.22) |             | Quelle | Matrixsystem |
|---------|--------|-------------------------|---------------------|--|---|--|--------------------------------|-----------------|--|-------------|--|-------------|--------|--------------|
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                |                 | Gl. (11.21)  | Gl. (11.22) | Gl. (11.21)  | Gl. (11.22) |        |              |
| Tenax   | Ten-UD | [0] <sub>2s</sub>       | 4                   | -  | -   | -  | -                              | 220 mm          | -  | -           | -  | -           | [123]  |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | -  | -           | -  | -           |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | -  | -           | -  | -           |        |              |
| Tenax   | Ten-LW | [(0/90) <sub>2s</sub> ] | 4                   | 4,0 mm   | 2   | 8,0 mm   | geometrisch                    | 220 mm          | 27,50  | 110,00      | 110,00   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | 27,50  | 110,00      | 110,00   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | 27,50  | 110,00      | 110,00   | [122]       |        |              |
| Tenax   | Ten-K2 | [(0/90) <sub>2s</sub> ] | 4                   | 2,7 mm   | 4   | 10,8 mm  | geometrisch                    | 220 mm          | 20,37  | 81,48       | 81,48  |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | 20,37  | 81,48       | 81,48  |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | 20,37  | 81,48       | 81,48  | [121]       |        |              |
| Tenax   | Ten-K2 | [(0/90) <sub>2s</sub> ] | 4                   | 2,7 mm   | 4   | 10,8 mm  | dynamisch                      | 206 mm          | 19,07  | 76,28       | 76,28  |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 210 mm          | 19,44  | 77,76       | 77,76  |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 208 mm          | 19,26  | 77,04       | 77,04  |             |        |              |
| Pyrofil | Pyr-UD | [0] <sub>4s</sub>       | 8                   | -  | -   | -  | -                              | 220 mm          | -  | -           | -  | -           | [96]   |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | -  | -           | -  | -           |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | -  | -           | -  | -           | [117]  |              |
| Pyrofil | Pyr-LW | [(0/90) <sub>4s</sub> ] | 8                   | 2,7 mm   | 2   | 5,4 mm   | geometrisch                    | 220 mm          | 40,74  | 325,92      | 325,92   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | 40,74  | 325,92      | 325,92   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | 40,74  | 325,92      | 325,92   | [120]       |        |              |
| Pyrofil | Pyr-K2 | [(0/90) <sub>4s</sub> ] | 8                   | 2,7 mm   | 4   | 10,8 mm  | dynamisch                      | 200 mm          | 37,04  | 296,32      | 296,32   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 202 mm          | 37,41  | 299,28      | 299,28   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 202 mm          | 37,41  | 299,28      | 299,28   |             |        |              |
| Pyrofil | Pyr-K2 | [(0/90) <sub>4s</sub> ] | 8                   | 2,7 mm   | 4   | 10,8 mm  | geometrisch                    | 220 mm          | 20,37  | 162,96      | 162,96   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | 20,37  | 162,96      | 162,96   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 220 mm          | 20,37  | 162,96      | 162,96   | [119]       |        |              |
| Hexcel  | Hex-UD | [0] <sub>4s</sub>       | 8                   | -  | -   | -  | -                              | 200 mm          | -  | -           | -  | -           |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 200 mm          | -  | -           | -  | -           |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 200 mm          | -  | -           | -  | -           |        |              |
| Hexcel  | Hex-GW | [(0/90) <sub>4s</sub> ] | 8                   | 1,8 mm   | 4   | 7,2 mm   | geometrisch                    | 200 mm          | 27,78  | 222,22      | 222,22   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 200 mm          | 27,78  | 222,22      | 222,22   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 200 mm          | 27,78  | 222,22      | 222,22   | [114]       |        |              |
| Hexcel  | Hex-GW | [(0/90) <sub>4s</sub> ] | 8                   | 1,8 mm   | 4   | 7,2 mm   | dynamisch                      | 204 mm          | 28,33  | 226,67      | 226,67   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 196 mm          | 27,22  | 217,78      | 217,78   |             |        |              |
|         |        |                         |                     |  |   |  |                                | 200 mm          | 27,78  | 222,22      | 222,22   |             |        |              |

\* ermittelt nach Gl. (10.4) und Gl. (10.5), wie in Abschnitt 10.5.5 beschrieben

# 12 Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse der analytischen und numerischen Untersuchungen im mesomechanischen Maßstab, sowie die Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen im makroskopischen Maßstab werden diskutiert.

## 12.1 Diskussion der analytischen und numerischen Ergebnisse

Das analytische Modell und die numerischen Untersuchungen mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) liefern kinematische Zusammenhänge in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund geometrischer Parameter. Aufgrund ihrer geometrischen Ähnlichkeit sind dabei v. a. die numerischen Ergebnisse der Leinwandgewebegeometrien mit den Ergebnissen des analytischen Modells vergleichbar. Schließlich werden die Grenzen der Modellvorstellung beschrieben.

### Ergebnisse analytisches Modell und numerische Ergebnisse

Die Ergebnisse des analytischen Modells und die der numerischen FE-Berechnungen mit Leinwandgewebegeometrie unterscheiden sich zunächst. Der Grund dafür ist die Berücksichtigung der Elastizität im FE-Modell gegenüber den vereinfachend vorausgesetzten idealisierten Steifigkeitsverhältnissen des analytischen Modells. In den numerischen Untersuchungen werden die Elastizität des Kettstrangs, der quer dazu verlaufenden Schussstränge und der umgebenden Matrix berücksichtigt. Im Gegensatz dazu setzt das analytische Modell einen ideal steifen und gleichzeitig ideal biegeschlaffen Strang voraus. Zusätzlich wird dieser auf die Mittellinie reduziert und als sinusförmig onduliert vorausgesetzt. Dabei werden unterschiedliche Effekte, wie beispielsweise der Querverformung, einer elastischen Bettung bzw. der senkrecht dazu verlaufenden senkrecht geschnittenen Schussstränge sowie der umgebenden Matrix, ebenfalls vernachlässigt.

Das analytische Modell zeigt einen hyperbolischen Zusammenhang zwischen dem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  und der Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik  $\tilde{M}$  als Betrag der Steigung im  $w_{\text{rel}}-u_{\text{rel}}$ -Diagramm  $|\tilde{M}|$ , wie in Abbildung 11.1 dargestellt. Dabei bedingt ein höherer Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  eine geringere Sensitivität  $\tilde{M}$  bzgl. der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Parameter. Im Gegensatz dazu zeigt das FE-Modell eine große ausgewertete Sensitivitäten  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  für große Grade der Ondulation  $\tilde{O}$ , wie in den Abbildungen 11.3 und 11.5 oben erkennbar. Dabei kann in beiden Fällen ein sigmoidaler Zusammenhang unterstellt werden.

Zusätzlich ist erkennbar, dass die quadratischen Zusammenhänge der Abbildungen 11.4 und 11.6, die ausgewerteten Sensitivitäten  $\tilde{M}$  der Differenz der aufgebrauchten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  nicht durch den Ursprung gehen. Die beschriebenen Unterschiede zwischen den Ergebnissen des analytischen Modells und der numerischen Ergebnisse können auf die Berücksichtigung der Elastizität im FE-Modell, im Gegensatz zum stark idealisierten analytischen Modell wegen der vereinfachend getroffenen Voraussetzungen, zurückgeführt werden. Dabei sind v. a. die konstanten Anteile in den quadratischen Zusammenhängen der Differenzen der Längsverzerrungen ein Indikator, dass die stark vereinfachende Voraussetzung einer biegeschlaffen ondulierten Strangs (9.12) nicht zutrifft. Stattdessen ist es wahrscheinlich, dass dort superponiert Längsverzerrungen u. a. aufgrund der aufgebrauchten normierten Längsverschiebung und Komponenten aus der Biegebeanspruchung des Rovingstrangs auftreten. Die Biegesteifigkeit resultiert dabei

aus der modellierten Dicke eines Rovingstrangs (9.6), der durch die diskret verteilte Steifigkeit in den ebenen repräsentativen Sequenzen aussermittig in Längsrichtung beansprucht ist. Vor diesem Hintergrund ist es wahrscheinlich, dass in diesen Bereichen komplexe Spannungszustände vorherrschen.

### Grenzen des Modells

Die zuvor beschriebenen Zusammenhänge werden jeweils durch teilweise stark vereinfachende Voraussetzungen identifiziert. Dies sind im Einzelnen ideale Steifigkeitsverhältnisse im analytischen Modell, sowie das linear-elastische Materialverhalten, die Berücksichtigung von lediglich zwei Dimensionen und eine ideale mesomechanische Geometrie im FE-Modell (sinusförmig verlaufender Kettstrang mit ideal paralleler Faserverstärkung in den Rovingsträngen). Diese vereinfachenden Voraussetzungen liefern eine tendenzielle Beschreibung des kinematischen Verhaltens, schaffen jedoch gleichzeitig Modellgrenzen, da sie die Realität nicht vollständig bzw. korrekt abbilden.

Der elastische Beitrag des ondulierten Rovingstrangs bzw. der ebenen repräsentativen Sequenz durch die aufgebrachte Deformation ist nicht unerheblich. Zusätzlich besitzt der ondulierte Faserstrang aufgrund seiner Ausdehnung in Dickenrichtung eine gewisse Biegesteifigkeit. Die beiden zuvor genannten Effekte sind durch die numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode identifiziert worden. Darüber hinaus beeinflussen sowohl der Unterschied des strukturmechanischen Verhaltens von faserverstärkten Kunststoffen unter Zug- und Druckbelastung, sowie die Qualität der Haftung zwischen Verstärkungsfasern und Matrixwerkstoff in der Interphase das reale Materialverhalten. Um präzisere Ergebnisse zu erhalten, können weitere Parameter der Berechnungen mit der Finite-Element-Methode variiert werden.

Wie bereits in ausgewählten Arbeiten in Kapitel 2 in Abschnitt 2.1.3 dargestellt, sind die in vorangegangenen Arbeiten behandelten Aspekte zu mesomechanischen kinematischen Zusammenhängen in faserverstärkten Kunststoffen mit Gewebeerstärkung i. a. nichtlinear. Zusätzlich zeigen Untersuchungen der kinematischen Zusammenhänge mit trockenen Geweben ohne Matrixwerkstoff unter ein- oder zweiachsiger Zugbelastung sowie unter Schubbelastung, wie beispielsweise von BADEL, VIDAL-SALLÉ und BOISSE 2007 [5], BALLHAUSE 2007 [6], HIVET und BOISSE 2008 [62] sowie HIVET und DUONG 2010 [61] durchgeführt, einen anderen, ebenfalls nichtlinearen, Zusammenhang. Im Detail bewirken positive Deformationen zunächst ebenfalls eine Abflachung der ondulierten Rovings und damit eine Reduktion der Dicke. Bei weiterer positiver Deformation bewirkt das Abflachen der belasteten Stränge jedoch sogar eine Anhebung der senkrecht dazu verlaufenden Stränge. Dieser Mechanismus resultiert in einer Zunahme der Dicke der Gewebelage statt in einer Abnahme der Dicke, die durch eine Kopplung analog zu Querverformungseffekten eigentlich erwartet wird.

Da die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Bereiche der Deformation (positiv als auch negativ) i. a. sehr klein sind, und damit eine linear-elastische Beschreibung des Materialverhaltens zulassen, wird gefolgert, dass die zuvor dargestellten Zusammenhänge das kinematische Verhalten gewebeerstärkter Einzelschichten im mesomechanischen Maßstab korrekt beschreiben.

### Einfluss der Position der Einzellage in den numerischen Ergebnissen

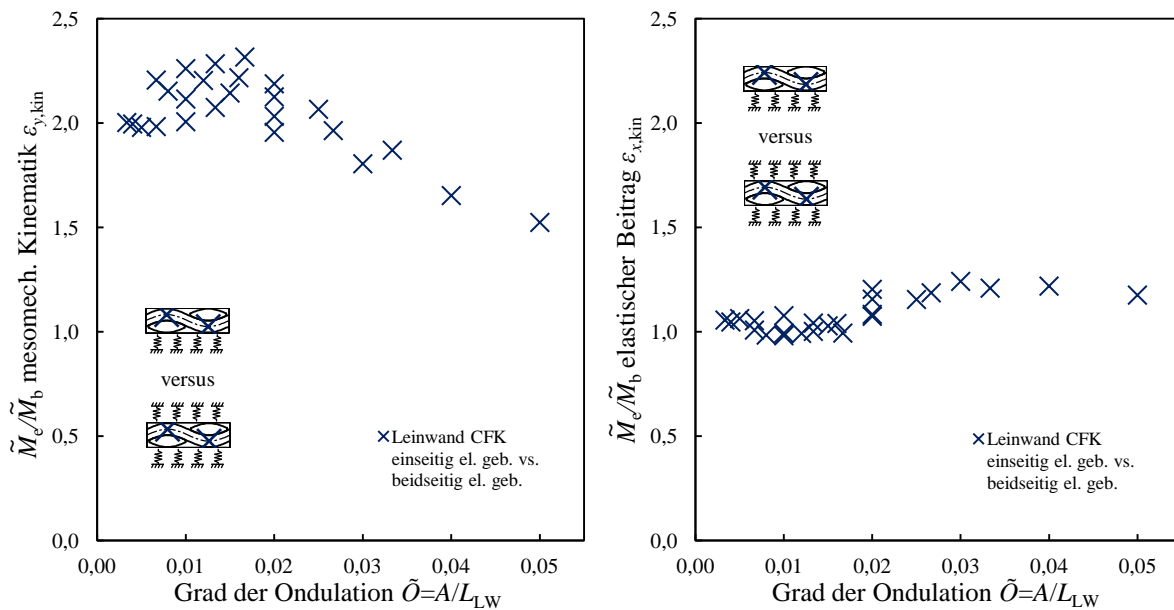
Basierend auf den Ergebnissen der FE-Berechnungen in Abschnitt 11.1.4, wird der Einfluss der, in Abschnitt 9.5.4 dargestellten, grundlegend unterschiedlichen Randbedingungen einer gewebeerstärkten Einzellage diskutiert. Die Fallunterscheidung berücksichtigt eine einseitig elastische Bettung im Falle einer Randlage und eine beidseitig elastische Bettung im Falle einer Lage im Inneren eines Lagenaufbaus, wie in Abbildung 9.6 dargestellt. Die identifizierte Sensitivität als Steigung  $\tilde{M}$  für die Positionen der Auswertung bei einseitig elastischer Bettung ist dabei stets größer als für die Positionen der Auswertung bei beidseitig elastischer Bettung. Deshalb werden die größeren Sensitivitäten bei einseitiger Bettung  $\tilde{M}_e$  auf die kleineren Sensitivitäten bei beidseitiger Bettung  $\tilde{M}_b$  bezogen.



*Leinwandgewebe*

Abbildung 12.1 links zeigt die Verhältnisse der Sensitivität als Beträge der Steigungen  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für Leinwandgewebe aus CFK. Wie bereits aus den, in Abbildung 11.3 angegebenen, linearen Näherungsgleichungen hervorgeht, zeigt das Modell bei einseitig elastischer Bettung eine ca. 1,8-fach höhere Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik als das Modell bei beidseitig elastischer Bettung. Im Detail ist das Verhältnis der Sensitivitäten  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  bei kleineren Graden der Ondulation  $\tilde{O}$  teilweise etwas größer. Ab einer Ondulation  $\tilde{O} \geq 0,02$  nimmt das Verhältnis für zunehmende Grade der Ondulation noch geringfügig ab.

Abbildung 12.1 rechts zeigt die Verhältnisse der Sensitivität als Beträge der Steigungen  $\tilde{M}$  der Differenz der aufgebracht und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für Leinwandgewebe aus CFK. Wie bereits aus den, in Abbildung 11.4 angegebenen, quadratischen Näherungsgleichungen hervorgeht, unterscheidet sich in diesem Fall das Modell bei einseitig elastischer Bettung lediglich geringfügig vom Modell bei beidseitig elastischer Bettung. Entsprechend ist das Verhältnis der Sensitivitäten  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  annähernd konstant, und beträgt ca. 1. Im Detail ist es bis zu einem Grad der Ondulation  $\tilde{O} \leq 0,02$  sehr genau gleich 1, während es für zunehmende Grade der Ondulation mit maximal ca. 1,2 geringfügig größer ist.



**Abbildung 12.1:** Verhältnisse der Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik des Modells bei einseitiger Bettung zu der des Modells bei beidseitiger Bettung  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  für Leinwandgewebe aus CFK.

*Köpergewebe 2/2*

Abbildung 12.2 zeigt die Verhältnisse der Sensitivität als Beträge der Steigungen  $\tilde{M}$ , links der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  und rechts der Differenz der aufgebracht und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2 aus CFK. Dabei sind oben die Verhältnisse für die Ergebnisse an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche, und unten die Verhältnisse für die Ergebnisse in der Mitte der horizontalen Bereiche dargestellt.

Abbildung 12.2 links oben zeigt die Verhältnisse der Sensitivität als Beträge der Steigungen  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2 aus CFK für den Fall der Positionen

der Auswertung an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche. Dabei geht bereits aus den in Abbildung 11.5 oben angegebenen, linearen Näherungsgleichungen hervor, dass das Modell bei einseitig elastischer Bettung eine ca. 1,6-fach höhere Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik aufweist als das Modell bei beidseitig elastischer Bettung. Im Detail ist das Verhältnis der Sensitivitäten  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  für den Fall der Positionen der Auswertung an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche bei kleineren Graden der Ondulation  $\tilde{O} < 0,01$  jedoch zunächst deutlich kleiner als 1,6 und nimmt für zunehmende Grade der Ondulation auf den Wert von ca. 1,6 zu. Ab einem Grad der Ondulation  $\tilde{O} \geq 0,01$  beträgt das Verhältnis dann gleichbleibend ca. 1,6.

Abbildung 12.2 links unten zeigt die Verhältnisse der Sensitivität als Beträge der Steigungen  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2 aus CFK für den Fall der Positionen der Auswertung in der Mitte der horizontalen Bereiche. Wie bereits aus den, in Abbildung 11.6 unten dargestellten, Ergebnissen ersichtlich ist, weist in auch in diesem Fall das Modell bei einseitig elastischer Bettung eine größere Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik auf als das Modell bei beidseitig elastischer Bettung. Bei kleineren Graden der Ondulation  $\tilde{O}$  zeigt das Verhältnis der Sensitivitäten  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  lediglich eine geringfügig steigende Tendenz. Erst bei größerem Grad der Ondulation  $\tilde{O} > 0,01$  zeigt sich eine eindeutig steigende Tendenz der Verhältnisse.

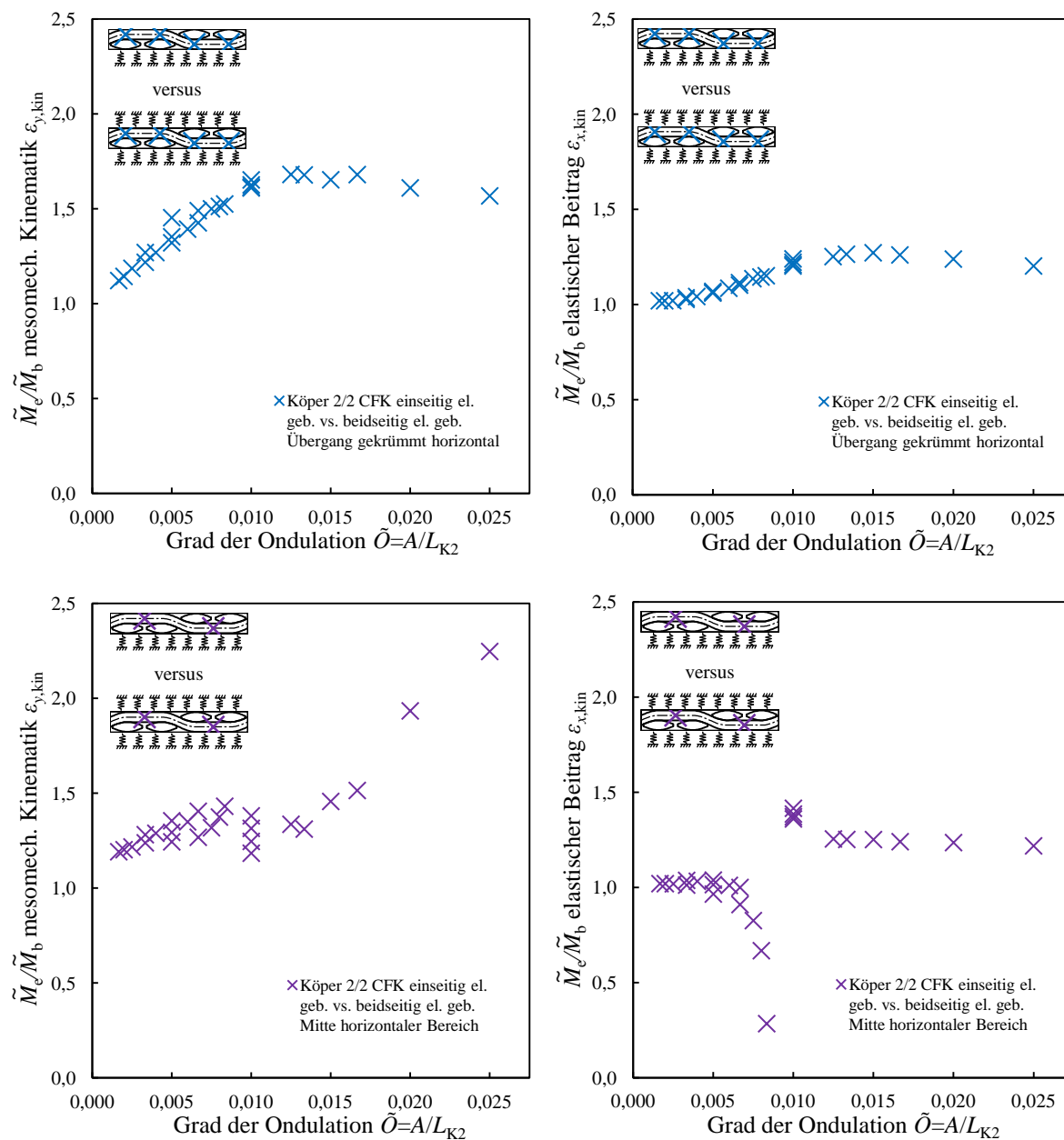
Abbildung 12.1 rechts oben zeigt die Verhältnisse der Sensitivität als Beträge der Steigungen  $\tilde{M}$  der Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2 aus CFK für den Fall der Positionen der Auswertung an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche. Wie bereits aus den, in Abbildung 11.6 oben angegebenen, quadratischen Näherungsgleichungen hervorgeht, unterscheidet sich in diesem Fall das Modell bei einseitig elastischer Bettung lediglich geringfügig vom Modell bei beidseitig elastischer Bettung. Entsprechend ist das Verhältnis der Sensitivitäten  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  annähernd konstant, und beträgt ca. 1. Im Detail steigt es bis zu einem Grad der Ondulation  $\tilde{O} \leq 0,01$  geringfügig auf ca. 1,2 an, und verändert sich für zunehmende Grade der Ondulation nicht mehr wesentlich.

Abbildung 12.2 rechts unten zeigt die Verhältnisse der Sensitivität als Beträge der Steigungen  $\tilde{M}$  der Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für Köpergewebe 2/2 aus CFK für den Fall der Positionen der Auswertung in der Mitte der horizontalen Bereiche. Wie bereits aus den, in Abbildung 11.6 unten dargestellten, Ergebnissen ersichtlich ist, unterscheidet sich in diesem Fall das Modell bei einseitig elastischer Bettung generell nicht vom Modell bei beidseitig elastischer Bettung. Auch in diesem Fall ist das Verhältnis der Sensitivitäten  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  annähernd konstant, und beträgt ca. 1. Lediglich bei Graden der Ondulation  $\tilde{O}$  von 0,00667 bis 0,01 tritt aufgrund der Verhältnisbildung eine Singularität auf, die zunächst sehr kleine und anschließend sehr großen Zahlenwerte liefert. Abgesehen davon entspricht das generelle Verhalten des elastischen Beitrags an den Positionen der Auswertung in der Mitte der waagrechten Bereiche dem zuvor beschriebenen Verlauf für die Positionen der Auswertung an den Übergängen. Entsprechend unterscheiden sich die Positionen der Auswertung an den Übergängen bei einseitig elastischer Bettung annähernd nicht von den Positionen der Auswertung bei beidseitig elastischer Bettung, sodass das Verhältnis der Sensitivitäten  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  bis zum Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  von 0,00667 annähernd konstant ca. 1 beträgt. Ab einem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  von 0,01 beträgt das Verhältnis schließlich ca. 1,2, und verändert sich für zunehmende Grade der Ondulation nicht mehr wesentlich.

### *Gegenüberstellung*

Sowohl bei Leinwandgewebe als auch bei Köpergewebe 2/2 aus CFK zeigen die Verhältnisse der Sensitivitäten als Beträge der Steigungen  $\tilde{M}$  der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  und der Differenz der aufgebrachten und

ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,kin}$  über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ , dass das Modell bei einseitiger Bettung stets einen größeren Beitrag liefert als das Modell bei beidseitiger Bettung. Dabei sind die Verhältnisse der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,kin}$  deutlich größer als die der Differenz der aufgebracht und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,kin}$ .



**Abbildung 12.2:** Verhältnisse der Sensitivität auf die mesomechanische Kinematik des Modells bei einseitiger Bettung zu der des Modells bei beidseitiger Bettung  $\tilde{M}_e/\tilde{M}_b$  für Köpergewebe 2/2 aus CFK.

Die Abnahme der Verhältnisse der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,kin}$  mit zunehmendem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ , wie in den Abbildungen 12.1 links für Leinwandgewebe und 12.2 links oben für Köpergewebe 2/2 an den Positionen der Auswertung an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche dargestellt, ist dabei auf die zunehmende Sensitivität der Positionen der Auswertung bei beidseitiger Bettung zurückzuführen. Trotz beidseitiger Bettung, die i. a. verformungsbehindernd wirkt, nimmt

die Wirkung der mesomechanischen Kinematik bei zunehmendem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  zu. Im Gegensatz dazu ist die geometrische Umlenkung bei kleinen Graden der Ondulation  $\tilde{O}$  noch so gering, dass die beidseitige Bettung der mesomechanischen Kinematik stark entgegenwirkt, und das Modell noch stark dem strukturmechanischen Verhalten einer unidirektional verstärkten Sequenz folgt.

Lediglich die Verhältnisse der Sensitivitäten der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,\text{kin}}$  an den Positionen der Auswertung in der Mitte der horizontalen Bereiche für Köpergewebe 2/2, wie in Abbildung 12.2 links unten dargestellt, zeigen ein davon abweichendes Verhalten. Die tendenzielle Zunahme der Verhältnisse bei sehr hohen Graden der Ondulation  $\tilde{O}$  deutet dabei wieder auf eine sehr hohe Sensitivität der Position der Auswertung in der Mitte der horizontalen Bereiche auf die mesomechanische Kinematik hin. Dies ist wahrscheinlich auf die Tatsache zurückzuführen, dass aufgrund der Modellierung der ebenen repräsentativen Sequenz eines Köpergewebes 2/2, wie in den Abbildungen 9.1 bzw. 11.2 dargestellt, die waagrecht verlaufenden, unidirektional verstärkten, Bereiche der Rovingstränge, mit den Positionen der Auswertung in der Mitte oben und unten, an Bereiche mit reinem Matrixsystem grenzen. Im Gegensatz dazu grenzen die Positionen der Auswertung an den Übergängen der gekrümmten in die horizontalen Bereiche beim Köpergewebe 2/2 oder an den Extrema beim Leinwandgewebe stets direkt an einen senkrecht geschnittenen Schussstrang. Entsprechend tragen die unterschiedlichen lokalen Querverformungen der unterschiedlichen Bereiche zur mesomechanischen Kinematik an den unterschiedlichen Positionen der Auswertung bei. In diesem Zusammenhang sind die Positionen der Auswertung in der Mitte der horizontalen Bereiche beim Köpergewebe 2/2 als Sonderfall zu betrachten. Ein weiterer Grund für die Werte der Verhältnisse in Verbindung mit der geringen Sensitivität bezüglich des Grades der Ondulation  $\tilde{O}$  ist, dass der unidirektional verstärkte Kettstrang an den Positionen der Auswertung in der Mitte der horizontalen Bereiche nicht onduliert ist, und keine geometrische Veränderung des Kraftflusses erfolgt.

Die Verhältnisse der Sensitivitäten der Differenz der aufgebrachten und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,\text{kin}}$  liefern sowohl für Leinwandgewebe als auch Köpergewebe 2/2 für jede Position der Auswertung annähernd den gleichen elastischen Beitrag. Die geringfügige Zunahme mit zunehmendem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ , wie in den Abbildungen 12.1 rechts für Leinwandgewebe und 12.2 rechts für Köpergewebe 2/2 an den jeweiligen Positionen der Auswertung dargestellt, wirkt dabei analog zum kinematischen Anteil auf die zunehmende Sensitivität der Positionen der Auswertung bei beidseitiger Bettung. Die zunehmende Wirkung der mesomechanischen Kinematik bei zunehmendem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  bewirkt, wegen der i. a. verformungsbehindernd wirkenden beidseitig elastischen Bettung, eine Zunahme des elastischen Beitrags. Auch in diesem Fall folgt das strukturmechanische Verhalten der ebenen repräsentativen Sequenz bei kleineren Graden der Ondulation  $\tilde{O}$  aufgrund der geringen geometrischen Umlenkung des ondulierten Rovingstrangs deutlicher dem einer unidirektional verstärkten Sequenz, unabhängig von der Art der unterschiedlichen Randbedingungen einer gewebeverstärkten Einzellage im Lagenaufbau.

## 12.2 Diskussion der experimentellen Ergebnisse

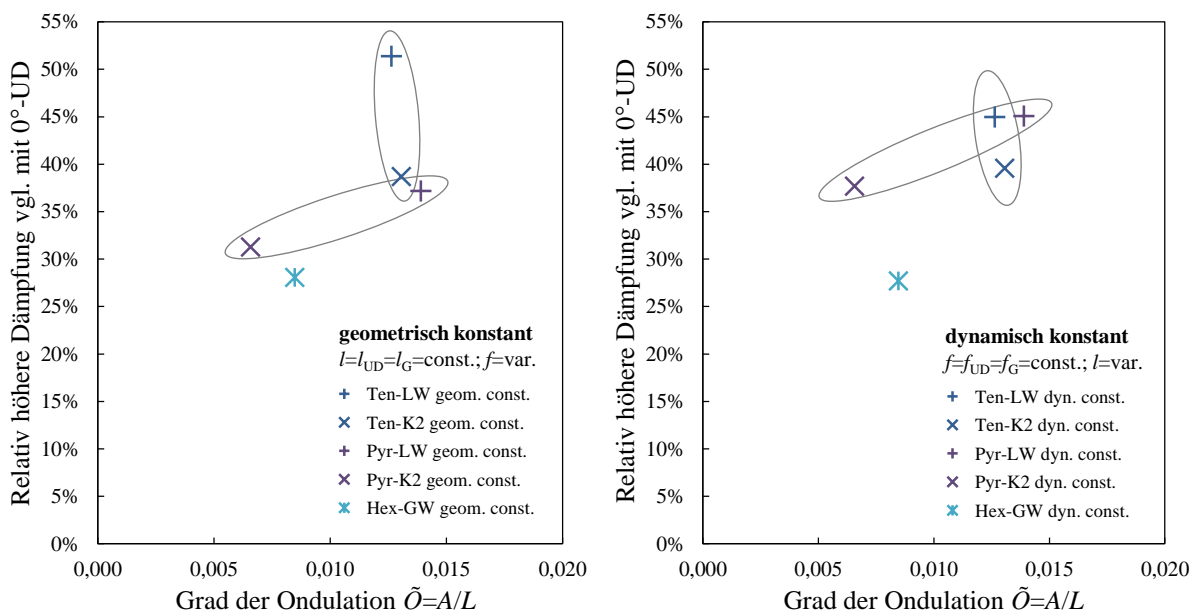
Zur Validierung der, im analytischen Modell und in den numerischen Untersuchungen mit ebenen repräsentativen Sequenzen, identifizierten mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen werden experimentelle strukturdynamische Untersuchungen durchgeführt. Dabei werden frei abklingende Transversalschwingungen von flachen stabförmigen Probekörpern, mit entweder 0°-unidirektional verstärkten oder 0°-gewebeverstärkten (in Kettrichtung) Lagenaufbauten, unter einseitig fester Einspannung untersucht. Dafür werden drei Sätze vergleichbarer Probekörper berührungslos mit einem Laser-Scanning Vibrometer vermessen.

### Einfluss des Grades der Ondulation $\tilde{O}$

Tabelle 12.1 listet die zuvor genannte relativ höhere Werkstoffdämpfung der gewebeverstärkten Probekörper verglichen mit dem 0°-unidirektional verstärkten Probekörper in % mit dem zugehörigen Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  unter geometrisch und dynamisch konstanten Bedingungen auf. Abbildung 12.3 stellt diese graphisch über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  dar. Dabei ist für beide Arten der konstanten Bedingungen, die Werkstoffdämpfung für die leinwandverstärkten Probekörper stets größer als für die köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper.

**Tabelle 12.1:** Relativ höhere Werkstoffdämpfung der gewebeverstärkten Probekörper verglichen mit dem 0°-unidirektional verstärkten Probekörper in % mit Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  für geometrisch und dynamisch konstante Bedingung.

| PK-Satz | PK-ID  | Grad Ondulation $\tilde{O} = \frac{A}{L}$<br>Gl. (9.9) | Art der konstanten Bedingung * | Anzahl rep. Seq. PK $n_{O,PK}$<br>Gl. (11.22) | Relativ höhere Dämpfung vgl. m. 0°-UD | Quelle | Matrixsystem |
|---------|--------|--|--------------------------------|---|---------------------------------------|--------|--------------|
|         | Ten-UD | 0  | -                              | 0   | -                                     | [123]  |              |
| Tenax   | Ten-LW | 0,01263  | geometrisch<br>dynamisch       | 110,0<br>84,3                                 | 51,4%<br>45,0%                        | [122]  |              |
|         | Ten-K2 | 0,01306  | geometrisch<br>dynamisch       | 81,5<br>77,0                                  | 38,7%<br>39,6%                        | [121]  | Huntsman     |
|         | Pyr-UD | 0  | -                              | 0   | -                                     | [117]  | [96]         |
| Pyrofil | Pyr-LW | 0,01389  | geometrisch<br>dynamisch       | 325,9<br>298,3                                | 37,2%<br>45,1%                        | [120]  |              |
|         | Pyr-K2 | 0,00657  | geometrisch<br>dynamisch       | 163,0<br>150,6                                | 31,3%<br>37,7%                        | [119]  |              |
|         | Hex-UD | 0  | -                              | 0   | -                                     | [114]  | HexPly       |
| Hexcel  | Hex-GW | 0,00847  | geometrisch<br>dynamisch       | 222,22<br>222,22                              | 28,1%<br>27,7%                        |        | M18/1 [114]  |



**Abbildung 12.3:** Relativ höhere Werkstoffdämpfung verglichen mit dem 0°-unidirektional verstärkten Probekörper in % über den Grad der Ondulation  $\tilde{O}$ . Links: Unter der Voraussetzung konstanter geometrischer Bedingungen und gleichen Ausraglängen  $l = l_{UD} = l_G$ . Rechts: Unter der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen und gleichen Grundfrequenzen  $f = f_{UD} = f_G$ .

Im Falle des ersten Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf dem Kohlenstoffaserveroving TENAX HTS40 [123], weisen die leinwandgewebeverstärkten bzw. die köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper einen Grad der Ondulation  $\tilde{O}_{\text{LW}} = 0,01263$  und  $\tilde{O}_{\text{K2}} = 0,01306$  auf. Die relativ ähnlichen Werte basieren auf den geringfügig unterschiedlichen Parametern der Ondulation, wie in Tabelle 11.8 angegeben. Im Gegensatz weisen die leinwandgewebeverstärkten und die köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper im Falle des zweiten Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf dem Kohlenstoffaserveroving PYROFIL TR50S 6K [117], einen Grad der Ondulation  $\tilde{O}_{\text{LW}} = 0,01389$  und  $\tilde{O}_{\text{K2}} = 0,00657$  auf. Aufgrund der relativ ähnlichen Parameter der Ondulation, wie in Tabelle 11.8 angegeben, folgen die Werte in diesem Fall dem Verhältnis  $\tilde{O}_{\text{LW}} = 2 \tilde{O}_{\text{K2}}$ . Die zuvor beschriebenen Verhältnisse für die Anzahl der repräsentativen Sequenzen im gesamten Probekörper  $n_{\text{O,PK}}$  verhalten sich, entsprechend den, in Tabelle 11.9 angegebenen, Parametern der Ondulation, analog.

### Konstante geometrische Bedingungen

Die Auswertung der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen unter konstanten geometrischen Bedingungen,  $l = l_{\text{UD}} = l_{\text{G}}$ , zeigt, dass das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  als Maß für die Werkstoffdämpfung der gewebeverstärkten Probekörper stets höher ist als das der unidirektional verstärkten Probekörper. Im Falle des ersten Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf dem Kohlenstoffaserveroving TENAX HTS40 [123], weisen die leinwandgewebeverstärkten bzw. die köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper eine um 51,4 % bzw. 38,7 % höhere Werkstoffdämpfung auf. Im Falle des zweiten Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf dem Kohlenstoffaserveroving PYROFIL TR50S 6K [117], weisen die leinwandgewebeverstärkten bzw. die köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper eine um 37,2 % bzw. 31,3 % höhere Werkstoffdämpfung auf. Im Falle des dritten Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf den Kohlenstoffaserveroving-Prepregs von HEXCEL [114], weisen die gewebeverstärkten Probekörper eine um 28,1 % höhere Werkstoffdämpfung auf.

### Konstante dynamische Bedingungen

Eine analoge Tendenz zeigt die Auswertung der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen unter konstanten dynamischen Bedingungen,  $f = f_{\text{UD}} = f_{\text{G}}$ . Auch unter diesen Bedingungen ist das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  als Maß für die Werkstoffdämpfung der gewebeverstärkten Probekörper stets höher als das der unidirektional verstärkten Probekörper. Im Falle des ersten Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf dem Kohlenstoffaserveroving TENAX HTS40 [123], weisen die leinwandgewebeverstärkten und die köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper eine um 45,0 % bzw. 39,6 % höhere Werkstoffdämpfung auf. Im Falle des zweiten Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf dem Kohlenstoffaserveroving PYROFIL TR50S 6K [117], weisen die leinwandgewebeverstärkten und die köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper eine um 45,1 % bzw. 37,7 % höhere Werkstoffdämpfung auf. Im Falle des dritten Satzes vergleichbarer Probekörper, basierend auf den Kohlenstoffaserveroving-Prepregs von HEXCEL [114], weisen die gewebeverstärkten Probekörper eine um 27,7 % höhere Werkstoffdämpfung auf.

### Einfluss der unterschiedlichen konstanten Bedingungen

Die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen werden, wie in Abschnitt 10.5.5 definiert, sowohl unter der Voraussetzung konstanter geometrischer Bedingungen, d. h. bei gleichen Auskraglängen  $l = l_{\text{UD}} = l_{\text{G}}$ , als auch unter der Voraussetzung konstanter dynamischer Bedingungen, d. h. bei gleichen Grundfrequenzen  $f = f_{\text{UD}} = f_{\text{G}}$ , untersucht. Da die Auswertung der Ergebnisse in beiden Fällen jedoch die Steifigkeit  $E$  der Probekörper als für jedes Halbzeug bzw. jeden Lagenaufbau charakteristischen Parameter liefert, ist die eingeführte Definition konstanter Bedingungen gerechtfertigt.

Sowohl der Speichermodul  $E'$  als auch der Verlustmodul  $E''$  der leinwandgewebeverstärkten Probekörper, basierend auf den Kohlenstoffaserveroving TENAX HTS40 [123] bzw. PYROFIL TR50S 6K [117], weisen eine geringe Abhängigkeit von der Grundfrequenz  $f$  auf. Dabei verursachen höhere Grundfrequenzen  $f$  geringfügig höhere Werte beider Größen. Im Gegensatz dazu weisen

der Real- und Imaginärteil des dynamischen Moduls  $E^*$  keine solche Abhängigkeit auf, wenn die köpergewebeverstärkten 2/2 Probekörper, basierend auf den Kohlenstoffaseroovings TENAX HTS40 [123] bzw. PYROFIL TR50S 6K [117], oder die gewebeverstärkten Probekörper, basierend auf den Kohlenstoffaser-Prepregs von HEXCEL [114], betrachtet werden.

### Materialqualität, Reproduzierbarkeit und Linearität

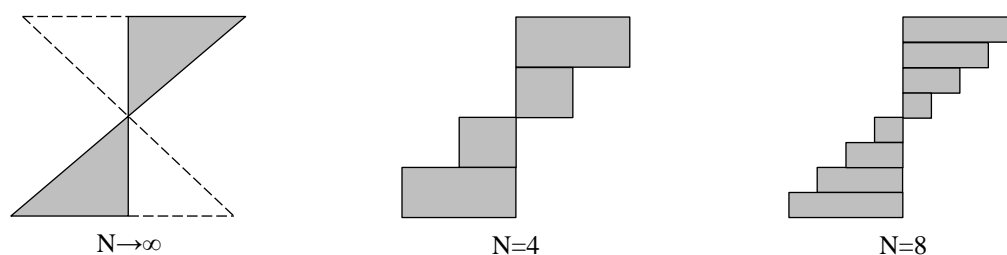
Unter der Voraussetzung sowohl konstanter geometrischer Bedingungen,  $l = l_{UD} = l_G$ , als auch konstanter dynamischer Bedingungen,  $f = f_{UD} = f_G$ , wie in Abschnitt 10.5.5 definiert, ergeben sich verhältnismäßig geringe Standardabweichungen. Dies ist ein Indikator für eine mechanisch hochwertige Materialqualität und gleichzeitig einen hohen Grad der Reproduzierbarkeit der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen. Die Aspekte der Reproduzierbarkeit, der Parameteridentifikation und der Sensitivitätsanalyse sind detailliert in Anhang A.1 dargestellt. Deshalb werden Nichtlinearitäten, sowie der Einfluss von Temperatur und Feuchte (vgl. Kapitel 8 und Abschnitt 10.3), in den dargestellten Ausführungen vernachlässigt, und die ermittelten strukturdynamischen Werkstoffeigenschaften als linear viskoelastisch angenommen.

## 12.3 Abschließende Bemerkungen

Die zuvor diskutierten Ergebnisse der analytischen und numerischen Untersuchungen im mesomechanischen Maßstab, sowie der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen im makroskopischen Maßstab führen zu abschließenden Bemerkungen.

### FE-Modellierung ebener repräsentativer Sequenzen

Die Verwendung flacher stabförmiger Probekörper in den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen und die gerechtfertigte Anwendung der eindimensionalen Balkentheorie zur Beschreibung von deren strukturdynamischen Verhalten rechtfertigt direkt die Modellierung ebener repräsentativer Sequenzen in den durchgeführten numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode. Die Modellierung ebener repräsentativer Sequenzen und die Durchführung einer zweidimensionalen FE-Analyse bilden die  $x$ - $z$ -Ebene ab, und vernachlässigen dabei die Dimension der Breite in  $y$ -Richtung, analog zur Balkentheorie.



**Abbildung 12.4:** Vereinfachende Voraussetzung linear über den Querschnitt verteilter Verschiebungen für  $N = \infty$  (links) und Modellierung diskreter, lagenweise konstanter, Verschiebungen über den Querschnitt für eine kleinere Anzahl von Einzellagen im Lagenaufbau  $N = 4$  (mitte) und eine größere Lagenanzahl  $N = 8$  (rechts).

### Randbedingungen und Verschiebungen im FE-Modell

Die in Abschnitt 9.5.4 definierten Randbedingungen und aufgebrauchten Verschiebungen der numerisch untersuchten ebenen repräsentativen Sequenzen entsprechen vereinfachenden Voraussetzungen zur Durchführung der FE-Berechnungen. Dabei sind v. a. die konstant über den Querschnitt aufgebrauchten Verschiebungen eine starke Idealisierung. Die strukturmechanische Beschreibung der Makromechanik eines Laminats als Mehrschichtverbund sowie der Transversal-schwingungen von Balken, wie in Abschnitt 6.3 bzw. in Kapitel 8 ausgeführt, setzt üblicherweise linear über den Querschnitt verteilte Verschiebungen, wie in Abbildung 6.4 dargestellt, voraus,

und Querverformungseffekte in Dickenrichtung werden vernachlässigt. Im Gegensatz dazu werden in den numerischen Untersuchungen der ebenen repräsentativen Sequenzen mit der FE-Methode über die Dicke bzw. über den Querschnitt einer Einzellage konstante Verschiebungen aufgebracht, und freie Verschiebungen in Dickenrichtung zugelassen, um Querverformungseffekte über die gesamte Länge nicht zu behindern. Dabei bildet die Modellierung diskreter, lagenweise konstanter, Verschiebungen über den Querschnitt eine größere Anzahl von Einzellagen im Lagenaufbau  $N$  besser ab, als eine geringere Lagenanzahl  $N$ , wie in Abbildung 12.4 schematisch dargestellt.

### Anwendung der Balkentheorie zur mechanischen Beschreibung der Probekörper

In den durchgeführten experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen werden flache stabförmige Probekörper mit  $0^\circ$ -unidirektional verstärkten oder  $0^\circ$ -gewebeverstärkten (in Kettrichtung) Lagenaufbauten im Biegeschwingversuch berührungslos vermessen. Dabei weisen  $0^\circ$ -gewebeverstärkte Probekörper in Kettrichtung aufgrund der zusätzlichen Querverstärkung in Schussrichtung stets geringere statische und dynamische Steifigkeiten auf als unidirektional  $0^\circ$ -verstärkte Probekörper. Da die, zur strukturdynamischen Beschreibung der Probekörper angewendete, Balkentheorie eindimensional ist, wird die Dimension in Breitenrichtung nicht berücksichtigt. Unter der Voraussetzung, dass bei dynamischer Beanspruchung bzw. zyklischer Deformation das wiederholte Wirken der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Zusammenhänge Energie dissipiert, und somit zusätzlich zur reinen viskoelastischen Werkstoffdämpfung in gewebeverstärkten Einzellagen beiträgt, werden die experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen zum phänomenologischen Nachweis zielführend durchgeführt.

Zum Erreichen der konstanten Bedingungen wird die Auskraglänge  $l$  als geometrischer Parameter der jeweiligen Probekörper variiert. Diese Variation erfolgt nach dem in Gleichung (10.5) angegebenen Zusammenhang, und führt auf lediglich geringfügig unterschiedliche Auskraglängen  $l$  bei geometrisch bzw. dynamisch konstanten Bedingungen. Entsprechend variieren die Verhältnisse der geometrischen Parameter der Querschnittsabmessungen  $b/h$  nicht, und das Verhältnis  $l/h$  lediglich sehr geringfügig. Dies erlaubt die Anwendung der Balkentheorie als eindimensionale Theorie zur Beschreibung des strukturdynamischen Verhaltens der experimentell untersuchten Probekörper.

### Effekt der mesomechanischen Kinematik im Probekörper

Die Ergebnisse zeigen, dass in jedem Fall die Werkstoffdämpfung der gewebeverstärkten Probekörper stets höher ist als die der unidirektional verstärkten Probekörper. Dabei erfahren die einseitig fest eingespannten flachen stabförmigen Probekörper in den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen im Biegeschwingversuch eine sich wiederholende charakteristische Verteilung der maximalen Beträge der Amplituden der abklingenden Transversalschwingungen in Längsrichtung des Probekörpers.

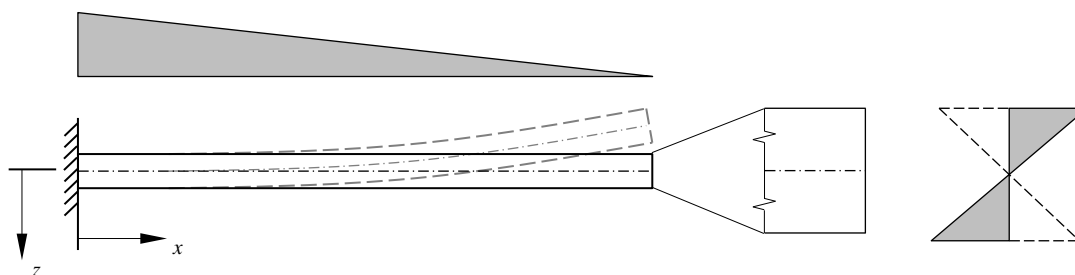
Wie in Kapitel 8 in Abschnitt 8.2.5 beschrieben, schwingen die Probekörper in den Eigenformen  $W_{k(x)}$  für  $k = 1, \dots, \infty$  zeitgleich und superponiert. Aufgrund der definierten, reproduzierbaren und relativ zur Dicke der Probekörper  $h$  konstante Weganregung von  $h/4$  am freien Ende des Probekörpers, wie in Abschnitt 10.5.1 und in Anhang A.1 dargestellt, dominiert dabei v. a. die erste Eigenform  $W_{1(x)}$ , wie in Abbildung 8.5 dargestellt. Die Beträge der Amplituden sind dabei am freien Ende bei  $x = L$  maximal,  $|A_{(x=L)}| = A_{\max}$ , und verschwinden der Einspannung bei  $x = 0$ ,  $|A_{(x=0)}| = A_{\min} = 0$ . Dabei unterscheiden sich die Eigenschwingungsformen lediglich geringfügig von der Voraussetzung einer schubweichen bzw. schubstarrten Kinematik [167].

In jedem Fall liefern beide Voraussetzungen der Kinematik des Balkenquerschnitts über die Dicke linear über die gesamte Dicke des Tragwerks  $h$  verteilte Verzerrungen in Längsrichtung. Die resultierenden Spannungen verlaufen dann stückweise über die Dicke der jeweiligen  $k$ -ten Einzellage  $h_k$  linear über die Dicke  $h$ , wie in Abbildung 6.4 dargestellt. Im Falle symmetrischer, ausgeglichener Lagenaufbauten um die Mittelebene als Bezugsebene  $z = 0$  und damit  $\bar{B}_{11} = 0$ , wie bei allen experimentell strukturdynamisch untersuchten Probekörpern, ergeben sich zusätz-



lich über die Grenzen der jeweiligen Einzellagen lineare und stetig verteilte Normalspannungen in Längsrichtung. Im beschriebenen Fall sind sowohl die Verzerrungen als auch die resultierenden Normalspannungen an der Einspannstelle  $x = 0$  an den Randfasern bei  $z = \pm h/2$  maximal und verschwinden am freien Ende  $x = L$ . Bei dynamischer Belastung alternieren die Vorzeichen der Verzerrungen und der resultierenden Spannungen in der jeweiligen Frequenz.

Abhängig von den geometrischen Parametern, der Art der Gewebeverstärkung und der Auskraglänge  $l$  weisen die jeweiligen Probekörper unterschiedliche Anzahlen von repräsentativen Sequenzen in jeder Einzellage  $n_{O,E}$  nach Gleichung (11.21) bzw. im gesamten Probekörper  $n_{O,PK}$  nach Gleichung (11.22) auf, wie in Tabelle 11.9 angegeben. Damit trägt jede repräsentative Sequenz einer gewebeverstärkten Einzellage abhängig von ihrer Position in Längsrichtung und in Dickenrichtung unterschiedlich zur Werkstoffdämpfung aufgrund der mesomechanischen Kinematik bei. Es bietet sich an, den Beitrag in Längsrichtung in Näherung linear oder entgegengesetzt zur Grundform  $W_1(x)$ , mit dem maximalen Beitrag bei  $x = 0$  und dem minimalen Beitrag bei  $x = L$ , analog zu den Randbedingungen der Durchsenkung  $w_{(0,t)} = 0$  bzw. Krümmung  $M''_{(L,t)} = 0$  der Biegelinie beim Kragbalken nach den Gleichungen (8.51) bzw. (8.52) vorzusetzen. Im Hinblick auf die Lagenaufbauten der Probekörper ist es günstig, den Beitrag linear über die Dicke  $h$ , analog zur Verteilung der Verzerrungen und resultierenden Spannungen bei symmetrischen, ausgeglichenen Lagenaufbauten um die Mittelebene als Bezugsebene  $z = 0$ , und damit  $\bar{B}_{11} = 0$ , vorzusetzen. Abbildung 12.5 veranschaulicht die möglichen Voraussetzungen der Verteilung der, bei abklingenden Transversalschwingungen zusätzlich energiedissipierenden, Wirkung der mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund geometrischer Zusammenhänge in Längs- und Dickenrichtung.



**Abbildung 12.5:** Vereinfachend vorausgesetzte Verteilung der, bei abklingenden Transversalschwingungen zusätzlich energiedissipierenden, Wirkung der mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund geometrischer Zusammenhänge in Längs- und Dickenrichtung der flachen stabförmigen Probekörper.

Die zuvor formulierten Annahmen der Verteilung der Wirkung der mesomechanischen Kinematik im Probekörper werden in den durchgeführten numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode lediglich näherungsweise erfasst. Die Idealisierung mit konstant über die Dicke der Einzellage  $h$  aufgebrachten Verschiebungen in Längsrichtung, wie in Abschnitt 9.5.4 beschrieben, bildet dabei die Verhältnisse in Lagenaufbauten mit größeren Anzahl von Einzellagen  $N$  besser ab, wie zuvor erwähnt.

### Anordnungen „in-phase“ und „out-of-phase“

Bei der Betrachtung von Lagenaufbauten aus gewebeverstärkten Einzellagen wird grundsätzlich zwischen der sog. „in-phase“-Anordnung und der sog. „out-of-phase“-Anordnung unterschieden [8], [84]. Die „in-phase“-Anordnung entspricht dabei einer theoretischeren Betrachtungsweise. Aufgrund der sog. Schubweichheit von Geweben ist durch den Imprägnierprozess des trockenen Gewebes, den Legeprozess des Laminats und des bei der Herstellung üblicherweise applizierten Drucks (vgl. Heißluftautoklavverfahren) die sog. „out-of-phase“-Anordnung in der Realität deutlich wahrscheinlicher. Diese weist deutlich geringere Querschnittsflächen bzw. Bereiche auf, die

mit Matrixmaterial gefüllt sind. Es ergibt sich für die „out-of-phase“-Anordnung eine geringe Dicke als für die „in-phase“-Anordnung  $h_{\text{op}} < h_{\text{ip}}$ . In der Realität wird jedoch keiner der beiden idealisierten Positionierungsfälle so auftreten.

Die Extrema der Dicken beider Anordnungsmöglichkeiten für (doppelt)symmetrische Lagenaufbauten werden miteinander verglichen. Dabei werden exemplarisch (praxis-)relevante Anzahlen der Einzellagen  $N = 2, 4, 8, 16, 32$  betrachtet. Wie in Abschnitt 9.2.1 beschrieben, wird vorausgesetzt, dass die Dicke einer gewebeverstärkten Einzellage  $h_{\text{E}}$  der vierfachen Amplitude  $A$ ,  $h_{\text{E}} = 4A$  entspricht. In der „in-phase“-Anordnung ergibt sich die Dicke eines Lagenaufbaus mit  $N$  gewebeverstärkten Einzellagen über Multiplikation zu

$$h_{\text{ip}}(N) = N 4 A = N h_{\text{E,t}} . \quad (12.1)$$

Im Extremfall der „out-of-phase“-Anordnung überdecken sich aufeinander folgende gewebeverstärkte Einzellagen mit dem Betrag der Amplitude  $A$ . Die Dicke eines Lagenaufbaus mit  $N$  gewebeverstärkten Einzellagen ergibt sich ebenfalls über Multiplikation. Dabei gehen die aufeinander folgenden Einzellagen bis zur vorletzten mit dem Betrag  $3A$  in die die Dicke des Lagenaufbaus ein, während die letzte Einzellage mit dem Betrag  $4A$  eingeht,

$$h_{\text{op}}(N) = (N - 1) 3 A + 4 A = N 3 A + A = N \frac{3}{4} h_{\text{E,t}} + \frac{1}{4} h_{\text{E,t}} = \left( \frac{3}{4} N + \frac{1}{4} \right) h_{\text{E,t}} . \quad (12.2)$$

Das Verhältnis der minimalen Dicke der „out-of-phase“-Anordnung  $h_{\text{op}}(N)$  zur maximalen Dicke der „in-phase“-Anordnung  $h_{\text{ip}}(N)$  liefert

$$\frac{h_{\text{op}}(N)}{h_{\text{ip}}(N)} = \frac{\left( \frac{3}{4} N + \frac{1}{4} \right) h_{\text{E,t}}}{N h_{\text{E,t}}} = \frac{\frac{3}{4} N + \frac{1}{4}}{N} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4N} \approx 0,75 . \quad (12.3)$$

Mit zunehmender Anzahl von gewebeverstärkten Einzellagen  $N$  beträgt im Extremfall die minimalen Dicke der „out-of-phase“-Anordnung  $h_{\text{op}}(N)$  lediglich  $\frac{3}{4}$  der maximalen Dicke der „in-phase“-Anordnung  $h_{\text{ip}}(N)$ . Bezüglich der Dicken der Probekörper  $h$  ergibt sich mit den beiden Extremwerten der geringsten Dicke  $h_{\text{op}}(N)$  und der höchsten Dicke  $h_{\text{ip}}(N)$  der qualitative Zusammenhang

$$h_{\text{op}}(N) \leq h \leq h_{\text{ip}}(N) \quad (12.4)$$

entsprechend Gleichung (11.23). Der zuvor dargestellte Zusammenhang (12.4) ist bei der in Abschnitt 10.3.2 beschriebenen Ermittlung der Dicke der Probekörper  $h$  und der Beurteilung der ausgewerteten Ergebnisse, wie in Tabelle 11.6 und Tabelle 11.7 dargestellt, zu beachten.

### Globaler und lokaler Faservolumengehalt

An dieser Stelle wird auf die diskrete Verteilung des Faservolumengehalts in der repräsentativen Sequenz eingegangen, die bereits in Abschnitt 10.2.3 in Kapitel 10 angesprochen worden ist. Der lokale Faservolumengehalt in den Rovingsträngen  $\varphi_{\text{f,R}}$  als unidirektional faserverstärkt vorausgesetzte Bereiche unterscheidet sich damit vom globalen Faservolumengehalt in der gesamten repräsentativen Sequenz  $\varphi_{\text{f,ERS}}$ . Die Verteilung des Faservolumengehalts in der repräsentativen Sequenz ist diskret, während die Veränderung der Vorzugsrichtung aufgrund der Ondulation über die repräsentative Sequenz kontinuierlich ist. Dabei sind lediglich die Bereiche der Kett- und Schussstränge unidirektional faserverstärkt, während die umgebende Matrix keine Faserverstärkung enthält,  $\varphi_{\text{f,M}} = 0$ . Mit den Verhältnissen der Einzellflächen zur Gesamtfläche der ebenen repräsentativen Sequenz, wie in den Gleichungen (9.32) und (9.33) angegeben, ergibt sich der globale Faservolumengehalt  $\varphi_{\text{f,ERS}}$  über das gewichtete Mittel der lokalen Faservolumengehalte

$\varphi_{f,R}$  und  $\varphi_{f,m} = 0$  zu

$$\varphi_{f,ERS} = \frac{A_K + \lambda A_S}{A_{ERS}} \varphi_{f,R} \approx 0,818 \varphi_{f,R} . \quad (12.5)$$

Ein ähnlicher Näherungsansatz findet sich u. a. in BARBERO 2011 [7], 2006 [8] und 1995 [9]. Die experimentellen Methoden der Bestimmung des Faservolumengehalts liefern dabei stets den globalen Faservolumengehalt  $\varphi_{ERS}$ . Genormte Verfahren sind dabei die nasschemische Extraktion organischer Verstärkungsfasern nach DIN EN 2564 [103], wie in der vorliegenden Arbeit verwendet und in Abschnitt 10.3.1 beschrieben, und die thermische Extraktion anorganischer Verstärkungsfasern nach DIN EN ISO 1172 [107]. Die entsprechend experimentell bestimmten Werte aus gewebeverstärkten Prüfplatten sind den Probekörpern daraus als globaler Faservolumengehalt  $\varphi_{ERS}$  zuzuweisen.

Die Ermittlung des lokalen Faservolumengehalts  $\varphi_{f,R}$  erfolgt schließlich nach Gleichung (12.5). Mit dem, in Abschnitt 9.5.5 vorausgesetzten, lokalen Faservolumengehalt in den Rovingsträngen  $\varphi_{f,R} = 65\%$  zur Berechnung der, in Tabelle 9.2 angegebenen, makroskopischen strukturmechanischen Werkstoffkennwerte nach mikromechanischen Homogenisierungsansätzen, liefert die Auswertung von Gleichung (12.5) den globalen Faservolumengehalt  $\varphi_{f,ERS} = 49\%$ . Dieser Wert gilt jedoch lediglich für den Extremfall der Anordnung „in-phase“, mit theoretisch verhältnismäßig großen Anteilen an Bereichen mit reinem Matrixmaterial. Da die „out-of-phase“-Anordnung in der Realität deutlich wahrscheinlicher ist, und entsprechend auch bei den experimentell strukturdynamisch untersuchten Probekörpern mit Gewebeverstärkung auftritt, ist der effektive globale Faservolumengehalt  $\varphi_{f,ERS}$  höher, und es gilt der qualitative Zusammenhang

$$\varphi_{f,ERS,ip} \leq \varphi_{f,ERS} \leq \varphi_{f,ERS,op} . \quad (12.6)$$

Unter der Annahme, dass in den gewebeverstärkten Probekörpern die wahrscheinlichere „out-of-phase“-Anordnung mit deutlich geringeren Querschnittsflächen bzw. Bereiche mit reinem Matrixmaterial ohne Faserverstärkung, ergeben sich sowohl für die  $0^\circ$ -unidirektional verstärkten als auch für die  $0^\circ$  in Kettrichtung gewebeverstärkten Probekörper, die in Tabelle 10.3 nach DIN EN 2564 [103] experimentell ermittelten Werte für den (globalen) Faservolumengehalt  $\varphi_f \approx \varphi_{f,ERS} \approx 60\%$ , bei vorausgesetztem lokalen Faservolumengehalt in den Rovingsträngen  $\varphi_{f,R} = 65\%$ .



# 13 Zusammenfassung und Ausblick

Das folgende Kapitel fasst die Erkenntnisse der durchgeführten analytischen und numerischen Untersuchungen im mesomechanischen Maßstab sowie die Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen im makroskopischen Maßstab zusammen, und liefert abschließend einen Ausblick.

## 13.1 Zusammenfassung

In den durchgeführten analytischen, numerischen und experimentellen Untersuchungen ist eine mesomechanische Kinematik aufgrund geometrischer Parameter in gewebeverstärkten Einzellagen aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFK) identifiziert worden. Für eine geeignete Charakterisierung der Verhältnisse der mesomechanischen geometrischen Parameter in gewebeverstärkten Einzellagen von faserverstärkten Kunststoffen ist der Grad der Ondulation  $\tilde{O} = A/L$  als spezifischer, dimensionsloser Kennwert eingeführt worden. Basierend auf diesem Kennwert ist es möglich, die mesomechanische Kinematik sowohl im analytischen Modell als auch in den numerischen Berechnungen mit der FE-Methode und experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen, zu charakterisieren. Der Nachweis der Korrelation und der Kausalität zwischen der mesomechanischen Kinematik und dem Grad der Ondulation  $\tilde{O}$  rechtfertigt dessen Definition und Einführung zur Beschreibung der geometrischen Verhältnisse von gewebeverstärkten Einzellagen in faserverstärkten Kunststoffen im mesomechanischen Maßstab als sinnvoll und zielführend.

In den numerischen Untersuchungen ebener repräsentativer Sequenzen mit der FE-Methode sind zwei Arten der Gewebekonstruktion, im Einzelnen Leinwandgewebe und Köpergewebe 2/2, untersucht worden. Dabei sind die beiden geometrischen Parameter, Amplitude  $A$  und Länge des Querschnitts eines Rovingstrangs  $L_R$ , jeweils in fünf äquidistanten Schritten parametrisch variiert worden, sodass für jede Art der Gewebeverstärkung 25, und damit insgesamt 50, mesomechanische Geometrien untersucht worden sind. Mit der Berücksichtigung der beiden grundlegend unterschiedlichen Randbedingungen einer gewebeverstärkten Einzellege, einseitig elastisch gebettet im Falle einer Randlage und beidseitig elastisch gebettet im Falle einer Lage im Inneren eines Lagenaufbaus, stehen Ergebnisse aus 100 FE-Modellen zur Verfügung. Dabei wird in jedem Fall der ausgewerteten Ergebnisse, sowohl der kinematischen Anteile aufgrund der mesomechanischen geometrischen Randbedingungen  $\varepsilon_{y,kin}$  als auch der Differenz der aufgetragenen und ermittelten Längsverzerrung  $\varepsilon_{x,kin}$ , an den relevanten Positionen der Auswertung das Wirkprinzip der mesomechanischen Kinematik in gewebeverstärkten Einzellagen aufgrund geometrischer Parameter nachgewiesen. Innerhalb der Modellgrenzen existiert sowohl im analytischen Modell als auch in den numerischen FE-Berechnungen eine direkte lineare Kopplung zwischen den aufgetragenen Deformationen in Längsrichtung und der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Parameter, nach der Bereinigung von Effekten aus der Querverformung als rein elastische Reaktion. Die vereinfachend getroffenen Voraussetzungen im analytischen Modell sind jedoch lediglich geeignet, das kinematische Verhalten tendenziell zu beschreiben, da die idealisierten Steifigkeitsverhältnisse die großen Unterschiede der Steifigkeiten in Faserlängsrichtung und senkrecht dazu lediglich qualitativ abbilden.

Zur Validierung des identifizierten mesomechanischen Wirkprinzips werden in experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen abklingende Transversalschwingungen von einseitig fest

eingespannten flachen stabförmigen Probekörpern mit  $0^\circ$ -unidirektional und  $0^\circ$ -gewebeverstärkten (Leinwand- und Köpergewebe 2/2, jeweils in Kettrichtung) Probekörpern untersucht. Dafür sind drei vergleichbare Sätze von Probekörpern verwendet worden, wovon zwei Sätze vergleichbarer auf trockenen textilen Halbzeugen (Kohlenstofffaser-Roving und entsprechendes Leinwand- sowie Köpergewebe 2/2) und ein Satz vergleichbarer Probekörper auf unidirektional und gewebeverstärkten Kohlenstofffaser-Prepregs basieren. Die Auswertung der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen zeigt dabei sowohl unter konstanten geometrischen Bedingungen,  $l = l_{UD} = l_G$ , als auch unter konstanten dynamischen Bedingungen,  $f = f_{UD} = f_G$ , stets eine höhere Werkstoffdämpfung der gewebeverstärkten Probekörper, verglichen mit der unidirektional verstärkten Probekörper. Auch im Fall der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen gelingt der Nachweis der Korrelation und der Kausalität zwischen dem Grad der Ondulation  $\bar{O}$  und der relativ höheren Werkstoffdämpfung von  $0^\circ$ -gewebeverstärkten Einzellagen, verglichen mit  $0^\circ$ -unidirektional verstärkten Einzellagen. Das wiederholte Wirken der mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Parameter dissipiert bei dynamischer Beanspruchung Energie, und trägt bei zyklischer Deformation zusätzlich zur reinen viskoelastischen Werkstoffdämpfung in gewebeverstärkten Einzellagen bei.

## 13.2 Ausblick

Die im analytischen Modell und in den numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode identifizierten Zusammenhänge weisen das Wirken einer mesomechanischen Kinematik aufgrund geometrischer Parameter eindeutig nach. Für weiterführende FE-Berechnungen ebener repräsentativer Sequenzen wären v. a. Belastungs-Verschiebungs-Zusammenhänge sowie detaillierte Analysen der resultierenden Spannungszustände relevant. Eine Parameteridentifikation der mesomechanischen Kinematik bezüglich der sich ergebenden Belastungs-Verschiebungs-Zusammenhängen dient schließlich dazu, den Einfluss der Art der Verstärkungsfaser (Glas- und Aramidfasern vgl. mit Kohlenstofffasern) und der Art der Gewebekonstruktion (weitere Köpergewebe, Satingewebe (ausgeglichen und unausgeglichen) vgl. mit Leinwandgewebe und Köpergewebe (2/2) (ausgeglichen)) auf das Materialverhalten zu untersuchen. Detaillierte Analysen der Spannungszustände ermöglichen die Beschreibung von Schädigungsmechanismen und die Formulierung von Versagenshypothesen. Die Berücksichtigung eines linear-viskoelastischen Materialmodells statt eines linear-elastischen Materialmodells, sowie die Berücksichtigung der Sensitivität des Materialverhaltens von faserverstärkten Kunststoffen auf die Art der Beanspruchung, Zug oder Druck, schafft eine zusätzliche Ausweitung der Modellgrenzen. Die Erweiterung der numerischen Untersuchungen mit der FE-Methode in die dritte Dimension als Breite des Tragwerks, sodass repräsentative Volumenelemente (RVEs) statt ebene repräsentative Sequenzen (ERS) betrachtet werden, erlauben die Ausweitung der Betrachtungen auf Flächentragwerke.

Unter der Voraussetzung, dass die unidirektional verstärkten und die gewebeverstärkten Einzellagen jeweils auf dem gleichen Roving basieren, und damit vollständig zueinander vergleichbar sind, sind experimentelle strukturdynamische Untersuchungen mit weiteren Sätzen vergleichbarer Probekörper durchführbar. Auch in diesem Fall sind, sowohl die Art der Verstärkungsfaser und die Art der Gewebekonstruktion, als auch die geometrischen Abmessungen, wie Auskraglänge und Breite der flachen stabförmigen Probekörper, Parameter der Untersuchungen.

# Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, H.; ALTENBACH, J.; KISSING, W.: *Mechanics of Composite Structural Elements*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2004
- [2] ALTENBACH, H.; ALTENBACH, J.; RIKARDS, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke - Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart, 1996
- [3] ALTSTÄDT, V.: *Prüfung von Verbundwerkstoffen*. In: GRELLMANN, W.; SEIDLER, S. (Eds.): *Kunststoffprüfung*. Kapitel 10, S. 537-589, Carl Hanser Verlag, München, 2005
- [4] ANSAR, M.; XINWEI, W.; CHOUWEI, Z.: *Modeling strategies of 3D woven composites - A review*. Composite Structures, Vol. 93, pp. 1947-1963, 2011
- [5] BADEL, P.; VIDAL-SALLÉ, E.; BOISSE, P.: *Computational determination of in-plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements*. Computational Material Science, Vol. 40, pp. 439-448, 2007
- [6] BALLHAUSE, D.: *Diskrete Modellierung des Verformungs- und Versagensverhaltens von Gewebemembranen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2007
- [7] BARBERO, E. J.: *Introduction to Composite Materials Design*. 2nd edition, CRC Press - Taylor & Francis Group, Boca Raton (FL)/London/New York, 2011
- [8] BARBERO, E. J.; TROVILLION, J.; MAYUGO, J. A.; SIKKIL, K. K.: *Finite Element Modeling of Plain Weave Fabrics from Photomicrograph Measurements*. Composite Structures, Vol. 73, No. 1, pp. 41-52, 2006
- [9] BARBERO, E. J.; LUCIANO, R.: *Micromechanics Formulas for the Relaxation Tensor of linear Viscoelastic Composites with Transversely Isotropic Fibers*. International Journal of Solid Structures, Vol. 32, pp. 1859-1872, 1995
- [10] BERT, C. W.: *Experimental Characterization of Composites*. In: BROUTMAN, L. J.; KROCK, R. H. (Eds.): *Composite Materials, Vol. 8, Structural Design and Analysis, edited by C. C. Chamis, Part II*. Chapter 9, pp. 73-133, Academic Press, New York/San Francisco/London, 1975
- [11] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik. Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2001
- [12] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik - Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1993
- [13] BOTELHO, E. C.; CAMPOS, A. N.; DE BARROS, E.; PARDINI, L. C.; REZENDE, M. C.: *Damping behavior of continuous fiber/metal composite materials by the free vibration method*. Composites: Part B, Vol. 37, pp. 255-263, 2006
- [14] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Einführung, Aufgaben, Lösungen*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin/Oxford, 1995
- [15] BODE, J.: *Die Ermittlung von Temperatureigenspannungszuständen in der Mikromechanik faserverstärkter Verbundwerkstoffe*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Neubiberg, 1996

- [16] BRINSON, H. F.; BRINSON, L. C.: *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity. An Introduction*. Springer Science+Business Media, New York, 2008
- [17] BRODKORB, A.: *Persönliche Mitteilungen*. Firma SGL Technologies GmbH (Meitingen), Meitingen/Regensburg, 2012
- [18] BRONSTEIN, I. N.; SEMENDAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2008
- [19] BUCHANAN, S.; GRIGORASH, A.; QUINN, J. P.; MCILLHAGGER, A. T.; YOUNG, C.: *Modeling the geometry of the repeat unit cell of three-dimensional weave architectures*. Journal of the Textile Institute, pp. 1-7, 2009
- [20] BÜSCHING, F.: *Combined Dispersion and Reflection Effects at Sloping Structures*. Proceedings of ICPMRDT- International Conference on Port and Marine R&D and Technology, Vol. I, pp. 410-418, Singapore, 2001
- [21] BÜSCHING, F.: *Komplexe Reflexionskoeffizienten für Wasserwellen zur Klassifizierung von Brandungseffekten an Küstenschutzbauwerken*. Die Küste, Vol. 78, pp. 235-258, 2011
- [22] BYUN, J.-H.: *The analytical characterization of 2-D braided textile composites*. Composites Science and Technology, Vol. 60, No. 5, pp. 705-716, 2000
- [23] CHAMIS, C. C.: *Impetus of composite mechanics on test methods for fiber composites*. In: SIH, G. C.; TAMUZH, V. P. (Eds.): *Proceedings of the 1st USA-USSR-Symposium Fracture of Composite Materials*. Riga, USSR, 4.-7. September 1978, Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands, pp. 329-348, 1979
- [24] CHAMIS, C. C.: *Simplified Composite Micromechanics Equations for Hygral, Thermal and Mechanical Properties*. NASA Technical Memorandum 83320, Prepared for the Thirty-eighth Annual Conference of the Society on the Plastics Industry (SPI), Reinforced Plastics/Composites Institute, Houston, Texas, February 7-11, pp. 1-10, 1983
- [25] CHAMIS, C. C.: *Simplified Composite Micromechanics Equations for Hygral, Thermal and Mechanical Properties*. SAMPE Quarterly, Vol. 15, No. 3, pp. 14-23, April 1984
- [26] CHANDRA, R.; SINGH, S. P.; GUPTA, K.: *Damping studies in fiber-reinforced composites - a review*. Composite Structures, Vol. 46, No. 1, pp. 41-51, 1999
- [27] CHOU, T.-W.; ITO, M.: *An Analytical and Experimental Study of Strength and Failure Behavior of Plain Weave Composites*. Journal of Composite Materials, Vol. 32, pp. 2-30, 1998
- [28] DRESIG, H.; FIDLIN, A.: *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme. Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese*. 3. Auflage, Springer Vieweg, Berlin/Heidelberg, 2014
- [29] EHRENSTEIN, G. W.: *Faserverbund-Kunststoffe - Werkstoffe, Verarbeitung, Eigenschaften*. 2. Auflage, Carl Hanser Verlag, München/Wien, 2006
- [30] EHRLICH, I.: *Impactverhalten schwach gekrümmter Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Neubiberg, 2004
- [31] EHRLICH, I.: *Leichtbau mit faserverstärkten Kunststoffen*. Skript zur Vorlesung, Ostbayerische Technische Hochschule (OTH) Regensburg, Regensburg, 2012
- [32] EHRLICH, I.: *Persönliche Mitteilungen*. Ostbayerische Technische Hochschule (OTH) Regensburg, Regensburg, 2013
- [33] EISENRIED, M.; JUNGBAUER, B.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *Influence of parameters of the production process on the material quality of unidirectionally reinforced prepregs*. Proceedings of the Applied Research Conference, Deggen-



- dorf, 17./18. October 2013, pp. 70-75, 2013, ISBN 978-3-8440-2274-2, doi:10.2370/9783844022742, In: ZIEMANN, O.; BOGNER, W.; MOTTOK, J. (Eds.): *Applied Research Conference 2013 - ARC 2013*. Shaker Verlag, Aachen/Herzogenrath, 2013, ISBN 978-3-8440-2274-2, doi:10.2370/9783844022742, <http://www.shaker.de/de/content/catalogue/index.asp?lang=de&ID=8&ISBN=978-3-8440-2274-2&search=yes>
- [34] EISENRIED, M.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.: *Methodische Konstruktion einer Einspannvorrichtung zur Dämpfungsmessung von stabförmigen Probekörpern aus faserverstärkten Kunststoffen*. Projektarbeit, Hochschule Regensburg (HS.R), Labor für Faserverbundtechnik, Regensburg, 2012
- [35] EISENRIED, M.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.: *Verfahrensentwicklung für reproduzierbare und vergleichbare unidirektionale Prepregs*. Masterthesis, Ostbayerische Technische Hochschule (OTH) Regensburg, Labor für Faserverbundtechnik, Regensburg, April 2014
- [36] EL MAHI, A.; ASSARAR, M.; SEFRANI, Y.; BERTHELOT, J.-M.: *Damping analysis of orthotropic composite materials and laminates*. Composites Part B, Vol. 39, pp. 1069-1076, 2008
- [37] EMMERLING, F. A.: *Ebene Flächentragwerke II*. Skript zur Vorlesung, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, 1994
- [38] FAHRMEIR, L.; KÜNSTLER, R.; PIGEOT, I.; TUTZ, G.: *Statistik - Der Weg zur Datenanalyse*. 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2004
- [39] FINEGAN, I. C.; GIBSON, R. F.: *Recent research on enhancement of damping in polymer composites*. Composite Structures, Vol. 44, pp. 89-98, 1999
- [40] FLEMMING, M.; ZIEGMANN, G.; ROTH, S.: *Faserverbundbauweisen - Fertigungsverfahren mit duroplastischer Matrix*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1999
- [41] FLEMMING, M.; ZIEGMANN, G.; ROTH, S.: *Faserverbundbauweisen - Halbzeuge und Bauweisen*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1996
- [42] FORSTER, O.: *Analysis 2*. 9. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011
- [43] FOYE, R. L.: *The transverse poisson's ratio of composites*. Journal of Composites Materials, Vol. 6, pp. 293-295, 1972
- [44] FURGIUELE, F.: *Persönliche Mitteilungen*. Università della Calabria, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica e Gestionale, Cosenza, 2011
- [45] GEBBEKEN, N.: *Eine Fliessgelenktheorie höherer Ordnung für räumliche Stabtragwerke (zugleich ein Beitrag zur historischen Entwicklung)*. Dissertation, Universität Hannover, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Hannover, 1988
- [46] GEBBEKEN, N.: *Persönliche Mitteilungen*. Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, Juli 2014
- [47] GEBBEKEN, N.: *Zur Untersuchung des linearen Tragverhaltens von Faserverbundkonstruktionen mittels numerischer Methoden*. Habilitation, Universität Hannover, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Hannover, 1996
- [48] GIBSON, R. F.: *Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures*. Composites Science and Technology, Vol. 60, pp. 2769-2780, 2000
- [49] GIBSON, R. F.: *Principles of Composite Material Mechanics*. 3rd edition, CRC Press, Boca Raton (Fl.), 2012
- [50] GRELLMANN, W.; SEIDLER, S.: *Kunststoffprüfung*. Carl Hanser Verlag, München, 2005
- [51] GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHNELL, W.; SCHRÖDER, J.: *Technische Mechanik 2 - Elastostatik*. 11. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2011

- [52] GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHRÖDER, J.; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 3 - Kinetik*. 10. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2008
- [53] GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHNELL, W.; WRIGGERS, W.: *Technische Mechanik 4 - Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2004
- [54] GROSS, M.: *Dynamik kontinuierlicher Systeme*. Skript zur Vorlesung, TU Chemnitz, Chemnitz, 2014
- [55] GUAN, H.: *Micromechanical analysis of viscoelastic damping in woven fabric-reinforced polymer matrix composites*. PhD-Thesis, Wayne State University, Detroit (Michigan), 1997, Paper AAI9725829, <http://digitalcommons.wayne.edu/dissertations/AAI9725829>
- [56] GUAN, H.; GIBSON, R. F.: *Micromechanical Models for Damping in Woven Fabric-Reinforced Polymer Matrix Composites*. Journal of Composite Materials, Vol. 35, No. 16, pp. 1417-1434, 2001
- [57] GUDLADT, H.-J.: *Persönliche Mitteilungen*. Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, Juli 2016
- [58] HAGEDORN, P.: *Technische Schwingungslehre. Band 2. Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1989
- [59] HANSELKA, H.: *Ein Beitrag zur Charakterisierung des Dämpfungsverhaltens polymerer Faserverbundwerkstoffe*. Dissertation, Technische Universität Clausthal, 1992
- [60] HASHIN, Z.: *Analysis of Composite Materials - A Survey*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 481-505, 1983
- [61] HIVET, G.; DUONG, A. V.: *A contribution to the analysis of the intrinsic shear behavior of fabrics*. Journal of Composite Materials, Vol. 45, No. 6, pp. 695-716, 2010
- [62] HIVET, G.; BOISSE, P.: *Consistent mesoscopic mechanical behavior model for woven composite reinforcements in biaxial tension*. Composites Part B: Engineering, Vol. 39, pp. 345-361, 2008
- [63] HOFFMANN, U.: *Zur Optimierung der Werkstoffdämpfung anisotroper polymerer Hochleistungs-Faserverbundstrukturen*. Dissertation, Technische Universität Clausthal, 1992
- [64] HOINKES, C.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *Investigation of fibre reinforced plastics with monolithic and hybrid stacking sequences under high-velocity impact loads*. Proceedings of the 4th Applied Research Conference, Ingolstadt, 5. July 2014, pp. 259-265, 2014, ISBN 978-3-8440-2875-1, In: ZIEMANN, O.; MOTTOK, J.; PFORR, J. (Eds.): *Applied Research Conference 2014 - ARC 2014*. Shaker Verlag, Aachen/Herzogenrath, 2014, ISBN 978-3-8440-2875-1, <http://www.shaker.de/de/content/catalogue/index.asp?lang=de&ID=8&ISBN=978-3-8440-2875-1&search=yes>
- [65] HUANG, Z. M.: *The mechanical properties of composites reinforced with woven and braided fabrics*. Composites Science and Technology, Vol. 60, No. 4, pp. 479-498, 2000
- [66] HWANG, S. J.; GIBSON, R. F.: *The Use of Strain Energy-Based Finite Element Techniques in the Analysis of Various Aspects of Damping of Composite Materials and Structures*. Journal of Composite Materials, Vol. 26, No. 17, pp. 2585-2605, 1992
- [67] ISHIKAWA, T.; CHOU, T.-W.: *One-Dimensional Micromechanical Analysis of Woven Fabric Composites*. AIAA Journal, Vol. 21, No. 12, pp. 1714-1721, 1983
- [68] JOHANSMANN, M.; SIEGMUND, G.; PINEDA, M.: *Targeting the Limits of Laser Doppler Vibrometry*. All Polytec, Vol. 39, pp. 1-12, 2005, [www.polytec.com](http://www.polytec.com)

- [69] JONES, R. M.: *Mechanics of composite materials*. 2nd edition, Taylor & Francis, Philadelphia (Pa.), 1999
- [70] JONES, R. M.: *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. Bull Ridge Publishing, Blacksburg (Virginia, USA), 2006
- [71] JUNGBAUER, B.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.: *Reproduzierbare Herstellung und definierte Vorschädigung von Probekörpern aus basaltfaserverstärktem Kunststoff zur Dämpfungsmessung*. Bachelorarbeit, Hochschule Regensburg (HS.R), Labor für Faserverbundtechnik, Regensburg, 2012
- [72] KADIOGLU, F.: *Measurement of Dynamic Properties of Composite in Vibration by Means of a Non-contact Mechanism*. Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 28, No. 12, pp. 1459-1466, 2009
- [73] KARNOVSKY, I. A.; LEBED, O. I.: *Non-classical Vibration of Arches and Beams. Eigenvalues and Eigenfunctions*. McGraw-Hill Engineering Reference, New York/Chicago/San Francisco, 2004
- [74] KASTENMEIER, A.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.: *Influence of fabric ondulation on the damping in transversal vibrations of flat composite specimens*. Masterthesis, Hochschule Regensburg (HS.R), Labor für Faserverbundtechnik, Regensburg, 2013
- [75] KEHL, K.: *Verfahren zur Bestimmung des Dämpfungsverhaltens anisotroper Verbundbauteile aus den Eigenschaften der Laminatekomponenten*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 1978
- [76] KLEIN, B.: *Leichtbau-Konstruktion - Berechnungsgrundlagen und Gestaltung*. 6. Auflage, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 2005
- [77] KLUG, J. L.: *Untersuchungen zum Dämpfungsverhalten von glasfaserverstärkten Kunststoffen*. Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule (RWTH), Institut für Leichtbau, Aachen, 1977
- [78] KNAUST, U.: *Zur Analyse und Optimierung von Faserverbund-Leichtbauteilen*. VDI-Fortschritts-Berichte, Reihe 20, Nr. 11, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1989
- [79] KREIKMEIER, J.; CHRUPALLA, D.; KHATTAB, I. A.; KRAUSE, D.: *Experimentelle und numerische Untersuchungen von CFK mit herstellungsbedingten Fehlstellen*. Proceedings of the 10. Magdeburger Maschinenbau-Tage, Magdeburg, 2011
- [80] KUMAR, P.; CHANDRA, R.; SINGH, S. P.: *Interphase Effect on Damping in Fiber Reinforced Composites*. ICCES, Vol. 4, No. 4, pp. 67-72, 2007
- [81] LANGE, D.: *Persönliche Mitteilungen*. Firma Lange+Ritter GmbH (Gerlingen), Gerlingen/Regensburg, 2012
- [82] LAUTERBORN, E.: *Persönliche Mitteilungen*. Wehrwissenschaftliches Institut für Werk- und Betriebsstoffe (WIWeB), Erding, Mai 2013
- [83] LE PAGE, B. H.; GUILD, F. J.; OGIN, S. L.; SMITH, P. A.: *Finite element simulation of woven fabric composites*. Composites: Part A, Vol. 35, No. 7-8, pp. 861-872, 2004, doi: 10.1016/j.compositesa.2004.01.017
- [84] MATSUDA, T.; NIMIYA, Y.; OHNO, N.; KAWAI, M.: *Elastic-Viscoplastic Behaviour of Plain-Woven GFRP Laminates: Analysis using Homogenization Theory*. Key Engineering Materials, Vol. 334-335, pp. 45-48, 2007
- [85] MATSUDA, T.; OHNO, N.; TANAKA, H.; SHIMIZU, T.: *Homogenized In-Plane Elastic-Viscoplastic Behavior of Long Fiber-Reinforced Laminates*. JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering, Vol. 45, pp. 538-544, 2002

- [86] MAZZEO, E.; TENUTA, G.; ROMANO, M.; EHRlich, I.; FURGIUELE, F.: *Determinazione di proprietà meccaniche delle fibre di basalto in matrice polimerica termoindurente in maniera distruttiva (usando materiali laminati e prepreg)*. Tesi di Specializzazione, Università della Calabria, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica e Gestionale, Cosenza, Marzo 2012
- [87] MERKEL, M.; ÖCHSNER, A.: *Eindimensionale Finite Elemente*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2010
- [88] MICHAELI, W.; HUYBRECHTS, D.; WEGENER, M.: *Dimensionieren mit Faserverbundwerkstoffen. Einführung und praktische Hilfen*. Carl-Hanser-Verlag, München, 1995
- [89] MICKLITZ, M.; ROMANO, M.; EHRlich, I.; GEBBEKEN, N.: *The influence of undulations in fabric reinforced layers on the damping properties of fibre-reinforced plastics*. Proceedings of the 4th Applied Research Conference, Ingolstadt, 5. July 2014, pp. 306-310, 2014, ISBN 978-3-8440-2875-1, In: ZIEMANN, O.; MOTTOK, J.; PFORR, J. (Eds.): *Applied Research Conference 2014 - ARC 2014*. Shaker Verlag, Aachen/Herzogenrath, 2014, ISBN 978-3-8440-2875-1, <http://www.shaker.de/de/content/catalogue/index.asp?lang=de&ID=8&ISBN=978-3-8440-2875-1&search=yes>
- [90] MITAL, S. K.; MURTHY, L. N.; CHAMIS, C. C.: *Simplified Micromechanics of Plain Weave Composites*. NASA Technical Memorandum 107165, pp. 1-12, March 1996, <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19960017575.pdf>
- [91] MISTOU, S.; KARAMA, M.: *Determination of the Elastic Properties of Composite Materials by Tensile Testing and Ultrasound Measurement*. Journal of Composite Materials, Vol. 34, No. 20, pp. 1696-1709, 2000
- [92] MOSER, K.: *Faser-Kunststoff-Verbund - Entwurfs- und Berechnungsgrundlagen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1992
- [93] MOTAVALLI, M.; FLÜELER, P.: *Characterization of unidirectional carbon fibre reinforced plastic laminates*. Materials and Structures/Matériaux et Constructions, Vol. 31, pp. 178-180, 1998
- [94] MÜLLER, W. H.; FERBER, F.: *Technische Mechanik für Ingenieure*. 4. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2012
- [95] N. N.: *ANSYS 14.0 Help*. Helpsystem of ANSYS Workbench Version 14.0.1, SAS IP Inc., Canonsburg, Pennsylvania (USA), 2011
- [96] N. N.: *Araldite LY 556/Aradur 917/Accelerator DY 070 - Hot Curing Epoxy Matrix System - Technisches Datenblatt*. Firma Huntsman Advanced Materials, 2007
- [97] N. N.: *ASTM D5379 / D5379M-12 - Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V-Notched Beam Method*. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2012, [www.astm.org](http://www.astm.org)
- [98] N. N.: *DIN 1311 - Schwingungen und schwingungsfähige Systeme - Teil 1-4*. Normenausschuß Technische Grundlagen (NATG) - Einheiten und Formelgrößen/Normenausschuß Akustik, Lärmdminderung und Schwingungstechnik (NALS) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 2000
- [99] N. N.: *DIN 53440 - Kunststoffe - Bestimmung dynamisch-mechanischer Eigenschaften - Teil 1: Prüfung von Kunststoffen und von schwingungsgedämpften geschichteten Systemen; Biegeschwingungsversuch; Allgemeine Grundlagen zur Bestimmung der dynamisch-elastischen Eigenschaften stab- oder streifenförmiger Probekörper*. Normenausschuß Kunststoffe (FNK) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V./Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im DIN, Beuth Verlag, Berlin, 1984

- [100] N. N.: *DIN 65071-1 - Faserverstärkte Formstoffe - Herstellung von Prüfplatten aus unidirektional gewickelten Garnen und Rovings*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 1992
- [101] N. N.: *DIN 65071-2 - Faserverstärkte Formstoffe - Herstellung von Prüfplatten aus flächenförmigen Verstärkungsstoffen*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 1992
- [102] N. N.: *DIN EN 2561 - Luft- und Raumfahrt - Kohlenstoffaserverstärkte Kunststoffe - Unidirektionale Lamine - Zugprüfung parallel zur Faserrichtung*. Normenausschuss Luft- und Raumfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 1995
- [103] N. N.: *DIN EN 2564 - Luft- und Raumfahrt - Kohlenstoffaserverstärkte Lamine - Bestimmung der Faser-, Harz- und Porenanteile*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 1998
- [104] N. N.: *DIN EN 2565 - Luft- und Raumfahrt - Herstellen von CFK-Prüfplatten*. Normenausschuss Luft- und Raumfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 2013
- [105] N. N.: *DIN EN 2747 - Luft- und Raumfahrt - Glasfaserverstärkte Kunststoffe - Zugversuch*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 1998
- [106] N. N.: *DIN EN 7000 - Luft- und Raumfahrt - Nichtmetallische Werkstoffe - Regeln für die Abfassung und Gestaltung von Werkstoffnormen - Teil 11: Prepregs*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 2000 (zurückgezogen 2009)
- [107] N. N.: *DIN EN ISO 1172 - Textilglasverstärkte Kunststoffe - Prepregs, Formmassen und Lamine - Bestimmung des Textilglas- und Mineralfüllstoffgehalts - Kalzinierungsverfahren*. Normenausschuss Kunststoffe (FNK) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V./Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN, Beuth Verlag, Berlin, 1998
- [108] N. N.: *DIN EN ISO 1183-1 - Kunststoffe - Verfahren zur Bestimmung der Dichte von nicht verschäumten Kunststoffen - Teil 1: Eintauchverfahren, Verfahren mit Flüssigkeitspyknometer und Titrationsverfahren*. Normenausschuss Kunststoffe (FNK) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 2010
- [109] N. N.: *DIN EN ISO 6721 - Kunststoffe - Bestimmung dynamisch-mechanischer Eigenschaften - Teil 3: Biegeschwingung Resonanzkurvenverfahren*. Normenausschuss Kunststoffe (FNK) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V./Normenausschuss Materialprüfung (NMP) im DIN, Beuth Verlag, Berlin, 1996
- [110] N. N.: *DIN EN ISO 14129 - Faserverstärkte Kunststoffe - Zugversuch an 45°-Laminen zur Bestimmung der Schubspannungs/Schubverformungs-Kurve des Schubmoduls in der Lagenebene*. Normenausschuss Kunststoffe (FKN) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V./Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN, Beuth Verlag, Berlin, 1998
- [111] N. N.: *DIN V 65352 - Luft- und Raumfahrt - Verfahren zur statistischen Auswertung der Prüfergebnisse bei der Qualifikations- und Abnahmeprüfung von Faserverbundwerkstoffen*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin, 1987
- [112] N. N.: *FujiFilm Prescale Measurement Film. Article Information Sheet* Technisches Datenblatt, Fa. FUJIFILM Corporation Japan, Februar 2007, <http://www.fujifilm.eu/de/produkte/industrieprodukte/prescale/>
- [113] N. N.: *Grundlagen der Vibrometrie*. [www.polytec.com/de](http://www.polytec.com/de)

- [114] N. N.: *HexPly M18/1 - 180 °C curing epoxy matrix - Product Data - Prepreg Properties - HexPly M18/1 G947 UD and G939 Woven Carbon Prepregs* Technisches Datenblatt, Fa. HEXCEL Corporation, März 2007, <http://www.hexcel.com>
- [115] N. N.: *MATLAB R2014a Documentation*. Documentation of MATLAB R2014a (Version 8.3), The MathWorks Inc., 2014, [www.mathworks.de](http://www.mathworks.de)
- [116] N. N.: *Polytec PSV 400 Vibrometer*. Technisches Datenblatt, o. O., o. J., [www.polytec.com/de](http://www.polytec.com/de)
- [117] N. N.: *Pyrofl TR50S 6K - Typical Fiber Properties*. Technisches Datenblatt, Firma Grafil Inc. Sacramento (CA) USA, Sacramento, 2008
- [118] N. N.: *Scholz Heißluftautoklav - Bedienungsanleitung*. Firma Scholz, Coesfeld, 2010
- [119] N. N.: *Sigratex KDK 8502/120 - Technisches Datenblatt*. Technisches Datenblatt, Firma SGL Technologies GmbH (Wackersdorf), Wackersdorf, 2012
- [120] N. N.: *Sigratex KDL 8501/120 - Technisches Datenblatt*. Technisches Datenblatt, Firma SGL Technologies GmbH (Wackersdorf), Wackersdorf, 2012
- [121] N. N.: *Style 404 Köpergewebe 2/2 - Technisches Datenblatt*. Technisches Datenblatt, Firma ECC Fabrics for Composites, C. Cramer Weberei GmbH & Co. KG, Heek, 2012
- [122] N. N.: *Style 427 Leinwandgewebe - Technisches Datenblatt*. Technisches Datenblatt, Firma ECC Fabrics for Composites, C. Cramer Weberei GmbH & Co. KG, Heek, 2012
- [123] N. N.: *Tenax HTS40 - Produktprogramm und Eigenschaften für Tenax HTA/HTS Filamentgarn*. Technisches Datenblatt, Firma Toho Tenax Europe GmbH, Wuppertal, 2008
- [124] N. N.: *VDI 2014 - Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund - Blatt 3: Berechnungen*. VDI-Richtlinien, Beuth Verlag, Berlin, September 2006
- [125] N. N.: *VDI 3830 - Werkstoff- und Bauteildämpfung - Blatt 1-5*. Guideline, VDI-Handbuch Schwingungstechnik, Ausschuss Werkstoff- und Bauteildämpfung im Verein Deutscher Ingenieure (VDI)-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, Düsseldorf, 2004
- [126] NAIK, N. K.; SHEMBEKAR, P. S.: *Elastic Behavior of Woven Fabric Composites: I-Lamina Analysis*. Journal of Composite Materials, Vol. 26, No. 15, pp. 2196-2225, 1992, doi: 10.1177/002199839202601502
- [127] NAKANISHI, Y.; MATSUMOTO, K.; ZAKO, M.; YAMADA, Y.: *Finite element analysis of vibration damping for woven fabric composites*. Key Engineering Materials, Vols. 334-335, pp. 213-216, 2007
- [128] NEITZEL, M.; MITSCHANG, P.; BREUER, U.: *Handbuch Verbundkunststoffe. Werkstoffe, Verarbeitung, Anwendung*. 2. Auflage, Carl-Hanser-Verlag, München, 2014,
- [129] OTTAWA, P.; ROMANO, M.; WAGNER, M.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *The influence of ondulation in fabric reinforced composites on dynamic properties in a mesoscopic scale in composites reinforced with fabrics on the damping behavior*. Proceedings of the 11. LS-DYNA Forum, Ulm, 9./10. October 2012, pp. 171-172, 2012, In: N. N.: *Proceedings of the 11. LS-DYNA Forum 2012*. DYNAmore GmbH (Hrsg.), Stuttgart, ISBN 3-9809901-9-2, <http://www.dynamore.de/de/download/papers/ls-dyna-forum-2012>
- [130] PAPULA, L.: *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 9. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006
- [131] PASTORE, C. M.; GOWAYED, Y. A.: *A Self-Consistent Fabric Geometry Model: Modification and Application of a Fabric Geometry Model to Predict the Elastic Properties of Textile Composites*. Journal of Composites Technology and Research, Vol. 16, No. 1, pp. 32-36, 1994, [http://www.astm.org/DIGITAL\\_LIBRARY/JOURNALS/COMPTECH/PAGES/CTR10392J.htm](http://www.astm.org/DIGITAL_LIBRARY/JOURNALS/COMPTECH/PAGES/CTR10392J.htm)

- [132] PETRY, D.: *Theoretische, numerische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Beulverhalten von Rechteckplatten*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, Institut für Leichtbau, Neubiberg, 2002
- [133] POPOV, V. L.: *Technische Mechanik III*. Skript zur Vorlesung, TU Berlin, 2012
- [134] RAUH, M.: *Persönliche Mitteilungen.*, Firma Huntsman Advanced Materials (Deutschland) GmbH, Bad Säckingen/Regensburg, 2012
- [135] ROLFES, R.; ROHWER, K.: *Improved transverse shear stiffness in composite finite elements based on first order shear deformation theory*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, No. 1, pp. 51-60, January 1997, doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19970115)40:1<51::AID-NME49>3.0.CO;2-3
- [136] ROMANO, M.; EISENRIED, M.; JUNGBAUER, B.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *Influence of parameters of the production process on the material quality of unidirectionally reinforced prepregs*. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering (JAMME), Vol. 68, No. 1, pp. 32-44, January 2015, ISSN 1734-8412, <http://www.journalamme.org/index.php?id=259>, [http://www.journalamme.org/vol68\\_1/6815.pdf](http://www.journalamme.org/vol68_1/6815.pdf)
- [137] ROMANO, M.; HOINKES, C.; EHRLICH, I.; HÖCHERL, J.; GEBBEKEN, N.: *Experimental investigation of fibre reinforced plastics with hybrid layups under high-velocity impact loads*. Frattura ed Integrità Strutturale (Fracture and Structural Integrity), Vol. 8, No. 29, pp. 385-398, July 2014, ISSN 1971-8993, doi:10.3221/IGF-ESIS.29.34, <http://www.fracturae.com/index.php/fis/article/view/IGF-ESIS.29.34>, <http://www.fracturae.com/index.php/fis/article/view/IGF-ESIS.29.34/1219>, <http://www.fracturae.com/index.php/fis/article/download/IGF-ESIS.29.34/1219>
- [138] ROMANO, M.; HOINKES, C.; EHRLICH, I.; HÖCHERL, J.; GEBBEKEN, N.: *Influence of the impactor on the experimentally determined energy dissipation properties of fiber reinforced plastics with hybrid layups under high velocity impact loads*. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering (JAMME), Vol. 64, No. 1, pp. 5-19, May 2014, ISSN 1734-8412, <http://www.journalamme.org/index.php?id=251>, [http://www.journalamme.org/vol64\\_1/6411.pdf](http://www.journalamme.org/vol64_1/6411.pdf),
- [139] ROMANO, M.; HOINKES, C.; EHRLICH, I.; HÖCHERL, J.; GEBBEKEN, N.: *Influence of the impactor on the experimentally determined energy dissipation properties of fiber reinforced plastics with hybrid layups under high velocity impact loads*. Proceedings of the 15th International Materials Symposium (IMSP'2014), Pamukkale University (Denizli, Turkey), 15./17. October 2014, pp. 650-664, In: MERAN, C. (ed.): *Proceedings of the 15th International Materials Symposium (IMSP'2014)*. Pamukkale University (Denizli, Turkey), 15./17. October 2014, [http://imsp.pau.edu.tr/IMSP2014\\_Proceedings\\_Final\\_security.pdf](http://imsp.pau.edu.tr/IMSP2014_Proceedings_Final_security.pdf)
- [140] ROMANO, M.; MICKLITZ, M.; OLBRICH, F.; BIERL, R.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *Experimental investigation of damping properties of unidirectionally and fabric reinforced plastics by the free decay method*. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering (JAMME), Vol. 63, No. 2, pp. 65-80, April 2014, ISSN 1734-8412, <http://www.journalamme.org/index.php?id=250>, [http://www.journalamme.org/vol63\\_2/6323.pdf](http://www.journalamme.org/vol63_2/6323.pdf)
- [141] ROMANO, M.; MICKLITZ, M.; OLBRICH, F.; BIERL, R.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *Experimental investigation of damping properties of unidirectionally and fabric reinforced plastics by the free decay method*. Proceedings of the 15th International Materials Symposium (IMSP'2014), Pamukkale University (Denizli, Turkey), 15./17. October 2014, pp. 665-679, In: MERAN, C. (ed.): *Proceedings of the 15th International Materials Symposium (IMSP'2014)*. Pamukkale University (Denizli, Turkey), 15./17. October 2014, [http://imsp.pau.edu.tr/IMSP2014\\_Proceedings\\_Final\\_security.pdf](http://imsp.pau.edu.tr/IMSP2014_Proceedings_Final_security.pdf)

- [142] SCHMID, V.; JUNGBAUER, B.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *Diminution of mass of different types of fibre reinforcements due to thermal load*. Proceedings of the Applied Research Conference, Nürnberg, 25./26. Juni 2012, pp. 231-235, 2012, ISBN-10 3844010939, ISBN-13 978-3844010930, doi:10.2370/9783844010930, [http://bvbr.bib-bvb.de:8991/F?func=service&doc\\_library=BVB01&doc\\_number=025476950&line\\_number=0001&func\\_code=DB\\_RECORDS&service\\_type=MEDIA](http://bvbr.bib-bvb.de:8991/F?func=service&doc_library=BVB01&doc_number=025476950&line_number=0001&func_code=DB_RECORDS&service_type=MEDIA), In: MOTTOK, J.; ZIEMANN, O. (Eds.): *Applied Research Conference 2012 - ARC 2012*. Shaker Verlag, Aachen/Herzogenrath, 2012, ISBN 978-3-8440-1093-0, doi:10.2370/9783844010930, <http://www.shaker.de/de/content/catalogue/index.asp?lang=de&ID=8&ISBN=978-3-8440-1093-0>
- [143] SCHMID, V.; JUNGBAUER, B.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *The influence of different types of fabrics on the fibre volume content and porosity in basalt fibre reinforced plastics*. Proceedings of the Applied Research Conference, Nürnberg, 25./26. Juni 2012, pp. 231-235, 2012, ISBN-10 3844010939, ISBN-13 978-3844010930, doi:10.2370/9783844010930, [http://bvbr.bib-bvb.de:8991/F?func=service&doc\\_library=BVB01&doc\\_number=025476950&line\\_number=0001&func\\_code=DB\\_RECORDS&service\\_type=MEDIA](http://bvbr.bib-bvb.de:8991/F?func=service&doc_library=BVB01&doc_number=025476950&line_number=0001&func_code=DB_RECORDS&service_type=MEDIA), In: MOTTOK, J.; ZIEMANN, O. (Eds.): *Applied Research Conference 2012 - ARC 2012*. Shaker Verlag, Aachen/Herzogenrath, 2012, ISBN 978-3-8440-1093-0, doi:10.2370/9783844010930, <http://www.shaker.de/de/content/catalogue/index.asp?lang=de&ID=8&ISBN=978-3-8440-1093-0>
- [144] SCHMIDT, A.; GAUL, L.: *Experimental Determination and Modeling of Material Damping*. Proceedings VDI-Tagung Schwingungsdämpfung, Wiesloch, 16.-17. Oktober 2007, VDI-Berichte, Nr. 2003, pp. 17-40, 2007
- [145] SCHMIDT, A.: *Finite-Elemente-Formulierungen viskoelastischer Werkstoffe mit fraktionalen Zeitableitungen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik, Stuttgart, 2003
- [146] SCHMIDTCHEN, A.: *Aufbau eines Laser-Vibrometer-Messsystems zur Hochtemperatur-Charakterisierung von Sensorkomponenten*. Dissertation, Technische Universität Clausthal, Fakultät für Natur- und Materialwissenschaften, Clausthal, 2013
- [147] SCHULTZ, A. B.; TSAI, S. W.: *Dynamic Moduli and Damping Ratios in Fiber-Reinforced Composites*. Journal of Composite Materials, Vol. 2, No. 3, pp. 368-379, July 1968
- [148] SCHULTZ, A. B.; TSAI, S. W.: *Measurements of Complex Dynamic Moduli for Laminated Fiber-Reinforced Composites*. Journal of Composite Materials, Vol. 3, pp. 434-443, July 1969
- [149] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2005
- [150] SILBERBERGER, F.: *Technische Schwingungslehre und Maschinendynamik*. Skript zur Vorlesung, Hochschule Esslingen, 2008
- [151] STELLBRINK, K. K. U.: *Micromechanics of composites - Composite properties of fibre and matrix constituents*. Hanser Verlag, München, 1996
- [152] SUN, C. T.; RAO, V. S.; SANKAR, B. V.: *Passive damping of prestressed composite structures*. Acta Mechanica Solida Sinica (English Edition), Vol. 5, No. 3, pp. 286-299, 1992
- [153] SZABLEWSKI, P.: *Sinusoidal Model of Fiber-reinforced Plastic Composite*. Journal of Industrial Textiles, Vol. 38, No. 4, pp. 277-288, April 2009, doi:10.1177/1528083708098914
- [154] SZABO, I.: *Einführung in die Technische Mechanik - Nach Vorlesungen*. 8. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2003



- [155] SZABO, I.: *Höhere Technische Mechanik - Nach Vorlesungen*. 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2001
- [156] TABIEI, A.; YI, W.: *Comparative study of predictive methods for woven fabric composite elastic properties*. Composite Structures, Vol. 58, No. 1, pp. 149-164, October 2002, doi: 10.1016/S0263-8223(02)00028-4
- [157] TAUCHERT, TH. R.: *Internal Damping in a Fiber-Reinforced Composite Material*. Journal of Composite Materials, Vol. 8, No. 2, pp. 195-199, 1974
- [158] TISCHHÖFER, H.: *Persönliche Mitteilungen*. Universität Regensburg, Fakultät für Chemie & Pharmazie, Feinmechanische Werkstatt, Regensburg, 2012
- [159] TREVISIO, P.; MUMOLI, A.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.; FURGIUELE, F.: *Investigazioni numeriche di una cinematica mesomeccanica tramite calcolazioni con elementi finiti (FEM) basati su elementi volumetrici rappresentativi (RVE)*. Tesi di Specializzazione, Università della Calabria, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica e Gestionale, Cosenza, Febbraio 2013
- [160] TSAI, J.-L.; CHI, Y.-K.: *Effect of fiber array on damping behaviors of fiber composites*. Composites Part B, Vol. 39, pp. 1196-1204, 2008
- [161] TSAI, S. W.; HAHN, H. T.: *Introduction to Composite Materials*. Technomic, 1980
- [162] UNGAR, E. E.; KERVIN, E. M.: *Loss Factors of Viscoelastic Systems in Terms of Strain Energy*. Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 34, No. 2, pp. 954-958, 1962
- [163] VALENTINO, P.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.; FURGIUELE, F.; GEBBEKEN, N.: *Mechanical characterization of basalt fibre reinforced plastic with different fabric reinforcements - Tensile tests and FE-calculations with representative volume elements (RVEs)*. Acta Fracturae - XXII Convegno Nazionale IGF (Italiano Gruppo Frattura), Roma, 1.-3. July 2013, pp. 231-244, 2013, ISBN 978-88-95940-47-2, ISSN 2281-1443, <http://www.gruppofrattura.it/ocs/index.php/cigf/IGF22/paper/view/10914/10241>, In: IACOVELLO, F.; RISITANO, G.; SUSMEL, L. (Eds.): *Acta Fracturae - XXII Convegno Nazionale IGF (Italiano Gruppo Frattura)*. Roma, 1.-3. July 2013, ISBN 978-88-95940-47-2, ISSN 2281-1443, <http://www.gruppofrattura.it/pdf/convegni/22/IGFXXII/index.html#/242/>
- [164] VALENTINO, P.; SGAMBITTERRA, E.; FURGIUELE, F.; ROMANO, M.; EHRLICH, I.; GEBBEKEN, N.: *Mechanical characterization of basalt woven fabric composites: numerical and experimental investigation*. Frattura ed Integrità Strutturale (Fracture and Structural Integrity), Vol. 8, No. 28, pp. 1-11, April 2014, ISSN 1971-8993, doi:10.3221/IGF-ESIS.28.01, <http://www.gruppofrattura.it/ors/index.php/fis/article/view/1229>, <http://www.gruppofrattura.it/ors/index.php/fis/article/view/1229/1182>, <http://www.gruppofrattura.it/ors/index.php/fis/article/download/1229/1182>
- [165] VANTOMME, J.: *A parametric study of material damping in fibre-reinforced plastics*. Composites, Vol. 26, pp. 147-153, 1995
- [166] VASILIEV, V. V.; MOROZOV, E. V.: *Advanced Mechanics of Composite Materials*. Elsevier, Oxford/Amsterdam, 2007
- [167] WEIGAND, A.: *Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen. Band III. Schwingungen fester Kontinua (Stäbe und Platten)*. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1962
- [168] WIELAGE, B.; MÜLLER, T.; LAMPKE, T.; RICHTER, U.; KIESELSTEIN, E.; LEONHARDT, G.: *Simulation der elastischen Eigenschaften gewebeverstärkter Verbundwerkstoffe unter Berücksichtigung der Mikrostruktur*. Proceedings of the 15. Symposium Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde, Kassel, 6.-8. April 2005, S. 441-446, ISBN 3-88355-340-9, [http://www.dgm.de/download/tg/706/706\\_77.pdf](http://www.dgm.de/download/tg/706/706_77.pdf), In: SCHLIMMER, M. (Hrsg.): *Proceedings of the 15. Symposium Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde*. Kassel, 6.-8. April 2005,

- Wiley VCH Verlag, Weinheim, 2005, S. 441-446, ISBN 3-88355-340-9, [http://www.dgm.de/download/tg/706/706\\_77.pdf](http://www.dgm.de/download/tg/706/706_77.pdf)
- [169] WITTEN, E. (Hrsg.): *Handbuch Faserverbundkunststoffe. Grundlagen, Verarbeitung, Anwendungen*. Vieweg+Teubner/AVK - Industrievereinigung Kunststoffe e. V., Wiesbaden, 2010
- [170] WU, Z. J.: *Three-dimensional exact modeling of geometric and mechanical properties of woven composites*. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 22, No. 5, pp. 479-486, 2009

# Anhang

## A.1 Reproduzierbarkeit, Parameteridentifikation und Sensitivitätsanalyse

Im Zuge von Voruntersuchungen wird die Reproduzierbarkeit der Versuchsdurchführung untersucht und nachgewiesen. Dabei werden geeignete bzw. technisch sinnvolle Parameter identifiziert. Zusätzlich wird die Sensitivität der ausgewerteten Ergebnisse bezüglich definiert variiertes experimenteller Randbedingungen analysiert.

### Positionier- und Einspannvorgang

Die Reproduzierbarkeit des Positionier- und Einspannvorganges ist untersucht worden, indem der gleiche Probekörper fünfmal hintereinander positioniert, mit 12,5 Nm Drehmoment eingespannt, vermessen und wieder ausgespannt worden ist. In diesem Falle dient der empirische Variationskoeffizient  $v$  des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  und der Grundfrequenz  $f$  der fünf Messungen als Indikator für die Reproduzierbarkeit und Sensitivität. Im Falle des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  beträgt er  $v_\Lambda = 1,02\%$ . Die Grundfrequenz weist  $f$  keine Standardabweichung auf. Der Grund hierfür ist der angewendete FFT-Algorithmus mit seiner diskreten Auflösung im Frequenzbereich. Eventuelle Streuungen der Grundfrequenz sind also in jedem Fall kleiner als die Auflösung der FFT im Frequenzbereich. Diese beträgt mit den angewendeten messtechnischen Parametern (vgl. Abschnitt 10.5.3)  $f_r = 78,125$  mHz [116]. Mit dem sehr geringen Betrag des empirischen Variationskoeffizienten des logarithmischen Dekrements  $v_\Lambda$  und der, in der gewählten Auflösung der FFT, nicht detektierbaren Streuung der Grundfrequenz ist die Reproduzierbarkeit des Positionier- und Einspannvorgangs bzw. der Versuchsdurchführung selbst nachgewiesen.

### Flächenpressung in der Klemmfuge

Die Verteilung der Flächenpressung in der Klemmfuge zwischen Stempel und Probekörper ist untersucht worden. Dafür sind Druckmessfolien PRESSCALE von FUJIFILM [112] verwendet worden. Diese werden in eine Klemmfuge eingelegt. Die Druckmessfolien sind mit mikroskopisch kleinen Farbkügelchen besetzt. Wenn diese intakt sind, sind die Druckmessfolien trüb transparent. Wo durch aufgebrachtem Druck verursachte Flächenpressung  $p$  auftritt, platzen die Farbkügelchen, und setzen die in ihnen enthaltenen rote Farbe frei. Damit lösen die Druckmessfolien die maximal in der Klemmfuge aufgetretene Flächenpressung  $p$  in der Größe der mikroskopischen Farbkügelchen auf, und sind nicht wiederverwendbar.

Die Druckmessfolien sind in die Klemmfuge zwischen Stempel und Probekörper eingelegt worden. Die Positionierung, Orientierung und Einspannung des Probekörpers ist, wie in Abschnitt 10.4.2 beschrieben, erfolgt. Anschließend ist der Probekörper wieder ausgespannt worden. Die Druckmessfolie stellt die bei jedem untersuchten Anzugsdrehmoment  $M_A$  maximal aufgetretene Flächenpressung  $p$  dar. Im Detail sind sieben ausgewählte Drehmomente  $M_A = 5,0$  Nm ... 20,0 Nm in Schritten von 2,5 Nm bei drei Probekörpern mit jeweils unterschiedlicher Faserverstärkung (unidirektional-, leinwandgewebe- und köpergewebe-2/2-verstärkt) untersucht worden. Abbildung A.1 zeigt die Druckmessfolien zur Darstellung der maximal in der Klemmfuge zwischen Stempel und Probekörper aufgetretenen Flächenpressung  $p$ . Dabei sind die sieben ausgewählten Drehmomente  $M_A = 5,0$  Nm ... 20,0 Nm in Schritten von 2,5 Nm von oben nach unten aufsteigend dargestellt. Die drei Probekörper mit jeweils unterschiedlicher Faserverstärkung (unidirektional, leinwandgewebe- und köpergewebe-2/2-verstärkt) sind von links nach rechts angeordnet.

Die Druckmessfolien sind so angeordnet, dass die Auskragrichtung der Probekörper rechts ist.

Aufgrund der durch das Anzugsdrehmoment  $M_A$  verursachte Flächenpressung  $p$  in der Klemmfuge sind zwei unterschiedliche Messbereiche der Druckmessfolien verwendet worden. Im Detail sind dies FUJIFILM PRESSCALE LW mit einem Messbereich von  $p = 2,5 \text{ MPa} \dots 10,0 \text{ MPa}$  für die beiden geringeren Drehmomente  $M_A$  und FUJIFILM PRESSCALE LW mit einem Messbereich von  $p = 10,0 \text{ MPa} \dots 50,0 \text{ MPa}$  für die höheren Drehmomente  $M_A$ . Dieser Umstand bedingt die unterschiedlichen bzw. entgegengesetzten Intensitäten der roten Farbe, und damit die stärkere Intensität bei den beiden geringeren Anzugsdrehmomenten  $M_A$  und die geringere Intensität bei den höheren Anzugsdrehmomenten  $M_A$ .

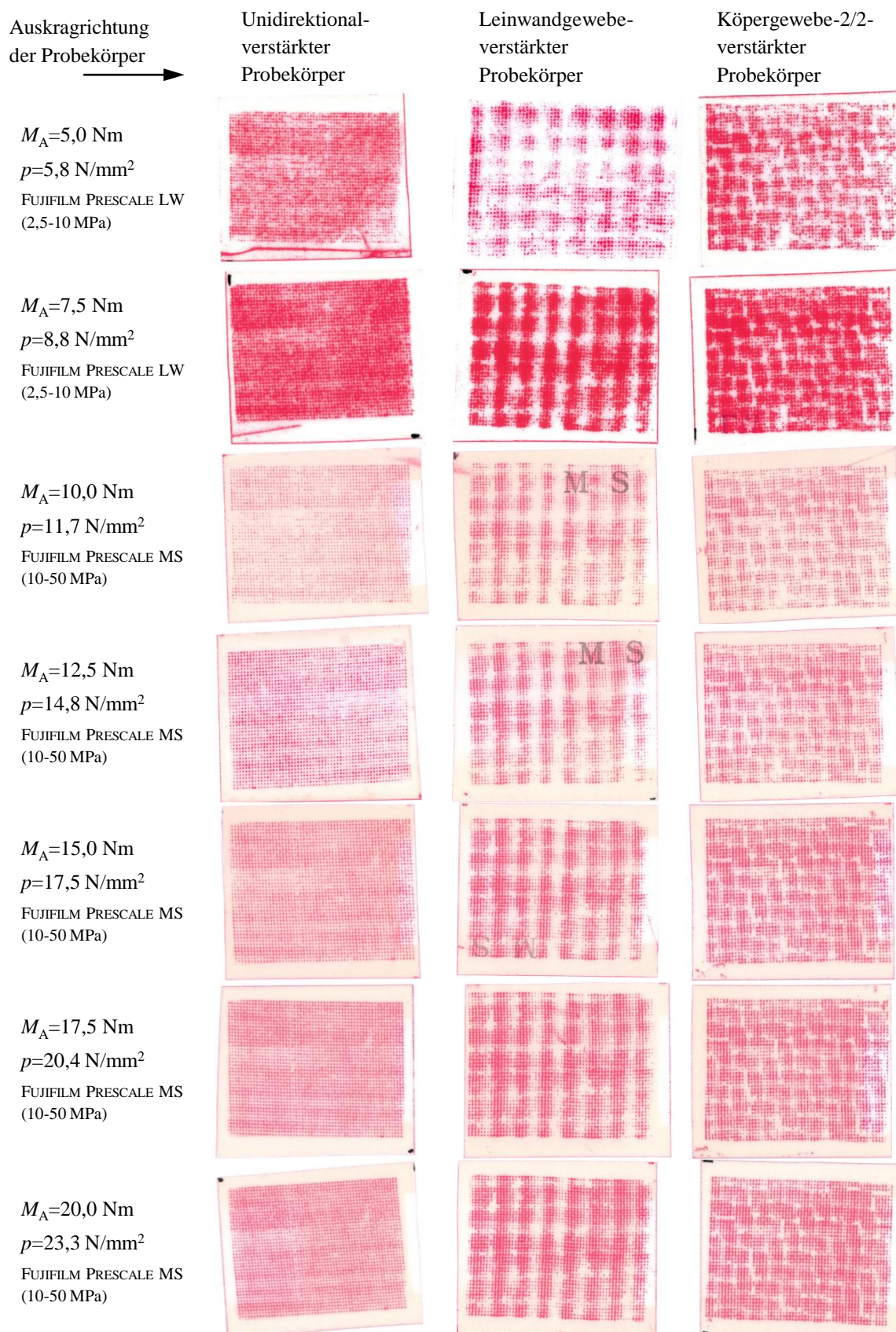
Die drei Probekörper mit jeweils unterschiedlicher Faserverstärkung zeigen eine charakteristische Verteilung der Flächenpressung in der Klemmfuge. Während die Verteilung der Flächenpressung bei den unidirektional verstärkten Probekörpern verhältnismäßig homogen ist, zeigen die Verteilungen der Flächenpressung bei den beiden gewebeverstärkten Probekörpern die für die jeweilige Gewebeverstärkung charakteristisches Muster. Im Detail tritt an den Kreuzungspunkten der sich ondulierenden Kett- und Schussstränge der obersten Einzellage eine verhältnismäßig höhere Flächenpressung auf. In jedem Fall ist die Flächenpressung insgesamt homogen verteilt, und die Kante in Auskragrichtung stets definiert. Die Ergebnisse der Untersuchungen der Verteilung der Flächenpressung in der Klemmfuge zwischen Stempel und Probekörper mit Druckmessfolien weisen die korrekte Funktion sowie die Reproduzierbarkeit des in Abbildung 10.9 in Abschnitt 10.4.2 dargestellten Mechanismus zur definierten und reproduzierbaren Klemmung des Probekörpers über die Entkopplung der Rotationsbewegung der Gewindestange von der Translationsbewegung des Stempels durch das Kugelgelenk nach. Zusätzlich weist die definierte Kante in Auskragrichtung die korrekte Funktion sowie die Reproduzierbarkeit der Positionierung, Orientierung und Einspannung des Probekörpers nach.

### Drehmoment zur Klemmung des Probekörpers

Die Sensitivität der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen bezüglich des Drehmoments zur Klemmung des Probekörpers ist untersucht worden, indem der gleiche Probekörper positioniert, mit dem ausgewählten Drehmoment eingespannt, fünfmal hintereinander vermessen und wieder eingespannt worden ist. Die ausgewählten Drehmomente zur Klemmung des Probekörpers sind 5 Nm, 10 Nm, 12,5 Nm, 15 Nm und 20 Nm. In diesem Fall wird für jedes gewählte Drehmoment der arithmetischen Mittelwert des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  und der Grundfrequenz  $f$  der fünf aufeinanderfolgenden Messungen ermittelt. Der Vergleich der Mittelwerte der beiden strukturdynamischen Kennwerte, logarithmisches Dekrement  $\Lambda$  und Grundfrequenz  $f$ , für jedes gewählte Drehmoment liefert schließlich eine qualitative Aussage bezüglich der Sensitivität der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen auf das Drehmoment zur Klemmung des Probekörpers.

Im Detail wird die Differenz der Ergebnisse des jeweiligen Kennwerts beim höchsten Drehmoment von 20 Nm auf die Ergebnisse beim niedrigsten Drehmoment von 5 Nm bezogen,  $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda_{5 \text{ Nm}}} = \frac{\Lambda_{20 \text{ Nm}} - \Lambda_{5 \text{ Nm}}}{\Lambda_{5 \text{ Nm}}}$  bzw.  $\frac{\Delta f}{f_{5 \text{ Nm}}} = \frac{f_{20 \text{ Nm}} - f_{5 \text{ Nm}}}{f_{5 \text{ Nm}}}$ . Es ergibt sich ein um 5,4 % niedrigeres logarithmisches Dekrement  $\Lambda$  bzw. eine um 1,6 % höhere Grundfrequenz  $f$ . Ein erhöhtes Drehmoment zur Klemmung des Probekörpers wirkt sich also erniedrigend auf das ermittelte logarithmische Dekrement  $\Lambda$  und erhöhend auf die ermittelte Grundfrequenz  $f$  aus. Dabei ist das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  sensitiver auf die Variation des Drehmoments zur Klemmung des Probekörpers (zumindest im Bereich der untersuchten Drehmomente von 5 Nm bis 20 Nm) als die ermittelte Grundfrequenz  $f$ .

Die Abnahme des ermittelten logarithmischen Dekrements lässt sich durch die Reduktion von Relativbewegungen und damit Reibungseffekten in der Klemmfläche (v. a. in der Nähe der Kante der Auskragrichtung) bei erhöhter Klemmkraft, und damit erhöhter Flächenpressung in der Fuge, zurückführen. Die Zunahme der ermittelten Grundfrequenz  $f$  lässt sich durch die Zu-



**Abbildung A.1:** Druckmessfolien zur Darstellung der Flächenpressung  $p$  in der Klemmfuge bei den sieben ausgewählten Drehmomenten  $M_A = 5,0 \text{ Nm} \dots 20,0 \text{ Nm}$  in Schritten von  $2,5 \text{ Nm}$  (von oben nach unten) zur Klemmung der unidirektional, leinwandgewebe- und köpergewebe-2/2-verstärkten Probekörper (von links nach rechts) mit Auskragrichtung nach rechts.

nahme der Steifigkeit der Einspann- und Anregevorrichtung durch einen Vorspannungs- bzw. Verspannungseffekt zurückführen. Die Vermeidung bzw. Reduktion der dämpfungserhöhenden Reibungseffekte (und damit Nichtlinearitäten) aufgrund von Relativbewegungen in der Fuge auf ein konstantes Minimum erfordert eine möglichst hohe Flächenpressung in der Klemmfuge zwischen Stempel und Probekörper bzw. zwischen Probekörper und Auflagefläche. Um jedoch das Material des Probekörpers im Bereich der Klemmung durch die Flächenpressung bzw. durch evtl. Randeffekte durch die Kante des Stempels bzw. der Auflagefläche nicht zu beschädigen, ist für alle durchgeführten Messungen ein Drehmoment zur Klemmung des Probekörpers von 12,5 Nm gewählt worden, wie in Abschnitt 10.5.1 beschrieben.

### Betrag der Weganregung

Die Sensitivität der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen bezüglich des Betrags der Weganregung ist untersucht worden, indem der gleiche Probekörper positioniert, mit 12,5 Nm Drehmoment eingespannt, fünfmal hintereinander angeregt und vermessen worden ist. Der Betrag der Weganregung ist dabei iterativ definiert worden. Dabei wird gefordert, dass ausschließlich der linear viskoelastische Bereich des Materialverhaltens in den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen betrachtet wird. Zur Verifizierung der zuvor formulierte Annahme bzw. Forderung sowie zur Identifikation eines geeigneten Betrags der Weganregung wird das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  nach Gleichung (11.8) für jede der fünf aufeinanderfolgenden strukturdynamischen Untersuchungen der Probekörper in fünf gleichlangen Zeitintervallen bzw. sog. isochronen Intervallen

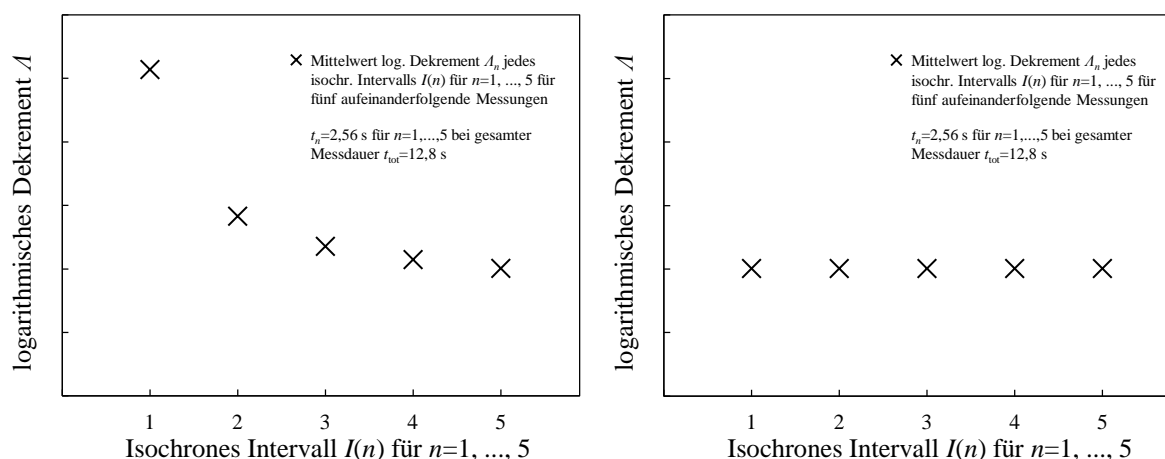
$$I(n) = \left[ \frac{t_{\text{tot}}}{5} \cdot (n-1), \frac{t_{\text{tot}}}{5} \cdot (n) \right] \quad \text{für} \quad n = 1, \dots, 5 \quad (\text{A.1})$$

ausgewertet. Dabei ist  $t$  die Zeit,  $n$  der Zähler des jeweiligen Intervalls (hier:  $n = 1, \dots, 5$ ) und der Index tot bezeichnet die gesamte Messdauer. Mit der in Abschnitt 10.5.3 definierten gesamten Messdauer von  $t_{\text{tot}} = 12,8 \text{ s}$  beträgt die Zeitdauer jedes isochronen Intervalls  $t_n = 2,56 \text{ s}$ . Die Auswertung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  erfolgt mit der ersten und der letzten positiven Amplitude. Dies ermöglicht die detaillierte Betrachtung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda_n$  für jedes der isochronen Intervalle  $I_n$ , und dabei über den Verlauf der gesamten Messdauer  $t_{\text{tot}}$ .

Da die Probekörper eine Dicke von ca.  $h \approx 2 \text{ mm}$  aufweisen, ist zunächst mit einer absolut gleichen Auslenkung  $w = h \approx 2 \text{ mm}$  angeregt worden. In diesem Fall beträgt das Verhältnis von Auslenkung zu Dicke des Probekörpers  $w/h \approx 1$ . In diesem Fall weist der arithmetischen Mittelwert des logarithmischen Dekrements  $\Lambda_n$  für  $n = 1, \dots, 5$  über die chronologische Abfolge der fünf isochronen Intervalle  $I_n$  für  $n = 1, \dots, 5$  eine tendenzielle Abnahme auf. Dabei sind die ermittelten Werte des logarithmischen Dekrements im ersten und zweiten Intervall  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$  noch deutlich höher als die drei darauf folgenden Werte  $\Lambda_3$ ,  $\Lambda_4$  und  $\Lambda_5$ . Die zugehörigen Standardabweichungen verhalten sich analog, sind jedoch in ihrem Betrag trotzdem sehr gering. Im Gegensatz dazu sind die zugehörigen empirischen Variationskoeffizienten mit  $v_{\Lambda,n} \approx 0,36 \%$  für  $n = 1, \dots, 5$  nahezu konstant, da der Kennwert ein relatives Streuungsmaß ist. Für eine dimensionslose Betrachtung wird in diesem Fall die Differenz der Ergebnisse des logarithmischen Dekrements  $\Lambda_n$  für  $n = 1, \dots, 5$  in den fünf isochronen Intervallen auf den Wert des logarithmischen Dekrements des fünften Intervalls  $\Lambda_5$  bezogen,  $\frac{\Delta\Lambda_n}{\Lambda_5} = \frac{\Lambda_n - \Lambda_5}{\Lambda_5}$  für  $n = 1, \dots, 5$ .

Der erste ermittelte Wert  $\Lambda_1$  ca. 156 % höher, der zweite  $\Lambda_2$  ca. 41 % höher, der dritte  $\Lambda_3$  ca. 17 % höher und der  $\Lambda_4$  ca. 7 % höher als der fünfte ermittelte Wert  $\Lambda_5$ . Dieses über die gesamte Messdauer  $t_{\text{tot}}$  stark aber asymptotische tendenzielle Abnahme des ermittelten logarithmischen Dekrements lässt für die zunächst gewählte Weganregung  $w = h \approx 2 \text{ mm}$  bzw.  $w/h \approx 1$  auf das zumindest anfänglich starke Wirken geometrischer und/oder physikalischer Nichtlinearitäten schließen. Diese Nichtlinearitäten klingen jedoch über die Messdauer stark (fast vollständig) ab. Abbildung A.2 links zeigt diesen Verlauf qualitativ. Damit wird der Betrag der Weganregung  $w/h \approx 1$  als eine verhältnismäßig zu große Auslenkung identifiziert.

Erst bei deutlich kleineren Verhältnissen der über den Ausschwingvorgang abnehmenden Schwingungsamplitude  $w(t)$  ist die Betrachtung des linear viskoelastischen strukturdynamischen Verhaltens des Probekörpers möglich. Dafür ist im weiteren Verlauf die Weganregung  $w$  weiter reduziert worden. Da die Probekörper geringfügig unterschiedliche Dicken  $h$  aufweisen (vgl. Tabellen 11.6 und 11.7), ist zusätzlich zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen eine relativ zur Dicke jedes Probekörpers  $h$  konstante Weganregung  $w$  definiert worden. Die definierte und reproduzierbare Weganregung ist schließlich zu einem Viertel der Dicke des Probekörpers  $h/4$  technisch sinnvoll identifiziert, und wie in Abschnitt 10.5.4 beschrieben, angewendet worden.



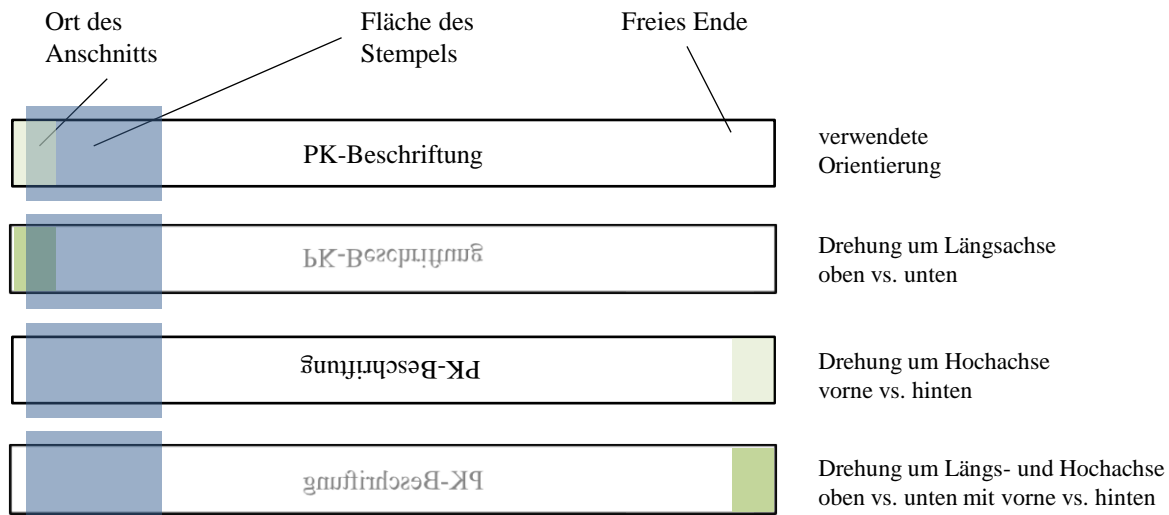
**Abbildung A.2:** Qualitativer Verlauf des logarithmischen Dekrements  $\Lambda_n$  für  $n = 1, \dots, 5$  über die chronologische Abfolge der fünf isochronen Intervalle  $I_n$  für  $n = 1, \dots, 5$ . Links: Zu groß gewählte Weganregung  $w = h \approx 2$  mm bzw.  $w/h \approx 1$ , mit tendenzieller Abnahme als Indiz für das Wirken dämpfungserhöhender Nichtlinearitäten am Anfang der Messdauer  $t_{tot}$ . Rechts: Relativ zur Dicke  $h$  konstante Weganregung  $h/4$  mit gleichen Werten als Indiz, für die Vermeidung von Nichtlinearitäten oder Reduktion auf ein konstantes Minimum über die Messdauer  $t_{tot}$ .

In diesem Fall liefert die Auswertung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda_n$  für  $n = 1, \dots, 5$  für jedes der isochronen Intervalle  $I_n$  für  $n = 1, \dots, 5$  nahezu den gleichen Betrag mit geringen Standardabweichungen. Unterschiedliche Effekte von Nichtlinearitäten (geometrische Nichtlinearitäten aufgrund großer Verformungen sowie nicht-lineares Materialverhalten und Effekte aus der Luftreibung) werden dadurch Vermieden bzw. auf ein konstantes Minimum reduziert. Abbildung A.2 rechts zeigt diesen Verlauf qualitativ. Grundfrequenz  $f$ , ermittelt aus dem Weg-Zeit-Signal im Frequenzbereich, liefert für alle untersuchten Beträge der Weganregung  $w$  den gleichen Wert. Eventuelle Streuungen der Grundfrequenz  $f$  sind also in jedem Fall kleiner als die diskrete Auflösung der FFT im Frequenzbereich ( $f_r = 78,125$  mHz, vgl. Abschnitt 10.5.3 [116]).

Die vorangegangenen Voruntersuchungen haben gezeigt, dass größere Beträge der Weganregung lediglich die ermittelte Werkstoffdämpfung hin zu größeren Werten beeinflussen. Dabei werden wirkende Effekte aus Nichtlinearitäten (teilweise stark) unterstellt. Die Grundfrequenz verhält sich dagegen insensitiv auf den Betrag der Weganregung. Zur vollständigen Vermeidung bzw. Reduktion dieser Effekte auf ein konstantes Minimum erfolgt die Weganregung aller Probekörper mit dem relativ zur Dicke  $h$  konstanten Wert  $h/4$ . Dieser Wert für die relativ konstante Weganregung ist in den zuvor genannte Voruntersuchungen als technisch sinnvoll identifiziert worden. Vor den zuvor beschriebenen Hintergründen werden Nichtlinearitäten vernachlässigt, und die ermittelten strukturdynamischen Werkstoffeigenschaften als linear viskoelastisch angenommen.

### Orientierung des Probekörpers

Bezüglich der Orientierung des Probekörpers in der Einspannvorrichtung existieren vier unterschiedliche Möglichkeiten. Die verwendete Orientierung ist in Abschnitt 10.5.1 beschrieben (Oben: Bei der Aushärtung im Heißluftautoklav oben befindende Seite; Auskragrichtung: Anschnitt des Wasserstrahlschnitts unter bzw. hinter dem Stempel). Weitere drei Permutationen ergeben sich jeweils um eine 180°-Drehung um die Längsachse (oben vs. unten), um die Hochachse (vorne vs. hinten) sowie um die Längs- und Hochachse des Probekörpers (oben vs. unten mit vorne vs. hinten). Abbildung A.3 zeigt die vier möglichen Orientierungen des Probekörpers in der Einspannvorrichtung.



**Abbildung A.3:** Vier mögliche Orientierungen des Probekörpers in der Einspannvorrichtung. Von oben nach unten: Verwendete Orientierung; Drehung um Längsachse (oben vs. unten); Drehung um Hochachse (vorne vs. hinten); Drehung um Längs- und Hochachse (oben vs. unten mit vorne vs. hinten).

Die Sensitivität der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen bezüglich der Orientierung des Probekörpers in der Einspannvorrichtung wird untersucht, indem der gleiche Probekörper nacheinander in allen der zuvor beschriebenen Orientierungen positioniert, mit 12,5 Nm Drehmoment eingespannt, fünfmal hintereinander angeregt und vermessen wird. Der Vergleich der Mittelwerte der beiden strukturdynamischen Kennwerte, logarithmisches Dekrement  $\Lambda$  und Grundfrequenz  $f$ , für jedes gewählte Drehmoment liefert schließlich eine qualitative Aussage bezüglich der Sensitivität der Ergebnisse der experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen auf die Orientierung des Probekörpers in der Einspannvorrichtung. Dafür wird die Differenz der Ergebnisse des jeweiligen Kennwerts in den drei möglichen Permutationen auf die Ergebnisse in der verwendeten Orientierung bezogen,  $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda_o} = \frac{\Lambda_v - \Lambda_o}{\Lambda_o}$  bzw.  $\frac{\Delta f}{f_o} = \frac{f_v - f_o}{f_o}$  mit den Indizes o für die originale und v für die variierte Orientierung.

Die Orientierung des Probekörpers nach 180°-Drehung um die Längsachse (oben vs. unten) liefert nahezu keine Veränderung des logarithmischen Dekrements ( $<0,3\%$ ) und keine im Frequenzbereich auflösbare Veränderung der ermittelten Grundfrequenz  $f$ . Dies lässt auf mechanisch gleichwertige Oberflächen bzw. Haftbedingungen in den Klemmfugen (Stempel-Probekörper sowie Probekörper-Auflagefläche) und die Reproduzierbarkeit der Einspannbedingungen sowie des Positionier- und Einspannvorgangs schließen. Dagegen liefert die Orientierung des Probekörpers nach 180°-Drehung um die Hochachse (vorne vs. hinten) eine Erhöhung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  um ca. 4,1% und eine Reduktion der ermittelten Grundfrequenz  $f$  um ca. 0,6%



(entspricht einem Schritt der diskreten Auflösung der FFT im Frequenzbereich  $f_r$ ). Die gleichen Tendenzen liefert die Orientierung des Probekörpers nach 180 °-Drehung um die Längs- und Hochachse (oben vs. unten mit vorne vs. hinten).

Die zuvor beschriebenen Tendenzen lassen zwei Schlüsse zu. Es wird unterstellt, dass der Anschnitt des Wasserstrahlschnitts und die dadurch verursachten geringfügigen Delaminationen am freien Ende des Probekörpers beim Ausschwingvorgang einen „Fächereffekt“ induzieren, der dämpfungserhöhend wirkt. Zusätzlich reduzieren die durch den Anschnitt verursachten geringfügigen Delaminationen die Steifigkeit des Probekörpers, was sehr geringfügig frequenzmindernd wirkt. Basierend auf der zuvor beschriebenen Sensitivitätsanalyse bezüglich der Orientierung des Probekörpers werden alle Probekörper in den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen wie in Abschnitt 10.5.1 beschrieben orientiert. Damit weist der auskragende Teil des Probekörpers definierte kontinuierlich hergestellte Kanten auf. Der Anschnitt des Wasserstrahlschnitts und die dadurch verursachten geringfügigen Delaminationen befinden sich unter bzw. hinter dem Klemmbereich des Stempels. Dies erlaubt die Beschreibung des flachen stabförmigen Probekörpers in den experimentellen strukturdynamischen Untersuchungen als transversal ausschwingender Kragbalken, mit in Längsrichtung kontinuierlich gleicher Steifigkeit und ohne die zusätzlich induzierte Dämpfung durch einen „Fächereffekt“.

## A.2 Gewöhnliche, homogene Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung

In Kapitel 8, Abschnitt 8.2.5 treten gewöhnliche, homogene Differentialgleichung zweiter und vierter Ordnung auf. Die Bestimmung der allgemeinen Lösungen erfolgt exemplarisch nach der Zeit für die Gleichungen zweiter Ordnung und nach dem Ort für die Differentialgleichungen vierter Ordnung. In beiden Fällen ergibt sich die allgemeine Lösung durch den Exponentialansatz

$$T_{(t)} = C e^{\beta t} \quad \text{nach der Zeit, bzw.} \quad (\text{A.2})$$

$$W_{(x)} = C e^{\beta x} \quad \text{nach dem Ort.} \quad (\text{A.3})$$

### Differentialgleichung zweiter Ordnung (exemplarisch nach der Zeit)

Als Ansatz zur Lösung einer homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung dient der Exponentialansatz (A.2). Seine Ableitungen sind

$$T'_{(t)} = C \beta e^{\beta t} \quad \text{und} \quad T''_{(t)} = C \beta^2 e^{\beta t} . \quad (\text{A.4})$$

In die normierte Differentialgleichung  $T'' + \omega^2 T_{(t)} = 0$  eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} C \beta^2 e^{\beta t} + \omega^2 C e^{\beta t} &= 0 , \\ [\beta^2 + \omega^2] C e^{\beta t} &= 0 , \\ \beta^2 + \omega^2 &= 0 , \\ \beta^2 &= -\omega^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

wobei  $\omega$  eine charakteristische Konstante, in diesem Fall die Wellenlänge, aufgrund der Normierung der Differentialgleichung ist. Durch Radizieren mit zugehöriger Fallunterscheidung ergeben sich zwei Lösungen

$$\sqrt{\beta^2} = \pm \beta \quad \text{und damit}$$

$$\beta_1 = +i\omega \quad \text{und} \quad \beta_2 = -i\omega . \quad (\text{A.6})$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist die Linearkombination der linear unabhängigen Lösungen (Basisfunktionen oder Fundamentalsystem) [130]

$$T_{k(t)} = F_{k1} e^{i\omega t} + F_{k2} e^{-i\omega t} . \quad (\text{A.7})$$

Mit der EULER'schen Formel  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  [18], [130] kann die allgemeine Lösung geschrieben werden als

$$T_{k(t)} = E_{k1} \cos(\omega t) + E_{k2} \sin(\omega t) , \quad (\text{A.8})$$

die harmonische Schwingungen mit der zu bestimmenden Kreisfrequenz  $\omega$  beschreiben. Sie sind als Linearkombination von zwei trigonometrischen Funktionen. Die Eigenkreisfrequenzen im Argument der beiden trigonometrischen Funktionen sind gleich. Die Zusammenfassung zu einer einzigen phasenverschobenen sin- oder cos-Funktion erfolgt durch [150]

$$\begin{aligned} T_{k(t)} &= E_{k1} \cos(\omega t) + E_{k2} \sin(\omega t) = \\ &= \hat{E}_k \cos(\omega t + \alpha) = \\ &= \hat{E}_k [\cos(\omega t) \sin \alpha + \sin(\omega t) \cos \alpha] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

mit der Phasenverschiebung  $\tan \alpha = E_{k2}/E_{k1}$  und damit  $\alpha = \arctan(E_{k2}/E_{k1})$  sowie der Amplitude  $\hat{E}_k = \sqrt{E_{k1}^2 + E_{k2}^2}$  aus  $E_{k1}^2 + E_{k2}^2 = \hat{E}_k^2 [\cos^2(\dots) + \sin^2(\dots)] = 1 \hat{E}_k^2 = \hat{E}_k^2$ .

Für die zusammengefassten Konstanten gilt

$$E_{k1} = F_{k1} + F_{k2} \quad \text{und} \quad E_{k2} = i F_{k1} - i F_{k2} . \quad (\text{A.10})$$

Die genauere Betrachtung der Konstanten  $F_{k1}$  und  $F_{k2}$  der allgemeinen Lösung in der Exponentialschreibweise (A.7) zeigt, dass diese konjugiert komplex zueinander sind [150]. Mit  $F_{k1} = E_{k1} - F_{k2}$  und  $F_{k2} = F_{k1} + i E_{k2}$  folgt durch Einsetzen und Auflösen jeweils  $F_{k1} = \frac{1}{2}(E_{k1} - i E_{k2})$  bzw.  $F_{k2} = \frac{1}{2}(E_{k1} + i E_{k2})$ . Durch die Transformation der allgemeinen Lösung von der Exponentialschreibweise (A.14) in die trigonometrische Schreibweise (A.15) sind die Konstanten  $E_{k1}$  und  $E_{k2}$  reell [150].

### Differentialgleichung vierter Ordnung (exemplarisch nach dem Ort)

Als Ansatz zur Lösung einer homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung dient der Exponentialansatz (A.3). Seine Ableitungen sind

$$W'_{(x)} = C \beta e^{\beta x} , \quad W''_{(x)} = C \beta^2 e^{\beta x} , \quad W'''_{(x)} = C \beta^3 e^{\beta x} \quad \text{und} \quad W^{IV}_{(x)} = C \beta^4 e^{\beta x} . \quad (\text{A.11})$$

In die normierte Differentialgleichung  $W^{IV}_{(x)} - \lambda W_{(x)} = 0$  eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} C \beta^4 e^{\lambda x} - \lambda^4 C e^{\beta x} &= 0 , \\ [\beta^4 - \lambda^4] C e^{\beta x} &= 0 , \\ \beta^4 - \lambda^4 &= 0 , \\ \beta^4 &= \lambda^4 , \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

wobei  $\lambda$  eine charakteristische Konstante aufgrund der Normierung der Differentialgleichung ist. Durch zweimaliges Radizieren mit jeweils folgender Fallunterscheidung ergeben sich vier

Lösungen

$$\sqrt{\beta^4} = \pm\beta^2 \quad \text{und damit}$$

$$\beta_1 = +\lambda \quad , \quad \beta_2 = -\lambda \quad , \quad \beta_3 = +i\lambda \quad , \quad \beta_4 = -i\lambda . \quad (\text{A.13})$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung ist die Linearkombination der linear unabhängigen Lösungen (Basisfunktionen oder Fundamentalsystem) [130]

$$W_{k(x)} = D_{k1} e^{i\lambda x} + D_{k2} e^{-i\lambda x} + D_{k3} e^{\lambda x} + D_{k4} e^{-\lambda x} . \quad (\text{A.14})$$

Mit der EULER'schen Formel  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  und der EULER'schen Identität  $e^x = \sinh x + \cosh x$  [18], [130] kann die allgemeine Lösung geschrieben werden als

$$W_{k(x)} = C_{k1} \cos(\lambda x) + C_{k2} \sin(\lambda x) + C_{k3} \sinh(\lambda x) + C_{k4} \cosh(\lambda x) , \quad (\text{A.15})$$

wobei für die zusammengefassten Konstanten gilt

$$\begin{aligned} C_{k1} &= D_{k1} + D_{k2} , & C_{k2} &= i D_{k1} + i D_{k2} , \\ C_{k3} &= D_{k3} - D_{k4} , & C_{k4} &= D_{k3} + D_{k4} . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Die genauere Betrachtung der Konstanten  $D_{k1}$  und  $D_{k2}$  der allgemeinen Lösung in der Exponentialschreibweise (A.14) zeigt, dass diese konjugiert komplex zueinander sind [150]. Mit  $D_{k1} = C_{k1} - D_{k2}$  und  $D_{k2} = -D_{k1} + i C_{k2}$  folgt durch Einsetzen und Auflösen jeweils  $D_{k1} = \frac{1}{2}(C_{k1} - i C_{k2})$  bzw.  $D_{k2} = \frac{1}{2}(C_{k1} + i C_{k2})$ . Durch die Transformation der allgemeinen Lösung von der Exponentialschreibweise (A.14) in die trigonometrische Schreibweise (A.15) sind die Konstanten  $C_{k1}$  und  $C_{k2}$  reell [150].

### A.3 Statistische Absicherung der Messwerte

Methoden der Statistik und die statistische Auswertung von Ergebnissen sind in FAHRMEIR et al. 2004 [38] und in PAPULA 2006 [130] beschrieben, sowie in der DIN V 65352 [111] genormt.

Alle experimentell ermittelten und berechneten mechanischen Werkstoffkennwerte der einzelnen Probekörper sind jeweils mit arithmetischem Mittelwert  $\bar{x}$  und empirischem Variationskoeffizienten  $v$ , der auf der Standardabweichung  $s$  basiert, angegeben.

Dabei ist der Mittelwert  $\bar{x}$  der Stichprobe mit den Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  als arithmetisches Mittel der Stichprobenwerte zu

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{A.17})$$

berechnet worden [130]. Ein Maß für die Streuung der Einzelwerte  $x_i$  um den Mittelwert  $\bar{x}$  ist die Varianz bzw. Stichprobenvarianz

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(x_1 + \bar{x}) + (x_2 + \bar{x}) + \dots + (x_n + \bar{x})}{n - 1} = \\ &= \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n n(x_i + \bar{x}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right]. \quad (\text{A.18})$$

Meist wird jedoch die Quadratwurzel der Varianz

$$s = \sqrt{s^2} \quad (\text{A.19})$$

angegeben, die als Standardabweichung der Stichprobe bezeichnet wird [130].

Die Varianz  $s^2$  und die Standardabweichung  $s$  sind ein Maß für die Streuung der einzelnen Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  um den zugehörigen Mittelwert  $\bar{x}$ . Die Varianz  $s^2$  entspricht einem mittleren Abweichungsquadrat. Durch das Quadrieren der Abweichungen gilt  $s^2 > 0$  und damit  $s > 0$ .

Üblicherweise wird die Standardabweichung  $s$  im Zusammenhang mit dem arithmetischen Mittel  $\bar{x}$  angegeben, wenn es sich um metrische Merkmale handelt [38]. In diesem Fall haben arithmetisches Mittel und Standardabweichung der Merkmale, wie im vorliegenden Fall experimentell ermittelte mechanische Werkstoffkennwerte, dieselbe Dimension und Einheit wie die einzelnen Stichprobenwerte [130]. Deshalb sind die Angaben von arithmetischem Mittel und Standardabweichung sehr anschaulich und erlauben eine hohe Vergleichbarkeit und Diskussion der durchgeführten Messung.

Der Quotient aus empirischer Standardabweichung  $s$  und dem arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  ist der empirische Variationskoeffizient

$$v = \frac{s}{\bar{x}}. \quad (\text{A.20})$$

Er ist ein relatives Streuungsmaß, und wird häufig in % angegeben.

Der Faktor  $\frac{1}{n-1}$  in Gleichung (A.18) stammt aus der Interpretation der Standardabweichung in der induktiven Statistik. Sie wird zur Unterscheidung auch Stichprobenvarianz genannt [38]. Für die experimentell ermittelten Messwerte wird angenommen, dass es sich um eine Stichprobe handelt. Im Gegensatz zur Stichprobe entspricht die Grundgesamtheit im vorliegenden Fall alle Probekörper angesehen werden, die jemals mit gleichen Materialien und Herstellungsparametern gefertigt wurden. Daraus ist ersichtlich, dass im vorliegenden Fall lediglich um eine repräsentative Stichprobe handeln kann. Mit zunehmendem Stichprobenumfang  $n$  wird der Unterschied jedoch vernachlässigbar, da für große  $n$  gilt  $\frac{1}{n-1} \approx \frac{1}{n}$ .

In FAHRMEIR et al. [38] ist neben der reinen Definition auch eine anschauliche Erklärung angegeben. Für die Summe aller Messwerte, bereinigt um den arithmetischen Mittelwert, gilt  $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ . Die Abweichung des letzten Messwerts  $x_n - \bar{x}$  wäre bereits durch die vorangegangenen  $n-1$  Messwerte vorhersagbar. Es variieren also lediglich  $n-1$  Abweichungen frei. Die Mittlung erfolgt dann mit dem Faktor  $n-1$ , dessen Wert auch als die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet wird.