

# Zum Rückstellverhalten von Gleitpendellagern unter seismischer Einwirkung

Norbert Romen





UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN

Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Professur für Stahlbau

---

*Thema der Dissertation:*

*Zum Rückstellverhalten von Gleitpendellagern  
unter seismischer Einwirkung*

Von der Fakultät für Bauingenieur und Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München genehmigte Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.).

Verfasser:

Dipl.-Ing. Norbert Romen

Seitnerstr. 23

82049 Pullach i.L.

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Manfred Keuser

1. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ingbert Mangerig

2. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard Hanswille

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Juni 2017

---

Neubiberg im August 2017



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	1
1.2 Zielsetzung . . . . .	2
1.3 Vorgehensweise . . . . .	3
<b>2 Grundlagen des Erdbebeningenieurwesens</b>	<b>5</b>
2.1 Auswirkungen von Erdbeben auf die Zivilisation . . . . .	5
2.2 Entstehung von Erdbeben . . . . .	6
2.3 Seismologische Begriffe . . . . .	10
2.3.1 Intensität und Magnitude . . . . .	10
2.3.2 Erbebenherd und Wellenausbreitung . . . . .	14
2.3.3 Messung und seismologische Kennzeichnung von Erdbebenzeitverläufen . . . . .	17
2.4 Bauwerksreaktion auf Fußpunkterregung . . . . .	20
2.4.1 Homogener Lösungsanteil des viskos gedämpften EFS . . . . .	21
2.4.2 Harmonische Fußpunkterregung des viskos gedämpften EFS . . . . .	24
2.4.2.1 Stationäre Lösung für die Relativverschiebung $u$ . . . . .	24
2.4.2.2 Stationäre Lösung für den Absolutweg $y$ . . . . .	28

2.4.2.3	Ein- und Ausschwingvorgang des viskos gedämpften EFS . . . . .	31
2.4.2.4	Bezeichnungen der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung . . . . .	35
2.4.3	Periodische Fußpunkterregung des viskos gedämpften EFS . . . . .	38
2.4.4	Transiente Fußpunkterregung des viskos gedämpften EFS . . . . .	44
2.4.5	Arbeitsprinzip des Seismometers . . . . .	55
2.4.6	Transiente Fußpunkterregung des MFS . . . . .	57
2.4.6.1	Modalanalyse des MFS . . . . .	61
2.4.6.2	Numerische Integrationsverfahren . . . . .	66
2.4.7	Zeitverlaufsberechnung - nichtlinear gedämpfter EFS . . . . .	72
2.4.8	Ermittlung von Antwortspektren . . . . .	80
2.4.9	Inelastische Antwortspektren . . . . .	86
2.4.10	Antwortspektren-Verfahren für Mehrfreiheitsgradschwinger . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Erdbebenschutzsysteme</b>	<b>97</b>
3.1	Allgemeiner Überblick . . . . .	97
3.2	Schwingungsdämpfer . . . . .	99
3.3	Dissipations-Elemente . . . . .	104
3.4	Basisisolierung . . . . .	111
<b>4</b>	<b>Erdbebenisolierung mit Gleitpendellagern</b>	<b>118</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	118
4.2	Genereller Aufbau und Funktionsweise . . . . .	119
4.2.1	Kinematik des Pendelschwingers . . . . .	121
4.2.2	Einfreiheitsgradschwinger mit Festreibung . . . . .	132
4.2.3	Kinematik und Kinetik des Gleitpendellagers . . . . .	137
4.2.4	Sekanten-Steifigkeitsverfahren . . . . .	143
4.3	Abwandlungen und Weiterentwicklungen des Gleitpendellagers . . . . .	159
4.3.1	Weiterentwicklungen des Gleitpendellagers zur Beeinflussung der Hystereseform . . . . .	160

---

4.3.2	Sonderlösungen mit Gleitpendellagern . . . . .	167
4.3.3	Auf dem Prinzip des Gleitpendellagers basierende Abwandlungen . . . . .	168
4.3.4	Torsion in durch Gleitpendellager isolierten Strukturen . . . . .	169
<b>5</b>	<b>Versuche an Gleitpendellagern</b>	<b>171</b>
5.1	Einführung . . . . .	171
5.2	Genereller Aufbau der Versuchseinrichtung . . . . .	171
5.2.1	Versuche an Gleitpendellagern für das Akropolis-Museum in Athen . . . . .	173
5.2.2	Tests an Gleitpendellagern für das Sögütözü Congress and Commercial Center, Turkey . . . . .	179
5.2.3	Versuche an Gleitpendellagern für die Bilkent University, Turkey . . . . .	180
<b>6</b>	<b>Rückstellwirkung von Gleitpendellagern</b>	<b>183</b>
6.1	Bedeutung der Rückstellwirkung von Erdbebenschutzsystemen . . . . .	183
6.2	Stand der Normung . . . . .	185
6.2.1	Amerikanischen und europäischen Regelungen zur Rückstellwirkung . . . . .	185
6.2.2	Einschätzung des Rückzentrierungsvermögens anhand der Energiebilanz . . . . .	189
6.3	Studie an geneigten Gleitflächen . . . . .	196
6.3.1	Gleitvorgang ohne äußere Einwirkungen . . . . .	197
6.3.2	Fußpunktbeschleunigung in Hangrichtung . . . . .	199
6.3.3	Fußpunktbeschleunigung quer zur Hangrichtung . . . . .	201
6.3.4	Fußpunktbeschleunigung in vertikaler Richtung . . . . .	202
6.3.5	Fußpunktbeschleunigung in und quer zur Hangrichtung . . . . .	203
6.3.6	Fußpunkterregung in Form von Akzellerogrammen . . . . .	204
6.3.7	Bewertung der Ergebnisse . . . . .	205
6.4	Betrachtung der Rückstellwirkung am Gleitpendellager . . . . .	207
6.4.1	Parameterstudie mit variierendem Gleitpendellagerradius . . . . .	210
6.4.2	Parameterstudie mit variierendem Reibkoeffizienten . . . . .	212
6.5	Auswertung der Ergebnisse und Schlussfolgerungen für das Rückstellverhalten . . . . .	213

<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>215</b>
7.1 Zusammenfassung . . . . .	215
7.2 Ausblick . . . . .	217

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit in den Jahren 2004 bis 2010 als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Stahlbau der Universität der Bundeswehr in Neubiberg.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Ingbert Mangerig für das entgegengebrachte Vertrauen, die Geduld und die Unterstützung, die Vermittlung der wissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweise während dieser Zeit sowie die Betreuung in der Eigenschaft als 1. Berichterstatter. Herr Prof. Dr.-Ing. Mangerig begleitete die Arbeit stets mit größtem Interesse und stand für Diskussionen jederzeit zur Verfügung. Der Erfolg dieser Arbeit basiert insbesondere auch auf der äußerst wohlwollenden Förderung während dieser gemeinsamen Zeit, für die ich Herrn Prof. Mangerig sehr danke.

Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerhard Hanswille, Institut für Stahlbau und Verbundkonstruktionen an der Bergischen Universität Wuppertal, für den fachlichen Rat und für die Anregungen in der Eigenschaft als 2. Berichterstatter. Herrn Prof. Dr.-Ing. Manfred Keuser gilt mein Dank für die Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses.

Aufrichtiger Dank gebührt auch meinen ehemaligen Kollegen am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau für die überaus harmonische und freundschaftliche Zusammenarbeit, die zu einem äußerst angenehmen und produktiven Arbeitsklima beigetragen haben. In ganz besonderem Maße gilt dies für die Mitarbeiter des Labors des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, die mir bei der Vorbereitung und Durchführung zahlreicher Laborversuche jederzeit tatkräftig zur Seite standen. Allen voran ist in diesem Zusammenhang der technische Laborleiter Herr Dipl.-Ing. Robert Nothaft namentlich hervorzuheben.

Abschließend bedanke ich mich von ganzem Herzen bei meiner lieben Frau für ihre Geduld, ihr entgegengebrachtes Vertrauen und ihre bedingungslose Unterstützung während der zurückliegenden Jahre als Grundvoraussetzung für das Gelingen der vorliegenden Arbeit.

Pullach i.I., im August 2017

Norbert Romen

## Kurzfassung

Die Schutzwirkung der seismischen Isolierung vor der zerstörerischen Einwirkung schwerer Erdbeben generiert sich vor allem aus der Eigenschaft, bauliche Anlagen vom Untergrund zu entkoppeln, aber auch aus der Fähigkeit, Energie zu dissipieren. Neben der bereits durch die Isolierungswirkung maßgeblich herbeigeführten weiteren Abminderung der auf das Bauwerk übertragenen Erdbebenbeanspruchung kommt dem Dämpfungsmechanismus vor allem auch die Aufgabe zu, die in der Isolierebene geweckten Relativverschiebungen auf ein akzeptables Maß abzusinken. Wird das Niveau der Energiedissipationswirkung indes zu hoch eingestellt, drohen ein kumulativer Verschiebungsaufbau, verbunden mit dem Herauswandern aus der Solllage während des Erdbebens, sowie eine in Hinsicht auf Folgebeben ungünstig zu bewertende verbleibende Restverschiebung des Systems. Dies zu verhindern, ist die Aufgabe eines ausreichenden Rückstellvermögens. In besonderem Maße gilt dies für Systeme, deren Funktion der Energiedissipation nicht auf geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsmechanismen beruht, wie dies unter anderem beim Einsatz von Gleitpendellagern der Fall ist.

Die bisher zur Sicherstellung eines ausreichenden Rückstellvermögens verfügbaren Kriterien liefern hinsichtlich der Auslegung von Gleitpendellagern eher auf der unsicheren Seite liegende Vorgaben. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher ein räumliches FE-Modell des Gleitpendellager-Systems mit dem Ziel entwickelt, realistische Erdbebenverläufe mit einem numerisch überschaubaren Rechenaufwand zu simulieren. Auf Grundlage der mit diesem Modell im Rahmen einer Parameterstudie durchgeführten Berechnungen wird gezeigt, dass die bisher vorgeschlagenen Auslegungskriterien die tatsächlich auftretenden Effekte nur unzureichend abdecken. In der Folge wird eine an den erhaltenen Ergebnissen kalibrierte Bestimmungsgleichung vorgeschlagen, die die einfache Festlegung der für Gleitpendellager maximal zulässigen Reibkoeffizienten erlaubt.

## Abstract

The positive effect of seismic isolation systems upon the originally destructive power of severe earthquakes is primarily based on the decoupling mechanism, but also on the capability to dissipate energy. Additionally to the achieved reduction of the earthquake impact actions due to the isolation effect, a further reduction results from the damping behavior, that furthermore has to take the task to mitigate the induced relative deformations to an acceptable level. However if the damping level is set too high, cumulative displacements combined with a drifting out of the reference position during the event could be provoked. Moreover, the residual displacements after an earthquake arouse to an undesired level regarding the presumable occurrence of follow-earthquakes. To prevent this trend is the task of an adequate self-centering capacity. In particular this applies to systems obtaining their energy dissipation capacity not from viscous damping effects characterized by their proportionality to the velocity, as it is particularly the case for sliding isolation pendulum bearings.

The so far suggested criteria to ensure an adequate self-centering capacity with regard to sliding isolation pendulum bearings were not delivering satisfying results. In order to get more information about the real behavior of sliding isolation pendulum bearings during an earthquake event, a three-dimensional but also simplified FE-model will be generated pursuing the objective to reduce the numerical computing time. Based on the parametric study carried out by this FE-model it is shown that the currently available criteria are covering the real effects only in an insufficient way in case of sliding isolation pendulum bearings. Consequently, a new criterion is suggested that allows to determine a maximum tolerable coefficient of friction needed to ensure a sufficient self-centering capacity.



# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Problemstellung

Die verheerenden Erdbebenereignisse der letzten Zeit, unter anderem das aktuelle Beben in Nepal vom 25. April 2015 mit einer Magnitude in Höhe von  $7.8 M_W$  [58], haben gezeigt, dass der erdbebengerechten Auslegung baulicher Anlagen zum Schutz der Zivilbevölkerung enorme Bedeutung zukommt. Neben dem zunächst nahe liegenden Vorgehen, die bauliche Struktur für die durch das Beben geweckten Trägheitskräfte auszulegen und zu bemessen, besteht in der seismischen Isolierung eine elegante Alternative, die Einwirkungen erst gar nicht bzw. in stark abgeschwächter Form an das Bauwerk heranzulassen. Die zerstörerische Wirkung schwerer Erdbeben lässt sich in der Folge auf ein Maß abmindern, das es der Tragstruktur erlaubt, die Bodenerschütterungen schadlos zu überstehen [97].

Aufgrund des baulichen Mehraufwandes und den damit einhergehenden steigenden Baukosten werden solche Systeme vorzugsweise in baulichen Anlagen eingesetzt, die einen entsprechend hohen Schutzbedarf aufweisen. Dazu zählen vor allem Bauwerke, deren Funktionstüchtigkeit während und nach einem Erdbebenereignis für das Überleben und die Versorgung der Zivilbevölkerung von besonderer Bedeutung ist, oder von denen im Schadensfall ein unverhältnismäßig hohes Gefährdungspotential ausgeht. Oftmals wird die Entscheidung zur Anordnung einer seismischen Isolierung aber auch allein aus wirtschaftliche Erwägungen heraus zurückzuführen, falls z.B. die zu kalkulierenden Folgekosten eines durch ein Beben ausgelösten Betriebsausfalls gewisse Grenzen überschreitet oder falls hohe Kosten aufgrund potentieller Sachschäden drohen.

Neben dem zu gewährleistendem sicherem vertikalen Lastabtrag besteht das übergeordnete Ziel der Erdbebenisolierung in einer möglichst weitreichenden Entkopplung des Bauwerks vom Untergrund. Diesem Bestreben sind jedoch gewisse Grenzen gesetzt, die zum Einen aus der notwendigen Bereitstellung einer ausreichenden Tragkapazität zur Aufnahme der in der Regel ebenfalls vorhandenen horizontalen Verkehrslasten herrühren und zum Anderen der durch das Isolations-

system vorzuhaltenden Fähigkeit zur Energiedissipation geschuldet sind.

Im Hinblick darauf, dass bei der Erdbebenauslegung eine möglichst umfassende Schutzwirkung im Erdbebenfall zu gewährleisten ist, kommt auch dem Rückzentrierungsvermögen des seismischen Isolierungs-Systems enorme Bedeutung zu. Vor dem Hintergrund üblicherweise zu erwartender Folgebeben hat dieses zum Einen die verbleibenden Restverschiebungen nach dem eigentlichen Erdbebenereignis zu begrenzen und zum Anderen einem kumulativen Verschiebungsaufbau mit damit verbundenem Herauswandern aus der Solllage während des Erdbebenereignisses entgegenzuwirken. Die an Isolationssysteme gestellten Forderungen hinsichtlich des Rückstellvermögens und der Fähigkeit zur Energiedissipation stellen damit zueinander konträre Funktionen dar, die bei der Auslegung einen gewissen Optimierungsprozess erfordern. Mit Ausnahme von Elastomerlagern ohne Bleikern sind davon mehr oder minder alle weiteren seismischen Isolierungssysteme betroffen, deren Fähigkeit zur Energiedissipation auf nicht geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungseffekten beruhen. Aufgrund der auf Reibung basierenden Energiedissipation sind dazu insbesondere Gleitpendellager zu zählen, aber auch Systeme, deren Energiezerstreuung auf elasto-plastischem Materialverhalten basiert, wie das z.B. bei Elastomerlagern mit Bleikern oder bei Dämpfereinheiten in Form von Stahlhysterese-Elementen der Fall ist.

In Bezug auf die Normungstätigkeit wurde die Problematik eines ausreichenden Rückzentrierungsvermögens offenbar erst vergleichsweise spät erkannt und findet sich daher erstmals in der amerikanischen AASHTO-Norm [2] aus dem Jahr 1991 wieder. Aufgrund der mit den darin enthaltenen Regelungen nicht zufrieden stellenden resultierenden Auslegungsparameter wurde von MEDEOT [79] ein weiteres, auf dem Energieansatz basierendes Kriterium vorgeschlagen, das zwischenzeitlich Eingang in die europäische Normung [30] gefunden hat. Gemäß diesem ist zur Beurteilung eines ausreichenden Rückstellvermögens die dissipierte Energie  $E_h$  mit der reversibel gespeicherten Energie  $E_s = E_{kin} + E_{pot}$  über einen Verhältnisbeiwert in Bezug zu setzen. Diese Energiebeiträge werden hierbei auf die Bemessungsverschiebung  $d_{Ed}$  und damit nicht auf den tatsächlichen Verschiebungsverlauf bezogen.

Im Fall der Erdbebenisolierung mit Gleitpendellagern resultieren aber auch hierfür nur unzureichende Vorgaben zur Bestimmung der Auslegungsparameter von Gleitpendellager, wenngleich im Gegensatz zur amerikanischen Version hier sinnigerweise der Reibkoeffizient  $\mu$  indirekt in die Bestimmungsgleichung mit einfließt.

## 1.2 Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines Kriteriums zur Auslegung von Gleitpendellagern, das es dem Tragwerksplaner erlaubt, die Auslegungsparameter in Form des Gleitpendellagerradius  $r$  und des Reibkoeffizientens  $\mu$  in sinnvoller Art und Weise festzulegen.

Zunächst steht bei der Auslegung der zum Erdbebenschutz vorgesehenen seismischen Isolie-

rung stets die zu erzielende Eigenperiode  $T$  der Gesamtstruktur im Vordergrund, da diese in Abhängigkeit des zugrunde gelegten Antwortspektrums über das Beanspruchungsniveau entscheidet. Die durch das Beben im Bauwerk geweckten Trägheitskräfte lassen sich durch Anheben der Schwingzeit  $T$  auf ein entsprechend gewünschtes Zielniveau absenken. Im Fall der Auslegung von Gleitpendellagern führt dieses Vorgehen aufgrund des direkten Zusammenhangs zwischen Pendellänge und Eigenfrequenz unmittelbar auf den gesuchten Gleitpendellagerradius  $r$ . Aufgrund der Tatsache, dass Pendelsysteme unabhängig von der Schwingmasse stets mit der derselben Periodendauer schwingen, fließt die Bauwerksmasse hierbei nicht mit ein.

Der Gleitpendellagerradius  $r$  wird demnach allein auf Grundlage eines maximal gewünschten Beanspruchungsniveaus festgelegt, ohne dabei weitere Gesichtspunkte zu berücksichtigen. Folglich verbleibt lediglich der Reibkoeffizient als Stellparameter, um ein ausgewogenes Verhältnis zwischen Rückstellvermögen und der Fähigkeit zur Energiedissipation zu erreichen.

### 1.3 Vorgehensweise

Die tatsächliche Reaktion auf eine Erdbebenbeanspruchung ist im Fall von auf Gleitpendellagern gegründeten Baustrukturen äußerst komplex. Die von den Erschütterungen hervorgerufenen Relativverschiebungen in der Isolierebene werden hierbei durch eine Vielzahl von Einflussfaktoren bestimmt, die vor allem durch die Eigenperiode des isolierten Systems  $T$ , den in den Gleitflächen vorhandenen Reibkoeffizienten  $\mu$  sowie dem Rückstellverhalten im Allgemeinen gegeben sind. In diesem Zusammenhang kommt aber auch dem Verlauf und der Charakteristik der Erdbebenanregung enorme Bedeutung zu. Dies gilt in verstärktem Maße, wenn das System des Gleitpendellagers als räumliches System begriffen wird und beide horizontalen Beschleunigungskomponenten der E-W und der N-S-Richtung zeitgleich betrachtet werden. Eine realitätsnahe Abbildung des tatsächlichen Verhaltens setzt daher eine entsprechend gesamtheitliche Modellierung voraus.

Zu Beginn der vorliegenden Arbeit werden zunächst die im Erdbebeningenieurwesen allgemein gebräuchlichen Begriffe und Phänomene eingeführt und erläutert, um in Anschluss daran näher auf die üblicherweise bei der Erdbebenbemessung verwendeten Rechen-Algorithmen und Methodiken einzugehen. Im nächsten Schritt wird ein Überblick der derzeit generell zur Verfügung stehenden Erdbebenschutzsysteme gegeben und darauf aufbauend das Prinzip und die Funktionsweise des Gleitpendellagers eingehend hergeleitet. Die Dokumentation und Interpretation der an der Universität der Bundeswehr München an Gleitpendellagern durchgeführten Versuche ist Gegenstand des darauf folgenden Kapitels.

Anschließend wird das Augenmerk auf die eigentliche Thematik der Arbeit in Form des Rückstellverhaltens von Gleitpendellagern gerichtet. Dazu werden zunächst die diesbezüglichen, in den einschlägigen Normenwerken aufgeführten und hinterlegten Regelungen dargestellt und hin-

sichtlich der Anwendung auf Gleitpendellager kritisch hinterfragt. Um sich darauf folgend dem im Erdbebenfall tatsächlich einstellenden Rückstellverhalten anzunähern, wird das Phänomen der fußpunkterregten Gleitbewegung zunächst auf Grundlage von vereinfachten Modellen untersucht. Dazu wird ein auf einer geneigten Fläche befindlicher Gleitkörper unterschiedlichen Fußpunktanregungs-Szenarien ausgesetzt und das Verhalten sowohl analytisch als auch mit Hilfe von entsprechenden FE-Modellen hergeleitet und nachvollzogen. Diese Vorgehensweise dient unter anderem auch der Verifikation der im FE-Modell verwendeten Rechenalgorithmen hinsichtlich der Anwendung von Kontaktelementen in Kombination mit Zeitverlaufsberechnungen. Aufbauend auf die so gewonnenen Ergebnissen und Erkenntnissen wird dann ein räumliches FE-Modell des tatsächlichen Gleitpendellagers mit dem Ziel abgeleitet, ein hinsichtlich der Rechenzeit kostengünstiges und in Bezug auf die Ergebnisse dennoch realitätsnahes Simulationsmodell zu generieren, das es erlaubt, auch eine größere Anzahl von Zeitverlaufsberechnungen aufgrund des optimierten Rechenaufwands durchzuführen. Anhand der erhaltenen Ergebnisse werden die bisher zur Verfügung stehenden Kriterien auf Plausibilität hin geprüft und bewertet und anschließend eine im Vergleich dazu einfach anzuwendende und aussagekräftige Bestimmungsgleichung vorgeschlagen, mit der sich die maximal zulässigen Reibkoeffizienten in sinnvoller Art und Weise festlegen lassen.

## Kapitel 2

# Grundlagen des Erdbebeningenieurwesens

### 2.1 Auswirkungen von Erdbeben auf die Zivilisation

Zu den Naturkatastrophen mit verheerenden Auswirkungen auf das menschliche Leben, verbunden mit meist beträchtlichem volkswirtschaftlichen Schaden, sind neben gravitatorisch bedingten Massenbewegungen vor allem Ereignisse klimatischen und tektonischen Ursprungs zu zählen. Während Erdbeben, Tsunamis und Vulkanausbrüche vorwiegend nicht anthropogenen Ursprungs sind, wird das gehäufte Auftreten von meteorologischen Ereignissen wie Wirbelstürmen, Orkanen oder Überschwemmungen vor allem auch auf die durch den Menschen verursachte Klimaerwärmung zurückgeführt. Aufgrund der exponentiell anwachsenden Weltbevölkerung, insbesondere aber durch die zunehmende Wertekonzentration in risikoexponierten Gegenden ist all diesen Naturkatastrophen jedoch ein zunehmendes Gefahrenpotential gemeinsam. Zu einer solch gefährdeten Region ist beispielsweise die Großstadt Tokio mit über 12 Mio. Einwohnern zu zählen, deren potentieller wirtschaftlicher Schaden von der Versicherungsindustrie für den Fall eines verheerenden Großbebens auf etwa 1 000-2 000 Mrd. US \$ taxiert wird.

Als im Vergleich dazu positiv zu werten ist die Tendenz, dass mit zunehmender wirtschaftlicher Entwicklung einer betroffenen Region auch eine Verschiebung von Menschenverlusten hin zu Sachschäden zu verzeichnen ist. In der Regel sind damit jedoch gleichzeitig ökonomische Folgen von beträchtlichem Ausmaß verbunden. So betrug beispielsweise der volkswirtschaftliche Gesamtschaden des Northridgebebens vom 17.01.1994 etwa 44 000 Mio US \$ (Stand 2005) bei 61 Todesopfern, wohingegen sich der Gesamtschaden des Erdbebens in Kobe, Japan, vom 17.01.1995 bei 6 430 Todesopfern sogar auf über 100 Mrd. US \$ aufsummierte. Das Großbeben in der chinesischen Provinz Sichuan vom 14.05.2008 zeichnete für den größten gesamtwirtschaftlichen Einzelschaden des Jahres 2008 von 85 Mrd. US \$. verantwortlich und verursachte im Gegensatz zu den zuvor genannten Erdbeben zudem eine humanitäre Katastrophe mit 70 000

Toten, 18 000 noch vermissten Menschen und 374 000 Verletzten. Das tragische Ausmaß dieses Ereignisses ist dabei vor allem der dort vorhandenen schlechten Bausubstanz und Infrastruktur geschuldet.

Ein Aspekt besonderer Brisanz liegt in den potentiellen Folgeschäden, die sich als Folge der Einwirkung von Naturkatastrophen tektonischen Ursprungs ergeben können. Als besonders gefährdet in dieser Hinsicht sind zum Beispiel Bauwerke wie Atomkraftwerke oder Staudämme einzustufen. So wurde beim Erdbeben vom 16.07.2007, das die Präfektur NIIGATA erschütterte, nicht nur die japanische Automobilindustrie empfindlich getroffen, sondern auch das weltweit größte Atomkraftwerk von der Naturkatastrophe erfasst. Obwohl die hierfür nach den Bemessungsvorschriften zugrunde gelegten Werte der Bodenbeschleunigungen von den real gemessenen Werten um das dreifache überschritten wurden, sind bis auf kleinere Mengen freigesetzter radioaktiver Substanzen keine schwerwiegenden strukturellen Schäden festgestellt worden. Dies ist vor allem den für solche Anlagen hohen Sicherheitsmargen zu verdanken, wengleich aufgrund der nachfolgenden Reparaturarbeiten und der für notwendig erachteten erdbebensicheren Bauwerksertüchtigung Betriebsunterbrechungsschäden und Wiederinstandsetzungskosten in Milliardenhöhe die Folge waren.

Abschließend ist die enorme Bedeutung einer intakten oder zumindest in weiten Teilen nutzbaren Verkehrsinfrastruktur nach dem Erdbebenfall hervorzuheben, ohne die eine Durchführung von Rettungsmaßnahmen entweder extrem erschwert oder im schlimmsten Fall gar nicht möglich ist. Besonderes Augenmerk ist in diesem Zusammenhang auf Brückenbauwerke an strategisch bedeutsamen Verkehrswegen zu legen, deren möglichst vollständigen Funktionstüchtigkeit gerade nach einem Erdbebenereignis größte Bedeutung zukommt [104].

Werden die möglichen Folgen von Erdbebenereignissen in Betracht gezogen, wird deutlich, dass dem Erdbebenschutz bzw. dem erdbebensicheren Bauen hinsichtlich der Gefährdung des menschlichen Lebens, aber auch aus wirtschaftlichen Erwägungen heraus, eine enorme Bedeutung zukommt. Aufgrund der seltenen Auftretenswahrscheinlichkeit solcher Extremereignisse ist die davon ausgehende Gefahr, anders als bei der Versicherungsindustrie, im Bewusstsein der Bevölkerung und der Behörden jedoch oftmals wenig verankert.

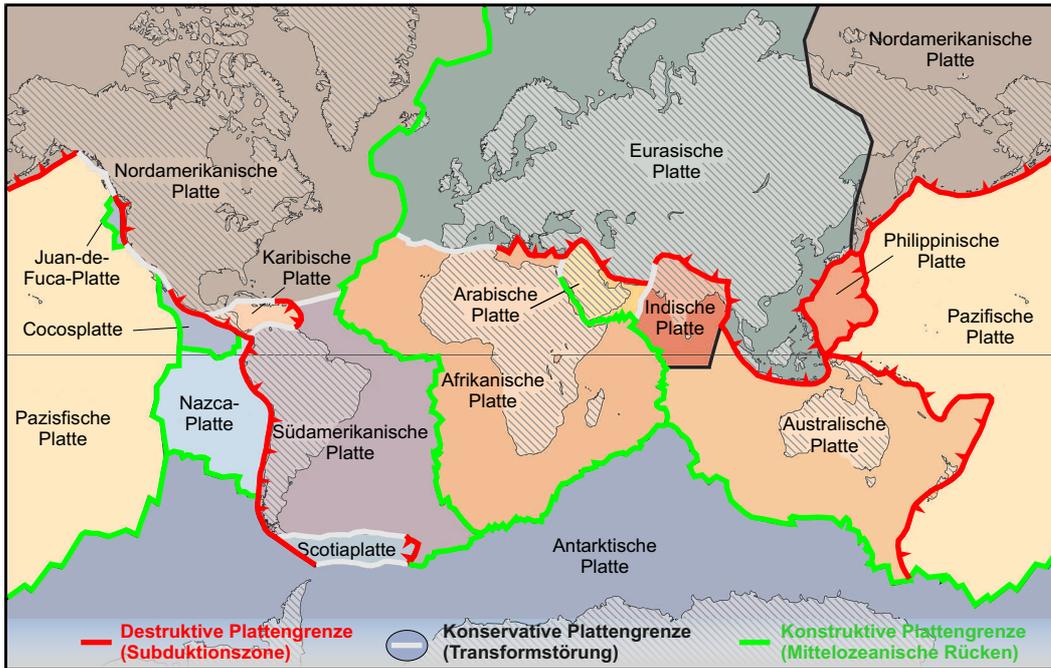
## 2.2 Entstehung von Erdbeben

Als Ursache für Erdbeben kommen verschiedene Mechanismen in Betracht, zu denen Vulkanaktivitäten, Einsturz von unterirdischen Hohlräumen, stauseeinduzierte Beben, künstliche Ereignisse wie z.B. Sprengstoffexplosionen, aber vor allem die Plattentektonik zählen. Während den Erstgenannten eine eher untergeordnete Rolle zukommt, geht die vorrangige Gefährdung von Ereignissen tektonischen Ursprungs aus, da diese nicht nur für über 95% der Erdbeben

verantwortlich zeichnen, sondern zudem auch einen einen vergleichsweise großen Einflussbereich erfassen. Etwa 10 bis 12 Erdbeben jährlich erreichen eine Größenordnung, die katastrophale Zerstörungen zur Folge hat, während von rund 2000 Beben pro Jahr immer noch merkliche Schäden verursacht werden. Insgesamt ereignen sich weltweit jährlich über 1 000 000 Erdbeben, von denen etwa 800 000 messtechnisch erfasst und registriert werden [98].

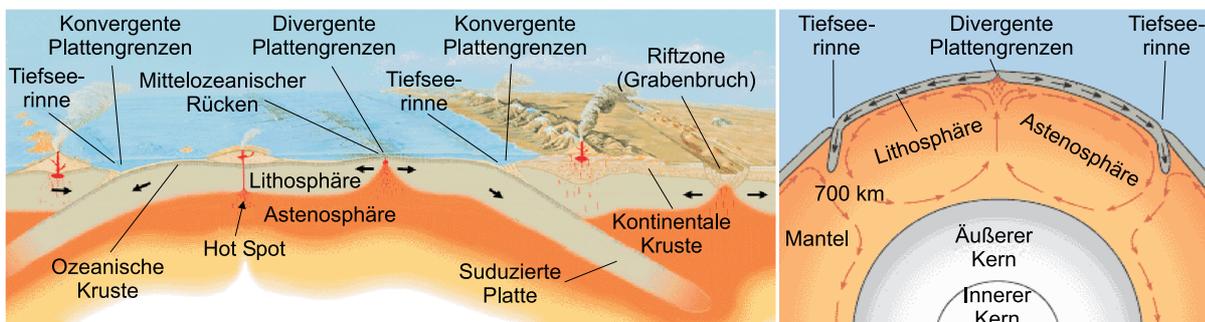
Die Theorie der Kontinentalverschiebung geht vornehmlich auf den deutschen Meteorologen ALFRED WEGENER zurück, der 1915 erstmals die These vertrat, dass die Kontinente Südamerika und Afrika aus dem Auseinanderbrechen eines ehemals größeren Kontinents namens Pangäa hervorgegangen sind. Neben weiteren Hinweisen führt er als Begründung vor allem die sich entsprechenden Küstenlinien dieser beiden Kontinente auf, deren Konturen sich insbesondere bei der Betrachtung der unter Wasser liegenden Schelfränder auffällig exakt gleichen. Als Ursache für eine solche Kontinentaldrift wurde erstmals von ARTHUR HOLMES im Jahr 1928 das Vorhandensein von Wärmeströmen im Erdinneren postuliert. Erst aber die Entdeckung magnetischer Streifenmuster am Ozeanboden zu beiden Seiten der Mittelozeanischen Rücken in den 1960-er Jahren führte zur breiten Anerkennung des Konzepts der Kontinentalverschiebung, da dadurch das Vorhandensein einer fortwährenden Ozeanboden-Spreizung eindeutig belegt werden konnte, die zur heutigen Theorie der Plattentektonik führte [46]. Die Ursachen hingegen sind noch nicht vollständig geklärt und nach wie vor Gegenstand intensiver Forschungen. Die am häufigsten vertretene Meinung besagt, dass die Plattenbewegungen von so genannten Konvektionsströmen initiiert werden, die eine Folge des Wärmeübergangs vom heißen Erdkern hin zum Erdmantel sind. Die Ursache der hierfür benötigten Energie ist ebenso wie die Lage und die Abfolge dieser Konvektionsströme umstritten. Als wahrscheinlich gilt aber die Theorie, dass ein Teil der Energie von radioaktiven Zerfallsprozessen im Erdinneren und ein weiterer Teil von der Akkretionsenergie, also dem Entstehungsprozess der Erde vor 4.5 Milliarden Jahren herrührt.

Die kalte und feste Erdkruste, deren Dicke zwischen 30 km und 70 km variiert, wird in sieben große und mehrere kleine Lithosphärenplatten eingeteilt, die in der Regel durch mittelozeanische Rücken oder Tiefseerinnen voneinander getrennt sind, siehe Bild 2.1. Unterschieden wird zwischen der ozeanischen Kruste, die sich am Meeresgrund durch den Vorgang des Auseinanderdriftens der Plattengrenzen und des Emporsteigens von flüssigem Magma fortwährend neu bildet, worauf deren vergleichsweise hohe Dichte von 2.9 bis 3.1  $g/cm^3$  zurückzuführen ist, und dem kontinentalen Krustengestein, das eine mittlere Gesteinsdichte von 2.67  $g/cm^3$  aufweist. Die geringere spezifische Dichte ist auf den Entstehungsprozess zurückzuführen, bei dem im Laufe der Erdgeschichte die weniger dichten Mineralien zur Erdoberfläche aufgestiegen sind und für die Bildung und das "Aufschwimmen" der Kontinente gesorgt haben. Der Ozeanboden hingegen befindet sich in einem ständig wiederkehrenden Kreislauf, da sich dieser nach Neubildung von den Spreizungszonen weg in Richtung der Tiefseerinnen bewegt, um dort aufgrund seiner höheren spezifischen Dichte unter die Kontinentalplatten abzutauchen und nach Erreichen



**Bild 2.1:** Tektonische Lithosphärenplatten, Quelle: United States Geological Survey (USGS)

einer entsprechenden Tiefe von bis zu 700 km wieder aufgeschmolzen zu werden. Folglich ist die Dynamik der Erde im Wesentlichen von der Bewegung der ozeanischen Lithosphärenplatten bestimmt, wohingegen sich die Kontinentalschollen dazu eher passiv verhalten. Der Grund hierfür ist auf den Antriebsmechanismus zurückzuführen, der sich zum einen als Rückenschub im Bereich des mittelozeanischen Rückens und zum anderen als Plattenzug im Bereich der Subduktionszone äußert und damit lediglich an den Plattenrändern der ozeanischen Lithosphäre wirkt. Die Druckbeanspruchung ist hierbei durch das aufsteigende Magma in der Spreizungszone verursacht, während die Zugbeanspruchung eine Folge des Abtauchvorgangs der spezifisch schwereren Platte in den Erdmantel darstellt. In Bild 2.2 ist zur Verdeutlichung der oben beschriebenen Mechanismen der schematische Ablauf von der Entstehung der ozeanischen Kruste bis hin zur Wiederaufschmelzung im Kernmantel im Schnitt dargestellt.



**Bild 2.2:** Modell der Plattengrenzen

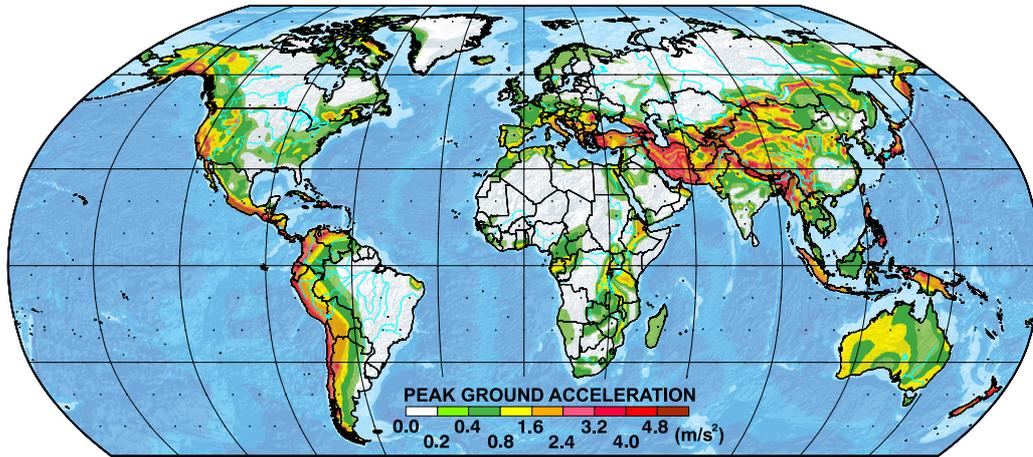
Informationen über Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der einzelnen Platten werden heut-

zutage mit Hilfe des GPS gewonnen. Die absoluten gemessenen Plattenbewegungen reichen dabei von einigen Millimetern bis zu maximal 10 Zentimetern pro Jahr. Die in der Folge zwangsweise auftretenden Relativverschiebungen an den Plattengrenzen, die je nach Bewegungsrichtung in Kollisionszonen, Transformstörungen und Spreizungszonen unterschieden werden, verursachen in Abhängigkeit der vorhandenen Gesteinsbruchfestigkeiten einen mit der Zeit zunehmenden Spannungsaufbau. Sobald die Scherfestigkeit der angrenzenden Gesteinsart erreicht ist, erfolgt der unausweichliche Entlastungsbruch, verbunden mit der schlagartigen Freisetzung der aufgestaute Energie. Die Größenordnung kann dabei, in Abhängigkeit der Bruchlänge und vorhandener Bruchfestigkeit des Gesteins, diejenige einer Wasserstoffbombe um das Hundertfache übertreffen.

Die Entstehung von Erdbeben setzt also das Vorhandensein einer spröden und bruchfähigen Umgebung an den Plattengrenzen voraus. Da die Gesteinszähigkeit in Abhängigkeit von der Temperaturgradienten zum Erdkern hin zunimmt, reagiert das Gestein mit zunehmender Tiefe zunehmend duktil. In der Folge entstehen die meisten Erdbeben oberflächennah als Flach- bzw. Krustenbeben in Tiefen von 5 bis 70 km. Im Widerspruch hierzu ist aber auch das Auftreten von sogenannten Tiefenbeben als Folge des Subduktionsvorgangs der ozeanischen Lithosphärenplatten möglich. Hierbei erfolgt der Abtauchvorgang des Ozeanbodens unter die Kontinentalplatten wesentlich schneller als die damit einhergehende Erwärmung, so dass das Gestein in der Folge bis zu Tiefen von 700 km bruchfähig bleibt. Während mit etwa 70% der Großteil aller Beben oberhalb einer Tiefe von 70 km entsteht, sind lediglich 8% der Entstehungsherde aller Beben Bereichen unterhalb der Grenze von 300 km zuzuordnen.

Seismisch aktive Erdregionen sind demnach vorrangig in der Nähe von Plattengrenzen angesiedelt und durch die Horizontalverschiebung und/oder die Auf- und Abschiebung der einzelnen Platten bedingt. So sind die Erdbeben in Japan und auf den Philippinen hauptsächlich auf den Vorgang der Subduktion zurückzuführen, während die in das Landesinnere von Kalifornien ragende ozeanische Platte und das damit verbundene schräge Aufreißen des San-Andreas-Grabens ein Beispiel für die Folgen der Horizontalverschiebung darstellt. Diese als Transformstörung bekannte Erscheinung ist ebenso wie die japanischen Erdbebenaktivität der sogenannten zirkumpazifischen Erdbebenzone bzw. dem "Ring of Fire" zuzuordnen, dessen Verlauf die den Pazifik umschließenden Plattengrenzen nachzeichnet. Etwa 80 % aller weltweit auftretenden Erdbeben nehmen hier ihren Ursprung. In Anlehnung an den zirkumpazifischen Erdbebengürtel werden die tektonischen Störungen zwischen Europa und Asien als "Alpide Belt" bezeichnet. Die davon im Mittelmeerraum aufgestaute Erdbebenenergie entlädt sich hierbei zu etwa 60 % in Griechenland [98]. Deutschland ist aufgrund des Fehlens tektonischer Plattengrenzen lediglich von so genannten Intraplattenbeben mit maximalen Magnituden der Größenordnung von etwa 6 auf der Richterskala bedroht. Deren Entstehung ist auf das Vorhandensein von geologischen Schwächezonen innerhalb der Platten zurückzuführen, die aufgrund der an den Plattengrenzen eingeleiteten Druckbeanspruchung ebenfalls schlagartig versagen können.

In Bild 2.3 ist die im Rahmen einer internationalen Forschungstätigkeit erarbeitete Weltgefährdungskarte dargestellt, auf der die potentielle Erdbebengefährdung in Form von Spitzenbeschleunigungswerten durch farblich abgestuften Bereiche wiedergegeben ist. Den Werten wurde eine Überschreitungswahrscheinlichkeit von 10% in 50 Jahren zugrunde gelegt, so dass alle 475 Jahre mit einem entsprechenden Erdbeben zu rechnen ist.



**Bild 2.3:** Weltkarte der Erdbebengefährdung, nach [47]

Abschließend soll noch auf einige Sonderaspekte von tektonischen Erdbeben hingewiesen werden, wengleich diese für die Thematik der Erdbebenisolierung eher weniger von Belang sind. So ist bei der Gründung auf sandigen Böden mit geringer Wasserpermeabilität besondere Vorsicht geboten, da hier die Gefahr einer durch das Beben ausgelösten Bodenverflüssigung besteht. Erdbeben, bei denen die Bruchfläche bis an die Erdoberfläche heranreicht, verursachen sogenannte Dislokationen, die im Boden als Risse, Spalten, Versetzungen und Reliefänderungen auftreten, deren Auswirkungen zwar entsprechend lokal begrenzt sind, denen baulich aber nur schwerlich begegnet werden kann. Eine große Gefahr geht ferner auch von durch Seebeben verursachten Flutwellen, den Tsunamis, aus. Im Vergleich zu den normalen, durch Wind verursachten Wellen entstehen diese nicht an der Wasseroberfläche, sondern entwickeln sich vielmehr aus der Bewegung großer Wassermassen, die sich bei Erreichen der flachen Küstengewässer aufgrund ihrer hohen Fortpflanzungsgeschwindigkeit von etwa 1 000 km/h zu einer Höhe von bis zu 30 m aufbauen können.

## 2.3 Seismologische Begriffe

### 2.3.1 Intensität und Magnitude

Um die Stärke eines Erdbebens einschätzen zu können, wurden Ende des 18. Jahrhunderts erstmals Erdbebenskalen entwickelt, mit deren Hilfe eine Eingruppierung in definierte Inten-

sitätsklassen ermöglicht wurde. Die Kriterien hierfür unterliegen der subjektiven Einschätzung des Betrachters vor Ort und beziehen sich auf hör- und fühlbare Beobachtungen, menschliche Verhaltensmuster, Gebäudeschäden sowie auf landschaftliche Auswirkungen. Folglich handelt es sich hierbei um eine nichtinstrumentelle Klassifizierung, die von der örtlichen Bauweise ebenso wie von den Bodenverhältnissen beeinflusst wird. Mit der Zeit wurde eine Vielzahl von Erdbebenskalen entwickelt, u.a. die MERCALLI-Skala (1905), die MEDWEDEW-SPONHEUER-KARNIK-Skala (1964) oder aktuell die Europäische Makroseismische Skala (1998), die in Tabelle 2.1 in ihrer Kurzform wiedergegeben ist. Da die Erdbebenstärke in Abhängigkeit von der Bodenbeschaffenheit mit der Entfernung abnimmt, lassen sich ausgehend vom Erdbebenherd Zonen unterschiedlicher Intensität angeben. Indem die Orte mit gleicher Erdbebenintensität durch geschlossene Linienzüge voneinander getrennt werden, lassen sich diese in so genannten Isoeistenkarten als Erdbebenzonen darstellen.

**Tabelle 2.1:** Kurzform der makroseismischen Intensitätsskala EMS-98 - aus [48]

<b>EMS Intensität</b>	<b>Definition</b>	<b>Beschreibung der maximalen Wirkungen (stark verkürzt)</b>
<b>I</b>	<b>nicht fühlbar</b>	Nicht fühlbar.
<b>II</b>	<b>kaum bemerktbar</b>	Nur sehr vereinzelt von ruhenden Personen wahrgenommen.
<b>III</b>	<b>schwach</b>	Von wenigen Personen in Gebäuden wahrgenommen. Ruhende Personen fühlen ein leichtes Schwingen oder Erschüttern.
<b>IV</b>	<b>deutlich</b>	Im Freien vereinzelt, in Gebäuden von vielen Personen wahrgenommen. Einige Schlafende erwachen. Geschirr und Fenster klirren, Türen klappern.
<b>V</b>	<b>stark</b>	Im Freien von wenigen, in Gebäuden von den meisten Personen wahrgenommen. Viele Schlafende erwachen. Wenige werden verängstigt. Gebäude werden insgesamt erschüttert. Hängende Gegenstände pendeln stark, kleine Gegenstände werden verschoben. Türen und Fenster schlagen auf oder zu.
<b>VI</b>	<b>leichte Gebäude- schäden</b>	Viele Personen erschrecken und flüchten ins Freie. Einige Gegenstände fallen um. An vielen Häusern, vornehmlich in schlechterem Zustand, entstehen leichte Schäden wie feine Mauerrisse und das Abfallen von z.B. kleinen Verputzteilen.
<b>VII</b>	<b>Gebäude-</b>	Die meisten Personen erschrecken und flüchten ins Freie.

*Weiter auf der nächsten Seite*

EMS Intensität	Definition	Beschreibung der maximalen Wirkungen (stark verkürzt)
	<b>schäden</b>	Möbel werden verschoben. Gegenstände fallen in großen Mengen aus Regalen. An vielen Häusern solider Bauart treten mäßige Schäden auf (kleine Mauerrisse, Abfall von Putz, Herabfallen von Schornsteinteilen). Vornehmlich Gebäude in schlechterem Zustand zeigen größere Mauerrisse und Einsturz von Zwischenwänden.
<b>VIII</b>	<b>schwere Gebäude- schäden</b>	Viele Personen verlieren das Gleichgewicht. An vielen Gebäuden einfacher Bausubstanz treten schwere Schäden auf; d.h. Giebelteile und Dachsimse stürzen ein. Einige Gebäude sehr einfacher Bauart stürzen ein.
<b>IX</b>	<b>zerstörend</b>	Allgemeine Panik unter den Betroffenen. Sogar gut gebaute gewöhnliche Bauten zeigen sehr schwere Schäden und teilweisen Einsturz tragender Bauteile. Viele schwächere Bauten stürzen ein.
<b>X</b>	<b>sehr zerstörend</b>	Viel gut gebaute Häuser werden zerstört oder erleiden schwere Beschädigungen.
<b>XI</b>	<b>verwüstend</b>	Die meisten Bauwerke, selbst einige mit gutem erdbebengerechtem Konstruktionsentwurf, werden zerstört.
<b>XII</b>	<b>vollständig verwüstend</b>	Nahezu alle Konstruktionen werden zerstört.

Von der Charakterisierung der Erdbeben nach Stärke und Zerstörungskraft in Form von Intensitätsskalen unterscheiden sich die im 19. Jahrhundert entwickelten Magnitudenskalen, die sich nicht auf die lokalen Auswirkungen beziehen, sondern vielmehr ein globales Maß der Erdbebenstärke darstellen. Da aufgrund des Entstehungsprozesses von Erdbeben die direkte Messung der dabei freigesetzten Energie nicht möglich ist, wurde die auf physikalischen Größen basierende Registrierung der Erdbebenstärke erst mit der Entwicklung und der darauf folgenden Verbesserung der sogenannten Seismometer realisierbar. Die Magnitude wird hierbei aus dem Maximalwert der vom Seismometer aufgezeichneten Messwerte ermittelt und als dekadischer Logarithmus der Wellenamplitude gegenübergestellt. Der Zusammenhang zwischen abgestrahlter seismischer Energie  $E$  in [Joule] und der Oberflächenwellenmagnitude lässt sich in Form der empirisch entwickelten Beziehung wie folgt darstellen [8]:

$$M = \frac{2}{3} \cdot (\lg E - 4.8) \quad (2.1)$$

Der Zuwachs um eine Einheit auf der Magnitudenskala bedeutet demnach den Anstieg der Energiefreisetzung um das 32-fache, verbunden mit einer Verzehnfachung der maximalen Wel-

lenamplitude, vergleiche Tabelle 2.2.

**Tabelle 2.2:** Freigesetzte Energie in Abhängigkeit von der Magnitude

Magnitude	Freigesetzte Energie	Veränderung
<b>3</b>	1 995 262 KJ	
<b>4</b>	63 095 734 KJ	mal 32
<b>5</b>	1 995 262 000 KJ	mal 1000
<b>6</b>	63 095 734 000 KJ	mal 31 623
<b>7</b>	1 995 262 000 000 KJ	mal 1 000 000
<b>8</b>	3 095 734 000 000 KJ	mal 31 622 777

Nachdem die ehemals von RICHTER im Jahre 1935 eingeführte Lokalmagnitudenskala insbesondere bei der Abbildung stärkerer Erdbeben Schwächen aufweist, wurde eine Vielzahl weiterer Magnitudenskalen mit dem Ziel entwickelt, möglichst über die gesamte Bandbreite tektonischer Ereignisse zuverlässig Ergebnisse zu liefern. Diese unterscheiden sich vornehmlich in dem zur Magnitudenbestimmung zugrunde gelegten Bereich des Energiespektrums und sind trotz der Skalierung auf die von RICHTER eingeführte Lokalmagnitude oftmals nur bedingt vergleichbar. So ist insbesondere bei Beben, deren Magnitudenwerte oberhalb von 6.5 liegen, immer auch zu prüfen, welche Methode zur Bestimmung verwendet wurde, vergleiche Tabelle 2.3.

Die in der Theorie nach oben hin offenen Magnitudenskalen werden natürlicherweise durch die maximal in der Erdkruste enthaltenen Gesteinsfestigkeiten und den dadurch begründeten Entlastungsbruch begrenzt. Aufgrund dessen lassen sich die maximal erreichbaren Magnitudenwerte auf eine Größenordnung von etwa 9.5 beschränken. Von den über 15 existierenden Skalen sei hier stellvertretend die Oberflächenwellenmagnitude nach GUTENBERG (1945), sowie die heute üblicherweise verwendete Momenten-Magnituden-Skala nach HANKS und KANAMORI (1979) genannt.

**Tabelle 2.3:** Gegenüberstellung unterschiedlicher Magnitudenskalen

Symbol	Bezeichnung	Periodenbereich (s)	Magnitude des Chile-Erdbeben von 1960
$M_L$	Richterskala	0.1 - 1.0	
$m_b$	Raumwellenmagnitude	1.0 - 5.0	
$M_S$	Oberflächenwellenmagnitude	20	8.5
$M_W$	Momenten-Magnitude	> 200	9.5

### 2.3.2 Erbebenherd und Wellenausbreitung

Derjenige Bereich der Verwerfung, von dem ein Erdbeben infolge eines Entlastungsbruchs ausgeht, wird in seiner Gesamtheit als Herdfläche bezeichnet. Vorausgesetzt, dass entsprechende messtechnische Aufzeichnungen vorliegen, lässt sich der Ausgangspunkt dieser Bruchfläche aufgrund unterschiedlicher Laufzeiten der sich davon ausbreitenden seismischen Wellen im Rahmen der physikalisch bedingten Unschärfe rechnerisch lokalisieren. Der Erdbebenherd wird dabei vereinfacht auf ein punktuell so genanntes Hypozentrum reduziert [8]. Der Abstand zu dessen senkrechter Projektion an die Erdoberfläche, der als Epizentrum bezeichnet wird, definiert die Herdtiefe, von der ein maßgeblicher Einfluss auf die Schwere und Ausbreitung eines Bebens ausgeht. Wird ein vom Erdbebenherd entfernter Standort betrachtet, so lässt sich dessen Lage dazu durch die Epizentral- bzw. Hypozentraldistanz beschreiben. In Bild 2.4 ist der Schnitt durch das Herdgebiet eines Dislokationbebens mit den entsprechenden Bezeichnungen schematisch dargestellt.

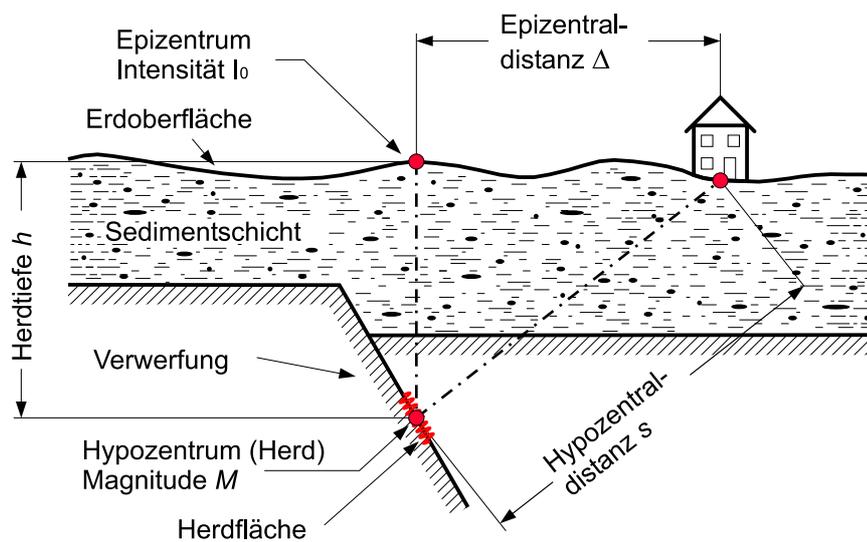


Bild 2.4: Prinzipielle Darstellung eines Herdgebietes, nach [86]

Die bei einem Erdbeben infolge des Bruchvorgangs freigesetzte Energie wird in Form von seismischen Wellen allseitig in den Raum abgestrahlt. Aufgrund der Schwingungsform in bzw. quer zur Ausbreitungsrichtung lassen sich die Longitudinal- bzw. Kompressionswellen von den Scher- bzw. Transversalwellen unterscheiden. Bedingt durch die höhere Fortpflanzungsgeschwindigkeit von ca. 5 bis 13  $km/s$  erreichen die Wellenfronten der Kompressionswellen die Erdoberfläche vor denjenigen der Scherwellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit etwa 3 bis 6  $km/s$  beträgt [98]. Entsprechend werden erstere auch als Primär- und letztere als Sekundärwellen bezeichnet. Die Geschwindigkeit von Raumwellen wird dabei sowohl von der Dichte  $\rho$  als auch vom Steifemodul  $E$  des durchlaufenen Materials bestimmt. Im Fall eines homogen elastischen Kontinuums lässt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Primärwellen in Abhängigkeit des Kompressionsmo-

duls  $K$  wie folgt angeben [94]:

$$v_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \quad (2.2)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Sekundärwellen berechnet sich entsprechend in Abhängigkeit des vorhandenen Schubmoduls  $G$ :

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{2(1 + \nu)}} \quad (2.3)$$

Nachdem der Kompressionsmodul  $K$  mit der Tiefe vergleichsweise stärker ansteigt als die Dichte  $\rho$ , nimmt die Geschwindigkeit von Raumwellen mit der Tiefe ebenfalls zu. Bei Betrachtung der vom Hypozentrum radial austrahlenden Wellenfront wird ersichtlich, dass tieferliegende Wellenpfade eine höhere Geschwindigkeit aufweisen als darüberliegende. Aus dieser variablen Wellengeschwindigkeit erklärt sich, weshalb die in Bild 2.5 dargestellten Primär- und Sekundärwellen zur Erdoberfläche hin gekrümmt verlaufen. Auf diesen Umstand ist u.a. die mit der Entfernung unterschiedliche Charakteristik der Erdbebenerschütterungen zurückzuführen, die sich u.a. in der mit dem Abstand zum Epizentrum zunehmenden Erdbbebendauer äußert. Da Flüssigkeiten und Gase keinen bzw. keinen nennenswerten Scherwiderstand besitzen, können sich Transversalwellen im Gegensatz zu den Kompressionswellen lediglich in Festkörpern ausbreiten, weshalb sich erstgenannte in flüssigen Bereichen des Erdinneren nicht fortpflanzen können.

Die eigentliche Zerstörungskraft der Erdbeben geht jedoch von den so genannten Oberflächenwellen aus, die durch das Auftreffen der Raumwellen an der Erdoberfläche und der damit einhergehenden Reflektion hervorgerufen werden. Im Gegensatz zu den Raumwellen besitzen diese aber keine gleichmäßige, sondern eine mit der Tiefe exponentiell abnehmende Wellenamplitude. Entsprechend wird der Energiegehalt mit der Entfernung weniger stark gedämpft als bei den Raumwellen. Aufgrund unterschiedlicher Bewegungsabläufe werden Oberflächenwellen ebenfalls in zwei Typen unterteilt, nämlich den LOVE- und den RAYLEIGH-Wellen. Ähnlich den Transversalwellen weisen erstgenannte eine zur Ausbreitungsrichtung senkrechte Schwingungsform auf, die aber ausschließlich in der Horizontalen stattfindet. Dagegen beschreibt die RAYLEIGH-Welle eine retrograde elliptische Bewegungsform, die den Boden nicht nur vertikal auf und ab bewegt, sondern auch Schwingungsanteile in Ausbreitungsrichtung enthält. Die vier unterschiedlichen Wellenformen eines Erdbebens sind in Bild 2.5 in ihrer jeweiligen Bewegungsrichtung dargestellt.

Je nach Entfernung zum Epizentrum ändert sich nicht nur die Intensität, sondern auch die Charakteristik eines Erdbebens. Dies ist zum einen in den Geschwindigkeitsdifferenzen der seismischen Wellen untereinander begründet, aber auch durch die an den Grenzflächen auftretenden Reflektions- und Refraktionsvorgänge der Raumwellen bedingt. In Bild 2.6 sind ausgehend vom

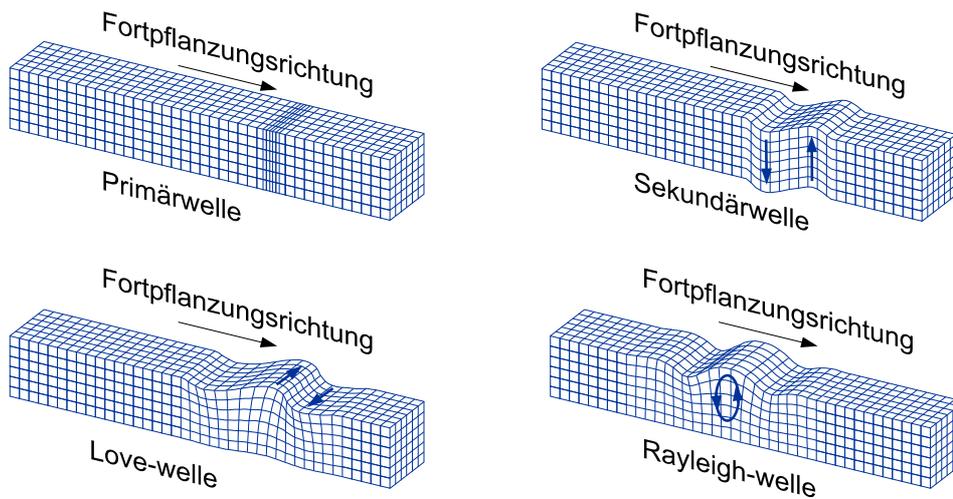


Bild 2.5: Ausbreitung von seismische Wellen

Hypozentrum die Verläufe der einzelnen Wellenpfade bis zum Auftreffen an zwei vom Epizentrum unterschiedlich weit entfernten Standpunkten schematisch dargestellt. Daraus lässt sich leicht erkennen, dass sich die zugeordneten Beschleunigungszeitverläufe entsprechend der zu unterschiedlichen Zeitpunkten eintreffenden Wellenfronten ausbilden.

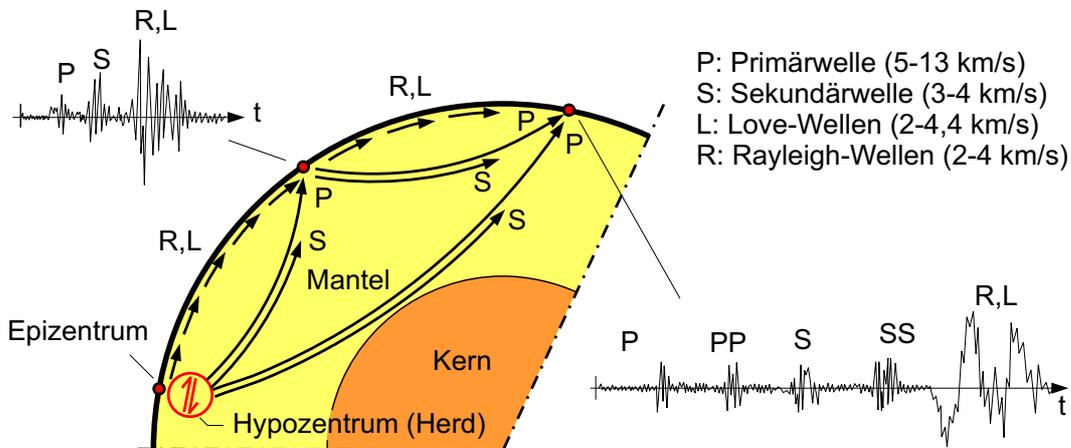


Bild 2.6: Fortpflanzung von seismischen Wellen im Erdinneren

Das zur Tragwerksauslegung benötigte maßgebende Bemessungserdbeben ist für den jeweiligen Standort derart festzulegen, dass damit das Gefährdungspotential, das von einem dort maximal zu erwartenden Erdbeben (Maximal Credible Earthquake, MCE) ausgeht, für eine bestimmte Wiederkehrperiode realistisch erfasst wird [117]. Für die zu untersuchende Region wird dazu vorab ein so genanntes seismotektonisches Modell erstellt, in dem alle potentiellen Erdbebenquellen erfasst sind. Zu diesen zählen nicht nur seismotektonische Störungen, sondern auch Gebiete diffuser Seismizität, für die die geologisch aktiven Strukturen nicht näher bekannt sind. Mit Hilfe von probabilistischen Gefährdungsberechnungen lassen sich in der Folge die Erschütterungspara-

meter mit zugehörigen Eintreffenswahrscheinlichkeiten für den betrachteten Standort berechnen. Wird dieses Vorgehen für ein gewähltes Gefährdungsniveau schematisch auf alle Punkte eines definierten Gitternetzes angewendet, lassen sich entsprechende Erdbebengefährdungskarten erstellen, wie sie in den heutigen Bemessungsnormen Verwendung finden.

### 2.3.3 Messung und seismologische Kennzeichnung von Erdbebenzeitverläufen

Der zeitliche Verlauf von Erdbebenereignissen wird im Allgemeinen in Form von Bodenbeschleunigungen durch speziell zu diesem Zweck eingerichteten Erdbebenmessstationen aufgezeichnet. Ein kompletter Messsatz umfasst dabei die Schriebe aller drei zueinander orthogonalen Koordinatenrichtungen, die in der Regel voneinander getrennt mit Hilfe speziell hierfür entwickelter Seismographen (griech: Erschütterungsschreiber) aufgezeichnet werden. Diese aufgrund ihres Wirkprinzips auch Inertialseismographen (Trägheitsseismographen) genannten Messgeräte bestehen im Prinzip aus einer an einer Federaufhängung gelagerten seismischen Masse, deren Relativbewegungen gegenüber dem Gehäuse durch einen elektrodynamischen Wandler gemessen und anschließend von einer entsprechenden Registriereinheit gespeichert werden. Dabei wird der Umstand genutzt, dass die Beschleunigungswerte der Bodenschwingung proportional zu den im Seismometer aufgezeichneten Relativwegen sind, vorausgesetzt die Amplitudenantwort ist im vorhandenen Messbereich annähernd konstant. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Masse-Feder-Einheit hoch abgestimmt wird, also die Eigenfrequenz des Seismometers weit oberhalb des Frequenzgehalts der Bodenbewegungen liegt [94], siehe auch Kapitel 2.4.5. Oftmals werden Beschleunigungs-Messgeräte jedoch auch nach dem Prinzip der tiefen Abstimmung ausgelegt, womit sich das Ziel einer weitestgehend konstanten Amplitudenantwort ebenso erreichen lässt. Der Messbereich heutiger Breitbandseismometer erstreckt sich üblicherweise von etwa 0.3 Millihertz bis zu 100 Hz, so dass neben anderen Störsignalen auch die von den Meereswellen induzierten Schwingungen als permanentes Hintergrundrauschen registriert werden ( $T \approx 6$  s, Amplituden bis zu 0.01 mm). Im Gegensatz zu den herkömmlichen Aufnehmereinheiten basieren Seismometer neueren Datums jedoch nicht mehr auf der Messung des Relativweges zwischen seismischer Masse und Gehäuse, sondern nutzen vielmehr die Möglichkeit, die einwirkenden Trägheitskräfte direkt zu messen, indem die Schwingmasse mit der Bodenbewegung mitgeführt wird. Dazu wird eine elektromagnetisch erzeugte Kraft derart geregelt, dass die seismische Masse auch im Fall äußerer Erschütterungen möglichst exakt in ihrer Nullstellung verbleibt. Durch die Aufzeichnung dieser Kraft ist auch die auf die seismische Masse einwirkende Bodenbeschleunigung unmittelbar bekannt [127]. Neben dem eigentlichen Aufgabengebiet der Seismologie hat die Entwicklung von hochauflösenden Breitbandseismometern zu einem eigenen Wissenschaftszweig, der so genannten Erdspektroskopie geführt, dessen Forschungsgegenstand darin besteht, das Eigenschwingungsverhalten der Erdkugel nachzuvollziehen. Als Anregungsmechanismen kommen

neben den Gezeitenkräften und der Erdrotation auch Erdbebenereignisse in Betracht, deren Auswirkungen selbst noch nach mehreren Tagen nachweisbar sind [133].

Während die Bodenbeschleunigungen eines Bebens in Form der durch die Seismographen aufgezeichneten Messschriebe direkt vorliegen, müssen die zugehörige Bodengeschwindigkeit und Bodenverschiebung erst durch ein- bzw. zweimaliges Integrieren ermittelt werden. Da sich bereits geringfügige Fehler in der Beschleunigungsaufzeichnung empfindlich auf die Integrationsergebnisse auswirken, wurden verschiedene Ansätze und Prozeduren zu deren Korrektur entwickelt. Trotz alledem ist insbesondere die Ermittlung der durch ein Beben verursachten bleibenden Restverschiebung stets mit Zweifeln behaftet [8]. Die Beschleunigungszeitverläufe werden üblicherweise als Akzellerogramm und die der Geschwindigkeit bzw. der Verschiebung entsprechend als Velocitygramm bzw. Seismogramm bezeichnet. Der zeitliche Verlauf von Akzellerogrammen lässt sich generell in die folgenden drei Phasen unterteilen. Das Eintreffen der P-Wellen kennzeichnet die so genannte Ankündigungsphase, die von der Intensivbewegungsphase mit den energietragenden S- und L-Wellen gefolgt wird, und der sich letztendlich die Abklingphase anschließt.

Maßgeblich für die Beurteilung des Gefährdungspotentials eines Erdbebens aus ingenieurmäßiger Sicht sind vor allem die Größenordnung der Bodenbeschleunigungen in Zusammenhang mit deren Frequenzgehalt sowie die Dauer der Intensivbewegungsphase. Dennoch werden oftmals lediglich die Spitzenwerte der Bodenbeschleunigungen als Maß der Stärke eines Erdbebens ausgewiesen (PGA: **P**eak **G**round **A**cceleration), obwohl diese üblicherweise in Frequenzbereiche fallen, die für die üblichen Ingenieurbauwerke eher weniger kritisch sind. Die hierbei erreichten Spitzenwerte liegen in seltenen Extremfällen sogar oberhalb derjenigen der Erdbeschleunigung, wie dies zum Beispiel bei dem Erdbeben in Northridge, Südkalifornien von 1994 der Fall war, für das eine maximale Horizontalbeschleunigung von  $a_{g,max} = 1.82 \cdot g$  registriert worden ist [8]. In Europa liegen die maximal zu erwartenden Spitzenbeschleunigungen in der Regel aber eher in einer Größenordnung von  $\sim 1 \text{ m/s}^2$ , wohingegen in seismisch hochaktiven Regionen mit Maximalwerten zwischen  $2 - 8 \text{ m/s}^2$  zu rechnen ist.

Die seismologische Bewertung von Erdbeben erfolgt vornehmlich mit den nachfolgend beschriebenen Zeitbereichskennwerten, mit deren Hilfe sich Rückschlüsse auf den Energiegehalt, die Starkbebendauer sowie die effektiven Bodenbeschleunigungen ziehen lassen. Als Maß für den gesamten Energiegehalt der eintreffenden Bodenwellen in der jeweils betrachteten Richtung wurde von ARIAS 1970 die nach ihm benannte ARIAS-Intensität eingeführt [37], die als Integral über den quadrierten Beschleunigungsverlauf von  $a(t)$  definiert ist. Die Integrationsgrenzen erstrecken sich über den gesamten Beschleunigungszeitverlauf, also von  $t = 0$  bis zum theoretischen Grenzwert  $t = \infty$ .

$$I_A = \frac{\pi}{2 \cdot g} \int_0^{\infty} a(t)^2 dt \quad \left[ \frac{m}{s} \right] \quad (2.4)$$

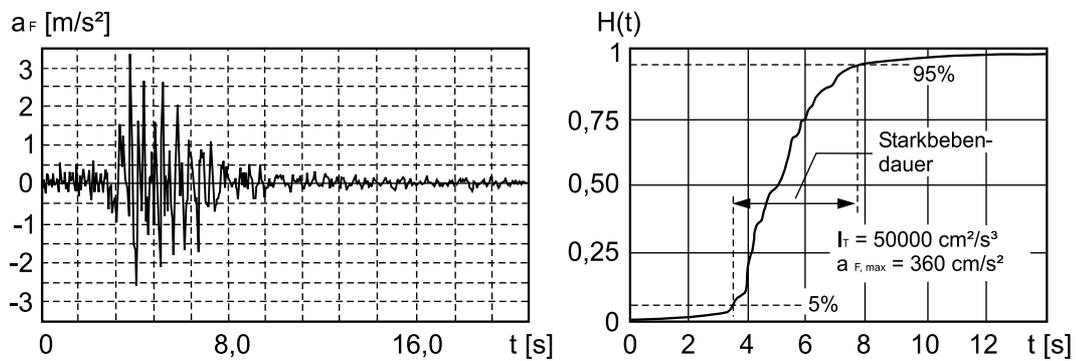
Die zeitliche Entwicklung der an einem Standort eintreffenden Erdbebenenergie lässt sich anhand des HUSID-Diagramms beurteilen, dessen Rechenvorschrift wie folgt lautet:

$$H(t) = \frac{1}{I_A} \cdot \int_0^t a(\tau)^2 d\tau \quad (2.5)$$

Als Abwandlung zur ARIAS-Intensität ist die so genannte totale Intensität bekannt, die sich lediglich über die zuvor festzulegende Starkbebendauer  $T_E$  erstreckt [84]. Im Fall, dass das Akzellerogramm in der Einheit  $m/s^2$  vorliegt, lautet die Berechnungsformel entsprechend:

$$I_T = \int_0^{T_E} a(t)^2 dt \quad \left[ \frac{m^2}{s^3} \right] \quad (2.6)$$

Neben anderen Vereinbarungen, wie z.B. der Überschreitung eines bestimmten Schwellenwertes (meist  $0.05 \cdot g$ ), wird die Starkbebendauer vielfach als die Zeitspanne zwischen der 5%- und 95%-Marke des HUSID-Diagramms definiert [90]. In Bild 2.7 ist der Beschleunigungsverlauf der NS-Komponente des Friaul-Erdbebens von 1976 sowie das daraus berechnete HUSID-Diagramm mit Angabe der Starkbebendauer dargestellt. Die totale Intensität ergibt sich zu  $I_T = 50\,000 \text{ cm}^2/s^3$ .



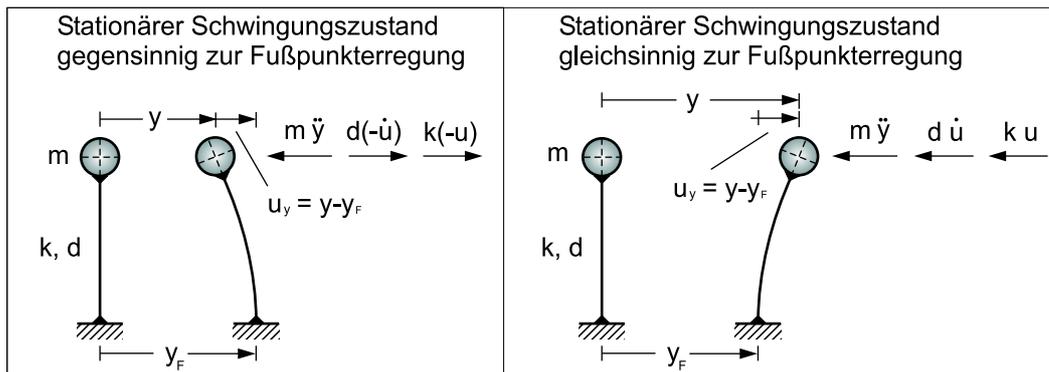
**Bild 2.7:** Beschleunigungsverlauf und Husid-Diagramm der NS-K des Friaul-Bebens nach [94]

Die mittlere quadratische Bodenbeschleunigung, auch als RMS-Wert (**R**oot **M**ean **S**quare) bezeichnet, ist direkt mit dem Energiegehalt des Beschleunigungsverlaufs verknüpft und berechnet sich aus der Wurzel über dem gemittelten Wert der totalen Intensität. Diese wird somit nicht allein durch den Beschleunigungsverlauf, sondern auch durch die Definition der Starkbebendauer  $T_E$  beeinflusst.

$$RMS = \sqrt{\frac{I_T}{T_E}} \quad \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (2.7)$$

## 2.4 Bauwerksreaktion auf Fußpunkterregung

Die Erdbebenbeanspruchung von baulichen Anlagen ist die Folge der durch das Beben hervorgerufenen Bodenerschütterungen, die als Fußpunkterregung in Form transienter, unregelmäßiger Stöße über das Fundament auf die darüberliegende Tragstruktur einwirken. Im hypothetischen Fall, dass die betrachtete Tragstruktur keinerlei Nachgiebigkeit aufweist, würde diese als Starrkörper exakt dieselbe Bewegung wie der Boden erfahren, mit der Konsequenz, dass die auftretenden Trägheitskräfte dem Produkt aus Beschleunigung und Bauwerksmasse entsprechen würden. Da reale Bauwerke jedoch je nach Bauweise eine mehr oder minder ausgeprägte Nachgiebigkeit aufweisen, ist deren Struktur nicht in der Lage, den Untergrundverschiebungen zeitgleich zu folgen. Vielmehr tritt in Abhängigkeit der Steifigkeits- und Massenverteilung eine Relativverschiebung zwischen Bauwerk und Fundament auf, die sich gegenüber dem Starrkörperansatz sowohl verstärkend als auch vermindern auf die Bauwerksbeanspruchung auswirken kann. Wird die bauliche Struktur vereinfacht auf einen Einmassenschwinger reduziert, ergibt sich gemäß Bild 2.8 die folgende, das Problem beherrschende Differentialgleichung.



**Bild 2.8:** Einfreiheitsgradschwinger mit Fußpunkterregung

$$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \quad (2.8)$$

Zunächst wird von einem Einfreiheitsgradschwinger mit linearen Systemeigenschaften ausgegangen, dessen Kennwerte folglich weder eine Funktion der Zeit noch der Verschiebung sind und die damit in obiger Gleichung als Konstanten auftreten. Aus dieser Vorgabe lässt sich direkt ableiten, dass dazu die Steifigkeit  $k$  linear zur Relativverschiebung  $u$ , der Dämpfungskoeffizient  $d$  linear zur Relativgeschwindigkeit  $\dot{u}$  und die Masse  $m$  linear zur Absolutbeschleunigung  $\ddot{y}$  sein muss. Insbesondere der vorhandene Dämpfungsmechanismus weicht in der Realität jedoch häufig von obiger Vorgabe der linear-viskos bzw. geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung ab. Zur Lösung der kinetischen Gleichgewichtsbeziehung sind grundsätzlich zwei Möglichkeiten in Betracht zu ziehen, die sich hinsichtlich der zu berechnenden Bewegungsgrößen unterscheiden. In der ersten Variante wird die Differentialgleichung nach dem absoluten Schwingweg  $y$  aufgelöst,

wozu diese durch Einsetzen von  $u = y - y_F$  in die folgende Form überführt wird:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{y} + d \cdot (\dot{y} - \dot{y}_F) + k \cdot (y - y_F) &= 0 \\ m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y &= d \cdot \dot{y}_F + k \cdot y_F \end{aligned} \quad (2.9)$$

Offensichtlich ergibt sich hierfür der rechtsseitige Erreger- bzw. Störterm in Abhängigkeit sowohl der Fußpunktbewegung  $y_F$  als auch deren Geschwindigkeit  $\dot{y}_F$ . Insbesondere für den Fall, dass die Fundamenterregung als Beschleunigungsverlauf vorgegeben ist, erweist sich demgegenüber der zweite Lösungsweg als vorteilhaft, da sich der Störterm hierfür unmittelbar in Abhängigkeit der Fußpunktbeschleunigung ergibt. Zu diesem Zweck wird die Absolutverschiebung  $y$  in obiger Ausgangsgleichung (2.8) durch  $y = u + y_F$  ersetzt.

$$\begin{aligned} m \cdot (\ddot{u} + \ddot{y}_F) + d \cdot \dot{u} + k \cdot u &= 0 \\ m \cdot \ddot{u} + d \cdot \dot{u} + k \cdot u &= -m \cdot \ddot{y}_F \end{aligned} \quad (2.10)$$

Die Ausführungen hinsichtlich der Horizontalverschiebung in  $y$ -Richtung sind im Übrigen für alle drei Koordinatenrichtungen, also auch in  $x$ - und  $z$ -Richtung gültig. Es sind lediglich die Bezeichnungen der Absolut- bzw. Relativverschiebung entsprechend abzuändern.

### 2.4.1 Homogener Lösungsanteil des viskos gedämpften EFS

Der Ein- bzw. Ausschwingvorgang des Einfreiheitsgradschwingers wird durch den homogenen Lösungsanteil der Differentialgleichung beschrieben, der sich ergibt, indem der rechtsseitige Störterm zu Null gesetzt wird. Da sich die obigen Berechnungsansätze in diesem Fall lediglich in Bezug auf die Verschiebungsvariablen unterscheiden, gelten die folgenden Ausführungen gleichermaßen für den Absolutweg  $y$  als auch für den Relativweg  $u$ . Dass diese phasenverschoben zueinander und mit unterschiedlicher Amplitude schwingen, zeigt sich erst bei der Lösung der jeweils zugehörigen Freiwerte, die sich in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen ermitteln lassen. Als Verschiebungsvariable für die nachfolgenden Ausführungen wird der Absolutweg  $y$  gewählt.

$$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0 \quad (2.11)$$

Durch Einsetzen des d'ALEMBERTSCHEN Ansatzes,  $y = e^{\lambda t}$ ,  $\dot{y} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ ,  $\ddot{y} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$  wird die obige Gleichung zu:

$$e^{\lambda t} \cdot \underbrace{(m \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + k)}_{\lambda^2 + \frac{d}{m} \cdot \lambda + \frac{k}{m} = 0} = 0 \quad (2.12)$$

Die Lösung für  $\lambda$  lautet entsprechend:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.13)$$

Dabei entscheidet der Radikand unter der Wurzel über den vorliegenden Bewegungstyp. Wird dieser zu Null, handelt es sich um den Sonderfall der so genannten kritischen Dämpfung, die dadurch gekennzeichnet ist, dass eine ausgelenkte Masse eines Einfreiheitsgradschwingers exakt die Zeit seiner Eigenperiode  $T$  benötigt, um in seine Nullstellung zurückzukehren. In der Folge treten keinerlei weiteren Schwingungen mehr auf. Der Wert der zugehörigen kritischen Dämpfung  $d_{kr}$  berechnet sich aus:

$$\left(\frac{d}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \rightarrow d_{kr} = 2 \cdot m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot \sqrt{m \cdot k} \quad (2.14)$$

Durch Einführung der Eigenkreisfrequenz  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , bzw.  $m \cdot \omega = \sqrt{k \cdot m}$  lässt sich obige Gleichung wie folgt umformen:

$$d_{kr} = 2 \cdot m \cdot \omega \quad (2.15)$$

Häufig wird die Dämpfung dimensionslos als Dämpfungsgrad, bzw. als LEHR'sches Dämpfungsmaß angegeben, der als Verhältnis von Dämpfungskoeffizient zur kritischen Dämpfung definiert ist:

$$\xi = \frac{d}{d_{kr}} = \frac{d}{2 \cdot m \cdot \omega} \rightarrow d = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \xi \quad (2.16)$$

Der aperiodische Bewegungstyp, gleichbedeutend mit einem positiven Radikanden, ist in der Bauwerksdynamik nicht weiter von Interesse. Ist der Term unter der Wurzel hingegen negativ, handelt es sich um den Fall der freien periodischen Schwingbewegung. Hierfür ergibt sich die obige Lösung für  $\lambda$  mit  $\omega \cdot \xi = d/(2 \cdot m)$  und  $\omega^2 = k/m$  nach kurzer Umformung und Berücksichtigung der imaginären Einheit  $i$  zu:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\omega \cdot \xi \pm \sqrt{(\omega \cdot \xi)^2 - \omega^2} \\
&= \omega \cdot \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\
&= \omega \cdot \left( -\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Die den Schwingungsverlauf beschreibende Funktion setzt sich demnach aus zwei linear unabhängigen Teillösungen zusammen:

$$y = e^{-\xi\omega t} \cdot \left[ A \cdot e^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega t} + B \cdot e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega t} \right] \tag{2.18}$$

mit Hilfe der EULER-Identität  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$  und der gedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega$ .

$$\begin{aligned}
y_{hom}(t) &= e^{-\xi\omega t} \cdot \left[ A \cdot \{ \cos \omega_d t + i \cdot \sin \omega_d t \} + B \cdot \{ \cos \omega_d t - i \cdot \sin \omega_d t \} \right] \\
&= e^{-\xi\omega t} \cdot \left[ \underbrace{(A + B)}_C \cdot \cos \omega_d t + i \cdot \underbrace{(A - B)}_D \cdot \sin \omega_d t \right] \\
y_{hom}(t) &= e^{-\xi\omega t} \cdot \left[ C \cdot \cos \omega_d t + D \cdot \sin \omega_d t \right]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Die erste Ableitung liefert den zugehörigen Geschwindigkeitsverlauf.

$$\dot{y}_{hom}(t) = \omega_d \cdot e^{-\xi\omega t} \left[ D \cdot \cos \omega_d t - C \cdot \sin \omega_d t \right] - \xi\omega \cdot e^{-\xi\omega t} \left[ C \cdot \cos \omega_d t + D \cdot \sin \omega_d t \right] \tag{2.20}$$

Sind die Anfangswerte  $y(t = 0)$  und  $\dot{y}(t = 0)$  bekannt, lassen sich daraus die Freiwerte  $C$  und  $D$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
y(t = 0) = y_0 &: && \rightarrow C = y_0 \\
\dot{y}(t = 0) = v_0 &: && -\xi \cdot \omega \cdot C + D\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega = v_0 \quad \rightarrow D = \frac{\xi \cdot \omega \cdot y_0 + v_0}{\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega}
\end{aligned}$$

Mit nachfolgender Substitution und unter Beachtung des Additionstheorems  $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$  lässt sich die Ausschwingkurve des Einfreiheitsgradschwingers in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen wie folgt angeben:

$$y_0 = \hat{y} \cdot \sin \varphi_h \qquad \frac{\xi \cdot \omega \cdot y_0 + v_0}{\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega} = \hat{y} \cdot \cos \varphi_h$$

$$y = \hat{y} \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_h) \quad \text{mit: } \hat{y} = \sqrt{y_0^2 + \left( \frac{\xi \cdot \omega \cdot y_0 + v_0}{\omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \right)^2} \quad (2.21)$$

$$\text{und: } \tan \varphi_h = \frac{\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega \cdot y_0}{\xi \cdot \omega \cdot y_0 + v_0}$$

Mit dem Index  $h$  des Phasenwinkels  $\varphi_h$  wird dessen Gültigkeit für die **homogene** Lösung der Differentialgleichung gekennzeichnet. Die zugehörigen Verläufe der Geschwindigkeit  $\dot{y}$  und Beschleunigung  $\ddot{y}$  ergeben sich entsprechend für die erste und zweite Ableitung von  $y$ :

$$\dot{y} = \hat{y} \cdot \omega \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_h - \varphi_{h,2}) \quad (2.22)$$

$$\ddot{y} = \hat{y} \cdot \omega^2 \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_h - 2 \cdot \varphi_{h,2}) \quad (2.23)$$

$$\text{mit: } \tan(\varphi_{h,2}) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

## 2.4.2 Harmonische Fußpunkterregung des viskos gedämpften EFS

### 2.4.2.1 Stationäre Lösung für die Relativverschiebung $u$

Generell wird für Schwingungsprobleme, deren Erregerfunktion harmonisch verläuft, oftmals lediglich der partikuläre Lösungsanteil angegeben, da dieser im Fall einer praktisch immer vorhandenen Dämpfung den stationären, bzw. eingeschwungenen Zustand vollständig beschreibt. Im Gegensatz dazu ist der homogene Lösungsanteil ohne Einfluss auf diese Beharrungsschwingung, da er durch die Dämpfungswirkung vergleichsweise rasch abklingt. Die stationäre Schwingungsreaktion des Einfreiheitsgradschwingers wird zunächst für die harmonische Basiserregung hergeleitet, deren sinusförmiger Verlauf durch die Erregeramplitude  $\hat{y}_F$  und die Erregerkreisfrequenz  $\Omega$  bestimmt wird.

$$y_F = \hat{y}_F \cdot \sin \Omega t, \quad \dot{y}_F = \Omega \cdot \hat{y}_F \cdot \cos \Omega t, \quad \ddot{y}_F = -\Omega^2 \cdot \hat{y}_F \cdot \sin \Omega t \quad (2.24)$$

Im Gegensatz zur homogenen Lösung, die gleichermaßen für die Verschiebungsparameter  $y$  und  $u$  Gültigkeit besitzt, muss im Fall des partikulären Lösungsanteils unterschieden werden. Ausgehend von der Relativverschiebung  $u$  lautet die Bewegungsgleichung für die harmonische Fußpunkterregung:

$$m \cdot \ddot{u} + d \cdot \dot{u} + k \cdot u = -m \cdot \ddot{y}_F$$

$$m \cdot \ddot{u} + d \cdot \dot{u} + k \cdot u = m \cdot \Omega^2 \cdot \hat{y}_F \cdot \sin \Omega t$$

bzw. mit  $d/m = 2 \cdot \xi \cdot \omega$  und  $\omega^2 = k/m$ :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = \Omega^2 \cdot \hat{y}_F \cdot \sin \Omega t \quad (2.25)$$

Der partikuläre Lösungsteil ergibt sich, indem der folgende Ansatz in obige Differentialgleichungen eingesetzt wird.

$$u_p(t) = G \cdot \sin \Omega t + H \cdot \cos \Omega t \quad (2.26)$$

$$\dot{u}_p(t) = G \cdot \Omega \cdot \cos \Omega t - H \cdot \Omega \cdot \sin \Omega t \quad (2.27)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -G \cdot \Omega^2 \cdot \sin \Omega t - H \cdot \Omega^2 \cdot \cos \Omega t \quad (2.28)$$

Damit wird die Bewegungsgleichung zu:

$$\{-G \cdot \Omega^2 - H \cdot 2\xi\omega\Omega + G \cdot \omega^2\} \cdot \sin \Omega t + \{-H \cdot \Omega^2 - G \cdot 2\xi\omega\Omega + H \cdot \omega^2\} \cdot \cos \Omega t = \Omega^2 \cdot \hat{y}_F \cdot \sin \Omega t \quad (2.29)$$

Die Unbekannten  $G$  und  $H$  lassen sich mittels Koeffizientenvergleich ermitteln:

$$-G \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2} - H \cdot 2 \cdot \xi \cdot \frac{\Omega}{\omega} + G = \frac{\Omega^2}{\omega^2} \cdot \hat{y}_F, \quad -H \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2} + G \cdot 2 \cdot \xi \cdot \frac{\Omega}{\omega} + H = 0$$

bzw. mit dem Frequenzverhältnis  $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$  :

$$G \cdot (1 - \eta^2) - H \cdot (2\xi\eta) = \eta^2 \cdot \hat{y}_F, \quad H \cdot (1 - \eta^2) + G \cdot (2\xi\eta) = 0$$

Auflösen der obigen Gleichungen liefert die Werte für  $G$  und  $H$ :

$$G = \hat{y}_F \cdot \frac{\eta^2(1 - \eta^2)}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}, \quad H = \hat{y}_F \cdot \frac{-\eta^2(2\xi\eta)}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \quad (2.30)$$

Daraus folgt die partikuläre Lösung zu:

$$u_p(t) = \hat{y}_F \left[ \frac{\eta^2(1 - \eta^2)}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \cdot \sin \Omega t - \frac{\eta^2(2\xi\eta)}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \cdot \cos \Omega t \right] \quad (2.31)$$

Mit Hilfe der nachfolgenden Substitution sowie des Additionstheorems  $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$  lässt sich obige Gleichung in eine Form überführen, aus der sich die Amplitude  $A_{p,r} = \hat{y}_F \cdot \hat{u}_p$  und der Phasenwinkel  $\varphi_{p,r}$  direkt ablesen lassen:

$$\hat{u}_p \cdot \cos \varphi_{p,r} = \frac{\eta^2(1 - \eta^2)}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}, \quad \hat{u}_p \cdot \sin \varphi_{p,r} = \frac{\eta^2(2\xi\eta)}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \quad (2.32)$$

Die Indizes  $p, r$  des Phasenwinkels kennzeichnen jeweils die Gültigkeit für die **partikuläre** Lösung der **Relativverschiebung**. Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich der Wert für  $\hat{u}_p$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{u}_p &= \sqrt{(\hat{u}_p \cdot \cos \varphi_{p,r})^2 + (\hat{u}_p \cdot \sin \varphi_{p,r})^2} \\ \hat{u}_p &= \sqrt{\frac{\eta^4(1 - \eta^2)^2 + \eta^4(2\xi\eta)^2}{[(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2]^2}} \\ \hat{u}_p &= \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Der zugehörige Phasenwinkel  $\varphi_{p,r}$  berechnet sich entsprechend:

$$\tan \varphi_{p,r} = \frac{\eta^2(2\xi\eta)}{\eta^2(1 - \eta^2)} = \frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2} \quad (2.34)$$

Damit lässt sich die stationäre Schwingungslösung für die Relativverschiebung  $u$  infolge harmonischer Fußpunktanregung wie folgt anschreiben:

$$u_p(t) = \hat{y}_F \cdot \underbrace{\frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}}_{\hat{u}_p} \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,r}) \quad (2.35)$$

Da der Sinusterm keinen größeren Wert als Eins annehmen kann, ist der Maximalwert der Relativverschiebung  $u_{p,max}$  direkt mit dem Produkt aus  $\hat{u}_p$  und  $\hat{y}_F$  verknüpft.

$$u_{p,max} = \hat{y}_F \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \quad (2.36)$$

Offensichtlich ist die maximale Antwort der Relativverschiebung  $u$  allein vom Frequenzverhältnis  $\eta$  und vom Dämpfungsgrad  $\xi$  abhängig. Der Wert  $\hat{u}_p$  kann dementsprechend auch als Vergrößerungsfunktion  $V_r$  interpretiert werden, der das Verhältnis von aufgebrachter Amplitude der Fußpunkterregung zur maximalen relativen Auslenkung  $u_p$  angibt. Der Index  $r$  kennzeichnet wiederum die Gültigkeit für die **Relativverschiebung**  $u_p$ . Dasjenige Frequenzverhältnis, für das sich die maximale Schwingungsreaktion einstellt, berechnet sich aus der ersten Ableitung der Vergrößerungsfunktion  $V_r$  nach  $\eta$  und anschließendem zu Null Setzen.

$$V_r = \frac{u_{p,max}}{\hat{y}_F} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \quad (2.37)$$

$$V_r'(\eta) = \frac{2\eta - 2\eta^3 + 4\xi^2\eta^3}{[(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.38)$$

$$\underbrace{2\eta}_0 \cdot \underbrace{(1 - \eta^2 + 2\xi^2\eta^2)}_0 = 0 \quad (2.39)$$

Daraus folgt:

$$\eta_{r,Resonanz} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (2.40)$$

Für dieses Frequenzverhältnis reagiert das System mit maximalen relativen Ausschlägen  $u_{p,max}$ . Bemerkenswert ist, dass der Radikand der Gleichung (2.40) für Dämpfungsgrade oberhalb von  $\xi > 1/\sqrt{2}$  negative Werte annimmt und folglich für diesen Bereich nicht definiert ist. Tatsächlich werden Resonanzerscheinungen in diesem Fall aufgrund der vergleichsweise hohen Hemmwirkung der Dämpfung vollständig unterdrückt. Das Fehlen eines Maximums lässt sich auch anhand des Verlaufs der Vergrößerungsfunktion für den Dämpfungsgrad  $\xi = 0.8$  in Bild 2.9 erkennen. Die Darstellung der Vergrößerungsfunktion in Abhängigkeit der Frequenzrate wird auch als Frequenzspektrum oder Amplitudenspektrum bezeichnet. Das Maximum der zugehörigen Vergrößerungsfunktion  $V_{r,max}$  in Abhängigkeit der vorhandenen Dämpfung ergibt sich durch Einsetzen der Resonanzbedingung in die Gleichung der Vergrößerungsfunktion  $V_r(\eta)$ .

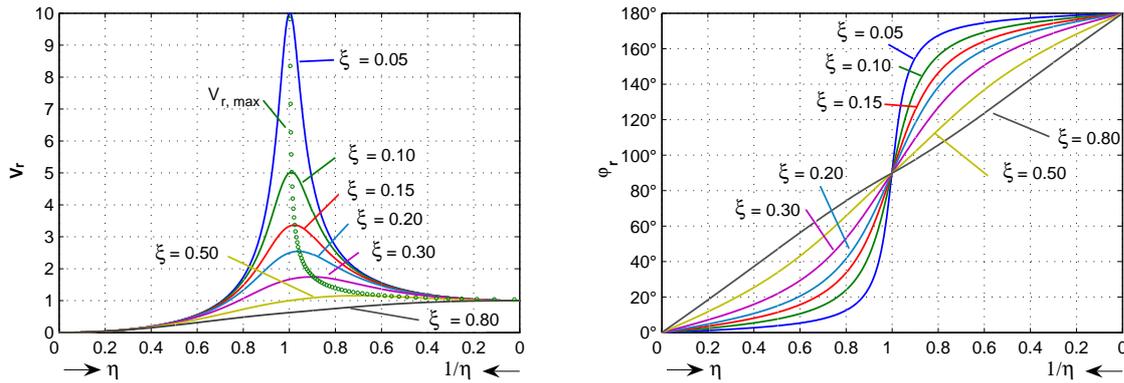
$$V_{r,max} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.41)$$

Solange die Erregerkreisfrequenzen  $\Omega$  unterhalb der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  liegen, also  $\eta < 1$  gilt, schwingt das System gleichsinnig, anderenfalls gegensinnig. Je nachdem welche Schwingungsform vorliegt, ändert sich das Vorzeichen des partikulären Lösungsanteils  $u_p(t)$ .

$$\begin{aligned} u_p(t) &= -\hat{y}_F \cdot V_r \cdot \sin(\Omega \cdot t - \varphi_{p,r}) && \text{für} && \eta < 1 \\ u_p(t) &= +\hat{y}_F \cdot V_r \cdot \sin(\Omega \cdot t - \varphi_{p,r}) && \text{für} && \eta > 1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ebenfalls zeigt sich, dass die Masse im Fall sehr hoher Erregerfrequenzen  $\Omega$  aufgrund ihrer Trägheit nicht mehr in der Lage ist, der Fußpunkterregung zu folgen und sich die Vergrößerungsfunktion für die Relativverschiebung  $V_r$  entsprechend dem Wert Eins annähert.

Die auf das Fundament abgesetzte Kraft ist allein von der Relativverschiebung  $u$  bzw. deren Geschwindigkeit  $\dot{u}$  abhängig und berechnet sich aus:



**Bild 2.9:**  $V_r$  und  $\varphi_{p,r}$  für unterschiedliche Dämpfungsgrade

$$F_{Fundament} = d \cdot \dot{u}_p(t) + k \cdot u_p(t) \quad (2.43)$$

Da die Federkraft in Abhängigkeit des relativen Schwingweges  $u_p$  stets um den Phasenwinkel  $\pi/2$  zur viskosen Dämpfungskraft in Abhängigkeit der relativen Schwinggeschwindigkeit  $\dot{u}_p$  versetzt auftritt, lässt sich deren Resultierende wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{Fundament} &= \sqrt{\hat{F}_k^2 + \hat{F}_d^2} \\ &= \sqrt{(k \cdot u_{p,max})^2 + (d\Omega \cdot u_{p,max})^2} \\ &= k \cdot u_{p,max} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\Omega}{k}\right)^2} \\ \text{mit } d &= 2\xi\omega m, \quad k = \omega^2 m \quad \text{und} \quad \eta = \Omega/\omega \\ &= k \cdot \hat{y}_F \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \cdot \sqrt{1 + (2\xi\eta)^2} \\ &= k \cdot \hat{y}_F \cdot \eta^2 \sqrt{\frac{1 + (2\xi\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Der Wurzelterm entspricht dabei der Vergrößerungsfunktion  $V_a$  für die Absolutverschiebung  $y$  der Schwingmasse, der im nachfolgenden Abschnitt hergeleitet wird. Der Phasenwinkel  $\varphi_{p,a}$ , mit der die auf das Fundament abgesetzte Kraft der Fußpunkterregung nacheilt, ist ebenfalls dem nächsten Abschnitt zu entnehmen.

#### 2.4.2.2 Stationäre Lösung für den Absolutweg $y$

Wird für die partikuläre Lösung vom Absolutweg  $y$  ausgegangen, ergibt sich für die Erregerfunktion nach Gleichung (2.24) folgende, zu vorher abweichende, Ausgangsgleichung.

$$\begin{aligned}
m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y &= d \cdot \dot{y}_F + k \cdot y_F \\
\ddot{y} + 2\xi\omega \cdot \dot{y} + \omega^2 \cdot y &= 2\xi\omega\Omega \cdot \hat{y}_F \cdot \cos \Omega t + \omega^2 \cdot \hat{y}_F \cdot \sin \Omega t
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Analog der Vorgehensweise zur Relativverschiebung  $u_p$  berechnet sich die Lösung durch Einsetzen des partikulären Ansatzes nach Gleichung (2.26) zu:

$$y_p(t) = \hat{y}_F \left[ \frac{1 - \eta^2 + (2\xi\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \cdot \sin \Omega t - \frac{2\xi\eta^3}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \cdot \cos \Omega t \right] \tag{2.46}$$

Mit Hilfe der Substitution, wobei der Index  $a$  die Gültigkeit für die Absolutverschiebung kennzeichnet,

$$\hat{y}_p \cdot \cos \varphi_{p,a} = \frac{1 - \eta^2 + (2\xi\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}, \quad \hat{y}_p \cdot \sin \varphi_{p,a} = \frac{2\xi\eta^3}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \tag{2.47}$$

ergibt sich für den Phasenwinkel  $\varphi_{p,a}$  und nach etwas längerer Rechnung der Wert für  $\hat{y}_p$  zu:

$$\tan \varphi_{p,a} = \frac{2\xi\eta^3}{1 - \eta^2 + (2\xi\eta)^2} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_p &= \sqrt{\frac{[1 - \eta^2 + (2\xi\eta)^2]^2 + [2\xi\eta^3]^2}{[(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2]^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + (2\xi\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Die Gleichung für die stationäre Absolutschwingung des Einfreiheitsgradschwingers infolge Fußpunkterregung lautet somit:

$$y_p(t) = \hat{y}_F \cdot \sqrt{\frac{1 + (2\xi\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,a}) \tag{2.50}$$

Die Vergrößerungsfunktion  $V_a$  der Absolutverschiebung  $y$  folgt daraus zu:

$$V_a = \frac{y_{p,max}}{\hat{y}_F} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \tag{2.51}$$

Wird diese nach dem Frequenzverhältnis  $\eta$  abgeleitet, ergibt sich wiederum die Resonanzbedingung in Abhängigkeit des Dämpfungsgrades  $\xi$ :

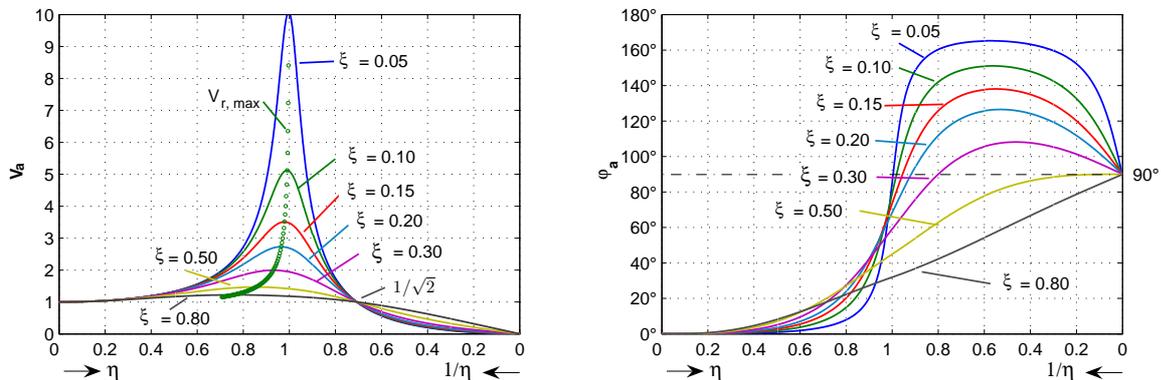
$$V_a'(\eta) = \frac{-4\xi^2\eta^5 + 2\eta - 2\eta^3}{\sqrt{1 + (2\xi\eta)^2} \cdot [(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2]^{2/3}} \implies -4\xi^2\eta^5 + 2\eta - 2\eta^3 = 0 \quad (2.52)$$

$$\eta_{a,Resonanz} = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 8\xi^2} - 1}{4\xi^2}} \quad (2.53)$$

Der Maximalwert der zugehörigen Vergrößerungsfunktion  $V_{a,max}$  kann in Abhängigkeit der vorhandenen Dämpfung wie folgt angegeben werden:

$$V_{a,max} = 2 \cdot \xi^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{1 + 8\xi^2}}{(8\xi^4 - 4\xi^2 - 1) \cdot \sqrt{1 + 8\xi^2} + 8\xi^2 + 1}} \quad (2.54)$$

Bild 2.9 zeigt die Vergrößerungsfunktion für die Absolutverschiebung  $y$  sowie den zugehörigen Phasenwinkel für verschiedene Dämpfungsgrade  $\xi$ . Der gemeinsame Schnittpunkt an der Stelle  $\eta = \sqrt{2}$  ist allen Vergrößerungsfunktionen gemeinsam und kennzeichnet dasjenige Frequenzverhältnis, ab dem die absoluten Schwingwege im Verhältnis zur Fußpunkterregung nicht mehr vergrößert, sondern vermindert werden.



**Bild 2.10:**  $V_a$  und  $\varphi_{p,a}$  für unterschiedliche Dämpfungsgrade

Im Gegensatz zu den relativen Schwingwegen  $u$ , die für die auf das Fundament abgesetzten Kräfte maßgebend sind, ist die Absolutverschiebung  $y$  und damit auch die zugehörige Vergrößerungsfunktion  $V_a$  im Fall einer passiven Schwingungsisolierung ein Maß für deren Wirksamkeit.

Im Vergleich zum Phasenwinkel  $\varphi_{p,r}$  für die Relativverschiebung  $u$  fällt auf, dass die Funktionsverläufe für  $\varphi_{p,a}$  den Grenzwert  $\varphi = 90^\circ$  nicht einheitlich für ein Frequenzverhältnis von  $\eta = 1$  schneiden, sondern dass dieser Grenzwert vielmehr in Abhängigkeit des Dämpfungsgrades  $\xi$  für unterschiedliche Frequenzverhältnisse  $\eta$  erreicht wird. Das Kriterium, das darüber entscheidet, ob die Absolutverschiebung  $y$  gleichsinnig oder gegensinnig zur Fußpunkterregung  $y_F$  schwingt, ergibt sich, wie auch im Fall der Relativverschiebung  $u$ , indem der Nenner der Gleichung für den Phasenwinkel  $\varphi_{p,a}$  zu Null gesetzt wird.

$$\begin{aligned}
1 - \eta^2 + (2\xi\eta)^2 &= 0 \\
\rightarrow \eta &= \sqrt{\frac{1}{1 - 4 \cdot \xi^2}}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Die stationäre Lösung der Absolutverschiebung lautet somit:

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= - \hat{y}_F \cdot V_a \cdot \sin(\Omega \cdot t - \varphi_{p,a}) & \text{für} & \quad \eta < \sqrt{\frac{1}{1 - 4 \cdot \xi^2}} \\
y_p(t) &= + \hat{y}_F \cdot V_a \cdot \sin(\Omega \cdot t - \varphi_{p,a}) & \text{für} & \quad \eta \geq \sqrt{\frac{1}{1 - 4 \cdot \xi^2}}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

### 2.4.2.3 Ein- und Ausschwingvorgang des viskos gedämpften EFS

Die gesamte Schwingungsreaktion eines Einfreiheitsgradschwingers infolge einer abrupt einsetzenden, harmonischen Fußpunkterregung wird durch die Addition des homogenen und partikulären Lösungsteils der Bewegungsgleichung (2.24) beschrieben. Die Zeitspanne welche das System benötigt, bis es eingeschungen ist, wird dabei maßgeblich von der Größe der vorhandenen Dämpfung beeinflusst.

$$\begin{aligned}
y(t) &= y(t)_{hom} + y(t)_{part} \\
y(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[ C \cdot \cos \omega_d t + D \cdot \sin \omega_d t \right] \pm \hat{y}_F \cdot V_a \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,a})
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \omega_d e^{-\xi\omega t} \left[ D \cdot \cos \omega_d t - C \cdot \sin \omega_d t \right] - \xi\omega e^{-\xi\omega t} \left[ C \cdot \cos \omega_d t + D \cdot \sin \omega_d t \right] \\
&\quad \pm \hat{y}_F \cdot \Omega \cdot V_a \cdot \cos(\Omega t - \varphi_{p,a})
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Die Freiwerte  $C$  und  $D$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. In der Regel wird von einem anfangs ruhenden System ausgegangen, so dass sowohl die Anfangsauslenkung  $y_0$  als auch die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  mit dem Wert Null festgelegt ist.

$$\begin{aligned}
y(t=0) = y_0 = 0 & : \quad C = -\hat{y}_F \cdot V_a \cdot \sin(\varphi_{p,a}) \\
\dot{y}(t=0) = v_0 = 0 & : \quad D = \hat{y}_F \cdot V_a \cdot \frac{\eta \cos(\varphi_{p,a}) - \xi \sin(\varphi_{p,a})}{\sqrt{1 - \xi^2}}
\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung lautet damit im Fall der zur Fußpunkterregung gleichsinnigen Schwingungsform, gleichbedeutend mit  $\eta < \sqrt{\frac{1}{1 - 4 \cdot \xi^2}}$ :

$$y(t) = e^{-\xi\omega t} \cdot \hat{y}_F \cdot V_a \cdot \left[ -\sin(\varphi_{p,a}) \cdot \cos \omega_d t + \frac{\eta \cos(\varphi_{p,a}) - \xi \sin(\varphi_{p,a})}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin \omega_d t \right] - \hat{y}_F \cdot V_a \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,a}) \quad (2.59)$$

Handelt es sich um eine zur Fußpunkterregung gegensinnigen Schwingungsform, also für  $\eta \geq \sqrt{\frac{1}{1-4\xi^2}}$  gilt:

$$y(t) = e^{-\xi\omega t} \cdot \hat{y}_F \cdot V_a \cdot \left[ \sin(\varphi_{p,a}) \cdot \cos \omega_d t + \frac{\xi \sin(\varphi_{p,a}) - \eta \cos(\varphi_{p,a})}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin \omega_d t \right] + \hat{y}_F \cdot V_a \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,a}) \quad (2.60)$$

Die zugehörige Relativverschiebung  $u$  lässt sich aus der Differenz zwischen dem Verlauf der Absolutverschiebung  $y$  und der Fußpunkterregung  $y_F$  direkt angeben:

$$u(t) = y(t) - y_F(t) \quad (2.61)$$

Daneben besteht die Möglichkeit, die Bewegungsgleichung der Relativverschiebung  $u$  direkt herzuleiten. Die Ausgangsgleichung unterscheidet sich dabei lediglich geringfügig hinsichtlich der Vergrößerungsfunktion und des Phasenwinkels des partikulären Teils:

$$u(t) = u(t)_{hom} + u(t)_{part} \\ u(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ C \cdot \cos \omega_d t + D \cdot \sin \omega_d t \right] \pm \hat{y}_F \cdot V_r \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,r}) \quad (2.62)$$

Im Vergleich zu vorher sind zur Ermittlung der Freiwerte  $C$  und  $D$  jedoch abweichende Anfangsbedingungen zu beachten. Zwar ist die relative Anfangsverschiebung  $u_0$  ebenfalls zu Null zu setzen, die relative Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{u}_0$  muss aber derjenigen der Fußpunkterregung entsprechen, die zu diesem Zeitpunkt maximal ist  $\dot{y}_{F,max} = \hat{y}_F \Omega$ .

Im Fall, dass die Erregerfrequenz unterhalb der Eigenfrequenz des Einfreiheitsgradschwingers zu liegen kommt, also  $\eta < 1$  gilt, handelt es sich um die zur Fußpunkterregung gleichsinnige Schwingungsform:

$$u(t=0) = u_0 = 0 : \quad C = -\hat{y}_F \cdot V_r \cdot \sin(\varphi_{p,r}) \\ \dot{u}(t=0) = v_0 = \hat{y}_F \cdot \Omega : \quad D = \hat{y}_F \cdot V_r \cdot \frac{\eta \cos(\varphi_{p,r}) - \xi \sin(\varphi_{p,r}) + \eta/V_r}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Die vollständige Bewegungsgleichung der Relativverschiebung lautet demnach:

für  $\eta < 1$ :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \cdot \hat{y}_F \cdot V_r \cdot \left[ -\sin(\varphi_{p,r}) \cdot \cos \omega_d t + \frac{\eta \cos(\varphi_{p,r}) - \xi \sin(\varphi_{p,r}) + \eta/V_r}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin \omega_d t \right] - \hat{y}_F \cdot V_r \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,r}) \quad (2.63)$$

und für  $\eta > 1$ :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \cdot \hat{y}_F \cdot V_r \cdot \left[ \sin(\varphi_{p,r}) \cdot \cos \omega_d t + \frac{\xi \sin(\varphi_{p,r}) - \eta \cos(\varphi_{p,r}) + \eta/V_r}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin \omega_d t \right] + \hat{y}_F \cdot V_r \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,r}) \quad (2.64)$$

Die zuvor analytisch hergeleiteten Formeln lassen sich anhand eines einfachen Feder-Masse-Systems gemäß Bild 2.8 durch die Berechnung mit einem geeignetem FE-Programm [5] verifizieren.

Dazu wird der im Fundament eingespannte Kragarm mit einem Stabelement mit der gewünschten Biegesteifigkeit abgebildet und das freie Ende mit einer Punktmasse belegt. Die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung lässt sich durch die Anordnung eines entsprechenden Federelements ebenfalls leicht in das Modell implementieren, indem dessen Steifigkeit  $k$  zu Null gesetzt und der Dämpfungskoeffizient  $d$  entsprechend belegt wird. Der nachfolgende Beispielrechnung liegen die folgenden Systemdaten zugrunde.

- Masse:  $m = 1\,000 \text{ kg}$
- Steifigkeit:  $k = 100\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- Dämpfungskoeffizient:  $d = 1\,000 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
- Eigenkreisfrequenz:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \frac{1}{\text{s}}, \Rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 1.59 \text{ Hz}, \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 0.628 \text{ s}$
- Dämpfungsgrad:  $\xi = \frac{d}{2 \cdot m \cdot \omega} = 0.05 \%$

Für die harmonische Fußpunkterregung wird die Amplitude mit  $\hat{y}_F = 0.2 \text{ m}$  und die Erregerkreisfrequenz mit  $\Omega = 20 \text{ 1/s}$  festgelegt. Bild 2.11 zeigt jeweils die analytische und die mit dem FE-Programm [5] gerechnete Schwingungsreaktion sowohl für die Absolutverschiebung  $y$  als auch für die Relativverschiebung  $u$ .

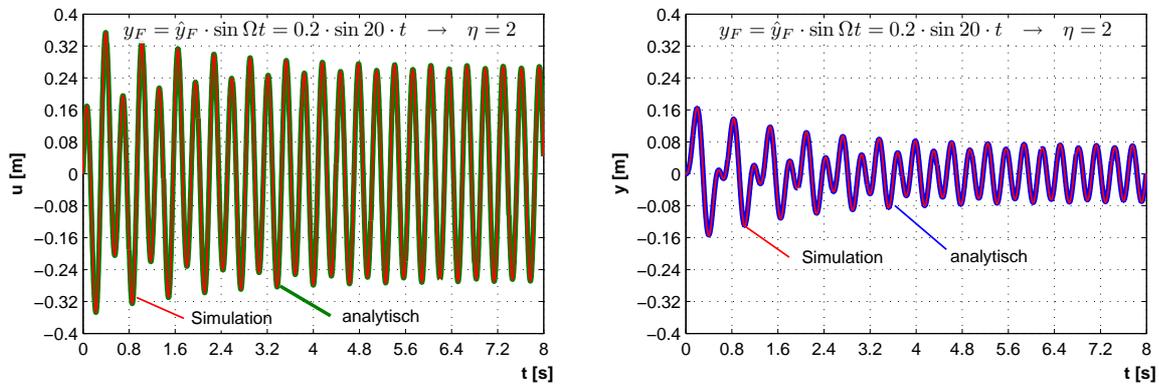


Bild 2.11: Relativverschiebung  $u$  und Absolutverschiebung  $y$  infolge harmonischer Fußpunkterregung

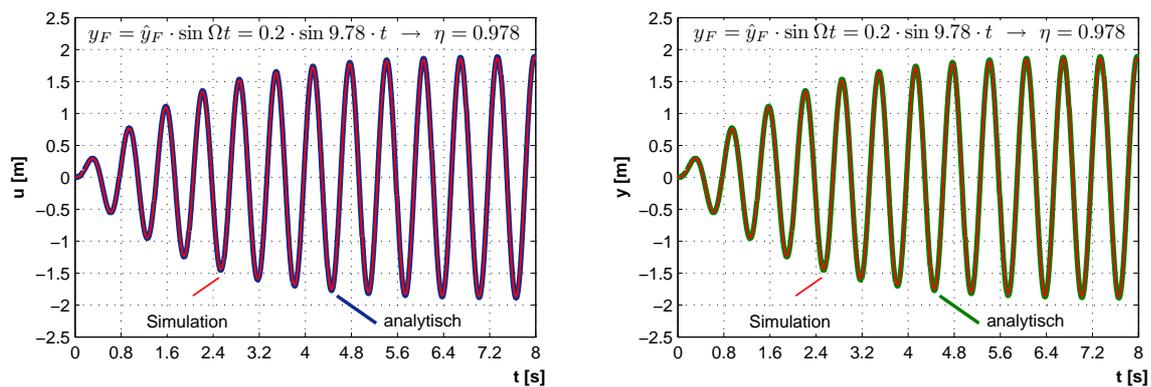


Bild 2.12: Relativverschiebung  $u$  und Absolutverschiebung  $y$  infolge harmonischer Fußpunkterregung

Für den Fall, dass die Erregerfrequenz in Resonanz zur Systemeigenfrequenz gewählt wird, ergeben sich die in Bild 2.12 dargestellten Verläufe.

Ist auch die Ausschwingreaktion nach Beendigung der Fußpunkterregung von Interesse, lässt sich diese mit den jeweils letzten Werten der Geschwindigkeit und Verschiebung leicht berechnen, indem diese als Anfangswerte für die Gleichung (2.20) interpretiert werden.

#### 2.4.2.4 Bezeichnungen der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden bereits der Dämpfungskoeffizient  $d$  mit der Einheit  $[N/(m/s)]$  sowie der dimensionslose Dämpfungsgrad  $\xi$  eingeführt. Deren Anwendung setzt streng genommen ein Dämpfungselement mit linear-viskosem Materialgesetz voraus, das damit dem Arbeitsprinzip des bekannten NEWTON-Modells entspricht. Wird der Kraftverlauf eines solchen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungselements  $F_d = d \cdot \dot{u}$  in Abhängigkeit der Verschiebung  $u$  aufgetragen, ergibt sich dessen Graph stets in Form einer Ellipse. Dies lässt sich anhand der zugehörigen mathematischen Funktionsvorschrift zeigen, zu deren Herleitung die Dämpfungskraft  $F_d = d \cdot \dot{u}$  aus der Bewegungsgleichung (2.10) extrahiert und in die 1. Ableitung der partikulären Lösung für die Relativverschiebung  $u_p = \hat{y}_F \cdot V_r \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,r})$  eingesetzt wird.

$$\begin{aligned}
 F_d &= d \cdot \underbrace{\hat{y}_F \cdot V_r}_{u_{p,max}} \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t - \varphi_{p,r}) \\
 F_d &= \pm d \cdot u_{p,max} \cdot \Omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\Omega t - \varphi_{p,r})} \\
 F_d &= \pm d \cdot \Omega \cdot \sqrt{u_{p,max}^2 - u_p^2} \cdot \sin^2(\Omega t - \varphi_{p,r}) \\
 F_d &= \pm d \cdot \Omega \cdot \sqrt{u_{p,max}^2 - u_p^2} \\
 F_d^2 &= (d \cdot \Omega)^2 \cdot (u_{p,max}^2 - u_p^2) \\
 F_d^2 &= (d \cdot \Omega \cdot u_{p,max})^2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{u_p}{u_{p,max}} \right)^2 \right] \\
 \Rightarrow \left( \frac{F_d}{d \cdot \Omega \cdot u_{p,max}} \right)^2 + \left( \frac{u_p}{u_{p,max}} \right)^2 &= 1 \tag{2.65}
 \end{aligned}$$

Zusammen mit der Federkraft  $F_k$  ist die Dämpfungskraft  $F_d$  den rückstellenden Kräften zuzuordnen, da diese der durch die Fußpunkterregung eingprägten Trägheitskraft  $F_m$  entgegenwirken.

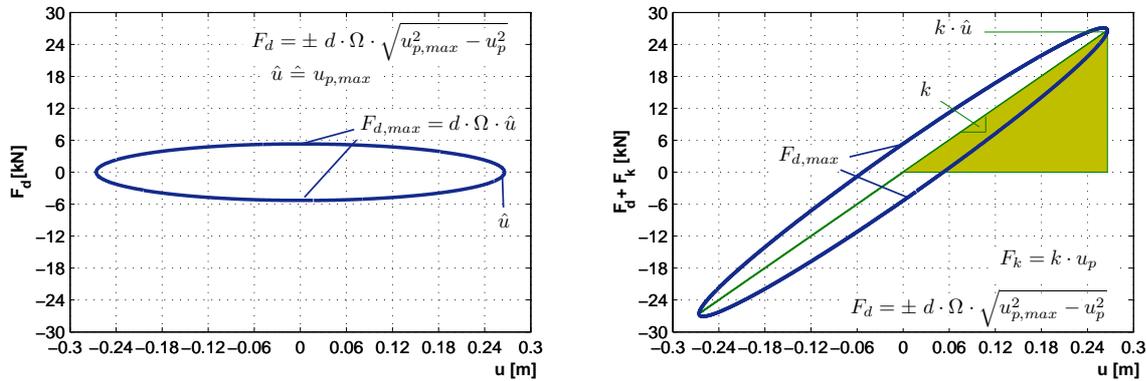
$$F_k + F_d = k \cdot u_p \pm d \cdot \Omega \cdot \sqrt{u_{p,max}^2 - u_p^2} \tag{2.66}$$

Die in Bild 2.13 dargestellten Ellipsen zeigen sowohl den Verlauf der alleinigen Dämpfungskraft  $F_d$ , als auch den um die Federkennlinie ergänzten Graphen. Da sich die Höhe der Widerstandskraft  $F_d$  in Abhängigkeit der momentanen Geschwindigkeit  $\dot{u}$  einstellt, ist diese zwangsläufig von

der Vorgeschichte der Schwingung beeinflusst, weshalb der Funktionsverlauf auch als Hysterese (griech.: hysteros = hinterher, später) bezeichnet wird. Der Flächeninhalt der Ellipse gibt dabei die pro Zyklus zerstreute bzw. dissipierte Energie wieder und lässt sich bei Verwendung von  $\hat{u} \hat{=} u_{p,max}$  wie folgt berechnen:

$$W_d = A_{Ellipse} = \frac{\pi}{4} \cdot (2 \cdot \hat{u}) \cdot (2 \cdot d \cdot \Omega \cdot \hat{u})$$

$$W_d = \pi \cdot d \cdot \Omega \cdot \hat{u}^2 \quad \rightarrow \quad d = \frac{A_{Ellipse}}{\pi \cdot \Omega \cdot \hat{u}^2} \quad (2.67)$$



**Bild 2.13:** Hysteresekurve des viskos gedämpften Einfreiheitsgradschwingers

Nach Durchlaufen eines Viertelzyklus von  $u = 0$  bis  $u = \hat{u}$  ist in der Feder die potentielle Formänderungsenergie  $E_{pot}$  gespeichert, die in Bild 2.15 entsprechend als Dreiecksfläche hervorgehoben ist.

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \hat{u}^2 \quad (2.68)$$

Die auf die Formänderungsarbeit  $E_{pot}$  bezogene Verlustarbeit der Dämpfung  $W_d$  ist als spezifische Dämpfung bzw. spezifische Dämpfungskapazität  $\Psi$  bekannt.

$$\Psi = \frac{W_d}{E_{pot}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot d \cdot \Omega \cdot \hat{u}^2}{k \cdot \hat{u}^2} = 2 \cdot \pi \cdot \Omega \cdot \frac{d}{k} = 2 \cdot \pi \cdot \Omega \cdot \frac{2 \cdot m \cdot \omega \cdot \xi}{\omega^2 \cdot m} = 4 \cdot \pi \cdot \Omega \cdot \frac{\xi}{\omega}$$

$$\Psi = 4 \cdot \pi \cdot \xi \cdot \eta \quad (2.69)$$

Aus der Formel für die Dämpfungsarbeit  $W_d$  lässt sich direkt ablesen, dass diese linear mit der Erregerfrequenz  $\Omega$  und quadratisch mit der Amplitude  $\hat{u}$  anwächst. Da die Formänderungsarbeit  $E_{pot}$  ebenfalls im Quadrat zur Amplitude  $\hat{u}$  anwächst, verbleibt für die spezifische Dämpfung lediglich die lineare Abhängigkeit zur Erregerfrequenz  $\Omega$ . Im Fall von Reibmechanismen oder Plastifizierung von Werkstoffen trifft die obige Aussage jedoch nicht zu, da diese vielmehr

durch ein sowohl frequenzunabhängiges als auch amplitudenunabhängiges Dämpfungsverhalten gekennzeichnet sind.

Insbesondere bei Vor-Ort-Messungen an der realen Baustruktur selbst ist das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  als im Bauingenieurwesen allgemein gebräuchliches Dämpfungsmaß weit verbreitet. Für dessen Bestimmung wird die zu beurteilende Konstruktion in Schwingung versetzt und der anschließende Ausschwingvorgang in Form von Beschleunigungs-, Geschwindigkeits-, Bewegungs-, oder Verzerrungsverläufen aufgezeichnet. Welcher Messmethode letztendlich der Vorzug gegeben wird, ist dabei zweitrangig, da die Schwingungsverläufe durch Integrieren bzw. Ableiten bei gleich bleibender Eigenperiode ineinander überführt werden können, wie dies in den Gleichungen (2.21), (2.22) und (2.23) geschehen ist. Es zeigt sich, dass die Abklingfunktion  $e^{-\xi\omega t}$  in den jeweiligen Funktionsvorschriften identisch enthalten ist und sich diese voneinander lediglich in Bezug auf den Vorfaktor  $\omega_d$  und den Phasenwinkel unterscheiden. Somit ist die Gültigkeit der nachfolgenden Formeln für die Wegvariable  $u(t)$  ebenso wie für die Verläufe der Geschwindigkeit  $\dot{u}(t)$  und der Beschleunigung  $\ddot{u}(t)$  gegeben. Die Angabe des logarithmischen Dekrements selbst basiert dabei auf dem Umstand, dass das Verhältnis der im Periodenabstand  $T_d$  aufeinander folgenden Funktionswerte aufgrund der enthaltenen Exponentialfunktion konstant ist.

$$\frac{u(t)}{u(t+T_d)} = \frac{\hat{u} \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot \sin[\omega_d t + \varphi_h]}{\hat{u} \cdot e^{-\xi\omega(t+T_d)} \sin[\omega_d(t+T_d) + \varphi_h]} = \frac{e^{-\xi\omega t}}{e^{-\xi\omega(t+T_d)}} = \frac{1}{e^{-\xi\omega T_d}} = e^{\xi\omega T_d}$$

Wird der natürliche Logarithmus für verschiedene Amplitudenverhältnisse gebildet, unterscheidet sich dieser somit stets um den gleichen Betrag.

$$\begin{aligned} \Lambda &= \ln \frac{u(t)}{u(t+T_d)} = \ln u(t) - \ln u(t+T_d) = \ln \left[ e^{\xi\omega T_d} \right] = \xi\omega T_d \\ &= \xi\omega \frac{2\pi}{\omega \cdot \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

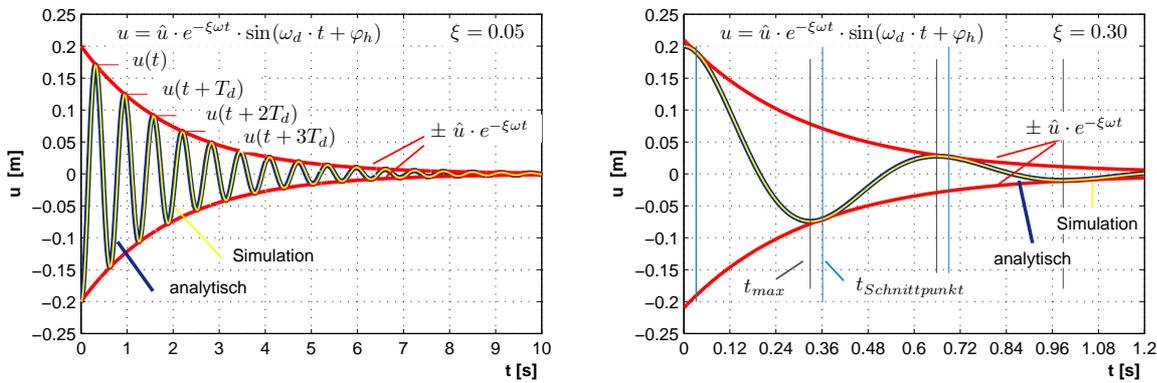
Solange der Abstand  $T_d$  beibehalten wird, kann der Zeitpunkt  $t$  in obiger Gleichung generell beliebig gewählt werden. Hinsichtlich der Datenanalyse empfiehlt es sich jedoch, sowohl aus praktischen Gründen als auch um mögliche Störeinflüsse zu minimieren, die jeweiligen Maxima  $u_{max,n}$  zum Zeitpunkt  $t_{max,n}$  auszuwerten:

$$t_{max,n} = \frac{n \cdot \pi - \varphi_h + \varphi_{h,2}}{\omega_d} \quad n = 1, 2, \dots, i \quad (2.71)$$

In Bild 2.14 sind für den zuvor eingeführten Einfreiheitsgradschwinger unter der Voraussetzung, dass keine äußere Anregung wirkt  $y_F(t) = 0$ , jeweils zwei Ausschwingkurven für die Anfangsauslenkung der Masse von  $y(t=0) = 0.2 \text{ m}$  dargestellt. Während der Dämpfungsgrad der linken

Darstellung unverändert bei  $\xi = 0.05$  belassen wurde, zeigt die rechte Abbildung dasselbe System für einen vergleichsweise hohen Dämpfungsgrad von  $\xi = 0.30$ . Hierfür zeigt sich deutlich, dass die Zeitpunkte der Maximalausschläge nicht mit denjenigen Zeitpunkten zusammenfallen, an dem sich die Ausschwingkurve an die jeweilige Abklingkurve anschmiegt. Aufgrund der zuvor erläuterten Gültigkeit der Gleichung (2.70) für beliebige Werte von  $t$  ist dieser Umstand für die Auswertung jedoch ohne weiteren Einfluss.

$$t_{\text{Schnittpunkt},n} = \frac{(n + 0,5) \cdot \pi - \varphi_h}{\omega_d} \quad n = 1, 2, \dots, i \quad (2.72)$$



**Bild 2.14:** Zur Definition des logarithmischen Dekrements  $\Lambda = 2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}$

Soll zur Ermittlung des logarithmischen Dekrements die Schwingungsabnahme über einen längeren Zeitraum in Betracht gezogen werden, ist obige Funktionsvorschrift wie folgt zu erweitern:

$$n \cdot \Lambda = \ln \frac{u(t)}{u(t + n \cdot T_d)} \quad \rightarrow \quad \Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{u(t)}{u(t + n \cdot T_d)} \quad (2.73)$$

Zur anschließenden Umrechnung auf den Dämpfungsgrad  $\xi$  ist es für baupraktische Zwecke in aller Regel ausreichend, auf den Wurzelterm zu verzichten:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} & \rightarrow & \quad \xi = \frac{\Lambda}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Lambda^2}} \\ \Lambda &\approx 2\pi\xi & \rightarrow & \quad \xi \approx \frac{\Lambda}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.74)$$

### 2.4.3 Periodische Fußpunkterregung des viskos gedämpften EFS

Unter der Voraussetzung, dass sich die Erregerfunktion der Fußpunkterregung  $y_F(t)$  in einem festen Zeitabstand  $T_F$  identisch wiederholt und damit  $y_F(t + T_F) = y_F(t)$  gilt, lässt sich deren Verlauf durch eine FOURIER-Reihe wie folgt annähern.

$$Y_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \underbrace{n\Omega}_\Omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \underbrace{n\Omega}_\Omega t \quad (2.75)$$

Die für die Entwicklung benötigten Berechnungsformeln der einzelnen FOURIER-Koeffizienten ergeben sich aus der Vorgabe, dass die mittlere quadratische Abweichung zwischen Originalfunktion  $y_F$  und Näherungsfunktion  $Y_F$  minimal sein soll ( $\Omega_n = n \cdot \frac{2\pi}{T_F}$ ).

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} y_F(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} y_F(t) \cdot \cos \left( n \frac{2\pi}{T_F} \cdot t \right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} y_F(t) \cdot \sin \left( n \frac{2\pi}{T_F} \cdot t \right) dt \end{aligned} \quad (2.76)$$

Nach Substitution bei Beachtung des entsprechenden Additionstheorems lässt sich die FOURIER-Reihe in die vergleichsweise übersichtlichere Amplituden-Phasen-Notation überführen:

$$\begin{aligned} Y_F(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin(\Omega_n t + \Psi_n) & \text{mit:} & \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ & & \text{und:} & \quad \tan \Psi_n = \frac{a_n}{b_n} \\ \ddot{Y}_F(t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^2 \cdot c_n \cdot \sin(\Omega_n t + \Psi_n) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Mit der so approximierten, trigonometrischen Reihenentwicklung lautet die das Bewegungsproblem beschreibende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{u} + d \cdot \dot{u} + k \cdot u &= -m \cdot \ddot{y}_F \\ \ddot{u} + 2\xi\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u &= \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^2 \cdot c_n \cdot \sin(\Omega_n t + \Psi_n) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Da es sich bei dem hier betrachteten Einfreiheitsgradschwinger definitionsgemäß um ein lineares Schwingungssystem handelt, ist das Superpositionsgesetz uneingeschränkt gültig. Folglich kann die stationäre Schwingungsreaktion auf eine als FOURIER-Reihe angenäherte periodische Fußpunkterregung aus der Summe aller überlagerten Teillösungen (2.42) gebildet werden:

$$\begin{aligned}
u_p(t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot V_{r,n} \cdot \sin(\Omega_n t + \Psi_n - \varphi_{p,r,n}) && \text{für} && \eta_n < 1 \\
u_p(t) &= + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot V_{r,n} \cdot \sin(\Omega_n t + \Psi_n - \varphi_{p,r,n}) && \text{für} && \eta_n > 1
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Die FOURIER-Koeffizienten  $c_n$  entsprechen hierbei der jeweiligen Amplitude  $y_{F,n}$ , des an der Näherung beteiligten Reihengliedes. Die Vergrößerungsfunktion  $V_{r,n}$  sowie der zugehörige Phasenwinkel  $\varphi_{p,r,n}$  können den Einzellösungen der stationären Schwingungsreaktion auf die harmonische Fußpunkterregung entnommen werden:

$$V_{r,n} = \frac{\eta_n^2}{\sqrt{(1 - \eta_n^2)^2 + (2\xi\eta_n^2)^2}} \tag{2.80}$$

$$\tan \varphi_{p,r,n} = \frac{2\xi\eta_n}{1 - \eta_n^2} \quad \text{wobei} \quad \eta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} \tag{2.81}$$

Die Absolutverschiebung  $y$  der Masse  $m$  ergibt sich wiederum aus dem Verlauf der Relativverschiebung  $u$ :

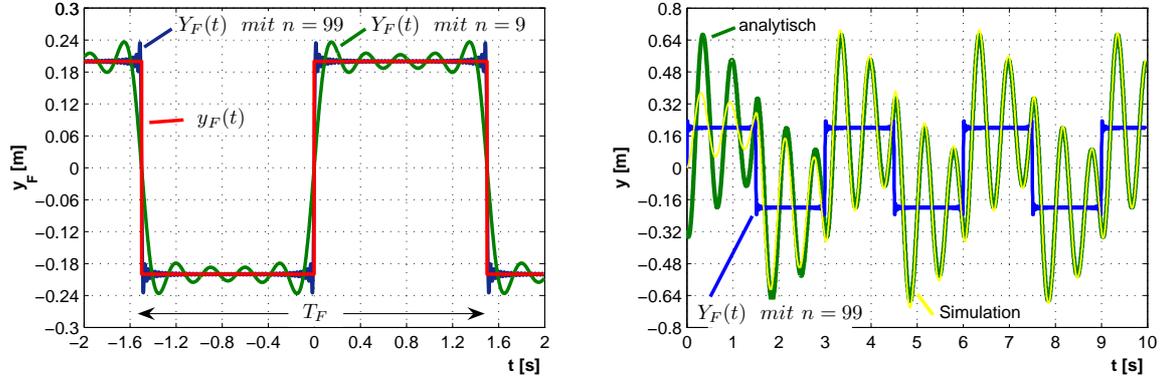
$$y(t) = y_F(t) + u(t) \tag{2.82}$$

Beispielhaft wird das Vorgehen zur Ermittlung der stationären Schwingungsreaktion für eine rechteckförmige Fußpunkterregung anhand des bereits bekannten Einfreiheitsgradschwingers gezeigt. Der zu untersuchende Funktionsverlauf  $y_F$  wird asymmetrisch zum Ursprung gewählt, so dass sich aufgrund der entsprechend enthaltenen Sinus-Funktion lediglich FOURIER-Koeffizienten  $b_n \neq 0$  ergeben. Als Annäherung an  $y_F$  liefert die Reihenentwicklung damit die nachfolgende Funktionsvorschrift für  $Y_F$ :

$$Y_F(t) = \frac{4 \cdot \hat{y}_F}{\pi} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2} \cdot \sin \Omega_n t}_{\hat{y}_{F,n}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \tag{2.83}$$

Wird die Einwirkungsperiode zu  $T_F = 3$  s gewählt, ergibt sich für die durch die FOURIER-Reihe angenäherte Fußpunkterregung die in Bild 2.15 dargestellte stationäre Schwingungsreaktion. Das Ergebnis lässt sich durch die Berechnung mittels eines entsprechenden FE-Programms [5] bestätigen. Der anfangs von der stationären Lösung abweichende Verlauf erklärt sich dabei aus dem im FE-Programm [5] unweigerlich ‘‘mitgerechneten‘‘ Einschwingvorgang. Wird die Annäherung  $Y_F(t)$  mit der Originalfunktion  $y_F(t)$  verglichen, fällt auf, dass deren Verlauf im Bereich der Sprungstelle durch ein gewisses Über- und Unterschwingen gekennzeichnet ist. Diese Erscheinung, die als Gibbssches Phänomen bekannt ist, lässt sich selbst durch die Verwendung

einer weitaus höheren Anzahl von Summengliedern für die Approximation nicht verringern. Vielmehr pendelt sich der prozentuale Fehler auf einen rechnerisch nachweisbaren Wert ein, der etwa 18% der eigentlichen Sprunghöhe beträgt [20].



**Bild 2.15:** Angenäherte FOURIER-Reihe und zugehörige Schwingungsreaktion des EFS

Im Fall, dass sich die Fourier-Glieder analytisch nicht herleiten lassen, besteht die Möglichkeit diese mit Hilfe der so genannten **Diskreten FOURIER-Reihenentwicklung** auf numerischem Wege zu berechnen. Hierzu wird das Ausgangssignal über seine Periodenlänge  $T_F = l \cdot \Delta t$  an diskreten Punkten  $k \cdot \Delta t$  in Abhängigkeit der gewählten Abtastfrequenz  $\Delta t$  abgegriffen und die Annäherung der FOURIER-Reihe anhand der so gewonnenen Stützpunkte orientiert. Das komplexe FOURIER-Glied  $\underline{c}_n$  berechnet sich dann nach entsprechend finiter Umsetzung zu:

$$\underline{c}_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - i \cdot b_n) = \frac{1}{l} \cdot \sum_{k=0}^{k=l-1} y_{F, k} \cdot e^{-i \cdot n \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{l}} \quad \text{mit} \quad (n = 0, 1, \dots, \frac{l}{2}) \quad (2.84)$$

Nachdem zur vollständigen Beschreibung jeder Harmonischen mit der Amplitude  $\underline{c}_n$  und der Phase  $\varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$  jeweils zwei Unbekannte benötigt werden, für die aufgrund der Diskretisierung aber lediglich  $l$  Gleichungen zur Verfügung stehen, lassen sich entsprechend nur  $l/2$  Harmonische ermitteln. Als Konsequenz daraus werden Frequenzinhalte oberhalb der so genannten NYQUIST-Frequenz  $f_c = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} = \frac{l}{2 \cdot T_F}$  bei Anwendung der Diskreten FOURIER-Reihenentwicklung nicht berücksichtigt. Zur vollständigen Erfassung des Frequenzspektrums eines Messschriebes ist es demnach erforderlich, der Abtastfrequenz  $\frac{1}{\Delta t}$  mindestens den doppelten Wert der im Originalschrieb enthaltenen Höchsfrequenz  $f_{max}$  zuzuweisen. Die daraus abgeleitete Bedingung für die maximale Schrittweite  $\Delta t < \frac{1}{2 \cdot f_{max}}$  ist als Abtasttheorem von SHANNON bekannt. Nach Ermittlung der FOURIER-Koeffizienten lässt sich der Realteil der Reihenentwicklung als Annäherung an die Originalfunktion wie folgt berechnen:

$$Y_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\frac{l}{2}} (a_n \cdot \cos \Omega_n t + b_n \cdot \sin \Omega_n t) \quad (2.85)$$

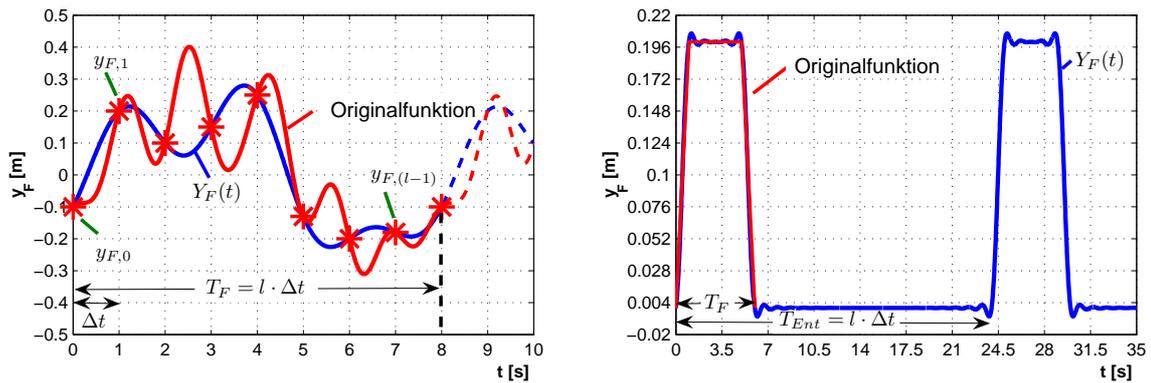
bzw. mit  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  und  $\tan\Psi_n = \frac{a_n}{b_n}$ :

$$Y_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\frac{l}{2}} c_n \cdot \sin(\Omega_n t + \Psi_n) \quad (2.86)$$

Bild 2.16 zeigt eine mit der Frequenz 1 Hz abgetastete Originalfunktion, sowie die zugehörige, aus diskreten Werten ermittelte Annäherung. Zwar läuft die FOURIER-Reihe exakt durch die vorgegebenen Stützstellen, offensichtlich bleiben jedoch die höheren Frequenzanteile unberücksichtigt. Da die von der Originalfunktion abgegriffenen Werte plausiblerweise in Abhängigkeit der gewählten Schrittweite  $\Delta t$  variieren, sind zudem gänzlich unterschiedliche Verläufe für die approximierte Funktion denkbar, sobald das Abtasttheorem von SHANNON erstmal unterschritten ist. Diesem als Vieldeutigkeit (engl. aliasing) bezeichneten Problem kann nur durch eine entsprechend hohe Abtastrate begegnet werden.

Ein zusätzliches Problem tritt auf, sobald sich die anzunähernde Funktion nicht identisch nach einer gewissen Periode  $T_F$  wiederholt und somit von aperiodischem Typ ist. Um eine solche Funktion trotzdem einer FOURIER-Reihenentwicklung zuführen zu können, wird eine fiktive Periode  $T_{Ent}$  eingeführt, deren Dauer diejenige der eigentlichen Einwirkung so weit wie möglich übertreffen sollte. Der für die Auswertung das Optimum darstellende Grenzübergang  $T_F \rightarrow \infty$  ist jedoch im Fall der diskreten FOURIER-Reihenentwicklung aus numerischen Gründen nicht zu realisieren. Die noch unbesetzten Amplitudenwerte zwischen dem tatsächlichen Einwirkungs-ende zum Zeitpunkt  $T_F$  und der fiktiven Periode  $T_{Ent}$  werden anschließend zu Null gesetzt. Im Fall, dass es sich um eine stochastische Funktion handelt, wird diese einfach zu einer periodischen Funktion umgedeutet, indem diese nach der fiktiven Periode  $T_{Ent}$  identisch wiederholt wird. Mit diesem Vorgehen wird trotz der Vorgabe die ursprüngliche Funktionscharakteristik weitestgehend beizubehalten, eine für die Reihenentwicklung benötigte Periodizität erreicht. Die somit auch auf aperiodische und stochastische Funktionen anwendbare Diskrete FOURIER-Reihenentwicklung wird als Abgrenzung zu ersterer als **Diskrete FOURIER-Transformation** bezeichnet. Für die in Bild 2.16 dargestellte Trapezfunktion ist stellvertretend der Verlauf einer entsprechend angenäherten FOURIER-Transformation dargestellt, für deren Berechnung insgesamt 48 Stützstellen verwendet wurden. Sind die FOURIER-Koeffizienten  $c_n$  und Phasenwinkel  $\Psi_n$  erst einmal bekannt, berechnet sich die durch den angenäherten Verlauf hervorgerufene Schwingungsreaktion des Einfreiheitsgradschwingers wiederum durch Einsetzen der entsprechenden Werte in Gleichung (2.79).

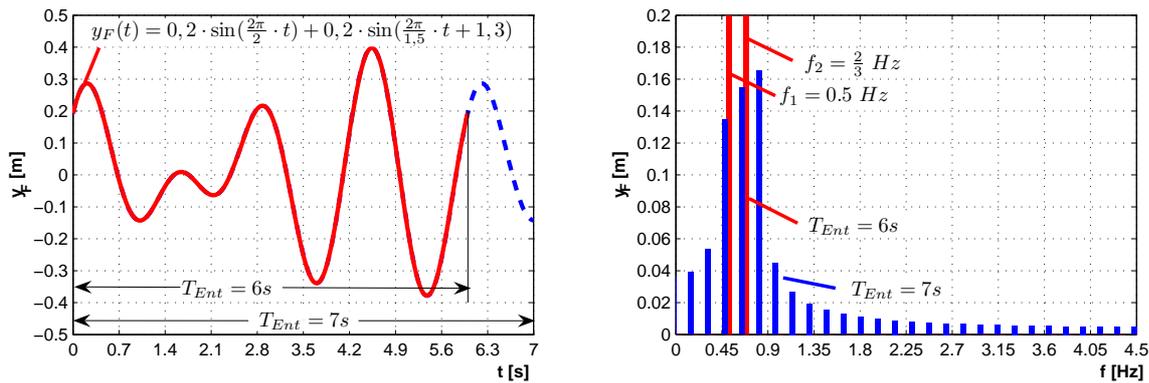
Hinsichtlich der Weiterverwendung der mittels DFR bzw. DFT ermittelten Amplituden- und Phasenwerte ist jedoch Vorsicht geboten, da diese im Fall des Auftretens so genannter Randbegrenzungseffekte verfälscht werden können. So darf ein korrektes Amplitudenspektrum als Ergebnis streng genommen nur dann erwartet werden, wenn eine periodische Funktion vorliegt,



**Bild 2.16:** Angenäherte diskrete FOURIER-Reihe für eine periodische und eine aperiodische Funktion

deren Harmonische allesamt als Vielfache der Entwicklungsperiode  $T_{Ent}$  darstellbar sind. Da in aller Regel vorab keine Informationen über die zu analysierende Funktion vorliegen werden, muss die Länge der Entwicklungsperiode  $T_{Ent}$  aber mehr oder minder willkürlich festgelegt werden. Dies impliziert das Herausschneiden eines bestimmten Bereichs aus der Originalfunktion, so dass dessen Anfang und Ende hinsichtlich der Amplitude in den seltensten Fällen übereinstimmen wird. Der dadurch hervorgerufene Kappungseffekt, auch Leck-Effekt (engl. leakage) genannt, führt einerseits zum Auftreten von Scheinfrequenzen, die im Amplitudenspektrum um die wirklich vorhandene Frequenz gruppiert sind, und andererseits zum Zusammenziehen benachbarter Amplitudenpeaks [94]. Zwar kann der fehlerhafte Bereich durch eine verbesserte Frequenzauflösung auf ein schmaleres Frequenzintervall konzentriert werden, aber insbesondere die Energieumverteilung auf die Scheinfrequenzen hat eine beträchtliche Verfälschung der zugehörigen Amplitudenwerte zur Folge [62]. Zur Veranschaulichung der obigen Problematik wird eine periodische Funktion, die sich aus jeweils zwei Harmonischen mit den Perioden  $T_1 = 2 \text{ s}$  und  $T_2 = \frac{3}{2} \text{ s}$  zusammensetzt, für die zwei unterschiedlichen Entwicklungsperioden  $T_{Ent} = 6 \text{ s}$  und  $T_{Ent} = 7 \text{ s}$  analysiert. Das Ergebnis ist in Bild 2.17 wiedergegeben. Es ist ersichtlich, dass im ersten Fall sowohl die ermittelten Frequenzen als auch die Amplitudenwerte korrekt wiedergegeben sind, während im zweiten Fall ein völlig verfälschtes Amplitudenspektrum die Folge ist.

Um dem Leck-Effekt zu begegnen, wurde die so genannten Fenstertechnik eingeführt, mit der eine wesentliche Milderung der spektralen Verfälschung gelingt. Da die Befensterung des Messschriebes jedoch gleichzeitig zu einer deutlichen Reduzierung der ausgewiesenen Amplitudenwerte führt, liefert die weitere Auswertung gemäß der Gleichung (2.79) entsprechend deutlich zu günstige Schwingungsreaktionen. Gleichwohl ist die Spektralanalyse ohne die Technik der Befensterung in vielen Fällen kaum sinnvoll anwendbar, weshalb diese insbesondere in Zusammenhang mit der so genannten **Fast Fourier-Transformation** nahezu stets angewendet wird. Indes liegt bei der Spektralanalyse das Hauptaugenmerk auch auf der möglichst exakten Wiedergabe der im Messschrieb vorhandenen dominanten Frequenzen, und die aufgrund der Befensterung verur-



**Bild 2.17:** Verfälschtes Ergebnis als Folge von Kappungseffekten bei Anwendung der DFR

sachte Amplitudenverfälschung wird in diesem Fall in Kauf genommen. Bei der zuvor erwähnten **Fast Fourier-Transformation** handelt es sich im Übrigen ungeändert um eine **Diskrete Fourier-Transformation**, die aber wesentlich weniger Rechenleistung erfordert. Zu diesem Zweck werden die den trigonometrischen Funktionen innewohnenden Periodizitäten derart genutzt, dass sich die Anzahl der mittels FFT analysierbaren Daten auf jeweils  $l = 2^p$  mit  $p \in \mathbb{N}$  reduziert.

#### 2.4.4 Transiente Fußpunkterregung des viskos gedämpften EFS

Eine Möglichkeit, die stationäre Schwingungsreaktion eines Einfreiheitsgradschwingers auf eine aperiodische Erregung approximativ zu berechnen, wurde bereits im vorangegangenen Kapitel aufgezeigt. Dort wurde die Belastungsseite durch eine **FOURIER-Reihenentwicklung** angenähert und somit der Lösung für die periodische Fußpunkterregung zugänglich gemacht. Soll die durch einen unregelmäßigen Stoßverlauf hervorgerufene Schwingungsreaktion hingegen exakt berechnet werden, gelingt dies durch die Zuhilfenahme des so genannten **DUHAMEL-Faltungsintegrals**. Insbesondere für den Fall, dass sich der Erregungsverlauf in Abhängigkeit der Zeit  $t$  als Funktion darstellen lässt, resultiert daraus der Vorteil, dass sich die Antwort als geschlossen analytische Lösungsfunktion ergibt. Damit ist diese für weitergehende Untersuchung hinsichtlich der maximalen Schwingungsreaktion sowie deren Zeitpunkt oder des Dämpfungseinflusses verfügbar. Zur Herleitung des **DUHAMEL-Integrals** wird zunächst die so genannte **DIRAC-Distribution** eingeführt, mit deren korrekten Bezeichnung als “Distribution“ darauf hingewiesen werden soll, dass es sich hierbei definitionsgemäß um keine Funktion handelt. Aus mathematischer Sicht wäre hierfür streng genommen das Vorhandensein einer klaren Wertzuweisung für alle Funktionsvariablen erforderlich. Abweichend davon ist die fragliche Distribution aber zum Zeitpunkt  $t = \tau$  lediglich in Bezug auf ihr Integrationsergebnis geregelt, womit eine entsprechende Zuweisung lediglich für die übrigen Werte von  $t$  in Form des Ausgabewertes Null existiert [125].

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 & \text{für } t = \tau \end{cases} \quad (2.87)$$

Die auch als DIRAC-Stoß  $\delta(t)$  bezeichnete Distribution lässt sich ingenieurmäßig als Linienimpuls der Dauer  $t = 0$  und der Intensität  $\infty$  interpretieren, deren Flächeninhalt als Produkt aus Impulsintensität und Impulsdauer per Definition mit dem Wert Eins festgelegt ist. Die Schwingungsreaktion des Einfreiheitsgradschwingers infolge eines solchen DIRAC-Stoßes wird demgemäß von der nachfolgenden Differentialgleichung beherrscht:

$$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y = \delta(t) \quad (2.88)$$

Nachdem  $\delta(t)$  für alle  $t \neq 0$  den Wert Null annimmt, wird dieser Bereich allein von dem bereits bekannten homogenen Lösungsteil (2.19) der Differentialgleichung beherrscht. Demnach ist die Schwingungsreaktion nur noch zum Zeitpunkt  $t = 0$  unbekannt, der für die weiteren Betrachtungen zweckmäßigerweise in einen Zeitbereich umgedeutet wird, indem die Zeit unmittelbar davor mit  $t = 0^-$  und unmittelbar danach mit  $t = 0^+$  bezeichnet werden. Dies erlaubt die für die Interpretation der DIRAC-Distribution benötigte Integration.

$$\int_{t=0^-}^{t=0^+} m\ddot{y} dt + \int_{t=0^-}^{t=0^+} d\dot{y} dt + \int_{t=0^-}^{t=0^+} ky dt = \underbrace{\int_{t=0^-}^{t=0^+} \delta(t) dt}_{=1} \quad (2.89)$$

Aus der Bedingung, dass sich das System zu Belastungsbeginn in Ruhe befindet und damit  $\dot{y}(t = 0^-) = 0$  gilt, lässt sich das vorderste Integral wie folgt berechnen:

$$\int_{t=0^-}^{t=0^+} m\ddot{y} dt = \left[ m\dot{y} \right]_{t=0^-}^{t=0^+} = m\dot{y}(t = 0^+) - 0 \quad (2.90)$$

Im Gegensatz dazu ergeben sich die restlichen Integrale der linken Seite aufgrund der Tatsache, dass die Verschiebung innerhalb der infinitesimal kurzen Zeit keinen Sprung aufweisen darf, zu Null ( $\int_{t=0^-}^{t=0^+} d\dot{y} dt = [m\dot{y}]_{t=0^-}^{t=0^+} = 0$  und  $\int_{t=0^-}^{t=0^+} ky dt = 0$ ). Die Anfangsgeschwindigkeit infolge des DIRAC-Stoßes gehorcht demnach der folgenden Gesetzmäßigkeit  $\dot{y}(t = 0^+) = v_0 = \frac{1}{m}$ , die wenn sie neben der Vorgabe  $y(t = 0) = y_0 = 0$  als Anfangsbedingung für die homogene Lösung (2.19) begriffen wird, zur Bestimmung von deren Freiwerte herangezogen werden kann. Nach entsprechendem Einsetzen führt dies zur so genannten Einfluss- oder Gewichtsfunktion  $g(t)$ , mit der sich die Schwingungsreaktion des Einfreiheitsgradschwingers infolge eines Einheitsimpulses  $I = 1$  bestimmen lässt.

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{1}{m \cdot \omega_d} \cdot e^{-\xi \omega t} \cdot \sin \omega_d t & (2.91) \\
 &= \frac{\omega}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi \omega t} \cdot \sin \omega_d t
 \end{aligned}$$

Wird die obige Funktion nach der Zeit  $t$  abgeleitet und zu Null gesetzt, folgt derjenige Zeitpunkt in Abhängigkeit der Eigenperiode  $T$  und dem Dämpfungsgrad  $\xi$ , zu dem die Schwingungsreaktion maximal wird:

$$\frac{t_{max}}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \quad (2.92)$$

Die zugehörige maximale Schwingungsreaktion auf den Einheitsimpuls  $g_{max}$  ergibt sich entsprechend durch Einsetzen der Zeit  $t_{max}$  und ist allein vom Dämpfungsgrad  $\xi$  beeinflusst:

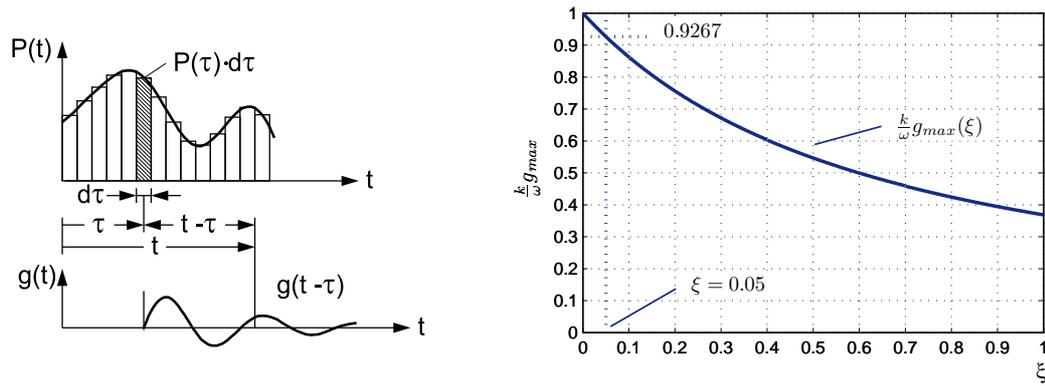
$$g_{max}(\xi) = \frac{1}{\xi \sqrt{1 + \frac{1 - \xi^2}{\xi^2}}} \cdot e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}} \quad (2.93)$$

Wie dem Bild 2.18 zu entnehmen ist, zeigt sich, dass für die im Bauingenieurwesen üblichen Dämpfungsgrade bis zu  $\xi = 0,05$  keine allzu große Minderung der Schwingungsreaktion zu erwarten ist. Im Fall des Erdbebeningenieurwesens wird jedoch aufgrund der meist zusätzlich und bewusst hervorgerufenen Dissipation oftmals eine wesentlich höhere Dämpfungswirkung erzielt, von der entsprechend auch eine positive Wirkung hinsichtlich der Belastungsminderung ausgeht.

Liegt nun ein beliebiger Kraftverlauf vor, lässt sich dieser durch die Einteilung in viele kleine Teilbereiche diskretisieren. Aufgrund der zugehörigen infinitesimalen Zeitdauer  $d\tau$  entartet der ursprüngliche Kraftverlauf hierbei in eine Reihe von Einzelimpulsen  $P(\tau) \cdot d\tau$ , die, ausgehend vom jeweiligen Zeitpunkt  $\tau$ , jeder für sich genommen eine harmonische Schwingungsreaktion hervorrufen, die mit obiger Einflussfunktion  $g(t - \tau)$  bestimmt werden kann, siehe Bild 2.18.

$$y(t)_{\text{Einzelimpuls}} = P(\tau) \cdot g(t - \tau) dt \quad (2.94)$$

Da das Superpositionsgesetz unter der Voraussetzung eines linearen Schwingungssystems uneingeschränkte Gültigkeit besitzt, lässt sich die Schwingungsreaktion auf die komplette Belastungsgeschichte nach dessen Diskretisierung durch die entsprechende Überlagerung aller Einzelergebnisse aufsummieren. Bedingt durch die infinitesimal kurze Zeitdauer  $d\tau$  entspricht dies der Integration über den gesamten Einflussbereich von  $\tau = 0$  bis  $\tau = t$ .



**Bild 2.18:** Zurückführung einer zeitlich veränderlichen Last auf eine Folge von Impulsen; Auswirkung des Dämpfungsgrades  $\xi$  auf die Maximalwerte der Einflussfunktion  $g(t)$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{\tau=0}^{\tau=t} P(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{m \cdot \omega_d} \int_{\tau=0}^{\tau=t} P(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega_d(t-\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Die obige Formel stellt die Gewichtung der Anregungsfunktion mit ihrer Impulsantwort dar und gibt an, wie stark der um  $\tau$  zurückliegende Wert der gewichteten Funktion, also  $g(t-\tau)$ , in die Schwingungsreaktion zum Zeitpunkt  $t$  eingeht. Dieser in der Mathematik als Faltung bezeichnete Vorgang lässt sich auch auf den Fall der Fußpunkterregung anwenden, indem zunächst der rechte Term der Gleichung (2.9), der die dynamische Wirkung der Bodenbewegung angibt, auf die Wirkung einer Erregerkraft  $P(t)$  zurückgeführt wird. Mit Hilfe der daraus resultierenden Gesetzmäßigkeit  $P(t) = d \cdot \dot{y}_F + k \cdot y_F$  lässt sich das obige DUHAMEL-Faltungsintegral in die folgende Form überführen:

$$y(t) = \frac{\omega}{k} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left[ d \cdot \dot{y}_F(\tau) + k \cdot y_F(\tau) \right] \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \tag{2.96}$$

Die Auswertung der obigen Formel in Bezug auf die durch die Relativverschiebung  $u$  gekennzeichnete Ausgangsgleichung (2.10) erfolgt prinzipiell nach demselben Schema wie für die Absolutverschiebung  $y$ , indem die Wirkung der Erregerkraft wiederum auf diejenige der Fußpunktbeschleunigung zurückgeführt  $P(t) = -m \cdot \ddot{y}_F = -\frac{k}{\omega^2} \cdot \ddot{y}_F$  und anschließend entsprechend in das DUHAMEL-Integral eingesetzt wird. Da die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{u}_0$  dem entsprechenden Wert der Fußpunkterregung entgegengesetzt sein muss, ist jedoch im Vergleich zu vorher, eine der Voraussetzungen zur Herleitung des DUHAMEL-Integrals in Form  $\dot{u}_0 = 0$  verletzt [55]. Um die zusätzliche Anfangsbedingung  $\dot{u}_0 = \dot{y}_{F,0}$  dennoch zu erfüllen, wird der den Einfluss der Be-

lastung beschreibende Teil des DUHAMEL-Integrals um die Lösung der freien Ausschwingkurve Gl. (2.21) wie folgt ergänzt ( $u_0 = 0$ ).

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -\hat{u} \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_h) + \frac{\omega}{k} \int_{\tau=0}^{\tau=t} -m \cdot \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\
 u(t) &= \underbrace{-\frac{v_0}{\omega_d} \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot \sin(\omega_d t)}_{\text{Einfluss der Anfangsbedingung}} + \underbrace{\frac{1}{\omega} \int_{\tau=0}^{\tau=t} -\ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega_d(t-\tau) d\tau}_{\text{Einfluss der Fußpunkterregung}} \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

Im Fall, dass die Fußpunkterregung einschließlich ihrer Ableitung analytisch darstellbar ist, enthält das obige Integral insgesamt drei Funktionsverläufe, die zu entsprechend umfangreichen mathematischen Ausdrücken führen, solange sich eine geschlossene Lösung angeben lässt. Wesentlich günstiger gestaltet sich die Auswertesituation hingegen für den Fall, dass auf den ohnehin nicht allzu starken Dämpfungseinfluss verzichtet wird ( $\xi = 0$ ;  $d = 0$ ;  $\omega_d = \omega$ ):

$$y(t) = \omega \int_{\tau=0}^{\tau=t} k \cdot y_F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.98)$$

bzw.

$$u(t) = -\frac{\dot{u}_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega} \int_{\tau=0}^{\tau=t} -\ddot{y}_F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.99)$$

Nachfolgend wird die Berechnung der Schwingungsreaktion für eine am Fundament angreifende Impulsanregung in Form einer Sinus-Halbwelle gezeigt. Die Einwirkungsdauer beträgt  $T_E$ .

$$y_F(t) = \begin{cases} 0.2 \cdot \sin \frac{\pi}{T_E} \cdot t & \text{für } t \leq T_E \\ 0 & \text{für } t > T_E \end{cases} \quad (2.100)$$

Der Vorteil des gewählten Funktionsverlaufs liegt hier im Vergleich z.B. einer Rechteckfunktion in dessen Differenzierbarkeit, so dass auch der Beschleunigungsverlauf der Fußpunkterregung direkt angegeben werden kann. Für den Fall, dass die Schwingungsreaktion auf einen Erdbebenverlauf berechnet werden soll, tritt diese Problematik jedoch in den Hintergrund, da dieser in aller Regel bereits als Akzellerogramm vorliegt. Die Berechnung des DUHAMEL-Integrals für den Verlauf der Absolutverschiebung  $y(t)$  sowie dessen Geschwindigkeit ergibt sich bei Verzicht auf den Dämpfungseinfluss zu:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \omega \int_{\tau=0}^{\tau=t} 0.2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T_E} \cdot \tau\right) \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \\
&= 0.2 \cdot \omega \cdot T_E \cdot \frac{\pi \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot T_E \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T_E} \cdot t\right)}{\pi^2 - \omega^2 \cdot T_E^2}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\dot{y}(t) = 0.2 \cdot \omega \cdot T_E \cdot \frac{\omega \cdot \pi \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T_E} \cdot t\right)}{\pi^2 - \omega^2 \cdot T_E^2} \tag{2.102}$$

Die Berechnung des Verlaufs der zugehörigen Relativverschiebung  $u(t)$  erfordert, wie zuvor erläutert, zusätzlich die Anfangsgeschwindigkeit der Fußpunkterregung  $\dot{u}_0 = -\dot{y}_{F,0} = -0,2 \cdot \frac{\pi}{T_E}$ . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{0.2 \cdot \pi}{\omega \cdot T_E} \cdot \sin(\omega t) - \frac{1}{\omega} \int_{\tau=0}^{\tau=t} -0.2 \cdot \frac{\pi^2}{T_E^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T_E} \cdot \tau\right) \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \\
&= -\frac{0.2 \cdot \pi}{\omega \cdot T_E} \cdot \sin(\omega t) + \frac{0.2 \cdot \pi^2}{\omega \cdot T_E} \cdot \frac{\pi \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot T_E \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T_E} \cdot t\right)}{\pi^2 - \omega^2 \cdot T_E^2}
\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\dot{u}(t) = -\frac{0.2 \cdot \pi}{T_E} \cdot \cos(\omega t) + \frac{0.2 \cdot \pi^3}{T_E} \cdot \frac{\cos(\omega t) - \cos\left(\frac{\pi}{T_E} \cdot t\right)}{\pi^2 - \omega^2 \cdot T_E^2} \tag{2.104}$$

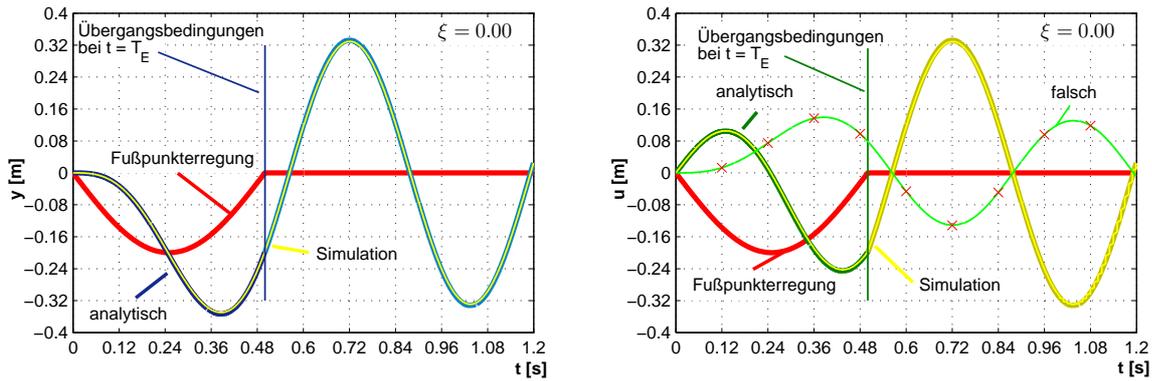
Während die obigen Gleichungen ausschließlich für den Zeitbereich der eigentlichen Impulseinwirkung gelten, ist die Schwingungsreaktion des Systems nach dem Zeitpunkt  $t = T_E$ , die im Folgenden als Zustand II bezeichnet wird, erst noch zu ermitteln. Die zugehörigen Übergangsbedingungen der sich anschließenden freien Schwingung ermitteln sich im Fall der Absolutverschiebung  $y$  wie folgt:

$$y_{II}(t_{II} = 0) = y(t = T_E) \qquad \dot{y}_{II}(t_{II} = 0) = \dot{y}(t = T_E) \tag{2.105}$$

Davon abweichend ist bei der Berechnung der sich anschließenden Relativverschiebung  $u$  zu beachten, dass die Geschwindigkeit der Fußpunkterregung bei den Übergangsbedingungen zusätzlich berücksichtigt werden muss:

$$u_{II}(t_{II} = 0) = u(t = T_E) \qquad \dot{u}_{II}(t_{II} = 0) = \dot{u}(t = T_E) + \dot{y}_F(t = T_E) \tag{2.106}$$

Werden die obigen Gleichungen für die in Kapitel 2.4.2.3 angegebenen Systemwerte ausgewertet und die Impulsdauer zu  $T_E = 0.5$  s gewählt, ergeben sich die in Bild 2.19 dargestellten Schwingungsverläufe.



**Bild 2.19:** Schwingungsreaktion auf eine Fußpunkterregung in Form eines Sinus-Impulses

Die Ergebnisse lassen sich durch eine entsprechende numerische Simulation bestätigen. Im rechten Bild ist neben dem korrekten Verlauf der Relativverschiebung  $u(t)$  auch derjenige, der sich für die alleinige Auswertung des DUHAMEL-Integrals ohne Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ergibt, wiedergegeben. Das Ergebnis wird hierbei umso mehr verfälscht, je kleiner das Verhältnis zwischen Einwirkungsdauer und Eigenperiode des Schwingungssystems  $T_E/T$  ist. Dies gilt zwar auch bei Vorhandensein einer Dämpfungswirkung, gleichwohl sorgt in diesem Fall der Faktor  $e^{-\xi\omega t}$  dafür, dass der Einfluss der Randbedingungen mit fortschreitender Zeit  $t$  abklingt. Handelt es sich bei der Einwirkung im Vergleich zur Eigenperiode um einen eher längeren Zeitraum, kann der eingeschwingene Zustand demnach durch die alleinige Berechnung des DUHAMEL-Integrals in ausreichender Näherung beschrieben werden.

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.107)$$

Die zugehörigen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufe ergeben sich entsprechend durch ein- bzw. zweimaliges Differenzieren, wobei zu beachten ist, dass die Variable  $t$  nicht nur innerhalb des Integrals, sondern auch als Integrationsgrenze auftritt [17].

$$\dot{u}(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \dot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \left[ \sqrt{1-\xi^2} \cdot \cos \omega_d(t-\tau) - \xi \cdot \sin \omega_d(t-\tau) \right] d\tau \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \left[ (1-2\xi^2) \cdot \sin \omega_d(t-\tau) + 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \cdot \cos \omega_d(t-\tau) \right] d\tau \\ &\quad - \ddot{y}_F(t) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Die in Hinsicht auf die Bemessungsaufgabe für den Erdbebenfall vor allem interessierende

Absolutbeschleunigung  $\ddot{y}$  der Bauwerksmasse lässt sich aufgrund des Zusammenhangs  $\ddot{y}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{y}_F(t)$  und durch entsprechende Umstellung der obigen Formel direkt in Abhängigkeit des Beschleunigungsverlaufs der Fußpunkterregung  $\ddot{y}_F$  berechnen.

$$\ddot{y}(t) = \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \left[ (1-2\xi^2) \cdot \sin \omega_d(t-\tau) + 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \cdot \cos \omega_d(t-\tau) \right] d\tau \quad (2.110)$$

Eine übersichtlichere Darstellung der Zusammenhänge ergibt sich für die teilweise Vernachlässigung der Dämpfungswirkung, indem der Einfluss von  $\xi$  in allen Termen mit Ausnahme des Ausdrucks  $e^{-\xi\omega\tau}$  unterdrückt wird ( $\omega_d = \omega \cdot \sqrt{1-\xi^2} \approx \omega$ ).

$$u(t) \approx -\frac{1}{\omega} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.111)$$

$$\dot{u}(t) \approx - \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \cos \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.112)$$

$$\ddot{y}(t) \approx \omega \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.113)$$

Neben der Anwendung des DUHAMEL-Integrals besteht eine weitere Möglichkeit, die Schwingungsreaktion auf einen beliebigen Belastungsverlauf zu ermitteln, in der Methode des so genannten Übertragungsverfahrens. Dazu wird die ursprüngliche Erregerfunktion wahlweise durch eine Stufenfunktion oder einen Polygonzug mit intervallweise geradlinigem Verlauf angenähert und die Differentialgleichung für jedes Einzelstück direkt gelöst. Dabei fungieren die jeweiligen Schlusswerte der Verschiebung und Geschwindigkeit des aktuellen Intervalls als Anfangsbedingung für das darauf folgende Intervall. Bild 2.20 zeigt ein Beispiel eines entsprechend polygonal angenäherten Verlaufs mit unterschiedlichen Intervalllängen. Der Funktionsverlauf eines Einzelintervalls  $i$  lässt sich dann in Abhängigkeit der Steigung  $p_i$  als Verhältnis von Verlaufsänderung  $\Delta y_{F,i}$  zu Intervalllänge  $T_{F,i}$ , also  $p = \frac{\Delta y_{F,i}}{T_{F,i}}$ , und dem zugehörigen Anfangswert  $y_{F,i-1}$  wie folgt angeben.

$$y_{F,i}(t) = y_{F,i-1} + p_i \cdot t_i \qquad \dot{y}_{F,i}(t) = p_i \quad (2.114)$$

Ausgehend von der Gleichung (2.9) gilt damit innerhalb eines Intervalls  $i$  die folgende Differentialgleichung:

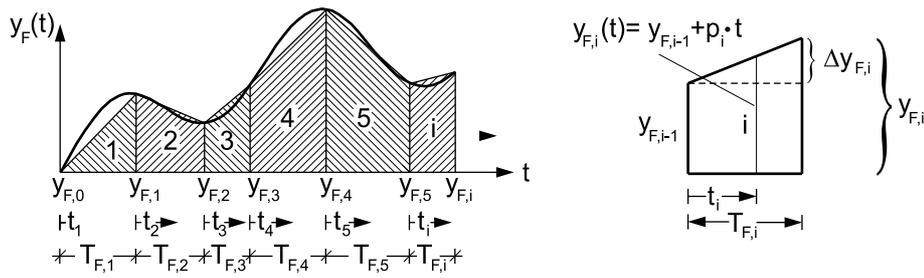


Bild 2.20: Annäherung des realen Verlaufs der Fußpunkterregung durch einen Polygonzug

$$\begin{aligned}
 m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y &= d \cdot \dot{y}_F + k \cdot y_F \\
 m \cdot \ddot{y}_i + d \cdot \dot{y}_i + k \cdot y_i &= d \cdot p_i + k \cdot (y_{F, i-1} + p_i \cdot t_i)
 \end{aligned} \tag{2.115}$$

Die homogene Lösung kann der bereits hergeleiteten Gleichung (2.19) entnommen werden, so dass nur noch der partikuläre Teil zu ermitteln ist. Hierfür wird der folgende Polynomansatz gewählt:

$$y_{i,p} = a_{0,i} + a_{1,i} \cdot t \qquad \dot{y}_{i,p} = a_{1,i} \qquad \ddot{y}_{i,p} = 0 \tag{2.116}$$

Nach Einsetzen des Ansatzes in die obige Differentialgleichung (2.115) und anschließendem Koeffizientenvergleich lassen sich die Unbekannten des partikulären Lösungsteils wie folgt angeben:

$$k \cdot a_{1,i} = k \cdot p_i \qquad \rightarrow \qquad a_{1,i} = p_i \tag{2.117}$$

$$d \cdot p_i + k \cdot a_{0,i} = d \cdot p_i + k \cdot y_{F, i-1} \qquad \rightarrow \qquad a_{0,i} = y_{F, i-1} \tag{2.118}$$

Demnach lautet die das Einzelintervall beschreibende Bewegungsgleichung zusammen mit der homogenen Lösung:

$$y_i = e^{-\xi \omega t_i} (A_i \cdot \sin \omega_d t_i + B_i \cdot \cos \omega_d t_i) + p_i \cdot t_i + y_{F, i-1} \tag{2.119}$$

$$\dot{y}_i = e^{-\xi \omega t_i} \left[ \omega_d \cdot (A_i \cdot \cos \omega_d t_i - B_i \cdot \sin \omega_d t_i) - \xi \omega \cdot (A_i \cdot \sin \omega_d t_i + B_i \cdot \cos \omega_d t_i) \right] + p_i \tag{2.120}$$

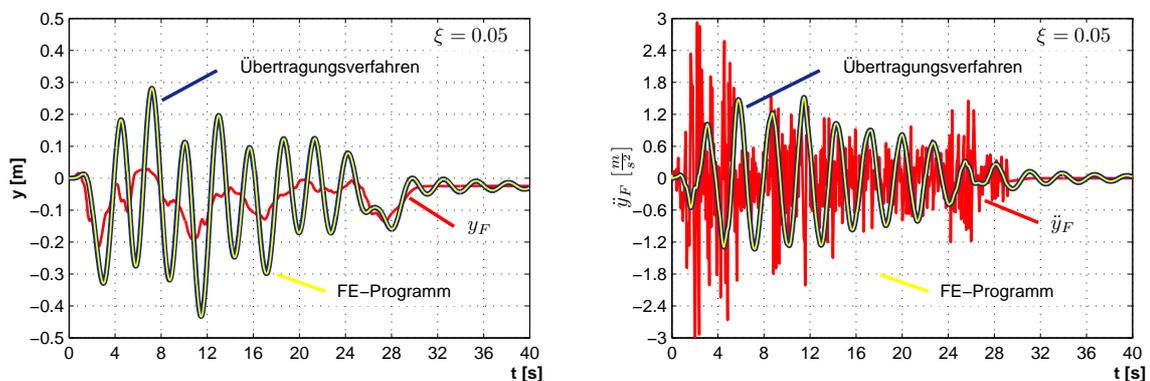
Die noch zu bestimmenden Freiwerte  $A_i$  und  $B_i$  berechnen sich in Abhängigkeit der Übergangsbedingung zu:

$$y_{i,0} = y_{i-1}(t_{i-1} = T_{i-1}) \rightarrow B_i = y_{i,0} - y_{F,i-1} \quad (2.121)$$

$$\dot{y}_{i,0} = \dot{y}_{i-1}(t_{i-1} = T_{i-1}) \rightarrow A_i = \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_d} \cdot y_{i,0} + \frac{1}{\omega_d} \cdot \dot{y}_{i,0} - \frac{1}{\omega_d} \cdot (\xi \omega \cdot y_{F,i-1} + p_i) \quad (2.122)$$

Da die Erdbebenverläufe aus Gründen der Datenspeicherung bereits als polygonale Annäherung des Originalsignals vorliegen, ist das Übertragungsverfahren als Grundlage für eine programmtechnische Auswertung gut geeignet. Zudem resultiert aus dem obigen Auswertealgorithmus der Vorteil, dass sich die durch den ohnehin geradlinig vorgegebenen Erregungsverlauf hervorgerufene Schwingungsreaktion als exakte Lösung ergibt. Für die in Bild 2.21 wiedergegebene Fußpunkterregung wurde die Schwingungsreaktion mit dem in der Programmierumgebung des Mathematikprogramms MAPLE [124] realisierten Übertragungsverfahren berechnet und anhand der Gegenrechnung mittels eines FE-Programms [5] verifiziert. Da sich die von einer beliebig unregelmäßigen Fußpunkterregung hervorgerufene Schwingungsreaktion stets quasiharmonisch in Abhängigkeit der Eigenperiode einstellt, üben nur bestimmte Frequenzinhalte einen größeren Einfluss auf den Einfreiheitsgradschwinger aus. Um diese Filtereigenschaft ausreichend zu berücksichtigen, wurden die Systemdaten des Einfreiheitsgradschwingers aus Kapitel 2.4.2.3 für die in Bild 2.21 berechneten Verläufe wie folgt abgeändert:

- Masse:  $m = 10\,000 \text{ kg}$
- Steifigkeit:  $k = 50\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- Dämpfungskoeffizient:  $d = 2\,236.07 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
- Eigenkreisfrequenz:  $\omega_d = 2.2333 \frac{1}{\text{s}}$ ,  $\Rightarrow f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 0.3554 \text{ Hz}$ ,  $\Rightarrow T_d = 2.813 \text{ s}$
- Dämpfungsgrad:  $\xi = \frac{d}{2 \cdot m \cdot \omega} = 0.05 \%$



**Bild 2.21:** Berechnung der Schwingungsreaktion mit Hilfe des Übertragungsverfahrens

Da Aufzeichnungen von Erdbeben im Regelfall nicht in Form von Weggrößen  $y_F$ , sondern als Beschleunigungsverläufe  $\ddot{y}_F$  aufgezeichnet werden, ist die Auswertung der Gleichung (2.10) mit dem Übertragungsverfahren ebenfalls von Interesse. Hierzu wird der Erregungsverlauf wiederum polygonal angenähert und entsprechend in die Differentialgleichung (2.10) eingesetzt.

$$m \cdot \ddot{u}_i + d \cdot \dot{u}_i + k \cdot u_i = -m \cdot (\ddot{y}_{F,i-1} + p_i \cdot t_i) \quad (2.123)$$

Die Ermittlung der zugehörigen Lösung der obigen Differentialgleichung entspricht dabei dem vorherigen Vorgehen und ergibt sich zu:

$$u = e^{-\xi\omega t_i} \cdot (A_i \cdot \sin \omega_d t_i + B_i \cdot \cos \omega_d t_i) - \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{y}_{F, i-1} + \frac{2}{\omega^3} \cdot \xi \cdot p_i - \frac{1}{\omega^2} \cdot p_i \cdot t_i \quad (2.124)$$

$$\dot{u} = e^{-\xi\omega t_i} \cdot \left[ \omega_d \cdot (A_i \cdot \cos \omega_d t_i + B_i \cdot \sin \omega_d t_i) - \xi\omega \cdot (A_i \cdot \sin \omega_d t_i + B_i \cdot \cos \omega_d t_i) \right] - \frac{1}{\omega^2} \cdot p_i \quad (2.125)$$

$$\ddot{u} = e^{-\xi\omega t_i} \cdot \left[ (\xi^2\omega^2 - \omega_d^2)(A_i \cdot \sin \omega_d t_i + B_i \cdot \cos \omega_d t_i) - 2\xi\omega\omega_d \cdot (A_i \cdot \cos \omega_d t_i + B_i \cdot \sin \omega_d t_i) \right] \quad (2.126)$$

mit:

$$A_i = \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_d} \cdot u_{i,0} + \frac{1}{\omega_d} \cdot \dot{u}_{i,0} + \frac{\xi}{\omega\omega_d} \cdot \ddot{y}_{F, i-1} + \frac{p_i}{\omega^2\omega_d} (1 - 2\xi^2)$$

$$B_i = u_{i,0} + \frac{1}{\omega^2} \ddot{y}_{F, i-1} - \frac{2}{\omega^3} \cdot \xi \cdot p_i$$

Mit Hilfe der Gesetzmäßigkeit  $\ddot{y}_i = \ddot{u}_i + \ddot{y}_{F, i+1}$  lässt sich aus dem Erdbebenbeschleunigungsverlauf wiederum direkt die dadurch hervorgerufene Beschleunigungsreaktion der Masse des Einfreiheitsgradschwingers ermitteln. Die Ergebnisse einer solchen Berechnung sind in Bild 2.21 für die der Fußpunktverformung  $y_F$  zugeordneten Fußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$  wiedergegeben. Die als Kontrollrechnung durchgeführte FE-Simulation ist dabei in beiden Abbildungen dem Berechnungslauf mit der Fußpunktverformung als Erregungsform entnommen und stimmt offensichtlich in beiden Fällen überein. Zwar lässt sich die Berechnung auch für die Beschleunigungsverläufe als Einwirkung mit einem FE-Programm realisieren, jedoch ergeben sich aus den hierfür zu wählenden starren Auflagerbedingungen gewisse Schwierigkeiten. Werden die Bodenbeschleunigungen  $\ddot{y}_F$  dennoch als Anregungsform für das Modell gewählt, ist darauf zu achten, dass diese vom berechneten Ergebnis nachträglich wieder abgezogen werden, wenn die resultierenden Absolutbeschleunigungen  $\ddot{y}$  der Bauwerksmasse gesucht sind.

Mit der programmtechnischen Umsetzung des obigen Algorithmus eröffnet sich nunmehr die Möglichkeit, die Schwingungsreaktion infolge einer Fußpunkterregung für Einfreiheitsgradschwinger mit unterschiedlichen Eigenkreisfrequenzen in automatisierter Form durchführen und durch die jeweilige Abspeicherung der Maximalreaktion ein so genanntes Antwortspektrum zu

generieren.

### 2.4.5 Arbeitsprinzip des Seismometers

Bei der Messung von Erdbebenverläufen besteht zunächst die Schwierigkeit, dass ein Festpunkt, zu dem die Bodenbewegungen in Bezug gesetzt werden könnten, nicht vorhanden ist. Die Registrierung der durch ein Erdbeben verursachten Erschütterungen gelingt aber dennoch, wenn die an einer federelastisch gelagerten Masse angreifenden Trägheitskräfte dahingehend genutzt werden, dass die damit in Zusammenhang stehenden Relativverschiebungen  $u$  zwischen Masse und Basis registriert werden. Die so gewonnenen Messdaten können anschließend auf Grundlage der bereits bekannten Differentialgleichung (2.10) ausgewertet und somit der späteren Bemessungsaufgabe zugänglich gemacht werden. Für die nachfolgenden Erläuterungen hinsichtlich der Funktionsweise von Seismometern wird vorerst von einer harmonischen Fußpunkterregung ausgegangen, die zu diesem Zweck wie folgt definiert wird:

$$\ddot{y}_F = \ddot{y}_{F, \max} \cdot \sin \Omega t \quad \dot{y}_F = -\frac{\ddot{y}_{F, \max}}{\Omega} \cdot \cos \Omega t \quad y_F = -\frac{\ddot{y}_{F, \max}}{\Omega^2} \cdot \sin \Omega t \quad (2.127)$$

Die zugehörige stationäre Lösung ergibt sich gemäß Gleichung (2.42) zu:

$$u_p(t) = \pm y_{F, \max} \cdot \overbrace{\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}}^{V_r} \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,r}) \quad \text{für} \quad \eta \leq 1 \quad (2.128)$$

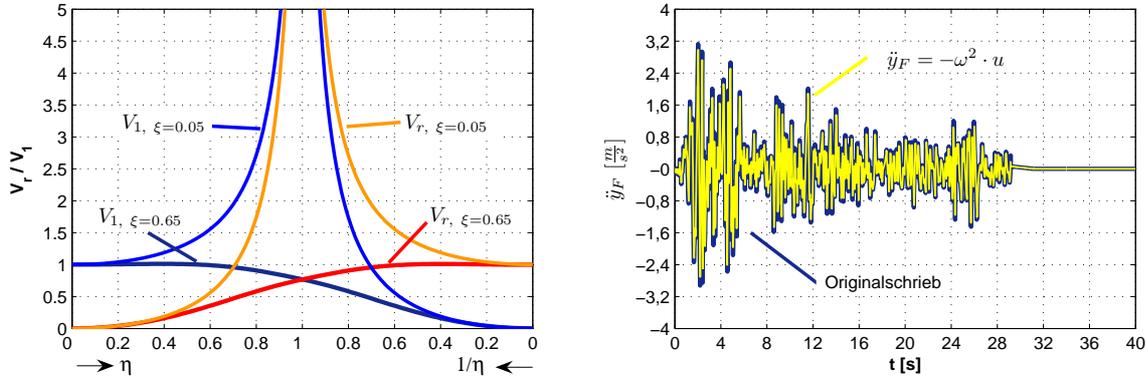
$$u_p(t) = \pm \frac{\ddot{y}_{F, \max}}{\Omega^2} \cdot \frac{\Omega^2/\omega^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,r}) \quad \text{für} \quad \eta \geq 1$$

$$u_p(t) = \pm \frac{\ddot{y}_{F, \max}}{\omega^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}}_{V_1} \cdot \sin(\Omega t - \varphi_{p,r}) \quad \text{für} \quad \eta \geq 1 \quad (2.129)$$

Mit Hilfe der angegebenen Formeln lässt sich der Verlauf einer gemessenen Relativverschiebung  $u$  offensichtlich sowohl auf den Verlauf der Fußpunktverformung  $y_F$  als auch auf denjenigen der Fußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$  zurückführen. Dabei unterscheiden sich die beiden Varianten vor allem in Hinsicht der jeweils zugeordneten Vergrößerungsfunktion  $V_r$  und  $V_1$  voneinander, weshalb die Auslegung von Seismometern maßgeblich durch deren Verlauf bestimmt wird.

Aufgrund der Tatsache, dass Erdbebenverläufe und damit auch deren Frequenzinhalte vorab nicht bekannt sind, lässt sich ein zuverlässiges Messergebnis einsichtigerweise nur unter der Voraussetzung erzielen, dass die zugehörige Vergrößerungsfunktion für den abzubildenden Messbereich einen annähernd konstanten Verlauf aufweist, dessen Größenordnung darüber hinaus bekannt sein muss. Wie dem Bild 2.22 entnommen werden kann, lässt sich diese Forderung

sowohl für eine hohe ( $\omega \gg \Omega$ ) als auch für eine tiefe Abstimmung ( $\omega \ll \Omega$ ) des Seismometers erfüllen. In beiden Fällen tendiert jeweils eine der Vergrößerungsfunktionen gegen den Wert eins, während sich die andere Vergrößerungsfunktion dem Wert Null annähert.



**Bild 2.22:** Vergrößerungsfunktionen  $V_r$  und  $V_1$ ; Originalschrieb und fiktiv gemessenes Akzellerogramm

Gemäß Gleichung (2.129) ist die Bodenbeschleunigung  $\ddot{y}_F$  im Fall der harten Aufstellung dem Produkt aus der gemessenen Relativverschiebung  $u$  und dem Kehrwert der Vergrößerungsfunktion  $1/V_1$  proportional.

$$\text{für: } \omega \gg \Omega \quad \ddot{y}_F(t) = -u(t) \cdot \omega^2 \cdot \overbrace{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}^{1/V_1} \rightarrow \ddot{y}_F(t) \approx -u(t) \cdot \omega^2 \quad (2.130)$$

Für eine möglichst unverfälschte Wiedergabe der im Erdbebenverlauf enthaltenen Erregerfrequenzen erweist sich bei der Auslegung des hoch abgestimmten Seismometers die Wahl des Dämpfungsgrades in einer Größenordnung von  $\xi = 0.65$  als optimal, da sich hierfür der in Bild 2.22 dargestellte, weitgehend konstante Verlauf der Vergrößerungsfunktion  $V_1$  einstellt. In der Folge lässt sich dieser bis zu einem Frequenzverhältnis von etwa  $\eta = 0.7$  ausreichend genau durch den konstanten Wert 1 annähern [94]. Insbesondere die so genannten Starkbeben-Seismometer der früheren Jahre wurden nach dem Prinzip der harten Aufstellung geplant und gefertigt. Daher stammt auch die erstmalig realisierte und dokumentierte Aufzeichnung einer Starkbebeneinwirkung vom damaligen Long Beach Erdbeben, das sich am 10.03.1933 in Kalifornien ereignete [14].

Nachfolgend wird zur Verdeutlichung des Funktionsprinzips der Verlauf der Relativverschiebung  $u$  infolge der Fußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$  für einen Einfreiheitsgradschwinger mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega = 200 \frac{1}{s}$  und dem Dämpfungsgrad  $\xi = 0.65$  mit Hilfe des in MAPLE [124] realisierten Übertragungsverfahrens berechnet. Das Berechnungsergebnis ist in Form der mit der quadrierten Eigenkreisfrequenz multiplizierten Relativverschiebung zusammen mit dem Originalschrieb auf der rechten Seite des Bildes 2.22 dargestellt. Offensichtlich stellt sich für die gewählten Systemdaten des fiktiven Seismometers bereits eine gute Abbildungstreue des Erdbebenverlaufs

ein.

Die zweite Möglichkeit, einen Seismometer auszulegen, besteht, wie zuvor erläutert, in der tiefen Abstimmung, für die sich gemäß Gleichung (2.128) eine Proportionalität zwischen gemessener Relativverschiebung  $u$  und der tatsächlichen Bodenbewegung  $y_F$  findet:

$$\text{für: } \omega \ll \Omega \quad y_F(t) = u(t) \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}^{1/v_r}}{\eta^2} \quad \rightarrow \quad y_F(t) \approx u(t) \quad (2.131)$$

Insbesondere die Höhe der Rückstellkraft ist bei der Auslegung der so genannten langperiodischen Seismometer mit Bedacht zu wählen, da diese zur Erzielung einer guten Abbildungstreue einerseits so niedrig wie möglich sein sollte und andererseits genug Reserven besitzen muss, um ein Herauswandern der seismischen Masse aus dem Messbereich zu unterbinden [127]. Das erste jemals registrierte Seismogramm wurde von einem solch tief abgestimmten Messaufbau aufgezeichnet und stammt aus dem Jahr 1880.

#### 2.4.6 Transiente Fußpunkterregung des MFS

Eine vergleichsweise einfache Herleitung der Bewegungsgleichungen gekoppelter Starrkörpersysteme gelingt analog zum Einfreiheitsgradschwinger über die Gleichgewichtsbetrachtungen nach dem d'ALEMBERTSCHEN Prinzip. Die zu diesem Zweck ebenfalls mögliche Variationsrechnung nach dem LAGRANGE'schen Formalismus ist im Vergleich dazu eher für die automatisierte Erstellung der die Schwingungsprobleme beherrschenden Gleichungen geeignet und wird dementsprechend vorrangig in der Computerrechnung verwendet.

Zunächst wird der in Bild 2.23 dargestellte Stockwerkrahmen mit unendlich steifen Riegeln betrachtet, der sich in besonders anschaulicher Weise anhand des ebenfalls eingezeichneten Feder-Masse-Systems analysieren lässt. Die dazu notwendige Reduzierung der realen Baustruktur auf ein solches Ersatzsystem ist dabei nur unter der Voraussetzung gültig, dass das tatsächliche Schwingungsverhalten trotz der vorgenommenen Diskretisierungen bezüglich der Massenverhältnisse und der Dämpfungswirkung möglichst exakt wiedergegeben wird. Für die in diesem Fall übliche Massenkonzentrierung in Stockwerksebene sowie der dort punktuell angesetzten Dämpfungswirkung mittels diskreter Dämpferelemente wird aber in aller Regel eine vollkommen ausreichende Abbildungstreue des tatsächlichen Schwingungsverhaltens erreicht.

Werden nun die gemäß Bild 2.23 an den einzelnen Massen angreifenden Kräfte getrennt voneinander ins Gleichgewicht gesetzt, resultiert das nachfolgend wiedergegebene Bewegungsgleichungssystem des diskreten Dreifreiheitsgradschwingers.

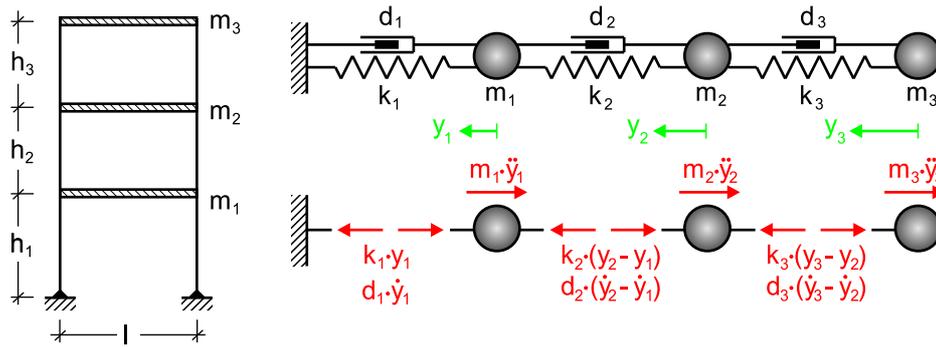


Bild 2.23: Dreifreiheitsgradschwinger

$$\begin{aligned}
 m_1 : \quad 0 &= m_1 \cdot \ddot{y}_1 + d_1 \cdot \dot{y}_1 - d_2 \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_1 \cdot y_1 - k_2 \cdot (y_2 - y_1) \\
 m_2 : \quad 0 &= m_2 \cdot \ddot{y}_2 + d_2 \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - d_3 \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_2 \cdot (y_2 - y_1) - k_3 \cdot (y_3 - y_2) \\
 m_3 : \quad 0 &= m_3 \cdot \ddot{y}_3 + d_3 \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3 \cdot (y_3 - y_2)
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

Indem die obigen Gleichungen ausmultipliziert und die Terme anschließend nach Beschleunigung, Geschwindigkeit und Bewegung geordnet werden, lässt sich das Bewegungsgleichungssystem in die übersichtlichere Form der Matrixschreibweise überführen. Die im System vorhandene Kopplungswirkung wird dabei aus der jeweiligen Belegung der Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix ersichtlich, deren Koeffizienten entsprechend auch außerhalb der Diagonalglieder mit von Null verschiedenen Werten besetzt sind.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 \\ 0 & -d_3 & d_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Die obigen Systemmatrizen und -vektoren werden im Folgenden durch entsprechende Parameter symbolisiert, die zur Abgrenzung zu den skalaren Größen nachfolgend durch eine Unterstreichung gekennzeichnet werden. Über den jeweiligen Spalten- bzw. Zeilenumfang  $n$  der sich jeweils quadratisch ergebenden Matrizen entscheidet dabei die im Rahmen der Diskretisierung gewählte Anzahl von unabhängigen Freiheitsgraden  $n$ . Das Schwingungsverhalten des Mehrfreiheitsgradschwingers (MFS) wird also von denjenigen Systemgrößen beschrieben, die sich als Massenmatrix  $\underline{m}$ , Dämpfungsmatrix  $\underline{d}$  und Steifigkeitsmatrix  $\underline{k}$  in Abhängigkeit von  $n$  in der folgenden allgemeinen Form angeben lassen:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

Die zugehörigen Verschiebungsgrößen sowie deren ein- bzw. zweimalige Ableitungen werden entsprechend zu Vektoren zusammengefasst:

$$\underline{\ddot{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix} \quad \underline{\dot{y}} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad (2.134)$$

In der Folge lässt sich das Bewegungsgleichungssystem des Mehrfreiheitsgradschwingers übersichtlich in der Matrizen Schreibweise zusammenfassen:

$$\underline{m} \cdot \underline{\ddot{y}} + \underline{d} \cdot \underline{\dot{y}} + \underline{k} \cdot \underline{y} = 0 \quad (2.135)$$

Für den Fall konzentrierter Punktmassen und der damit verbundenen Vernachlässigung der Massenträgheitsmomente ergibt sich die Massenmatrix  $\underline{m}$  stets als Diagonalmatrix, deren einzelne Elemente unmittelbar angegeben werden können. Vergleichsweise aufwändiger gestaltet sich hingegen die Ermittlung der Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen  $\underline{k}$  und  $\underline{d}$ , deren Herleitung anhand des in Bild 2.24 dargestellten Systems eines Stockwerkrahmens erläutert wird. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel wird nun auch die Nachgiebigkeit der Riegel berücksichtigt, weshalb sich keine ansonsten für solche Systeme typische Bandstruktur der Steifigkeitsmatrix einstellt. Vielmehr ist eine voll besetzte Matrix die Folge, die im vorliegenden Fall für alle Elemente von Null verschiedene Steifigkeitskoeffizienten aufweist.

- Massen:

- $m_1 = 18\,000 \text{ kg}$
- $m_2 = 12\,000 \text{ kg}$
- $m_3 = 14\,000 \text{ kg}$

- Trägheitsmomente

- $I_{Stiel,1} = 14\,920 \text{ cm}^4$ ,  $I_{Riegel,1} = 107\,200 \text{ cm}^4$
- $I_{Stiel,2} = 8\,090 \text{ cm}^4$ ,  $I_{Riegel,2} = 107\,200 \text{ cm}^4$

$$- I_{\text{Stiel},3} = 5\,700 \text{ cm}^4, \quad I_{\text{Riegel},3} = 107\,200 \text{ cm}^4$$

Zur Ermittlung der einzelnen Steifigkeits-, bzw. Krafteinflusszahlen  $k_{j,k}$  werden der Struktur an den einzelnen Diskretisierungspunkten der Reihe nach Einheitsverschiebungen  $u = 1$  eingeprägt, während die jeweils übrigen Freiheitsgrade gemäß Bild 2.24 festgehalten werden. Die sich für diese Verschiebungszustände einstellenden Kräfte entsprechen dann den jeweiligen Steifigkeitskoeffizienten  $k_{j,k}$  des Systems ( $j = 1..n, k = 1..n$ ). Aufgrund der Gesetzmäßigkeit  $k_{j,k} = k_{k,j}$ , die als Satz von MAXWELL-BETTI bekannt ist, erhält die daraus gebildete Steifigkeitsmatrix  $\underline{k}$  stets eine symmetrische Form.

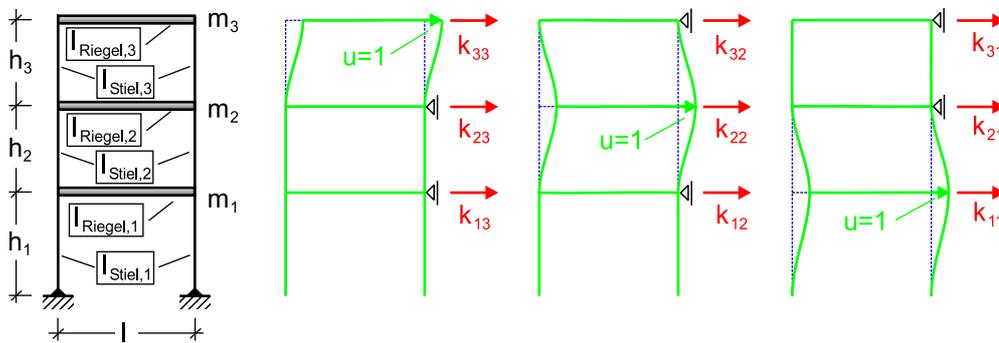


Bild 2.24: Steifigkeiten

Für die zuvor festgelegten Parameter des Stockwerkrahmens ergeben sich die Steifigkeits- und Massenmatrix demnach zu:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} 18\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 12\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 14\,000 \end{bmatrix} [\text{kg}] \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 6\,551\,880 & -3\,258\,820 & 122\,799 \\ -3\,258\,820 & 5\,289\,020 & -2\,238\,150 \\ 122\,799 & -2\,238\,150 & 2\,118\,750 \end{bmatrix} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Die Angabe bzw. Herleitung der Dämpfungsmatrix  $\underline{d}$  wird zunächst aus zwei Gründen zurückgestellt. Zum einen ist der Einfluss auf das Schwingungsverhalten üblicher Baustrukturen analog zum Einfreiheitsgradschwinger gering, weshalb auch die damit in Zusammenhang stehende Kopplungswirkung der Dämpfungskräfte bei der Modalanalyse kaum ins Gewicht fällt. Zum anderen liegen gerade in diesem Dämpfungsterm  $\underline{d} \cdot \dot{y}$  bzw. den darin enthaltenen einmaligen Ableitungen nach der Zeit die Schwierigkeiten begründet, die bei der Lösung der charakteristischen Gleichungen Probleme bereiten.

Generell stehen für die Berechnung der Schwingungsreaktion von Mehrfreiheitsgradschwingern zwei unterschiedliche Methoden zur Verfügung, die im Einzelnen in den nachfolgenden beiden Unterkapiteln 2.4.6.1 und 2.4.6.2 anhand des bereits eingeführten Beispiels des Stockwerkrahmens erläutert werden.

### 2.4.6.1 Modalanalyse des MFS

Eine elegante Methoden, das Schwingungsprobleme von Mehrfreiheitsgradschwingern zu lösen, besteht darin das ursprünglich gekoppelte Differentialgleichungssystem unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften der jeweiligen Eigenvektoren zu entkoppeln. Die daraus resultierenden und jeweils für sich allein stehenden Differentialgleichungen lassen sich dann entsprechend mit den für den Einfreiheitsgradschwinger entwickelten Verfahren berechnen. Die vorrangige Aufgabe der als Modalanalyse bezeichneten Methode besteht demnach in der Ermittlung der die Schwingungen kennzeichnenden Eigenkreisfrequenzen bzw. Eigenformen. Voraussetzung dafür ist die Vernachlässigung des ursprünglichen Dämpfungsterms  $\underline{d} \cdot \dot{\underline{y}}$ , da sich das Differentialgleichungssystem nur in diesem Fall mittels des harmonischen Bewegungsansatzes  $y_j(t) = a_j \cdot \sin(\omega t)$  bzw.  $\ddot{y}_j(t) = \omega^2 \cdot a_j \cdot \sin(\omega t)$  lösen lässt ( $j = 1..n$ ). Anderenfalls müsste vom allgemeineren Ansatz  $y_j(t) = a_j \cdot e^{\lambda t}$  ausgegangen werden, der ein Eigenwertproblem mit komplexen Eigenwerten als Lösung zur Folge hat. Im Gegensatz zur reellen Fassung ergibt sich für ein solch allgemein gedämpftes System ein verschwommenes Schwingungsknotenmuster, da die einzelnen Massen ihr Maximum innerhalb einer Eigenform nicht mehr zeitgleich, sondern als Folge der Dämpfungskopplung phasenversetzt erreichen. Das eigentliche Abklingverhalten der Schwingungsantwort wird dann durch den Realteil der jeweils zueinander konjugiert komplexen Lösungspaare beschrieben [73]. Für gewöhnliche Baustrukturen ist der Einfluss der Dämpfungskopplung auf die Modalparameter jedoch derart gering, dass der damit verbundene mathematische Mehraufwand i.d.R. nicht gerechtfertigt ist. Insofern wird bei der Modalanalyse von Schwingungsproblemen im Bereich des Ingenieurwesens üblicherweise lediglich vom harmonischen Bewegungsansatz ausgegangen, für den sich nach Einsetzen in Gleichung (2.135) und anschließendem Herauskürzen der Sinus-Terme das folgende homogene Gleichungssystem ergibt:

$$\left( \underline{k} - \omega^2 \cdot \underline{m} \right) \cdot \underline{a} = 0 \quad (2.136)$$

Die Bedingung, dass nichttriviale Lösungen und damit Schwingungen endlicher Größe nur existieren, wenn die Nennerdeterminante obiger Gleichung verschwindet bzw. zu Null wird, führt zur so genannten Frequenzgleichung  $n$ -ten Grades  $Det(\omega^2) = 0$ :

$$\left| \underline{k} - \omega^2 \cdot \underline{m} \right| = 0 \quad (2.137)$$

Auflösen dieser Gleichung liefert insgesamt  $n$  im allgemeinen verschiedenartige Eigenwerte  $\omega_i^2$ , aus denen die zugehörigen Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  unmittelbar hervorgehen. Werden diese Eigenwerte anschließend der Reihe nach in Gleichung (2.136) eingesetzt, können die jeweils zu  $\omega_i$  gehörenden Lösungen in Form von Eigenvektoren  $\underline{a}_i = \{a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}\}^T$  berechnet werden. Aufgrund des vorliegenden homogenen Gleichungssystems sind die einzelnen Amplitudenwerte  $a_{ji}$

allerdings lediglich als Verhältniswerte einer vorab zu wählenden Bezugsamplitude darstellbar. Die den Eigenkreisfrequenzen zugeordneten Eigenschwingungsformen lassen sich damit dennoch eindeutig bestimmen, auch wenn die Angabe der eigentlichen Amplitudengrößen die Kenntnis der jeweiligen Anfangsbedingungen voraussetzt. Für das Beispiel des Stockwerkrahmens ergibt sich demnach die folgende Frequenzgleichung  $\det(\omega^2)$ :

$$-3.024 \cdot 10^{12} \cdot \omega^6 + 2.89119888 \cdot 10^{15} \cdot \omega^4 - 6.14406548424988 \cdot 10^{17} \cdot \omega^2 + 1.98113009209383 \cdot 10^{19} = 0$$

Die gesuchten Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  entsprechen somit den jeweiligen Nulldurchgängen des durch obige Gleichung definierten Funktionsverlaufs und lassen sich meist nur mit Hilfe numerischer Methoden, wie z.B. dem Regula-falsi Verfahren, berechnen [17]. Damit direkt verknüpft sind die ebenfalls mit aufgeführten Eigenfrequenzen  $f_i = \omega_i/2\pi$  und Eigenperioden  $T_i = 1/f_i$  des Systems .

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = 6.258434 \text{ [1/s]} & f_1 = 0.996061 \text{ [Hz]} & T_1 = 1.003955 \text{ [s]} \\ \omega_2 = 15.851959 \text{ [1/s]} & f_2 = 2.522918 \text{ [Hz]} & T_2 = 0.396366 \text{ [s]} \\ \omega_3 = 25.799839 \text{ [1/s]} & f_3 = 4.106172 \text{ [Hz]} & T_3 = 0.243536 \text{ [s]} \end{array} \quad (2.138)$$

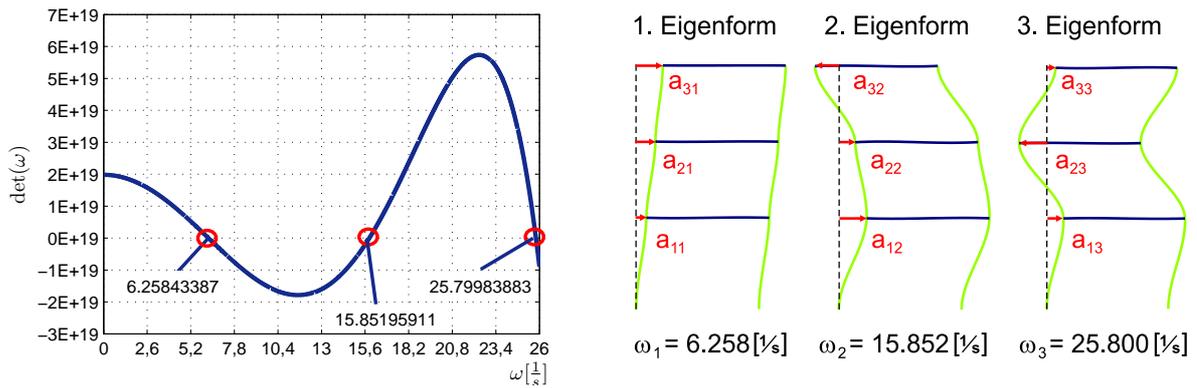
Die jeweils zugehörigen Eigenvektoren  $\underline{a}_i$  werden zweckmäßiger Weise nach deren Berechnung mit  $\sqrt{a_{1,i} + a_{2,i} + a_{3,i}}$  normiert und anschließend zur modalen Matrix  $\underline{A}$  zusammengefasst:

$$\underline{a}_1 = \begin{Bmatrix} 0.296 \\ 0.560 \\ 0.774 \end{Bmatrix} \quad \underline{a}_2 = \begin{Bmatrix} 0.693 \\ 0.409 \\ -0.59 \end{Bmatrix} \quad \underline{a}_3 = \begin{Bmatrix} 0.501 \\ -0.82 \\ 0.265 \end{Bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} +0.29559 & +0.69307 & +0.50066 \\ +0.55952 & +0.40910 & -0.82417 \\ +0.77432 & -0.59355 & +0.26473 \end{bmatrix}$$

Zur Verdeutlichung sind die Ergebnisse aus der Frequenzgleichung sowie die daraus resultierenden Eigenschwingungsformen in Bild 2.25 nochmals in graphischer Form wiedergegeben.

Durch die Kenntnis der modalen Matrix  $\underline{A}$  ist es nunmehr möglich, die so genannten Normalkoordinaten, oder auch generalisierten Koordinaten  $\underline{\eta}$  zu berechnen, die mit den ursprünglichen physikalischen Schwingungskordinaten  $\underline{y}$  über die lineare Transformationsvorschrift  $\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{\eta}$  verknüpft sind. Wird dieser Zusammenhang in Gl. (2.135) eingesetzt und anschließend mit  $\underline{A}^T$  von links durchmultipliziert, erhält das Differentialgleichungssystem die folgende Form:

$$\overbrace{\underline{A}^T \underline{m} \underline{A}}^{\underline{M}} \cdot \underline{\ddot{\eta}} + \overbrace{\underline{A}^T \underline{d} \underline{A}}^{\underline{D}} \cdot \underline{\dot{\eta}} + \overbrace{\underline{A}^T \underline{k} \underline{A}}^{\underline{K}} \cdot \underline{\eta} = 0 \quad (2.139)$$



**Bild 2.25:** Eigenkreisfrequenzen und zugehörige Eigenformen

Bedingt durch die auf die Eigenvektoren zurückzuführende Orthogonalitätseigenschaft der Modalmatrix  $\underline{A}$ , ergeben sich die jeweils vor  $\ddot{\underline{\eta}}$  und  $\dot{\underline{\eta}}$  stehenden Ausdrücke zu Diagonalmatrizen. Diese werden entsprechend als modale Massenmatrix  $\underline{M}$  bzw. modale Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  definiert. Im Gegensatz dazu verbleiben in der ebenfalls als modal bezeichneten Dämpfungsmatrix  $\underline{D}$  auch nach der obigen Matrizenmultiplikation noch von Null verschiedene Elemente außerhalb der Diagonalen. Eine vollständige Entkopplung gelingt folglich nur unter der Voraussetzung, dass auf den Dämpfungsterm entweder komplett verzichtet oder dieser entsprechend manipuliert wird. Ist dies der Fall, kann das Gleichungssystem in der Folge in  $n$  unabhängige Differentialgleichungen aufgespalten werden, die dann jeweils einen der Schwingungsform  $i$  zugeordneten Einfreiheitsgradschwinger beschreiben.

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{\eta}} + \underline{D} \cdot \dot{\underline{\eta}} + \underline{K} \cdot \underline{\eta} = 0 \quad (2.140)$$

Die jeweils in obigen Differentialgleichungen enthaltenen Systemparameter  $M_i$  und  $K_i$  des auf  $n$  Einfreiheitsgradschwinger zurückgeführten Gleichungssystems lassen sich mit Hilfe der zur Frequenzformel analogen Beziehung  $\omega_i = \sqrt{K_i/M_i}$  dazu nutzen, die aus der Diagonalisierungsberechnung bereits bekannten Modalparameter zu verproben.

In Bezug auf die anzustrebende vollständige Entkopplung des Gleichungssystems bleibt jedoch das Problem bestehen, dass sich die Diagonalisierungswirkung des obigen Verfahrens üblicherweise lediglich auf die Steifigkeits- und Massenmatrix  $\underline{k}$  und  $\underline{m}$  erstreckt, während die links- bzw. rechtsseitige Multiplikation mit  $\underline{A}$  bzw.  $\underline{A}^T$  im Fall der Dämpfungsmatrix  $\underline{d}$  üblicherweise nicht zu einer Änderung in deren Elementbelegung führt. Da die Herleitung von  $\underline{d}$  für übliche Strukturen, insbesondere wenn die Frequenzabhängigkeit der Dämpfungseigenschaften berücksichtigt werden soll, ohnehin schwierig bzw. erst gar nicht möglich ist [9], liegt es nahe, der exakten Ermittlung von  $\underline{d}$  nicht allzu viel Bedeutung beizumessen und die transformierte Dämpfungsmatrix  $\underline{D}$  von vornherein als diagonal vorauszusetzen. Dies eröffnet u.a. die Möglichkeit, jeder einzelnen Schwingungsform  $i$  einen individuellen Dämpfungsgrad  $\xi_i$  zuzuordnen, der dann als

modales Dämpfungsmaß bezeichnet wird. In der Folge lassen sich die einzelnen Diagonalglieder der modalen Dämpfungsmatrix  $\underline{D}$  analog zum Einfreiheitsgradschwinger berechnen:

$$D_i = 2M_i\omega_i\xi_i \quad (2.141)$$

Mit diesem auch als Bequemlichkeitshypothese bezeichnetem Ansatz sind über  $\omega_{d,i} = \omega_i\sqrt{1 - \xi_i^2}$  auch die gedämpften Eigenwerte des Mehrfreiheitsgradschwingers, in denen das System ausschwingt, näherungsweise bekannt, wenngleich deren Einfluss bezüglich der Dämpfungskopplung vernachlässigt wurde [68]. Davon abgesehen ist bei der Wahl der modalen Dämpfungsgrade  $\xi_i$  darauf zu achten, dass höhere Schwingungsformen tendenziell schneller abklingen und übliche Schwingungssysteme in der Folge vorrangig in ihrer Grundform ausschlagen [94]. Dieses Phänomen wird in der Literatur häufig mit der für höhere Schwingungsformen anwachsenden Anzahl von Schwingungsknoten und der damit einhergehenden stärkeren Stabkrümmung begründet. Jedoch ist dieses Argument nur unter der Voraussetzung gleich bleibender Amplituden zutreffend, so dass bei Vergegenwärtigung der Gl. (2.70) vermutet werden kann, dass dieses Phänomen eher auf die für höhere Schwingungsformen zunehmend schnellere Amplitudenabfolge zurückzuführen ist.

Im Fall des vorliegenden Beispiels ergeben sich für  $\underline{M}$  und  $\underline{K}$  die nachfolgend wiedergegebenen Werte:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 13\,723 & 0 & 0 \\ 0 & 15\,586 & 0 \\ 0 & 0 & 13\,644 \end{bmatrix} [kg] \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 537\,517 & 0 & 0 \\ 0 & 3\,916\,682 & 0 \\ 0 & 0 & 9\,081\,965 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}$$

Werden den einzelnen Schwingungsformen anschließend jeweils entsprechende modale Dämpfungsgrade  $\xi_i$  zugeordnet, lassen sich mit Hilfe der in Gl. (2.141) angegebenen Rechenvorschrift auch die jeweils zugehörigen Dämpfungskoeffizienten angeben:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0.050 & D_1 &= 8\,588.69 [N/(m/s)] \\ \xi_2 &= 0.051 & D_2 &= 25\,202.03 [N/(m/s)] \\ \xi_3 &= 0.052 & D_3 &= 36\,609.70 [N/(m/s)] \end{aligned}$$

Ein alternativer Ansatz zur Ermittlung der Dämpfungskoeffizienten, der ebenfalls die Orthogonalitätsbedingung erfüllt und aufgrund der leichten Handhabbarkeit häufig in FE-Berechnungen Verwendung findet, besteht in der Möglichkeit, die modale Dämpfungsmatrix  $\underline{D}$  aus der Linearkombination der bereits diagonalisierten Matrizen  $\underline{M}$  und  $\underline{K}$  zu bilden. Diese Methode wird

als so genannte RAYLEIGH-Dämpfung bezeichnet und ist mit der modalen Dämpfung über die folgende Beziehung verknüpft:

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \alpha \cdot \underline{M} + \beta \cdot \underline{K} \\ 2M_i \xi_i \omega_i &= \alpha \cdot M_i + \beta \cdot K_i \\ 2\xi_i \omega_i &= \alpha + \beta \omega_i \end{aligned} \quad (2.142)$$

Der Vorteil der RAYLEIGH-Dämpfung besteht darin, dass zur Berechnung der unbekanntenen Vorfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  lediglich zwei Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  festzulegen sind, für die die zugehörigen Dämpfungsgrade  $\xi_i$  entweder aus entsprechenden Messungen vorab bestimmt wurden oder die sich anhand bereits vorliegender Erfahrungswerte ähnlicher Strukturen abschätzen lassen. Damit lässt sich das zur Bestimmung der Vorfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  benötigte Gleichungssystem aufstellen, indem die jeweils gewählten Wertepaarungen  $(\omega_a/\xi_a)$  und  $(\omega_b/\xi_b)$  getrennt voneinander in Gl. (2.142) eingesetzt werden, wobei  $(\omega_a < \omega_b)$  zu beachten ist. Nach entsprechendem Auflösen führt dies zu den nachfolgend angegebenen Bestimmungsgleichungen für  $\alpha$  und  $\beta$ . Die übrigen Dämpfungsgrade außer- bzw. innerhalb dieser Bestimmungsstücke ergeben sich dann in Abhängigkeit der obigen Linearkombination.

$$\alpha = 2 \cdot \frac{\xi_a \omega_b - \xi_b \omega_a}{\omega_b^2 + \omega_a^2} \cdot \omega_a \omega_b \quad \beta = 2 \cdot \frac{\xi_b \omega_b - \xi_a \omega_a}{\omega_b^2 + \omega_a^2} \quad (2.143)$$

Es ist ersichtlich, dass, je nachdem welche Eigenkreisfrequenzen des Systems zur Ermittlung der Vorfaktoren schlussendlich herangezogen werden, entsprechend unterschiedliche Werte für die restlichen Dämpfungskoeffizienten resultieren. Im vorliegenden Beispiel erstreckt sich die Näherung der obigen Linearkombination zwar lediglich auf jeweils einen Dämpfungswert, die Eigenschaften der RAYLEIGH-Dämpfung werden damit aber gleichwohl deutlich. Der eigentliche Vorteil der RAYLEIGH-Dämpfung erschließt sich im Vergleich dazu freilich erst für Modelle mit wesentlich mehr Freiheitsgraden, da das Aufspannen der Dämpfungsmatrix auch in diesem Fall lediglich die Angabe zweier Bestimmungsstücke erfordert.

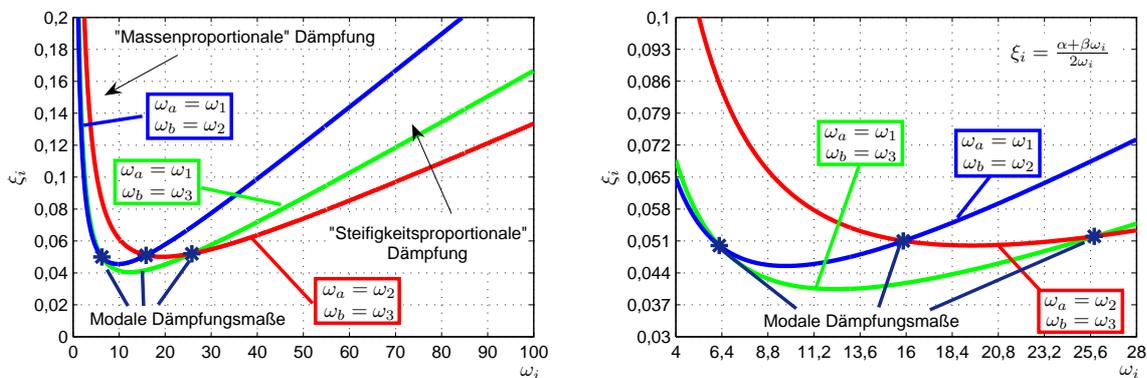
Die ursprünglich für das Beispiel gewählten Werte der modalen Dämpfung sind in Tabelle 2.4 denjenigen, die sich für die RAYLEIGH-Dämpfung ergeben, gegenübergestellt. Die aus der Linearkombination gebildeten Dämpfungskoeffizienten sind dabei jeweils durch eine Schrägstellung als Abgrenzung zu den übrigen Werten gekennzeichnet. Bild 2.26 zeigt die zugehörigen Verläufe und modalen Dämpfungsmaße in graphischer Form. Offensichtlich lassen sich die Dämpfungsmaße innerhalb ihrer Bestimmungsstücke durch einen näherungsweise horizontalen Verlauf abbilden, während die Werte außerhalb dieses Bereichs mehr oder minder stark anwachsen. In Bezug auf eine mögliche FE-Modellierung muss daraus aber kein Nachteil resultieren, da hierdurch die

ohnehin oft störenden Einflüsse der höherfrequenten Anteile aus der Schwingungsantwort herausgedämpft werden können [9]. Andererseits ist jedoch freilich darauf zu achten, dass durch die zur Konstruktion der RAYLEIGH-Dämpfung gewählten Eigenfrequenzen ein jeweils ausreichendes Frequenzband abgedeckt wird, um nicht auf der unsicheren Seite liegende Ergebnisse zu erhalten [50].

**Tabelle 2.4:** Gegenüberstellung der Modalen und der RAYLEIGH-Dämpfung

Modale Dämpfung	RAYLEIGH-Dämpfung		
	$\omega_a = \omega_1$ $\omega_b = \omega_2$	$\omega_a = \omega_1$ $\omega_b = \omega_3$	$\omega_a = \omega_2$ $\omega_b = \omega_3$
	$\alpha = 0.442841722$ $\beta = 0.004672225$	$\alpha = 0.497213624$ $\beta = 0.003284053$	$\alpha = 0.970242417$ $\beta = 0.002573406$
$\xi_1 = 0.050$ $D_1 = 8\,589$	$D_1 = 8\,589$	$D_1 = 8\,589$	$D_1 = 14\,698$
$\xi_2 = 0.051$ $D_2 = 25\,202$	$D_2 = 25\,202$	$D_2 = 20\,612$	$D_2 = 25\,202$
$\xi_3 = 0.052$ $D_3 = 36\,610$	$D_3 = 48\,475$	$D_3 = 36\,610$	$D_3 = 36\,610$

Sollen mehr als zwei Dämpfungsgrade bei der Konstruktion der Dämpfungsmatrix berücksichtigt werden, so ist dies als Erweiterung zur RAYLEIGH-Dämpfung durch die Konstruktion mittels einer so genannten CAUGHEY-Reihe möglich [9], [24]. Da davon in der Praxis jedoch eher selten Gebrauch gemacht wird, wird diesbezüglich auf die Fachliteratur verwiesen.



**Bild 2.26:** Verläufe der RAYLEIGH-Dämpfung für unterschiedliche Stützwerte

Die Berücksichtigung der durch Bodenerschütterungen hervorgerufenen Trägheitskräfte innerhalb der Modalanalyse wird in Kapitel 2.4.8 behandelt.

#### 2.4.6.2 Numerische Integrationsverfahren

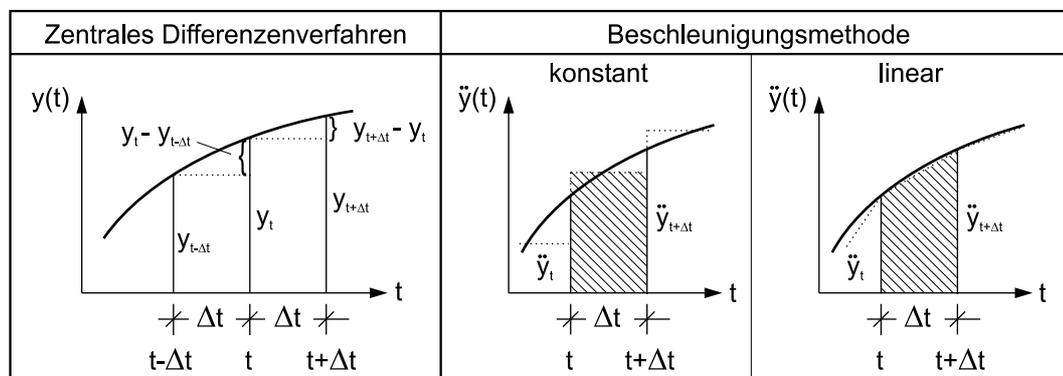
Im Gegensatz zur Methode der im vorherigen Kapitel beschriebenen Modenüberlagerung und dem dazu erforderlichen Basiswechsel von physikalischen Koordinaten  $\underline{y}$  zu normalisierten Ko-

ordinaten  $\eta$  werden die Bewegungsgleichungen im Fall der numerischen Integration in ihrer ursprünglichen Form belassen und folglich ohne Transformation direkt integriert. Dazu muss das Gleichgewicht gemäß dem d'ALAMBERTschen Prinzip aber nicht zu jeder beliebigen Zeit  $t$ , sondern lediglich zu bestimmten diskreten Zeitpunkten  $t + \Delta t$  erfüllt sein. Folglich behalten alle ehemals für statische Berechnungen entwickelten Lösungsverfahren auch innerhalb der numerischen Integration ihre Gültigkeit, eine Tatsache, die insbesondere für dynamische Berechnungen mittels der FE-Methode von Bedeutung ist.

Im Laufe der Zeit sind zahlreiche Verfahren zur numerischen Integration mit dem Ziel entwickelt worden, eine möglichst hohe Stabilität und Genauigkeit bei gleichzeitig möglichst geringem Rechenaufwand zu erreichen. Generell lassen sich diese nach der Methode, mit der die Verläufe der einzelnen Verschiebungskomponenten der Bewegungsgleichung approximiert werden, in zwei Klassen unterteilen. Der ersten Klasse werden all diejenigen Verfahren zugeordnet, die das ursprüngliche Differentialgleichungssystem mit Hilfe entsprechender Differenzenformeln in ein System von Differenzgleichungen überführen, indem dieses finit umgesetzt wird. Dazu zählen das allgemein bekannte Zentrale Differenzenverfahren ebenso wie beispielsweise das HOUBOLT- oder PARK-Verfahren. Als Nachteil ist hierbei der Umstand zu werten, dass die Berechnung des ersten bzw. im Fall des HOUBOLT- und PARK-Verfahrens sogar der ersten beiden Zeitschritte nur mit Hilfe eines speziellen Startalgorithmus gelingt, weshalb diese Verfahren auch als nicht "selbst startend" bezeichnet werden.

Zur zweiten Klasse werden hingegen Verfahren gezählt, die zur Annäherung der Verschiebungskomponenten vom Beschleunigungsverlauf ausgehen und bei denen die jeweils zugeordneten Verläufe für die Geschwindigkeit und Verschiebung aus der entsprechenden ein- bzw. zweimaligen Integration hervorgehen.

In Bild 2.27 sind stellvertretend für die jeweiligen Klassen mögliche Modellvorstellungen zur Approximation der Bewegungskomponenten gegenübergestellt. Deren Ausarbeitung führt zu den in Tabelle 2.5 wiedergegebenen Ausdrücken.



**Bild 2.27:** Verschiedene Ansätze zur Approximation der Verschiebungskomponenten

Die Beschleunigungsmethode wird für die weiteren Betrachtungen um die von NEWMARK erst-

**Tabelle 2.5:** Gegenüberstellung der Zentralen Differenzenmethode und der Beschleunigungsmethode

Differenzenformeln	Beschleunigungsmethode	
	konstante Stufenfunktion	linearer Polygonzug
$y_t = y_t$	$\tilde{y}_{t+\Delta t} = \frac{1}{2}(\dot{y}_t + \dot{y}_{t+\Delta t})$	$\tilde{y}_{t+\Delta t} = \dot{y}_t + \frac{\ddot{y}_{t+\Delta t} - \ddot{y}_t}{\Delta t}$
$\dot{y}_t = \frac{1}{2\Delta t}(y_{t+\Delta t} - y_{t-\Delta t})$	$\dot{y}_{t+\Delta t} = \dot{y}_t + \frac{1}{2}(\ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t})\Delta t$	$\dot{y}_{t+\Delta t} = \dot{y}_t + \frac{1}{2}(\ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t})\Delta t$
$\ddot{y}_t = \frac{1}{2\Delta t^2}(y_{t+\Delta t} - 2y_t + y_{t-\Delta t})$	$y_{t+\Delta t} = y_t + \dot{y}_t\Delta t + \frac{1}{4}(\ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t})\Delta t^2$	$y_{t+\Delta t} = y_t + \dot{y}_t\Delta t + \frac{1}{6}(2\ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t})\Delta t^2$

mals im Jahr 1959 offiziell veröffentlichte Verallgemeinerung [106] erweitert, da die dadurch erreichte Variationsmöglichkeit eine gewisse Einflussnahme auf die Stabilität und Genauigkeit des Verfahrens erlaubt. Dazu sind die in den obigen Gleichungen auftretenden Koeffizienten lediglich durch zwei freie Parameter wie folgt zu ersetzen:

$$\begin{aligned}\dot{y}_{t+\Delta t} &= \dot{y}_t + [(1 - \delta) \cdot \dot{y}_t + \delta \cdot \dot{y}_{t+\Delta t}] \cdot \Delta t \\ \ddot{y}_{t+\Delta t} &= \ddot{y}_t + \dot{y}_t \cdot \Delta t + [(0.5 - \alpha) \cdot \ddot{y}_t + \alpha \cdot \ddot{y}_{t+\Delta t}] \cdot \Delta t^2\end{aligned}$$

Auflösen der obigen Gleichungen nach  $\ddot{y}_{t+\Delta t}$  und anschließendes ineinander Einsetzen und Umstellen liefert die folgenden Abschätzungen der Bewegungskomponenten zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ :

$$\begin{aligned}y_{t+\Delta t} &= y_{t+\Delta t} \\ \dot{y}_{t+\Delta t} &= \frac{\delta}{\alpha\Delta t} \cdot (y_{t+\Delta t} - y_t) - \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right) \cdot \dot{y}_t - \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right) \cdot \Delta t \cdot \ddot{y}_t \\ \ddot{y}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2} \cdot (y_{t+\Delta t} - y_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t} \cdot \dot{y}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \cdot \ddot{y}_t\end{aligned}$$

Anhand der in Tabelle 2.6 exemplarisch vorgenommenen Gegenüberstellung von Zentralem Differenzen- und NEWMARK-Verfahren lassen sich die unterschiedlichen Charakteristika der einzelnen Zeitintegrationsmethoden in übersichtlicher Weise erkennen. Darin sind zunächst die bereits eingeführten Näherungsausdrücke der jeweiligen Verschiebungskomponenten zusammengefasst. Aus der Darstellung wird ersichtlich, dass es sich, wie zuvor erläutert, im Fall der linken Spalte um reine Differenzenausdrücke handelt, während die rechte Spalte auch Terme mit der ein- bzw. zweimaligen Ableitung nach der Zeit  $t$  enthält. Des weiteren fällt auf, dass sich die Näherungen auf jeweils unterschiedliche Zeitschritte beziehen und dementsprechend in die Bewegungsgleichung einzusetzen sind. Je nachdem, ob die schlussendlich erhaltene Lösung für  $\underline{y}_{t+\Delta t}$  auf der Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen zur Zeit  $t$  oder zur Zeit  $t + \Delta t$  beruht, wird das Verfahren als explizites oder als implizites Verfahren bezeichnet. Damit das Berechnungsergebnis nicht über alle Grenzen anwächst, ist es im erst genannten Fall notwendig, eine maximale

kritische Zeitschrittweite  $\Delta t_{kr}$  für die numerische Integration nicht zu überschreiten, während im zweit genannten Fall i.d.R. eine ähnliche Beschränkung nicht existiert. Gerade aber bei der Schwingungsanalyse von Mehrmassenschwingern mit vielen Freiheitsgraden ist es von Vorteil, wenn die Zeitschrittweite  $\Delta t$  nicht zwingend in Abhängigkeit der niedrigsten Eigenform  $T_n$  des Systems gewählt werden muss, sondern vielmehr die Möglichkeit besteht, diese allein an denjenigen Schwingungsformen zu orientieren, die für die eigentliche Schwingungsantwort auch von Belang sind. Auf die exakte Abbildung der höherfrequenten Anteile wird dabei bewußt unter der Voraussetzung verzichtet, dass deren berechnete Verläufe selbst für vergleichsweise große Schrittweiten gegen die statische Lösung konvergieren und somit keinen störenden Einfluss auf das Gesamtergebnis ausüben.

Die sich letztendlich ergebenden Berechnungsvorschriften der jeweiligen Schritt-für-Schritt-Verfahren lassen einen weiteren wesentlichen Unterschied erkennen, der die Anzahl der bekannten Zeitschritte betrifft, die nötig sind, um den jeweils darauf folgenden zu berechnen. Im Fall impliziter Verfahren reicht hierzu generell die Information aus dem jeweils zuletzt berechneten Zeitschritt aus, während die verschiedenen Differenzenverfahren für das gleiche Ziel mindestens die Kenntnis der letzten beiden Zeitschritte voraussetzt. Aus dieser Tatsache geht auch unmittelbar hervor, weshalb Differenzenverfahren spezieller Startalgorithmen bedürfen, um aus der alleinigen Information der Anfangsbedingungen überhaupt auf den nächstfolgenden Zeitschritt schließen zu können.

Abschließend werden in Tabelle 2.6 noch einige Anmerkungen bzw. Empfehlungen hinsichtlich numerischer Fehler am Beispiel des NEWMARK-Verfahrens aufgeführt, die die zu erwartende Genauigkeit der Rechenergebnisse betreffen. Zum einen besteht in Abhängigkeit der Integrationsmethode sowie der hierfür gewählten Parameter die Möglichkeit eine gewisse Amplitudenabnahme im Berechnungsergebnis hervorzurufen, die aufgrund ihrer Entstehungsursache auch als numerische Dämpfung bezeichnet wird. Vorteilhaft kann diese oftmals ganz bewußt dazu eingesetzt werden, störende Einflüsse höherfrequenter Schwingungen herauszufiltern. Zum anderen haftet den numerischen Integrationsmethoden die generelle Tendenz an, die tatsächlich vorhandene Schwingungsdauer im Rechenergebnis zu verlängern, bzw. im Fall des Zentralen Differenzenverfahrens zu verkürzen. Diesbezüglich kann dem NEWMARK-Verfahren aber im Vergleich zu anderen Verfahren wie beispielsweise dem hier nicht behandelten WILSON- $\Theta$ -Verfahren ein eher gutmütiges Verhalten zugesprochen werden [9]. Darüber hinaus lässt sich die durch die Periodenverlängerung bewirkte Verfälschung verhältnismäßig leicht minimieren, indem die Zeitschrittweite an der folgenden Empfehlung  $\frac{\Delta t}{T} \leq 0.01$  orientiert wird. In diesem Fall liegt die prozentuale Abweichung nurmehr im Promillebereich.

**Tabelle 2.6:** Berechnungsanweisung der Zentralen Differenzenmethode und des NEWMARK-Verfahrens

Zentrale Differenzenmethode	NEWMARK-Verfahren
Approximation der Bewegungskomponenten	
$y_t = y_t$	$y_{t+\Delta t} = y_{t+\Delta t}$
$\dot{y}_t = \frac{1}{2\Delta t}(y_{t+\Delta t} - y_{t-\Delta t})$	$\dot{y}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t} \cdot (y_{t+\Delta t} - y_t) - \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right) \cdot \dot{y}_t - \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right) \cdot \Delta t \cdot \ddot{y}_t$
$\ddot{y}_t = \frac{1}{2\Delta t^2}(y_{t+\Delta t} - 2y_t + y_{t-\Delta t})$	$\ddot{y}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} \cdot (y_{t+\Delta t} - y_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t} \cdot \dot{y}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \cdot \ddot{y}_t$
Betrachtungszeitpunkt $t$ bzw. $t + \Delta t$ der zugrunde gelegten Bewegungsgleichung	
$\underline{m} \cdot \ddot{y}_t + \underline{d} \cdot \dot{y}_t + \underline{k} \cdot y_t = f_t$	$\underline{m} \cdot \ddot{y}_{t+\Delta t} + \underline{d} \cdot \dot{y}_{t+\Delta t} + \underline{k} \cdot y_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t}$
Berechnungsvorschrift der jeweiligen direkten Zeitintegration	
$\left[\frac{1}{\Delta t^2} \underline{m} + \frac{1}{2\Delta t} \underline{d}\right] y_{t+\Delta t} = + f_t$ $- \left[\underline{k} - \frac{2}{\Delta t^2} \underline{m}\right] y_t$ $- \left[\frac{1}{\Delta t^2} \underline{m} - \frac{1}{2\Delta t} \underline{d}\right] y_{t-\Delta t}$	$\left[\underline{k} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2} \underline{m} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} \underline{d}\right] y_{t+\Delta t} = + f_{t+\Delta t}$ $+ \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2} \underline{m} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} \underline{d}\right] y_t$ $+ \left[\frac{1}{\alpha\Delta t} \underline{m} + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right) \underline{d}\right] \dot{y}_t$ $+ \left[\left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \underline{m} + \Delta t \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right) \underline{d}\right] \ddot{y}_t$
Startverfahren	
$\left[\frac{2}{\Delta t^2} \underline{m}\right] y_{t+\Delta t} = + f_t$ $+ \left[\frac{2}{\Delta t^2} \underline{m} - \underline{k}\right] y_t$ $+ \left[\frac{2}{\Delta t} \underline{m} + \underline{d}\right] \dot{y}_t$	selbststartend
Stabilitätsbedingungen	
bedingt stabil, $\Delta t_{kr} = \frac{T_n}{\pi} \cdot \left(\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi\right)$ ( $T_n$ kleinste Periode des MFS mit $n$ Freiheitsgraden)	unbedingt stabil für $\delta \geq 0.5$ und $\alpha \geq 0.25(\delta + 0.5)^2$
Bemerkung	
explizite Integrationsmethode	implizite Integrationsmethode <ul style="list-style-type: none"> <li>• für konstante mittlere Beschleunigung keine Amplitudenabnahme</li> <li>• kaum Periodenverlängerung (Empfehlung: <math>\frac{\Delta t}{T} \leq 0.01</math>)</li> <li>• falls Amplitudenabnahme dennoch gewünscht, um höhermodale Antworten herauszufiltern, ist <math>\delta &gt; 0.5</math> und <math>\alpha = 0.25(\delta + 0.5)^2</math> zu wählen</li> </ul>

Zur Veranschaulichung dieser in direkten Zeitintegrations-Verfahren auftretenden numerischen Fehler wird der Ausschwingvorgang eines ungedämpften Einfreiheitsgradschwingers für unterschiedliche Einflussparameter des NEWMARK-Verfahrens berechnet. Das dazu gewählte System ist durch eine Eigenperiode von  $T = 1$  s gekennzeichnet und wird zu Beginn mit einer Anfangsauslenkung von  $y_0 = 1.0$  m beaufschlagt. Die Ergebnisse des im Mathematikprogramm MAPLE [124] realisierten numerischen Integrations-Verfahrens sind in Bild 2.28 für unterschiedliche Zeitschrittweiten  $\Delta t$  und Integrationsparameter dargestellt.

Für den Fall der Fußpunkterregung ist das System analog zum Einfreiheitsgradschwinger nicht durch äußere Lasten  $f(t)$ , sondern vielmehr durch die über das Fundament eingprägten Beschleunigungen beaufschlagt. Entsprechend handelt es sich auch bei den im Bewegungsgleichungssystem enthaltenen Bewegungsgrößen wiederum nicht um Absolut-, sondern um Rela-

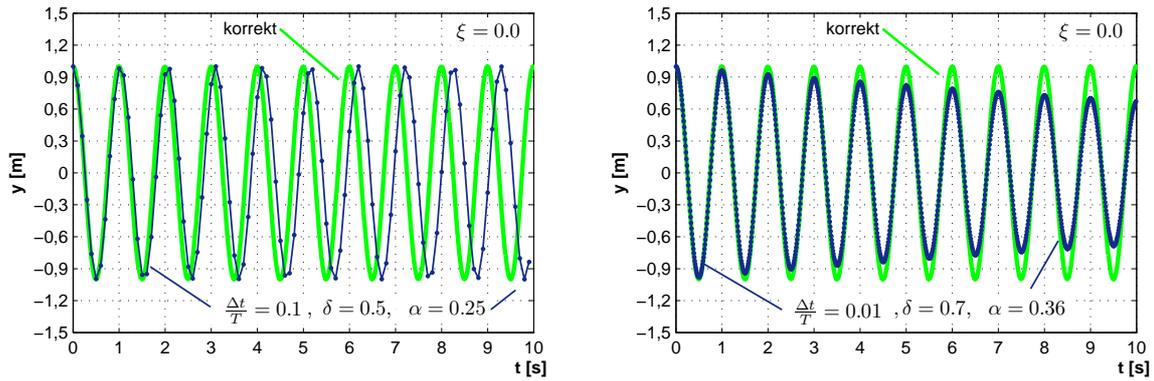


Bild 2.28: Periodenverlängerung und Amplitudenabfall

tivverschiebungen bzw. deren Ableitungen. Damit erhält das Differentialgleichungssystem die nachfolgende Form und kann aufgrund der Entsprechung zum vorherigen Problem mit den oben angegebenen Schritt-für-Schritt-Verfahren ohne weitere Anpassungen direkt integriert werden.

$$\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{d} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{k} \cdot \underline{u} = -\underline{m} \cdot \ddot{\underline{y}}_F \quad (2.144)$$

Im Fall des zuvor behandelten Stockwerkrahmens fehlt zur Lösung des obigen Differentialgleichungssystems jedoch noch die Kenntnis über die zugehörige Dämpfungsmatrix  $\underline{d}$ . Aus den bereits genannten Gründen lassen sich die einzelnen Elemente am einfachsten über den Formalismus der RAYLEIGH-Dämpfung herleiten. Sinnigerweise werden dazu die in Tabelle 2.4 zur ersten und dritten Eigenfrequenz gehörenden Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  zugrunde gelegt, die zu der nachfolgend wiedergegebenen Dämpfungsmatrix  $\underline{d}$  führen.

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 30\,467 & -10\,702 & 403 \\ -10\,702 & 23\,336 & -7\,350 \\ 403 & -7\,350 & 13\,919 \end{bmatrix} \left[ \frac{N}{(m/s)} \right] \quad \underline{d}_m = \begin{bmatrix} 33\,407 & -9\,545 & -1\,555 \\ -9\,545 & 23\,791 & -8\,121 \\ -1\,555 & -8\,121 & 15\,224 \end{bmatrix} \left[ \frac{N}{(m/s)} \right]$$

Die Kenntnis der Modalmatrix  $\underline{A}$  vorausgesetzt, lässt sich die Dämpfungsmatrix  $\underline{d}$  alternativ dazu auch aus der Rückrechnung der modalen Dämpfung gewinnen [24]. Im Fall des Stockwerkrahmens ergibt sich für die zuvor festgelegten Dämpfungsgrade beispielsweise die zu Vergleichszwecken ebenfalls mit aufgeführte Dämpfungsmatrix  $\underline{d}_m$ . Dieser Ansatz wird jedoch für die weiteren Betrachtungen trotz der im Vergleich zur RAYLEIGH-Dämpfung geringfügig höheren Dämpfungswirkung nicht weiter verfolgt, da die dadurch verursachten Unterschiede in Bezug auf die berechneten Zeitverläufe verschwindend gering sind.

$$\underline{D} = \underline{A}^T \cdot \underline{d} \cdot \underline{A} \quad \rightarrow \quad \underline{d} = \underline{A}^{-T} \cdot \underline{D} \cdot \underline{A}^{-1} \quad (2.145)$$

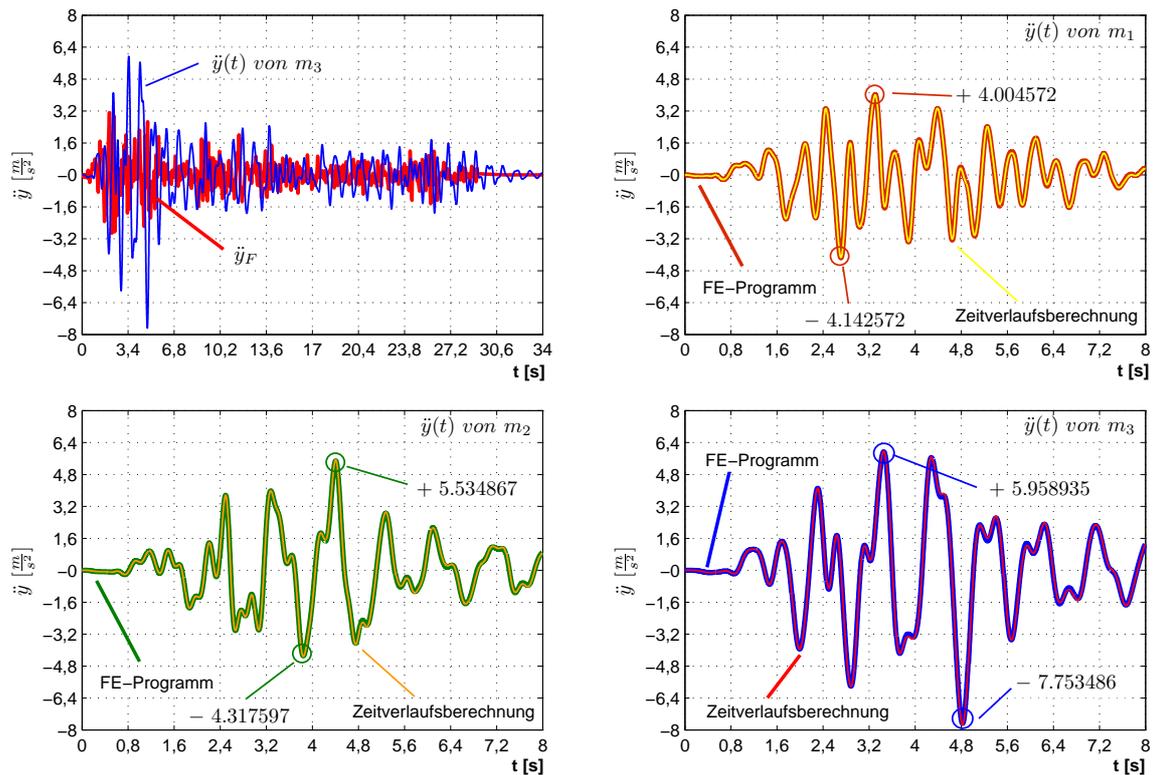
Somit liegen alle für die direkte Zeitintegration benötigten Systemparameter des aktuellen Beispiels vor, und die Schwingungsreaktion auf die in Bild 2.29 dargestellte Fußpunkterregung  $\ddot{y}_F$  kann berechnet werden. Die resultierende Systemantwort ist jeweils nach Stockwerksebene getrennt in Form absoluter Beschleunigungsverläufe  $\ddot{y}(t)$  ebenfalls in Bild 2.29 mit angegeben. Die dazu benötigte Zeitintegration der Gleichung (2.144) wurde wiederum mit Hilfe des im Mathematikprogramm MAPLE [124] umgesetzten NEWMARK-Verfahrens realisiert, dessen Ergebnisse anschließend zu Kontrollzwecken mittels der kommerziellen FE-Software ADINA [5] unter Verwendung desselbigen Verfahrens verifiziert wurden. Da es sich bei den gemäß der Gleichung (2.144) berechneten Werten zunächst um Relativgrößen handelt, wurden diese nachträglich noch um den jeweiligen Anteil der Fundamentkomponente ergänzt. Für den Fall der hier angegebenen Beschleunigungsverläufe ergibt sich beispielsweise der bereits vom Einfreiheitsgradschwinger bekannte Zusammenhang  $\ddot{y} = \ddot{y}_F + \ddot{u}$ . Den eigentlichen Berechnungsdurchläufen selbst wurde gemäß der in Tabelle 2.6 gegebenen Empfehlung  $\Delta t \leq 0.01 \cdot T_3 \rightarrow \Delta t \leq 0.01 \cdot 0.2435 \text{ s} = 0.002435 \text{ s}$  eine Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0.002 \text{ s}$  zugrunde gelegt. Die dazu ebenfalls vorab festzulegenden Einflussparameter wurden aufgrund der die konstante Beschleunigungsmethode auszeichnenden Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften mit den Werten  $\delta = 0.5$  und  $\alpha = 0.25$  belegt. Bezüglich der gewählten Anregungsart in Form des in Bild 2.29 dargestellten Akzellerogramms ist anzumerken, dass diese der alternativen Möglichkeit, die Berechnung auf Grundlage der Fundamentbewegung durchzuführen, generell vorzuziehen ist. Der Grund besteht in dem jeweils in beiden Fällen als Polygonzug vorliegendem Datensatz, dessen zweimalige Ableitung im Gegensatz zur zweimaligen Integration zu numerischen Problemen führen kann.

#### 2.4.7 Zeitverlaufsberechnung - nichtlinear gedämpfter EFS

Die im Erdbebenfall tatsächlich hervorgerufene Strukturantwort weicht oftmals erheblich von der in Gl. (2.10) ursprünglich zugrunde gelegten linearen Modellvorstellung ab, so dass gegebenenfalls die Verwendung der darin enthaltenen konstanten Systemparameter nicht mehr gerechtfertigt ist. Oftmals dafür verantwortlich ist der zur Beschreibung der Federkennlinie verwendete Steifigkeitsterm  $k \cdot u$ , der dann entsprechend durch eine an die Realität angepasste Rückstellfunktion  $r(u)$  zu ersetzen ist. Die Lösung der in der Folge nichtlinearen Differentialgleichung Gl. (2.146) gelingt nunmehr ausschließlich durch den Einsatz numerischer Verfahren. Ferner ist auch die Modalanalyse aufgrund der variierenden Steifigkeit und der damit nicht mehr eindeutig zuordenbaren Eigenkreisfrequenz für die Lösung nichtlinearer Schwingungsprobleme gänzlich ungeeignet [22].

$$m \cdot \ddot{u} + d \cdot \dot{u} + r(u) = -m \cdot \ddot{y}_F \quad (2.146)$$

Hinsichtlich der durch die Rückstellfunktion  $r(u)$  beschriebenen Systemeigenschaften wird ge-

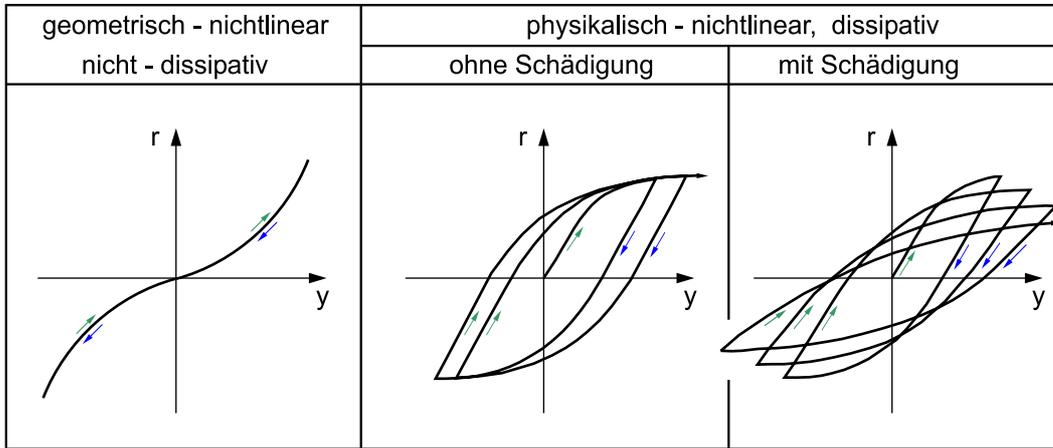


**Bild 2.29:** Schwingungsreaktion des Stockwerkrahmens auf Fußpunkterregung

nerell zwischen geometrischen bzw. kinematischen und physikalischen Nichtlinearitäten unterschieden. Während im erst genannten Fall der auf- und absteigender Ast der Kraft-Verschiebungskurve stets zusammenfallen, wird im zweit genannten eine so genannte Hysterese durchlaufen, die eine teils beträchtliche Energiedissipation zur Folge haben kann. Damit tritt ein zur viskosen Dämpfung alternativer Mechanismus für den zeitlichen Schwingungsabbau hinzu, der aufgrund seiner Entstehungsursache als hysteretische Dämpfung bezeichnet wird. Da die damit verbundenen Effekte diejenigen der viskosen Dämpfung i.d.R. bei weitem übertreffen, wird bei der Berechnung entsprechender Problemstellung oftmals auf den eigentlichen Dämpfungsterm  $d \cdot \dot{u}$  verzichtet. Jedoch sind dann gegebenenfalls in all denjenigen Belastungssituationen, in denen die Fließgrenze nicht erreicht wird, überhaupt keine Dämpfungskräfte mehr vorhanden. Daher empfiehlt es sich, für Problemstellungen, in denen nicht nur die Maximalreaktion, sondern der gesamte Zeitverlauf der Strukturantwort möglichst realitätsnah abgebildet werden soll, den Dämpfungsterm in den Berechnungen beizubehalten.

In Bezug auf die sich für physikalische Nichtlinearitäten ausbildenden Hystereseschleifen ergibt sich ein weiteres Unterscheidungsmerkmal, das auf die zeitliche Entwicklung der Strukturantwort zurückzuführen ist. So kann aufgrund der sich wiederholenden Belastungsumkehr eine durch Schädigung verursachte Entfestigung der Struktur auftreten, die sich in der zunehmenden Neigungsänderung der fortlaufenden Hystereseschleifen äußert. Ferner ist auch eine ungewollte Einschnürung der anfangs noch völligen Kraft-Verschiebungspfade denkbar, die im Stahlbau bei-

spielsweise durch zunehmende Beulerscheinung oder im Massivbau durch Abplatzen von Teilen der Betondeckung und der damit verbundenen Freilegung einzelner Bewehrungssträngen verursacht sein kann [40], [91]. In Bild 2.30 sind die verschiedenen Kraft-Verschiebungspfade der möglichen Nichtlinearitäten nochmals graphisch wiedergegeben.



**Bild 2.30:** Nichtlineare Rückstellfunktionen nach [94]

Wird für die Lösung der nichtlinearen Ausgangsgleichung (2.146) ein implizites Zeitintegrationsschema gewählt, ist das kinetische Gleichgewicht des Systems zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  zu betrachten. Voraussetzung ist, dass alle die Reaktion bestimmenden Systemparameter des vorangegangenen Zeitschritts bekannt sind.

$$m \cdot \ddot{u}_{t+\Delta t} + d \cdot \dot{u}_{t+\Delta t} + r(u_{t+\Delta t}) = -m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} \quad (2.147)$$

Nachdem sich der Wert der Rückstellfunktion infolge der Abhängigkeit von der Verschiebung zum gesuchten Zeitpunkt  $t + \Delta t$  vorab nicht angeben lässt, ist es nahe liegend, diesen in die zwei folgenden aus dem vorangegangenen Zeitschritt bekannten Anteile  $r(u_t)$  und  $k(u_t) \cdot \Delta u$  aufzuspalten. Der Fehler, der dadurch offensichtlich zunächst akzeptiert wird, besteht in der Annahme, dass die eigentlich dem Zeitpunkt  $t$  zugeordnete Anfangssteifigkeit  $k(u_t) = \frac{\partial r(u_t)}{\partial u_t}$  derjenigen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  gleichgesetzt werden kann.

$$m \cdot \ddot{u}_{t+\Delta t} + d \cdot \dot{u}_{t+\Delta t} + r(u_t) + k(u_t) \cdot \Delta u \approx -m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} \quad (2.148)$$

Wird obige Gleichung nach dem Verschiebungszuwachs  $\Delta u$  aufgelöst, geht daraus auch die zugehörige Gesamtverschiebung  $u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta u$  unmittelbar hervor. Jedoch ist aufgrund der für die Rückstellfunktion vorgenommenen Vereinfachung davon auszugehen, dass sich links- und rechts stehender Term nicht mehr exakt gleichen. Soll nun eine demgegenüber verbesserte Verschiebungslösung erhalten werden, ist folglich solange zu iterieren, bis nachfolgende Gleichgewichtsbedingung auf einen akzeptablen Restfehler reduziert ist.

$$\left[ m \cdot \ddot{u}_{t+\Delta t} + d \cdot \dot{u}_{t+\Delta t} + r(u_{t+\Delta t}) \right] + m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} \approx 0 \quad (\text{bzw.} = \text{Fehler}) \quad (2.149)$$

Dazu gut geeignet ist beispielsweise das so genannte NEWTON-RAPHSON-Verfahren, das darin besteht, die zuvor angeschriebene inkrementelle Lösung nach Berechnung des Verschiebungszuwachses  $\Delta u$  und den sich daraus jeweils ergebenden verbesserten Bewegungsgrößen solange zu wiederholen, bis ein vorab zu definierendes Abbruchkriterium erreicht ist [9]. Das zugehörige Iterationsschema lautet demnach:

$$m \cdot \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} + d \cdot \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} + k(u_{t+\Delta t}^{(i-1)}) \cdot \Delta u^{(i)} = -m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} - r(u_{t+\Delta t}^{(i-1)}) \quad (2.150)$$

Die daraus jeweils hervorgehende verbesserte Verschiebungslösung ergibt sich zu:

$$u_{t+\Delta t}^{(i)} = u_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \Delta u^{(i)} \quad (2.151)$$

Die zu Beginn des Verfahrens benötigten Anfangsbedingungen gehen aus der Gl. (2.148) hervor und lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} k(u_{t+\Delta t}^{(0)}) &= k(u_t) \\ r(u_{t+\Delta t}^{(0)}) &= r(u_t) \\ u_{t+\Delta t}^{(0)} &= u_t \end{aligned}$$

Die Anwendung des obigen Iterationsschemas auf eine implizite Zeitintegrationsmethode soll nun anhand des Trapezverfahrens, das aus dem NEWMARK-Verfahren unter Verwendung der Integrationsparameter  $\delta = 0.5$  und  $\alpha = 0.25$  hervorgeht, erläutert werden. Die Näherungen für die Bewegungsparameter ergeben sich nach Umstellen und ineinander Einsetzen entsprechend zu:

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta t} &= u_t + \dot{u}_t \cdot \Delta t + \frac{1}{4}[\ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\Delta t}] \cdot \Delta t^2 & \rightarrow & u_{t+\Delta t} = u_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\dot{u}_t + \dot{u}_{t+\Delta t}) \\ \dot{u}_{t+\Delta t} &= \dot{u}_t + \frac{1}{2}[\ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\Delta t}] \cdot \Delta t & \rightarrow & \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\Delta t}) \end{aligned}$$

Unter Beachtung der in Gl. (2.151) gegebenen verbesserten Verschiebungslösung lassen sich die obigen Formeln entsprechend an die Iteration anpassen. Die Ausgangswerte des vorangegangenen Zeitschritts zum Zeitpunkt  $t$  bleiben davon logischerweise unbeeinflusst.

$$u_{t+\Delta t}^{(i)} = u_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\dot{u}_t + \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i)}) \quad (2.152)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} = \dot{u}_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)}) \quad (2.153)$$

Durch Gleichsetzen der Gl. (2.151) mit Gl. (2.152) und entsprechender Umstellung resultieren letztendlich die im folgenden angegebenen Näherungen der Bewegungsparameter, die dann entsprechend in die Bewegungsgleichung Gl. (2.150) eingesetzt werden können:

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta t}^{(i)} &= u_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\dot{u}_t + \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i)}) \\ \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} &= -\dot{u}_t + \frac{2}{\Delta t} \cdot (u_{t+\Delta t}^{(i-1)} - u_t + \Delta u^{(i)}) \\ \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} &= -\ddot{u}_t - \frac{4}{\Delta t} \cdot \dot{u}_t + \frac{4}{\Delta t^2} \cdot (u_{t+\Delta t}^{(i-1)} - u_t + \Delta u^{(i)}) \end{aligned}$$

Die das Problem beherrschende Iterationsgleichung lautet damit:

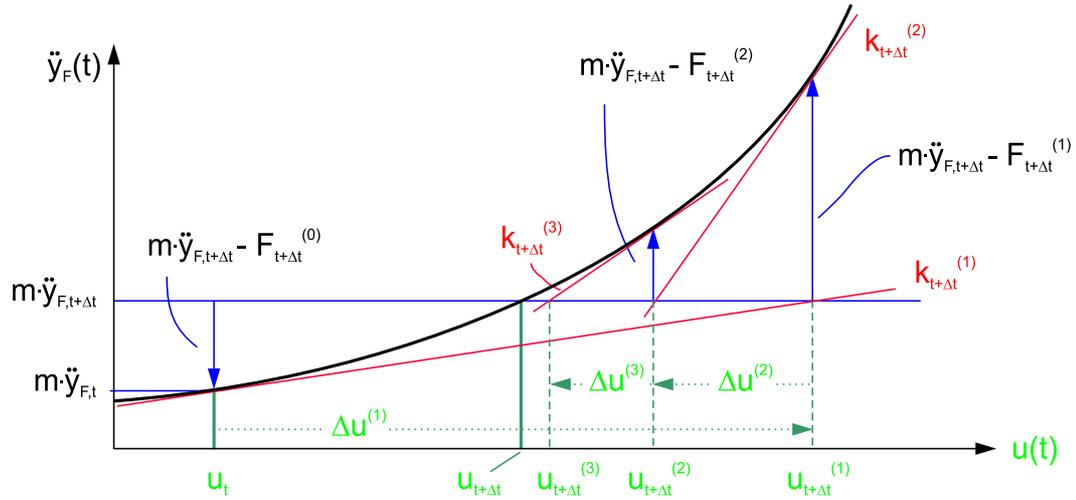
$$\begin{aligned} \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \cdot m + \frac{2}{\Delta t} \cdot d + k(u_{t+\Delta t}^{(i-1)}) \right] \cdot \Delta u^{(i)} &= -m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} - r(u_{t+\Delta t}^{(i-1)}) \\ &\quad - \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \cdot m + \frac{2}{\Delta t} \cdot d \right] \cdot u_{t+\Delta t}^{(i-1)} \\ &\quad + m \cdot \ddot{u}_t \\ &\quad + \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \cdot m + d \right] \cdot \dot{u}_t \\ &\quad + \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \cdot m + \frac{2}{\Delta t} \cdot d \right] \cdot u_t \end{aligned} \quad (2.154)$$

Bzw.:

$$\Delta u^{(i)} = \frac{- \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \cdot m + \frac{2}{\Delta t} \cdot d \right] \cdot u_{t+\Delta t}^{(i-1)} + m \cdot \ddot{u}_t + \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \cdot m + d \right] \cdot \dot{u}_t + \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \cdot m + \frac{2}{\Delta t} \cdot d \right] \cdot u_t - m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} - r(u_{t+\Delta t}^{(i-1)})}{\left[ \frac{4}{\Delta t^2} \cdot m + \frac{2}{\Delta t} \cdot d + k(u_{t+\Delta t}^{(i-1)}) \right]} \quad (2.155)$$

In Bild 2.31 ist der Lösungsprozess für die volle NEWTON-RAPHSON-Methode anhand eines vergleichsweise einfachen Verlaufs einer fiktiven Rückstellfunktion veranschaulicht. Charakteristisches Merkmal hierbei ist die in jedem Schritt neu berechnete Tangentensteifigkeit, die für rasche Konvergenz sorgt. Daneben existieren Abwandlungen, wie die Anfangssteifigkeitsmethode oder die modifizierte NEWTON-RAPHSON-Methode, in denen die Steifigkeiten während der Iteration unverändert bleiben. Voraussetzung für die Konvergenz gegen  $u_{t+\Delta t}$  der NEWTON-RAPHSON-Methode, ist jedoch der stetige Verlauf der Funktion  $r(u)$  einschließlich der zugehörigen Ableitung [9].

Vielfach wird auf die Iteration in nichtlinearen Bewegungsproblemen mit dem Argument verzichtet, dass der Fehler für genügend kleine Zeitschrittweiten  $\Delta t$  verschwindend gering wird [24].



**Bild 2.31:** Veranschaulichung der NEWTON-RAPHSON-Iteration

Der Verschiebungszuwachs  $\Delta t$  ergibt sich in diesem Fall mit entsprechend geringerem Rechenaufwand bereits aus Gl. (2.148). Davon abweichend wird jedoch in [9] darauf hingewiesen, dass die Iteration durchaus von Bedeutung ist, da jeder akzeptierte Fehler im fortlaufenden Rechenergebnis erhalten bleibt und sich die pfadabhängige Lösung mit zunehmender Zeitschrittrechnung folglich immer weiter von der Wirklichkeit entfernt.

Abschließend ist zu klären, ab welchem verbleibenden Restfehler die Iteration abgebrochen werden kann bzw. welche Kriterien dazu zur Verfügung stehen. Nachdem der endgültige Wert der Verschiebung in kinetischen Berechnungen vorab nicht bekannt ist, verbleiben als Abbruchkriterien lediglich die so genannte Kraft- oder in Erweiterung die so genannte Energietoleranz.

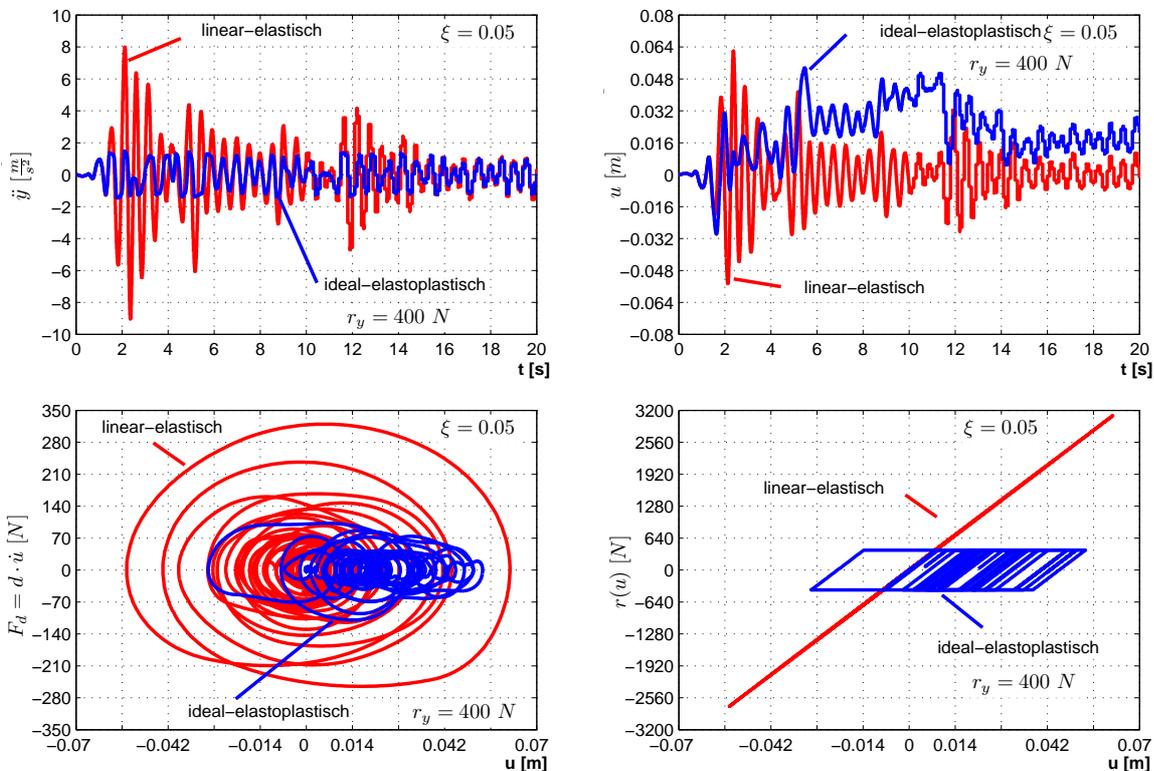
$$\frac{[-m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} - m \cdot \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - d \cdot \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - r(u_{t+\Delta t}^{(i-1)})] \cdot \Delta u^{(i)}}{[-m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} - m \cdot \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(0)} - d \cdot \dot{u}_{t+\Delta t}^{(0)} - r(u_{t+\Delta t}^{(0)})] \cdot \Delta u^{(1)}} \leq \text{ETOL} \quad (2.156)$$

$$\frac{\| -m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} - m \cdot \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - d \cdot \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - r(u_{t+\Delta t}^{(i-1)}) \|_2}{\| -m \cdot \ddot{y}_{F,t+\Delta t} - m \cdot \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(0)} - d \cdot \dot{u}_{t+\Delta t}^{(0)} - r(u_{t+\Delta t}^{(0)}) \|_2} \leq \text{RTOL} \quad (2.157)$$

Als Annäherung der Rückstellfunktion an physikalisch nichtlineare Problemstellungen werden baupraktisch vielfach bilineare Funktionsverläufe verwendet. Im Folgenden dient zur Erläuterung der obigen Zusammenhänge ein Beispiel mit entsprechend ideal elastoplastischem Verhalten, dem aber zu Vergleichszwecken zunächst eine herkömmlich linear-elastische Federkennlinie zugrunde gelegt wird. Gemäß des in Bild 2.35 wiedergegebenen Antwortspektrums werden die Systemparameter derart eingestellt, dass eine entsprechend ausgeprägte Schwingungsreaktion für die Beaufschlagung mit der in Bild 2.21 dargestellten Fußpunktbeschleunigung zu erwarten ist:

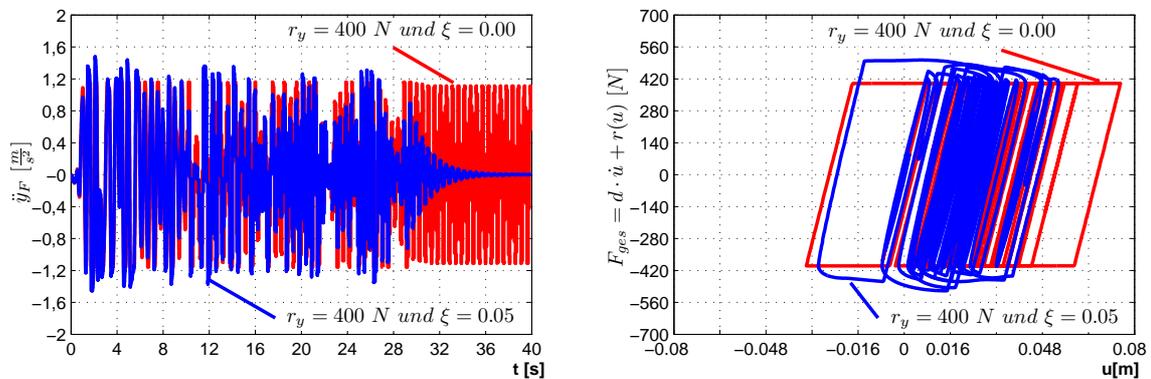
- Masse:  $m = 345 \text{ kg}$
- Steifigkeit:  $k = 50\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- Dämpfungskoeffizient:  $d = 415.33 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
- Eigenkreisfrequenz:  $\omega_d = 12.0236 \frac{1}{\text{s}}, \Rightarrow f_d = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 1.9136 \text{ Hz}, \Rightarrow T_d = \frac{1}{f} = 0.5226 \text{ s}$
- Dämpfungsgrad:  $\xi = \frac{d}{2 \cdot m \cdot \omega} = 0.05 \%$
- Fließgrenze:  $r_y = 400 \text{ N}$

Die oben mit aufgeführten Modalparameter besitzen für die nichtlineare Variante allerdings nur solange Gültigkeit, bis durch die Belastung die Fließgrenze erreicht bzw. überschritten wird. In dem hier vorliegenden Fall, der Entfestigung, kann aber die in Tabelle 2.6 aufgeführte Empfehlung bezüglich der maximalen Zeitschrittweite  $\Delta t = T \cdot 0.01 = 0.5226 \text{ s} \cdot 0.01 = 0.0052 \text{ s}$  trotz der Nichtlinearität beibehalten werden. Soll die Genauigkeit der Berechnungsergebnisse auch für zur Verfestigung neigende Systeme gewährleistet sein, ist die Zeitschrittweite jedoch entsprechend anzupassen. In Bild 2.32 sind die verschiedenen Schwingungsreaktionen beider Varianten gegenübergestellt.



**Bild 2.32:** Gegenüberstellung der Schwingungsreaktion eines EFS mit linearer bzw. ideal elastoplastischer Rückstellfunktion

Es ist offensichtlich, dass im ideal-elastoplastischen System nach dem Erdbebenereignis eine mehr oder minder große relative Restverformung  $u$  verbleiben muss, falls die Fließgrenze überschritten wurde. Bezüglich der in den Diagrammen verwendeten Bewegungsgrößen ist anzumerken, dass die Rückstell- und viskosen Dämpfungskräfte von den jeweils zugeordneten relativen Bewegungsgrößen  $u$  bzw.  $\dot{u}$  bestimmt werden, während die dem entgegen gerichtete Trägheitskraft allein von der Absolutbeschleunigung  $\ddot{y}$  bestimmt wird. Durch die Einführung der Fließgrenze von  $r_y = 400 \text{ N}$  wird eine Reduktion der maximal auftretende Absolutbeschleunigung von ursprünglich  $y, \ddot{m}ax = 9.046 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  auf  $y, \ddot{m}ax = 1.478 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  erreicht. Wird hingegen die viskose Dämpfung in der Zeitverlaufsberechnung vernachlässigt, ergibt sich dieser Wert auf der unsicheren Seite liegend zu  $\ddot{y}_{max} = 400 \text{ N}/345 \text{ kg} = 1.159 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , siehe Bild 2.33. Ebenfalls wird deutlich, dass dem System, in allen Zustände in denen die Belastung nicht die Fließgrenze erreicht, auch keine Energie entzogen wird. Der Sachverhalt wird durch die sich einstellenden Hystereseschleifen nochmals verdeutlicht.



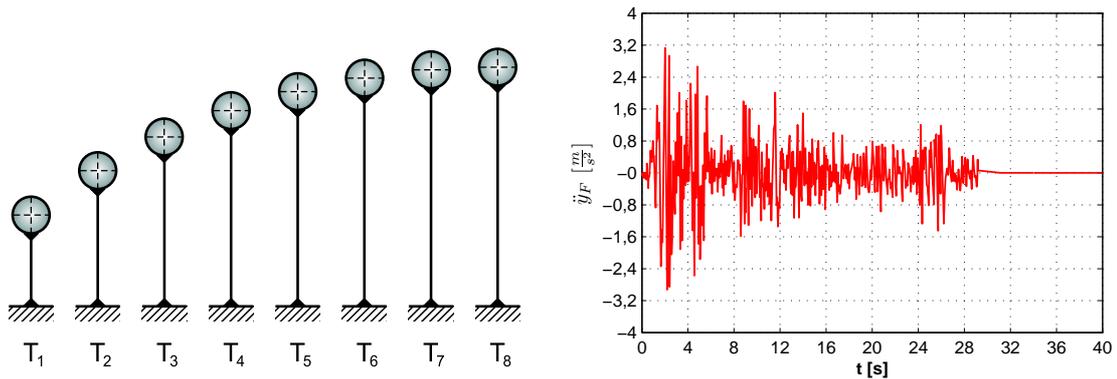
**Bild 2.33:** Vergleich eines Systems mit ideal elastoplastischer Rückstellfunktion mit und ohne viskoser Dämpfung

### 2.4.8 Ermittlung von Antwortspektren

Bezüglich der Auslegung von Bauwerken gegen eine mögliche Erdbebeneinwirkung ist vorrangig die von den Erschütterungen hervorgerufene maximale Schwingungsreaktion von Interesse, während die Kenntnis über den zugehörigen zeitlichen Verlauf eher in den Hintergrund tritt. Aus dieser Überlegung heraus wurde neben anderen von G.W. HOUSNER das Konzept des sogenannten Antwortspektrenverfahrens entwickelt, das sich inzwischen als Standardverfahren bei der Erdbebenbemessung etabliert hat und das als Berechnungsgrundlage entsprechend in nahezu allen einschlägigen Normenwerken verankert wurde. Die erstmalige Erwähnung des dem Antwortspektrenverfahren zugrunde liegenden Prinzips ist jedoch auf den japanischen Forscher SUHEHIRO zurückzuführen, von dem bereits im Jahr 1926 eine entsprechende Messapparatur realisiert worden ist [23]. Ohne auf SUHEHIRO Bezug zu nehmen, wurde von BENIOFF 1934 derselbe Ansatz vorgeschlagen, dessen mathematische Umsetzung mittels der DUHAMEL-Faltungsintegrale 1941 durch HOUSNER und BIOT folgte.

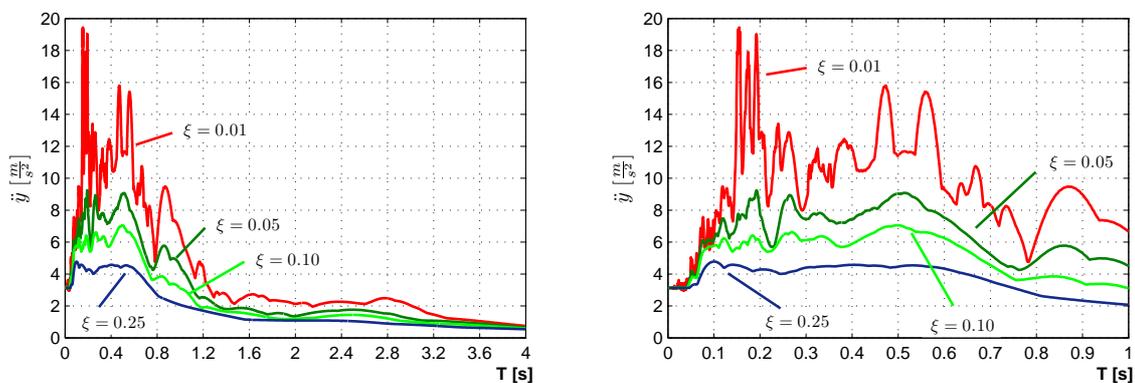
Das grundlegende Prinzip der Methode besteht nun darin, den Berechnungsschritt zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufs eines Einfreiheitsgradschwingers auf einen Erdbebenzeitverlauf, der für die zu betrachtende Erdbebenzone typisch ist, vorwegzunehmen und das Ergebnis lediglich in Form der maximalen Schwingungsreaktion zu hinterlegen. Da die Eigenperioden von zukünftigen bzw. noch zu planenden Bauwerken vorab nicht bekannt sind, muss die obige Rechenoperation für eine Vielzahl von Einfreiheitsgradschwingern bei Variation der Eigenperiode durchgeführt werden, um eine ausreichende Anzahl von Wertepaaren für den jeweiligen Standort vorhalten zu können. Durch deren graphische Darstellung mittels eines Diagramms entsteht letztendlich das gesuchte Antwortspektrum, aus dem, die Kenntnis der Eigenperiode des zu untersuchenden Bauwerks vorausgesetzt, unmittelbar dessen maximal zu erwartende Schwingungsreaktion abgelesen werden kann. Da potentielle Erdbebenverläufe, von denen ein einzelner Standort bedroht ist, unterschiedliche Charakteristika aufweisen können, ist in diesem Zusammenhang zudem darauf zu achten, dass eine sichere Bemessung die Auswertung und Überlagerung mehrerer unterschiedlicher Antwortspektren erfordert. Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit des Antwortspektrenverfahrens ist die Forderung, dass die Bauwerksreaktion vornehmlich von dessen Grundswingungseigenform beherrscht wird, da streng genommen nur in diesem Fall die Reduzierung auf einen Einmassenschwinger gerechtfertigt ist. Soll der Einfluss, der von höheren Schwingungsformen ausgeht, dennoch berücksichtigt werden, sind bei der Ermittlung der auftretenden Spitzenbeschleunigungen mit dem Antwortspektrenverfahren entsprechende Annahmen und Vereinfachungen hinsichtlich deren Überlagerung zu treffen.

Das generelle Vorgehen zur Ermittlung von Antwortspektren wird nachfolgend anhand des in Bild 2.34 wiedergegebenen Beschleunigungsverlaufs  $\ddot{y}_F(t)$  aufgezeigt. Dazu wird als erster Schritt ein nahezu unendlich steifer Einfreiheitsgradschwinger ( $T_d \approx 0$ ) gewählt, für den die gesamte vom



**Bild 2.34:** Einfreiheitsgradschwinger unterschiedlicher Schwingdauer  $T$  und Beschleunigungsverlauf

Akzellerogramm hervorgerufene Schwingungsreaktion  $\ddot{y}(t)$  mit Hilfe des in MAPLE [124] realisierten Übertragungsverfahrens berechnet wird. Anschließend wird daraus die maximal aufgetretene Absolutbeschleunigung  $\ddot{y}_{max}$  herausgefiltert und der jeweiligen Eigenperiode  $T_d$  zugeordnet. Wie in Bild 2.34 durch die Einfreiheitsgradschwinger unterschiedlicher Bauhöhe bereits symbolisch angedeutet, besteht der nächste Schritt in der Anhebung der Eigenperiode  $T_d$  und der erneuten Berechnung der vom gegebenen Erregungsverlauf maximal hervorgerufenen Schwingungsreaktion. Diese Prozedur wird solange wiederholt, bis der für die Erdbebenbemessung relevante Bereich abgedeckt ist. Um den positiven Einfluss einer vorhandenen möglichst hohen Strukturdämpfung auf die Bauwerksbelastung aufzuzeigen, wurden die Antwortspektren für unterschiedliche Dämpfungsgrade berechnet, deren Verläufe in Bild 2.35 für zwei verschieden große Periodenbereiche dargestellt sind. Im Vergleich zum aufgebrauchten Bodenbeschleunigungsverlauf, dessen Maximalwert etwa  $\ddot{y}_{F,max} \approx 3,13 \text{ m/s}^2$  beträgt, fällt auf, dass sich für die vergleichsweise niedrige Dämpfung von  $\xi = 0,01$  eine Verstärkung der am Bauwerk angreifenden Spitzenbeschleunigung einstellt, die im Bereich der Eigenschwingdauer von  $T_d \approx 0,156 \text{ s}$  immerhin einer Versechsfachung entspricht. Im Vergleich dazu kann bereits durch die Anhebung des Dämpfungsgrades auf  $\xi = 0,05$  nahezu eine Halbierung der auf die Masse einwirkenden maximalen Beschleunigungswerte erreicht werden.



**Bild 2.35:** Antwortspektren für unterschiedliche Dämpfungsgrade

Welcher Methode bei der Berechnung der Zeitverläufe letztendlich der Vorzug gegeben wird, ist für die Ermittlung von Antwortspektren prinzipiell zweitrangig. Das dafür traditionell zum Einsatz kommende DUHAMEL-Integral, das zu diesem Zweck ebenfalls diskretisiert werden muss, bietet im Vergleich zum hier verwendeten Übertragungsverfahren weder Vor- noch Nachteile. Jedoch sind die Ausdrücke der zugehörigen Faltungsintegrale hervorragend dafür geeignet, die Zusammenhänge zwischen der maximal auftretenden Absolutbeschleunigung  $\ddot{y}_{max}$  und den zugehörigen Maximalwerten der Relativgeschwindigkeit  $\dot{u}_{max}$  und der Relativverschiebung  $u_{max}$  zu verdeutlichen. Dazu werden zunächst die jeweiligen absoluten Maxima der einzelnen Verläufe als deren Spektralwerte definiert:

$$S_d(\omega, \xi) = \max |u(\omega, \xi, t)| \quad (2.158)$$

$$S_v(\omega, \xi) = \max |\dot{u}(\omega, \xi, t)| \quad (2.159)$$

$$S_a(\omega, \xi) = \max |\ddot{y}(\omega, \xi, t)| \quad (2.160)$$

Bei näherer Betrachtung der DUHAMEL-Faltungsintegrale als eine der Möglichkeiten zur Ermittlung der Spektralwerte fällt unmittelbar auf, dass sich die Gleichungen (2.111) und (2.113) hinsichtlich der darin enthaltenen Integralausdrücke exakt entsprechen. In dieser Tatsache liegt der nachfolgend angegebene Zusammenhang zwischen Relativverschiebung  $u(t)$  und Absolutbeschleunigung  $\ddot{y}(t)$  begründet, der dementsprechend auch für die zugehörigen Spektralwerte gilt.

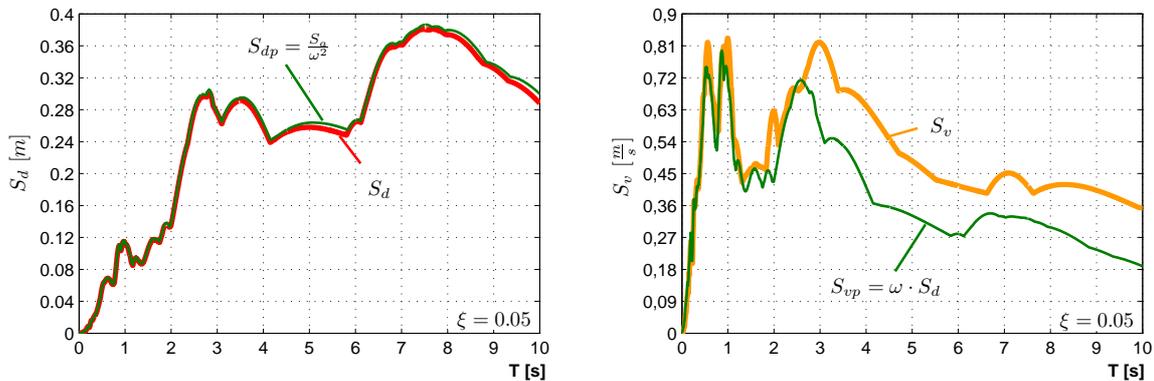
$$u(t) = \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{y}(t) \rightarrow S_d = \frac{1}{\omega^2} \cdot S_a \quad (2.161)$$

Im Unterschied dazu weicht der Integralteil der Gleichung (2.112) aufgrund des darin enthaltenen Cosinus-Terms von den zuvor genannten ab. Ein ähnlicher Zusammenhang für den Spektralwert der Geschwindigkeit  $S_v$  lässt sich aber dennoch finden, indem davon ausgegangen wird, dass sich die verschiedenen Faltungsintegrale zumindest in Bezug auf die damit ermittelten Maximalwerte nur unwesentlich voneinander unterscheiden. Für die üblichen Erdbebeneinwirkungen ist diese Annahme in aller Regel gerechtfertigt, auch wenn die Verläufe im Bereich kleinerer Frequenzen mit größeren Abweichungen vom eigentlichen Sollwert einhergehen [8], siehe Bild 2.36.

$$\max \left| \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega(t-\tau) d\tau \right| = \max \left| \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \cos \omega(t-\tau) d\tau \right|$$

$$S_{vp} \approx \omega \cdot S_d = \frac{1}{\omega} \cdot S_a \quad (2.162)$$

Als Abgrenzung zu  $S_v$  wird das nach obiger Näherungsbeziehung ermittelte Spektrum allgemein als Pseudogeschwindigkeitsspektrum  $S_{vp}$  bezeichnet. In Anlehnung daran findet sich in der Literatur auch oftmals der Begriff der Pseudobeschleunigung, falls diese mittels der Umrechnung  $S_{ap} = \omega^2 \cdot S_d$  aus dem Verlauf der Relativverschiebung ermittelt wurde. Im Gegensatz zu vorheriger Betrachtung resultiert die Verfälschung hierfür aber allein aus der Vernachlässigung der Dämpfungswirkung und fällt entsprechend sehr viel geringer aus. Zur Veranschaulichung des vorangegangenen Sachverhalts sind in Bild 2.36 die exakten Verläufe den jeweils genähereten gegenübergestellt. Der Fall der Pseudobeschleunigung ist dabei in seiner umgekehrten Form  $S_{dp} = \frac{1}{\omega^2} \cdot S_a$  wiedergegeben, da sich hierfür die Unterschiede in der Graphik deutlicher abzeichnen. In diesem Zusammenhang soll aber auch darauf hingewiesen werden, dass die Angabe von  $S_{dp}$  im Fall einer Auswertung mittels der DUHAMEL-Integrale insofern keinen Sinn macht, da sich ja gerade dieser Wert korrekt ermitteln lässt, während sich die Werte  $S_{vp}$  und  $S_{ap}$  lediglich als Näherung aus eben diesem ergeben.



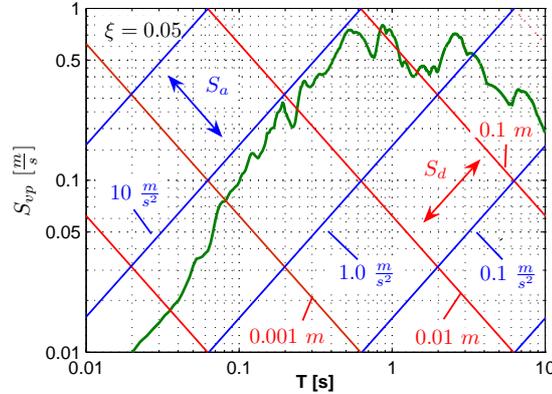
**Bild 2.36:** Gegenüberstellung von korrekten Spektral- und Pseudospektralwerten

Durch Logarithmieren können die obigen Beziehungen in eine Form überführt werden, für die sich eine Analogie zur allgemeinen Koordinaten-Transformations-Gleichung  $y' = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$  finden lässt, die es erlaubt, die drei Kurvenscharen in einem einzigen Diagramm zu vereinen.

$$\begin{aligned}
 S_d &= \frac{1}{\omega} \cdot S_{vp} = \frac{T}{2\pi} \cdot S_{vp} & S_a &= \omega \cdot S_{vp} = \frac{2\pi}{T} \cdot S_{vp} \\
 2\pi \cdot S_d &= T \cdot S_{vp} & \frac{1}{2\pi} \cdot S_a &= \frac{1}{T} \cdot S_{vp} \\
 \log(2\pi S_d) &= \log(S_{vp}) + \log(T) & \log\left(\frac{S_a}{2\pi}\right) &= \log(S_{vp}) - \log(T)
 \end{aligned}$$

Bild 2.37 zeigt die vorherige Auswertung nochmals in einem Diagramm mit doppelt-logarithmischem Maßstab, in dem entsprechend alle drei Antwortspektren durch eine einzige Kurve repräsentiert sind. Der wesentliche Vorteil der obigen Zusammenhänge ist aber vor allem in der Möglichkeit zu sehen, die gegenseitigen Abhängigkeiten zwischen  $S_{vp}$ ,  $S_d$  und  $S_a$

direkt abschätzen zu können, während der eigentliche Nutzen der Zeitersparnis gegenüber einer strengen Berechnung aufgrund der Leistungsfähigkeit heutiger Rechner eher in den Hintergrund getreten ist [97].



**Bild 2.37:** Doppelt-logarithmische Darstellung von Antwortspektren

Zur Festlegung der in den einschlägigen Normen als Bemessungsgrundlage verankerten elastischen Antwortspektren ist, wie bereits zuvor aufgeführt, die Berechnung mehrerer unterschiedlich garteter Spektren erforderlich, um die trotz ähnlicher Tektonik und Bodenart unterschiedlich möglichen Bodenbeschleunigungs-Zeitverläufe für einen Standort mit ausreichender Sicherheit wiederzugeben [8]. Aus der Konstruktion der geglätteten Einhüllenden über die entsprechend ermittelte Antwortspektrenschar resultiert dann das allgemein gültige elastische Bodenbeschleunigungs-Antwortspektrum. Stellvertretend für die in den einschlägigen Normenwerken definierten elastischen Antwortspektren sind in Bild 2.38 die in EN 1998-1:2010-12 [31] für Europa empfohlenen allgemein gültigen Antwortspektren wiedergegeben. Die Form des für einen lokalen Bemessungsstandort gültigen Spektrums ist darin in Abhängigkeit der Untergrundbeschaffenheit und der Bemessungs-Bodenbeschleunigung  $a_g$  anhand von zwischen so genannten Eckperioden abschnittsweise vorgegebenen Funktionsverläufen wie folgt definiert.

$$0 \leq T \leq T_B : \quad \rightarrow \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \left[ 1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2.5 - 1) \right] \quad (2.163)$$

$$T_B \leq T \leq T_C : \quad \rightarrow \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2.5 \quad (2.164)$$

$$T_C \leq T \leq T_D : \quad \rightarrow \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2.5 \cdot \left[ \frac{T_C}{T} \right] \quad (2.165)$$

$$T_D \leq T \leq 4 \text{ s} : \quad \rightarrow \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2.5 \cdot \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right] \quad (2.166)$$

mit

$S_e(T)$ : Ordinate des elastischen Antwortspektrums

$T$ :	Schwingdauer eines linearen Einfreiheitsgradschwingers
$a_g$ :	Bemessungs-Bodenbeschleunigung für Baugrundklasse A
$T_B$ :	untere Grenze des Bereichs konstanter Spektralbeschleunigung
$T_C$ :	obere Grenze des Bereichs konstanter Spektralbeschleunigung
$T_D$ :	Wert, der den Beginn des Bereichs konstanter Verschiebung des Spektrums definiert
$S$ :	Bodenparameter
$\eta$ :	Dämpfungs-Korrekturbeiwert mit dem Referenzwert $\eta = 1$ für $\xi = 0.05$ viskose Dämpfung

Der Dämpfungs-Korrekturbeiwert  $\eta$  zur Anpassung der aus den Antwortspektren erhaltenen Spektralwerte auf von  $\xi = 0.05$  abweichenden Bauwerksdämpfungen ist in DIN EN 1998-1:2010-12 [31] wie folgt definiert:

$$\eta = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + \xi}} \geq 0.55 \quad (2.167)$$

Die in DIN EN 1998-1:2010-12 [31] zur Konstruktion von Antwortspektren empfohlenen Eingangparameter sind in den nachfolgenden Tabellen 2.7 und 2.8 wiedergegebenen. Innerhalb Europas sind die tatsächlich für einen konkreten Standort zu verwendenden Werte den jeweils aktuell gültigen Nationalen Anwendungsdokumenten des jeweiligen Landes zu entnehmen, wie beispielsweise dem derzeit in Deutschland gültigen Anwendungsdokument [32].

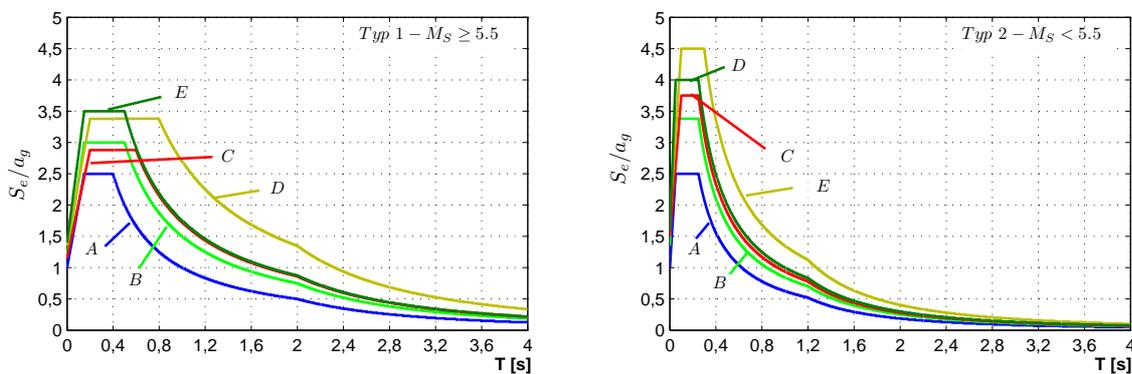
**Tabelle 2.7:** Parameterwerte zur Beschreibung der empfohlenen elastischen Antwortspektren vom Typ 1 für Zonen starker Seismizität mit Oberflächenwellenmagnituden  $M_S \geq 5.5$ )

Baugrundklasse	$S$	$T_B(S)$	$T_C(S)$	$T_D(S)$
<i>A</i>	1.00	0.15	0.40	2.00
<i>B</i>	1.20	0.15	0.50	2.00
<i>C</i>	1.15	0.20	0.60	2.00
<i>D</i>	1.35	0.20	0.80	2.00
<i>E</i>	1.40	0.15	0.50	2.00

Die ganzheitliche Beschreibung der auf ein Bauwerk einwirkenden Erdbebenbeanspruchung hat ferner den dreidimensionalen Charakter der Bodenbeschleunigungen möglichst realitätsnah abzubilden. Naturgemäß sind vorab auch hier weder maßgebende Wirkrichtung noch zeitlicher Ablauf der Bodenerschütterungen untereinander bekannt. Zudem reagiert auch die Baustruktur in Abhängigkeit der jeweiligen Steifigkeits- und Gewichtsverteilung wiederum gänzlich unterschiedlich auf die einzelnen Beschleunigungskomponenten. Diesbezüglich ist die horizontale Gesamtbeanspruchung gemäß der Regelungen der DIN EN 1998-1:2010-12 [31] z.B. entweder aus

**Tabelle 2.8:** Parameterwerte zur Beschreibung der empfohlenen elastischen Antwortspektren vom Typ 2 für Zonen schwacher Seismizität mit Oberflächenwellenmagnituden  $M_S < 5.5$ )

Baugrundklasse	$S$	$T_B(S)$	$T_C(S)$	$T_D(S)$
<i>A</i>	1.00	0.05	0.25	1.20
<i>B</i>	1.35	0.05	0.25	1.20
<i>C</i>	1.50	0.10	0.25	1.20
<i>D</i>	1.80	0.10	0.30	1.20
<i>E</i>	1.60	0.05	0.25	1.20



**Bild 2.38:** Empfohlene elastische Antwortspektren gemäß EC8 [31]

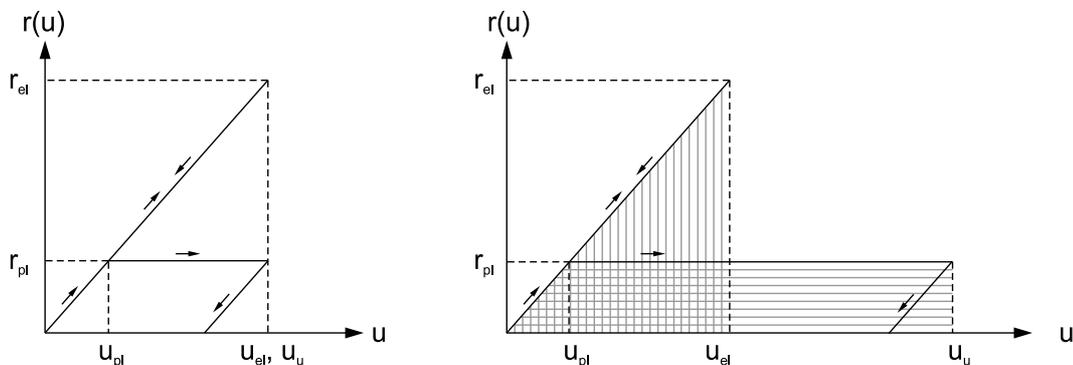
der Quadratwurzel über die Summe der beiden quadrierten Horizontalanteile oder alternativ aus der Kombination der jeweils einer Komponente mit 30% der jeweils anderen Komponente zu bilden. Reagiert das zu betrachtende System zudem empfindlich auf Vertikalerschütterungen, wie dies beispielsweise im Hallenbau bei Vorhandensein von vergleichsweise großen Stützweiten der Fall ist, sind diese Lastkomponenten ebenfalls zu berücksichtigen. Insbesondere bei schwingungs isolierten Bauwerken, deren Wirkmechanismus im Regelfall auf die horizontale Entkopplung beschränkt ist, rückt die Vertikalkomponente entsprechend in den Vordergrund. Ausnahme hiervon stellen die hauptsächlich in Japan entwickelten dreidimensionalen Isolierungssysteme dar, die dort zum Schutz von Atomkraftwerken [88], [60] oder aber auch von weit gespannten Flugzeughallen vorgesehen sind [128].

### 2.4.9 Inelastische Antwortspektren

Nach Einführung der elastischen Antwortspektren als Bemessungsgrundlage führte der Vergleich zwischen theoretisch berechneten Beanspruchungen und tatsächlich in Erdbeben aufgetretenen Schadensfällen frühzeitig zur Erkenntnis, dass die realen Auswirkungen durch die theoretisch berechneten Werte teilweise deutlich überschätzt wurden [106]. Die nahe liegende Schlussfol-

gerung, die Ursache im plastischen Tragverhalten solcher Strukturen zu suchen, konnte anhand zahlreicher numerischer Studien an Einfreiheitsgradschwingern mit entsprechend nichtlinearer Rückstellfunktion bestätigt werden. Die Einsturzgefahr von Bauwerken im Erdbebenfall kann demnach durch das Bereitstellen eines duktilen Tragwerkverhaltens deutlich reduziert werden, vorausgesetzt die dazu notwendigen Plastifizierungen sowie die dadurch an der restlichen Baustruktur meist zusätzlich bedingten Folgeschäden werden toleriert. Aufgrund des seltenen Auftretens solcher Naturereignisse ist aber gerade aus wirtschaftlicher Sicht eine entsprechende Auslegung potentiell gefährdeter Bauwerke sinnvoll, da das Hauptaugenmerk in diesem Fall vorrangig auf den Schutz von Menschenleben gerichtet ist.

Generell wird mit dem Begriff der Duktilität das Verhältnis einer maximal erreichbaren elastisch-plastischen zur entsprechend elastischen Verformungsgröße bei Fließbeginn bezeichnet. Im Erdbebeningenieurwesen wird die Bemessungsaufgabe beispielsweise auf die so genannte globale Duktilität bezogen, die sich wiederum aus dem Fließgelenkmechanismus der betrachteten Struktur und den darin enthaltenen lokalen Duktilitäten ergibt [8]. Die in Hochbauten dazu üblicherweise verwendete Bezugsgröße der Kopfverschiebung erfordert demnach eine ausreichende Rotations- und/oder Dehnungsduktilität aller beteiligten Einzelbauteile. Zur Verdeutlichung der Reduzierung des für ein Bemessungsbeben erforderlichen Tragwiderstandes dienen die zwei in Bild 2.39 dargestellten Modelle, mit deren Hilfe sich sowohl die abgeminderte tatsächliche Strukturantwort als auch die dafür benötigte Duktilitätsanforderung abschätzen lassen [122].



**Bild 2.39:** Ansätze zur Abminderung des Tragwiderstandes

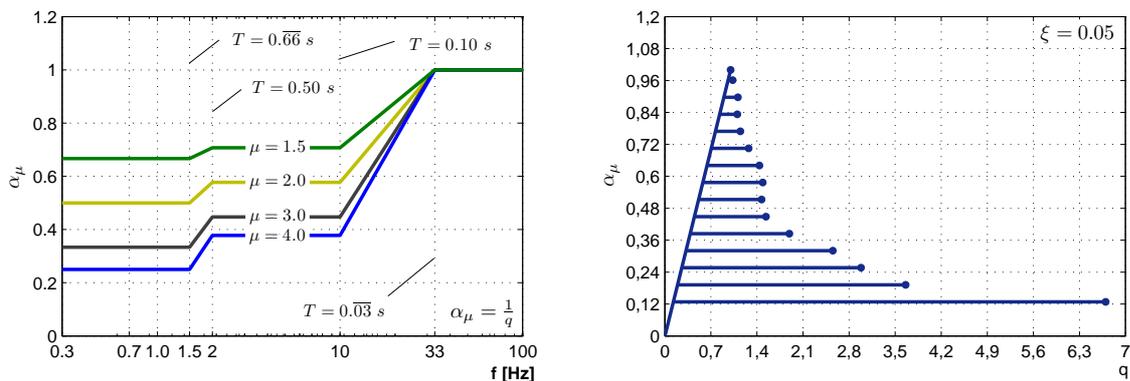
Im Fall weicher Systeme mit Eigenperioden von  $T > 0.66$  s bzw. Eigenfrequenzen von  $f < 1.5$  Hz lassen sich die durch Erdbeben hervorgerufenen Schwingungsreaktionen realitätsnah nach dem Prinzip der gleichen Verschiebungen von linear-elastisch und elastisch-plastischem Einfreiheitsgradschwinger abschätzen. Mit Einführung des so genannten Verhaltensbeiwertes  $q$  ergeben sich in Abhängigkeit der Verschiebeduktilität  $\mu = \frac{u_{pl}}{u_{el}}$  die folgenden Beziehungen.

$$r_{pl} = \frac{1}{q} \cdot r_{el} \quad \text{mit} \quad q = \mu \quad (2.168)$$

Dahingegen ist zur Beschreibung der Schwingungsreaktion von Systemen im mittleren Periodenbereich von etwa  $0.1 \text{ s} < T < 0.5 \text{ s}$  bzw.  $2 \text{ Hz} < f < 10 \text{ Hz}$  das Prinzip der gleichen Formänderungsarbeit geeigneter. Die zugehörigen Zusammenhänge ergeben sich, indem die in Bild 2.39 schraffiert dargestellten Flächen  $\frac{1}{2} \cdot r_{pl} \cdot u_{pl} + r_{pl} \cdot (u_u - u_{pl}) = r_{pl} \cdot (u_u - \frac{1}{2} u_{pl})$  gleichgesetzt und anschließend unter Einbeziehung der Duktilität  $\mu = \frac{u_{pl}}{u_{el}}$  wie folgt aufgelöst werden.

$$r_{pl} = \frac{1}{q} \cdot r_{el} \quad \text{mit} \quad q = \sqrt{2 \cdot \mu - 1} \quad (2.169)$$

Soll also eine vorgegebene Abminderung  $\alpha_\mu = \frac{1}{q}$  der sich nach dem elastischen Antwortspektrum ursprünglich ergebenden Reaktionslast erzielt werden, ist im erst genannten Fall eine Mindestduktilität in der Höhe von  $\mu = q$  vorzuhalten, während im zweit genannten Fall eine im Vergleich dazu etwas höhere Duktilität gemäß der Vorgabe  $\mu = \frac{1}{2} \cdot (q^2 + 1)$  erforderlich ist. In sehr steifen Systemen mit Eigenperioden oberhalb von  $T > 0.03 \text{ Hz}$  verbleibt hingegen zwischen den einzelnen Schwingungsabfolgen kaum ausreichend Zeit zur Ausbildung von ausgeprägten Plastifizierungserscheinungen. In der Folge ist in diesem Fall auch eine allenfalls nur mehr geringfügige Abminderung des Beanspruchungsniveaus zu erwarten. In Bezug auf die durch obige Regeln nicht erfassten Bereiche wird in [91] vorgeschlagen, den Verlauf des Abminderungsfaktors  $\alpha_\mu$  als lineare Funktion der logarithmischen Frequenz zu interpolieren. Werden die obigen Angaben entsprechend für verschiedene Duktilitäten umgesetzt, resultieren die in Bild 2.40 dargestellten Abminderungsfunktionen.



**Bild 2.40:** Abminderungsfunktionen für elastische Antwortspektren in Abhängigkeit verschiedener Duktilitätsfaktoren sowie am Beispiel rechnerisch ermittelte Abminderungsfaktoren

Eine alternative Möglichkeit der oben beschriebenen pauschalen Abminderung elastischer Antwortspektren besteht in der Berechnung der sich für verschiedene Fließgrenzen  $r_y$  tatsächlich

einstellenden Schwingungsreaktionen. Dazu werden unter Beibehaltung der Eigenfrequenz  $f_i$  zunächst lediglich der Tragwiderstand des Systems  $r_y$  variiert und die jeweils zugehörigen Antworten auf ein bestimmtes Erdbebenereignis berechnet. Die sich daraus unterschiedlich ergebenden Duktilitätsanforderungen werden gemäß Bild 2.40 ausgewertet, um das Prozedere anschließend für weitere Eigenfrequenzen zu wiederholen. Beispielhaft ist in Bild 2.40 der Zusammenhang zwischen dem Verhaltensbeiwert  $q$  und dem Abminderungsfaktor  $\alpha_\mu$  wiedergegeben, der sich bei Variation von  $r_y$  für das in Kapitel 2.4.7 eingeführte Beispielsystem ergibt. Dieses liegt mit einer Eigenfrequenz von  $f_d = 1.914 \text{ Hz}$  hierbei im Interpolationsbereich der zuvor erläuterten Methode. Nach Auswertung weiterer Systeme resultiert letztendlich ein zum vorherigen Vorgehen analoges Diagramm, das zudem aber auch die spezifischen Eigenschaften des zugrunde gelegten Erdbebens enthält.

In den einschlägigen Normen wird der lastmindernde Effekt der Energiedissipation nach dem in Bild 2.40 wiedergegebenen Prinzip üblicherweise durch Angabe so genannter inelastischer Antwortspektren geregelt. Hierzu werden die elastischen Antwortspektren durch entsprechende Berücksichtigung des konstruktions- und bauartspezifischen Verhaltensbeiwertes  $q$  abgemindert [85]. Beispielhaft sind diesbezüglich die Regelungen zur Aufstellung des in DIN EN 1998-1:2010-12 [32] als Bemessungsspektrum bezeichneten inelastischen Antwortspektrums wiedergegeben, die unter anderem auf den Studien von Fajfar [38] basieren. Abweichend von der Normenbezeichnung wird die Ordinate des Bemessungsspektrums hier nachfolgend anstatt mit  $S_d(T)$  mit  $S_{Ed}(T)$  bezeichnet, um einer Verwechslung mit dem Spektralwert der maximalen Verschiebung  $S_d(\omega, \xi) = \max|u(\omega, \xi, t)|$  vorzubeugen.

$$T_A \leq T \leq T_B : \quad \rightarrow \quad S_{Ed}(T) = a_{gR} \cdot \gamma_l \cdot S \cdot \left[ 1 + \frac{T}{T_B} \cdot \left( \frac{2.5}{q} - 1 \right) \right] \quad (2.170)$$

$$T_B \leq T \leq T_C : \quad \rightarrow \quad S_{Ed}(T) = a_{gR} \cdot \gamma_l \cdot S \cdot \frac{2.5}{q} \quad (2.171)$$

$$T_C \leq T \leq T_D : \quad \rightarrow \quad S_{Ed}(T) = a_{gR} \cdot \gamma_l \cdot S \cdot \frac{2.5}{q} \cdot \frac{T_C}{T} \quad (2.172)$$

$$T_D \leq T : \quad \rightarrow \quad S_{Ed}(T) = a_{gR} \cdot \gamma_l \cdot S \cdot \frac{2.5}{q} \cdot \frac{T_C T_D}{T^2} \quad (2.173)$$

mit

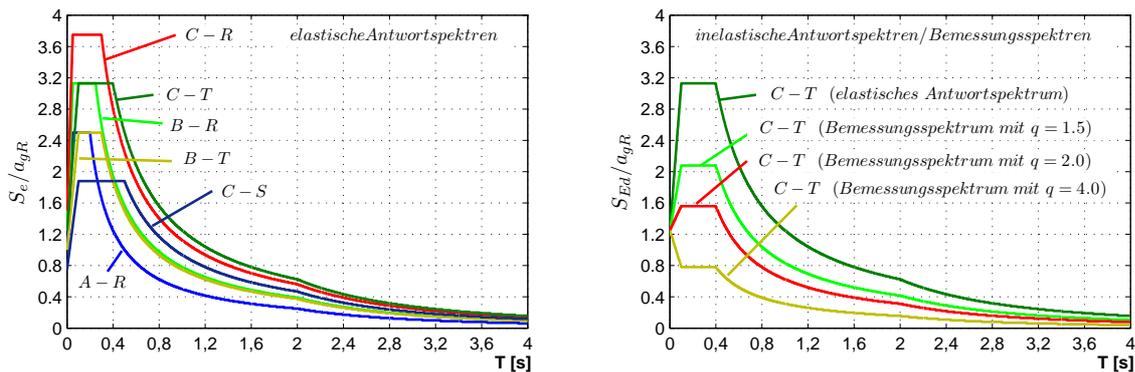
$S_{Ed}(T)$ :	Ordinate des Bemessungsspektrums
$a_{gR}$ :	Referenzspitzenwert der Bodenbeschleunigung
$\gamma_l$ :	Bedeutungsbeiwert
$S$ :	Bodenparameter
$q$ :	Verhaltensbeiwert

Ausgehend vom elastischen Antwortspektrum sind in Bild 2.41 die durch den Verhaltensbeiwert

$q$  möglichen Reduzierungen in Form entsprechender Bemessungsspektrum aufgezeigt. Die Antwortspektren sind hierbei gemäß der in DIN EN 1998-1/NA:2011-01 [32] gegebenen Vorgaben ermittelt und auf einen Referenz-Spitzenwert der Bodenbeschleunigung von  $a_{gR} = 0,8m/s^2$  und auf die Untergrundverhältnisse C-T der Tabellen 2.9 bezogen.

**Tabelle 2.9:** Werte der Parameter zur Beschreibung des elastischen horizontalen Antwortspektrums gemäß [32]

Untergrundverhältnisse	$S$	$T_A(S)$	$T_B(S)$	$T_C(S)$	$T_D(S)$
A – R	1.00	0.00	0.05	0.20	2.00
B – R	1.25	0.00	0.05	0.25	2.00
C – R	1.50	0.00	0.05	0.30	2.00
B – T	1.00	0.00	0.10	0.30	2.00
C – T	1.25	0.00	0.10	0.40	2.00
C – S	0.75	0.00	0.10	0.50	2.00



**Bild 2.41:** Elastische Antwortspektren und inelastische Beispielbemessungsspektren gemäß DIN EN 1998-1/NA:2011-01 [32]

### 2.4.10 Antwortspektren-Verfahren für Mehrfreiheitsgradschwinger

Während die maximale Schwingungsreaktion eines Einfreiheitsgradschwingers auf ein bestimmtes Erdbeben unmittelbar aus dessen Antwortspektrum hervorgeht, gestaltet sich deren Ermittlung im Fall von Mehrfreiheitsgradschwängern als wesentlich aufwendiger. Im ersten Schritt sind dazu zunächst für jede Eigenform getrennt diejenigen Massenanteile zu bestimmen, mit denen diese an der jeweiligen Schwingungsreaktion beteiligt sind. Mit diesen lassen sich dann die jeweils zugehörigen Größtwerte der Verschiebungs- und Schnittgrößenanteile in Abhängigkeit des zugrunde gelegten Antwortspektrums ermitteln. Da dabei jedoch verfahrensbedingt die zeitliche Zuordnung verloren geht, kann von den zu den jeweiligen Schwingungsformen gehörenden Einzelergebnissen streng genommen nicht mehr auf die tatsächliche Gesamtantwort geschlossen

werden [86]. Sollen diese dennoch zur maximal zu erwartenden Bauwerksreaktion aufsummiert werden, sind bezüglich deren Überlagerung gewisse Annahmen und Vereinfachungen zu treffen. In der Folge kann mit dem Antwortspektren-Verfahren im Fall des Mehrfreiheitsgradschwingers auch immer nur eine mehr oder minder gute Annäherung an die Realität gelingen, die aber für die eigentliche Bemessungsaufgabe i.d.R. vollkommen ausreichend ist.

Da die hierfür benötigte Rückführung des dynamischen Systems auf mehrere Einfreiheitsgradschwinger bereits in Kapitel 2.4.6.1 anhand des dort behandelten Gleichungssystems (2.135) erläutert wurde, wird das Vorgehen nunmehr nur noch auf die durch die Gl. (2.144)  $\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{d} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{k} \cdot \underline{u} = -\underline{m} \cdot \ddot{\underline{y}}_F$  beschriebene Problematik übertragen. Dabei ist zum einen auf die im Vergleich zum bisherigen Gleichungssystem unterschiedliche Basis zu achten, deren Entwicklung nach Eigenformen entsprechend nicht mehr auf die bereits bekannten generalisierten Absolutverschiebungen  $\underline{\eta}$ , sondern auf deren Relativvariante  $\underline{v}$  führt. Zum anderen ist das zusätzlich hinzugetretene Belastungsglied zu berücksichtigen, in dem die durch das Beben in die Struktur eingetragenen Beschleunigungsimpulse enthalten sind. Die Entkopplung auf Grundlage der transponierten Modalmatrix  $\underline{A}^T$  und der Beziehung zwischen physikalischen und generalisierten Koordinaten  $\underline{u} = \underline{A} \cdot \underline{v}$  führt somit auf die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \underbrace{\underline{A}^T \underline{m} \underline{A}}_{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{v}} + \underbrace{\underline{A}^T \underline{d} \underline{A}}_{\underline{D}} \cdot \dot{\underline{v}} + \underbrace{\underline{A}^T \underline{k} \underline{A}}_{\underline{K}} \cdot \underline{v} &= -\underline{A}^T \underline{m} \underline{I} \cdot \ddot{\underline{y}}_F \\ \underline{M} \cdot \ddot{\underline{v}} + \underline{D} \cdot \dot{\underline{v}} + \underline{K} \cdot \underline{v} &= -\underline{A}^T \underline{m} \underline{I} \cdot \ddot{\underline{y}}_F \end{aligned} \quad (2.174)$$

Der in obiger Gl. (2.174) enthaltene Indexvektor  $\underline{I}$  bestimmt dabei, welche Freiheitsgrade mit welchem Einfluss von der Fundamentbeschleunigung betroffen sind. Für den häufig auftretenden Fall einer lotrechten Struktur mit zentrisch angeordneten Massen und horizontaler Fußpunktbeschleunigung entspricht dieser beispielsweise dem Einsvektor.

Damit ist das Gleichungssystem unter der Voraussetzung modaler Dämpfung wiederum vollständig entkoppelt und kann jeweils der Reihe nach von  $i = 1$  bis  $i = n$  gelöst werden.

$$\begin{aligned} \ddot{v}_i + 2\xi_i \omega_i \cdot \dot{v}_i + \omega_i^2 \cdot v_i &= -\frac{a_i^T \underline{m} \underline{I}}{M_i} \cdot \ddot{y}_F \\ &= -\frac{L_i}{M_i} \cdot \ddot{y}_F \end{aligned} \quad (2.175)$$

Durch den in obiger Gleichung neu eingeführten Ausdruck des Beteiligungsfaktors  $L_i = a_i^T \underline{m} \underline{I}$  wird der Einfluss gewichtet, den eine am Fundament angreifende Einheitsbeschleunigung auf die jeweilige Eigenform der Struktur ausübt [55]. Im Gegensatz zum Formalismus der im obigen Bruch ebenfalls enthaltenen modalen Massen  $M_i$  lässt sich die zu den Beteiligungsfaktoren  $L_i$  gehörende Berechnungsvorschrift aber nicht generell als Summenbildung angeben. Dies ist vielmehr nur unter der Voraussetzung möglich, dass  $\underline{I}$  dem Einsvektors entspricht.

$$L_i = \underline{a}_i^T \underline{m} \underline{I} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot a_{ki} \quad \underline{M} = \underline{A}^T \underline{m} \underline{A} \rightarrow M_i = \sum_{k=1}^n m_k \cdot a_{ki}^2 \quad (2.176)$$

Werden die obigen Formeln bezüglich des Beispiels des Stockwerkrahmens ausgewertet, ergeben sich die in Tabelle 2.10 angegebenen Werte, mit deren Kenntnis auch die den jeweiligen Eigenformen zugeordneten Schwingungsverläufe in Form der generalisierten Relativkoordinaten berechnet werden können. Nachdem diese aber aufgrund der fehlenden Phasenbeziehung ohnehin nicht zur korrekten Schwingungsantwort überlagert werden können, reicht es i.d.R. vollkommen aus, lediglich deren Maximalwerte abzugreifen. Wird dazu beispielsweise der Ausdruck des DUHAMEL-Integrals verwendet, ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

**Tabelle 2.10:** Beteiligungsfaktoren  $L_i$  und Modale Massen  $M_i$  des Stockwerkrahmens

Eigenform $i$	Beteiligungsfaktor	Modale Masse	$L_i/M_i$
<b>1</b>	$L_1 = 22\,875 \text{ kg}$	$M_1 = 13\,723 \text{ kg}$	1.66688
<b>2</b>	$L_2 = 9\,075 \text{ kg}$	$M_2 = 15\,587 \text{ kg}$	0.58221
<b>3</b>	$L_3 = 2\,828 \text{ kg}$	$M_3 = 13\,644 \text{ kg}$	0.20728

$$\begin{aligned}
 v_{i,max} &= \frac{L_i}{M_i} \cdot \frac{1}{\omega_i} \cdot \max \left| \underbrace{\int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{y}_F(\tau) \cdot e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau) d\tau}_{S_v(\omega_i, \xi_i)} \right| \\
 &= \frac{L_i}{M_i} \cdot \frac{1}{\omega_i} \cdot \underbrace{S_v(\omega_i, \xi_i)}_{S_d(\omega_i, \xi_i)} \\
 v_{i,max} &= \frac{L_i}{M_i} \cdot S_d(\omega_i, \xi_i) \quad (2.177)
 \end{aligned}$$

Entsprechend der zugrunde gelegten Rücktransformation  $\underline{u}(t) = \underline{A} \cdot \underline{v}(t)$  sind damit auch die zugehörigen physikalischen Relativverschiebungen bekannt:

$$u_{k,i,max} = a_{ki} \cdot v_{i,max} \quad (2.178)$$

Unter Zuhilfenahme der aus Gl. (2.111) und Gl. (2.113) hervorgehenden Annäherung  $\ddot{y}_k \approx -\omega_i^2 \cdot u_k$  kann von dem obigen Relativwert auch direkt auf die innerhalb der Eigenform  $i$  maximal auftretende Absolutbeschleunigung geschlossen werden. Hierbei kann auf die korrekte Wiedergabe des Vorzeichens verzichtet werden, da die Richtungsinformation bereits bei der Ermittlung von  $v_{i,max}$  verloren ging.

$$\ddot{y}_{k,i,max} = \omega_i^2 \cdot a_{ki} \cdot v_{i,max} \quad (2.179)$$

Durch die Kenntnis der in den jeweiligen Massen  $m_k$  maximal auftretenden Absolutbeschleunigungen sind auch die dadurch jeweils geweckten Trägheitskräfte  $H_{k,i,max}$  unmittelbar bekannt:

$$\begin{aligned} H_{k,i,max} &= m_k \cdot \ddot{y}_{k,i,max} \\ &= m_k \cdot \omega_i^2 \cdot a_{ki} \cdot v_{i,max} \\ &= m_k \cdot a_{ki} \cdot \frac{L_i}{M_i} \cdot \underbrace{\omega_i^2 \cdot S_d(\omega_i, \xi_i)}_{S_a(\omega_i, \xi_i)} \\ H_{k,i,max} &= m_k \cdot a_{k,i} \cdot \frac{L_i}{M_i} \cdot S_a(\omega_i, \xi_i) \end{aligned} \quad (2.180)$$

Bezogen auf das vorliegende Beispiel des Stockwerkrahmens fehlen zu deren Berechnung offensichtlich noch die in den jeweiligen Eigenformen hervorgerufenen Spitzenbeschleunigungen  $S_a(\omega_i, \xi_i)$ , die üblicherweise einem Antwortspektrum wie dem im Bild 2.35 entnommen werden können. Davon abweichend wurden die nachfolgend aufgeführten Werte jedoch explizit mit Hilfe des in MAPLE realisierten Übertragungsverfahrens berechnet, um auch die jeweils unterschiedlich vorhandenen Dämpfungsgrade  $\xi_i$  korrekt zu erfassen.

1. Eigenform ( $T_1 = 1.003955$  s):  $S_a(\omega_1 = 6.258, \xi_1 = 0.050) = 4.431642 \frac{m}{s^2}$
2. Eigenform ( $T_2 = 0.396366$  s):  $S_a(\omega_2 = 15.258, \xi_2 = 0.051) = 7.376441 \frac{m}{s^2}$
3. Eigenform ( $T_3 = 0.243536$  s):  $S_a(\omega_3 = 25.800, \xi_3 = 0.052) = 7.343280 \frac{m}{s^2}$

Die letztendlich in den einzelnen Massen  $m_k$  hervorgerufenen maximalen Trägheitskräfte können damit für die jeweiligen Eigenformen  $i$  berechnet werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2.11 zusammengefasst.

**Tabelle 2.11:** Im Stockwerkrahmen hervorgerufene Trägheitskräfte

Eigenform $i$	Trägheitskraft in $\mathbf{m}_1$ [N]	Trägheitskraft in $\mathbf{m}_2$ [N]	Trägheitskraft in $\mathbf{m}_3$ [N]	Kräfte im Fundament $\sum \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3$ [N]
<b>1</b>	$H_{1,1,max} = 39\,304$	$H_{2,1,max} = 49\,598$	$H_{3,1,max} = 80\,079$	$H_{ges,1,max} = 168\,981$
<b>2</b>	$H_{1,2,max} = 53\,576$	$H_{2,2,max} = 21\,083$	$H_{3,2,max} = -35\,687$	$H_{ges,2,max} = 38\,972$
<b>3</b>	$H_{1,3,max} = 13\,717$	$H_{2,3,max} = -15\,053$	$H_{3,3,max} = 5\,641$	$H_{ges,3,max} = 4\,305$

Alternativ dazu lassen sich die am Fundament angreifenden Kräfte aber auch direkt ermitteln, indem die dazu benötigte Summenbildung wie folgt umgestellt wird:

$$\begin{aligned}
H_{ges,i,max} &= \sum_{k=1}^n H_{k,i,max} = \frac{L_i}{M_i} \cdot S_a(\omega_i, \xi_i) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n m_k \cdot a_{ki}}_{L_i} \\
&= \frac{L_i^2}{M_i} \cdot S_a(\omega_i, \xi_i) \\
&= m_{ei} \cdot S_a(\omega_i, \xi_i) \tag{2.181}
\end{aligned}$$

Der in obiger Gleichung neu eingeführte Bezugswert  $m_{ei} = \frac{L_i^2}{M_i}$  kann aufgrund seiner Entsprechung zum Einfreiheitsgradschwinger auch als äquivalente (Ersatz-)Masse gedeutet werden. Indem dieser wiederum durch die Gesamtmasse  $m_{ges} = \sum_{k=1}^n m_k$  der Struktur dividiert wird, resultiert der so genannte Ersatzmassenfaktor  $\epsilon_i = \frac{m_{ei}}{m_{ges}}$ , der angibt, mit welchem Massenanteil die Schwingungsform  $i$  an der Gesamtreaktion der Struktur  $H_{ges,i,max}$  beteiligt ist. Für das vorliegende Beispiel ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
m_{e1} &= \frac{22875^2}{13723} = 38\,131 \text{ kg} & \epsilon_1 &= 0.866601283 \\
m_{e2} &= \frac{9074^2}{15587} = 5\,283 \text{ kg} & \epsilon_2 &= 0.120076083 \\
m_{e3} &= \frac{2828^2}{13644} = 586 \text{ kg} & \epsilon_3 &= 0.013322634 \\
m_{ges} &= 44000 \text{ kg} \rightarrow & \epsilon_1 : \epsilon_2 : \epsilon_3 &= 100\% : 13.86\% : 1.54\%
\end{aligned}$$

Aus den zuvor genannten Gründen gelingt die Überlagerung der einzelnen Modalbeiträge  $E_i$  zur entsprechenden Gesamtantwort  $E_E$  nur mit Hilfe einer probabilistischen Betrachtungsweise. Entsprechend können auch die letztendlich gebildeten Kombinationsausdrücke nicht mehr untereinander in Beziehung gesetzt werden, so dass die jeweils interessierenden Schnitt- und Verschiebungsgrößen jeweils einzeln zu ermitteln sind [86].

Die einfachste dazu in Betracht kommende Methode besteht in der Addition der aus den jeweiligen Modalwerten gebildeten Absolutbeträge  $E_E = \sum_{i=1}^n |E_i|$ . Da dieser Überlagerungsregel die Vorstellung zugrunde liegt, dass sämtliche Maximalereignisse sowohl zur gleichen Zeit als auch mit derselben Wirkungsrichtung auftreten, handelt es sich bei den Ergebnissen folglich um maximale Grenzwerte, die i.d.R. weit auf der sicheren Seite liegen. Eine wesentlich realistischere Einschätzung des Beanspruchungsniveaus kann dagegen mit der dazu konträren Annahme erzielt werden, dass die Einzelergebnisse im Gegensatz zu vorher überhaupt nicht miteinander korreliert sind. In diesem Fall entspricht die gesuchte Gesamtantwort dem Erwartungswert stationärer Zufallsprozesse und berechnet sich aus der Wurzel der Quadratsummen (Square-Root-of-Sum-of-Squares - SRSS) zu:

$$E_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n E_i^2} \quad \text{falls gilt: } T_j \leq 0.9 \cdot T_i \quad (2.182)$$

Abweichend davon wird jedoch für Systeme, deren Eigenfrequenzen verhältnismäßig dicht beieinander liegen, empfohlen, die modalen Wechselwirkungen zumindest näherungsweise bei der Überlagerung zu berücksichtigen. Dies kann beispielsweise nach der Methode der vollständig quadratischen Kombination (Complete Quadratic Combination - CQC) erfolgen:

$$E_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n E_i \cdot \rho_{ik} \cdot E_k} \quad \text{mit: } r_{ik} = \frac{\omega_k}{\omega_i} \quad (2.183)$$

$$\rho_{ik} = \frac{8 \cdot \sqrt{\xi_i \cdot \xi_k} \cdot (\xi_i + r \cdot \xi_k) \cdot r^{\frac{3}{2}}}{(1 - r^2)^2 + 4 \cdot \xi_i \xi_k \cdot r \cdot (1 + r^2) + 4 \cdot (\xi_i^2 + \xi_k^2) \cdot r^2}$$

Werden die Frequenzverhältnisse  $r_{ik}$  und Koppelglieder  $\rho_{ik}$  für das vorliegende Beispiel ausgewertet, lässt sich eine offensichtlich geringe Korrelation zwischen den Eigenformen feststellen.

**Tabelle 2.12:** Beiwerte für die vollständige quadratische Kombination (CQC)

	$\Gamma_{ik}$			$\rho_{ik}$		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$i = 1$	1.0000	2.5329	4.1224	1.000000	0.009841	0.003513
$i = 2$	0.3948	1.0000	1.6275	0.009841	1.000000	0.040880
$i = 3$	0.2426	0.6144	1.0000	0.003513	0.040880	1.000000

In der Tabelle 2.13 sind die nach den obigen Überlagerungsregeln berechneten Trägheitskräfte denjenigen der numerischen Integration zu Vergleichszwecken gegenübergestellt. Da die maximalen modalen Beiträge annähernd zum selben Zeitpunkt  $t \approx 4.4 \text{ s}$  auftreten, wird das Gesamtergebnis offensichtlich durch die beiden zuletzt genannten Verfahren unterschätzt.

Abschließend soll noch auf die Bemessungsproblematik der richtigen Schnittgrößenüberlagerung hingewiesen werden, die insbesondere bei Baustrukturen auftritt, deren Baumaterialien richtungsabhängig unterschiedliches Tragverhalten aufweisen, oder aber auch Tragglieder mit isotropem Werkstoff erfasst, wenn diese auf Stabilität beansprucht werden. Damit die diesbezüglich entscheidende Information der Vorzeichenregelung einzelner Schnittgrößen bei der Überlagerung nicht verloren geht, wird in [63] vorgeschlagen, diese aus der jeweiligen Linearkombination der beteiligten Lastfälle zu bilden. Für den Fall der SRSS-Methode ergeben sich dann beispielsweise die folgenden Modifikation:

**Tabelle 2.13:** Gegenüberstellung der nach verschiedenen Methoden berechneten Trägheitskräfte

Eigenform i	Trägheitskraft in $\mathbf{m}_1$ [N]	Trägheitskraft in $\mathbf{m}_2$ [N]	Trägheitskraft in $\mathbf{m}_3$ [N]	Kräfte im Fundament $\sum \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3$ [N]
NEWMARK	$H_{1,ges} = 74\,883$	$H_{2,ges} = 65\,780$	$H_{3,ges} = 107\,580$	$H_{Fundament} = 182\,056$
$\sum_{i=1}^n  E_i $	$H_{1,ges} = 106\,597$	$H_{2,ges} = 85\,735$	$H_{3,ges} = 121\,407$	$H_{Fundament} = 212\,257$
$\sqrt{\sum_{i=1}^n E_i^2}$	$H_{1,ges} = 67\,848$	$H_{2,ges} = -55\,956$	$H_{3,ges} = 87\,852$	$H_{Fundament} = 173\,470$
$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n E_i \cdot \rho_{ik} \cdot E_k}$	$H_{1,ges} = 68\,620$	$H_{2,ges} = -55\,861$	$H_{3,ges} = 87\,455$	$H_{Fundament} = 173\,897$

$$H_E = \sum_{k=1}^n f_i \cdot |H_i| \quad \text{mit:} \quad f_i = \frac{H_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^n H_k^2}} \quad (2.184)$$

## Kapitel 3

# Erdbebenschutzsysteme

### 3.1 Allgemeiner Überblick

Im Erdbebeningenieurwesen besteht die Bemessungsaufgabe üblicherweise darin, das energetische Aufnahmevermögen der betrachteten Baustruktur durch geeignete Tragwerksauslegung auf ein Niveau anzuheben, das vom zuvor zu definierenden Bemessungserdbeben nicht überschritten wird. Dazu werden in der Systemantwort oftmals ganz bewußt Plastifizierungserscheinungen zugelassen, deren Dissipationswirkung die Erreichung dieser Zielvorgabe oft schon mit geringem wirtschaftlichen Mehraufwand erlaubt. Die hierbei als Folge in der Tragstruktur verbleibenden Schädigungen werden vor dem Hintergrund der vergleichsweise seltenen Auftretenshäufigkeit akzeptiert, wengleich nach einem entsprechenden Erdbeben umfangreiche Reparaturmaßnahmen oder sogar Abriss und Neuaufbau die Folge sind.

Im Gegensatz dazu wird durch den Einsatz von Erdbebenschutzsystemen nicht nur das Ziel verfolgt, Bauwerke im Erdbebenfall vor dem Einsturz zu bewahren, sondern darüber hinaus auch deren Funktionalität nach dem Beben aufrecht zu erhalten. Zur grundsätzlichen Bemessungsphilosophie des Erdbebeningenieurwesens, menschliches Leben zu schützen, tritt also die Aufgabe hinzu, Bauwerke so auszulegen, dass diese selbst schwerste Erdbeben weitestgehend unbeschadet überstehen. Aufgrund der dafür üblicherweise anfallenden Zusatzkosten liegt das Hauptanwendungsgebiet von Bauwerksschutzsystemen bisher vornehmlich in Objekten, die einen entsprechend hohen Schutzbedarf für die Zivilbevölkerung aufweisen. Neben Krankenhäusern, Schulen, Kommunikationszentralen und öffentlichen Einrichtungen sind dazu auch all diejenigen Bereiche der Infrastruktur zu zählen, die als Voraussetzung für eventuelle Rettungsmaßnahmen sowie spätere Versorgungsleistungen von Bedeutung sind. Davon abgesehen sind die zu Beginn vergleichsweise hoch ausfallenden Investitionskosten von Bauwerksschutzsystemen vor dem Hintergrund zu relativieren, dass eine ganzheitliche Betrachtungsweise auch die potentiellen Folgekosten einer Instandsetzung entsprechend ungeschützter Bauwerke mit in die Bilanzierung einzubeziehen hat. Aus der zuvor vorangegangenen Aufzählung der für Erdbeben-

schutzsysteme in Betracht kommenden Bauwerke wird zudem deutlich, dass die Forderung, deren Funktionstüchtigkeit zu erhalten, oftmals ohnehin eng mit der Vorgabe, menschliches Leben zu schützen, verknüpft ist.

Um die uneingeschränkte Nutzbarkeit von Bauwerken selbst nach einem schweren Erdbebenergebnis zu gewährleisten, ist es entscheidend, die vom Bemessungsbeben im Tragwerk hervorgerufenen Reaktionskräfte auf ein Niveau zu begrenzen, das dieses durch rein elastische Beanspruchungszustände abzutragen vermag. In Hinblick auf potentielle Nachbeben ist bei der Auslegung von Erdbebenschutzsystemen außerdem darauf zu achten, dass auch deren Funktionstüchtigkeit nach Einwirkung des Bemessungsbebens möglichst weitgehend erhalten bleibt. Insbesondere soll der Zustand der Schutzeinrichtung keinen Anlass zu sofortigem Handlungsbedarf geben, da dazu im Zweifelsfall die Zeit bis zu einem potentiellen Folgebeben nicht ausreicht [97], [74].

Die zur Reduzierung der Erdbebenbeanspruchung in der eigentlichen Tragstruktur zur Verfügung stehenden Methoden lassen sich grob in zwei Kategorien aufteilen. Der ersteren sind all diejenigen Systeme zuzuordnen, die die möglichst effektive Abschirmung des Bauwerks vom Untergrund und damit der eigentlichen Erdbebenbeanspruchung zum Ziel haben und damit das Prinzip der so genannten Erdbebenisolierung verfolgen. Dazu wird die Übertragung der Bodenbewegungen in das Bauwerk von vornherein vermieden, indem dieses unter Ausnutzung der Trägheitswirkung so weit wie möglich vom Untergrund entkoppelt wird. Die hierfür verwendeten Lagerungskonzepte sehen üblicherweise den Einsatz von Elastomer- oder Gleitpendellagern vor, wenngleich für diesen Zweck zahlreiche weitere Lösungen entwickelt wurden.

Systeme, die der zweiten Kategorie angehören, beruhen hingegen nicht auf dem Prinzip, Beanspruchungen infolge von Erdbebeneinwirkungen erst gar nicht entstehen zu lassen, sondern zielen vielmehr darauf ab, die Auswirkungen in der Tragstruktur selbst zu reduzieren. Dazu zählen Dissipations-Elemente ebenso wie Schwingungsdämpfer, selbst wenn diesen ein gänzlich unterschiedlicher Wirkmechanismus zugrunde liegt. In der Funktionsweise entsprechen erstere den Prinzipien der inelastischen Antwortspektren, bieten aber den Vorteil, die für die Dissipationswirkung erforderlichen Plastifizierungen vom Tragwerk fern und zum Schutzsystem hin zu verlagern. Schäden an der eigentlichen Baustruktur werden in der Folge vermieden. Mit dem Einsatz von Schwingungsdämpfern wird hingegen das Ziel verfolgt, die Erdbebenbeanspruchungen im Bauwerk möglichst weitgehend zu egalisieren, indem entsprechend der Einwirkung entgegengerichtete Kräfte induziert werden.

Obwohl im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich passive Systeme behandelt werden, soll der Vollständigkeit halber noch kurz auf ein weiteres Unterscheidungsmerkmal von Bauwerksschutzsystemen hingewiesen werden, das deren Energiebedarf sowie gegebenenfalls deren Einsatzzweck betrifft. Daraus folgt die nachstehende Unterteilung.

- **Passive Systeme:** Diese sind aufgrund ihrer Funktionsweise auf keinerlei externe Energiequelle angewiesen und hinsichtlich Langlebigkeit und Robustheit gerade im Erdbebeningenieurwesen weit verbreitet.
- **Semiaktive Systeme:** Als solche werden Schutzsysteme bezeichnet, die in der Lage sind, ihre Dämpfungseigenschaften aufgrund entsprechender Messsignale an das aktuelle Tragwerksgeschehen anzupassen. Es wird aber im Gegensatz zu aktiven Systemen keine zusätzliche mechanische Energie an das Bauwerk selbst abgegeben [59, 113]. Als Beispiel hierfür seien so genannte magnetorheologische Stoßdämpfer genannt, die vor allem zur Bedämpfung der unterschiedlich auftretenden Eigenformen an Tragseilen von Schrägseilbrücken [54] aber auch in Kombination mit der Erdbebenisolierung [111] zum Einsatz kommen.
- **Hybride Systeme:** Ein Kontrollsystem, in dem sowohl aktive als auch passive Systeme miteinander kombiniert werden [132].
- **Aktive Systeme:** Hierfür werden Anlagen, meist Hydrozylinder mit zusätzlicher Masse vorgesehen, die aufgrund entsprechender Messsignale in die Lage versetzt werden, der eigentlichen Bauwerksbewegung entgegenzuwirken [66, 97].

Zusammengefasst besteht die Aufgabe von Erdbebenschutzsystemen demnach also entweder in einer mehr oder minder ausgeprägten Abschirmung des Bauwerks vom Untergrund oder in einer möglichst weitestgehenden Aufnahme und Dissipation der durch das Erdbeben induzierten Energie. Trotz der Möglichkeit, einen vollwertigen Erdbebenschutz auch mit einem dieser Mechanismen allein sicherzustellen, werden diese idealerweise in einer Systemvorrichtung miteinander kombiniert.

## 3.2 Schwingungsdämpfer

Das vorrangige Einsatzgebiet von Schwingungsdämpfern besteht in Bauwerken mit schlanker und hoher Silhouette, wie Hochhäusern, Schornsteinen oder Funktürmen, die aufgrund der Lastabtragung ohnehin weniger für die Ausführung einer Basisisolierung geeignet sind. Begünstigt wird der Einsatz in solchen Strukturen zusätzlich durch die Tatsache, dass diese generell dazu neigen, vornehmlich in ihrer Grundeigenform zu schwingen, und die in den Bodenerschütterungen darüber liegenden Frequenzanteile somit großteils durch das Gebäude selbst herausgefiltert werden. In der Folge gelingt eine sinnvolle Schwingungsabwehr, obwohl der Wirkungsbereich von Schwingungsdämpfern naturgemäß auf ein enges Frequenzband begrenzt ist. Des Weiteren erschließt sich aus diesem Zusammenhang, weshalb es für die Auslegung von Schwingungsdämpfern ausreichend ist, die reale Baustruktur auf einen einfachen Einfreiheitsgradschwinger zurück-

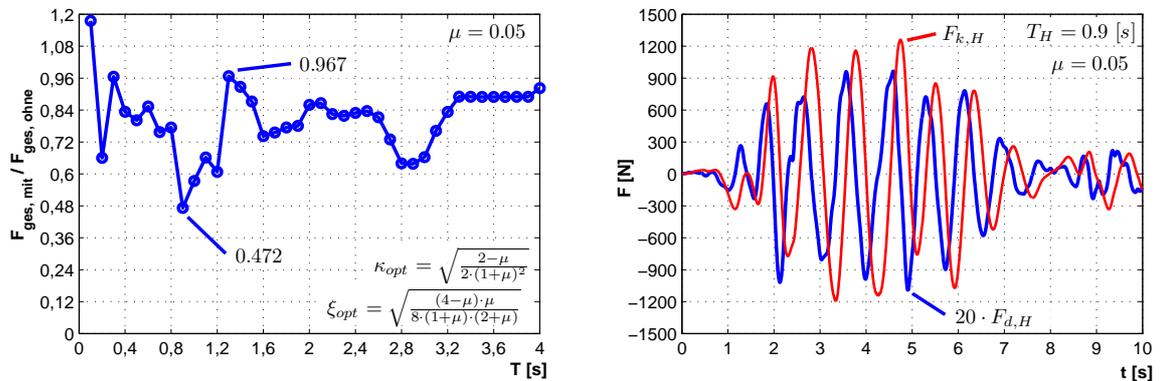
zuföhren. Die hierfür benötigte Rechenvorschrift zur Ermittlung der kinetisch äquivalenten Masse  $m_{ers}$  leitet sich aus der Vorgabe ab, dass der Ersatzschwinger unter der Voraussetzung gleicher Schwingungsfrequenz und Schwingungsamplitude dieselbe kinetische Energie  $E_{kin}$  wie das reale Bauwerk auf Höhe des Schwingungsdämpfers aufweist. Entsprechend ergibt sich diese in Abhängigkeit der Schwingungsordinate, der zugrunde gelegten Eigenform, der Massenverteilung der zu bedämpfenden Struktur sowie der tatsächlichen im Bauwerk vorhandenen Einbauhöhe des Schwingungsdämpfers. Letztere sollte zur Erzielung einer optimalen Wirkung daher im Idealfall mit dem Ort der maximalen Amplitudenantwort der Struktur übereinstimmen. Entsprechend wird der Schwingungsdämpfer bei kragarmartigen Strukturen in der Praxis möglichst knapp unterhalb der höchstgelegenen Stelle des entsprechenden Bauwerks angeordnet. Unter Einbeziehung der Eigenkreisfrequenz, die bereits aus der zuvor durchgeführten Modalanalyse der Baustruktur bekannt ist, kann mit der kinetisch äquivalenten Masse nunmehr unmittelbar auf die zugehörige Ersatzfedersteifigkeit des Bauwerks  $k_{ers} = \omega_H^2 \cdot m_{ers}$  geschlossen werden. Hierin wird der den **H**auptschwinger kennzeichnende Index  $H$  beibehalten, da die Eigenkreisfrequenz der eigentlichen Baustruktur mit derjenigen des zurückgeführten Einfreiheitsgradschwingers definitionsgemäß identisch ist  $\omega_H = \omega_{ers}$ . Zuletzt wird noch der Dämpfungsgrad  $\xi_H$  in Abhängigkeit der vorliegenden Bauweise möglichst realitätsnah abgeschätzt und der zur vollständigen Beschreibung des Ersatzschwingers benötigte Dämpfungskoeffizient  $d_{ers} = 2 \cdot m_{ers} \cdot \omega_H^2 \cdot \xi_H$  berechnet. Für die anschließende Auslegung des Schwingungsdämpfers ist zunächst die Höhe der Dämpfermasse zu wählen, die bezogen auf die kinetisch äquivalente Masse zu Verhältniswerten im Bereich von etwa  $0.02 \leq \mu = \frac{m_D}{m_{ers}} \leq 0.08$  führen sollte [59]. Während hier ein gewisser Spielraum gegeben ist, erfolgt die eigentliche Frequenzabstimmung  $\kappa = \frac{f_D}{f_H}$  sowie die Bestimmung des idealen Dämpfungsgrades  $\xi_D$  nach fest definierten Optimierungskriterien, die selbst wiederum in Abhängigkeit der vorliegenden Belastungsart variieren [83]. Obwohl der stoßartige Charakter der seismischen Einwirkungen eher nicht dem Verlauf stationärer Anregungen entspricht, wird in [97] für den Fall der Erdbebenbeanspruchung eine Auslegung gemäß den Kriterien des weißen Rauschens empfohlen. Die ursprünglich für transiente Einwirkungen hergeleiteten und damit vordergründig nahe liegenderen Optimierungskriterien führen hingegen zu einer tendenziell eher zu hohen Dämpferabstimmung.

$$\kappa_{opt} = \sqrt{\frac{2 - \mu}{2 \cdot (1 + \mu)^2}} \qquad \xi_{opt} = \sqrt{\frac{(4 - \mu) \cdot \mu}{8 \cdot (1 + \mu) \cdot (2 + \mu)}} \qquad (3.1)$$

Die in Gl. (3.1) wiedergegebenen Optimierungskriterien werden nachfolgend auf einen fiktiven Einfreiheitsgradschwinger mit linearen Eigenschaften angewendet, der zu diesem Zweck hinsichtlich seiner Eigenperioden  $T_H$  variiert wird. Die verwendete schrittweise Erhöhung der Eigenperiode  $T_{H,i+1} = T_{H,i} + 0.1$  wird durch die entsprechende Anpassung der Steifigkeitsverhältnisse vorgenommen, während der Dämpfungsgrad  $\xi_H = 0.02$  und die kinetisch äquivalente Masse

$m_{ers}$  durch entsprechende Umrechnung konstant gehalten werden. Als Anregung dient das bereits aus zuvor behandelten Beispielen bekannte und in Bild 2.34 dargestellte Akzellerogramm. Entsprechend der Ergebnisse der in [95] durchgeführten Studien wurde das Massenverhältnis auf  $\mu = 0.05$  festgelegt, da hierfür sowohl in Bezug auf die Relativverschiebungen der Gesamtstruktur  $u_H$  als auch auf die für den Schwingungsdämpfer vorzuhaltenden Bewegungsamplituden  $u_D$  optimale Ergebnisse zu erwarten sind. Zum Zweck der Vergleichbarkeit wird die Schwingungsantwort für die verschiedenen Konfigurationen jeweils einmal mit und einmal ohne aktivierten Schwingungsdämpfer berechnet, um anhand der so gewonnenen Verhältniswerte Rückschlüsse auf die Wirksamkeit ziehen zu können.

Bild 3.1 zeigt das Ergebnis in Form der jeweils maximal verursachten Reaktionskräfte, die sowohl die von der Relativverschiebung  $u_H$  abhängigen Federkräfte  $F_{k,H}$  als auch die von der Relativgeschwindigkeit  $\dot{u}_H$  abhängigen Dämpfungskräfte  $F_{d,H}$  beinhalten. Obwohl letztere in der Gesamtbetrachtung aufgrund des phasenversetzten Auftretens und der geringen Kraftamplituden von geringer Bedeutung sind, geben sie dennoch Aufschluss über die anteilig im Bauwerk bzw. im Dämpfungssystem stattfindende Energiedissipation. Die entsprechenden Verläufe sind in Bild 3.1 exemplarisch gegenübergestellt. Aus Gründen der besseren Visualisierung ist die Dämpfungskraft darin 20-fach überhöht dargestellt.



**Bild 3.1:** Studie zur Periodenabhängigkeit von Schwingungsdämpfern als Erdbebenschutzsystem

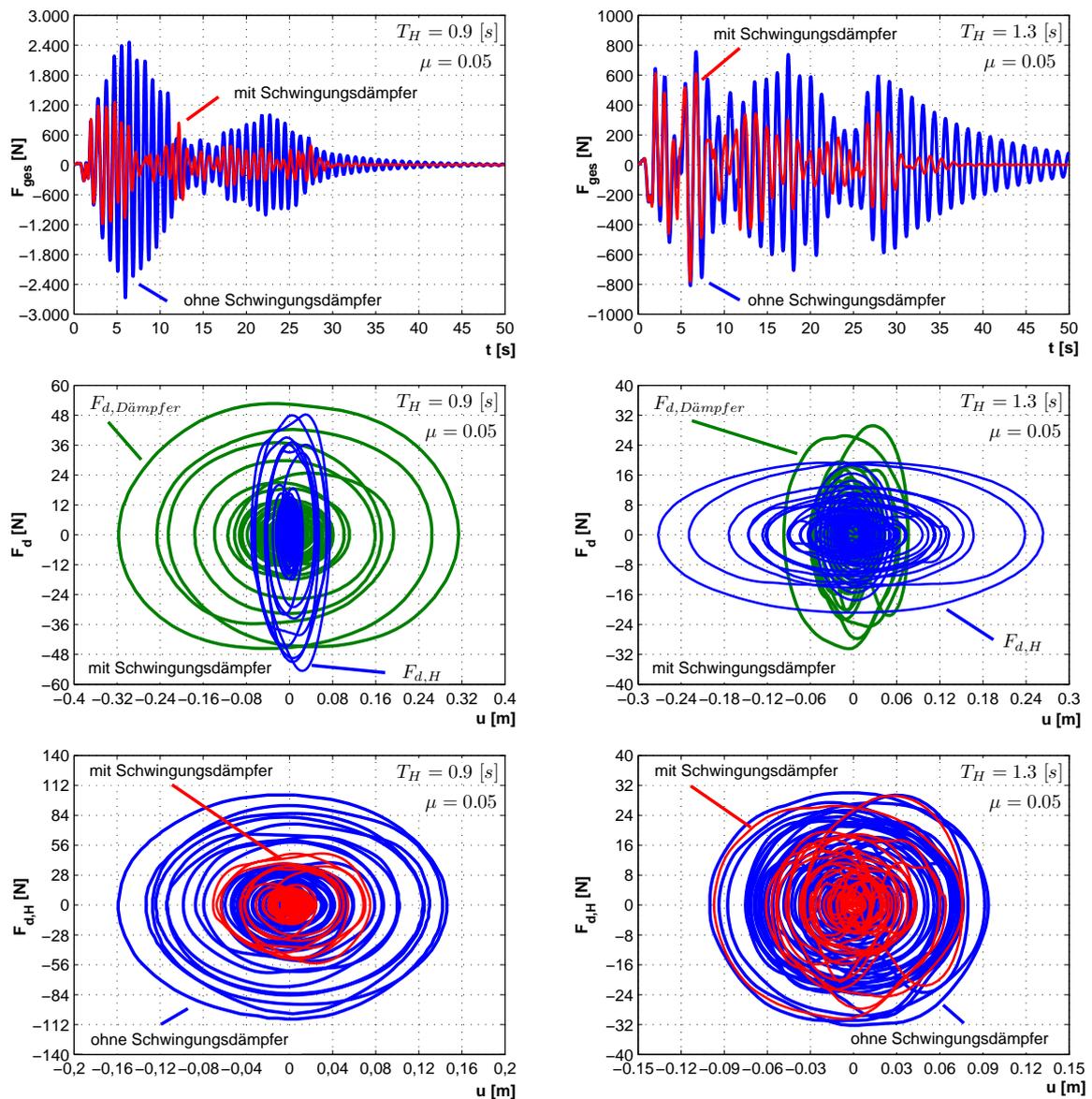
Es ist ersichtlich, dass die Wirksamkeit von Schwingungsdämpfern für den Fall der Erdbebenbeanspruchung stark von der jeweils vorliegenden Eigenperiode  $T_H$  der zu bedämpfenden Struktur sowie dem Frequenzgehalt und dem generellem Verlauf der Einwirkung selbst abhängt. Obwohl die vorliegenden Berechnungen lediglich auf den Verlauf eines einzigen Akzellerogramms bezogen sind, lassen sich aus den erhaltenen Ergebnissen dennoch die folgenden allgemeingültigen Aussagen ableiten.

Für den Fall, dass das System auf die Erdbebenanregung mit ausgeprägten sowie gleichförmigen Schwingungen reagiert, verbleibt dem Schwingungsdämpfer ausreichend Zeit, um sich auf diese einzustellen und eine optimale Wirkung zu entfalten. Wird der Schwingvorgang hingegen in seiner Regelmäßigkeit wiederholt gestört, verkürzen sich auch die notwendigen Einschwingphasen

entsprechend und der Schwingungsdämpfer kann auf die jeweils veränderte Situation kaum noch ausreichend reagieren. Im ungünstigsten Fall kann dies sogar dazu führen, dass anstatt der beabsichtigten Schwingungsreduzierung eine Belastungszunahme erfolgt. In diesem Zusammenhang sind Systeme mit sehr hohen Eigenfrequenzen für den Einsatz von Schwingungsdämpfern als ebenso ungünstig einzustufen wie vergleichsweise langsam schwingende Baustrukturen. So wird durch die im ersten Fall vorhandene hohe Steifigkeit eine vergleichsweise direkte Reaktion auf die Bodenerschütterungen bewirkt, die einen entsprechend unregelmäßigen Schwingungsverlauf der Struktur nach sich zieht. Im zweit genannten Fall tritt diese Problematik aufgrund der hohen Eigenperioden zwar eher in den Hintergrund, indes reicht hier die Zeit in Relation zur Gesamterdbebendauer nicht mehr aus, um den Schwingungsdämpfer zu nennenswerten Gegenschwingungen anzuregen. Wird zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts beispielsweise ein entsprechend weicher Schwinger mit der Eigenperiode von  $T_H = 8.0 \text{ s}$  betrachtet, zeigt sich, dass dieser selbst für eine für ein Erdbeben verhältnismäßig lange hypothetische Zeitdauer von  $40 \text{ s}$  lediglich zu fünf vollen Schwingungszyklen angeregt werden kann. Im mittleren Periodenbereich zeigt sich hingegen eine zum Teil durchaus ausgeprägte Schwingungsreduktion vor allem dann, wenn das System aufgrund des in den Erschütterungen enthaltenen Frequenzgehalts zu deutlichen Schwingungen angeregt wird. Für das als Anregung verwendete Akzellerogramm kann dies gemäß den in Bild 2.35 wiedergegebenen zugehörigen Antwortspektren für Eigenperioden im Bereich von  $T = 0.9 \text{ s}$  erwartet werden, während Systeme mit Perioden oberhalb von  $T \geq 1.3 \text{ s}$  weniger für den Einsatz von Schwingungsdämpfern geeignet erscheinen. Dieser Sachverhalt lässt sich durch die in Bild 3.2 wiedergegebenen Verläufe bestätigen. So werden in dem durch die Eigenperiode von  $T_H = 1.3 \text{ s}$  gekennzeichneten System lediglich Schwingungsamplituden verursacht, die in etwa einem Drittel derjenigen Reaktionskräfte entsprechen, die für das System mit  $T_H = 0.9 \text{ s}$  erhalten werden. Erwartungsgemäß zeigt sich für das weichere System auch ein vergleichsweise unruhigerer Schwingungsverlauf, der entsprechend geringe Relativamplituden zwischen Dämpfer und Hauptschwinger zur Folge hat. Entsprechend fällt der von der Dämpfereinheit an der Energiedissipation anteilig geleistete Beitrag im Vergleich zum Hauptsystem ab, und die resultierenden Hystereseschleifen nehmen entsprechend weniger Raum ein.

Bei Betrachtung der errechneten Zeitverläufe fällt weiterhin auf, dass die Schwingungen im Fall der aktivierten Schwingungsdämpfer vergleichsweise schneller abklingen. Obwohl sich daraus für die eigentlich beabsichtigte Reduzierung der maximalen Belastungsspitzen keine Vorteile ergeben, ist diese Tatsache hinsichtlich der mit wiederkehrender Plastifizierung zunehmenden Schädigung dennoch als positiv anzusehen. Vorrangig betroffen sind davon allerdings lediglich Bauteile, die aufgrund ihres Mechanismus bereits nach wenigen Belastungswechseln zum Versagen neigen, wie das beispielsweise beim Ausknicken von Bewehrungsstäben der Fall ist. Die Problematik der Kurzzeitfestigkeit spielt in diesem Zusammenhang hingegen eher eine untergeordnete Rolle, da die durch Erdbeben bewirkten Schwingenspielzahlen in der Größenordnung von etwa  $N \approx 30$  lediglich Werte erreichen, die diesbezüglich als unbedenklich gelten [49, 102].

In Anbetracht der im vorangegangenen Beispiel durch passive Schwingungsdämpfer erreichten Lastminderungen kann insgesamt festgehalten werden, dass deren Schutzwirkung im Fall von instationären Bauwerksanregungen, insbesondere wenn diese nur von kurzer Dauer sind, vergleichsweise gering ausfällt. Werden zum Schutz vor Erdbebeneinwirkungen dennoch Schwingungsdämpfer vorgesehen, empfiehlt sich der Einsatz von aktiven Systemen, da diese in der Lage sind, wesentlich direkter und damit effektiver auf den unregelmäßigen Belastungsverlauf zu reagieren.



**Bild 3.2:** Gegenüberstellung der Reaktionsverläufe von zwei mit Schwingungsdämpfern ausgerüsteten Systemen

### 3.3 Dissipations-Elemente

Der Einsatz von speziell im Bauwerk angeordneten Dissipations-Elementen stellt eine Abwandlung bzw. Erweiterung der in den siebziger Jahren von neuseeländischen Forschern erarbeiteten Kapazitätsmethode dar [91]. Da diese ursprünglich als Bemessungsgrundlage für das inelastische Antwortspektrenverfahren entwickelte Methode generell die Kenntnis der vom Bauwerk bereitgestellten Tragwerksduktilität voraussetzt, wurden zu deren Sicherstellung entsprechende Regelungen erarbeitet. Folglich war die zur Erzielung einer bestimmten Duktilitätsklasse erforderliche Tragwerksauslegung nicht mehr allein auf Erfahrungswerte oder empirische Versuche angewiesen, sondern konnte nach physikalisch begründeten Konstruktionsregeln erfolgen [98]. Folgerichtig hat sich die Kapazitätsmethode zwischenzeitlich entsprechend weit verbreitet und bildet die Grundlage zahlreicher Regelungen und Vorschriften aktueller Normenwerke, wie beispielsweise dem Eurocode 8 [31] oder dem International Building Code [57].

Die Vorgehensweise bei der Tragwerksauslegung für die Beanspruchungen aus Erdbeben gemäß der Kapazitätsmethode unterscheidet sich grundlegend von der sonst üblichen Bemessungspraxis und gliedert sich in die folgenden Schritte. Zunächst wird innerhalb des Tragwerks ein für die Erdbebenbeanspruchung geeigneter Fließgelenkmechanismus gewählt, der im Idealfall neben der Aktivierung einer möglichst hohen Anzahl von Fließzonen ein weitestgehend ausgewogenes Beanspruchungsniveau in sich vereint. Die zur Ausbildung der einzelnen Plastifizierungsbereiche benötigten lokalen Anforderungen leiten sich dann aus dem globalen Duktilitätsbedarf ab, der sich wiederum in Abhängigkeit des vorliegenden Bemessungsbebens ergibt. Hierbei ist unter anderem darauf zu achten, dass die geforderten Zähigkeitseigenschaften auch im Fall sich wiederholender Belastungszyklen möglichst vollständig erhalten bleiben. Nach erfolgter Festlegung des Fließgelenkmechanismus lassen sich nunmehr die an die Plastifizierungsbereiche angrenzenden Bauteile bemessen, die aber nicht wie gewohnt für die von außen einwirkenden Schnittgrößen auszulegen sind, sondern vielmehr für denjenigen Belastungszustand, der sich aus dem vollständigen Durchplastifizieren aller vorhandenen Fließgelenke ergibt. Die auf diese Weise erhaltenen Einwirkungen werden dann anschließend noch um den so genannten Überfestigkeitsfaktor beaufschlagt, durch den sichergestellt wird, dass die an die Fließgelenke angrenzenden Tragglieder keinesfalls über ihr elastisches Tragvermögen hinaus beansprucht werden. Die Notwendigkeit dieser Beaufschlagung erklärt sich neben der Sicherstellung eines gewissen Sicherheitsniveaus aus dem Umstand, dass die tatsächlich in den Fließgelenken hervorgerufenen Schnittgrößen i.d.R. deutlich höher ausfallen als rechnerisch vorausgesagt. Der Grund hierfür liegt in den im Bauingenieurwesen rechnerisch verwendeten Materialparametern, die im Rahmen der üblicherweise auf der sicheren Seite liegenden Bemessungsphilosophie zum einen die Diskrepanz zwischen konstant angenommenen Fließ- und real auftretenden Bruchspannungen außer Acht lassen und zum anderen die Materialfestigkeiten als untere Fraktilwerte angeben.

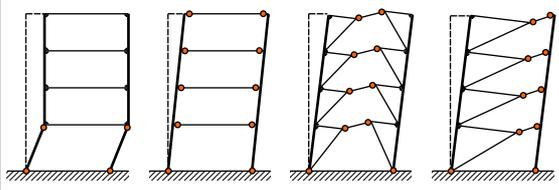
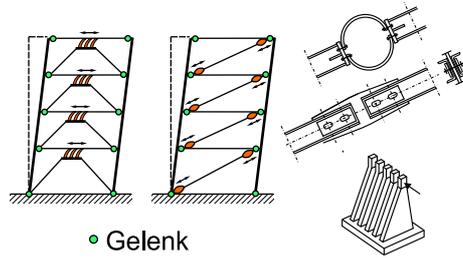
In Bild 3.3 sind anhand eines einfachen Rahmensystems verschiedene Möglichkeiten der Fließ-

gelenkausbildung aufgezeigt. Der links dargestellte Mechanismus ist hierbei im Rahmen der Erdbebenauslegung nach der Kapazitätsmethode aus zweierlei Gründen zu vermeiden. Zum einen verursacht der auf ein einziges Stockwerk konzentrierte Stützenmechanismus ein äußerst unausgewogenes Beanspruchungsniveau, das zudem mit vergleichsweise hohen Abtriebskräften einhergeht, und zum anderen wirken sich die in den Stielen vorhandenen Normalkräfte kontraproduktiv auf die in den Fließgelenken vorhandenen Duktilitätseigenschaften aus. Im Gegensatz dazu sind die Kriterien für eine robuste Auslegung gegen Erdbeben durch die weiteren dargestellten Mechanismen allesamt erfüllt, und eine entsprechende Tragwerksausbildung kann uneingeschränkt empfohlen werden.

Analog zur Bemessungsphilosophie der Kapazitätsmethode wird durch den Einsatz von Dissipations-Elementen dasselbe Ziel verfolgt, die Tragwerksreaktion auf Erdbeben durch Energiezerstreuung an gezielt dafür vorgesehenen Plastifizierungsbereichen abzumindern. Der Vorteil besteht darin, dass die dissipierte Energie nicht mehr als Schädigung im Bauwerk selbst verbleibt, sondern allein auf die dafür vorgesehenen Elemente konzentriert ist. Nach einem Erdbebenereignis können diese dann vergleichsweise einfach ausgetauscht werden, wengleich zumeist noch eine im Hinblick auf potentielle Nachbeben günstig zu bewertende Restfunktionstüchtigkeit erhalten bleibt. Im Vergleich zum Konzept der herkömmlichen Kapazitätsmethode entstehen somit nur geringe Folgekosten, und die Nutzbarkeit des Bauwerks kann nach zumeist kurzen Reparaturarbeiten wieder vollständig hergestellt werden. Ein weiterer Vorteil resultiert aus dem Umstand, dass die sonst erforderliche Durchbildung von aufwendigen Konstruktionsdetails für die plastischen Gelenke entfällt, zumal diese äußerst sensibel für Ausführungs- und Planungsfehler sind. In diesem Zusammenhang seien stellvertretend für andere Bauweisen die aus dem Stahlbau bekannten und zu vermeidenden Sprödbrüche im Bereich von Schweißnähten oder die Beulneigung von zu schlank ausgeführten Bauteilen genannt [39, 40, 53, 120].

Innerhalb des Bauwerks werden Dissipations-Elemente vorrangig in Bereichen angeordnet, die im Erdbebenfall durch vergleichsweise große gegenseitige Relativverschiebungen gekennzeichnet sind. Bild 3.3 zeigt diesbezüglich zwei Varianten aus dem Hochbau, die jeweils den Einsatz von Stahl-Hysterese-Elementen mit lateraler bzw. longitudinaler Belastungsrichtung zum Ziel haben. Alternativ sind zur Energiezerstreuung weitere Mechanismen denkbar, die zum Beispiel auf Reibungseffekten beruhen, wie das anhand des ebenfalls in Bild 3.3 dargestellten Rutsch-Gleit-Gelenks mit vorgespanntem Gleitschuh gezeigt ist [87]. Daneben existieren zahlreiche weitere Lösungen, denen aber allesamt das Ziel gemeinsam ist, dem System im Erdbebenfall durch Wärmeumwandlung möglichst viel Energie zu entziehen [115, 116, 105].

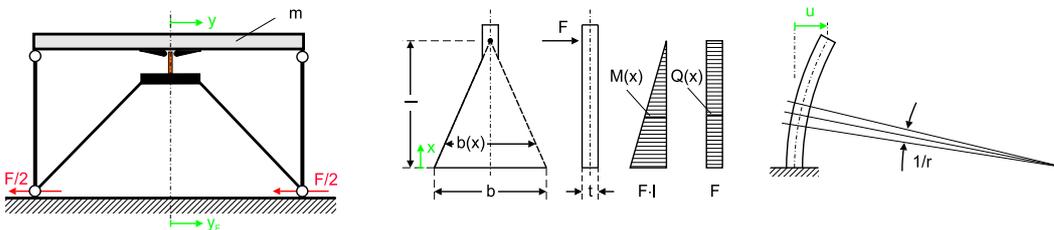
Ein weiteres Einsatzgebiet von Dissipations-Elementen stellt die kombinierte Anwendung mit der im nachfolgenden Kapitel 3.4 beschriebenen Erdbebenisolierung dar. Die dazu notwendige horizontale Entkopplung des Bauwerks wird durch die Anordnung eines entsprechend ausgebildeten Lagerungssystems realisiert, das dann allein durch die vorhandenen Vertikallasten

Möglichkeiten der Fließgelenkausbildung	Einsatz von Dissipations-Elementen
Schädigung verbleibt im Tragwerk	Schädigung im Tragwerk wird vermieden
 <p>• Fließgelenk</p>	 <p>• Gelenk</p>

**Bild 3.3:** Fließgelenkmechanismen für einfache Rahmensysteme und alternative Anordnung von Dissipations-Elementen

beansprucht ist. Für die Aufnahme der verbleibenden horizontalen Verkehrslasten sind folglich die Hysterese-Elemente heranzuziehen, denen damit neben der Bereitstellung eines ausreichenden Dissipationsvermögens zusätzlich die Aufgabe der Lagesicherung im Gebrauchslastniveau zukommt.

Verbunden mit der Entwicklung unterschiedlichster Stahl-Hysterese-Elemente hat diese Bauweise bisher vor allem in Italien breite Anwendung gefunden [77, 78].



**Bild 3.4:** Dreieckselement

Nachfolgend wird das Verhalten von Dissipations-Elementen unter Erdbebenbeanspruchung anhand eines einfachen Stahlhystereseelements erläutert. Dazu dient das in Bild 3.4 dargestellte Modell, dessen Tragstruktur dazu führt, dass einwirkende Horizontallasten allein durch das Dissipations-Element abgetragen werden. Um ein möglichst ausgeglichenes Beanspruchungsniveau und damit stabiles Hystereseverhalten des Dissipations-Elements zu erreichen, wird dessen Formfindung an der Vorgabe orientiert, ein über die Elementlänge möglichst konstanten Verzerrungszustand zu erzeugen. Im vorliegenden Fall des quer belasteten Elements mit konstanter Blechdicke resultiert aus dieser Forderung der in Bild 3.4 dargestellte Dreieckskörper. Das Ebenbleiben der Querschnitte gemäß der BERNOULLI-Hypothese vorausgesetzt, führt diese Geometrie unabhängig von den einzelnen Bestimmungsparametern  $l, b$  und  $t$  stets zu einem über die Höhe konstanten Krümmungsverlauf  $\kappa = 1/r$ . Damit ist aufgrund des Zusammenhangs für die Verzerrung  $\epsilon = \kappa \cdot y$  auch unmittelbar die Vorgabe der gleichmäßigen Beanspruchung erfüllt. Physikalisch lässt sich dies anhand der Gleichung zur Spannungsberechnung an der Bauteiloberfläche

nachvollziehen, die in Abhängigkeit der Laufvariablen  $x$  die folgende Form  $\sigma(x)_{Rand} = \frac{M(x)}{W(x)}$  annimmt. Wird darin der Ausdruck für das einwirkende Moment  $M(x) = F \cdot (l - x)$  und die veränderliche Bauteilbreite  $b \frac{l-x}{l}$  eingesetzt, kürzt sich der Ausdruck  $(l - x)$  heraus und die Ableitung nach  $x$  nimmt offensichtlich den Wert Null an.

$$\sigma(x)_{Rand} = \frac{F \cdot (l - x)}{\frac{b \frac{(l-x)}{l} \cdot t^2}{6}} = \frac{6 \cdot F \cdot l}{b \cdot t^2} = konst. \quad (3.2)$$

Indem die Spannung in Gl. (3.2) durch den nachfolgenden Ausdruck ersetzt und anschließend die elastische Verschiebung  $y$  freigestellt wird, lässt sich die Kopfverschiebung des Elements in Abhängigkeit der einwirkenden Horizontalkraft  $F$  berechnen.

$$\begin{aligned} \sigma_{Rand} &= E \cdot \epsilon_{Rand} = E \cdot \kappa \cdot \frac{t}{2} = E \cdot \frac{2 \cdot y}{l^2} \cdot \frac{t}{2} \\ &\rightarrow y = \frac{6 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot t^3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Unter Ausnutzung des Zusammenhangs  $k = \frac{F}{y}$  sind damit auch unmittelbar die elastische Steifigkeit  $k$  und die Eigenfrequenz  $\omega$  des Elements bekannt:

$$k = \frac{E \cdot b \cdot t^3}{6 \cdot l^3} \quad \text{bzw.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot t^3}{6 \cdot l^3 \cdot m}} \quad (3.4)$$

Die nachfolgend aufgelisteten Systemparameter lassen sich mit Hilfe der Gleichung Gl.(3.4) derart festlegen, dass mit der Periode in der Höhe von  $T = 0.47 \text{ s}$  eine gemäß den in Bild 2.35 gegebenen Antwortspektren ungünstige Eigenperiode mit entsprechend ausgeprägter Strukturantwort für den Schwinger resultiert.

- Masse:  $m = 85\,693 \text{ kg}$
- Länge/Breite/Tiefe:  $l = 190 \text{ mm}/b = 70 \text{ mm}/t = 35 \text{ mm}$
- Dämpfungsgrad:  $\xi = 0.02 \rightarrow d = 2 \cdot m\omega\xi = 45\,823 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
- Elastizitätsmodul:  $E = 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- nichtlineares Materialgesetz in Form einer fiktiven zyklischen Spannungs-Verzerrungs-Linie:

Für diese nichtlineare Problemstellung empfiehlt sich als Berechnungsmethode wiederum die Anwendung des NEWMARK-Verfahrens, das dazu durch die Bestimmungsparameter  $\delta = 0.5$

$\epsilon$ [%]	0	0.170	1.265	3.580	6.664	8.880	15.96
$\sigma$ [ $\frac{N}{mm^2}$ ]	0	356	400	470	525	548	555

und  $\alpha = 0.25$  in die allgemein bekannte Beschleunigungsmethode überführt wird. Sollen dabei numerisch bedingte Verfälschungen im Rechenergebnis weitestgehend unterbunden werden, ist die Zeitschrittweite an dem in Tabelle 2.6 gegebenen Richtwert  $\Delta t = 0.01 \cdot T = 0.0047$  s zu orientieren.

Zu Vergleichszwecken wurde die Bauwerksreaktion auf das in Bild 2.34 wiedergegebene Akzellerogramm in der vorliegenden Konstellation sowohl für rein elastisches als auch für das angegebene nichtlineare Materialverhalten des Hystereseelements ausgewertet. Die daraus resultierenden Verläufe sind in Bild 3.5 entsprechend gegenübergestellt. Zwar zeigt sich aus dem Vergleich der Relativverformungen, dass die maximal auftretenden Relativverschiebungen in etwa dieselbe Größenordnung  $u_{max} \approx 5.8$  cm annehmen, im nichtlinearen Fall jedoch eine zu erwartende Restverschiebung in der Höhe von  $u_{Rest} = 0.946$  cm verbleibt. Vor allem aber wird durch die aufgrund der Plastifizierungen bewirkten Energiedissipation eine deutliche Reduzierung der im Fundament geweckten Horizontalkräfte erreicht, die mit einem deutlich fülligeren Verlauf der Hystereseschleifen einhergeht. Bestätigt wird dies durch die allein auf die viskosen Dämpfungskräfte  $F_d$  bezogenen Verläufe, die als Maß der innerhalb des Bauwerks auftretenden Energieverteilung im nichtlinearen Fall ein deutlich geringeres Beanspruchungsniveau zeigen.

Die im Hysterese-Element maximal hervorgerufenen Spannungsprofile sind jeweils nach Materialgesetz getrennt in Bild 3.6 gegenübergestellt. Zwar weisen die maximal auftretenden Relativverschiebungen lediglich Differenzen von etwa 5% auf, jedoch unterscheidet sich das hervorgerufene Beanspruchungsniveau beträchtlich. So werden im Fall mit linearem Materialgesetz mit  $\sigma_{Rand,max} = 13\,333 \frac{N}{mm^2}$  theoretische Spannungswerte in einer Größenordnung erreicht, die durch gewöhnliche Werkstoffe keinesfalls mehr abgedeckt sind.

Im Übrigen ist für die Auslegung von Stahl-Hysterese-Elementen nicht wie gewöhnlich die im Erstversuch ermittelte Spannungs-Verzerrungs-Linie für einmaliges zügiges Anfahren heranzuziehen, sondern vielmehr die sich für wiederholende Belastungsumkehr einstellende so genannte zyklische Spannungs-Verzerrungs-Linie. Diese können für eine große Anzahl verschiedener Stahlsorten beispielsweise dem Werk [13] von BOLLER und SEEGER entnommen werden. Lassen sich hingegen für die eingesetzten Materialien keine entsprechenden Datensätze finden, sind zu deren Ermittlung entsprechende Versuche wie beispielsweise nach dem Incremental-Step-Verfahren anzuraten. Im Vergleich zur für statische Aufgabenstellungen üblicherweise verwendeten Spannungs-Verzerrungs-Linie liegt der vorrangige Unterschied der zyklischen Spannungs-Verzerrungs-Linie im nicht vorhandenen Fließplateau. Des weiteren neigen weichgeglühte Metalllegierungen zur zyklischen Verfestigung, kaltverfestigte Metalllegierungen hingegen zur zy-

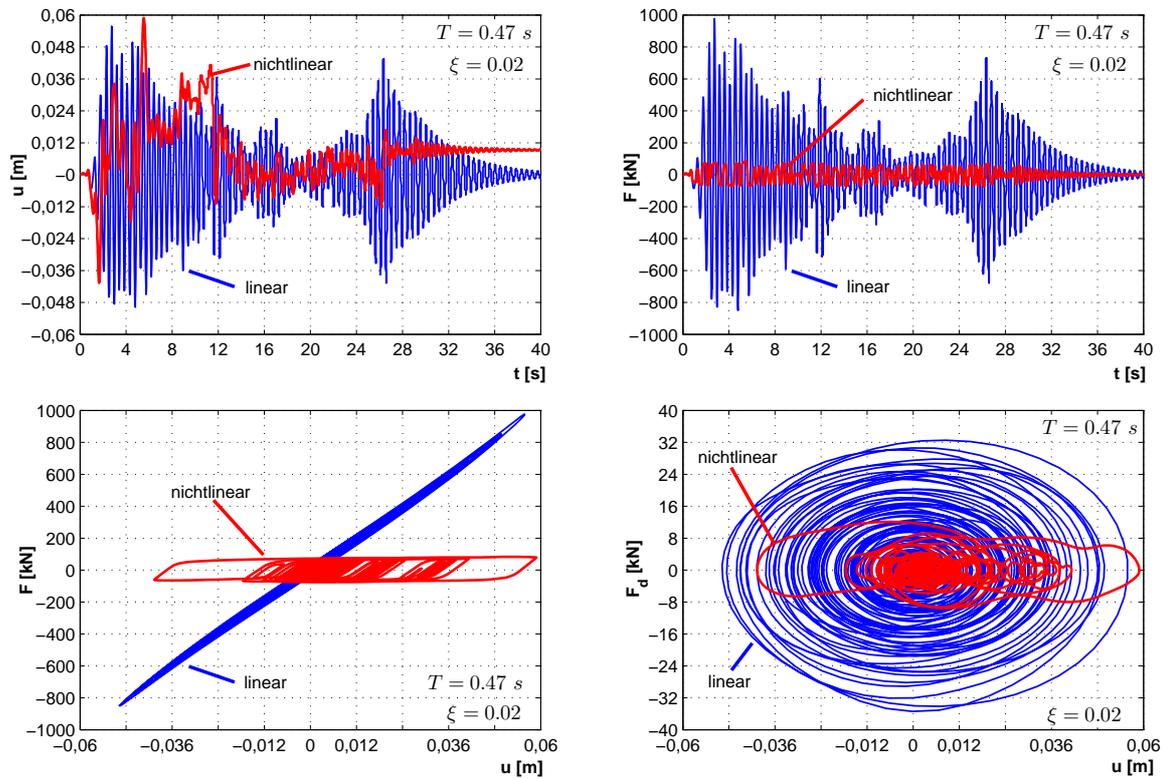


Bild 3.5: Funktionsprinzip von Dissipations-Elementen

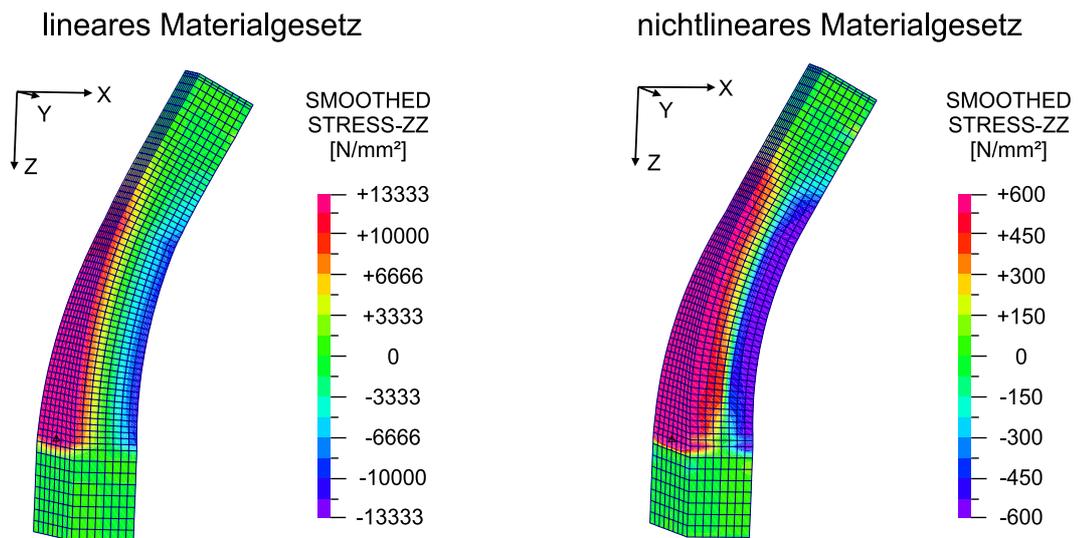
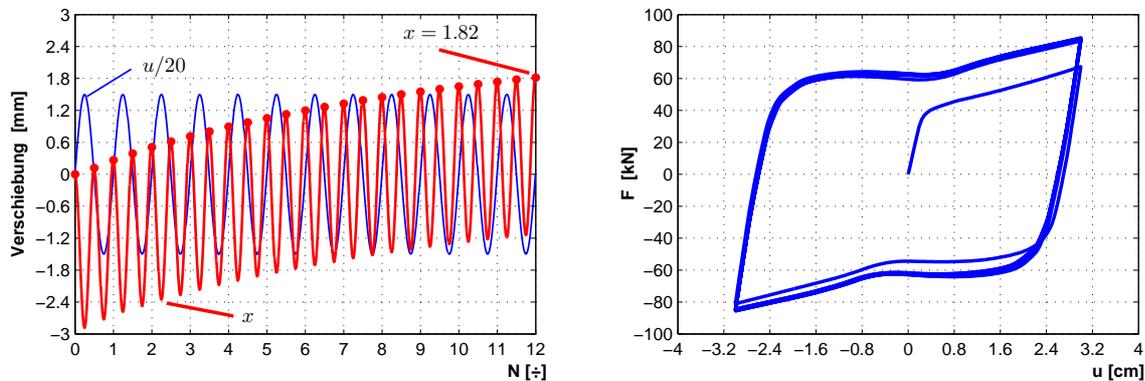


Bild 3.6: Maximalbeanspruchungen der Hysterese-Elemente in Form von Längsspannungen in Richtung der x-Achse

klischen Entfestigung. Der Einfluss der Dehnraten kann hingegen für einen Frequenzbereich  $1 \text{ Hz} \leq f \leq 1000 \text{ Hz}$  für übliche Stähle im Gegensatz zu Leichtmetalllegierungen vernachlässigt werden [102].

Ein weiterer Aspekt, der bei der Auslegung von Stahl-Hysterese-Elementen zu beachten ist, resultiert aus der durch die wiederkehrende Belastungsumkehr bedingten Längung des Elements, die einen gewissen vorzuhaltenden Platzbedarf erfordert. In Bild 3.7 sind die Ergebnisse einer entsprechenden FE-Analyse dargestellt, in der die Elementlänge für eine über insgesamt zwölf Schwingspiele  $N$  aufrecht erhaltene sinusförmig eingeprägte Relativverschiebung mit der Amplitude von  $u = 3 \text{ cm}$  berechnet wurde. Aus dieser übliche Erdbeben übertreffenden Wegbeanspruchung resultiert eine Längung des Elements in der Höhe von etwa  $x = 1.82 \text{ mm}$ , die am Einbauort entsprechend konstruktiv zu berücksichtigen wäre.

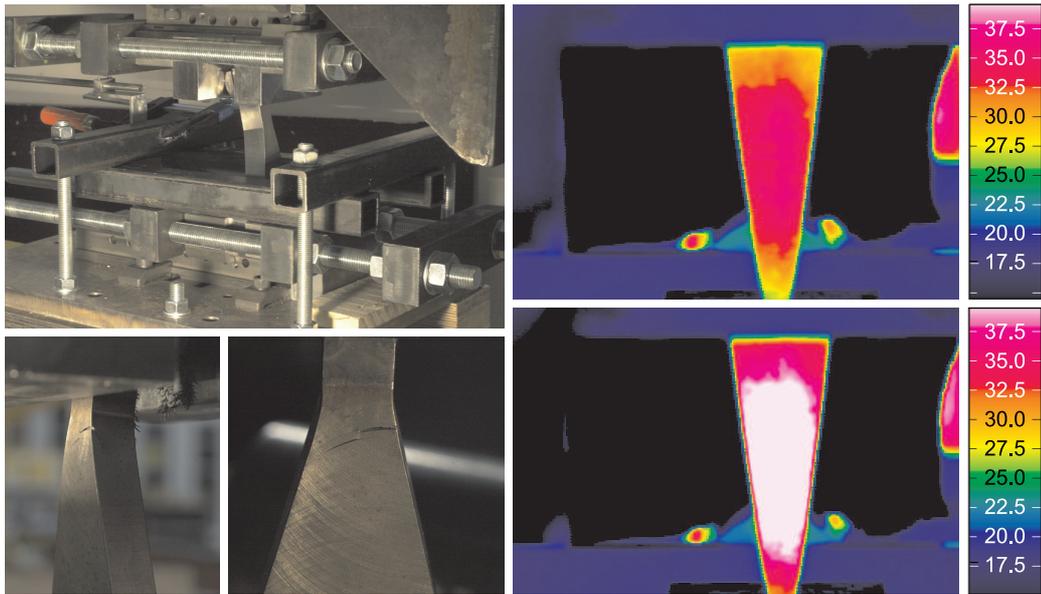


**Bild 3.7:** Stahl-Hysterese-Element mit eingepprägter sinusförmiger Kopfverschiebung  $u$

In Bild 3.8 sind exemplarisch Ausschnitte der Versuche an von der Firma MAURER SÖHNE hergestellten Stahl-Hysterese-Elementen dargestellt, die im Rahmen des LESSLOSS Forschungsprojekts [80] an der Universität der Bundeswehr München durchgeführt wurden.

Anhand der mit den Belastungszyklen zunehmenden Temperaturentwicklung lässt sich die gleichmäßig über das Element verteilte Plastifizierung bestätigen. Für die sinusförmige, mit Amplituden von  $u = 4.5 \text{ cm}$  aufgebrachte Kopfverschiebung wurden maximale Temperaturen von etwa  $T_{max} = 50^\circ\text{C}$  gemessen. Ein Einfluss auf die Materialparameter und damit auf die Dissipationswirkung kann in der Folge auch für fortschreitende Belastungseinwirkung ausgeschlossen werden. Zur Ermittlung der für dieses Belastungsniveau erreichbaren Kurzzeitfestigkeit wurde eines der Elemente mit derselben Wegamplitude in der Höhe von  $u = 4.5 \text{ cm}$  bis zum Bruch gefahren, der sich nach  $N = 118$  Lastspielzahlen ereignete. Dieses gewöhnliche Erdbeben weit übersteigende Belastungsszenario kann als Beleg dafür gelten, dass die Kurzzeitfestigkeit für die hier untersuchten Stahl-Hysterese-Elemente im Erdbebenfall keinen limitierenden Faktor darstellt.

In [87] ist hinsichtlich der Ausbildung und Verteilung von Hysterese-Elementen ein Verfahren angegeben, mit dem sich das Bauwerksverhalten unter Erdbebenbeanspruchung für ein frei



**Bild 3.8:** Temperaturentwicklung in Grad [C°] und Ermüdungsbruch eines auf Kurzzeitfestigkeit belasteten Stahl-Hysterese-Elements

wählbares Kriterium optimieren lässt. Diese auf so genannten genetischen Algorithmen beruhende Methode erlaubt die Auffindung der bestmöglichen Konstellation, um beispielsweise die im Fundament geweckten Horizontalkräfte oder aber die in einem bestimmten Stockwerk maximal auftretenden Beschleunigungen zu minimieren.

### 3.4 Basisisolierung

Das Grundprinzip, Gebäude zum Schutz vor Erdbeben horizontal vom Untergrund zu entkoppeln, wurde bereits frühzeitig von den Baumeistern im alten China erkannt, die zu diesem Zweck zwischen Fundament und Grundplatte eine Schicht aus rolligem Sand anordneten [97, 118]. Ebenfalls frühzeitig fand dasselbe Prinzip aber offensichtlich auch schon im stark erdbebengefährdeten Nordiran Anwendung, indem Behausungen zur Schaffung einer möglichst wirkungsvollen Gleitfuge auf einer Konstruktion aus pyramidenähnlichen Holzsockeln aufgelagert wurden [52].

Schriftlich wurde das Prinzip der seismischen Isolierung hingegen erstmals im Jahr 1870 vom Franzosen JULES TOUAILLON dargelegt, der in seinem Patent vorschlägt, Gebäude zum Schutz gegen Erdbeben auf einer ausreichenden Anzahl von Kugeln aufzulagern [98]. Mit dem 1906 vorgelegten Patent verfolgte der Münchner JAKOB BECHTOLD im Prinzip dasselbe Ziel, schlägt als Gleitschicht aber ein Kissen aus kugelförmigen Hartkörpern vor. Im Abstand von lediglich drei Jahren folgte das Patent des englischen Arztes Dr. JOHANNES A. CALANTARIENTES, das neben der seismischen Entkopplung mittels einer Talkumschicht auch Lösungsvorschläge bezüglich der flexiblen Ausgestaltung von Leitungsanschlüssen enthält [90]. Im weiteren Sinne erstmals rea-

lisiert wurde diese Bauweise dann von dem Architekten FRANK LLOYD WRIGHT, der im Jahr 1921 den Neubau des Imperial Hotels in Tokio auf eine (3m mächtige) Schicht Weichboden gründete. Tatsächlich überstand das Gebäude im Gegensatz zu vielen anderen das darauf folgende schweren Erdbeben von Tokio 1923 weitgehend unbeschadet [67, 103].

Aus heutiger Sicht wurde die Erdbebenisolierung im engeren Sinne erstmals mit dem Bau der Pestalozzi-Schule in Skopje, Mazedonien realisiert, die dafür auf speziell zu diesem Zweck gefertigte, jedoch unbewehrte Elastomerkissen aufgelagert wurde. Zur Anhebung der vertikalen Steifigkeit und der damit einhergehenden verminderten Kippneigung des Gebäudes wurden diese zu einem späteren Zeitpunkt durch Elastomerlager mit entsprechend einvulkanisierten Stahlblechen ersetzt [112].

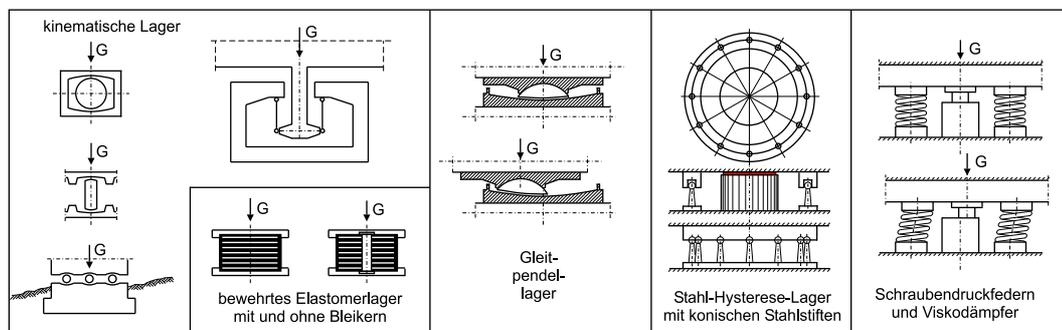
Zwischenzeitlich wurde eine Vielzahl weiterer Systeme zum Zweck der Erdbebenisolierung entwickelt und vorgeschlagen, die sich grob den folgenden Klassen zuordnen lassen:

- **Kinematische Lager:** Auf kinematischen Mechanismen beruhende Systeme, wie z.B. abgehängte Fundamente oder auf Kugeln basierende Lager, die zur Erzielung einer ggf. gewünschten Rückstellwirkung zusätzlich in konkav gekrümmte Gegenflächen eingebettet sein können. Als Vorteil hierbei erweist sich die Tatsache, dass sich die Systemeigenfrequenz unabhängig von der Auflast einstellen lässt. Zumeist scheiden solche Systeme aufgrund der begrenzt erreichbaren Tragkapazität dennoch aus, da die punktuelle Kräfteinleitung in Form von HERTZ'schen Pressungen [36, 93] sowie die aufwendigen baulichen Durchbildungen nur vergleichsweise geringe vertikale Lastabtragungen erlauben.
- **Lagerung auf Spiral- und Luftfedern:** Grundsätzlich sind die Anforderungen der Erdbebenisolierung durch solche Systeme zwar erfüllt, aufgrund der geringen vertikalen Steifigkeit und der nur unzureichenden Sicherheit gegen Stabilitätsversagen sind diese aber eher zum Schutz von Sekundäreinrichtungen geeignet [95].
- **Elastomerlager ohne und mit Bleikern:** Diese Form der Lager vereint die Rückstellfunktion mit der Dämpfungswirkung in einem Bauteil und ist entsprechend weit verbreitet. Vom neuseeländischen Forscher W. ROBINSON stammt der auf das Jahr 1977 zurückgehende Vorschlag, zur Steigerung der Dissipationskapazität zusätzlich ein oder mehrere Bleikerne innerhalb des Lagers anzuordnen. Alternativ dazu wurden von malaysischen Forschern Ende der siebziger Jahre so genannte hochdämpfende Elastomere entwickelt, mit denen sich Dämpfungsgrade bis zu Werten in der Höhe von  $\xi = 14\%$  und höher erzielen lassen [19]. Als Nachteil sind hingegen die Temperaturabhängigkeit und die fortschreitende Materialalterung zu nennen. Beispielsweise sind in [10] Versuche beschrieben, in denen der Schubmodul  $G$  unter künstlicher Alterung um 56% zugenommen und die Dämpfung  $\xi$  um -18% abgenommen hat. Das Verhalten von Elastomerlagern unter Zugbeanspruchung wurde unter anderem von MANO eingehend untersucht, der ein Rechenmodell entwickelt

hat, mit dem sich der für diesen Zustand rasch einstellende Steifigskeitsabfall nachvollziehen lässt [76].

- **Lagerung auf Gleitflächen:** Zwar gelingt eine einwandfreie horizontale Entkopplung, es fehlt hingegen jegliche Rückstellkapazität. In Kombination mit Stahl-Hysterese-Dämpfern werden Gleitlager dennoch häufig eingesetzt.
- **Lagerung auf Gleitpendellagern:** Der systembedingte Nachteil der fehlenden Rückstellkapazität von ebenen Gleitflächen wird durch die Ausbildung der Lager mit konkav gekrümmten Grundflächen und aufgesetztem Gleitschuh aufgehoben. Ausführlicher wird die exakte Funktionsweise von Gleitpendellagern in Kapitel 4 behandelt.

Zur Erläuterung der vorangegangenen Aufzählung sind in Bild 3.9 beispielhaft einige zur Erdbebenisolierung entwickelte Systeme dargestellt.



**Bild 3.9:** Verschiedene Mechanismen für die Erdbebenisolierung

Gemäß der in [89] gegebenen Empfehlungen sind Bauwerke für die Anwendung der Erdbebenisolierung dann besonders gut geeignet, wenn sie folgende Eigenschaften aufweisen:

- Der unmittelbare Untergrund am Standort verursacht keine ausgeprägten Bodenbewegungen im langperiodischen Bereich, wie das beispielsweise in MEXICO CITY der Fall ist.
- Das Bauwerk besteht aus mehr als zwei Stockwerken oder weist ein vergleichsweise hohes Gewicht auf.
- Bauwerke, die sich über weniger als etwa zwölf bis fünfzehn Stockwerke erstrecken, da darüber hinaus üblicherweise bereits ausreichend niedrige Eigenperioden erhalten werden.
- Relative Bewegungsamplituden in der Größenordnung von etwa  $u \approx 20.32 \text{ cm}$  sind bautechnisch realisierbar, vorausgesetzt diese werden nicht durch Nachbargebäude behindert.
- Die sonst einwirkenden horizontalen Lasten wie beispielsweise aus Wind erreichen eine maximale Größenordnung, die in etwa 10% des Eigengewichts der Struktur nicht überschreitet.

Der Vollständigkeit halber sei noch eine den Prinzipien der eigentlichen Erdbebenisolierung ebenfalls zuzuordnende Methode erwähnt, die in Form der so genannten Kipp-Systeme (engl.: rocking isolation systems) in Neuseeland entwickelt wurde [90]. Dazu werden die im Erdbebenfall am Fundament schlanker Strukturen wechselseitig wirkenden abhebenden Kräfte bewusst dazu genutzt, gewisse schaukelnde Kippbewegungen zuzulassen. Die damit nach Überschreiten des Kippmomentes einhergehende schlagartige Abnahme der Eigenfrequenz führt bei gleichzeitiger Zunahme der Bewegungsamplituden zur gewünschten Reduzierung der Erdbebenreaktionskräfte [64]. Das Prinzip wurde unter anderem bei der im Jahr 1981 errichteten Eisenbahnbrücke “South Rangitikei Railway Bridge“ umgesetzt, deren Lagerausbildung ein Abheben der zweiteilig ausgeführten Pfeiler von den Fundamenten erlaubt. Um die Kippbewegungen während eines potentiellen Erdbebens auf ein tolerierbares Maß zu begrenzen, wurden zwischen Fundament und Pfeiler zusätzlich speziell für diesen Zweck entwickelte Dissipations-Elemente angeordnet [72].

Generell besteht die Funktionsweise der Basisisolierung also darin, die starre horizontale Kopplung des Bauwerks zum Untergrund aufzulösen und mit Hilfe der zuvor beschriebenen Lagerungskonzepte in eine in ihrer Federwirkung möglichst weiche Horizontalhalterung umzuwandeln. Eine gewisse Reststeifigkeit ist jedoch notwendig, um die sichere Lastabtragung der neben dem Erdbebenfall sonst noch auftretenden Horizontallasten zu gewährleisten. Solche nichtseismischen Gebrauchslasten werden üblicherweise durch Windeinwirkungen oder im Fall von Brücken zusätzlich durch Bremsvorgänge hervorgerufen. Die hinsichtlich der Erdbebenbeanspruchung positive Wirkung der Basisisolierung auf Bauwerke lässt sich besonders anschaulich anhand der in Kapitel 2.4.8 eingeführten Antwortspektren verdeutlichen. Dazu wird zunächst der durch die nachfolgend aufgeführten Systemparameter definierte Einfreiheitsgradschwinger betrachtet:

- Masse:  $m = 10\,000\text{ kg}$
- Steifigkeit:  $k = 10\,625\,080\frac{\text{N}}{\text{m}}$
- Eigenkreisfrequenz:  $\omega = 32.596\frac{1}{\text{s}}$
- Dämpfungsgrad:  $\xi = \frac{d}{2 \cdot m \cdot \omega} = 0.05\text{ (5\%)}$
- Dämpfungskoeffizient:  $d = 32\,596\frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
- gedämpfte Eigenkreisfrequenz:  $\omega_d = 32.555\frac{1}{\text{s}}, \Rightarrow f_d = 5.181\text{ Hz}, \Rightarrow T_d = \frac{1}{f} = 0.193\text{ s}$

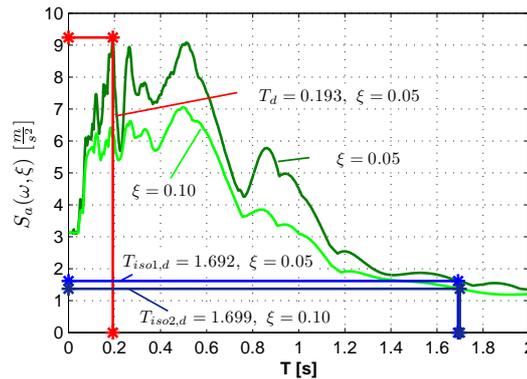
Gemäß dem in Bild 2.35 für einen Dämpfungsgrad von  $\xi = 0.05$  ermittelten Antwortspektrum lässt sich die durch den Erdbebenverlauf maximal hervorgerufene Absolutbeschleunigung des vorliegenden Einfreiheitsgradschwingers in der Höhe von  $S_a(\omega, \xi) = \max|\ddot{y}(\omega, \xi, t)| = 9.238\text{ m/s}^2$  ablesen. Durch das Hinzufügen einer die Basisisolierung charakterisierenden zusätzlichen Horizontalfeder mit der linearen Steifigkeit von  $k_{basis} = 140\,000\frac{\text{N}}{\text{m}}$  lässt sich die Eigenperiode des

Einfreiheitsgradschwingers in einen Bereich des Antwortspektrums verschieben, der für dasselbe Erdbeben offensichtlich einen wesentlich geringeren Energieeintrag in die Struktur zur Folge hat, siehe Bild 3.10. Durch die zusätzlich in Reihe angeordnete Horizontalfeder ändern sich die Systemparameter des Einfreiheitsgradschwingers wie folgt:

- Masse:  $m_{iso1} = 10\,000\text{ kg}$
- Steifigkeit:  $k_{iso1} = \frac{1}{\frac{1}{10\,625\,080 \frac{N}{m}} + \frac{1}{140\,000 \frac{N}{m}}} = 138\,179 \frac{N}{m}$
- Eigenkreisfrequenz:  $\omega_{iso1} = 3.717 \frac{1}{s}$ ,
- Dämpfungsgrad:  $\xi_{iso1,d} = \frac{d_{iso1}}{2 \cdot m_{iso1}} \cdot \omega_{iso1} = 0.05$  (5 %)
- Dämpfungskoeffizient:  $d_{iso1} = 3\,717 \frac{N}{m/s}$
- gedämpfte Eigenkreisfrequenz:  $\omega_{iso1,d} = 3.713 \frac{1}{s}$ ,  $\Rightarrow f_{iso1,d} = 0.591\text{ Hz}$ ,  $\Rightarrow T_{iso1,d} = 1.692\text{ s}$

Die infolge der Erdbebenisolierung resultierende maximale Absolutbeschleunigung lässt sich wiederum aus dem entsprechenden Antwortspektrum ablesen und erreicht mit  $S_a(\omega, \xi) = \max|\ddot{y}(\omega, \xi, t)| = 1.616\text{ m/s}^2$  nunmehr eine wesentlich geringere Größenordnung. Mit der durch die vorgenommene Systemänderung bewirkten Periodenverschiebung ist offensichtlich eine Reduzierung der Erdbebenbeanspruchung auf 17.47 % des ursprünglichen Wertes gelungen. Durch Anheben des zuvor unverändert belassenen Dämpfungsgrades von  $\xi_{iso1,d} = 0.05$  auf  $\xi_{iso2,d} = 0.1$  kann die maximal hervorgerufene Absolutbeschleunigung um weitere 15.3 % auf  $S_a(\omega, \xi) = \max|\ddot{y}(\omega, \xi, t)| = 1.369\text{ m/s}^2$  reduziert werden. Unter Verwendung des Dämpfungs-Korrekturbeiwert gemäß Gleichung (2.167) wird mit  $S_a(\omega, \xi) = \sqrt{\frac{0.10}{0.05+0.10}} \cdot 1.616 = 1.319\text{ m/s}^2$  eine ähnliche Größenordnung erhalten.

- Masse:  $m_{iso2} = 10\,000\text{ kg}$
- Steifigkeit:  $k_{iso2} = \frac{1}{\frac{1}{10\,625\,080 \frac{N}{m}} + \frac{1}{140\,000 \frac{N}{m}}} = 138\,179 \frac{N}{m}$
- Eigenkreisfrequenz:  $\omega_{iso2} = 3.717 \frac{1}{s}$
- Dämpfungsgrad:  $\xi_{iso2,d} = \frac{d_{iso2}}{2 \cdot m_{iso2}} \cdot \omega_{iso2} = 0.10$  %
- Dämpfungskoeffizient:  $d_{iso2} = 7\,434 \frac{N}{m/s}$
- gedämpfte Eigenkreisfrequenz:  $\omega_{iso2,d} = 3.699 \frac{1}{s}$ ,  $\Rightarrow f_{iso2,d} = 0.589\text{ Hz}$ ,  $\Rightarrow T_{iso2,d} = 1.699\text{ s}$



**Bild 3.10:** Belastungsreduzierung durch Periodenverschiebung im Antwortspektrum

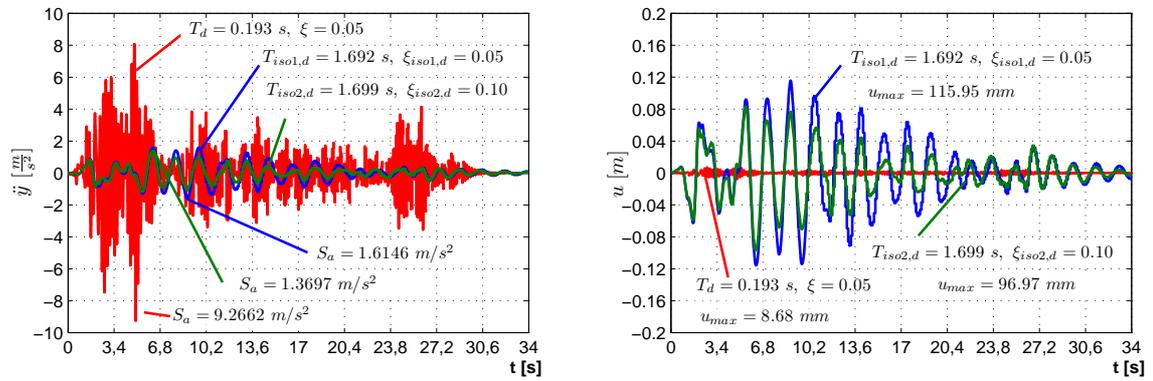
Mit Hilfe des in Kapitel 2.4.8 unter Vernachlässigung des Dämpfungswirkung hergeleiteten Zusammenhangs zwischen den Maxima der Absolutbeschleunigung  $S_a(\omega, \xi) = \max|\ddot{y}(\omega, \xi, t)|$  und der Relativverschiebung  $S_d(\omega, \xi) = \max|u(\omega, \xi, t)|$  lassen sich auch die durch das Erdbeben maximal hervorgerufenen Wegamplituden der einzelnen Systeme unmittelbar angeben, siehe Tabelle 3.1.

**Tabelle 3.1:** Vergleich der Systemantwort mit und ohne Erdbebenisolierung

System		Antwortspektrumverfahren		NEWMARK-Verfahren	
$T_d$	$\xi$	$S_a = \ddot{y}_{max}$	$S_d = u_{max}$	$S_a = \ddot{y}_{max}$	$S_d = u_{max}$
$T_d = 0.193 \text{ s}$	$\xi = 0.05$	$9.238 \frac{m}{s^2}$	$8.69 \text{ mm}$	$9.2662 \frac{m}{s^2}$	$8.68 \text{ mm}$
$T_{iso1,d} = 1.692 \text{ s}$	$\xi = 0.05$	$1.616 \frac{m}{s^2}$	$122.45 \text{ mm}$	$1.6146 \frac{m}{s^2}$	$115.95 \text{ mm}$
$T_{iso2,d} = 1.699 \text{ s}$	$\xi = 0.10$	$1.369 \frac{m}{s^2}$	$99.07 \text{ mm}$	$1.3697 \frac{m}{s^2}$	$96.97 \text{ mm}$

Werden die durch das Beben geweckten zeitlichen Reaktionsverläufe der jeweiligen Systeme mit Hilfe des Newmark-Verfahrens berechnet, lassen sich die aus dem Antwortspektrum erhaltenen Ergebnisse bestätigen.

Im Unterschied zum Antwortspektrenverfahren lässt sich anhand der in Bild 3.11 dargestellten zeitlichen Verläufe aber nicht nur die maximale Beschleunigungsantwort, sondern auch deren zeitliche Zuordnung nachvollziehen. Offensichtlich treten die maximalen durch ein Beben verursachten Beanspruchungen systemabhängig durchaus zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf. Weiterhin wird ersichtlich, dass die durch die Erdbebenisolierung günstige Entkopplungswirkung erwartungsgemäß mit einer Zunahme der Relativverschiebungen zwischen Bauwerk und Gründung einhergeht. In gewissen Grenzen lässt sich durch die bewusste Anhebung der Systemdämpfung aber neben einer weiteren Reduzierung der Erdbebenbeanspruchung auch die zu erwartende maximale Relativverschiebung begrenzen.



**Bild 3.11:** Zeitverlaufsberechnung der einzelnen Systeme mit und ohne Basisisolierung

## Kapitel 4

# Erdbebenisolierung mit Gleitpendellagern

### 4.1 Allgemeines

Die vorrangige Aufgabe der Erdbebenisolierung besteht, wie bereits in Kapitel 3.4 erläutert, in der horizontalen Entkopplung des betreffenden Bauwerks vom Untergrund. Darüberhinaus sind an die seismische Isolierung jedoch noch weitere Anforderungen zu stellen. So ist die vertikale Lastabtragung ebenso zu gewährleisten wie die Aufnahme horizontaler Lasten, die bei üblichen Hochbauten beispielsweise in Form von Windeinwirkungen oder bei Brücken in Form von Brems- und Zentripetalkräften vorliegen. Die horizontale Entkopplung sollte folglich allein im außergewöhnlichen Lastfall der Erdbebenbeanspruchung aktiviert werden, während die sichere Krafteinleitung der zuvor aufgeführten horizontalen Verkehrslasten ohne Hervorrufen von Relativverschiebungen in den Baugrund erfolgen sollte. Gleichzeitig sind jedoch nennenswerte Zwängungen infolge von Temperatureinwirkungen sowie aus Kriech- und Schwindvorgängen möglichst zu vermeiden. Insbesondere im Fall der seismischen Isolierung von Brücken wird dieser Widerspruch durch den Einsatz von speziell für diesen Zweck entwickelte Vorrichtungen zur Stoßübertragung, im englischen als **Shock Transmission Units**, kurz STUs bezeichnet, gelöst [34]. Hierzu werden die gänzlich unterschiedlich vorhandenen Verformungsgeschwindigkeiten der jeweiligen Einwirkungsklassen genutzt. Zwangseinwirkungen mit niedrigen Geschwindigkeiten im Bereich von  $v_1 \leq 1,0 \text{ mm/s}$  werden durch diese Vorrichtungen nahezu ohne Reaktionskräfte übertragen, während die Bewegungsfreiheit bei hohen Einwirkungsgeschwindigkeiten im Bereich von  $v_2 \geq 0,1 \text{ mm/s}$  wie im Fall von Erdbeben vollständig blockiert wird.

In Bezug auf die Lastabtragung der horizontalen Gebrauchslasten in der Isolierungsschnittstelle ist zu beachten, dass die in den Gleitpendellagern vorhandene Reibwirkung gemäß derzeitiger europäischer Normenlage hierfür nicht in Ansatz gebracht werden darf DIN EN 15129, Punkt 8.3.1.2.5 [30], bzw. DIN EN 1337-2, Punkt 6.7 [29].

Um die im Erdbebenfall auftretenden Relativverschiebungen zwischen Bauwerk und Fundament zu begrenzen und zudem eine hohe Energiedissipation zu erreichen, ist weiterhin eine hohe Dämpfungskapazität der seismischen Isolierung anzustreben. Diese sollte möglichst unbeeinträchtigt von der Wärmeentwicklung und weitestgehend unempfindlich gegenüber alternierenden Bewegungen sein. Keinesfalls sollten einzelne Bestandteile aufgrund des Erreichens der Kurzzeitfestigkeit frühzeitig versagen. Da das Auftreten von mittelschweren bis schweren Erdbeben ein im Vergleich zu den sonstigen Verkehrslasten äußerst seltenes Ereignis darstellt, ist die Funktionsweise des zum Einsatz kommenden Systems für ein möglichst langes und im Idealfall wartungsfreies bzw. wartungsarmes Zeitintervall auszulegen. Die Wirksamkeit des Systems muss für den Bedarfsfall auf jeden Fall sichergestellt sein [97].

Sowohl in Hinsicht auf potentielle Folgebeben wie auch insbesondere auf das Reaktionsverhalten während des Erdbebens selbst kommt einer ausreichenden Rückstellwirkung der Erdbebenisolierung besondere Bedeutung zu [79]. Zum einen wird hierdurch einer möglicherweise für Folgebeben ungünstig verbleibenden Ausgangslage des Systems begegnet, zum anderen wird einem schrittweisen Herauswandern aus der Sollage während des Bebens entgegengewirkt. Ein weiterer ggf. nicht zu vernachlässigender Aspekt resultiert aus den bewußt zugelassenen Relativverschiebungen in der Entkopplungsebene. Die hierdurch nach Theorie II. Ordnung zusätzlich geweckten Abtriebskräfte sind bei der Tragwerksauslegung entsprechend zu beachten.

In nachfolgender Aufzählung sind die wesentlichen Anforderungen an eine seismische Isolierung von Bauwerken nochmals kurz zusammengefasst:

- Horizontale Entkopplung der baulichen Struktur.
- Sichere Abtragung der Vertikallasten.
- Dämpfungswirkung bzw. Fähigkeit zur Energiedissipation.
- Rückstellwirkung bzw. Fähigkeit zur Rezentrierung.
- Ausreichende Stützwirkung zur Aufnahme der allgemein wirkenden horizontalen Gebrauchslasten.
- Ausgleich horizontaler Zwangsverformungen infolge von z.B. Temperatureinwirkungen.

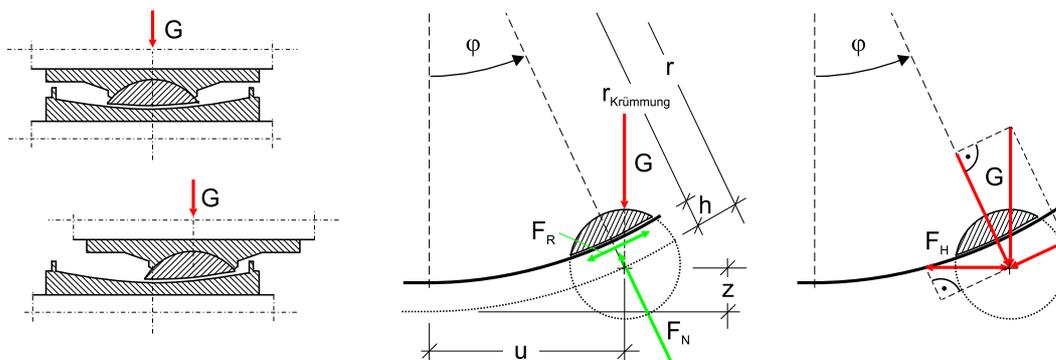
## 4.2 Genereller Aufbau und Funktionsweise

Die ursprüngliche Ausführung des Gleitpendellagers stellt eine Abwandlung des im Bauingenieurwesen bekannten Kalottenlagers dar und sieht im Wesentlichen zwei Lagerschalen mit dazwischen geschaltetem Gleitschuh vor. Der Gleitschuh entspricht hierbei der Kalotte des Kalottenlagers und wird durch eine entsprechend kugelförmige Aussparung in einer der beiden

Lagerplatten seitlich gehalten, ohne die rotatorischen Freiheitsgrade zu behindern. Die entgegengesetzt gerichtete Lagerplatte, im Folgenden als Gleitlagerplatte bezeichnet, ist im Gegensatz zum herkömmlichen Kalottenlager nicht eben, sondern konkav gekrümmt ausgebildet. In der Folge führt eine planparallele, horizontaltransversale Verschiebung der Lagerplatten untereinander zu einer vertikalen Höhenänderung der oberen Lagerschale. Aufgrund der hierdurch geweckten Hangabtriebskraft, die eine Funktion der Gleitlagerschalenkrümmung darstellt, wird die für die Erdbebenisolierung notwendige Rückstellwirkung erzielt.

Für die zuvor beschriebene Kinematik ist folglich die relative Verschieblichkeit der Kontaktflächen zwischen dem Gleitschuh und den Lagerplatten Voraussetzung. Die hierdurch in Abhängigkeit der jeweiligen Reibkoeffizienten  $\mu$  hervorgerufene Energiedissipation stellt eine positive Eigenschaft des Gleitpendellagers dar, da hierdurch eine weitere Reduzierung der durch das Erdbeben in das Bauwerk eingebrachten Energie erfolgt. Die betragsmäßige Größe der durch diesen Vorgang in Wärme umgewandelten bzw. zerstreuten Energie ist dabei maßgeblich von den verwendeten Reibpartnern abhängig und wird ferner durch die Kontaktflächenpressung, den Temperaturverlauf sowie die Reibgeschwindigkeit beeinflusst. Üblicherweise werden für die Oberflächen der Lagerplatten austenitische, polierte Edelstahlbleche und für den Gleitschuh selbst schmierende Verbundgleitlagerwerkstoffe auf PTFE-Basis verwendet [97].

In Bild 4.1 ist der exemplarische Aufbau eines Gleitpendellagers im Schnitt sowohl im zentrierten Ausgangszustand als auch im ausgelenkten Zustand dargestellt. Da die Anordnung der Lagerplatten im eingebauten Zustand zueinander für die Funktionsweise ohne Belang ist, sollte die Gleitlagerschale mit der konkav gekrümmten Gleitfläche sinnvollerweise nach unten zeigen, um einer eventuellen Verschmutzung insbesondere während des Einbauvorgangs vorzubeugen. Aufgrund der zugänglicheren Darstellung des mechanischen Systems ist das Gleitpendellager abweichend von der zuvor gegebenen Empfehlung in Bild 4.1 mit unten liegender Gleitlagerschale dargestellt.



**Bild 4.1:** Schematischer Aufbau des Gleitpendellagers im zentriertem sowie im ausgelenkten Zustand

### 4.2.1 Kinematik des Pendelschwingers

Bevor in Kapitel 4.2.3 näher auf die kinematischen Zusammenhänge des eigentlichen Gleitpendellagers eingegangen wird, wird zunächst die ebene Bewegung des so genannten mathematischen Pendels hergeleitet. Das auch als Fadenpendel bezeichnete mathematische Pendel ist durch die am Ende befindliche Punktmasse  $m$  sowie die masselose und undeformable Verbindung zur Aufhängung charakterisiert. Dagegen wird bei dem so genannten physikalischen Pendel zusätzlich auch das Massenträgheitsmoment  $J_S$  in der Bewegungsgleichung mit berücksichtigt.

Die geometrischen Zusammenhänge des eben schwingenden Pendels sowie die jeweils einwirkenden Kräfte sind in Bild 4.2 dargestellt.

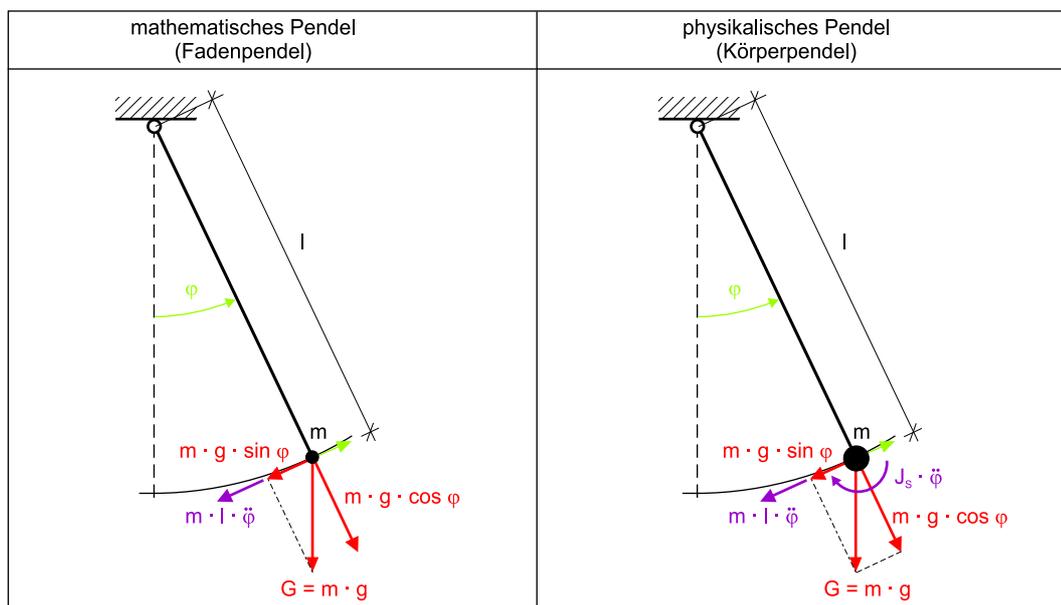


Bild 4.2: Ebene Bewegung des Pendelschwingers

Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendelschwingers in Richtung der Bahnkurve ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht zwischen der rücktreibenden Komponente der Gewichtskraft  $F_g = m \cdot g \cdot \sin \varphi$  und der aufgrund der Beschleunigung geweckten Trägheitskraft  $F_a = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}$ .

$$m \cdot g \cdot \sin \varphi + m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (4.1)$$

Mit Einführung der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$  vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \sin \varphi = 0 \quad (4.2)$$

Aus der Reihenentwicklung der Sinus-Funktion ( $\sin \varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots$ ) wird deutlich, dass die Näherung ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ), kleine Auslenkungswinkel  $\hat{\varphi}$  vorausgesetzt, ausreichend genaue Ergebnisse

liefert. In diesem Fall lässt sich die Gleichung (4.2) wie folgt linearisieren:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0 \quad \text{falls} \quad \varphi \ll 1 \quad (4.3)$$

Solange die Auslenkungen also eine gewisse Größenordnung nicht überschreiten, ist die Pendeleigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{g}{l}$  und damit die zugehörige Pendelschwingdauer  $T_0$  offensichtlich allein eine Funktion der Pendellänge  $l$  und der Erdbeschleunigung  $g$ . Die aus der nichtlinearen Gleichung (4.2) tatsächlich zusätzlich vorhandene Amplitudenabhängigkeit zeigt sich erst ab Auslenkungswinkeln in der Größenordnung von etwa  $\hat{\varphi} \geq 45^\circ$ . Eine Abhängigkeit zur Pendelmasse  $m$  besteht bei dämpfungsfreien Systemen hingegen generell nicht. Bezogen auf die linearisierte Eigenperiode  $T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ , gibt die Tabelle 4.1 den prozentualen Zuwachs der tatsächlichen Schwingdauer für verschiedene Auslenkungswinkel wieder [94].

**Tabelle 4.1:** Eigenperiodenzunahme des Pendelschwingers in Abhängigkeit des Auslenkungswinkels  $\hat{\varphi}$

Auslenkwinkel $\hat{\varphi}$	Eigenperiodenzunahme auf $T_0$ bezogen
$\hat{\varphi} = 5^\circ$	0.048 %
$\hat{\varphi} = 10^\circ$	0.191 %
$\hat{\varphi} = 30^\circ$	1.741 %
$\hat{\varphi} = 45^\circ$	4.000 %
$\hat{\varphi} = 180^\circ$	$\infty$ %

Soll nun zusätzlich zur Trägheitswirkung  $m \cdot g \cdot \varphi$  auch die Wirkung des Massenträgheitsmoments um den Schwerpunkt  $I_S \cdot \ddot{\varphi}$  der Pendelmasse mit berücksichtigt werden, führt dies auf die Bewegungsgleichung des so genannten physikalischen Pendels. Die Gleichung lässt sich aus der Momentengleichgewichtsbetrachtung um den Aufhängepunkt leicht herleiten.

$$m \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot l + m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \cdot l + I_S \cdot \ddot{\varphi} = 0 \quad (4.4)$$

$$m \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot l + (m \cdot l^2 + I_S) \cdot \ddot{\varphi} = 0 \quad (4.5)$$

Der Term  $(m \cdot l^2 + I_S)$  definiert hierbei das auf den Aufhängepunkt bezogene Massenträgheitsmoment  $I_0$ . Die Gleichung lässt sich damit wie folgt umformen:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot l}{I_0} \cdot \sin \varphi = 0 \quad ; \quad I_0 = I_S + m \cdot l^2 \quad (4.6)$$

Bei Beschränkung auf kleine Pendelausschläge  $\hat{\varphi}$  lässt sich die Gleichung mit Hilfe der Näherung ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) wiederum wie folgt linearisieren:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \sin \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{I_0}} \quad (4.7)$$

Durch Gleichsetzen der Eigenperiode des physikalischen Pendels  $T_{phys,0} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{m \cdot g \cdot l}}$  mit der Eigenperiode des mathematischen Pendels  $T_{math,0} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_{red}}{g}}$  lässt sich eine Rechenvorschrift für die so genannte reduzierte Pendellänge  $l_{red}$  herleiten.

$$2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{m \cdot g \cdot l}} \quad \longrightarrow \quad l_{red} = \frac{I_0}{m \cdot l} = \frac{i^2 + l^2}{l} \quad (4.8)$$

mit  $i$ : Trägheitsradius des Pendelkörpers

Mithilfe dieser Gesetzmäßigkeit lässt sich jedes beliebige physikalische Pendel stets auf ein mathematisches Pendel zurückführen.

Um nun nachfolgend die strenge Lösung des nichtlinearen Pendelschwingers herzuleiten, wird zunächst die verallgemeinerte Bewegungsgleichung des nichtlinearen Schwingers betrachtet.

$$m \cdot \ddot{u} + f(u) = 0 \quad (4.9)$$

Die darin enthaltene und von der Verschiebung  $u$  nichtlinear abhängige Rückstellfunktion  $f(u)$  kann hierbei jede beliebige Form annehmen. Da diese Gleichung auf direktem Wege nicht unmittelbar gelöst werden kann, wird zunächst deren Energiebilanz betrachtet. Dazu wird die Bewegungsgleichung mit der Geschwindigkeit  $\dot{u}$  multipliziert und anschließend einmal über die Zeit  $t$  integriert.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}^2 + \int f(u) \cdot \dot{u} \, dt = const = E_0 \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}^2 + \int f(u) \cdot \frac{du}{dt} \, dt = const = E_0 \quad (4.11)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}^2}_{E_{kin}} + \underbrace{\int f(u) \, du}_{E_{pot}} = const = E_0 \quad (4.12)$$

Die Gleichung (4.12) entspricht offensichtlich dem Erhaltungssatz der Energie, demzufolge die Summe aus potentieller  $E_{pot}$  und kinetischer Energie  $E_{kin}$  bei dämpfungsfreien Systemen stets konstant bleibt. Wird der Integralterm durch den Ausdruck für die potentielle Energie  $E_{pot}$  ersetzt, kann die Gleichung (4.12) wie folgt nach der Geschwindigkeit  $\dot{u}$  aufgelöst werden:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}^2 + E_{pot} = E_0 \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}^2 = E_0 - E_{pot} \quad (4.14)$$

$$\dot{u}^2 = \frac{2}{m} \cdot (E_0 - E_{pot}) \quad (4.15)$$

$$\dot{u} = v(u) = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - E_{pot})} \quad (4.16)$$

Damit lässt sich der zeitliche Verlauf der Schwingung bestimmen, indem die gefundene Rechenvorschrift in die allgemein gültige Formel für die Geschwindigkeit  $\dot{u} = v(u)$  eingesetzt wird.

$$v(u) = \dot{u} = \frac{du}{dt} \rightarrow dt = \frac{du}{v(u)} \rightarrow t = t_0 + \int_{\hat{u}}^u \frac{du}{v(u)} \quad (4.17)$$

$$t = t_0 + \int_{\hat{u}}^u \frac{du}{\sqrt{\pm \frac{2}{m} \cdot (E_0 - E_{pot})}} \quad (4.18)$$

Unter der Voraussetzung, dass die so genannten Phasenkurven des Problems eine geschlossene Form besitzen, das Pendel also frei hin und her schwingt, resultiert die zugehörige Eigenperiode  $T(u)$  des Systems, indem die Amplitudenwerte  $\pm \hat{u}$  entsprechend als Grenzwerte in den Integralausdruck eingesetzt werden. Das Phasenbild beschreibt hierbei den Zusammenhang zwischen der Bewegungsgeschwindigkeit  $v(u)$  und der Auslenkung  $u$  des Pendels, die dazu entsprechend in ein Diagramm eingetragen werden.

$$T(u) = 2 \cdot \int_{-\hat{u}}^{+\hat{u}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - E_{pot})}} \quad (4.19)$$

Ist die Rückstellfunktion eine ungerade Funktion, die der Bedingung  $f(u) = -f(-u)$  genügt, resultiert daraus für die potentielle Energie eine gerade Funktion  $E_{pot}(u) = E_{pot}(-u)$ . Unter Ausnutzung der Symmetrie kann dann die Berechnung der Eigenperiode wie folgt vereinfacht werden:

$$T(u) = 4 \cdot \int_0^{+\hat{u}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - E_{pot})}} \quad (4.20)$$

Sollen die zuvor erläuterten Zusammenhänge nun auf die Pendelgleichung (4.2) übertragen werden, ist es vorteilhaft, diese anstatt auf die Auslenkung  $u$  auf die Winkeländerung  $\varphi$  zu beziehen. Analog zu dem zuvor erläuterten Vorgehen wird die Funktion der Rückstellkraft  $f(\varphi) = \omega_0^2 \sin \varphi$

wiederum mit der Bewegungsgröße, jedoch diesmal in Form der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ , multipliziert und anschließend einmal über die Zeit integriert.

$$(E_{pot}) = \int_0^{\varphi} \omega_0^2 \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot dt \quad (4.21)$$

$$= \int_0^{\varphi} \omega_0^2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \quad (4.22)$$

$$= \omega_0^2 \cdot [-\cos \varphi]_0^{\varphi} \quad (4.23)$$

$$(E_{pot}) = \omega_0^2 \cdot [1 - \cos \varphi] \quad (4.24)$$

Da der Ausdruck in diesem Fall nicht mehr der Dimension einer Energie entspricht, ist dieser zur Kennzeichnung entsprechend in Klammern gesetzt. Gemäß dem Prinzip der Energieerhaltung bleibt aber auch hier der Wert  $(E_0) = (E_{kin}) + (E_{pot})$  während der gesamten Schwingdauer konstant. Da zum Zeitpunkt der Schwingungsumkehr der Wert  $(E_0)$  mit dem Wert  $(E_{pot})$  identisch sind, lässt sich  $(E_0)$  leicht ermitteln, indem der Wert der maximalen Auslenkung  $\hat{\varphi}$  in die Gleichung (4.24) eingesetzt wird.

$$(E_0) = \omega_0^2 \cdot [1 - \cos \hat{\varphi}] \quad (4.25)$$

Werden die Ausdrücke für  $(E_{pot})$  und  $(E_0)$  in die Gleichung (4.16) für den Geschwindigkeitsverlauf eingesetzt, lässt sich die Winkelgeschwindigkeit des Pendels wie folgt angeben:

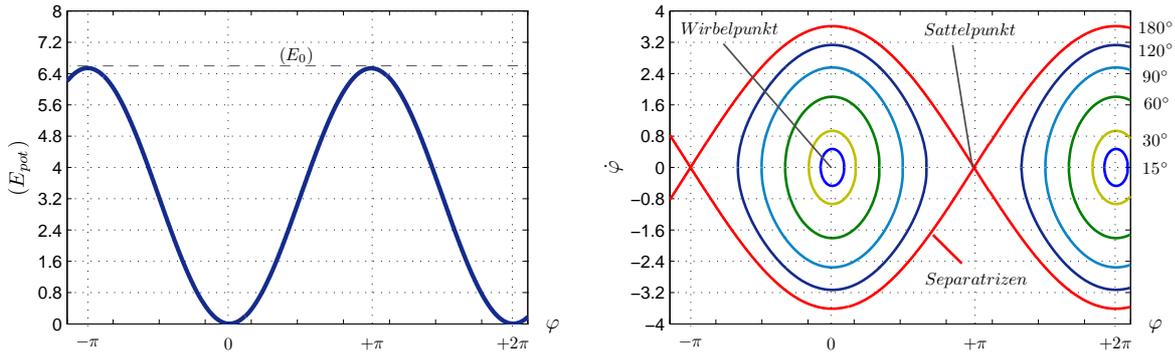
$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[ \omega_0^2 (1 - \cos \hat{\varphi}) - \omega_0^2 (1 - \cos \varphi) \right]} \quad (4.26)$$

$$= \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{m} \left[ 1 - \cos \hat{\varphi} - 1 + \cos \varphi \right]} \quad (4.27)$$

$$\dot{\varphi} = \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{m} (\cos \varphi - \cos \hat{\varphi})} \quad (4.28)$$

In Bild 4.3 sind die Energiekurve und das Phasenporträt für ein ebenes Fadenpendel mit einer Pendellänge von  $l = 3 \text{ m}$  und einer Pendelmasse von  $m = 1 \text{ kg}$  für verschiedene Auslenkungswinkel  $\hat{\varphi}$  wiedergegeben.

Für die dargestellten Auslenkungswinkel im Bereich von  $\hat{\varphi} = 15^\circ$  bis  $\hat{\varphi} = 120^\circ$  sind die Phasenkurven offensichtlich geschlossen und von elliptischer Gestalt. Die hierdurch wiedergegebene freie Pendelschwingung um die stabile Gleichgewichtslage bei  $\varphi = 0$ , mathematisch als Wirbelpunkt bezeichnet, wird durch die so genannten Separatrizen begrenzt. Diese sind dem Auslenkungswinkel  $\hat{\varphi} = 180^\circ$  zugeordnet und kennzeichnen folglich das Schwingungsverhalten eines Pendels, das



**Bild 4.3:** Energiekurve und Phasenporträt des ebenen Schwerependels

zu Beginn exakt senkrecht über seinem Aufhängepunkt steht. Sobald das Pendel diese instabile obere Gleichgewichtslage verlässt, schwingt die Masse durch die untere stabile Gleichgewichtslage durch und nähert sich wieder asymptotisch dem Ausgangspunkt. Die Nullpunkte der Separatritzen und damit die instabile obere Gleichgewichtslage können hierbei theoretisch erst nach unendlich langer Zeit erreicht bzw. verlassen werden.

Weiterhin existieren auch Phasenkurven außerhalb der Separatritzen, die in Bild 4.3 nicht dargestellt sind und die das Bewegungsmuster von sich überschlagenden Pendeln charakterisieren. Hierbei symbolisieren oberhalb der Separatritzen liegende Kurven Drehungen gegen und unterhalb der Separatritzen liegende Kurven Drehungen im Uhrzeigersinn [73].

Der zeitliche Verlauf  $t(\varphi)$  der Pendelschwingung geht wiederum aus der Gleichung (4.18) hervor. Dazu wird diese zunächst mit Hilfe des aus Gleichung (4.28) hervorgehenden Zusammenhangs  $\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 + E_{pot})} = \sqrt{\frac{2}{m}(\cos \varphi - \cos \hat{\varphi})}$  auf die Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$  bezogen und anschließend trigonometrisch wie folgt umgeformt:

$$t = t_0 + \frac{1}{\omega_0} \int_{\hat{\varphi}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm \frac{2}{m} \cdot (\cos \varphi - \cos \hat{\varphi})}} \quad (4.29)$$

Vereinfacht wird das System nachfolgend für die Anfangsbedingung  $t_0 = 0$  und für die Pendelmasse  $m = 1$  betrachtet. Aus der trigonometrischen Identität  $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\varphi)$  folgt:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\varphi) \quad (4.30)$$

$$2 \cdot \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi \quad (4.31)$$

$$\cos 2\varphi = 1 - 2 \cdot \sin^2 \varphi \quad (4.32)$$

$$\cos \varphi = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (4.33)$$

Damit lässt sich die Gleichung (4.29) wie folgt umformen:

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_{\hat{\varphi}}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\pm 2 \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1 + 2 \cdot \sin^2 \frac{\hat{\varphi}}{2})}} \cdot d\varphi \quad (4.34)$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_{\hat{\varphi}}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\pm 4 \cdot (\sin^2 \frac{\hat{\varphi}}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2})}} \cdot d\varphi \quad (4.35)$$

Nun wird die Variable  $\varphi$  mit Hilfe der Variablensubstitution  $k = \sin \frac{\hat{\varphi}}{2}$  durch die Variable  $\alpha$  ersetzt:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\hat{\varphi}}{2} \cdot \sin \alpha \quad (4.36)$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \cdot \sin \alpha \quad (4.37)$$

$$(4.38)$$

Die Integrationsgrenzen sind entsprechend an die neue Variable anzupassen:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \cdot \sin \alpha \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \alpha \quad (4.40)$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.41)$$

$$\alpha_{oben} = \arcsin\left(\frac{1}{k} \cdot \underbrace{\sin \frac{\varphi}{2}}_{k \cdot \sin \alpha}\right) \quad (4.42)$$

$$= \arcsin \cdot \sin \alpha \quad (4.43)$$

$$= \alpha \quad (4.44)$$

$$\alpha_{unten} = \arcsin\left(\frac{1}{k} \cdot \underbrace{\sin \frac{\hat{\varphi}}{2}}_k\right) \quad (4.45)$$

$$= \arcsin 1 \quad (4.46)$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (4.47)$$

Abschließend ist noch das Differential  $d\alpha$  in Bezug zum Differential  $d\varphi$  zu setzen. Dazu wird der Ausdruck  $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}\right)$  gemäß der Ableitungsregel  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  nach  $d\varphi$  differenziert und entsprechend aufgelöst:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.48)$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad (4.49)$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot k^2 \left(1 - \frac{1}{k^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (4.50)$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{4(k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2})}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (4.51)$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{4(k^2 - k^2 \cdot \sin^2 \alpha)}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (4.52)$$

$$d\varphi = \frac{d\alpha}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4(k^2 - k^2 \cdot \sin^2 \alpha)} \quad (4.53)$$

Die Gleichung (4.35) lässt sich nunmehr wie folgt in die Legendresche Normalenform eines elliptischen Integrals überführen:

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot (k^2 - k^2 \cdot \sin^2 \alpha)}} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot (k^2 - k^2 \cdot \sin^2 \alpha)}}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cdot d\alpha \quad (4.54)$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cdot d\alpha \quad (4.55)$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \cdot d\alpha \quad (4.56)$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \cdot d\alpha \quad (4.57)$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} \left[ F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \alpha) \right] \quad (4.58)$$

Das erhaltene und so genannte unvollständige elliptische Integral erster Gattung  $F(k, \alpha)$  lässt sich zwar nicht durch elementare Funktionen darstellen, jedoch ist dieses in Abhängigkeit der Hilfsgröße  $\alpha$  und des so genannten elliptischen Moduls  $k$  vertafelt [17].

Der Zeitverlauf der Pendelschwingung ist damit als Funktion der Hilfsgröße  $\alpha$  gegeben. Soll der Pendelwinkel  $\varphi(t)$  hingegen direkt auf die Zeit  $t$  bezogen werden, gelingt dies mittels der Umkehrfunktion des elliptischen Integrals  $F(k, \alpha)$ .

$$\sin \alpha = \operatorname{sn}(k, \omega_0 \cdot t) \quad (4.59)$$

bzw.:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\hat{\varphi}}{2} \cdot \operatorname{sn}(k, \omega_0 \cdot t) \quad (4.60)$$

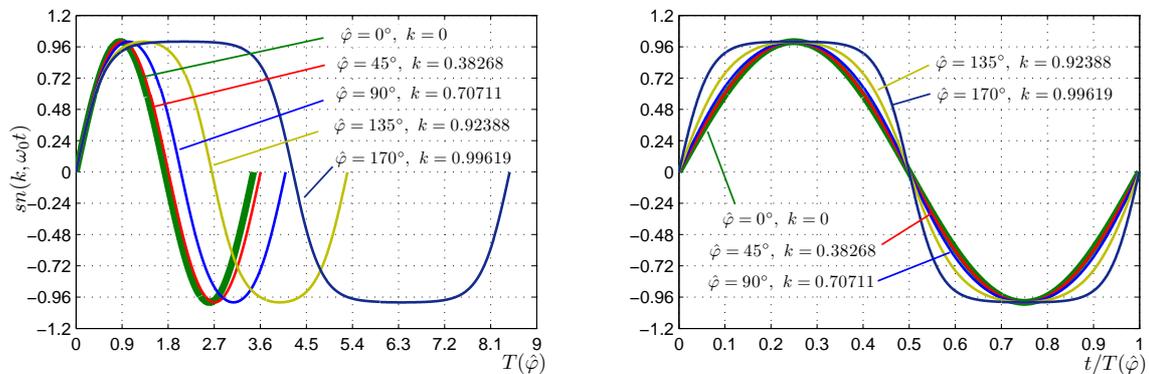
$$\varphi = 2 \cdot \arcsin \left( \sin \frac{\hat{\varphi}}{2} \cdot \operatorname{sn}(k, \omega_0 \cdot t) \right) \quad (4.61)$$

Dies führt auf den als ‘‘sinus amplitudinis‘‘ bezeichneten Ausdruck  $\operatorname{sn}(k, \omega_0 \cdot t)$ , der als Verallgemeinerung der Sinus-Funktion den so genannten Jacobischen elliptischen Funktionen zugeordnet ist. Für den Grenzwert des elliptischen Moduls  $k = 0$ ; ( $0 < k < 1$ ) geht der ‘‘sinus amplitudinis‘‘ entsprechend in die bekannte Sinus-Funktion über:

$$\operatorname{sn}(0, \omega_0 \cdot t) = \sin(\omega_0 \cdot t) \quad (4.62)$$

Die zeitlichen Verläufe des mathematischen Pendels sind für eine Pendellänge von  $l = 3 \text{ m}$  für verschiedene Werte von  $k$  bzw. verschiedene Auslenkwinkel  $\hat{\varphi}$  in Bild 4.4 dargestellt.

Von der für  $k = 0$  resultierenden Sinus-Funktion ausgehend nehmen die Verläufe für ansteigende Werte von  $k$  zunehmend fülligere Formen an.



**Bild 4.4:** Verläufe der elliptischen Funktion  $\operatorname{sn}(k, \omega_0 \cdot t)$  in Abhängigkeit des Auslenkwinkels

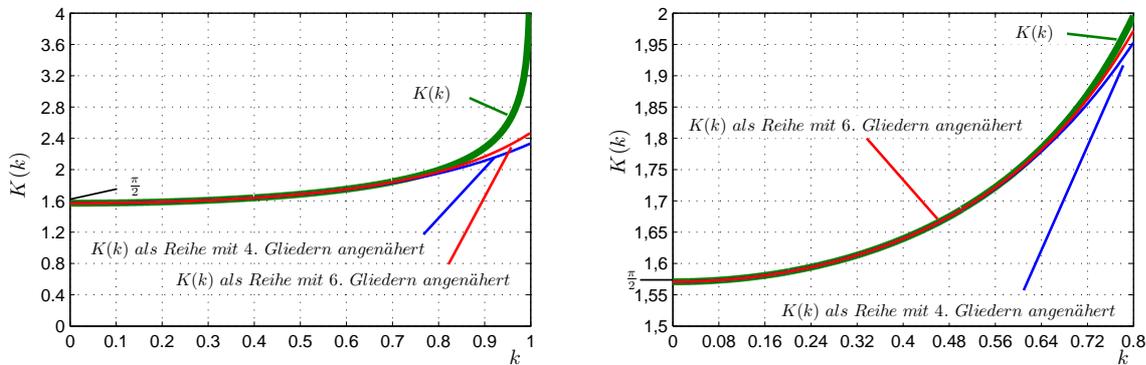
Um die Schwingdauer  $T(\varphi)$  in Abhängigkeit des so genannten vollständig elliptischen Integrals erster Gattung  $K(k)$  zu erhalten, reicht es unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen aus, lediglich über ein Viertel des Zeitverlaufs (4.35) einer Schwingdauer, also von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$ , zu integrieren und das Ergebnis anschließend mit dem Faktor 4 zu multiplizieren.

$$T(k) = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \cdot d\alpha = \frac{4}{\omega_0} \cdot F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\omega_0} \cdot K(k) \quad (4.63)$$

Das so genannte vollständig elliptische Integral  $K(k)$  repräsentiert hierbei die Zeitdauer einer halben Schwingperiode. Unter anderen lässt sich diese Funktion z.B. mit dem Programmpaket MAPLE unter der Bezeichnung `EllipticK()` aufrufen [124]. Alternativ dazu kann die Funktion  $K(k)$  auch als Reihe entwickelt werden:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot k^6 + \dots \right] \quad (4.64)$$

In Bild 4.5 ist der mit dem Programmpaket MAPLE ermittelte korrekte Verlauf des vollständigen elliptischen Integrals  $K(k)$  den mit Hilfe der Reihenentwicklung angenäherten Verläufen für einen Bereich von  $k = 0$  bis  $k = 0.999$  gegenübergestellt.



**Bild 4.5:** Das vollständige elliptische Integral  $K(k)$

Bis zu Werten des elliptischen Moduls von etwa  $k = 0.8$  sind die Abweichungen der Reihenentwicklung zum tatsächlichen Verlauf offensichtlich gering. Dem daran anschließenden Verlauf der Kurve, der durch die asymptotische Annäherung gegen den Wert  $k = 1$  geprägt ist, vermag die Reihenentwicklung hingegen nicht zu folgen.

Mit Hilfe der Zusammenhänge  $k = \sin \frac{\hat{\varphi}}{2}$  und  $T = \frac{4}{\omega_0 \cdot K(k)} \rightarrow K(k) = \frac{T \cdot \omega_0}{4}$  lässt sich die Reihenentwicklung auch direkt auf die Pendelschwingdauer  $T(\hat{\varphi})$  beziehen:

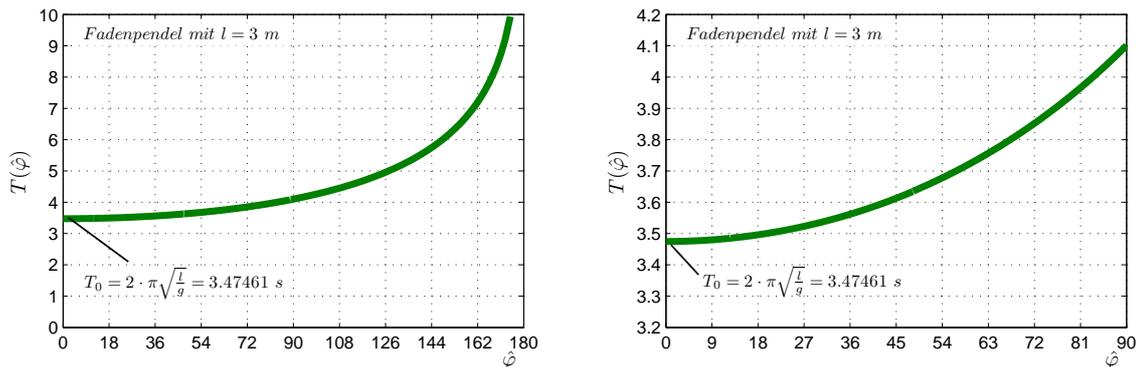
$$\frac{T(\hat{\varphi}) \cdot \omega_0}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \sin^6\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) + \dots \right] \quad (4.65)$$

Unter Einbeziehung des Zusammenhangs zwischen Pendellänge und Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  folgt:

$$T(\hat{\varphi}) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \sin^6\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) + \dots \right] \quad (4.66)$$

Mit  $\hat{\varphi} = 2 \cdot \arcsin(k)$  und  $T(k) = \frac{4}{\omega_0} \cdot K(k)$  lässt sich die Pendelschwingdauer auch generell direkt auf den Auslenkungswinkel  $\hat{\varphi}$  beziehen.

Für das zur Darstellung des Phasendiagramms eingeführte Fadenpendel mit der Pendellänge  $l = 3 \text{ m}$  und der Pendelmasse  $m = 1 \text{ kg}$  ist in Bild 4.6 entsprechend die Zunahme der Eigenperiode  $T(\hat{\varphi})$  in Abhängigkeit des Auslenkungswinkels für die Bereiche  $0^\circ \leq \hat{\varphi} \leq 174.87^\circ$  sowie  $0^\circ \leq \hat{\varphi} \leq 90^\circ$  dargestellt. Wie bereits erläutert, ist die Höhe der Pendelmasse, dämpfungsfreie Systeme vorausgesetzt, ohne Einfluss auf die Pendelschwingdauer. Während von reinen Reibwiderständen ebenfalls keine Auswirkungen auf die Schwingperiode ausgeht, verlangsamt sich diese bei Vorhandensein einer geschwindigkeitsproportionalen bzw. viskosen Dämpfung.



**Bild 4.6:** Periode eines Fadenpendels mit  $l = 3 \text{ m}$

Ergänzend zur analytischen Lösung wird das zeitliche Verhalten des mathematischen Pendels für verschiedene Anfangsauslenkungswinkel  $\hat{\varphi}$  abschließend noch mit dem FE-Programm ADINA untersucht. Das Pendel wird dazu mit Hilfe eines Stabelements mit einer Querschnittsfläche  $A = 1 \text{ m}^2$ , einer Stablänge  $l = 3.0 \text{ m}$  und einem Elastizitätsmodul  $E = 1 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  abgebildet. Dem freien Ende eines masselosen Stabes wird eine Punktmasse in der Höhe von  $m = 1 \text{ kg}$  zugewiesen. Der Forderung des mathematischen Pendels nach einer starren Verbindung zwischen Pendelmasse und Aufhängepunkt wird damit annähernd nachgekommen. Die Anfangskoordinaten, die die Ausgangslage des Stabes zum Zeitpunkt  $t = 0$  definieren, werden so gewählt, dass die folgenden drei Auslenkungswinkel  $\hat{\varphi} = 90^\circ$ ,  $\hat{\varphi} = 135^\circ$  und  $\hat{\varphi} = 170^\circ$  resultieren. Da es sich bei dem zu untersuchenden Pendelschwinger um ein ebenes Problem handelt, reicht es aus, lediglich zwei Freiheitsgrade in Form der vertikalen- und horizontalen Verschiebung zuzulassen.

Als numerisches Integrationsverfahren der Zeitschrittberechnung wird das in Kapitel 2.4.6.2 vorgestellte und in Tabelle 2.6 zusammengefasste NEMARK-Verfahren unter Verwendung der Standardparameter  $\delta = 0.5$  und  $\alpha = 0.25$  gewählt. Die iterative Anpassung der nichtlinearen Rückstellfunktion innerhalb eines Zeitschritts  $\Delta t = 0.008$  erfolgt hierbei mit Hilfe des in Kapitel 2.4.7 erläuterten NEWTON-RAPHSON-Verfahrens, das innerhalb der Programmumgebung ADINA als “Full Newton Method“ bezeichnet wird. Als Abbruchkriterium wird der Wert für die Energietoleranz gemäß Gleichung (2.156) zu  $\text{ETOL} \leq 1.0 \cdot 10^{-10}$  gesetzt.

In Bild 4.7 sind die analytisch erhaltenen Ergebnisse denjenigen der ADINA-Berechnung gegenübergestellt. Offensichtlich werden sowohl die Schwingungsdauer  $T(\hat{\varphi})$  als auch der zeitliche

Verlauf der Winkeländerung  $\varphi(t)$  durch die Zeitschrittberechnung exakt nachgebildet. Die analytischen Werte der Winkeländerung werden hierbei in Bezug auf das elliptische Modul  $k$  aus der Rechenvorschrift der Gleichung (4.61) erhalten.

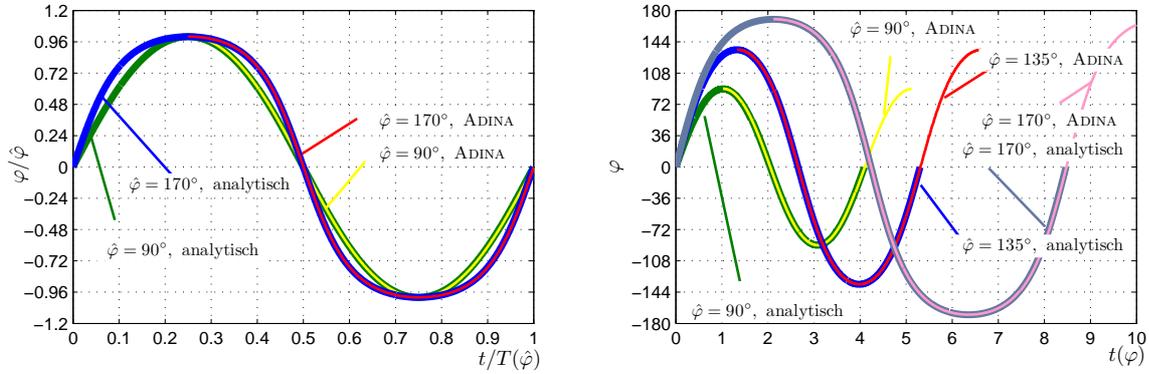


Bild 4.7: Analytisch und mit ADINA berechneter Verlauf der Pendelschwingung

### 4.2.2 Einfreiheitsgradschwinger mit Festreibung

In Anlehnung an die in [94] gegebenen Ausführungen werden im nachfolgenden Kapitel die wesentlichen Merkmale des Einfreiheitsgradschwingers mit Festreibung hergeleitet. Als Systemvorstellung dient das in Bild 4.8 dargestellte Schwingensystem, das allein durch Reibvorgänge nicht aber durch geschwindigkeitsproportionale Dämpfungsanteile in seiner Schwingung gehemmt wird.

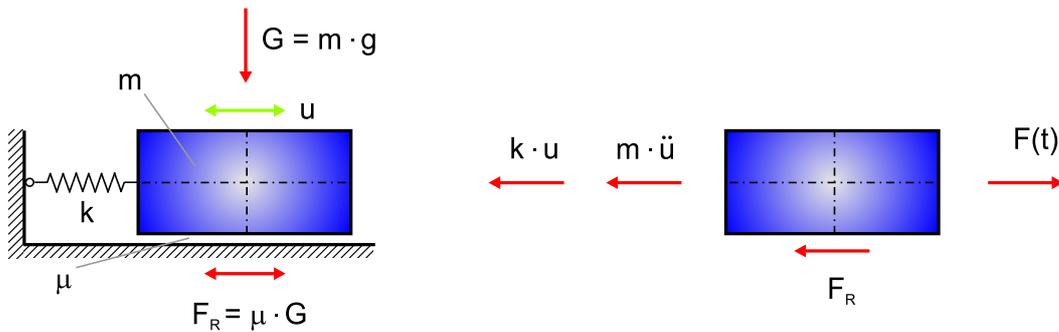


Bild 4.8: Beispielsystem

Unter Einbeziehung der Reibkraft  $F_{Reibung} = F_R$  lautet die das System beschreibende kinetische Gleichgewichtsgleichung:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u + (\text{sign } \dot{u}) \cdot F_R = -m \cdot \ddot{y}_F$$

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = \underbrace{-(\text{sign } \dot{u}) \cdot F_R}_{\text{Konstante}} - m \cdot \ddot{y}_F$$

Da die Wirkrichtung der Reibungskraft der Bewegung stets entgegengesetzt ist, gilt:

$$(\text{sign } \dot{u}) \cdot F_R = \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \cdot F_R = \begin{array}{l} +F_R \\ -F_R \end{array} \quad \text{wenn } \dot{u} \quad \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \quad (4.67)$$

Zunächst wird der freie Ausschwingvorgang des Reibschwingers untersucht, indem der Term der Fußpunkterregung ( $-m \cdot \ddot{y}_F = 0$ ) zu Null gesetzt wird.

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{u} + k \cdot u &= -(\text{sign } \dot{u}) \cdot F_R \\ \text{mit: } \omega^2 &= \frac{m}{k} \\ \rightarrow \ddot{u} + \omega^2 \cdot u &= -(\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{m} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Der homogene Lösungsanteil der Differentialgleichung (4.68) wird, wie bereits in Kapitel 2.4.1 beschrieben, wiederum durch Einsetzen des d'ALEMBERT'schen Ansatzes  $u = C \cdot e^{\lambda t}$  bzw.  $\ddot{u} = C \cdot \ddot{u} \cdot e^{\lambda t}$  gefunden:

$$\begin{aligned} C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + \omega^2 \cdot C \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\ C \cdot \underbrace{[\lambda^2 + \omega^2]}_{\lambda^2 + \omega^2 = 0} \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\ \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega \quad \text{mit: } i = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$u = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\text{mit der EULER-Identität: } \begin{array}{l} e^{-i\theta} = \cos \theta - i \cdot \sin \theta \\ e^{+i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta \end{array}$$

$$u = A \cdot (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t) + B \cdot (\cos \omega t - i \cdot \sin \omega t)$$

Indem die zwei neuen Freiwerte  $a$  und  $b$  vereinbart werden, lassen sich die Cosinus- und Sinusglieder wie folgt zusammenfassen:

$$u = a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t \quad (4.69)$$

Der partikuläre Lösungsanteil der Bewegungsgleichung wird mit Hilfe eines Störansatzes und anschließendem Koeffizientenvergleich gefunden. Da der rechtsseitige Term lediglich in Form einer Konstanten ohne Abhängigkeit von  $t$  vorliegt, ist es ausreichend, auch lediglich den ersten Teil des als Störansatz gewählten Polynoms  $\lambda_{part} = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots$  zu berücksichtigen und entsprechend in die Gleichung (4.68) einzusetzen:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{part} = a_0 \\ \dot{\lambda}_{part} = 0 \\ \ddot{\lambda}_{part} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 0 + \omega^2 \cdot a_0 = -(\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{m}$$

$$\text{mit: } \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow a_0 = -(\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k}$$

Die Lösung der Differentialgleichung nimmt damit die folgende Form an:

$$u = a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t - (\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k} \quad (4.70)$$

Dies lässt direkt die Schlussfolgerung zu, dass die Festreibung keinen Einfluss auf die Schwingdauer hat, der reibgedämpfte Einfreiheitsgradschwinger also dieselbe Eigenkreisfrequenz  $\omega$  wie der ungedämpfte Einfreiheitsgradschwinger besitzt. Zudem verlaufen die Schwingungen innerhalb jeder Halbperiode offenbar harmonisch.

Die Freiwerte  $a$  und  $b$  ergeben sich in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen  $u_0$  und  $v_0 = \dot{u}_0$  zu:

$$\begin{array}{ll} u(t=0) = u_0 & \dot{u}_0 = a \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot 0 - b \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot 0 \\ u_0 = b - (\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k} & \dot{u}_0 = a \cdot \omega \\ b = u_0 + (\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k} & A = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \end{array} \quad (4.71)$$

Durch Einsetzen der Freiwerte in die Gleichung (4.70) lässt sich der Ausschwingvorgang des reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers wie folgt darstellen:

$$u = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \cdot \sin \omega t + \left[ u_0 + (\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k} \right] \cdot \cos \omega t - (\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k} \quad (4.72)$$

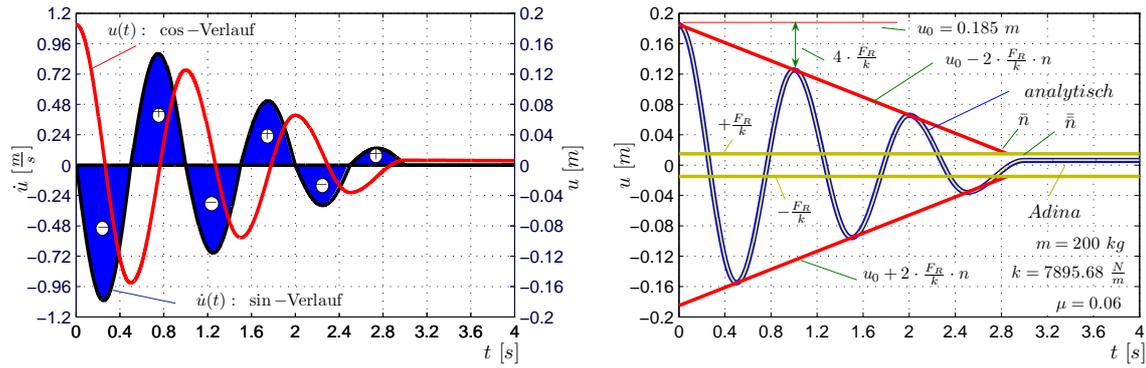
Werden die Anfangsbedingungen auf die Auslenkung  $u_0$  beschränkt und die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{u}_0$  zu Null gesetzt, vereinfacht sich die Gleichung auf:

$$u = \left[ u_0 + (\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k} \right] \cdot \cos \omega t - (\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k}$$

Gemäß dem in Bild 4.9 dargestellten Zusammenhang zwischen Schwingweg und Geschwindigkeitsverlauf wird im Fall einer positiven Anfangsauslenkung für die erste Halbschwingung der Regelung ( $\text{sign } \dot{u}$ ) entsprechend ein negatives Vorzeichen erhalten.

Für die Dauer der ersten Halbschwingung  $0 < t \leq \frac{T}{2}$  gilt demnach:

$$\text{für } 0 < t \leq \frac{T}{2} : \quad u_1(t) = \left[ u_0 - \frac{F_R}{k} \right] \cdot \cos \omega t + \frac{F_R}{k}$$



**Bild 4.9:** Schwingungsverläufe des frei ausschlagenden reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers

Damit lässt sich die Auslenkung am Ende der ersten Halbschwingung bestimmen, die dann gleichzeitig als Anfangsbedingung für die zweite Halbschwingung vorliegt:

$$\begin{aligned}
 u_1(t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}) &= \left[ u_0 - \frac{F_R}{k} \right] \cdot \underbrace{\cos \omega \frac{\pi}{\omega}}_{-1} + \frac{F_R}{k} \\
 &= -u_0 + \frac{F_R}{k} + \frac{F_R}{k} = -u_0 + 2 \cdot \frac{F_R}{k}
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen  $u_{0,2} = -u_0 + 2 \cdot \frac{F_R}{k}$  und  $\dot{u}_{0,2} = 0$  in die Ausgangsgleichung (4.70)  $u = a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t - (\text{sign } \dot{u}) \cdot \frac{F_R}{k}$  kann der Schwingverlauf für die zweite Halbschwingung wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 u(t = \frac{\pi}{\omega}) &= -b - \frac{F_R}{k} = -u_0 + 2 \cdot \frac{F_R}{k} & \dot{u}(t = \frac{\pi}{\omega}) &= a \cdot \omega \cos \omega \frac{\pi}{\omega} - b \cdot \omega \sin \omega \frac{\pi}{\omega} = 0 \\
 \rightarrow b &= u_0 - 3 \cdot \frac{F_R}{k} & \rightarrow a &= 0
 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Vorzeichenregelung (*sign*)  $\dot{u} = +1$  ergibt sich die Gleichung zu:

$$\text{für } \frac{T}{2} < t \leq T : \quad u_2(t) = \left[ u_0 - 3 \cdot \frac{F_R}{k} \right] \cdot \cos \omega t - \frac{F_R}{k}$$

Damit lässt sich wiederum die Auslenkung zum Ende der ersten Vollschiwingung angeben:

$$\begin{aligned}
 u_2(t = T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}) &= \left[ u_0 - 3 \cdot \frac{F_R}{k} \right] \cdot \underbrace{\cos \omega \frac{2 \cdot \pi}{\omega}}_{+1} - \frac{F_R}{k} \\
 &= -u_0 - 3 \cdot \frac{F_R}{k} - \frac{F_R}{k} = u_0 - 4 \cdot \frac{F_R}{k}
 \end{aligned}
 \tag{4.74}$$

Die Schwingamplitude des reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers nimmt also pro Vollschwingung um den konstanten Betrag  $4 \cdot \frac{F_R}{k}$  ab. Im Gegensatz zum viskos bedämpften Einfreiheitsgradschwinger verläuft die Einhüllende über die abklingende Ausschwingkurve damit nicht exponentiell, sondern geradlinig.

Werden die Halbschwingungen durch die Variable  $n$  nummeriert, lässt sich die Gleichung der gesamten Ausschwingkurve im Fall einer positiven Anfangsauslenkung wie folgt angeben:

$$u(t) = \left[ u_0 - (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{F_R}{k} \right] \cdot \cos \omega t \pm \frac{F_R}{k} \quad (4.75)$$

Im Fall einer negativen Anfangsauslenkung ist die Vorzeichendefinition des letzten Terms entsprechend auf  $\mp \frac{F_R}{k}$  abzuändern.

Der Stillstand der Schwingung wird eingeleitet, sobald der Umkehrpunkt erstmals innerhalb des Bereichs zu liegen kommt, der durch die obere und untere Gerade bei  $u = \pm \frac{F_R}{k}$  begrenzt wird. Der das Hängenbleiben ankündigende Schnittpunkt zwischen der Begrenzungsgeraden und der Einhüllenden der Umkehrpunkte wird mit  $\bar{n}$  bezeichnet und lässt sich wie folgt bestimmen:

$$u_0 - 2 \cdot \frac{F_R}{k} \cdot \bar{n} = \frac{F_R}{k} \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \bar{n} \cdot \frac{F_R}{k} = u_0 - \frac{F_R}{k} \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \bar{n} \cdot F_R = k \cdot u_0 - F_R$$

$$\bar{n} = \frac{k \cdot u_0 - F_R}{2 \cdot F_R} \quad (4.76)$$

Das System schwingt dann innerhalb des schraffierten Bereichs noch bis zum Erreichen des nächstfolgenden Umkehrpunktes weiter, um dann letztendlich in dieser Position zu verharren. Demnach erfolgt der Stillstand stets zum Zeitpunkt, der durch die auf  $\bar{n}$  folgende Ganzzahl  $\bar{n}$  gekennzeichnet ist. Die verbleibende Restverschiebung und Federkraft lassen sich entsprechend in Abhängigkeit von  $\bar{n}$  bestimmen:

$$u_{\text{Stillstand}} = u_0 - \bar{n} \cdot 2 \cdot \frac{F_R}{k} \quad (4.77)$$

$$F_{R, \text{Stillstand}} = k \cdot \left( u_0 - \bar{n} \cdot 2 \cdot \frac{F_R}{k} \right) \leq F_R \quad (4.78)$$

Die rechte Graphik des Bildes 4.9 zeigt beispielhaft die Ausschwingkurve eines reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers für die nachfolgend angegebenen Systemwerte:

- Schwingmasse:  $m = 200 \text{ kg}$
- Federsteifigkeit:  $k = 7895.68 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- Reibkoeffizient:  $\mu = 0.06$

- Anfangsauslenkung:  $u_0 = 0.185 \text{ m}$
- $F_R = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 200 \text{ kg} \cdot 0.06 = 117.72 \text{ N}$
- $\bar{n} = \frac{7895.68 \cdot 0.185 - 117.72}{2 \cdot 117.72} = 5.704 \rightarrow \bar{\bar{n}} = 6.0$
- verbleibende Restamplitude:  $u_{\text{Stillstand}} = 0.185 \text{ m} - 6 \cdot 2 \cdot \frac{117.72 \text{ N}}{7895.68 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0.006087 \text{ m}$

Zur Überprüfung der dem Bild 4.9 zugrunde gelegten und analytisch ermittelten Ergebnisse wurde der Reibschwinger mit Hilfe des FE-Programms ADINA vergleichsgerechnet. Das Federmasse-System wurde dazu auf einer Reibkontaktfläche aufgelagert und die Ausschwingkurve für die gegebene Anfangsauslenkung mit Hilfe einer Zeitverlaufsrechnung bestimmt. Die in Bild 4.9 übereinander gelegten Kurven zeigen keinerlei Abweichung und werden damit durch die hergeleiteten Zusammenhänge bestätigt.

### 4.2.3 Kinematik und Kinetik des Gleitpendellagers

Die wesentlichen Einflussfaktoren, die das dynamische Verhalten von Gleitpendellagern bestimmen, sind der Gleitpendellagerradius  $r_{\text{Krümmung}}$  und der zwischen Gleitschuh und Gleitlagerplatte vorhandene Reibungskoeffizient  $\mu$ . Die streng genommen ebenfalls zu berücksichtigenden Reibungskräfte in der Reibfläche der kalottenförmigen Aussparung sind indes nur von geringem Einfluss und können im Allgemeinen vernachlässigt werden. Der Grund hierfür liegt zum Einen in den in diesem Bereich üblicherweise geschmiert ausgeführten Kontaktflächen und den in der Folge nur geringfügig geweckten Reibwiderständen und zum Anderen in den vergleichsweise geringen Verschiebungswegen, die hier allein aus der Drehung des Gleitschuhs in der kalottenförmigen Aussparung der aufgesetzten Lagerplatte resultieren.

Für die kinematischen Zusammenhänge des Gleitpendellagers entscheidend ist der je nach Bauart vorhandene wirksame Radius, der durch diejenige Kreisbahn definiert ist, die der aufgelagerten Masse aufgrund der Gleitpendellagerausführung aufgezwungen wird [43]. Im Fall der in Bild 4.1 dargestellten Standardausführung des Gleitpendellagers ist die Kreisbahn entsprechend durch den Kreismittelpunkt der Kalottenkrümmung des Gleitschuhs gegeben. Üblicherweise kommt dieser unterhalb der gekrümmten Lagerschale zu liegen und der wirksame Radius berechnet sich in der Folge zu  $r = r_{\text{Krümmung}} + h$ .

Auf ein ebenes Problem reduziert lässt sich die Verschiebungsfigur gemäß dem Satz von Pythagoras mit den in Bild 4.1 gegebenen Bezeichnungen wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
& \text{hier: } r = r_{\text{Krümmung}} + h \\
& u^2 + (r - z)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad z^2 - 2 \cdot r \cdot z + u^2 = 0 \\
& z = \frac{2 \cdot r - \sqrt{4 \cdot r^2 - 4 \cdot 1 \cdot u^2}}{2 \cdot 1} \\
& z = r - \sqrt{r^2 - u^2} = r \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{u}{r}\right)^2} \right] \tag{4.79}
\end{aligned}$$

Wird die Wurzel als Reihe entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen, lässt sich der Zusammenhang zwischen der Horizontalverschiebung  $u$  und der Höhenänderung  $z$  wie folgt vereinfachen:

$$z \approx r \cdot \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u}{r}\right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{u}{r}\right)^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \left(\frac{u}{r}\right)^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \left(\frac{u}{r}\right)^8 \pm \dots \right] \tag{4.80}$$

$$z \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u}{r}\right)^2 \cdot r \tag{4.81}$$

$$z \approx \frac{u^2}{2 \cdot r} \quad \text{für} \quad \frac{u}{r} \leq 0.5773 \quad \hat{=} \quad \hat{\varphi} = 30^\circ \tag{4.82}$$

Wie bereits die Ausführungen des Kapitels 4.2.1 zeigen, werden mit der Näherungsformel (4.82) auch hier nahezu keine Abweichungen vom korrekten Ergebnis erhalten, solange die Auslenkungswinkel  $\hat{\varphi}$  eine innerhalb einer gewissen Größenordnung von etwa  $\hat{\varphi} \leq \arctan \frac{u}{r} = 30^\circ$  verbleiben.

Zur Herleitung der Kinetik des Gleitpendellagers wird das in Bild 4.1 dargestellte System betrachtet, dem die folgenden Vereinfachungen zugrunde liegen. Der Angriffspunkt der Bauwerksmasse wird als konzentrierte Punktmasse im Schnittpunkt zwischen der Symmetrieachse des Gleitschuhs und der Kreislinie der Gleitlagerschale idealisiert. Die durch die Verschiebung geweckten Trägheitskräfte werden ebenso wenig berücksichtigt wie die Abhängigkeit des Reibkoeffizienten  $\mu$  von der vorhandenen Auflagerpressung sowie der Temperaturentwicklung. Auch wird nicht zwischen der anfangs zu überwindenden Haft- und der daran anschließenden Gleitreibung unterschieden.

Damit ermittelt sich diejenige Kraft  $F_H$ , die erforderlich ist, um dem in Bild 4.1 dargestellten Gleitpendellager mit konzentrierter Punktmasse  $G = m \cdot g$  eine definierte horizontale Verschiebung  $u$  einzuprägen, aus dem folgenden auf die Kreistangente bezogenen Kräftegleichgewicht. Stellvertretend für die Verschiebung  $u$  wird die Gleichung hier jedoch sinnigerweise zunächst auf die Winkeländerung  $\varphi$  bezogen.

$$\sum \vec{F} = 0 : \quad mg \cdot \sin \varphi + \mu \cdot (mg \cdot \cos \varphi + F_H \cdot \sin \varphi) - F_H \cdot \cos \varphi = 0 \tag{4.83}$$

Wird die Gleichung nach  $F_H$  aufgelöst, resultiert die Kraft, die notwendig ist, um den Gleitschuh um ein bestimmtes Maß  $u$ , hier durch den Winkel  $\varphi$  ausgedrückt, auszulenken.

$$F_H = mg \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \mu \cdot \sin \varphi} + \mu \cdot mg \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - \mu \cdot \sin \varphi} \quad (4.84)$$

$$= mg \cdot \frac{\tan \varphi + \mu}{1 - \mu \cdot \tan \varphi} \quad (4.85)$$

Mit Hilfe der kinematischen Zusammenhänge  $\sin \varphi = \frac{u}{r}$  und  $x = \sqrt{r^2 - u^2}$ ;  $x = r \cdot \cos \varphi \rightarrow r \cdot \cos \varphi = \sqrt{r^2 - u^2} \rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{r}\right)^2}$  lässt sich die Gleichung auf die Bezugsvariable der horizontalen Auslenkung  $u$  zurückführen.

$$F_H = mg \cdot \frac{\frac{u}{r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{r}\right)^2} - \mu \cdot \frac{u}{r}} + \mu \cdot mg \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{r}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{r}\right)^2} - \mu \cdot \frac{u}{r}} \quad (4.86)$$

$$= mg \cdot \frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2} - \mu \cdot u} + \mu \cdot mg \cdot \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{\sqrt{r^2 - u^2} - \mu \cdot u} \quad (4.87)$$

$$= mg \cdot \frac{u + \mu \cdot \sqrt{r^2 - u^2}}{\sqrt{r^2 - u^2} - \mu \cdot u} \quad (4.88)$$

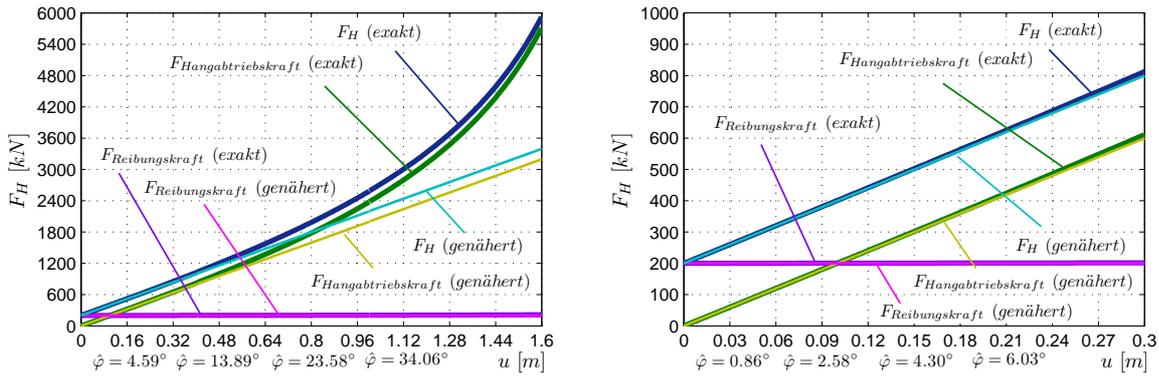
Die Gleichung lässt sich mit den vereinfachten Näherungen  $r \approx \sqrt{r^2 - u^2}$  und  $-\mu \cdot u \approx 0$  wie folgt linearisieren:

$$F_H = mg \cdot \frac{u}{r} + \mu \cdot mg \quad (4.89)$$

In Bild 4.10 sind die im Gleitpendellager für die Verschiebung  $u$  auftretenden Kräfte sowohl für die exakte als auch für die genäherte Lösung graphisch ausgewertet. Die Kurven sind hierbei auf ein Gleitpendellager mit einem Gleitpendellagerradius von  $r = 2000 \text{ mm}$ , einem Reibkoeffizienten von  $\mu = 0.05$  und einer Auflast von  $G = mg = 400\,000 \text{ kg}$  bezogen. Bis zu Verschiebungen in der Größenordnung von etwa  $u = 300 \text{ mm}$  sind die Abweichungen offensichtlich äußerst gering, und die Anwendung der genäherten Formel (4.89) ist damit für die übliche Erdbebenbemessung ausreichend genau.

Wie in Kapitel 4.2.1 gezeigt, ist auch die Schwingperiode  $T(\hat{u})$  des Gleitpendellagers vom Auslenkungswinkel  $\hat{\varphi}$  nichtlinear abhängig. Wird in die Gleichung (4.66) anstatt der Pendellänge  $l$  der Gleitpendellagerradius  $r$  sowie der Zusammenhang  $\hat{\varphi} = \arcsin \frac{\hat{u}}{r}$  eingesetzt, lässt sich die Reihenentwicklung direkt auf das Gleitpendellager anwenden:

$$T(\hat{u}) \approx \underbrace{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}}_{T_0} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\hat{u}}{r}\right)^2 + \frac{9}{256} \cdot \left(\frac{\hat{u}}{r}\right)^4 + \frac{25}{1024} \cdot \left(\frac{\hat{u}}{r}\right)^6 + \dots \right] \quad (4.90)$$



**Bild 4.10:** Kraft-Verformungs-Verläufe des Gleitpendellagers mit  $r = 2.0\text{ m}$ ,  $G = 4000\text{ kN}$  und  $\mu = 0.05$

Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die analytisch exakte Beschreibung mit Hilfe des elliptischen Integrals  $K(k)$ . Die mit unterschiedlicher Strenge berechneten Gleitpendellagerperioden werden in Tabelle 4.2 für eine konstant gehaltene Auslenkungsamplitude von  $u = 0.3\text{ m}$  und variierende Gleitpendellagerradien  $r$  ausgewiesen.

**Tabelle 4.2:** Eigenperiodenzunahme des Gleitpendellagers in Abhängigkeit des Gleitpendellagerradius

$$r \text{ mit } T_0 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r}{g}}, \quad T(\hat{u}) \approx T_0 \cdot \left[ 1 + \frac{1}{16} \cdot \left( \frac{0.3\text{ m}}{r} \right)^2 \right] \text{ und } \hat{\varphi} = \arcsin \left( \frac{\hat{u}}{r} \right)$$

r	$T_0$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$T(\hat{u})$	$\hat{\varphi}$	$k = \sin \left( \frac{\hat{\varphi}}{2} \right)$	$K(k)$	$T(K) = \frac{4}{\omega_0 \cdot K(k)}$
0.4 m	1.2687 s	4.9523 $\frac{1}{s}$	1.3134 s	48.59°	0.411438	1.644459	1.3282 s
0.6 m	1.5539 s	4.0435 $\frac{1}{s}$	1.5782 s	30.00°	0.258819	1.598142	1.5809 s
0.8 m	1.7943 s	3.5018 $\frac{1}{s}$	1.8101 s	22.02°	0.191017	1.585427	1.8110 s
1.0 m	2.0061 s	3.1321 $\frac{1}{s}$	2.0174 s	17.46°	0.151758	1.579959	2.0178 s
2.0 m	2.8370 s	2.2147 $\frac{1}{s}$	2.8410 s	8.63°	0.075213	1.573025	2.8410 s
3.0 m	3.4746 s	1.8083 $\frac{1}{s}$	3.4768 s	5.74°	0.050063	1.571782	3.4768 s
4.0 m	4.0121 s	1.5660 $\frac{1}{s}$	4.0135 s	4.30°	0.037526	1.571350	4.0135 s

Wird die Reibung vernachlässigt, kann die aus der Hangabtriebskraft geweckte horizontale Federsteifigkeit  $k_{gpl}$  des Gleitpendellagers aus der Gleichung (4.84) freigestellt werden, indem  $F_H = k_{gpl} \cdot u$  eingesetzt und nach  $k$  aufgelöst wird:

$$k_{gpl} \cdot u = mg \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - 0} \cdot \sin \varphi + 0 \cdot mg \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - 0} \cdot \sin \varphi \tag{4.91}$$

$$k_{gpl} = \frac{mg}{u} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{mg}{u} \cdot \tan \varphi \tag{4.92}$$

$$k_{gpl} = \frac{mg}{u} \cdot \frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}} \tag{4.93}$$

$$k_{gpl} = \frac{mg}{\sqrt{r^2 - u^2}} \tag{4.94}$$

Für die üblichen Anwendungen ist es wiederum ausreichend, die nichtlineare Federsteifigkeit durch Einführung der Näherung  $r \approx \sqrt{r^2 - u^2}$  wie folgt darzustellen.

$$k_{gpl} = \frac{mg}{r} \quad (4.95)$$

Die zuvor aufgeführten Zusammenhänge wurden anhand der Betrachtung des Hangaufwärtschiebens gewonnen. Sobald der Gleitschuh die Bewegungsrichtung umkehrt, wirkt in der Konsequenz auch die Reibkraft in entgegen gesetzter Richtung.

Wird das Vorzeichen der Wirkrichtung der Reibkraft an dasjenige der Verschiebungs- bzw. der Winkelgeschwindigkeit  $\text{sign } \dot{\varphi}$ ,  $\text{sign } \dot{u}$  gekoppelt, lässt sich die Gleichung wie folgt erweitern:

$$F_H = mg \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - (\text{sign } \dot{\varphi}) \cdot \mu \cdot \sin \varphi} + (\text{sign } \dot{\varphi}) \cdot \mu \cdot mg \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - (\text{sign } \dot{\varphi}) \cdot \mu \cdot \sin \varphi} \quad (4.96)$$

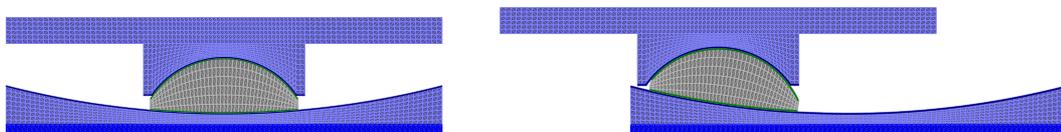
$$= mg \cdot \frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2} - (\text{sign } \dot{u}) \cdot \mu \cdot u} + (\text{sign } \dot{u}) \cdot \mu \cdot mg \cdot \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{\sqrt{r^2 - u^2} - (\text{sign } \dot{u}) \cdot \mu \cdot u} \quad (4.97)$$

Bezogen auf den linearisierten Zusammenhang zwischen der Auslenkung  $u$  und der Kraft  $F_H$  des Gleitpendellagers führt die Berücksichtigung der Wirkrichtung des Reibwiderstandes auf folgende Gleichung:

$$F_H = mg \cdot \frac{u}{r} + (\text{sign } \dot{u}) \cdot \mu \cdot mg \quad (4.98)$$

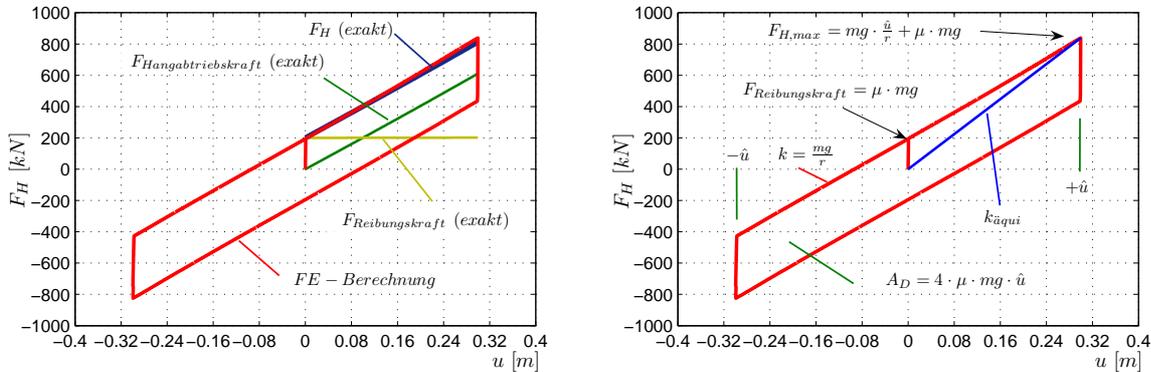
Zur Verifizierung der aufgeführten Zusammenhänge wird das dem Bild 4.10 zugrunde gelegte Gleitpendellager unter Verwendung von Flächen- und Kontaktelementen mit Hilfe des FE-Programms ADINA simuliert. Der Kalottenradius des Gleitschuhs wird hierzu mit dem Wert  $r_{Kalotte} = 200 \text{ mm}$  festgelegt. Die Reibkoeffizienten zwischen Gleitlagerplatte und Gleitschuh sowie zwischen Gleitschuh und der kugelförmigen Aussparung sind jeweils mit den Werten  $\mu_{Gleitlagerplatte} = 0.05$  und  $\mu_{Kalotte} = 0.01$  belegt.

Die Auflast wirkt in Form einer konstant gehaltenen Vertikalkraft auf der oberen Lagerschale, die zudem mit einer schrittweise aufgebracht Zwangsverschiebung mit den Amplitudenwerten  $\pm \hat{u} = 300 \text{ mm}$  beaufschlagt wird. Die Reaktionskräfte ergeben sich als Auflagerlasten der unteren, fest gelagerten Lagerschale.



**Bild 4.11:** ebenes FE-Modell eines Gleitpendellagers

In dem links dargestellten Diagramm des Bildes 4.12 sind die analytisch bestimmten Kraftverläufe dem Kraftverlauf der FE-Berechnung im ersten Quadranten gegenübergestellt. Das rechte Diagramm zeigt den aus der FE-Berechnung resultierenden kompletten Hysteresenverlauf des Gleitpendellagers.



**Bild 4.12:** Hysterese des Gleitpendellagers mit  $r = 2.0 \text{ m}$ ,  $G = 4000 \text{ kN}$  und  $\mu = 0.05$

Offensichtlich liegen die resultierenden Horizontalkräfte der FE-Berechnung leicht oberhalb der analytisch gewonnenen Werte. Vorrangig kann dies mit der Lage der horizontalen Krafteinleitung am Gleitschuh begründet werden, die eine gewisse Lastausmitte der auf die Gleitlagerschale einwirkenden Vertikalkraft  $F_V = mg$  zur Folge hat. Streng genommen ist diese zusätzlich auch durch die in der kugelförmigen Aussparung geweckten Reibkraft beeinflusst, die nachfolgend aber vernachlässigt wird.

Der analytische Maximalwert der Horizontalkraft  $F_{h,max}$  berechnet sich aus der Gleichung (4.87), indem die Systemparameter entsprechend eingesetzt werden:

$$F_H = 4000 \text{ kN} \cdot \frac{0.3 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 - (0.3 \text{ m})^2 - 0.05 \cdot (0.3 \text{ m})}} \quad (4.99)$$

$$+ 0.05 \cdot 4000 \text{ kN} \cdot \frac{\sqrt{(2 \text{ m})^2 - (0.3 \text{ m})^2}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 - (0.3 \text{ m})^2 - 0.05 \cdot 0.3 \text{ m}}} \quad (4.100)$$

$$= 611.505 \text{ kN} + 201.53 \text{ kN} = 813.03 \text{ kN} \quad (4.101)$$

Zur Berechnung der im FE-Modell und auch tatsächlich vorhandenen Lastausmitte wird die Lage der Krafteinleitung von der Gleitebene aus gemessen, grob mit  $h = 60 \text{ mm}$  abgeschätzt. Das in der Folge im Gleitschuh geweckte Moment und die dadurch verursachte Ausmitte berechnen sich zu:

$$M_{\text{Gleitschuh}} = F_H \cdot h \quad (4.102)$$

$$e = \frac{F_H \cdot h}{mg} \quad (4.103)$$

Im vorliegende Fall greift die Vertikalkraft  $F_V = mg = 4000 \text{ kg}$  bei einer Relativverschiebung von  $u = 0.3 \text{ m}$  demnach rechnerisch bei  $u_e = u + e = 0.3 \text{ m} + \frac{813.03 \text{ kN} \cdot 0.06 \text{ m}}{4000 \text{ kN}} = 0.3122 \text{ an}$ . Wird dieser korrigierte Verschiebungswert wiederum in die Gleichung (4.87) eingesetzt, berechnet sich die Horizontalkraft mit dem Wert  $F_H = 838.77 \text{ kN}$ . Damit entspricht dieser nahezu exakt dem mittels der FE-Berechnung erhaltenem Wert in Höhe von  $F_H = 839.37 \text{ kN}$ . Der beschriebene Effekt kehrt sich mit der Wirkrichtung der Reibkräfte auf der unteren Lagerschale um. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Einfluss der durch die Krafterleitung im Gleitschuh geweckten Ausmitte jedoch nicht weiter verfolgt.

#### 4.2.4 Sekanten-Steifigkeitsverfahren

Im Fall der Erdbebenisolierung erfolgt die Berechnung des Strukturverhaltens üblicherweise vereinfacht auf elasto-dynamischer Basis. Hierzu ist es erforderlich, das bilineare hysteretische Verhalten des Gleitpendellagers auf ein äquivalentes linear visko-elastisches Verhalten zurückzuführen. Hinsichtlich der Federwirkung wird dazu die so genannte äquivalente Steifigkeit  $k_{\ddot{a}qui}$ , in DIN EN 1998-1 [31] als effektive horizontale Steifigkeit  $K_{eff}$  bezeichnet, eingeführt. Im Fall der das Gleitpendellager charakterisierenden bilinearen Hysterese ist diese als Sekante durch den Nullpunkt und den oberen Umkehrpunkt, wie in Bild 4.12 dargestellt, definiert.

$$k_{\ddot{a}qui} = \frac{F_{H,max}}{\hat{u}} = \left( \frac{1}{r} + \frac{\mu}{\hat{u}} \right) \cdot mg \quad (4.104)$$

Die Dämpfungswirkung der Isolierungseinheit wird entsprechend durch den so genannten äquivalenten Dämpfungsgrad  $\xi_{\ddot{a}qui}$ , in DIN EN 1998-1 [31] als effektiver horizontaler Dämpfungsgrad  $\xi_{eff}$  bezeichnet, wiedergegeben. Hierzu wird die pro Schwingungszyklus zerstreute bzw. dissipierte Energie in Bezug zur viskosen Dämpfung gesetzt, indem der Hysteresen-Flächeninhalt derjenigen der gemäß Gleichung (2.67) gegebenen Ellipse gleichgesetzt und nach  $\xi_{\ddot{a}qui}$  aufgelöst wird.

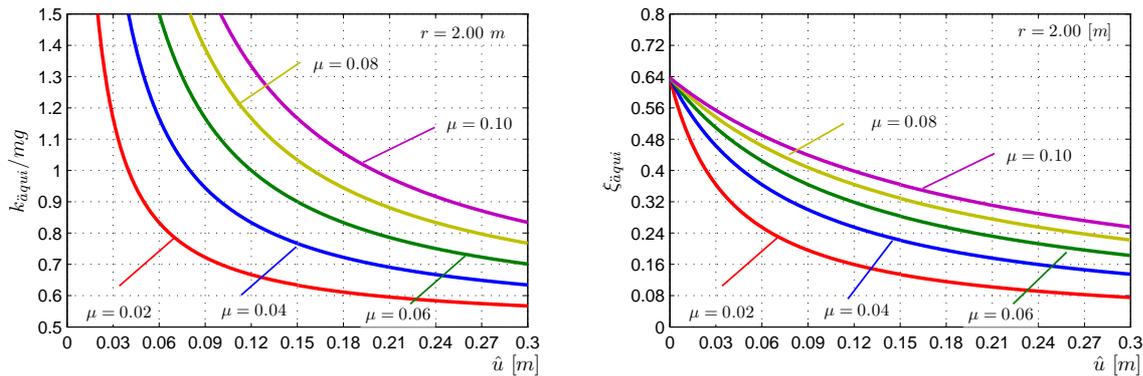
$$\begin{aligned} A_D &= A_{Ellipse} \\ 4 \cdot \mu \cdot mg \cdot \hat{u} &= \pi \cdot d_{\ddot{a}qui} \cdot \Omega \cdot \hat{u}^2 \\ d_{\ddot{a}qui} &= \frac{4 \cdot \mu \cdot mg}{\pi \cdot \Omega \cdot \hat{u}} \quad \text{mit} \quad d_{\ddot{a}qui} = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \xi_{\ddot{a}qui} \\ 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \xi_{\ddot{a}qui} &= \frac{4 \cdot \mu \cdot mg}{\pi \cdot \Omega \cdot \hat{u}} \\ \xi_{\ddot{a}qui} &= \frac{4 \cdot \mu \cdot mg}{2 \cdot m \cdot \omega \cdot \pi \cdot \Omega \cdot \hat{u}} = \frac{2 \cdot \mu \cdot g}{\omega \cdot \pi \cdot \Omega \cdot \hat{u}} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Da das System durch Zufallsprozesse vorrangig zu quasi-harmonischen Schwingungen in der Grundfrequenz angeregt wird, ist es im Fall der Erdbebenbeanspruchung vertretbar, vereinfacht vom Resonanzfall auszugehen und die Eigenkreisfrequenz mit der Erregerfrequenz  $\omega = \Omega$  gleichzusetzen [95], [97]. Mit dieser Annahme lässt sich der äquivalente Dämpfungsgrad unter Berücksichtigung des Zusammenhangs  $\omega^2 = \frac{k_{\ddot{a}qui}}{m}$  in die folgende Form bringen:

$$\xi_{\ddot{a}qui} = \frac{2 \cdot \mu \cdot g}{\omega^2 \cdot \pi \cdot \hat{u}} = \frac{2 \cdot \mu \cdot g}{\frac{k_{\ddot{a}qui}}{m} \cdot \pi \cdot \hat{u}} = \frac{2 \cdot \mu \cdot g}{\left(\frac{1}{r} + \frac{\mu}{\hat{u}}\right) \cdot g \cdot \pi \cdot \hat{u}}$$

$$\xi_{\ddot{a}qui} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mu}{\left(\frac{\hat{u}}{r} + \mu\right)} \quad (4.106)$$

In Bild 4.13 sind die Verläufe der äquivalenten Steifigkeit und des äquivalenten Dämpfungsgrades in Abhängigkeit der Auslenkungsamplitude  $\hat{u}$  für verschiedene Reibkoeffizienten  $\mu$  dargestellt. Die Kurven sind hierbei auf ein Gleitpendellager mit einem Gleitpendellagerradius in der Höhe von  $r = 2.0 \text{ m}$  bezogen.



**Bild 4.13:** äquivalente Steifigkeit  $k_{\ddot{a}qui}$  und äquivalenter Dämpfungsgrad  $\xi_{\ddot{a}qui}$  in Abhängigkeit von  $\hat{u}$  für einen Gleitpendellagerradius von  $r = 2.0 \text{ m}$  und variierende Reibkoeffizienten  $\mu$

Die dargestellten Verläufe zeigen, dass die Werte sowohl für die bezogene äquivalente Steifigkeit  $k_{\ddot{a}qui}/mg$  als auch für den äquivalenten Dämpfungsgrad  $\xi_{\ddot{a}qui}$  mit zunehmender Auslenkungsamplitude  $\hat{u}$  abnehmen. Der Einfluss der Reibung auf die Systemparameter überwiegt also beim Sekanten-Steifigkeitsverfahren für geringe Auslenkungsamplituden zunächst, während der Einfluss der Rückstellsteifigkeit erst für größere Auslenkungsamplituden an Bedeutung gewinnt. Steigende Werte des Reibkoeffizienten  $\mu$  verstärken diesen Effekt.

Aufgrund der Abhängigkeit von der Auslenkungsamplitude  $\hat{u}$  erfordert das Sekanten-Steifigkeitsverfahren sowohl bei der Anwendung der Zeitverlaufsmethode als auch bei Anwendung des Antwortspektrenverfahrens ein iteratives Vorgehen zur Berechnung der Strukturantwort.

Soll die Erdbebenbeanspruchung mit Hilfe eines der in Kapitel erläuterten 2.4.6.2 numerischen

Integrationsverfahrens berechnet werden, sind als Startwert zunächst eine maximale Auslenkungsamplitude  $\hat{u}_1$  abzuschätzen und hierfür die äquivalente Steifigkeit  $k_{\ddot{a}qui,1}$  und der äquivalente Dämpfungsgrad  $\xi_{\ddot{a}qui,1}$  zu berechnen. Die sich für diese Werte tatsächlich einstellende maximale Auslenkungsamplitude  $\hat{u}_2$  kann nunmehr mit Hilfe der Zeitverlaufsmethode ermittelt werden. Im darauf folgenden Iterationsschritt werden für diesen neu erhaltenden Eingangsparmeter  $\hat{u}_2$  wiederum entsprechend korrigierte Werte  $k_{\ddot{a}qui,2}$  und  $\xi_{\ddot{a}qui,2}$  ermittelt, die dann der nächsten Zeitschrittberechnung zur Ermittlung der tatsächlich zugehörigen Maximalamplitude  $\hat{u}_3$  zugeführt werden. Dieser konvergent-stabile Iterationsalgorithmus wird nun solange wiederholt, bis eine zufrieden stellende Übereinstimmung zwischen Eingangswert  $\hat{u}_{n-1}$  und  $\hat{u}_n$  erreicht ist.

Die wesentliche Abweichung der Methode zum realen Strukturverhalten besteht hierbei in den während der Zeitverlaufsberechnung konstant gehaltenen Werten  $k_{\ddot{a}qui,1}$  und  $\xi_{\ddot{a}qui,1}$ , die streng genommen allein für die Maximalamplitude  $\hat{u}$ , nicht aber für die vom Erdbeben restlich verursachten Zyklen  $u \leq \hat{u}$  gültig sind. Entsprechend wird mit dem Sekanten-Steifigkeitsverfahren bei Anwendung der Zeitschrittberechnung ein in der Tendenz insgesamt zu weiches Systemverhalten erhalten. In der Folge fallen die berechneten Werte der Relativverschiebung im Vergleich zur exakten Lösung stets etwas höher aus [95].

In der Regel wird das Sekanten-Steifigkeitsverfahren jedoch ohnehin eher in Kombination mit dem Antwortspektrenverfahren angewendet, da ja gerade die Methode der Zeitschrittberechnung auch die Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften der Isoliereinheit erlaubt. Ausgangspunkt der Iteration ist auch hier ein geschätzter Wert für die durch die Erdbebeneinwirkung maximal geweckte Auslenkungsamplitude  $\hat{u}_1$ . Über die äquivalente Steifigkeit  $k_{\ddot{a}qui,1}$  lässt sich damit direkt die zugehörige äquivalente Eigenperiode  $T_{\ddot{a}qui,1}$  bestimmen, vorausgesetzt das Bauwerk wurde zuvor vereinfacht auf einen Einfreiheitsgradschwinger zurückgeführt.

$$T_{\ddot{a}qui} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{\ddot{a}qui}}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{1}{r} + \frac{\mu}{\hat{u}}\right) \cdot mg}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{r} + \frac{\mu}{\hat{u}}\right) \cdot g}} \quad (4.107)$$

Dem jeweils zugrunde gelegten Antwortspektrum lässt sich damit unmittelbar der zugehörige Spektralwert  $S_e(T_{\ddot{a}qui})$  entnehmen. In der Regel ist dieser dann noch durch den Dämpfungs-Korrekturbeiwert gemäß der Gleichung (2.167) auf den jeweils aktuell gültigen äquivalenten Dämpfungsgrad  $\xi_{\ddot{a}qui,1}$  anzupassen.

$$S_e(T_{\ddot{a}qui}, \eta_{\ddot{a}qui}) = \eta_{\ddot{a}qui} \cdot S_e(T_{\ddot{a}qui}, \xi = 0.05) = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + \xi_{\ddot{a}qui}}} \cdot S_e(T_{\ddot{a}qui}, \xi = 0.05) \quad (4.108)$$

Nachfolgend wird das Vorgehen des Sekantensteifigkeits-Verfahrens sowohl in Zusammenhang mit der Zeitverlaufsmethode als auch in Kombination mit dem Antwortspektrenverfahren an-

hand eines konkreten Beispiels gezeigt. Abweichend von dem in Kapitel 3.4 gegebenen und auf eine maximale Schwingungsreaktion hin kalibrierten Beispiel wird den nachfolgenden Untersuchungen zunächst das System eines Zweifreiheitsgradschwingers zugrunde gelegt. Durch die zusätzlich vorhandene Masse kann auch der Einfluss der Schwingreaktion der Bodenplatte, unterhalb der die Isoliereinheit zu liegen kommt, mit erfasst werden.

Die Wahl des Gleitpendellagers  $r$  kann generell in Abhängigkeit des für den jeweiligen Standort gültigen Bemessungsspektrums an einem maximal tolerierbaren Beanspruchungsniveau orientiert werden [21]. Dazu wird zunächst die zu einem maximal gewünschten Spektralwert  $S_a(T_{ges})$  gehörende Eigenperiode  $T_0$  aus dem Antwortspektrum abgelesen und anschließend der diesem Wert gemäß Gleichung (4.90) zugeordnete Gleitpendellagerradius  $r$  ermittelt:

$$r = \frac{g \cdot T_0^2}{4 \cdot \pi^2} \quad (4.109)$$

Die dem Radius  $r$  zugeordnete linearisierte horizontale Steifigkeit  $k_{gpl}$  der Gleitpendellagerebene ergibt sich dann aus dem in Gleichung (4.95) gegebenen Zusammenhang.

Das allgemeingültige Vorgehen zur Ermittlung der die Schwingreaktion charakterisierenden Modalparameter mehrläufiger Systeme kann dem Kapitel 2.4.6.1 entnommen werden. Im Fall des Zweifreiheitsgradschwingers lässt sich Nennerdeterminante  $\det(\omega^2)$  des zugehörigen homogenen Gleichungssystems (2.136) jedoch auch vereinfacht wie folgt berechnen:

$$\det(\omega^2) = [k_2 - \omega^2 \cdot m_2] \cdot [(k_2 + k_1) - \omega^2 \cdot m_1] - k_2^2 = 0 \quad (4.110)$$

Aus der Lösung der Frequenzdeterminante folgt dann unmittelbar die Rechenvorschrift zur Ermittlung der die Schwingformen charakterisierenden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{1,2}$ :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_2 + k_1}{m_1} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_2 + k_1}{m_1} \right)^2 - \frac{k_2 \cdot k_1}{m_2 \cdot m_1}} \quad (4.111)$$

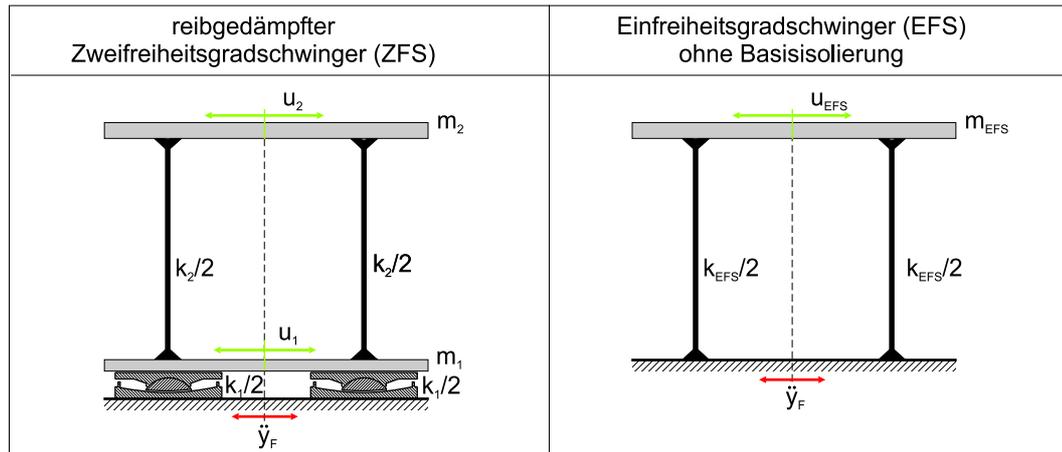
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_2^2} \quad (4.112)$$

Grundlage der nachfolgenden Studie ist der durch die folgenden Systemparameter gegebene Zweifreiheitsgradschwinger:

- oben liegende Bauwerksmasse:  $m_2 = 425\,000 \text{ kg}$
- aufgehende Bauwerkssteifigkeit:  $k_2 = 22\,400\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- (ohne Basisisolierung:  $\omega_{EFS} = 7.26 \frac{1}{\text{s}} \rightarrow f_{EFS} = 1.155 \text{ Hz} \rightarrow T_{EFS} = 0.865 \text{ Hz}$ )
- Masse Bodenplatte:  $m_1 = 28\,400 \text{ kg}$

- Masse Gesamtsystem:  $m_{ges} = 28\,400\text{ kg} + 425\,000\text{ kg} = 453\,400\text{ kg}$
- Gleitpendellagerradius:  $r = 2.0\text{ m}$
- horizontale Gleitpendellagersteifigkeit:  $k_1 = \frac{453\,400\text{ kg} \cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2.0\text{ m}} = 2\,223\,927\frac{\text{N}}{\text{m}}$  Gl. (4.95)

Die Modellvorstellung des zu untersuchenden Systems ist in Bild 4.14 jeweils einmal mit und einmal ohne Basisisolierung schematisch wiedergegeben.



**Bild 4.14:** Beispielsystem

Vorab wird zu Vergleichszwecken die exakte Schwingreaktion des vorliegenden reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers auf die Fußpunktanregung in Form des in Bild 2.34 gegebenen Akzellerogramms berechnet. Die dazu aufgrund der vorhandenen Reibung erforderliche nichtlineare Zeitschrittberechnung wird innerhalb der Programmumgebung ADINA realisiert. Die Modellierung des Systems sieht zwei Punktmassen vor, zwischen die Stabelemente entsprechend der Steifigkeit angeordnet werden, sowie eine die Gesamtlast aufnehmende Reibfläche. Gemäß Vorgabe werden die Massen in horizontaler Wirkrichtung mit den Werten  $m_1 = 28\,400\text{ kg}$  und  $m_2 = 425\,000\text{ kg}$  belegt. Dem Stabelement zwischen Baugrund und Punktmasse  $m_1$  wird die Steifigkeit  $k_1 = 2\,223\,927\frac{\text{N}}{\text{m}}$ , dem Stab zwischen Punktmasse  $m_1$  und  $m_2$  die Steifigkeit  $k_2 = 22\,400\,000\frac{\text{N}}{\text{m}}$  zugewiesen. Abweichend von der horizontalen Wirkrichtung wird der ersten Punktmasse in vertikaler Richtung der Wert der Gesamtmasse  $m_{ges} = 453\,400\text{ kg}$  zugeordnet, die während der Zeitverlaufsrechnung entsprechend mit der konstant gehaltenen Erdbeschleunigung  $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  beaufschlagt wird. Die daraus resultierende Vertikalkraft  $F_V = g \cdot m_{ges}$  wird von der horizontal angeordneten Fläche abgetragen, deren Kontaktelemente mit dem Reibkoeffizienten in Höhe von  $\mu = 0.05$  belegt sind.

Ferner wird der Einfluss der bauwerkseigenen Dämpfung im Modell mit Hilfe der in Kapitel 2.4.6.1 beschriebenen RAYLEIGH-Dämpfung berücksichtigt, deren Eingangsparameter sich für die Dämpfungsgrade  $\xi_1 = 0.050$  und  $\xi_2 = 0.055$  gemäß den Gleichungen (2.143) zu  $\alpha = 0.19499837$  und  $\beta = 0.00338731$  berechnen. Als Besonderheit ist in diesem Zusammen-

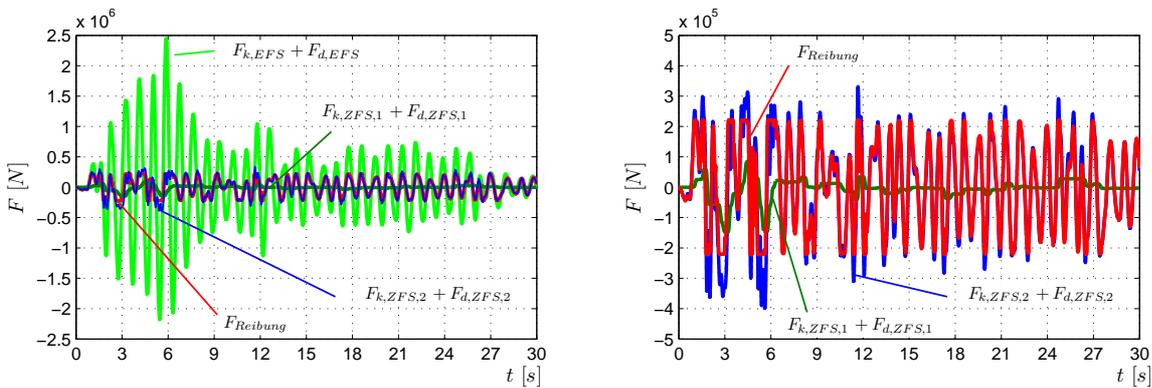
hang anzumerken, dass die RAYLEIGH-Dämpfung im Fall des Zweifreiheitsgradschwingers systembedingt jeweils für beide Eigenformen exakte Ergebnisse liefert. In der Tabelle 4.3 sind die Systemparameter des zu untersuchenden Systems nochmals zusammengestellt.

**Tabelle 4.3:** System reibgedämpfter Zweifreiheitsgradschwinger

Masse	$m_1 = 28\,400\text{ kg}$	$m_2 = 425\,000\text{ kg}$
Steifigkeit	$k_1 = 2\,223\,927\frac{\text{N}}{\text{m}}$	$k_2 = 22\,400\,000\frac{\text{N}}{\text{m}}$
Eigenkreisfrequenz	$\omega_1 = 2.1236\frac{1}{\text{s}}$	$\omega_2 = 30.2529\frac{1}{\text{s}}$
Eigenfrequenz	$f_1 = 0.3380\text{ Hz}$	$f_2 = 4.8149\text{ Hz}$
Eigenperiode	$T_1 = 2.9588\text{ s}$	$T_2 = 0.2077\text{ s}$
Dämpfungsgrad	$\xi_1 = 0.050$	$\xi_2 = 0.055$
Reibungskoeffizient	$\mu_1 = 0.0$	$\mu_2 = 0.05$

Obwohl die positive Wirkung der Erdbebenisolierung bereits aus dem in Kapitel 3.4 berechneten Beispiel hervorgeht, wird auch hier ergänzend die Schwingungsreaktion der Struktur ohne Basisisolierung ermittelt. Unter der Voraussetzung eines starren Kellerkastens, der dann entsprechend die Bodenplatte mit beinhaltet, reduziert sich das System auf einen einfachen Einfreiheitsgradschwinger, dessen Systemparameter durch die Werte  $m_{EFS} = 425\,000\text{ kg}$ ,  $k_{EFS} = 22\,400\,000\frac{\text{N}}{\text{m}}$  und  $\xi_{EFS} = 0.055$  festgelegt sind.

In Bild 4.15 sind die Ergebnisse der Zeitverlaufsberechnung des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers denjenigen des Referenzmodells ohne Erdbebenisolierung gegenüber gestellt.

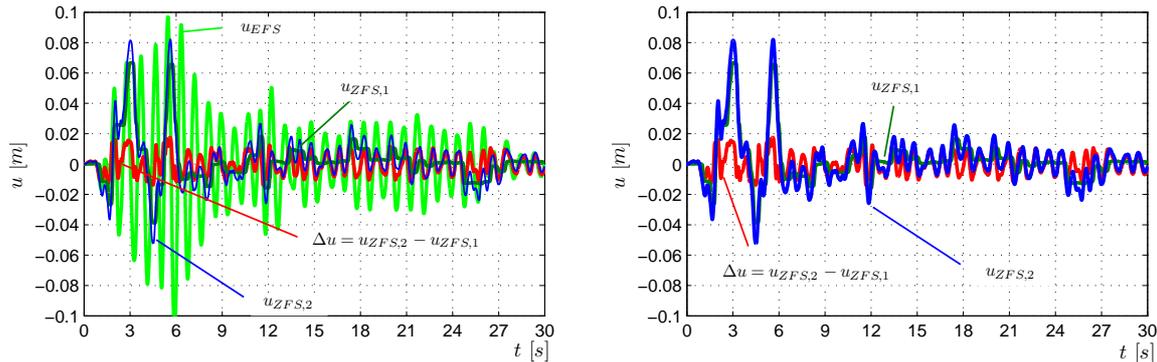


**Bild 4.15:** Ergebnisse der Zeitverlaufsberechnung des Referenzmodells ohne Erdbebenisolierung und des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers

Die maximal durch die Fußpunkterregung hervorgerufene und von der Struktur aufzunehmende Reaktionskraft des nicht erdbebenisolierten Systems beträgt  $\hat{F}_{k,EFS} + \hat{F}_{d,EFS} = 2\,451.77\text{ kN}$  und fällt erwartungsgemäß sehr viel höher aus als der Vergleichswert des isolierten Systems, für das zwischen Bodenplatte und aufgehender Struktur nur mehr eine Kraft in der Höhe von  $\hat{F}_{k,ZFS,2} + \hat{F}_{d,ZFS,2} = 398.49\text{ kN}$  erhalten wird. Abzüglich der in der Gesamtbilanz kaum ins Ge-

wicht fallenden Dämpfungsanteile korrespondieren die geweckten Kraftamplituden definitionsgemäß unmittelbar mit den maximal hervorgerufenen Bauwerksbeschleunigungen in der Höhe von  $\hat{a}_{EFS} = 5.7689 \frac{m}{s^2}$  bzw. von  $\hat{a}_{ZFS,2} = 0.9376 \frac{m}{s^2}$ . In Hinsicht auf die aufzunehmende Auflagerkraft fällt weiterhin auf, dass der in der Gleitpendellagerebene infolge Reibung geweckte Anteil mit  $\hat{F}_{Reibung} = 0.05 \cdot 453\,400 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 222.39 \text{ kN}$  die Anteile aus der Rückstellwirkung und der viskosen Dämpfung mit  $\hat{F}_{k,ZFS,1} + \hat{F}_{d,ZFS,1} = 148.73 \text{ kN}$  übertrifft.

Die zugehörigen Schwingverläufe beider Systeme sind in Bild 4.16 wiedergegeben.

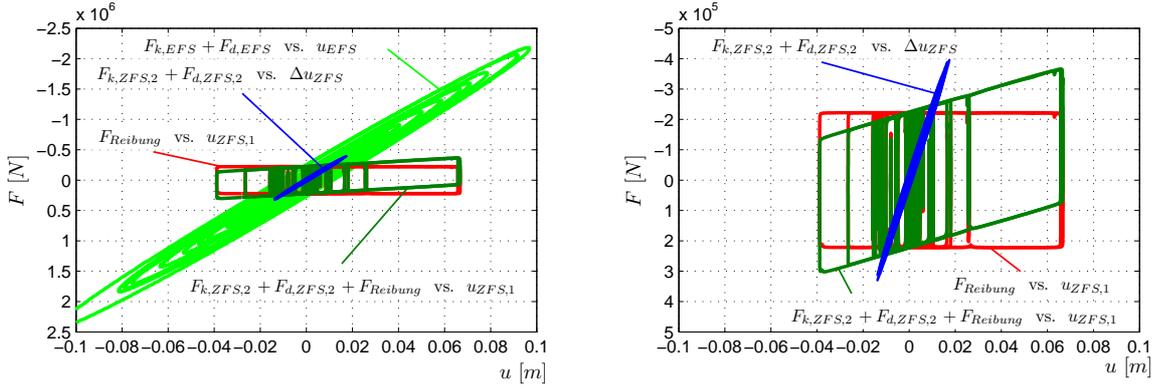


**Bild 4.16:** Verschiebungsverläufe des nicht erdbebenisolierten Referenzmodells und des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers

Auch die maximale Relativverformung wird mit  $\hat{u}_{EFS} = 0.10893 \text{ m}$  hier für das nicht erdbebenisolierte System erhalten. Dies indes muss nicht so sein, wenngleich sich die Verformungen des isolierten Systems durch Variation der Reibwirkung beeinflussen bzw. eingrenzen lassen. Die maximale Relativverformung des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers wird mit dem Wert in der Höhe von  $\hat{u}_{ZFS,2} = 0.08222 \text{ m}$  erreicht. Die maximale Verschiebung zwischen Baugrund und gleitpendelgelagerter Bodenplatte beträgt  $\hat{u}_{ZFS,1} = 0.06688 \text{ m}$ , die Relativverschiebung zwischen Bodenplatte und oberer diskretisierter Bauwerksmasse  $\Delta u_{ZFS} = 0.01761 \text{ m}$ . Hierbei ist zu beachten, dass die Werte in Abhängigkeit der zugrunde gelegten Fußpunkterregung zu jeweils unterschiedlichen Zeitpunkten auftreten und daher nicht direkt ineinander überführt werden können.

Abschließend sind in Bild 4.17 noch die Hysteresen der beiden Systeme als Maß der eingebrachten und dissipierten Energie wiedergegeben.

Den Hysterese-Verläufen der links dargestellten Graphik kann entnommen werden, dass die eingebrachte Energie im Fall des Einfreiheitsgradschwingers vollständig in die aufgehende Struktur eingetragen wird, während diese im Fall des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers vornehmlich von der Gleitpendellagerebene dissipiert wird. Der in der Folge von der aufgehenden Struktur durch viskose Dämpfung abzubauen Anteil ist im Vergleich dazu nur mehr äußerst gering. Auf der rechten Seite ist der für Gleitpendellager typische bilineare Hysteresenverlauf jeweils einmal mit und einmal ohne Rückstellwirkung dargestellt.



**Bild 4.17:** Ergebnisse der Zeitverlaufsrechnung des nicht erdbebenisolierten Referenzmodells und des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers

Anhand der vorliegenden exakten Lösung des basisisolierten Systems können nunmehr die nachfolgend mit Hilfe des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens gewonnenen Ergebnisse qualitativ beurteilt werden. Als Startwert wird hierfür zunächst von einer maximalen Relativverschiebung zwischen Untergrund und Bodenplatte von  $\hat{u}_1 = 0.05 \text{ m}$  ausgegangen. Die Systemparameter unterhalb der Bodenplatte in Form der äquivalenten Steifigkeit sowie dem äquivalenten Dämpfungsgrad berechnen sich gemäß den Gleichungen (4.104) und (4.106) entsprechend zu:

$$k_{äqui,1} = \left( \frac{1}{2.0 \text{ m}} + \frac{0.05}{0.05 \text{ m}} \right) \cdot 453 \, 400 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6 \, 671 \, 781 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

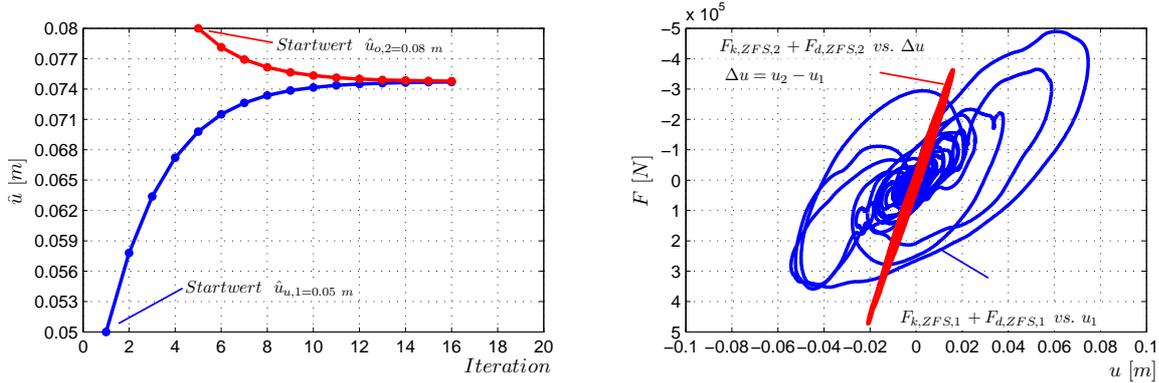
$$\xi_{äqui,1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{0.05}{\frac{0.05 \text{ m}}{2.0 \text{ m}} + 0.05} = 0.4244$$

Das weitere iterative Vorgehen kann der Tabelle 4.4 entnommen werden. Die asymptotische Annäherung an die hinsichtlich des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens korrekte Lösung ist jeweils für beide Seiten gezeigt, indem die Iteration neben dem unteren Startwert von  $\hat{u}_{u,1} = 0.05 \text{ m}$  auch für einen zu hoch gewählten Startwert von  $\hat{u}_{o,1} = 0.08 \text{ m}$  durchgeführt wird. Für die hier betrachtete abschließende Lösung wird dann der Mittelwert aus den Ergebnissen der jeweils beiden letzten Iterationsschritte gebildet. Die erhaltene Relativverschiebung zwischen Baugrund und Bodenplatte fällt im Vergleich zum exakten Wert von  $\hat{u}_{ZFS,1} = 0.06688 \text{ m}$  mit  $\hat{u}_{ZFS,1} = 0.07474 \text{ m}$  offensichtlich etwas höher aus. Wie bereits erläutert, liegt der Grund in den während der Zeitverlaufsrechnung konstant gehaltenen äquivalenten Parametern  $k_{äqui}$  und  $\xi_{äqui}$ , die streng genommen für all diejenigen Zyklen mit Amplitudenwerten unterhalb des Maximalwertes  $u_n < \hat{u}$  höhere Werte annehmen müssten.

Auf der linken Seite des Bildes 4.18 ist die asymptotische Annäherung an die tatsächliche Relativverschiebung jeweils für die von unten und für die von oben beginnende Iteration dargestellt. Auf der rechten Seite ist die mit dem Verfahren letztendlich erhaltene Lösung in Form der jeweiligen Hysterese-Kurven wiedergegeben.

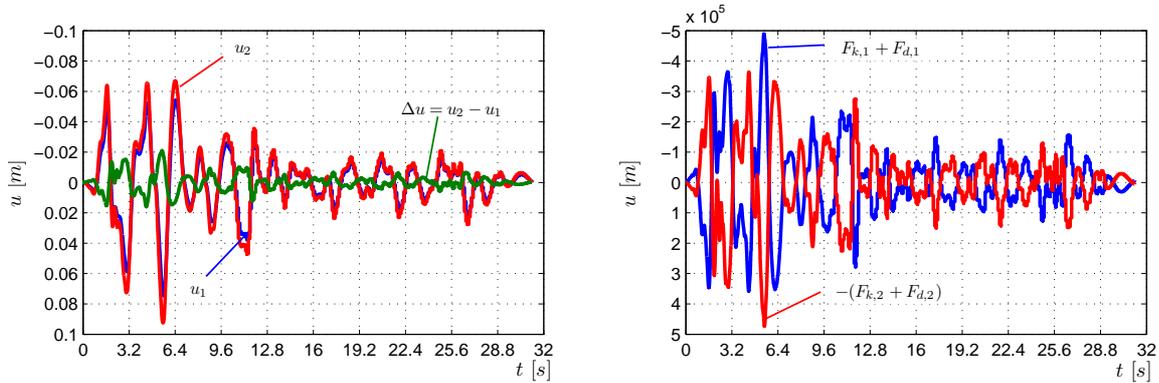
**Tabelle 4.4:** Sekanten-Steifigkeitsverfahren unter Anwendung der Zeitverlaufsmethode

Iteration	$\hat{u}_{ZFS,1,n}$	$\frac{\hat{u}_{ZFS,1,n}}{\hat{u}_{ZFS,1,n-1}}$	$k_{äqui,1}$	$\xi_{äqui,1}$
	[m]		$\frac{N}{m}$	
$n_{u,1}$	0.05		6 671 781	0.42441
$n_{u,2}$	0.0577928	0.865160	6 072 031	0.40345
$n_{u,3}$	0.0633769	0.911891	5 732 977	0.38966
$n_{u,4}$	0.0672153	0.942894	5 532 589	0.38072
$n_{u,5}$	0.0697943	0.963049	5 410 329	0.37494
$n_{u,6}$	0.0715043	0.976085	5 334 127	0.37120
$n_{u,7}$	0.0726298	0.984504	5 285 930	0.36878
$n_{u,8}$	0.0733659	0.989967	5 255 209	0.36721
$n_{u,9}$	0.0738463	0.993495	5 235 489	0.36620
$n_{u,10}$	0.0741593	0.995779	5 222 778	0.36554
$n_{u,11}$	0.0743629	0.997262	5 214 567	0.36511
$n_{u,12}$	0.0744951	0.998225	5 209 260	0.36484
$n_{u,13}$	0.0745810	0.998848	5 205 822	0.36466
$n_{u,14}$	0.0746367	0.999254	5 203 597	0.36454
$n_{u,15}$	0.0746729	0.999515	5 202 152	0.36446
$n_{u,16}$	0.0746963	0.999687		
$n_{o,1}$	0.08		5 003 836	0.35368
$n_{o,2}$	0.0781233	1.024022	5 070 616	0.35740
$n_{o,3}$	0.0769224	1.015612	5 115 058	0.35983
$n_{o,4}$	0.0761504	1.010138	5 144 367	0.36141
$n_{o,5}$	0.0756521	1.006587	5 163 603	0.36243
$n_{o,6}$	0.0753301	1.004275	5 176 169	0.36310
$n_{o,7}$	0.0751220	1.002770	5 184 347	0.36353
$n_{o,8}$	0.0749873	1.001796	5 189 665	0.36381
$n_{o,9}$	0.0749001	1.001164	5 193 118	0.36399
$n_{o,10}$	0.0748436	1.000755	5 195 359	0.36411
$n_{o,11}$	0.0748070	1.000489	5 196 813	0.36418
$n_{o,12}$	0.0747833	1.000317		
$(n_{u,16} + n_{o,12})/2$	0.0747398		5 199 487	0.36432
	0.0747397	1.000001		



**Bild 4.18:** Iterative Annäherung des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens sowie resultierende Hysterese-Kurven

Die zugehörigen Schwing- und Kraftverläufe des gemäß dem Sekanten-Steifigkeitsverfahren berechneten Zweifreiheitsgradschwingers können dem Bild 4.19 entnommen werden.



**Bild 4.19:** Verformungs- und Kraftverläufe des gemäß dem Sekanten-Steifigkeitsverfahren berechneten System

Zum Vergleich sind in der Tabelle 4.5 die mit dem Sekanten-Steifigkeitsverfahren erhaltenen Ergebnisse den sich tatsächlich einstellenden Werten der exakten Berechnung gegenübergestellt. Dass die mit der genäherten Lösung erhaltenen Ergebnisse auf der sicheren Seite liegen, wird daraus nochmals ersichtlich.

Ergänzend zur Anwendung des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens auf die Zeitverlaufsmethode wird die Erdbebenreaktion nun mit Hilfe des Antwortspektrums ermittelt. Die Angabe einer exakten Lösung ist hier mit dem in Bild 2.35 vorliegenden Antwortspektrum jedoch aufgrund des nichtlinearen Reibanteils der Gleitpendellager nicht möglich, wenngleich durchaus die Möglichkeit bestünde, Antwortspektren auf Basis von reibgedämpften Einfreiheitsgradschwinger zu ermitteln und entsprechend vorzuhalten. Darauf wird aber nachfolgend zunächst verzichtet und die Anwendung des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens unter Verwendung der regulären und auf geschwindigkeitsproportional bedämpften Einfreiheitsgradschwinger bezogenen Antwortspektren aufgezeigt.

**Tabelle 4.5:** Vergleich der Ergebnisse des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens mit der korrekten Lösung des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers

	Sekanten-Steifigkeitsverfahren	reibgedämpfter ZFS
$u_1$	$\hat{u}_1 = 0.07474 \text{ m}$	$\hat{u}_1 = 0.06688 \text{ m}$
$u_2$	$\hat{u}_2 = 0.09257 \text{ m}$	$\hat{u}_2 = 0.08222 \text{ m}$
$\Delta u = u_2 - u_1$	$\Delta \hat{u} = 0.02107 \text{ m}$	$\Delta \hat{u} = 0.01761 \text{ m}$
$F_{\text{unten}}$	$F_{k,1} + F_{d,1} = 489.92 \text{ kN}$	$F_{k,1} + F_{d,1} + F_{\text{Reibung}} = 371.12 \text{ kN}$
$F_{\text{oben}}$	$F_{k,2} + F_{d,2} = 474.02 \text{ kN}$	$F_{k,2} + F_{d,2} = 398.49 \text{ kN}$

Als Ausgangswert wird wiederum eine Relativverschiebungsamplitude in der Höhe von  $\hat{u}_{ZFS,1} = 0.05 \text{ m}$  gewählt. Für die vereinfachte Betrachtung des Systems als Einfreiheitsgradschwinger berechnet sich dann die zugehörige Eigenperiode  $T_{\ddot{a}qui,1}$  gemäß Gleichung (4.107) zu:

$$T_{\ddot{a}qui,1} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{2.0 \text{ m}} + \frac{0.05}{0.05 \text{ m}}\right) \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}} = 1.6379 \text{ s}$$

Damit kann dem in Bild 2.35 wiedergegebenen Antwortspektrum der zugehörige Spektralwert in Höhe von  $S_{e,1} = 1.748 \text{ m/s}^2$  entnommen werden, der dann anschließend noch auf die aktuell vorhandene Dämpfung umzurechnen ist. Der äquivalente Dämpfungsgrad gemäß Gleichung (4.106) wurde bereits für die Anwendung des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens in Kombination mit der Zeitverlaufsmethode mit  $\xi_{\ddot{a}qui,1} = 0.4244$  ermittelt. Mit diesem berechnet sich der Dämpfungs-Korrekturbeiwert gemäß Gleichung (2.167) zu:

$$\eta_{\ddot{a}qui,1} = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + 0.4244}} = 0.4591$$

Daraus resultiert dann eine anzusetzende Horizontalbeschleunigung in der Höhe von  $\eta_{\ddot{a}qui,1} \cdot S_e = 0.4591 \cdot 1.748 \text{ m/s}^2 = 0.8025 \text{ m/s}^2$ . Um nun die Güte der Lösung mit der Eingangsgröße der Relativverschiebungsamplitude beurteilen zu können, wird mittels des in Gleichung (2.161) gegebenen Zusammenhangs der Spektralwert der Verschiebung berechnet:

$$S_d = \frac{1}{\omega_1^2} \cdot \eta_{\ddot{a}qui} \cdot S_e$$

$$S_{d,1} = \frac{1}{\left(3.8360 \frac{1}{\text{s}}\right)^2} \cdot 0.8025 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.05454 \text{ m}$$

In Tabelle 4.6 ist das weitere iterative Vorgehen wiederum für die Annäherung von zwei Seiten gezeigt:

**Tabelle 4.6:** Sekanten-Steifigkeitsverfahren mit Hilfe des Antwortspektrums

Iteration	$\hat{u}_{1,n}$	$T_{\ddot{a}qui,n}$	$\omega_{\ddot{a}qui,n}$	$\xi_{\ddot{a}qui,n}$	$\eta_{\ddot{a}qui,n}$	$S_{e,n}$	$\eta_{\ddot{a}qui,n} \cdot S_{e,n}$	$S_{d,n}$	$\hat{u}/S_{d,n}$
	[m]	[s]	$[\frac{1}{s}]$	[ ]	[ ]	$[\frac{m}{s^2}]$	$[\frac{m}{s^2}]$	[m]	[ ]
$n_{u,1}$	0.0500	1.6379	3.8360	0.42441	0.45912	1.7480	0.8025	0.05454	1.0908
$n_{u,2}$	0.0545	1.6854	3.7281	0.41195	0.46527	1.6252	0.7562	0.05440	0.9975
$n_{u,3}$	0.0544	1.6840	3.7311	0.41231	0.46509	1.6278	0.7571	0.05438	1.9996
$n_{o,1}$	0.0800	1.8913	3.3221	0.35368	0.49772	1.5220	0.7575	0.06864	0.8580
$n_{o,2}$	0.0686	1.8100	3.4715	0.37750	0.48365	1.5154	0.7329	0.06082	0.8861
$n_{o,3}$	0.0608	1.7447	3.6014	0.39586	0.47359	1.4986	0.7097	0.05472	0.8997
$n_{o,4}$	0.0547	1.6872	3.7241	0.41147	0.46551	1.6208	0.7545	0.05440	0.9942
$n_{o,5}$	0.0544	1.6840	3.7311	0.41231	0.46509	1.6278	0.7571	0.05438	0.9996

Im Vergleich zu den zuvor erhaltenen Ergebnissen werden hier mit  $S_d = \hat{u} = 0.05438 \text{ m}$  tendenziell etwas zu niedrige Werte für die Relativverschiebung und in der Folge mit  $\eta_{\ddot{a}qui,n} \cdot S_{e,n} = 0.7571 \text{ m/s}^2$  auch zu niedrige Werte für die Beschleunigungswerte erhalten. Der Grund liegt hier vornehmlich in der für die Anwendung des Antwortspektrumsverfahrens vorgenommenen Vereinfachung des Beispielsystems auf einen Einfreiheitsgradschwinger. In der nachfolgenden Tabelle 4.7 sind die Ergebnisse zusammengestellt.

**Tabelle 4.7:** Gegenüberstellung der Ergebnisse des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens mit denjenigen der korrekten Lösung

	Sekanten-Steifigkeitsverfahren mit Zeitverlaufsmethode	Sekanten-Steifigkeitsverfahren mit Antwortspektrum	reibgedämpfter ZFS
$u_1$	$\hat{u}_1 = 0.07474 \text{ m}$	$\hat{u} = 0.05438 \text{ m}$	$\hat{u}_1 = 0.06688 \text{ m}$
$u_2$	$\hat{u}_2 = 0.09257 \text{ m}$		$\hat{u}_2 = 0.08222 \text{ m}$
$F_{unten}$	$\hat{F}_{k,1} + \hat{F}_{d,1}$  $= 489.92 \text{ kN}$	$\eta_{\ddot{a}qui,n} \cdot S_{e,n} \cdot m_{ges}$ $= 453\,400 \text{ kg} \cdot 0.7571 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $= 343.27 \text{ kN}$	$\hat{F}_{k,1} + \hat{F}_{d,1} + F_{Reibung}$  $= 371.12 \text{ kN}$
$F_{oben}$	$\hat{F}_{k,2} + F_{d,2} = 474.02 \text{ kN}$		$\hat{F}_{k,2} + \hat{F}_{d,2} = 398.49 \text{ kN}$

Um einen direkten Vergleich der zuvor am Einfreiheitsgradschwinger ermittelten Ergebnisse zum realen Schwingverhalten zu erhalten, wird zunächst das auf die Reibung  $\mu = 0.05$  bezogene Antwortspektrum für das in Bild 2.35 gegebene Akzellerogramm konstruiert. Dazu werden die Steifigkeit  $k$  eines reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers bei gleich bleibendem Dämpfungsgrad  $\xi = 0.05$  und Eigengewicht  $m_{ges} = m_{ges} = 453\,400 \text{ kg}$  in diskreten Schritten angehoben

und jeweils die Schwingverläufe mittels einer Zeitverlaufsrechnung ermittelt. Die jeweils maximalen Schwingamplituden werden anschließend extrahiert und zusammen mit der zugehörigen Eigenperiode  $T$  notiert und graphisch dargestellt.

Die zugrunde gelegte Modellvorstellung sowie das Ergebnis in Form der Reib-Antwortspektren sind in den Bildern 4.20 und 4.21 dargestellt.

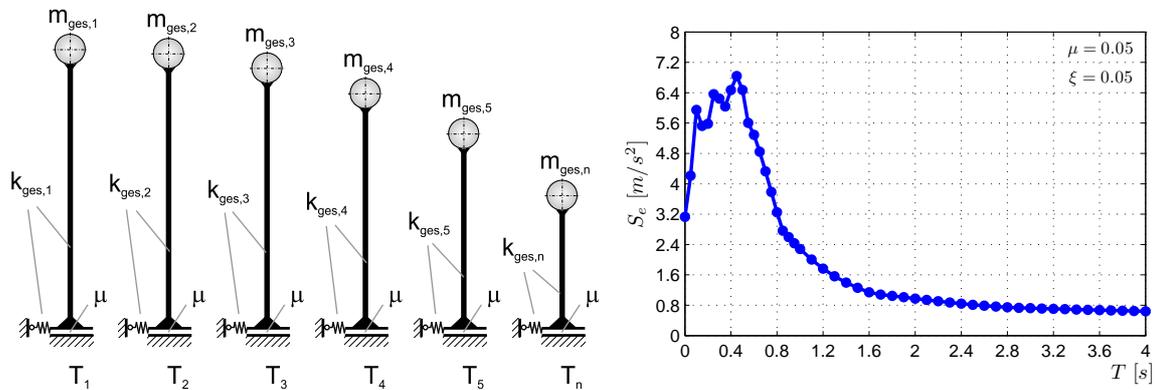


Bild 4.20: Reib-Antwortspektrum

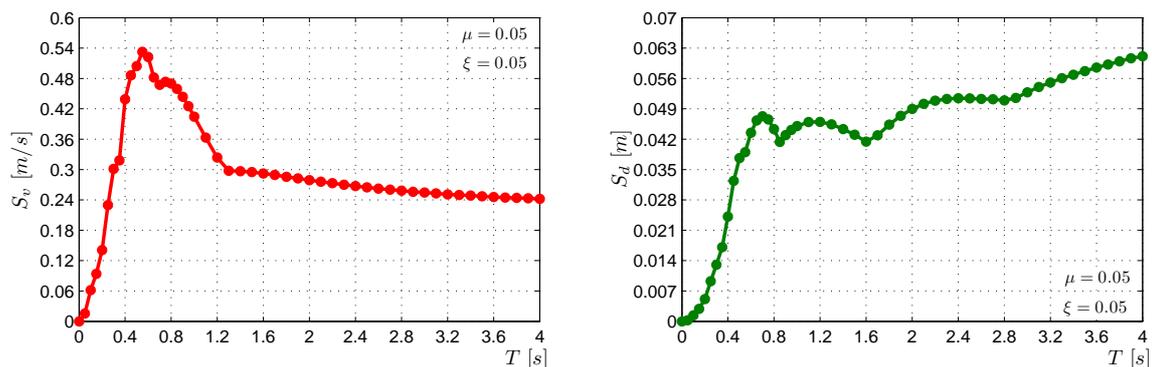
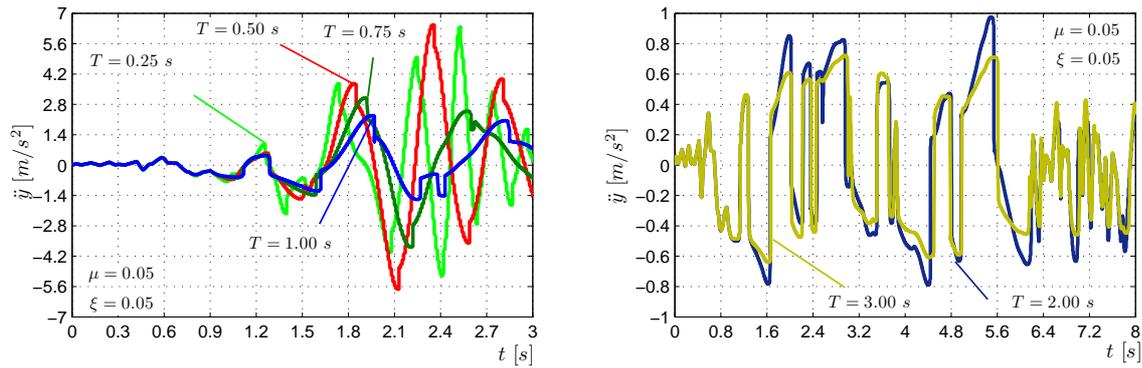


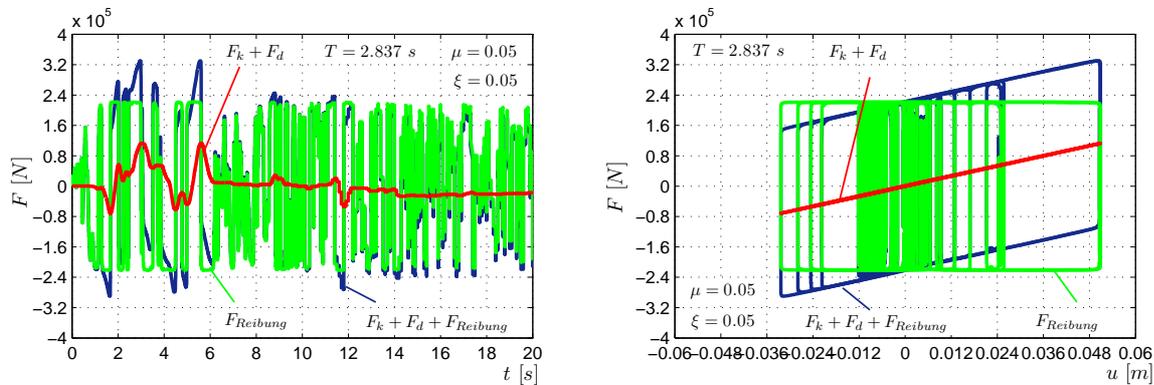
Bild 4.21: Geschwindigkeits- und Verschiebungsspektrum des reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers

Die zur Konstruktion des Reib-Antwortspektrums ermittelten Schwingungsreaktionen sind in Form von ausgewählten Beschleunigungsverläufen in Bild 4.22 wiedergegeben.

Die Eigenperiode des auf einen Einfreiheitsgradschwinger zurückgeführten Beispielsystems beträgt  $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2.0 \text{ m}}{9.81 \text{ m/s}^2}} = 2.837 \text{ s}$ . Gemäß dem Reib-Antwortspektrum ermittelt sich die zugehörige Spektralbeschleunigung entsprechend zu  $S_e = 0.73997 \text{ m/s}^2$ . Die maximal geweckte Reaktionskraft beträgt  $(F_k + F_d) + F_{Reibung} = 113.28 \text{ kN} + 222.39 \text{ kN} = 335.67 \text{ kN}$  und die maximale Relativverschiebung zwischen Baugrund und Schwingmasse wird mit  $\hat{u} = 0.05094 \text{ m}$  erhalten. Die mit Hilfe des iterativen Vorgehens unter Anwendung des Dämpfungs-Korrekturbeiwertes  $\eta_{äqui,n}$  erhaltenen Werte können damit in guter Näherung bestätigt werden. Die zeitliche Abfolge der Schwingreaktion des für das Antwortspektrenverfahren auf einen Einfreiheitsgradschwinger reduzierten Beispielsystems kann dem Bild 4.23 entnommen werden.



**Bild 4.22:** Verschiedenen Eigenperioden zugeordnete Beschleunigungsverläufe des reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers



**Bild 4.23:** Erdbebenreaktion des auf einen Einfreiheitsgradschwinger reduzierten Beispielsystems

Im Vergleich zu den am Zweifreiheitsgradschwinger ermittelten Ergebnissen wird die Schwingreaktion durch die Reduzierung auf einen Einfreiheitsgradschwinger offensichtlich sowohl in Hinsicht der geweckten Trägheitskräfte als auch in Hinsicht der vorzuhaltenden Relativverschiebungswege unterschätzt.

Für die Auslegung der seismischen Isolierung ist es daher stets empfehlenswert, die Baustruktur bei der Modellierung in Form eines Zweifreiheitsgradschwingers abzubilden, um den Einfluss der Schwingmasse unmittelbar oberhalb der Isolierebene mit zu berücksichtigen. Eine detailliertere Diskretisierung der darüber aufgehenden Bauteile auf weitere Einzelmassen, sinnigerweise jeweils auf die Stockwerksebenen konzentriert, hat hingegen einen wesentlich geringeren Einfluss auf die erhaltenen Reaktionsgrößen, da für diese die erste Eigenform üblicherweise deutlich dominiert. Aus den genannten Gründen wird das Sekanten-Steifigkeitsverfahren in Zusammenhang mit der Antwortspektrenmethode nachfolgend für das Beispiel, ergänzend auch für die Betrachtung als Zweifreiheitsgradschwinger gezeigt.

Die Steifigkeit  $k_2$  sowie die Massen  $m_1$  und  $m_2$  bleiben während der Iteration unverändert, während sich die äquivalente Gleitpendellagersteifigkeit gemäß Gleichung (4.104) entsprechend in Abhängigkeit von  $\hat{u}_n$  ändert. In der Folge werden gemäß Gleichung (4.112) auch die Eigen-

kreisfrequenzen und damit die Eigenperioden  $T_1$  und  $T_2$  des Systems von der Iteration erfasst, für die jeweils der Beschleunigungsspektralwert aus dem Antwortspektrum abgelesen wird. Die wiederum mit dem Startwert  $\hat{u}_1 = 0.05 \text{ m}$  beginnende Iteration des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens kann der Tabelle 4.8 entnommen werden.

**Tabelle 4.8:** Iteratives Vorgehen des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens zur Bestimmung der Erdbebenreaktion des Zweifreiheitsgradschwingers mit Hilfe von Antwortspektren

	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
$\hat{u}_{1,n}$	0.05000 $m$	0.06105 $m$	0.06450 $m$	0.06399 $m$
$k_{\ddot{a}qui,1,n}$	6 671 781 $\frac{N}{m}$	5 866 599 $\frac{N}{m}$	5 672 016 $\frac{N}{m}$	5 699 597 $\frac{N}{m}$
$\omega_{1,n}$	3.4101 $\frac{1}{s}$	3.2394 $\frac{1}{s}$	3.1954 $\frac{1}{s}$	3.2017 $\frac{1}{s}$
$\omega_{2,n}$	32.6302 $\frac{1}{s}$	32.2105 $\frac{1}{s}$	32.1084 $\frac{1}{s}$	32.1229 $\frac{1}{s}$
$T_{1,n}$	1.84250 $s$	1.93961 $s$	1.96634 $s$	1.96246 $m$
$T_{2,n}$	0.19256 $s$	0.19507 $s$	0.19569 $s$	0.19560 $s$
$\xi_{\ddot{a}qui,1,n}$	0.42441	0.39529	0.38701	0.38822
$\eta_{\ddot{a}qui,1,n}$	0.45912	0.47389	0.47836	0.47770
$S_{e,1,n}$	1.54640 $\frac{m}{s^2}$	1.42822 $\frac{m}{s^2}$	1.36574 $\frac{m}{s^2}$	1.37070 $\frac{m}{s^2}$
$S_{e,1,n} \cdot \eta_{\ddot{a}qui,1,n}$	0.70998 $\frac{m}{s^2}$	0.67682 $\frac{m}{s^2}$	0.65332 $\frac{m}{s^2}$	0.65478 $\frac{m}{s^2}$
$S_{e,2,n}$	9.23566 $\frac{m}{s^2}$	9.04875 $\frac{m}{s^2}$	8.94058 $\frac{m}{s^2}$	8.83588 $\frac{m}{s^2}$
$S_{d,1,n} = \frac{\xi_{e,1} \cdot \eta_{\ddot{a}qui,1,n}}{\omega_{1,n}^2}$	0.06105 $m$	0.06450 $m$	0.06399 $m$	0.06388 $m$
$S_{d,2,n} = \frac{\xi_{e,2}}{\omega_{2,n}^2}$	0.00867 $m$	0.00872 $m$	0.00867 $m$	0.00856 $m$
$\frac{S_{d,1,n}}{\hat{u}_{1,n}}$	1.2210	1.0564	0.9921	0.9983
$S_{d,1,n} + S_{d,2,n}$	0.06973 $m$	0.07322 $m$	0.07266 $m$	0.07244 $m$
$\sqrt{S_{d,1,n}^2 + S_{d,2,n}^2}$	0.06167 $m$	0.06508 $m$	0.06457 $m$	0.06445 $m$

Wird die erhaltene Relativverschiebung zwischen Untergrund und Bodenplatte aus den Absolutbeträgen der Modalwerte gebildet, wird eine Größenordnung von  $S_{d,1,n} + S_{d,2,n} = 0.07244 \text{ m}$  bzw. gemäß der SRSS-Kombination eine Größenordnung von  $\sqrt{(S_{d,1,n})^2 + (S_{d,2,n})^2} = 0.06445 \text{ m}$  erhalten. Damit wird im Vergleich zum exakt berechneten Wert von  $\hat{u}_1 = 0.06688 \text{ m}$  eine ausreichende Übereinstimmung erzielt. Tendenziell besteht aber die Tendenz, die Dissipationswirkung infolge Reibung durch den Dämpfungs-Korrekturbeiwert  $\eta_{\ddot{a}qui}$  zu überschätzen.

Um die zu dem Antwortspektrumverfahren gehörigen Schwingungsreaktionen zu ermitteln, sind zunächst die in Kapitel 2.4.10 hergeleiteten modalen Massen sowie die Beteiligungsfaktoren des Systems gemäß der Gleichung (2.176) zu berechnen. Die dazu benötigten Eigenvektoren der Modalmatrix berechnen sich im Fall des hier vorliegenden Zweifreiheitsgradschwingers vereinfacht zu:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{k_1}{k_1 - \omega_1^2 \cdot m_1} \quad (4.113)$$

$$\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{k_1}{k_1 - \omega_2^2 \cdot m_1} \quad (4.114)$$

Werden die Werte der unteren Schwingordinaten mit  $a_{2,1}$  und  $a_{2,2}$  dem Wert 1 belegt, ergibt sich die Modalmatrix zu:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1.28310 & -0.05208 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Dies führt auf die folgenden modalen Massen und Beteiligungsfaktoren:

$$\underline{M} = \underline{A}^T \underline{m} \underline{A} \rightarrow M_i = \sum_{k=1}^n m_k \cdot a_{ki}^2$$

$$M_1 = 425\,000 \text{ kg} \cdot 1.28310^2 + 28\,400 \text{ kg} \cdot 1^2 = 728\,100 \text{ kg}$$

$$M_2 = 425\,000 \text{ kg} \cdot 0.05208^2 + 28\,400 \text{ kg} \cdot 1^2 = 29\,553 \text{ kg}$$

$$L_i = \underline{a}_i^T \underline{m} \underline{I} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot a_{ki} \quad (4.116)$$

$$L_1 = 425\,000 \text{ kg} \cdot 1.28310 + 28\,400 \text{ kg} \cdot 1 = 573\,718 \text{ kg}$$

$$L_2 = 425\,000 \text{ kg} \cdot (-0.05208) + 28\,400 \text{ kg} \cdot 1 = 6\,266 \text{ kg}$$

Die am Fundament angreifenden Lasten für die jeweilige Schwingungsform berechnen sich damit gemäß Gleichung (2.181) zu:

$$H_{ges,i,max} = \frac{L_i^2}{M_i} \cdot S_a(\omega_i, \xi_i) = m_{ei} \cdot S_a(\omega_i, \xi_i)$$

$$H_{ges,1,max} = \frac{573\,718 \text{ kg}^2}{728\,100 \text{ kg}} \cdot 0.65478 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 296.20 \text{ kN}$$

$$H_{ges,2,max} = \frac{6\,266 \text{ kg}^2}{29\,553 \text{ kg}} \cdot 8.83588 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.10 \text{ kN}$$

Die überlagerte Reaktion aus den Absolutbeträgen der Modalwerte beträgt demnach  $H_{ges} = 305.00 \text{ kN}$  und gemäß der SRSS-Kombination  $H_{ges} = 296.34 \text{ kN}$ . Auch hier werden die infolge der Fußpunkterregung geweckten Kräfte offensichtlich tendenziell eher unterschätzt.

Abschließend ist anzumerken, dass die für die Anwendung einer äquivalent linearen Berechnung in DIN EN 1998-1:2010-12 [31] unter Punkt 10.9.2 geforderten Kriterien beim Einsatz von Gleitpendellagern oftmals nicht erfüllt sind. So ist die Forderung nach einem maximalen effektiven Dämpfungsgrades von 30 % sowohl im vorliegenden Fall als auch für die in [95] gegebenen Beispielsystemen nicht eingehalten. In Hinsicht auf die Dämpfungsgrade lassen sich die Zusammenhänge anhand der Graphen des Bildes 4.13 gut nachvollziehen, indem eine gedachten horizontale Linie in der Höhe von  $\xi = 0.30$  ergänzt wird.

In den genannten Beispielen wurde für den Dämpfungs-Korrekturbeiwert gemäß der allgemein gültigen Gleichung (2.167) ferner der in [31] geforderte Mindestwert  $\eta \geq 0.55$  ignoriert. Im Brückenbau ist dies gerechtfertigt, da der Mindestwert hier gemäß [34] unter Punkt 7.5.4 lediglich mit dem Wert  $\eta \geq 0.40$  spezifiziert ist, während in der Vorgängerversion [33] diesbezügliche Angaben gänzlich fehlen. Studien von LIN und CHANG zeigen aber ohnehin, dass eine Zuschärfung zur Ermittlung des Dämpfungs-Korrekturbeiwertes unter Berücksichtigung der Bauart und des Untergrundes sinnvoll erscheint [96].

### 4.3 Abwandlungen und Weiterentwicklungen des Gleitpendellagers

Erstmals der Öffentlichkeit vorgestellt wurde das Prinzip des Gleitpendellagers mit dem Beitrag [130] im Jahr 1987, um anschließend durch die Veröffentlichung [131] im Jahr 1990 einen breiteren Bekanntheitsgrad zu erfahren. Die Funktionsweise des darin als **F**riktion **P**endulum **B**earing (FPS) bezeichneten Lagers wurde bereits damals sowohl theoretisch als auch versuchstechnisch hergeleitet und erforscht.

Seitdem findet das Prinzip des Gleitpendellagers zum Schutz sowohl von Neubauten als auch zur Ertüchtigung bestehender Bauwerke breite Anwendung [15, 56, 65, 129, 123].

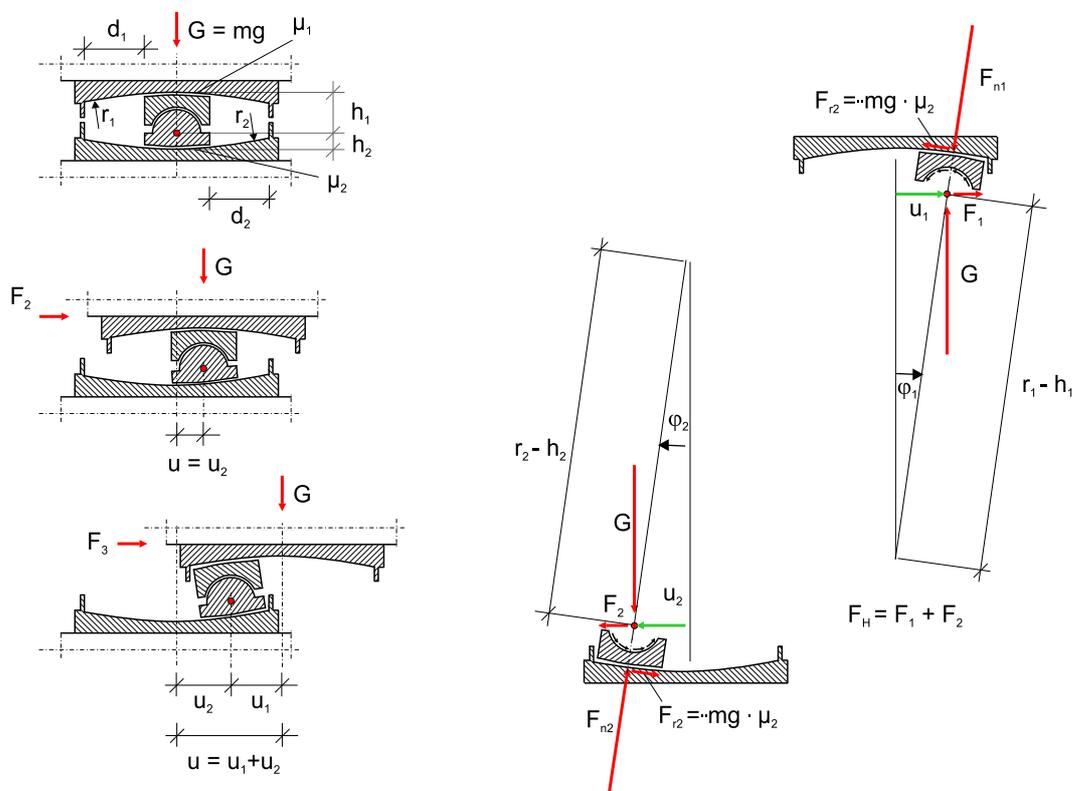
Aufbauend auf der ursprünglichen Ausführung wurden zwischenzeitlich zudem zahlreiche Abwandlungen und Varianten des Gleitpendellagers entwickelt. Diese haben zum einen die Beeinflussung der Hysteresenform und damit des Steifigkeits- und Reibverhaltens in Abhängigkeit der Auslenkungsamplitude zum Ziel. Zum anderen werden aus wirtschaftlichen Gründen Lösungen anvisiert, mit denen sich sowohl der Material- als auch der Platzbedarf reduzieren lässt.

Davon abgesehen wurden Sonderlösungen erarbeitet, die beispielsweise zusätzlich zum herkömmlichen Lastabtrag auch die Aufnahme von während des Bebens phasenweise geweckten Zugkräften erlauben.

### 4.3.1 Weiterentwicklungen des Gleitpendellagers zur Beeinflussung der Hysteresenform

Auf die Beeinflussung bzw. die individuellere Ausgestaltung der Hysteresenform zielen diejenigen Entwicklungen ab, die durch das Hinzuschalten zusätzlicher Bauteile und Reibflächen gekennzeichnet sind. Dazu zählen die so genannten (**D**ouble **C**oncave **F**riktion **P**endulum **B**earing) **DCFP**-Lager [25], in [121] als (**M**ultiple **F**riktion **P**endulum **S**ystem) **MFPS**-Lager bezeichnet, ebenso wie die (**T**riple **P**endulum **B**earings) **TPB**-Lager, deren Aufbau und Funktionsweise nachfolgend kurz erläutert werden.

Das erweiterte Modell des **DCFP**-Lagers wird erhalten, indem der Standardausführung des Gleitpendellagers eine weitere Reibfläche hinzugefügt wird. Die ausführliche Herleitung des Kraft-Verformungs-Verhaltens kann unter anderem dem Beitrag von FENZ und CONSTANTINO [42] entnommen werden. Neben der im Vergleich zur ursprünglichen Ausführung trotz gleich bleibender Lagerabmessungen vergrößerten Verschiebungskapazität lässt sich mit dem **DCFP**-Lager vor allem das Rückstell- und Reibverhalten individueller gestalten. Das kinematische System sowie die nachfolgend verwendete Nomenklatur des doppelt konkaven Gleitpendellagers kann dem Bild 4.24 entnommen werden.



**Bild 4.24:** Schematischer Aufbau des doppelt konkaven Gleitpendellagers (**DCFP**-Lager) im zentrierten sowie im ausgelenkten Zustand

Die nachfolgenden Ausführungen sind wiederum auf kleine Winkeländerungen  $\varphi_1 = \frac{u_1}{r_1 - h_1}$  und  $\varphi_2 = \frac{u_2}{r_2 - h_2}$  bezogen, für die gemäß Kapitel 4.2.3 die linearisierten und damit genäherten Kraft-Verformungs-Beziehungen ausreichend genau sind. In der Folge lässt sich die für die Standardausführung des Gleitpendellagers hergeleitete Gleichung (4.98) direkt auf die obere und untere Lagerschale des **DCFP**-Lagers beziehen:

$$F_1 = mg \cdot \frac{u_1}{r_1 - h_1} + (\text{sign } \dot{u}_1) \cdot \mu_1 \cdot mg \quad (4.117)$$

$$F_2 = mg \cdot \frac{u_2}{r_2 - h_2} + (\text{sign } \dot{u}_2) \cdot \mu_2 \cdot mg \quad (4.118)$$

Die sich für die einzelnen Lagerschalen einstellenden Einzelverschiebungsgrößen gehen aus den Gleichungen (4.117) und (4.118) unmittelbar hervor und lauten:

$$u_1 = \left( \frac{F_H}{mg} - \mu_1 \right) \cdot (r_1 - h_1) \quad u_2 = \left( \frac{F_H}{mg} - \mu_2 \right) \cdot (r_2 - h_2) \quad (4.119)$$

Der Zustand, in dem Gleiten sowohl auf der unteren als auch auf der oberen Lagerschale stattfindet, wird durch die folgende Beziehung beschrieben:

$$F_3 = \left( \frac{u}{r_1 - h_1 + r_2 - h_2} \right) \cdot mg + (\text{sign } \dot{u}) \cdot \left( \frac{\mu_1 \cdot (r_1 - h_1) + \mu_2 \cdot (r_2 - h_2)}{r_1 - h_1 + r_2 - h_2} \right) \cdot mg \quad (4.120)$$

Unterscheiden sich die zu überwindenden Reibwiderstände  $F_{r1} = \mu_1 \cdot mg$  und  $F_{r2} = \mu_2 \cdot mg$  voneinander, startet der Gleitprozess für eine von außen aufgebrachte Verschiebung zunächst allein in der Gleitfläche mit dem geringeren Reibkoeffizienten. Die zweite Reibfläche verbleibt dabei solange in Ruhe, bis ein gewisser Schwellenwert  $u^*$  überschritten und auch die zweite Gleitfläche vom Gleitprozess erfasst wird.

$$\text{für } F_{r1} = \mu_1 \cdot mg < F < F_{r2} = \mu_2 \cdot mg : \quad \text{gilt} \quad u^* = (\mu_2 - \mu_1) \cdot (r_1 - h_1) \quad (4.121)$$

Die gesamtheitliche Kraft-Verschiebungs-Beziehung des **DCFP**-Lagers gliedert sich demnach in verschiedene Phasen, die sich in Abhängigkeit der vorhandenen Reibkoeffizienten und des momentanen Verschiebungszustandes einstellen. Dies führt zu der in der Tabelle 4.9 gegebenen Fallunterscheidung.

Für den Zustand, in dem der Gleitprozess in beiden Lagerschalen gleichzeitig stattfindet, lässt sich ferner eine das Gesamtlager charakterisierende so genannte effektive Reibung  $\mu_e$  angeben, die aus dem zweiten Term der Gleichung (4.120) hervorgeht:

**Tabelle 4.9:** Kraft-Verformungs-Beziehung des doppelt konkaven Gleitpendellagers

falls $u \geq u^*$	dann gilt: $F_{ges} = F_3$ gemäß Gleichung (4.120)
falls $u < u^*$ und $\mu_1 < \mu_2$	dann gilt: $F_{ges} = F_1$ gemäß Gleichung (4.117)
falls $u < u^*$ und $\mu_1 > \mu_2$	dann gilt: $F_{ges} = F_2$ gemäß Gleichung (4.118)

$$\mu_e = \frac{\mu_1 \cdot (r_1 - h_1) + \mu_2 \cdot (r_2 - h_2)}{r_1 - h_1 + r_2 - h_2} \quad (4.122)$$

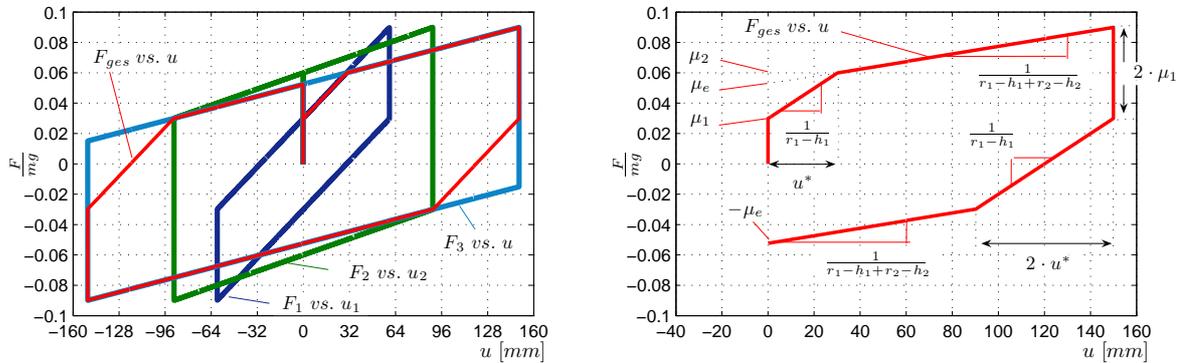
Die Ausführung des **DCFP**-Lagers mit unterschiedlichen Reibkoeffizienten bringt zudem die Besonderheit mit sich, dass die zwischen den Lagerschalen befindliche Gleitkonstruktion nach Durchfahren einer halben bzw. kompletten Hysterese nicht in der ursprünglichen Nulllage zu liegen kommt. Vielmehr verbleibt zwischen der unteren und oberen Lagerschale und dem Gleiter ein gewisser Versatz  $\pm \bar{u}$ , der wie folgt berechnet werden kann:

$$\pm \bar{u} = (\mu_e - \mu_1) \cdot (r_1 - h_1) \quad \text{bzw.} \quad \pm \bar{u} = (\mu_e - \mu_2) \cdot (r_2 - h_2) \quad (4.123)$$

Um die Hystereseform des **DCFP**-Lagers zu erläutern, wird das in [42] und durch die folgenden Systemparameter gegebene Beispielsystem aufgegriffen:

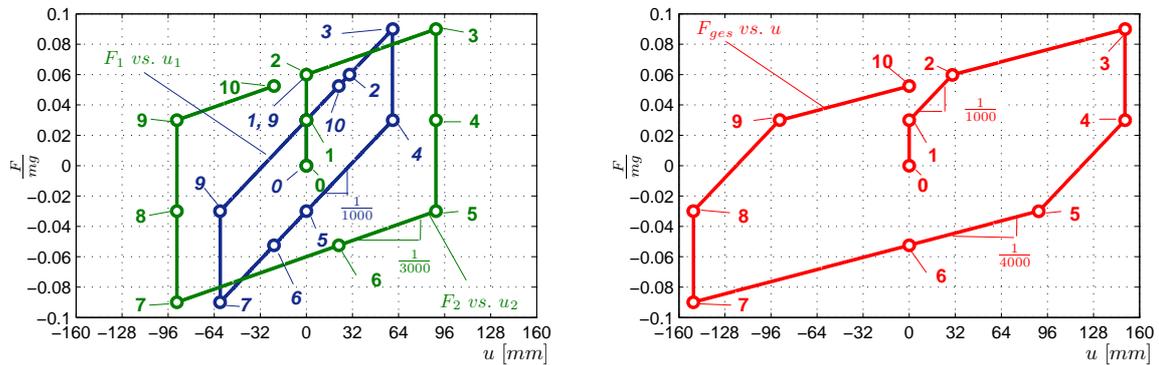
- $r_1 - h_1 = 1\,000 \text{ mm}$
- $r_2 - h_2 = 3\,000 \text{ mm}$
- $\mu_1 = 0.03$
- $\mu_2 = 0.06$
- $u^* = (\mu_2 - \mu_1) \cdot (r_1 - h_1) = (0.06 - 0.03) \cdot 1\,000 \text{ mm} = 30 \text{ mm}$
- $\hat{u}_{\text{gewählt}} = 150 \text{ mm}$
- $\frac{F_H}{mg} = \left( \frac{u}{r_1 - h_1 + r_2 - h_2} \right) + \left( \frac{\mu_1 \cdot (r_1 - h_1) + \mu_2 \cdot (r_2 - h_2)}{r_1 - h_1 + r_2 - h_2} \right)$   
 $= \left( \frac{150 \text{ mm}}{1\,000 \text{ mm} + 3\,000 \text{ mm}} \right) + \left( \frac{0.03 \cdot 1\,000 \text{ mm} + 0.06 \cdot 3\,000 \text{ mm}}{1\,000 \text{ mm} + 3\,000 \text{ mm}} \right) = 0.09$
- $\hat{u}_1 = \left( \frac{F_H}{mg} - \mu_1 \right) \cdot (r_1 - h_1) = (0.09 - 0.03) \cdot 1\,000 \text{ mm} = 60 \text{ mm}$
- $\hat{u}_2 = \left( \frac{F_H}{mg} - \mu_2 \right) \cdot (r_2 - h_2) = (0.09 - 0.06) \cdot 3\,000 \text{ mm} = 90 \text{ mm}$
- $\mu_e = \frac{\mu_1 \cdot (r_1 - h_1) + \mu_2 \cdot (r_2 - h_2)}{r_1 - h_1 + r_2 - h_2} = \frac{0.03 \cdot 1\,000 \text{ mm} + 0.06 \cdot 3\,000 \text{ mm}}{1\,000 \text{ mm} + 3\,000 \text{ mm}} = 0.0525$
- $\bar{u} = (\mu_e - \mu_1) \cdot (r_1 - h_1) = (\mu_e - \mu_2) \cdot (r_2 - h_2)$   
 $= (0.0525 - 0.03) \cdot 1\,000 \text{ mm} = (0.0525 - 0.06) \cdot 3\,000 \text{ mm} = 22.5 \text{ mm}$

Die sich für dieses System gemäß der Gleichungen 4.117, 4.118 und 4.120 einstellenden Einzelhysteresen sowie die daraus letztendlich resultierende Gesamthysterese sind in Bild 4.25 dargestellt.



**Bild 4.25:** Hysteresekurven des Beispielsystems des doppelt konkaven Gleitpendellagers (DCFP-Lagers)

Um das Bewegungsmuster des doppelt konkaven Gleitpendellagers zu erläutern, dienen die in Bild 4.26 nochmals dargestellten und durch eine entsprechende Nummerierung ergänzten Hysterese Schleifen.



**Bild 4.26:** In der zeitlichen Abfolge nummerierte Hysterese Schleifen des doppelt konkaven Gleitpendellagers (DCFP-Lagers) anhand des Beispielsystems

Die während eines Zyklus auftretenden Bewegungszustände des DCFP-Lagers werden nachfolgend anhand des Beispielsystems stichpunktartig erläutert:

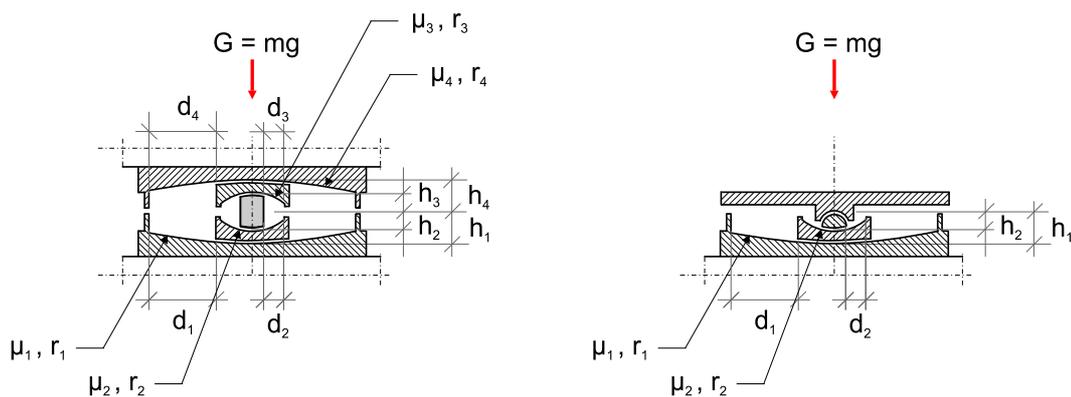
- **Punkt 1:** Sobald die Losbrechkraft in der Höhe von  $\mu_1 \cdot mg$  überwunden ist, setzt der Gleitprozess zunächst allein auf der Lagerschale mit dem geringeren Reibwiderstand ein. Entsprechend reagiert das System auf Verschiebungen unterhalb des Schwellenwertes  $u^*$  mit der Steifigkeit  $\frac{1}{r_1 - h_1}$ . Mit Durchfahren des Schwellenwertes  $u^*$ , erreicht die Horizontalkraft eine Größenordnung, die ausreicht, um den Gleitvorgang auch in der zweiten Lagerschale zu initiieren.

- **Punkt 2:** Gleiten findet nunmehr sowohl auf der unteren als auch auf der oberen Lagerschale gleichzeitig statt, und das System reagiert entsprechend mit der horizontalen Steifigkeit von  $\frac{1}{r_1-h_1+r_2-h_2}$ .
- **Punkt 3:** Der obere Umkehrpunkt der Hysterese ist durch die maximal von außen aufgezogene Verschiebungsamplitude  $+\hat{u}$  gegeben. Für das Beispielsystem stellen sich die in den einzelnen Lagerschalen verursachten Verschiebungsanteile mit  $\hat{u}_1 = 60 \text{ mm}$  und  $\hat{u}_2 = 90 \text{ mm}$  ein.
- **Punkt 4:** Aufgrund der Umkehr der Bewegungsrichtung fällt die auf das System wirkende Horizontalkraft um den Wert  $2 \cdot \mu_1 \cdot mg$  ab. Wird diese unterschritten, setzt der Gleitprozess zunächst wiederum allein auf der Lagerschale mit dem geringeren Reibkoeffizienten ein, und das System reagiert in der Folge mit der Steifigkeit von  $\frac{1}{r_1-h_1}$ .
- **Punkt 5:** Nach Überwinden der Distanzstrecke von  $2 \cdot u^*$  wird auch die zweite Lagerschale wieder vom Gleitprozess erfasst, und das Lager reagiert erneut mit der Steifigkeit von  $\frac{1}{r_1-h_1+r_2-h_2}$ .
- **Punkt 6:** Mit Punkt 6 ist derjenige Bewegungszustand erreicht, in dem die Gesamtverschiebung des Lagers wieder  $u = 0$  Null beträgt. Aufgrund des zwischen Gleitschuh und oberer und unterer Lagerschale verbleibenden Versatzes ist dieser Zustand jedoch nicht exakt identisch mit der Ausgangssituation.
- **Punkt 7:** Der untere Umkehrpunkt der Hysterese ist entsprechend Punkt 3 durch die maximale negative Auslenkungsamplitude  $-\hat{u}$  gekennzeichnet.
- **Punkt 8:** Entspricht Punkt 4.
- **Punkt 9:** Entspricht Punkt 5.
- **Punkt 10:** Nach Durchfahren einer kompletten Hystereseschleife kehrt das Lager hinsichtlich der Gesamtverschiebung definitionsgemäß wieder in seine Nulllage  $u = 0 \text{ mm}$  zurück. Abweichend von der Ausgangssituation verbleibt zwischen Gleitkonstruktion und oberer bzw. unterer Lagerschale jedoch ein Versatz der Größenordnung  $\pm\bar{u}$ .

Eine weitere Fallunterscheidung tritt den vorherigen Betrachtungen hinzu, wenn die die Verschiebungskapazitäten begrenzenden Anschläge der Gleitflächen  $d_1$  und  $d_2$  bewusst dazu verwendet werden, die daraus resultierende versteifende Wirkung zu nutzen. Zu diesbezüglichen weiterführenden Angaben wird auf die Veröffentlichung von CONSTANTINOU und FENZ [43] verwiesen.

Generell ist mit der individuelleren Gestaltungsmöglichkeit der Hystereseform des **DCFP**-Lagers die Möglichkeit gegeben, das Lager beispielsweise derart auszulegen, dass schwachen Erschütterungen mit einer hohen Rückzentrierfähigkeit gepaart mit einer niedrigen Dämpfung und starken

Erschütterungen mit einer hohen Flexibilität gepaart mit einem hohen Dissipationsvermögen begegnet wird [43]. Zur Implementierung des **DCFP**-Lagers in ein FE-Modell bietet es sich an, zwei mit entsprechenden Systemparametern belegte Reib-Feder-Modelle hintereinander in Reihe zu schalten [75]. Die die Einzelverschiebungen begrenzenden Anschläge können in diesem Modell bei Bedarf durch Hinfügen so genannter “GAP-Elemente“ ebenfalls berücksichtigt werden. Aufbauend auf dem Prinzip des **DCFP**-Lagers lässt sich durch Hinzufügen einer weiteren Gleitebene das so genannte **TPB**-Lager [43, 11, 45] konstruieren. Das mechanische Verhalten des in Bild 4.27 dargestellten Lagers wird wiederum erhalten, indem die Verschiebungszustände jeweils einzeln betrachtet und die zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Die horizontale Steifigkeit ist dabei stets umgekehrt proportional zur Summe der Krümmungsradien der jeweils am Gleitprozess beteiligten Lagerschalen. Die dem jeweiligen Bewegungszustand zugeordneten effektiven Reibkoeffizienten lassen sich ebenfalls wieder in Abhängigkeit der jeweiligen an der Reibung beteiligten Reibkoeffizienten herleiten. Auch der Gleitprozess beginnt wiederum grundsätzlich in der Gleitfläche, die den geringsten Reibkoeffizienten aufweist. Alle weiteren Gleitebenen werden sukzessive in Reihenfolge der ggf. zunehmenden Reibkoeffizienten vom Gleitprozess erfasst.

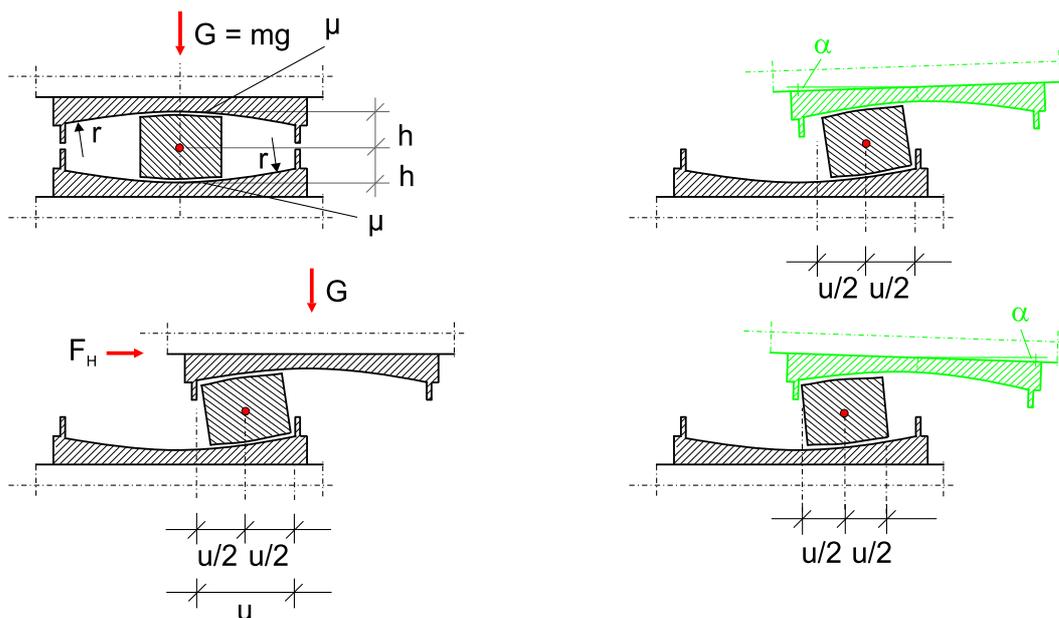


**Bild 4.27:** Schematischer Aufbau des **TPB**-Lagers sowie des modifizierten einfachen Gleitpendellagers

Aus der Kombination des herkömmlichen Gleitpendellagers mit dem **TPB**-Lager lässt sich ferner das ebenfalls in Bild 4.27 dargestellte so genannte modifizierte einfache Gleitpendellager bilden. Dazu weiterführende Angaben sind neben anderen in der Veröffentlichung von CONSTANTINOU und FENZ [43] zu finden. Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass die Abbildung des **TPB**-Lagers durch Hintereinanderschalten mehrerer Reib-Feder-Modelle im Gegensatz zum **DCFP**-Lager nicht zum korrekten Ergebnis führt. Aufgrund der Tatsache, dass ein Gleiten der beiden unteren und der beiden oberen Gleitpaare nicht gleichzeitig stattfindet, sind die Zusammenhänge hier komplexer. Bezüglich der Option, die Lager durch genäherte Modelle abzubilden, wird auf die Ausführungen in [44] verwiesen.

Eine vereinfachte Bauform des **DCFP**-Lagers wird erhalten, wenn die zwischen den Lagerschalen befindliche Gleitkonstruktion durch einen einteiligen und damit in sich starren Gleitschuh

ersetzt wird. Die in der Folge in der Gleitkonstruktion eingebüßte Rotationskapazität äußert sich in einer planparallelen und damit wieder der ursprünglichen Gleitpendellagerausführung entsprechenden Hystereseform. Das Systemverhalten des nachfolgend als **Simple Double Concave Friction Pendulum** bezeichneten **SDCFP**-Lagers ist weitgehend identisch zu demjenigen des **DCFP**-Lagers, falls dessen Lagerschalen mit demselben Krümmungsradius und Reibkoeffizienten ausgeführt werden. In diesem Fall verbleibt allein die unterschiedliche Reaktionsweise, mit der die zwischen Baugrund und aufgehender Baustruktur auftretenden Rotationsbewegungen ausgeglichen werden. Während diese von der ursprünglichen Lagerkonstellation mehr oder minder zwangungsfrei direkt innerhalb der Gleitkonstruktion aufgenommen werden, führt dies bei der Ausführung mit starrem Gleitschuh stets zu horizontalen Zwangsverschiebungen einzelner Lagerteile. In Bild 4.29 sind mögliche Rotationszustände des **DCFP**-Lagers dargestellt, die je nach Einwirkungskombinationen auch als Mischform auftreten können. Wie in Bild 4.28 angedeutet, ist hierbei zu beachten, dass von außen aufgebrachte Verdrehungen stets die einseitige Beschränkung der Verschiebungskapazität nach sich ziehen.



**Bild 4.28:** Schematischer Aufbau des **SDCFP**-Lagers sowie rotationsbedingter Horizontalversatz

Unter Einbeziehung der zuvor aufgeführten Zusammenhänge  $r = r_1 = r_2$  und  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  kann die horizontale Kraft-Verformungs-Beziehung des **SDCFP**-Lagers unmittelbar aus der in [42] allgemeingültig hergeleiteten Gleichung (4.120) geschlussfolgert und wie folgt angeschrieben werden [99]:

$$F_{H,SDCFP} = \frac{u}{2 \cdot (r - h)} \cdot mg + (\text{sign } \dot{u}) \cdot \mu \cdot mg \quad (4.124)$$

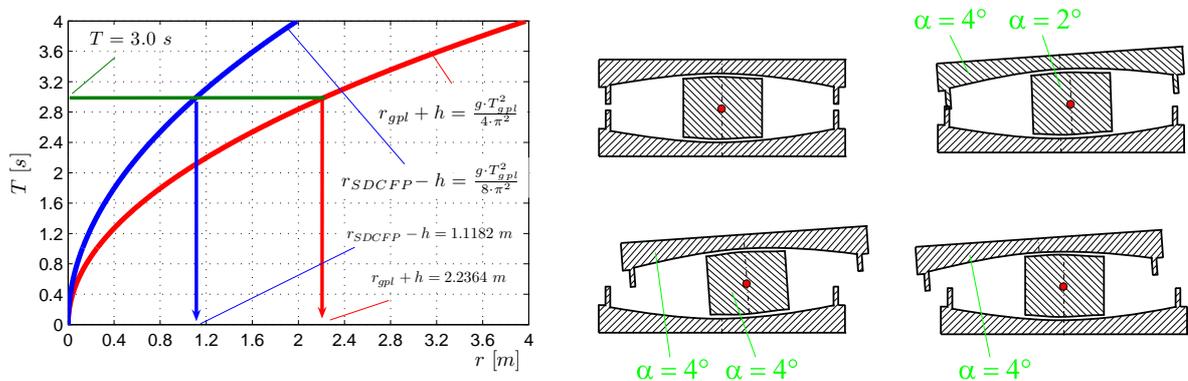
Demnach beträgt die horizontale Steifigkeit des **SDCFP**-Lagers  $k_{SDCFP} = \frac{u}{2 \cdot (r-h)} \cdot mg$ . Wird diese in  $f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$  eingesetzt, führt dies unmittelbar auf die zugehörige Eigenfrequenz  $f_{SDCFP} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (r-h)}}$ . Mit dem Kehrwert  $T = \frac{1}{f}$  und der in Bild 4.1 und Bild 4.28 gegebenen Nomenklatur lassen sich die Gleichungen des herkömmlichen Gleitpendellagers sowie des **SDCFP**-Lagers in eine Form bringen, aus der die für eine gewünschte Eigenperiode erforderlichen Krümmungsradien direkt hervorgehen:

$$T_{gpl} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(r_{Krümmung} + h)}{g}} \rightarrow r_{Krümmung, gpl} = \frac{g \cdot T_{gpl}^2}{4 \cdot \pi^2} - h \quad (4.125)$$

$$T_{SDCFP} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (r - h)}{g}} \rightarrow r_{SDCFP} = \frac{g \cdot T_{SDCFP}^2}{2 \cdot 4 \cdot \pi^2} + h \quad (4.126)$$

Die daraus resultierenden Kurven sowie einzelne Verdrehungszustände des **SDCFP**-Lagers sind in Bild 4.29 dargestellt.

Die Vorteile des **SDCFP**-Lagers gegenüber der Standardausführung liegen vor allem im geringeren Platzbedarf sowie in den wirtschaftlicher herzustellenden Einzelbauteilen. Die allein aufgrund der Lagerschalenkrümmungen bewirkte Zentrierung des Gleitschuhs in Zusammenhang mit den daraus resultierenden Zwängungen ist hinsichtlich der Abnutzung der Gleitoberflächen hingegen eher als nachteilig zu bewerten.



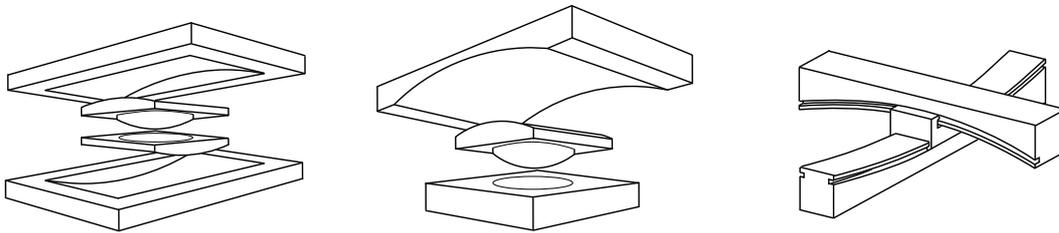
**Bild 4.29:** Eigenperioden in Abhängigkeit der Krümmungsradien sowie mögliche Rotationszustände des **SDCFP**-Lagers

### 4.3.2 Sonderlösungen mit Gleitpendellagern

Nachfolgend wird ein kurzer Überblick über Sonderlösungen gegeben, die ebenfalls dem Prinzip der Gleitpendellager zuzuordnen sind.

Von ROUSSIS und CONSTANTINOU wurde eine Abwandlung des Gleitpendellagers vorgeschlagen, dessen Ausführung neben der eigentlichen Hauptaufgabe der horizontalen Entkopplung

und dem Lastabtrag der vertikalen Druckkräfte zusätzlich auch die Aufnahme von abhebenden Zugkräften erlaubt [109, 108, 107]. Die Gleitflächen werden dazu in zwei konkav gekrümmte und in der Draufsicht senkrecht zueinander angeordnete Laufschiene aufgelöst, die mit Hilfe eines entsprechend ausgebildeten Gleitschuhs miteinander gekoppelt sind. Die prinzipielle Ausführung eines solchen Lagers ist in Bild 4.30 dargestellt. Bezüglich der kinematischen Zusammenhänge sowie der versuchstechnischen Erforschung von Zug-Druck-Gleitpendellagern wird auf die Literatur verwiesen. Als systembedingte Eigenheit sei an dieser Stelle aber noch auf die im Fall von einwirkenden Zugkräften vorhandene negative Steifigkeit des Lagers hingewiesen. Die aus diesem Zustand resultierende Instabilität tritt hinsichtlich des Gesamtsystems zwar nur lokal und zudem zeitlich begrenzt auf [108], ist aufgrund der Tendenz eines unkontrollierten seitlichen Ausweichens je nach System aber im Zweifel dennoch zu beachten.



**Bild 4.30:** Schematischer Aufbau eines Zug-Druck-Gleitpendellagers sowie von Gleitpendellagern mit richtungsabhängigem Verhalten

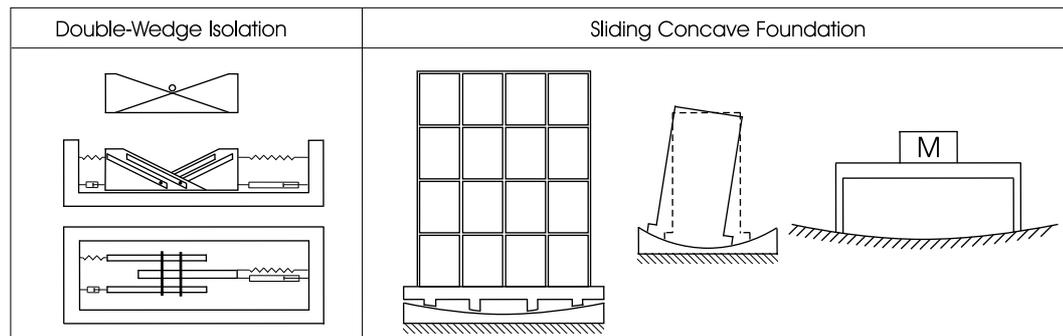
Von BRAUN et. al. wurden Gleitpendellager mit zylindrisch anstatt konkav ausgebildeten Gleitflächen vorgeschlagen, mit denen sich ein bezüglich der Rückstell- und Reibwirkung richtungsabhängiges Verhalten realisieren lässt. Vor allem hinsichtlich der Anwendung im Brückenbau besteht damit zum einen die Möglichkeit, die Lager individuell an das generelle Lagerungskonzept anzupassen, zum anderen können die Lager an die üblicherweise ebenfalls von der Belastungsrichtung abhängige Steifigkeit und Tragkapazität der Brückenpfeiler angepasst werden [16, 16].

### 4.3.3 Auf dem Prinzip des Gleitpendellagers basierende Abwandlungen

Ein dem Gleitpendellager ähnliches Prinzip der Erdbebenisolierung wird in [71] untersucht, dessen Ausführung anstatt der konkav ausgeführten Gleitflächen zwei in Neigungsrichtung entgegengesetzte Keilflächen aufweist. Aufgrund der Einschränkung auf die eindimensionale horizontale Bewegungsrichtung und der zu vermuteten eher nur geringen vertikalen Tragkapazität erscheint das in Bild 4.31 schematisch dargestellte Prinzip baupraktisch aber als weniger geeignet.

Ferner ist auch das in [51] vorgeschlagene Konzept, die komplette Gebäudeeinheit im Sinne einer Pendellagerung zu gründen, dem Prinzip der Gleitpendellagerung zuzuordnen. Die als **Sliding Concave Foundation** bezeichnete Methode der Erdbebenisolierung ist in Bild 4.31 exemplarisch dargestellt. Neben der Auflast der aufgehenden Struktur wird die Eigenperiode des Systems nunmehr zusätzlich auch von dessen Trägheitsmoment bestimmt. Hinsichtlich asymme-

trisch ausgeführter Bauwerke besitzt das System die positive Eigenschaft, dass der Schwerpunkt der horizontalen Steifigkeit stets mit dem Massenschwerpunkt zusammenfällt und in der Folge Torsionsschwingungen von vornherein ausgeschlossen werden können. Ein ausreichend großer Krümmungsradius der Isolierebene in Kombination mit einer ausreichend geringen Gebäudehöhe führt ferner dazu, dass der Massenschwerpunkt unterhalb der fiktiven Pendelaufhängung zu liegen kommt und durch eine horizontale Auslenkung in der Folge stets eine Rückstellkraft aktiviert wird.



**Bild 4.31:** Schematischer Aufbau des so genannten **Double-Wedge Isolators**

#### 4.3.4 Torsion in durch Gleitpendellager isolierten Strukturen

Die Gründe für im Erdbebenfall geweckte Torsionsschwingungen sind vielfältig. Zweifelsohne sind hier allen voran Exzentrizitäten hinsichtlich der Steifigkeits- und Massenverteilung zu nennen. Unabhängig davon kann deren Anregung aber auch direkt durch im Erdbebenverlauf vorhandene Rotationsschwingungen hervorgerufen werden [69]. Im Fall der Gleitpendellagerung werden ferner durch produktionsbedingt verschieden stark ausfallende Reibwiderstände ebenfalls asymmetrische Schwingungsreaktionen hervorgerufen. Ein ähnlicher und ebenfalls zu Torsionsschwingungen führender Mechanismus ist auf die im Erdbebenfall geweckten Kippmomente der aufgehenden Struktur zurückzuführen. Aufgrund der sich daran anpassenden vertikalen Lagerkräfte sind auch die pressungsabhängigen Reibwiderstände und Rückstellkräfte gewissen Schwankungen unterworfen. In Kombination mit der senkrecht auf den die Kippmomente verursachenden Erschütterungen stehenden Horizontalkomponente des Bebens führt auch dieser Effekt zur Anregung von Torsionsschwingungen.

Nichtsdestoweniger ist gerade dann der Einsatz von Gleitpendellagern vorteilhaft, wenn durch Beben induzierte Torsionsschwingungen möglichst weitgehend vermieden bzw. reduziert werden sollen [12]. Dies liegt vor allem in dem Umstand begründet, dass die horizontale Steifigkeit des Gleitpendellagers direkt an die einwirkende Auflast gekoppelt ist. In der Folge wird durch die Verschiebung des Massenschwerpunkts stets auch die Verschiebung des Steifigkeitsschwerpunkts bewirkt. Eine in der Isolierebene durch Massenverlagerung bewirkte Exzentrizität kann im Fall der Gleitpendellauflagerung daher mehr oder minder ausgeschlossen werden. Als Tor-

sionsschwingungen hervorrufende Effekte verbleiben dann vornehmlich nur mehr die bereits zuvor beschriebenen reibbasierten Phänomene. In [12] wird sowohl versuchstechnisch als auch analytisch gezeigt, dass selbst durch stark asymmetrische Lastverteilungen lediglich nur geringe Zusatzverformungen in den Gleitpendellagern hervorgerufen werden. Diese liegen hierbei weit unterhalb der Werte, die durch die einschlägigen Normenwerke allgemeingültig und für alle Lager definiert sind.

Abschließend sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass die in den Lagern gesamtheitlich hervorgerufenen Verschiebungswege unter anderem auch durch das Verhältnis zwischen Torsionseigenfrequenz und Biegeeigenfrequenz beeinflusst sind. Weiterhin ist im Fall der Gleitpendellagerung darauf zu achten, dass Rotationen um die Vertikalachse je nach Lagerungskonzept ein unterschiedliches Höhenniveau in der Isolierebene zur Folge haben können. Im Extremfall kann dies das Abheben einzelner Lager nach sich ziehen.

# Kapitel 5

## Versuche an Gleitpendellagern

### 5.1 Einführung

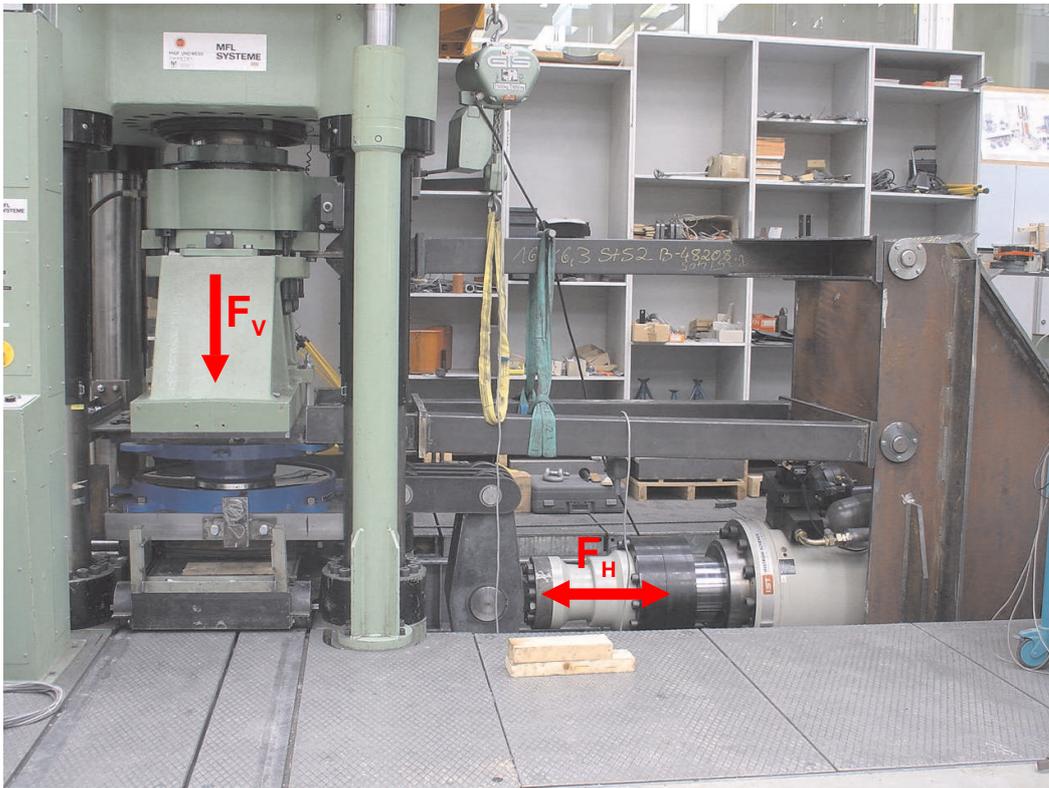
Im Rahmen der durch das Unternehmen MAURER SÖHNE GmbH, zwischenzeitlich umfirmiert in MAURER AG, an der Universität der Bundeswehr München beauftragten Produktions- und Produkttests wurden zahlreiche Gleitpendellager hinsichtlich ihres mechanischen Verhaltens sowie auf möglicherweise auftretende Abnutzungserscheinungen hin untersucht. In der Folge wurde zur statistisch gesicherten Auswertung der aus den in den Gleitebenen verwendeten Materialkombinationen resultierenden Reibkoeffizienten  $\mu$  eine breite Datenbasis geschaffen.

### 5.2 Genereller Aufbau der Versuchseinrichtung

Zur vertikalen Lastaufbringung wurde ein servohydraulisch gesteuerter MFL-Teststand vom Typ UPS 1000 mit einer maximalen Prüfkapazität von  $F_V = + 10\,000\text{ kN}$  genutzt. Aufgrund der hier vorliegenden Testkonfiguration kommt der Steuerung des Hydraulikzylinders in Form eines servohydraulisches Regelventils vom Typ MOOG 508K03DOJNO D101 besondere Bedeutung zu, da diese die Aufrechterhaltung der konstanten Auflast trotz der mit der seitlichen Auslenkung einhergehenden Höhenänderung der oberen Gleitpendellagerschale zu gewährleisten hat. Die horizontale Lasteinleitung wurde durch den Einsatz eines Hydraulikzylinders der Firma Schenck mit einer maximalen Prüfkapazität von  $F_H = \pm 2\,500\text{ kN}$  gewährleistet. Aufgrund der vorhandenen und gemäß Testspezifikation nicht ausreichenden Kolbenhubkapazität von  $u = \pm 125\text{ mm}$  wurde zwischen Prüfkörper und Hydraulikzylinder zusätzlich ein entsprechender Hebel zwischengeschaltet. Zur Übertragung der eingepprägten Kräfte und Verschiebungswege wurde der Prüfkörper an entsprechend ausgebildete Krafteinleitungsplatten fixiert. Die horizontalen Verschiebungswege wurden hierbei der unteren Lagerschale zugewiesen, die zu diesem Zweck durch eine zusätzlich angeordnete Gleitebene vom Teststand entkoppelt wurde. Der generelle Testauf-

bau kann dem Bild 5.1 entnommen werden.

Der Testablauf lässt sich grob in die zwei folgenden Schritte aufteilen. Zunächst wird die Vertikallast unter Verwendung einer Rampenfunktion bis zum Erreichen der Ziellast kraftgesteuert auf den Prüfkörper aufgebracht und anschließend konstant gehalten. Darauf folgend werden die untere Lagerschale unter Verwendung eines sinusförmigen Verlaufs mit definierter Amplitude  $\hat{u}$  weggesteuert ausgelenkt und die zugehörigen Weg- und Kraftgrößen messtechnisch registriert.



**Bild 5.1:** Teststand - Gleitpendellager

Die Testergebnisse können dann entsprechend in Form der in Bild 4.12 dargestellten Hystereschleifen ausgegeben und ausgewertet werden. Die Neigung der Hystersekurve gibt hierbei in Abhängigkeit der vorhandenen Auflast die horizontale Steifigkeit der Gleitpendellager  $k = \frac{F_V}{r}$  wieder. Im Gegensatz zur sich theoretisch ergebenden Hystereschleife zeigt sich in den messtechnisch erfassten Kurven aber im Bereich der Umkehrpunkte kein vertikaler, sondern ein ebenfalls leicht geneigter Verlauf, der hier die Steifigkeit der Lasteinleitungskonstruktion widerspiegelt. Als Maß der dissipierten Energie sind als Testergebnis aber vor allem die registrierten Flächeninhalte der einzelnen Hystereschleifen von Interesse, da sich aus diesen ein für das Gleitpendellager repräsentativer gemittelter Reibkoeffizient zurückrechnen lässt. Aufgrund des Testaufbaus ist hierbei jedoch zu beachten, dass der gemessene Flächeninhalt auch den in der unterhalb der Krafteinleitungsplatte angeordneten Zusatzgleitfläche dissipierten Energieanteil erfasst. Entsprechend ist dieser in einem separaten Testaufbau zuvor ermittelte Reibkoeffizient in der Höhe von  $\mu_c = 0.0108838$  vom eigentlichen Testergebnis abzuziehen:

$$\mu_i = \frac{A_D}{4 \cdot \hat{u} \cdot F_V} - \mu_c \quad (5.1)$$

mit:

- $i$ : Nummer der durchfahrenen Hystereseschleife
- $F_H$ : auf Höhe des Hebelarms durch den horizontal angeordneten Hydraulikzylinder eingeleitete Horizontalkraft
- $\mu_c$ : Reibkoeffizient der zusätzlichen Gleitebene
- $\hat{u}$ : maximale Auslenkungsamplitude

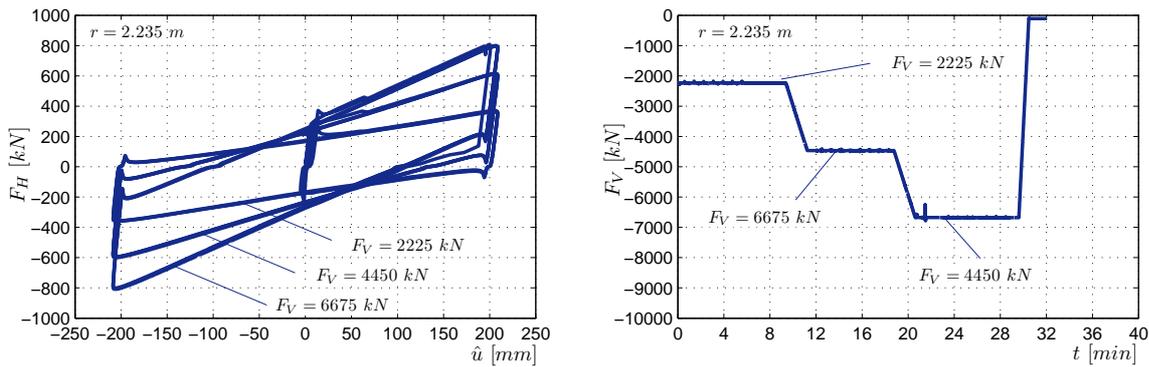
Pro Lager wurden stets mindestens drei vollwertige Hystereseschleifen durchfahren und anschließend einzeln ausgewertet. Das Testergebnis liegt entsprechend in Form des aus diesen drei Hystereseschleifen gemittelten Reibkoeffizienten  $\mu$  vor.

### 5.2.1 Versuche an Gleitpendellagern für das Akropolis-Museum in Athen

Zum Schutz vor Erdbebeneinwirkungen wurde das im Jahr 2009 offiziell neu eröffnete AKROPOLIS-Museum in Athen auf insgesamt 96 Gleitpendellagern errichtet. Im Labor der Universität der Bundeswehr in München wurden diese Lager jeweils einzeln im Rahmen eines Produktionstests für eine Auflast von  $F_V = 4450 \text{ kN}$  und eine horizontalen Verschiebungsamplitude von  $\hat{u} = \pm 200 \text{ mm}$  getestet.

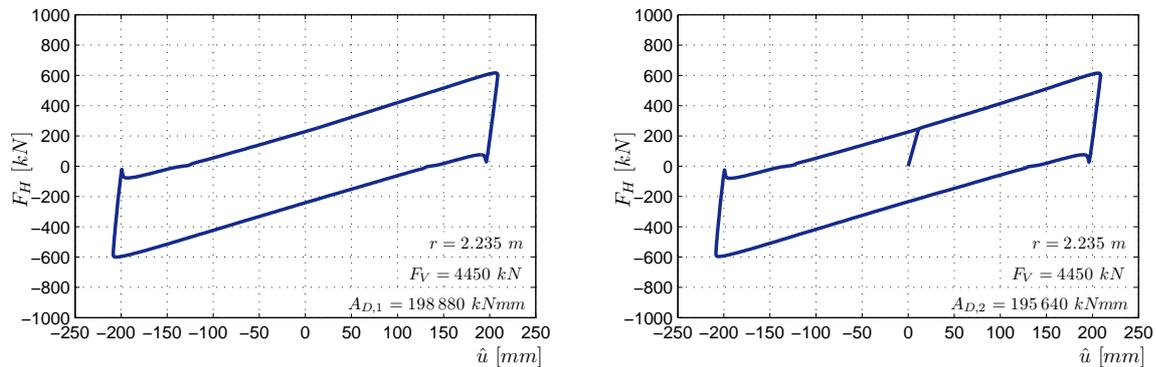
Zusätzlich zu diesen Standardtests wurden an je zwei Testlagern umfangreichere Prototypentests durchgeführt. Dazu wurden die Lager jeweils für drei unterschiedliche Auflastniveaus geprüft und nach Abschluss der Tests geöffnet und eingehend auf Abnutzungs- und Verschleißerscheinungen hin untersucht. Die für das Gleitpendellager mit der Lagernummer 76 erhaltenen Hystereseschleifen sowie die zugehörigen Verläufe der jeweils über die Zeit konstant gehaltenen Vertikallasten sind in Bild 5.2 einzeln ausgewiesen. Die unter anderem von der Auflast abhängige Hysteresenneigung wird daraus klar ersichtlich. Weiterhin lässt sich anhand des Verlaufs im Bereich der Umkehrpunkte erkennen, dass jeder Richtungswechsel der Horizontalbewegung zunächst mit der Überwindung der Haftreibung einhergeht. Im Erscheinungsbild der Hystereseschleifen äußert sich diese Tatsache in Form einer spitz zulaufenden Anfangserhebung, deren Niveau im Vergleich zu dem daran anschließenden und die Gleitkraft charakterisierenden Kurvenverlauf indes nur unwesentlich höher ausfällt.

In Bild 5.3 sind stellvertretend für die restlichen Lager der Charge wiederum für das Gleitpendellager mit der Lagernummer 76 zwei der erhaltenen Einzelhysterese-Kurven dargestellt. Zum Zweck der Flächenberechnung wurden diese Einzelhysterese-Kurven zunächst



**Bild 5.2:** Hystereseschleifen des Akropolis-Gleitpendellagers Nr. 76 für drei unterschiedliche Auflastniveaus  $F_V$

jeweils aus der fortlaufenden Messdatenreihe herausgelöst und dann in sich geschlossen. Im Anschluss daran wurden diese Verläufe in das Mathematik-Programm MATLAB [119] eingelesen und die Flächeninhalte durch Integration entsprechend berechnet. Die Auswertung der jeweiligen Testergebnisse ist für das Lager mit der Lager-Nummer 76 in Tabelle 5.1 ausgewiesen.



**Bild 5.3:** Einzel-Hystereseschleifen des Akropolis-Gleitpendellagers Nr. 76 für eine Auflast von  $F_V = 4450 \text{ kN}$

**Tabelle 5.1:** Versuchsergebnisse Gleitpendellager Nr. 76

Nr.	$F_V$	$\hat{u}$	$A_{D,1}$	$A_{D,2}$	$A_{D,3}$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_{\text{mittel}}$
	[kN]	[mm]	[kNmm]	[kNmm]	[kNmm]	[÷]	[÷]	[÷]	[÷]
76	2 225	±200	143 840	145 810	148 010	0.0695	0.0706	0.0718	0.0706
76	4 450	±200	198 880	195 640	194 740	0.0448	0.0439	0.0436	0.0441
76	6 675	±200	222 580	217 270	215 050	0.0308	0.0298	0.0294	0.0300

Die Abhängigkeit der Reibkoeffizienten  $\mu$  von der jeweils vorhandenen Kontaktpressung zeichnet sich anhand der Versuchsergebnisse deutlich ab. Dies sollte bei der Auslegung von Gleitpendella-

gern entsprechend beachtet und ein ausgewogenes Auflastniveau bzw. ein ausgewogenes Niveau der resultierenden Kontaktpressungen angestrebt werden. Handelt es sich bei der Baustruktur hingegen generell um ein Objekt mit stark unterschiedlichen Lastniveaus, wie dies z.B. bei Tank- und Füll-Behältern der Fall ist, sollte im Zweifel eine Grenzwertbetrachtung mit entsprechend variierendem Reibkoeffizient vorgenommen werden. Im Gegensatz zu den für geringe Kontaktpressungen üblicherweise erhaltenen nachteilig hohen Werten der Reibkoeffizienten wirken sich die damit ebenfalls unweigerlich einhergehenden geringeren Trägheitskräfte günstig auf die Erdbebenbemessung aus.

Davon abgesehen wird ein unterschiedliches Reaktionsverhalten von Gleitpendellagern häufig generell durch die Koppelwirkung der Isolierebene kompensiert, deren konstruktive Ausführung oftmals den Einsatz von doppelten Bodenplatten oder von Zerrbalken vorsieht.

Die Testergebnisse der im Rahmen der Baumaßnahme des neuen Akropolis-Museums insgesamt 96 getesteten Gleitpendellager sind in der Tabelle 5.2.1 zusammengefasst.

Wird unterstellt eine GAUSS-Normalverteilung für die Streuung der Reibkoeffizienten unterstellt, ergeben sich für die Gleitpendellager die folgenden statistischen Parameter [100]:

- gemittelter Reibkoeffizient:  $\mu_{Mittelwert} = 0.0428$
  
- zugehörige Standardabweichung:  $\sigma = 0.00473$
  
- 5%-Quantil: 0.03435
  
- 95%-Quantil: 0.04936

Ferner wurden die an den Gleitpendellagern gewonnenen Versuchsergebnisse mit den in Bild 5.4 dargestellten 2-D und 3-D FE-Simulationsmodellen nachvollzogen.

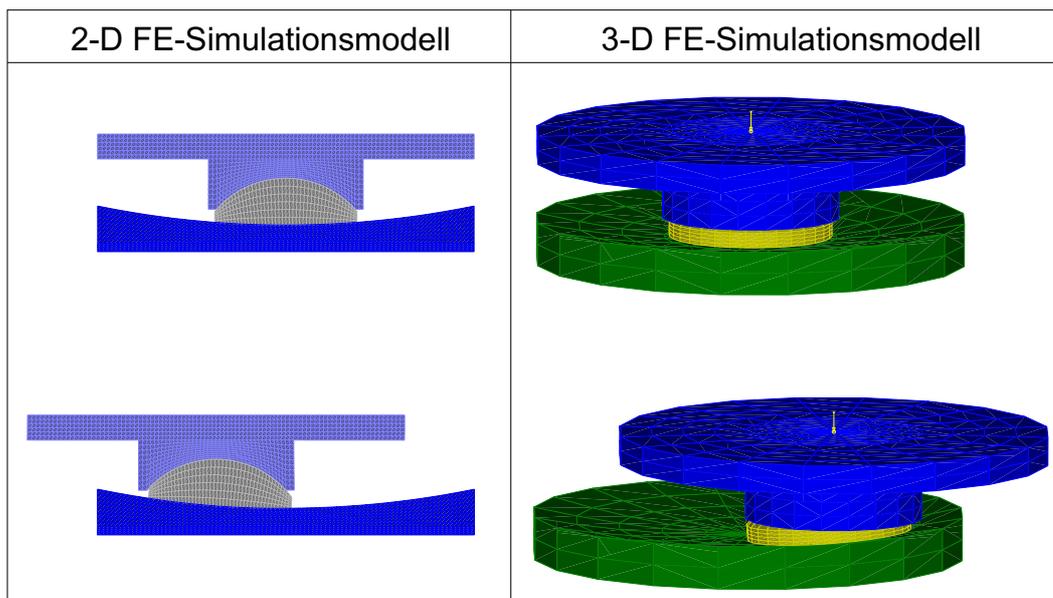
Der Vergleich der in Bild 5.5 dargestellten berechneten Hystereseschleifen zeigt sowohl für das drei- als auch für das zweidimensionale Simulationsmodell eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

**Tabelle 5.2:** Versuchsergebnisse Gleitpendellager Nr. 76

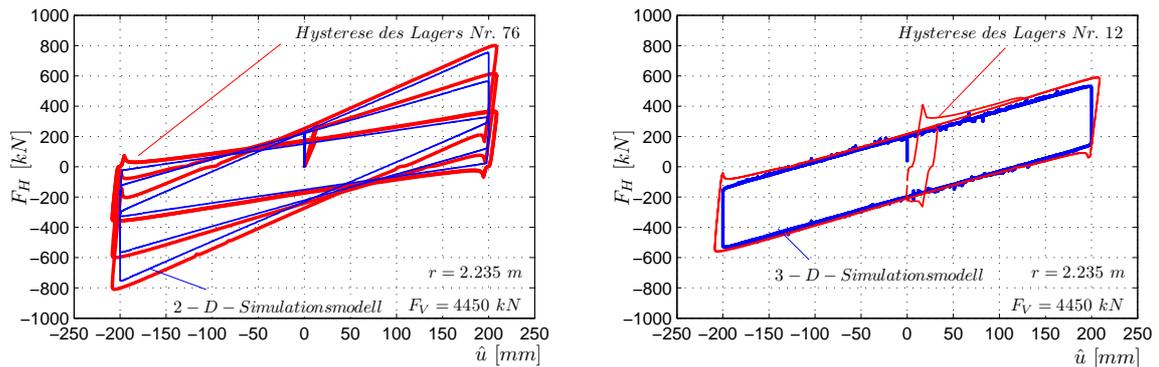
Nr.	$F_V$	$\hat{u}$	$A_{D,1}$	$A_{D,2}$	$A_{D,3}$	$\mu_{\text{mittel}}$
	[kN]	[mm]	[kNmm]	[kNmm]	[kNmm]	[÷]
1	4 450	± 200	202 730	194 580	192 590	0.0444
2	4 450	± 200	170 960	187 430	199 050	0.0414
3	4 450	± 200	183 430	187 600	190 180	0.0418
4	4 450	± 200	159 640	166 140	173 970	0.0360
5	4 450	± 200	211 910	212 370	212 640	0.0487
6	4 450	± 200	200 680	199 060	198 310	0.0450
7	4 450	± 200	218 550	214 290	211 710	0.0494
8	4 450	± 200	129 200	151 130	168 430	0.0311
9	4 450	± 200	210 100	206 280	204 680	0.0472
10	4 450	± 200	151 510	164 170	173 390	0.0350
11	4 450	± 200	198 410	196 590	197 390	0.0447
12	4 450	± 200	181 750	180 900	182 260	0.0401
13	4 450	± 200	202 990	202 230	201 910	0.0460
14	4 450	± 200	195 340	195 340	193 860	0.0442
15	4 450	± 200	138 970	147 920	156 210	0.0306
16	4 450	± 200	133 980	162 370	182 810	0.0340
17	4 450	± 200	146 970	161 620	171 470	0.0341
18	4 450	± 200	190 000	183 480	180 260	0.0408
19	4 450	± 200	187 820	184 990	184 550	0.0412
20	4 450	± 200	221 240	223 930	168 430	0.0497
21	4 450	± 200	167 890	181 860	195 870	0.0403
22	4 450	± 200	197 510	203 770	211 650	0.0466
23	4 450	± 200	174 370	178 270	178 970	0.0387
24	4 450	± 200	146 400	165 360	178 070	0.0351
25	4 450	± 200	172 830	197 160	205 600	0.0431
26	4 450	± 200	207 950	206 390	205 770	0.0471
27	4 450	± 200	167 890	181 820	195 800	0.0403
28	4 450	± 200	197 650	205 030	210 290	0.0466
29	4 450	± 200	172 100	194 610	204 930	0.0427
30	4 450	± 200	158 120	159 940	167 170	0.0346
31	4 450	± 200	177 970	190 100	202 020	0.0426
32	4 450	± 200	177 670	192 770	201 780	0.0427
33	4 450	± 200	168 810	191 580	204 680	0.0352
34	4 450	± 200	165 680	183 660	190 280	0.0395
35	4 450	± 200	201 170	218 180	219 570	0.0488
36	4 450	± 200	209 630	211 200	207 950	0.0478
37	4 450	± 200	183 980	186 610	193 580	0.0420
38	4 450	± 200	214 290	208 890	206 670	0.0479

Nr.	$F_V$	$\hat{u}$	$A_{D,1}$	$A_{D,2}$	$A_{D,3}$	$\mu_{mittel}$
	[kN]	[mm]	[kNmm]	[kNmm]	[kNmm]	[÷]
39	4 450	± 200	151 950	179 250	189 150	0.0378
40	4 450	± 200	165 500	200 790	208 230	0.0429
41	4 450	± 200	175 180	194 550	201 490	0.0426
42	4 450	± 200	196 900	196 440	197 560	0.0445
43	4 450	± 200	201 540	201 240	202 080	0.0457
44	4 450	± 200	217 260	208 110	203 760	0.0479
45	4 450	± 200	204 030	212 700	215 800	0.0483
46	4 450	± 200	210 310	212 860	214 610	0.0489
47	4 450	± 200	208 450	207 340	204 470	0.0471
48	4 450	± 200	193 910	213 630	220 070	0.0479
49	4 450	± 200	163 200	178 480	185 070	0.0383
50	4 450	± 200	146 790	164 620	172 430	0.0344
51	4 450	± 200	187 460	197 360	203 200	0.0441
52	4 450	± 200	145 920	191 280	213 840	0.0407
53	4 450	± 200	190 890	215 450	217 160	0.0475
54	4 450	± 200	208 390	203 420	200 980	0.0464
55	4 450	± 200	219 920	213 850	209 180	0.0493
56	4 450	± 200	201 170	191 880	187 190	0.0435
57	4 450	± 200	179 390	190 050	189 350	0.0414
58	4 450	± 200	197 200	197 050	200 610	0.0448
59	4 450	± 200	171 870	189 790	199 680	0.0417
60	4 450	± 200	186 590	212 930	219 240	0.0471
61	4 450	± 200	187 140	202 450	209 290	0.0451
62	4 450	± 200	156 620	175 420	183 660	0.0374
63	4 450	± 200	180 680	205 920	204 850	0.0445
64	4 450	± 200	173 050	173 090	173 520	0.0377
65	4 450	± 200	178 930	184 920	190 340	0.0410
66	4 450	± 200	180 430	192 480	200 380	0.0427
67	4 450	± 200	178 820	203 540	216 640	0.0451
68	4 450	± 200	153 330	167 490	173 650	0.0354
69	4 450	± 200	169 450	180 540	187 840	0.0394
70	4 450	± 200	199 610	191 340	186 620	0.0430
71	4 450	± 200	213 680	204 630	200 770	0.0471
72	4 450	± 200	213 340	206 830	205 950	0.0476
73	4 450	± 200	180 240	177 750	176 890	0.0391
74	4 450	± 200	182 150	194 910	199 690	0.0430
75	4 450	± 200	218 800	213 890	211 630	0.0494
76	4 450	± 200	198 880	195 640	194 740	0.0441

Nr.	$F_V$	$\hat{u}$	$A_{D,1}$	$A_{D,2}$	$A_{D,3}$	$\mu_{\text{mittel}}$
	[kN]	[mm]	[kNmm]	[kNmm]	[kNmm]	[÷]
77	4 450	±200	188 280	209 510	215 410	0.0464
78	4 450	±200	179 700	188 280	199 260	0.0422
79	4 450	±200	205 310	218 860	223 020	0.0497
80	4 450	±200	179 110	196 400	204 470	0.0434
81	4 450	±200	151 850	166 740	178 210	0.0355
82	4 450	±200	193 720	195 760	197 010	0.0440
83	4 450	±200	189 420	204 600	206 810	0.0453
84	4 450	±200	178 470	178 160	178 740	0.0391
85	4 450	±200	200 160	198 000	196 960	0.0448
86	4 450	±200	219 240	212 920	211 700	0.0494
87	4 450	±200	165 270	182 220	192 100	0.0395
88	4 450	±200	193 170	212 140	218 720	0.0475
89	4 450	±200	206 250	197 820	194 040	0.0452
90	4 450	±200	195 030	223 970	226 570	0.0495
91	4 450	±200	211 300	201 720	197 970	0.0463
92	4 450	±200	215 000	209 860	207 040	0.0482
93	4 450	±200	165 090	185 330	198 360	0.0404
94	4 450	±200	142 360	156 420	169 090	0.0328
95	4 450	±200	174 910	177 790	182 210	0.0391
96	4 450	±200	177 890	199 980	202 520	0.0433



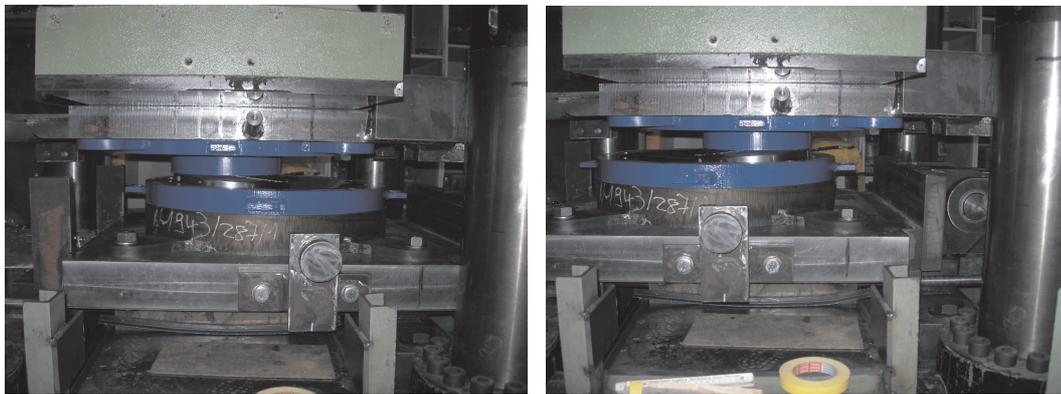
**Bild 5.4:** FE-Simulationsmodelle der Gleitpendellagerversuche



**Bild 5.5:** Gegenüberstellung der messtechnisch registrierten und der mit Hilfe der FE-Simulationsmodelle analytisch gewonnenen Hysteresekurven

### 5.2.2 Tests an Gleitpendellagern für das Sögütözü Congress and Commercial Center, Turkey

Im Rahmen des Neubaus einer Kongress- und Handelszentrums in SÖGÜTÖZÜ wurden zwei von insgesamt 91 Gleitpendellagern im Labor der Universität der Bundeswehr München getestet. Die Lager wurden für zwei unterschiedliche Auflastniveaus in der Höhe von  $F_V = 3\,000\text{ kN}$  sowie von  $F_V = 6\,000\text{ kN}$  und für Amplitudenwerte der Horizontalverschiebung zwischen  $\hat{u} = \pm 100\text{ mm}$  und  $\hat{u} = \pm 120\text{ mm}$  getestet. Bild 5.6 zeigt eines der Lager während des Testablaufs für unterschiedliche horizontale Auslenkungssituationen.



**Bild 5.6:** Gleitpendellager im ausgelenktem Zustand während des Versuchsablaufs

Im Gegensatz zu den für das Bauprojekt des Akropolis-Museums durchgeführten Versuchen wurden im Fall der hier getesteten Gleitpendellager eine größere Anzahl von Hystereseschleifen pro Lager durchfahren. Der Testablauf ist in der nachfolgenden Tabelle 5.3 dargestellt:

Jeweils vor und nach dem Test wurden an den Viertelpunkten zwischen Gleitschuh und unterer Lagerschale die Spaltmaße genommen, um Aufschlüsse über die Abnahme der Materialstärke des Gleitmaterials zu gewinnen.

**Tabelle 5.3:** Testablaufschemata der SÖGÜTÖZÜ-Gleitpendellager

Test- block	$F_V$ [kN]	Hystereseschleifen [÷]	$\hat{u}$ [mm]
A	3 000	3	$\pm 120$
B1	3 000	9	$\pm 120$
B2	3 000	9	$\pm 120$
B3	3 000	9	$\pm 120$
C	6 000	3	$\pm 120$
D	6 000 für 1 h konstant gehalten	0	$\pm 0$

Die vom Testergebnis abzuziehenden Reibkoeffizienten der zusätzlichen Hilfsgleitebene wurden im vorliegenden Fall jeweils in Abhängigkeit der Hystereseschleifen jeweils einzeln mit  $\mu_{c,1} = 0.0057$ ,  $\mu_{c,2} = 0.0059$  und  $\mu_{c,3} = 0.0062$  bestimmt. Unter Beachtung der abzuziehenden Hilfsreibungskoeffizienten  $\mu_{c,i}$  sind die Testergebnisse in den nachfolgenden Tabellen 5.7 und 5.5 zusammengefasst:

**Tabelle 5.4:** Versuchsergebnisse

Test	Nr.	$F_V$	$\hat{u}$	$A_{D,1}$	$A_{D,2}$	$A_{D,3}$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_{mittel}$
Block		[kN]	[mm]	[kNmm]	[kNmm]	[kNmm]	[÷]	[÷]	[÷]	[÷]
B1	48	3 000	$\pm 120$	71 136	72 965	74 971	0.0437	0.0447	0.0459	0.0447
C	48	6 000	$\pm 100$	90 675	87 901	86 301	0.0320	0.0306	0.0297	0.0308
B1	36	3 000	$\pm 120$	79 815	78 246	78 138	0.0469	0.0483	0.0480	0.0486
C	36	6 000	$\pm 100$	109 117	103 030	99 925	0.0397	0.0369	0.0354	0.0373

### 5.2.3 Versuche an Gleitpendellagern für die Bilkent University, Turkey

Im Rahmen eines an der BILKENT-Universität in der Türkei realisierten Neubaus wurden Gleitpendellager gemäß der in Kapitel 4.3.1 als **SDCFP**-Lager bezeichneten Konstruktionsweise gefertigt und getestet. Im Unterschied zu den an den einfachen Gleitpendellagern durchgeführten Versuchen musste die Testanlage im vorliegenden Fall an die Bauweise der hier verwendeten Gleitpendellager angepasst und um einen weiteren Hydraulikzylinder ergänzt werden. Anstatt der Verwendung des über einen Hebelarm einseitig angeschlossenen 2 500 kN-Hydraulikzylinders wurden die hier eingesetzten 650 kN-Zylinder direkt an die jeweiligen Krafteinleitungsplatten

**Tabelle 5.5:** Spaltmaße vor und nach dem Test

Nr.		Spaltmaß vor dem Test	Spaltmaß nach Test C	Spaltmaß nach Test D
48	<i>Point 1</i>	2.60	2.35	2.35
48	<i>Point 2</i>	2.70	2.25	2.25
48	<i>Point 3</i>	2.60	2.45	2.45
48	<i>Point 4</i>	2.60	2.45	2.45
36	<i>Point 1</i>	2.85	2.65	2.55
36	<i>Point 2</i>	2.70	2.55	2.55
36	<i>Point 3</i>	2.70	2.60	2.55
36	<i>Point 4</i>	2.70	2.55	2.55

angekoppelt und entsprechend gegenläufig angesteuert. Der Testaufbau bringt hier den Vorteil mit sich, dass der Gleitschuh während des Tests stets im Schwerpunkt der vertikalen Lasteinleitung verbleibt und in der Folge keine Momente infolge von Exzentrizitäten geweckt werden. Der ergänzte Versuchsaufbau ist in Bild 5.7 dargestellt.

**Bild 5.7:** Versuchsaufbau für die Bilkent-Gleitpendellager

Ähnlich der Testspezifikation für die Versuche an den Gleitpendellagern für das Einkaufs- und Handelszentrum in SÖGÜTÖZÜ wurden die Gleitpendellager im vorliegenden Fall der in Tabelle 5.6 gegebenen Testabfolge zugeführt:

**Tabelle 5.6:** Testablaufschema der Gleitpendellager für die BILKENT-Universität

Test-block	Lager-Nr.	$F_V$ [kN]	Hystereseschleifen [÷]	$\hat{u}$ [mm]
A	5/1	2 700	3	$\pm 200$
B	5/1	2 700	3 x 3	$\pm 200$
C	5/1	4 000	3	$\pm 150$
D	5/1	4 000 <i>für 1 h konstant</i>	0	$\pm 0$
A	5/2	2 700	3	$\pm 240$
B	5/2	2 700	3 x 3	$\pm 240$
C	5/2	4 000	3	$\pm 140$
D	5/2	4 000 <i>für 1 h konstant</i>	0	$\pm 0$

Unter Beachtung der abzuziehenden Hilfsreibungskoeffizienten in der Höhe von  $\mu_{c,2700\text{ kN}} = 0.033$  und von  $\mu_{c,4000\text{ kN}} = 0.028$  sind die Testergebnisse wiederum in der Tabelle 5.7 zusammengefasst:

**Tabelle 5.7:** Versuchsergebnisse

Test	Nr.	$F_V$	$\hat{u}$	$A_{D,1}$	$A_{D,2}$	$A_{D,3}$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_{\text{mittel}}$
Block		[kN]	[mm]	[kNmm]	[kNmm]	[kNmm]	[÷]	[÷]	[÷]	[÷]
B1	5/1	2 700	$\pm 200$	183 350	180 380	178 140	0.0519	0.0505	0.0495	0.0506
C	5/1	4 000	$\pm 150$	131 420	148 250	145 270	0.0377	0.0338	0.0325	0.0347
B1	5/2	2 700	$\pm 220$	199 640	195 450	193 600	0.0440	0.0424	0.0417	0.0427
C	5/2	4 000	$\pm 140$	127 610	125 410	123 880	0.0290	0.0280	0.0273	0.0281

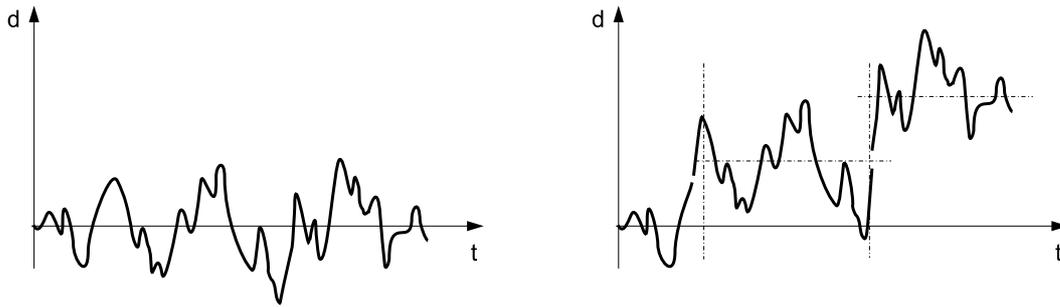
Die Spaltmaße wurden im vorliegenden Fall sowohl im Bereich zwischen Gleitschuh und unterer als auch im Bereich zwischen Gleitschuh und oberer Lagerschale abgegriffen. Die Abnahme des Spaltmaßes verblieb hierbei stets unterhalb des Grenzwertes von  $\Delta < 0.5\text{ mm}$ . Nach dem Test wurden die Lager wiederum geöffnet und die Gleitflächen entsprechend auf Abnutzungserscheinungen hin untersucht. Hierbei konnten visuell keine Änderungen der Beschaffenheit der Lager festgestellt werden.

## Kapitel 6

# Rückstellwirkung von Gleitpendellagern

### 6.1 Bedeutung der Rückstellwirkung von Erdbebenschutzsystemen

Üblicherweise beziehen seismische Isolierungssysteme die Fähigkeit zur Energiedissipation entweder aus viskosen bzw. geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsmechanismen oder aus Vorrichtungen, die auf elasto-plastischem Materialverhalten oder auf Reibeffekten beruhen. Da sich die Dämpfungskraft im erst genannten Fall definitionsgemäß direkt proportional zur momentanen Relativgeschwindigkeit zwischen Baugrund und Überbau verhält, kehren solche Systeme nach einer ausreichenden Zeitspanne gezwungenermaßen stets in die Ausgangslage zurück, vorausgesetzt, eine Rückstellkraft ist überhaupt vorhanden. In allen davon abweichenden Systemen verbleibt nach einer erfolgten Auslenkung dagegen stets ein gewisser Versatz, der in der Wirkungsweise des hier vorhandenen energiedissipierenden Kraftanteils begründet liegt. Im Gegensatz zur viskosen Dämpfungskraft strebt dieser nämlich mit der Zeit systembedingt nicht gegen null, sondern bleibt nach Erreichen des Verharrungszustandes vielmehr konstant bestehen. Wie in Bild 6.1 schematisch dargestellt, treffen weitere Erschütterungen in der Folge auf ein bereits zuvor ausgelenktes System. Je nach Charakter und Wirkungsweise des Erdbebenverlaufs kann ein solches Systemverhalten einen kumulativen Verschiebungsaufbau nach sich ziehen, der schlimmstenfalls das Aufbrauchen der Verschiebungskapazität zur Folge hat. Entsprechend ist ein ausreichendes Rückstellvermögen von enormer Bedeutung, zumal diesem neben der Begrenzung des kumulativen Verschiebungsaufbaus während des Bebens zusätzlich die Aufgabe zukommt, auch den nach dem Beben zurückbleibenden Versatz so gering wie möglich zu halten, um für üblicherweise folgende Nachbeben gerüstet zu sein.



**Bild 6.1:** Schematische Verschiebungsverläufe seismischer Isolationssysteme mit und ohne ausreichendem Rückstellvermögen

Die Auftretenshäufigkeit dieser im englischen Sprachgebrauch als “Aftershocks“ bezeichneten Nachbeben lässt sich mit der von OMORI bereits im Jahr 1894 empirisch gefundenen Verteilungskurve in Form von  $N_a \approx (t - t_M)^{-p}$  abschätzen. Vom Zeitpunkt des Hauptbebens  $t_m$  ausgehend lässt sich damit die mit der Zeit hyperbolisch abnehmende gemittelte Anzahl  $N_a(t)$  der Nachbeben bestimmen. Der durch OMORI’s Gesetzmäßigkeit erfasste Zeitraum variiert dabei in Abhängigkeit der Magnitude des Hauptbebens von wenigen Stunden bis hin zu mehreren Monaten. Die hierbei zu erwartende Erdbebenstärke kann mit Hilfe der als BATH’S LAW bekannten Faustformel abgeschätzt werden, gemäß der übliche Nachbeben eine im Mittel 1.2-fach geringere Magnitude als das eigentliche Hauptbeben aufweisen [4, 70]. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass das Hauptbeben innerhalb einer Erdbebensequenz definitionsgemäß stets dasjenige mit der höchsten Magnitude ist. Entsprechend ist die tatsächliche Einstufung in Vor-, Haupt- und Nachbeben erst nach eindeutigem Abklingen der betrachteten Erdbebenfolge sinnvoll möglich.

Als Beispiel für Nachbeben mit Magnituden beträchtlicher Größenordnung sei hier stellvertretend für andere auf das so genannte “Strike-Slip Antarctic Plate Erdbeben“ verwiesen. Dem eigentlichen Hauptbeben mit einer Momenten-Magnitude von  $M_W = 7.6 - 7.8$  folgten hier zwei Nachbeben, deren Momenten-Magnituden mit  $M_W = 8.0$  immer noch eine beträchtliche Größenordnung erreichten [27].

Der für die Entstehung von Nachbeben verantwortliche Mechanismus ist bisher nur ansatzweise geklärt und entsprechend Gegenstand intensiver Forschungstätigkeit. So hat beispielsweise der Physiker ÁLVARO CORRAL in [26] allgemeingültige Zusammenhänge zwischen Erdbebenereignissen wahrscheinlichkeits-theoretisch aufgestellt und hergeleitet. Neuere Untersuchungen lassen darauf schließen, dass Nachbeben durch eine Art Echo auf die seismischen Wellen des Hauptbebens ausgelöst werden [41] und nicht, wie früher angenommen, Folge der durch das Erstereignis verursachten Spannungsumlagerungen innerhalb der tektonischen Platten sind.

Die Bedeutung des Rückzentrierungsvermögens nimmt mit zunehmender Nähe des betrachteten Standortes zur nächstliegenden Verwerfung generell zu, da die Erdbebenerschütterungen hier zunehmend asymmetrische Zeitverläufe aufweisen. Dieses auf die Abstrahlcharakteristik zurück-

zuführende Phänomen wird allgemein als Nahfeld- oder Fling-Effekt bezeichnet [126, 28, 61].

## 6.2 Stand der Normung

Dem Rückzentrierungsvermögen wurde auf dem Gebiet der Erdbebenisolierung entwicklungsbedingt erst relativ spät Bedeutung beigemessen. Der Grund hierfür liegt in den für die seismische Entkopplung zunächst ausschließlich verwendeten konventionellen Elastomerlagern, deren viskose Dämpfungseigenschaften ein systembedingt äußerst günstiges Rückstellverhalten mit sich bringen. In der Folge wurde die aus dem Verschiebungsverlauf resultierende Problemstellung erst mit der Entwicklung und dem Einsatz weiterer Lagerungskonzepte erkannt, die insbesondere auch die Bereitstellung einer möglichst hohen Energiedissipation zum Ziel hatten. Dazu zählen vor allem all diejenigen Erdbebenisolationssysteme, deren Dissipationswirkung auf plastischem Materialverhalten oder auf Reibeffekten beruht, wie dies beispielsweise bei Elastomerlagern mit Bleikern, Gleitpendellagern oder Stahlhystereselementen der Fall ist.

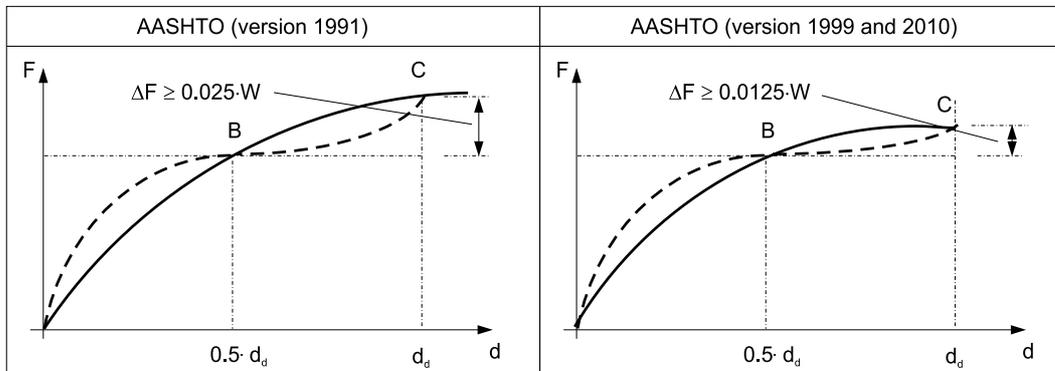
### 6.2.1 Amerikanischen und europäischen Regelungen zur Rückstellwirkung

Erstmals in einer Norm sind Angaben zur Rückstellproblematik in der für Brückenbauwerke der USA anzuwendenden **AASHTO** “Guide Specification for Seismic Isolation Design“ [2] aus dem Jahr 1991 zu finden. Zur Sicherstellung einer ausreichend hohen Rückzentrierfähigkeit wird hierin gefordert, dass die horizontale Rückstellkraft  $V \equiv F$  des Isolierungssystems für den definierten Auslenkungsbereich zwischen 50 % und 100 % der Bemessungsverschiebung  $\Delta_i \equiv d_d$  um einen Betrag zuzunehmen hat, der mindestens dem 0.025-fachen Wert der vertikalen Bemessungslast  $W$  entspricht. Die Bedingung ist damit durch  $\Delta F \geq 0.025 \cdot W$  gegeben. Unter Punkt 17.2.4.4 ist dieselbe Regelung auch in der für Hoch- und Industriebauten geltenden Norm **ASCE 7-05** sowie in deren Folgeversion **ASCE 7-10** enthalten [6, 7].

Auf europäischer Ebene wurde dasselbe Kriterium in indirekter Form unter Punkt 10.9.2 (5d) auch bereits durch die Vornorm prEN 1998-2 [101] sowie die Folgenormen [33, 34] aufgegriffen, wenngleich dieses hier lediglich in Form einer der einzuhaltenden Bedingungen definiert ist, die als Voraussetzung die vereinfachte Abbildung des Systemverhaltens mit dem Sekanten-Steifigkeitsverfahren erlauben.

Bei der Anwendung des Kriteriums auf Gleitpendellager fällt auf, dass der hier zu überwindende Reibwiderstand in keinerlei Weise mit einfließt und die Bewertung der Rückzentrierfähigkeit allein auf den Zusammenhang zwischen Rückstellkraft und Auslenkung bezogen wird. Da zu dessen Bewertung zudem lediglich zwei diskrete Punktepaare herangezogen werden, wird ggf. auch die tatsächliche Charakteristik der Kraft-Verformungs-Beziehung nur unzureichend erfasst.

Wie in Bild 6.2 verdeutlicht, lässt sich das Kriterium in der Folge mit durchaus voneinander abweichenden Kurvenverläufen einhalten, obwohl diese gegebenenfalls mit einem gänzlich unterschiedlichem Rückstellverhalten einhergehen.



**Bild 6.2:** Kriterium zur Sicherstellung eines ausreichend hohen Rückzentrierungsvermögens gemäß **AASHTO** der Version 1991 sowie der Versionen 1999 und 2010 nach [79]

Kurioserweise wurde das vorstehende Kriterium in den Nachfolgeversion der **AASHTO** [3] deutlich entschärft und die geforderte Zunahme der Rückstellkraft innerhalb des definierten Verschiebungsbereichs auf nur mehr die Hälfte reduziert und die Bedingung damit auf  $\Delta F \geq 0.0125 \cdot W$  abgeschwächt. In der darauf folgenden dritten Version der **AASHTO** [1] wurden dann hinsichtlich der Anforderungen an die Rückstellwirkung keine weiteren Änderungen mehr vorgenommen. Dies gilt auch für das in der zweiten Version zusätzlich eingeführte Kriterium, gemäß dem die Eigenperiode des entkoppelten Systems in keinem der möglichen Verschiebungszustände der Isoliereinheit den Wert von  $T < 6 \text{ s}$  überschreiten darf. Von dieser indirekten Forderung nach einer vorzuhaltenden horizontalen Mindestfedersteifigkeit sind jedoch wiederum all diejenigen Systeme ausgenommen, die durch eine von der Verschiebung unabhängige konstante Rückstellkraft gekennzeichnet sind. In diesem nur auf wenige Systeme zutreffenden Fall wird dann stattdessen gefordert, dass der Betrag der Rückstellkraft um mindestens das 1.05-fache größer auszufallen hat als der Betrag der energiedissipierenden Kraft.

Auf Gleitpendellager bezogen folgt aus der Forderung der maximal zulässigen Eigenperiode  $T < 6 \text{ s}$  gemäß Gleichung (4.109) ein maximal zulässiger Lagerschalenradius von  $r_{max} = 8.946 \text{ m}$ . Für die üblicherweise zum Einsatz kommenden Gleitpendellagerradien im Bereich zwischen  $r = 1.5 \text{ m}$  und  $r = 3.0 \text{ m}$  ist dieses Kriterium daher praktisch ohne Belang und braucht bei der Auslegung nicht weiter beachtet zu werden. Dagegen erscheint die Anforderung hinsichtlich des einzuhaltenden Sicherheitsabstandes zwischen Rückstell- und Reibwiderstandskraft in der Höhe von 5.0 % vor dem Hintergrund, dass die Reibung in Abhängigkeit der Oberflächenbeschaffenheit, Kontaktpressung, Gleitgeschwindigkeit, Temperatur und Alterung eine stark streuende Größe darstellt, sehr viel weniger restriktiv [100]. Aufgrund der mit der Verschiebung linear anwachsenden Rückstellkraft ist das Kriterium beim Einsatz von Gleitpendellagern aber ohnehin

nicht anzuwenden [18].

In den europäischen Regelwerken wird die Thematik des Rückzentrierungsvermögens der seismischen Isolierung vielschichtiger behandelt. So findet sich in der für Hochbauten geltenden Norm DIN EN 1998-1:2010-12 [31, 32] wie auch in den jeweiligen Vorgängerversionen unter Punkt 10.2 lediglich die pauschale Forderung nach der Fähigkeit zur Rezentrierung, ohne aber diese näher zu spezifizieren. Weiterführende Angaben hinsichtlich der Rückstellung, die dann allerdings zwischen den Versionen variieren, sind in dem für Brückentragwerke geltenden Teil DIN EN 1998-2 unter Punkt 7.7.1 aufgeführt.

In der ehemals gültigen DIN EN 1998-2: 2006-06 [33] wurden zur Sicherstellung einer ausreichenden Fähigkeit zur Rezentrierung zunächst die zwei folgenden Forderungen an das Isolationssystem formuliert:

- kleine verbleibende Restverschiebungen  $d_{rm}$  im Vergleich zur Verschiebungskapazität  $d_m$
- beginnend bei der Position der Restverschiebung weist das System eine deutlich kleinere Steifigkeit für Bewegungen in Richtung des Mittelpunkts als in entgegen gesetzter Richtung auf. In dieser letzten Richtung sollte ein ausreichender Verschiebungsspielraum vorhanden sein.

Die Anforderungen galten als erfüllt, sofern das Isolationssystem den beiden nachfolgenden Bedingungen genügte:

$$\Delta F_m \geq \delta_w \cdot \frac{d_{rm}}{d_m} \cdot W_d \quad (6.1)$$

$$d_{rm} \leq d_m - \delta_d \cdot d_{a,max} \quad (6.2)$$

mit:

- $\Delta F_m$  die Laststeigerung zwischen den Verschiebungen  $d_m/2$  und  $d_m$ ;  
 $W_d$  das Gewicht des Überbaus;  
 $d_m$  die Verschiebungskapazität des Isolationssystems in der betrachteten Richtung; d.h. die maximale Verschiebung, die das System in dieser Richtung aufnehmen kann;  
 $d_{rm}$  die Restverschiebung des Isolationssystems, entsprechend  $d_m$ ; d.h. die Restverschiebung, wenn die Kraft  $F_m$ , welche nötig ist, um die Verschiebung  $d_m$  zu erreichen, unter quasi-statischen Bedingungen entfernt wird;  
für Systeme aus Gleitvorrichtungen mit sphärischen Gleitflächen beträgt die verbleibende Restverschiebung  $d_{rm} = \mu_d \cdot R_b$ ;  
 $\mu_d$  der dynamische Reibkoeffizient;  
 $R_b$  Radius der kugelförmigen Gleitfläche (Gleitpendellagerradius);

- $d_{a,max}$  der maximale Wert der Bemessungsverschiebung des Isolationssystems  $d_{bi,d}$ , erhöht um den so genannten Vergrößerungsbeiwert  $\gamma_{IS} = 1.5$  gemäß DIN EN 1998-2/NA:2011-03 [35];
- $\delta_w, \delta_d$  die numerischen Koeffizienten, die angemessene Anteile von  $W_d$  bzw.  $d_{a,max}$  ausdrücken empfohlene Werte:  $\delta_w = 0.015$  und  $\delta_d = 0.5$

Bis auf den in Bezug gesetzten Vorwert von  $0.015 \cdot \frac{d_{rm}}{d_m}$  entspricht das Kriterium gemäß Gleichung (6.1) dabei im Prinzip demjenigen der **AASHTO** und fordert entsprechend gleichbedeutend, dass für einen Verschiebungszuwachs zwischen  $0.5 \cdot d_m$  und  $d_m$  mindestens ein Anstieg der Rückstellkraft in Höhe der 1.5 %  $\cdot \frac{d_{rm}}{d_m}$ -fachen Eigengewichtskraft des Überbaus resultiert. Diese auf die postelastische Mindeststeifigkeit abzielende Forderung ist unter Beachtung der Gleichung (4.95)  $k_{gpl} = \frac{mg}{r} = \frac{mg}{R_b}$  für Gleitpendellager erfüllt, falls gilt:

$$\begin{aligned} \Delta F_m &\geq 0.015 \cdot \frac{d_{rm}}{d_m} \cdot W_d \\ k_{gpl} \cdot \frac{d_m}{2} &\geq 0.015 \cdot \frac{\mu_d \cdot R_b}{d_m} \cdot mg \\ \frac{mg}{R_b} &\geq 2 \cdot 0.015 \cdot \frac{\mu_d \cdot R_b}{d_m^2} \cdot mg \\ R_b &\leq \frac{d_m}{\sqrt{2 \cdot 0.015 \cdot \mu_d}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Wird dieselbe Umstellung auf das Kriterium der aktuellen Version der **AASHTO** bezogen, folgt:

$$\begin{aligned} \Delta F &\geq 0.0125 \cdot W \\ k_{gpl} \cdot \frac{d_d}{2} &\geq 0.0125 \cdot mg \\ \frac{mg}{R_b} &\geq 2 \cdot 0.0125 \cdot \frac{mg}{d_d} \\ R_b &\leq 40 \cdot d_d \end{aligned} \quad (6.4)$$

Der in der Norm DIN EN 1998-2: 2006-06 [33] enthaltene Bezug des Kriteriums auf die Verschiebungskapazität  $d_m$  anstatt auf die Bemessungsverschiebung des Isolators  $d_{bd}$  gemäß der Regelung der **AASHTO** erscheint vor dem Hintergrund der nach oben hin freien Wahlmöglichkeit wenig sinnvoll. Wie in Bild 6.3 gezeigt, steigt der zulässige Gleitpendellagerradius generell mit der Bemessungsverschiebung  $d_d$  bzw. mit der Verschiebungskapazität  $d_m$  an und lässt sich im zweit genannten Fall entsprechend manipulieren. Gemäß dem Kriterium der europäischen Normung geht der Einflussparameter der Reibung im Gegensatz zur amerikanischen Regelung sinnvollerweise indirekt in die Betrachtung mit ein und bewirkt für zunehmende Reibkoeffizienten geringere zulässige Gleitpendellagerradien.

Das zweite Kriterium gemäß (6.2) zielt auf eine von der Restverschiebung  $d_{rm}$  ausgehende,

noch ausreichend große Verschiebungskapazität für erneute Erschütterungen ab und lässt sich in Bezug auf Gleitpendellager wie folgt umstellen:

$$\begin{aligned} d_{rm} &\leq d_m - \delta_d \cdot d_{a,max} \\ R_b &\leq \frac{d_m - 0.5 \cdot \gamma_{IS} \cdot d_{bi,d}}{\mu_d} \end{aligned} \quad (6.5)$$

In der aktuellen Version der Eurocode-Normung DIN EN 1998-1:2010-12 [34] sind die vorgenannten Kriterien nicht mehr enthalten und wurden stattdessen durch die nachfolgende Bedingung abgelöst:

$$\frac{d_{cd}}{d_0} \geq \delta \quad (6.6)$$

- $d_{cd}$  die Bemessungs-Verschiebung des Isolationssystems in der betrachteten Richtung. Diese ist als maximale horizontale Verschiebung (relativ zum Baugrund) des Überbaus am Steifigkeitszentrum, die sich unter der Bemessungs-Erdbebeneinwirkung einstellt, definiert;
- $d_0$  maximale Restverschiebung (in der Vorgängerversion als  $d_{rm}$  bezeichnet), bei der das Isolationssystem in der betrachteten Richtung im statischen Gleichgewichtszustand verbleibt
- $\delta$  Zahlenwert,  $\delta = 0.50$  empfohlen und gemäß [35] übernommen

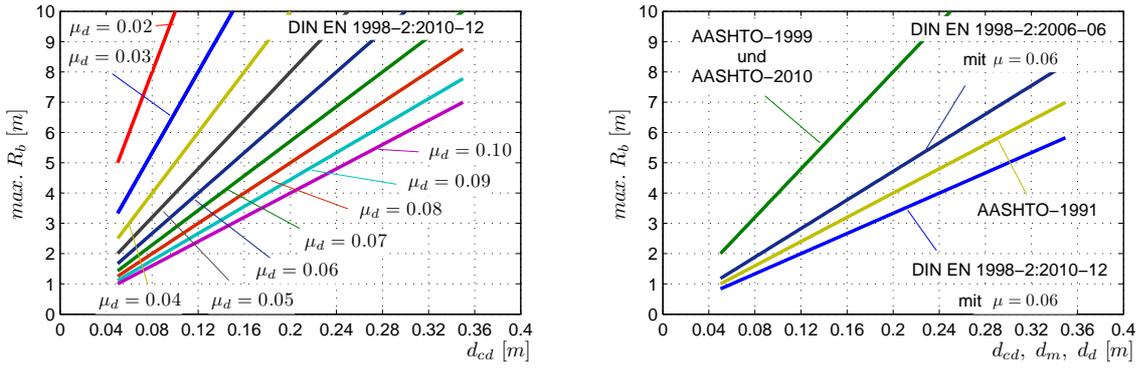
Wird das Kriterium wiederum auf Gleitpendellager bezogen, resultiert für den zulässigen Gleitpendellagerradius die folgende Forderung:

$$\begin{aligned} d_{cd} &\geq \delta \cdot d_0 \\ d_{cd} &\geq \delta \cdot \mu_d \cdot R_b \\ R_b &\leq \frac{d_{cd}}{\delta \cdot \mu_d} = \frac{d_{cd}}{0.50 \cdot \mu_d} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Wie in Bild 6.3 anhand der graphischen Auswertung der verschiedenen Kriterien verdeutlicht, lassen sich in Abhängigkeit der Verschiebungskapazität bzw. der Bemessungsverschiebung sowie der Wahl des Reibkoeffizienten tendenziell recht große zulässige Gleitpendellagerradien realisieren.

### 6.2.2 Einschätzung des Rückzentrierungsvermögens anhand der Energiebilanz

Allen bisher aufgeführten Kriterien ist die Bewertung der Rückstellwirkung auf Grundlage der Gegenüberstellung von statisch wirkenden Kräften gemeinsam, obwohl die Problematik vorrangig auf dynamische Effekte zurückzuführen ist. Davon abgesehen ist in diesem Zusammenhang



**Bild 6.3:** Kriterien zur Sicherstellung einer ausreichenden Rezentrierung

auch der Bezug dieser Kräfte auf die jeweiligen Maximalwerte der Relativverschiebungen zu hinterfragen, da diese, wie in Bild 2.7 dargestellt, üblicherweise zu Beginn des Erdbebenereignisses hervorgerufen werden, während der auf die Starkbebenphase folgende, aber für die verbleibende Restverschiebung durchaus maßgebende Zeitbereich durch eher moderate Erschütterungen gekennzeichnet ist.

Von MEDEOT wurde daher in [79] vorgeschlagen, die Bewertung des Rückstellverhaltens anhand eines Vergleichs der vom Isolationssystem gespeicherten, reversiblen Energie  $E_s$  und der vom System dissipierten Energie  $E_h$  vorzunehmen. Ersichtlich wird die Folgerichtigkeit dieses Ansatzes aus der Aufgabenstellung, die sich einstellende Ruhelage eines zuvor ausgelenkten und anschließend freigelassenen Gleitpendellagersystems zu bestimmen.

Vorab ist hierfür zunächst zu klären, ob die eingepreßte Auslenkung  $|u_{min}|$  und die dadurch bewirkte Hangabtriebskraft  $F_{Hangabtrieb} = mg \cdot \sin \varphi_0$  überhaupt dafür ausreichen, den vorhandenen Reibwiderstand  $F_{Reibwiderstand} = \mu \cdot mg \cdot \cos \varphi_0$  zu überwinden und entsprechend einen Gleitvorgang zu initiieren.

$$mg \cdot \sin |\varphi_{min}| > \mu \cdot mg \cdot \cos \varphi_{min}$$

$$\tan |\varphi_{min}| > \mu \quad (6.8)$$

$$|u_{min}| > r \cdot \sin (\arctan \mu) \quad (6.9)$$

$$\text{bzw. mit: } \sin \varphi = \frac{u}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{r-z}{r}, \quad \tan \varphi = \frac{u}{r-z}$$

$$\frac{u_{min}}{r-z_{min}} > \mu$$

$$u_{min} > \mu \cdot (r-z_{min})$$

Mit Einsetzen der Gleichung (4.79) und anschließendem Umformen:

$$u_{min} > r \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx r \cdot \mu \quad (6.10)$$

Die seitliche Auslenkung muss demnach mindestens den Wert in der Höhe von  $u_0 > |u_{min}|$

erreichen, damit nach dem Freilassen ein Gleitvorgang einsetzt. In diesem Fall lässt sich die Lage, in der das System wieder zum Stillstand kommt, aus der Bilanzierung der an der Bewegung beteiligten Energieanteile herleiten.

Die in der Ausgangslage zunächst potentiell gespeicherte Lageenergie  $E_{pot,0}$  berechnet sich in Abhängigkeit der gemäß Gleichung (4.82) gegebenen Hebung  $z_0$  zu:

$$E_{s,0} = E_{pot,0} = mg \cdot z_0 = mg \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi_0) = mg \cdot (r - \sqrt{r^2 - u_0^2}) \approx \frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{u_0}{r}\right)^2 \cdot r \quad (6.11)$$

Mit Einsetzen des Gleitvorgangs wandelt sich ein Teil der eingangs vorhandenen Lageenergie  $E_{pot,0}$  in die ebenfalls reversible kinetische Bewegungsenergie  $E_{kin,1}$  um, während der andere Teil in Form von Reibungswärme in die Umgebung dissipiert wird. Unabhängig von diesen weiteren Energieanteilen lässt sich die potentielle Energie  $E_{pot,1}$  jedoch zu jedem beliebigem Zeitpunkt  $t_1$  allein in Abhängigkeit der aktuell vorhanden Höhenlage  $z_1$  bestimmen:

$$E_{pot,1} = mg \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi_1) \approx \frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{u_1}{r}\right)^2 \cdot r$$

Damit ist auch der Verlust der potentiellen Energie des Systems nach Loslassen zu jedem beliebigem Zeitpunkt bekannt:

$$\Delta E_{pot} = mg \cdot r \cdot (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0) \approx \frac{mg}{2} \cdot r \cdot \left[ \left(\frac{u_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{u_1}{r}\right)^2 \right] \quad (6.12)$$

Gemäß dem Energieerhaltungssatz ist dieser Betrag stets identisch mit der Summe aus der momentan kinetisch gespeicherten Bewegungs- und der aufgrund der Reibung bis zu diesem Zeitpunkt bereits dissipierten Wärmeenergie:

$$E_{kin,1} = \frac{m \cdot \dot{u}_1^2}{2} \quad E_{h,1} = \mu \cdot mg \cdot r \cdot (\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1) = \mu \cdot mg \cdot (u_0 - u_1) \quad (6.13)$$

Damit ergibt sich zusammengefasst die folgende das Problem beherrschende Energiegleichung:

$$\frac{mg}{2} \cdot r \cdot \left[ \left(\frac{u_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{u_1}{r}\right)^2 \right] \approx \frac{m \cdot \dot{u}_1^2}{2} + \mu \cdot mg \cdot (u_0 - u_1) \quad (6.14)$$

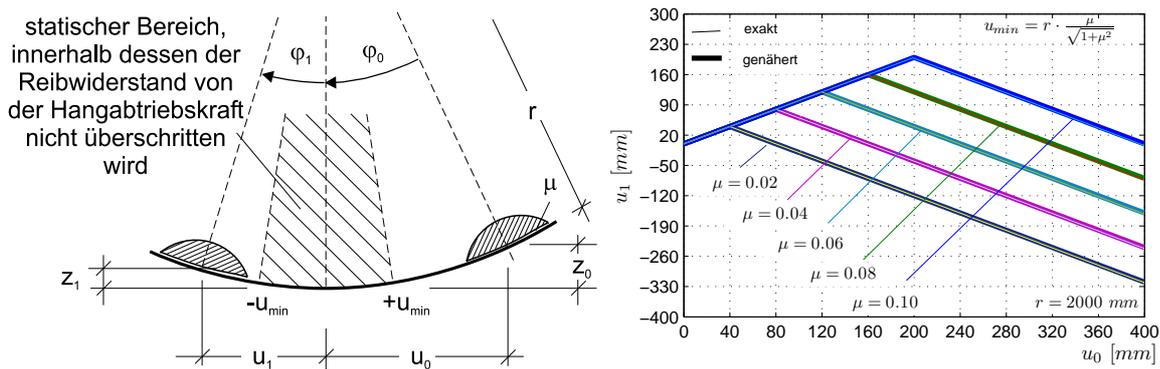
$$\text{bzw.:} \quad \mu \cdot \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 = \cos \varphi_0 + \mu \cdot \sin \varphi_0 \quad (6.15)$$

Die gesuchte Lage, in der das System nach erfolgtem Gleitprozess wieder zum Stillstand kommt, ist nun unmittelbar mit der Bedingung verknüpft, dass in diesem Zustand definitionsgemäß auch die kinetische Bewegungsenergie  $E_{kin,1}$  wieder zu Null wird. Mit  $\dot{u}_1 = 0$  führt dies auf die folgende Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{mg}{2} \cdot r \cdot \left[ \left( \frac{u_0}{r} \right)^2 - \left( \frac{u_1}{r} \right)^2 \right] &\approx \mu \cdot mg \cdot (u_0 - u_1) \\
\left( \frac{u_1}{r} \right)^2 - 2 \cdot \mu \cdot \frac{u_1}{r} + \left( \frac{u_0}{r} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{u_0}{r} &\approx 0 \\
\left( \frac{u_1}{r} \right)_{1,2} &\approx \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 2 \cdot \mu \cdot \frac{u_0}{r} + \left( \frac{u_0}{r} \right)^2} \approx \mu \pm \sqrt{\mu - \left( \frac{u_0}{r} \right)^2} \\
\left( \frac{u_1}{r} \right)_{1,2} &\approx \mu \pm \left[ \mu - \frac{u_0}{r} \right]
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\text{bzw.: } \varphi_1 = \arcsin \frac{\cos \varphi_0 + \mu \cdot \sin \varphi_0}{\sqrt{1 + \mu^2}} - \arccos \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \rightarrow u_1 = r \cdot \sin \varphi_1 \tag{6.17}$$

Das der Problematik zugrunde gelegte System sowie die für diskrete Werte des Reibkoeffizienten und einen konstanten Gleitpendellagerradius  $r = 2.0 \text{ m}$  ausgewerteten Ergebnisse sind in Bild 6.4 dargestellt.



**Bild 6.4:** Position des Hängenbleibens nach vorheriger Auslenkung und anschließendem Freilassen

In dieser einfachen Betrachtung bleiben zwar der Zustand der Hin- und Herbewegung der Erdbenenbeanspruchung und die dadurch von außen eingeprengte Energie unberücksichtigt, dennoch wird der Einfluss, den die einzelnen Energieanteile auf das Phänomen ausüben, deutlich. Der mit steigendem Reibkoeffizienten erwartungsgemäß geringere ausfallende Gleitweg zeigt, dass das Rückstellvermögen eine zur Energiedissipation konträre Funktion darstellt.

Werden die im Erdbebenfall auf das System einwirkenden Energieanteile in Beziehung gesetzt, ergibt sich die folgende Energiebilanz:

$$E_i = E_s + E_h + E_v \tag{6.18}$$

mit:

- $E_s$  die von der Isolationsvorrichtung reversibel aufgenommene Energie, einschließlich der Teile des Tragwerks, die seine Antwort beeinflussen, wie z.B. Brückenpfeiler,  
 $E_s = E_{kin} + E_{pot}$ ;  
 $E_h$  von der Isolationsvorrichtung hysteretisch dissipierte Energie;  
 $E_v$  von der Isolationsvorrichtung infolge viskoser Dämpfung dissipierte Energie ;  
 $E_i$  von außen infolge der Erdbebenerschütterungen eingeprägte Energie;

Gemäß der in [79] gegebenen Ausführungen ist es sinnvoll, die Bewertung der Rückstellwirkung auf die vom Isolationssystem reversibel speicherbaren Energie und die vom Isolationssystem dissipierbaren Energie zu beziehen. Die hierbei vorgenommene Vernachlässigung der viskosen Dämpfungsanteile wird mit deren Abhängigkeit von der Geschwindigkeit begründet, wenngleich auch solche Systeme unter der Voraussetzung einer entsprechend niedrigen Rückstellkraft dazu tendieren, während des Bebens aus der Nulllage herauszuwandern. Zumindest aber nach dem Erdbebenereignis kehren solche Systeme nach einer ausreichenden Zeitspanne stets zuverlässig in ihre Ausgangslage zurück. Vor allem aber ist deren Anteil an der Energiezerstreuung bei Vorhandensein hysteretischer Dissipationsmechanismen üblicherweise äußerst gering und eine Vernachlässigung daher gerechtfertigt.

Mit der Zielsetzung, ein möglichst einfach anzuwendendes Kriterium zu erhalten, wurde in [79] weiterhin vorgeschlagen, die zur Bewertung herangezogenen Energieanteile  $E_s$  und  $E_h$  auf die erforderliche Verschiebungskapazität der Erdbebenvorrichtung und damit auf die jeweilige Bemessungsverschiebung  $d_{Ed}$  zu beziehen.

Die Festlegung des prozentualen Anteils, um den die für eine Verschiebung von 0 bis  $d_{Ed}$  reversibel gespeicherte Energie denjenigen Anteil der dissipierten Energie zur Sicherstellung einer ausreichenden Rückstellwirkung zu übertreffen hat, wurde dabei an der Vorgabe orientiert, eine nach dem Beben maximale zurückbleibende Verformung in der Höhe von etwa  $0.5 \cdot d_{Ed}$  zu gewährleisten. Neben zahlreichen nicht-linearen Zeitschrittberechnungen wurden von MEDEOT im Rahmen des LESSLOSS Forschungsvorhabens dazu auch entsprechend realitätsnahe Rütteltischversuche auf der Anlage der ENEA in CASACCIA durchgeführt [82]. Das letztendlich festgelegte Kriterium, das mit der Einführung der DIN EN 15129: 2010-06 [30] zwischenzeitlich auch Eingang in die europäische Normung gefunden hat, ist bei der Herstellung von Erdbebenvorrichtungen entsprechend zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} E_s &\geq \lambda \cdot E_h \\ E_s &\geq 0.25 \cdot E_h \end{aligned} \tag{6.19}$$

mit:

$d_{Ed}$  größte Verschiebung einer Vorrichtung in einer Hauptrichtung. Im Brückenbau entspricht  $d_{Ed}$  dem Größtwert der Verschiebung  $d_{max}$  und damit der Bemessungsverschiebung des Isolators  $d_{bi,d}$  multipliziert mit dem Zuverlässigkeitsfaktor  $\gamma_{IS} = 1.5$ .

Die diesbezüglichen Regelungen sind in [34] und [33] identisch und der empfohlene Zuverlässigkeitsfaktor im NA [35] übernommen.

im Brückenbau:  $d_{Ed} = 1.5 \cdot d_{bi,d}$

Für andere Bauwerke gilt  $d_{Ed} = \gamma_x \cdot d_{bd}$

Wird das Energiekriterium der Gleichung (6.19) direkt auf Gleitpendellager angewendet, lässt sich dieses in Form eines maximal zulässigen Reibkoeffizienten  $\mu$  ausdrücken.

Die zwischen Nullpunkt und der Bemessungsverschiebung  $d_{Ed}$  im System gespeicherte Energie entspricht der potentiellen Lageenergie und beträgt:

$$E_s = E_{pot} = mg \cdot z_{Ed} = mg \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi_{Ed}) \quad \text{mit:} \quad \varphi_{Ed} = \arcsin \frac{d_{Ed}}{r} \quad (6.20)$$

Die über den gegebenen Verschiebungsbereich dissipierte Energie berechnet sich in Abhängigkeit des Reibkoeffizienten zu:

$$E_h = \mu \cdot mg \cdot r \cdot \int_0^{\varphi_{Ed}} \cos \varphi \cdot d\varphi = \mu \cdot mg \cdot r \cdot \sin \varphi_{Ed} \quad (6.21)$$

Aus dem Energiekriterium folgt:

$$\begin{aligned} E_s &\geq 0.25 \cdot E_h \\ mg \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi_{Ed}) &\geq 0.25 \cdot \mu_{max} \cdot mg \cdot r \cdot \sin \varphi_{Ed} \\ \mu_{max} &\leq 4 \cdot \frac{1 - \cos \varphi_{Ed}}{\sin \varphi_{Ed}} \end{aligned} \quad (6.22)$$

bzw. mit:  $z_{Ed} = r - \sqrt{r^2 - d_{Ed}^2}$  gemäß Gleichung (4.79)

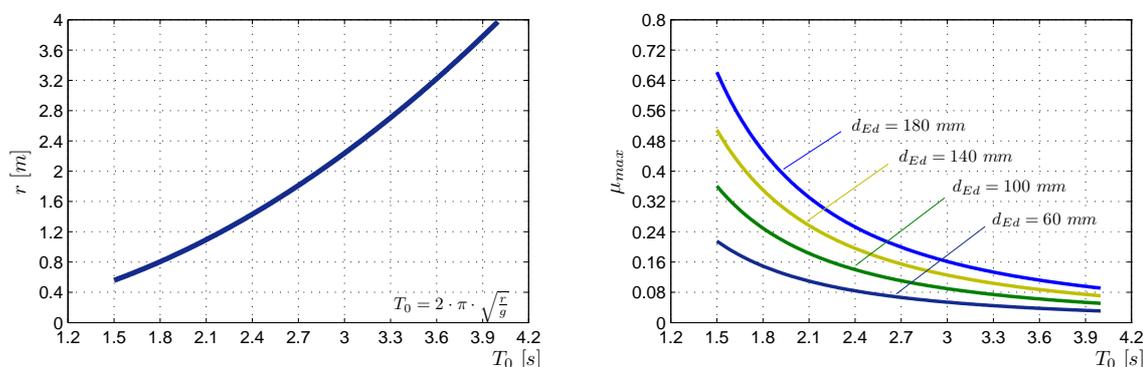
$$\begin{aligned} \text{sowie:} \quad \sin \varphi_{Ed} &= \frac{d_{Ed}}{r} \quad \text{und} \quad \cos \varphi_{Ed} = \frac{r - z_{Ed}}{r} \\ \mu_{max} &\leq \frac{4}{d_{Ed}} \cdot \left( r - \sqrt{r^2 - d_{Ed}^2} \right) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Unter Einbeziehung des Energiekriteriums gliedert sich die Auslegung von Gleitpendellagern in die folgenden Schritte:

- **Schritt 1:** Festlegung der einem maximalen zulässigen Beanspruchungsniveau zugeordneten Horizontalbeschleunigung  $S_a$ . Festlegung der dazu gehörenden Eigenperiode  $T_0$  aus dem Bemessungsantwortspektrum.

- **Schritt 2:** Berechnung der sich aus der Horizontalbeschleunigung ergebenden Bemessungsverschiebung  $d_{Ed}$  gemäß Gleichung (2.161).
- **Schritt 3:** Bestimmung des sich für die Eigenperiode  $T_0$  gemäß Gleichung (4.109) ergebenden Gleitpendellagerradius.
- **Schritt 4:** Bestimmung des zur Einhaltung des Energiekriteriums maximal zulässigen Reibkoeffizienten (6.23).

In Bild 6.5 sind für verschiedene diskrete Bemessungsverschiebungswerte die gemäß dem Energiekriterium resultierenden maximal zulässigen Reibkoeffizienten graphisch dargestellt.



**Bild 6.5:** Zusammenhang zwischen Gleitpendellagerradius  $r$  und Eigenperiode  $T_0$  sowie für diskrete Bemessungsverschiebungswerte  $d_{Ed}$  gemäß dem Energiekriterium der Gleichung (6.23) ausgewertete maximal zulässige Reibkoeffizienten  $\mu_{max}$

Abschließend bleibt festzuhalten, dass die Bewertung des Rückstellvermögens anhand der Energiebilanz physikalisch begründet ist und daher eine sinnvolle Vorgehensweise darstellt. Durch den Bezug der einzelnen Energieanteile auf fest definierte Verschiebungswerte ist zudem ein anwendungsfreundliches und somit normengerechtes Kriterium gegeben.

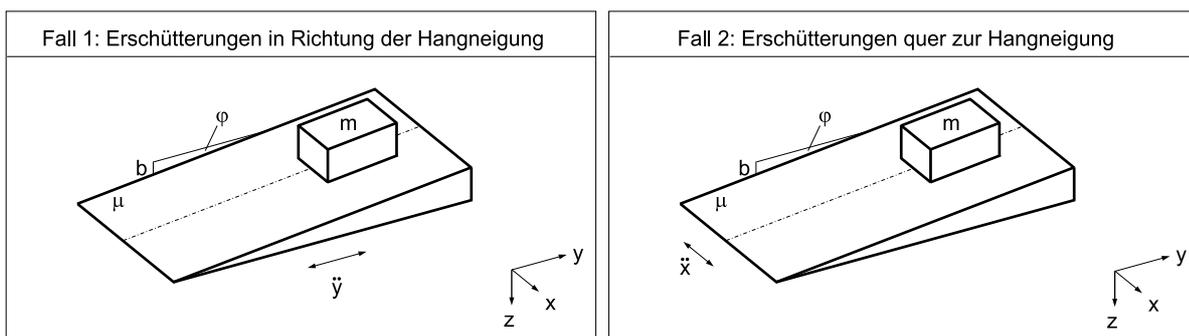
Jedoch wird die im Erdbebenfall tatsächlich geleistete Arbeit durch den Bezug auf die Bemessungsverschiebung allenfalls indirekt erfasst, und der tatsächliche Verlauf der Verschiebungsentwicklung bleibt unberücksichtigt.

Unter Berücksichtigung der tatsächlich in allen drei Koordinatenrichtungen auftretenden Bodenerschütterungen ist im Fall der Erdbebenisolierung mit Gleitpendellagern zudem zu vermuten, dass von dem dadurch gesamtheitlich verursachten Energieeintrag ein positiver Effekt auf das Rückstellverhalten ausgeht. Um sich dieser Fragestellung anzunähern, werden die damit in Zusammenhang stehenden Phänomene zunächst anhand eines auf einer geeigneten Reibfläche befindlichen Gleitkörpers untersucht. Diese im Vergleich zum Gleitpendellager vereinfachte Modellvorstellung dient neben der theoretischen Annäherung vor allem auch der Verifizierung des dazu parallel entwickelten numerischen FE-Modells, das dann die Grundlage für weiterführende Untersuchungen bildet.

### 6.3 Studie an geneigten Gleitflächen

Gegenstand der nachfolgenden Studie ist die Herleitung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die die Kinematik eines auf einer schrägen Reibfläche befindlichen Gleitkörpers bestimmen. Hierbei von besonderem Interesse ist der Einfluss auf das Gleitverhalten des Systems, der von möglichen Bodenerschütterungen und dem damit einhergehenden Energieeintrag ausgeht. Als Grundlage der nachstehenden Überlegungen dient das in Bild 6.6 dargestellte System, das einen auf einer geneigten ebenen Fläche aufgelagerten Gleitkörper zeigt.

Die geometrischen Abmessungen des Gleitkörpers seien hierbei so gewählt, dass mögliche Kipperscheinungen von vornherein ausgeschlossen werden können. Ferner wird ein konstant bleibender Reibkoeffizient vorausgesetzt, der in der Folge weder von der Pressungsverteilung noch von der Gleitgeschwindigkeit oder der Temperaturentwicklung beeinflusst ist.



**Bild 6.6:** Auf geneigter Reibfläche befindlicher Gleitkörper mit in unterschiedlichen Richtungen einwirkenden Fußpunktbeschleunigungen

Ergänzend zu den theoretisch erhaltenen Ergebnissen werden die Phänomene zusätzlich anhand eines in der Softwareumgebung ADINA [5] entwickelten FE-Modells untersucht. Dazu wird der Gleitkörper vereinfacht auf eine Punktmasse reduziert und auf einer aus Kontaktelementen gebildeten Fläche aufgelagert, die mit dem entsprechenden Reibkoeffizienten belegt sind. Der ggf. nach Freilassen der Punktmasse einsetzende Gleitvorgang wird mit Hilfe des numerischen Integrationsverfahrens nach NEWMARK berechnet. Zu diesem Zweck werden die Integrationsparameter der Beschleunigungsmethode entsprechend zu  $\delta = 0.5$  und  $\alpha = 0.25$  gesetzt. Neben der Verifizierung der analytisch hergeleiteten Ergebnisse dient diese Vorgehensweise vor allem auch der Bewertung der Zuverlässigkeit der in der Softwareumgebung ADINA hinterlegten Algorithmen in Hinsicht auf die Verwendung von Kontaktelementen in Kombination mit der Berechnung dynamischer Zeitverläufe mit Hilfe der Zeitschrittintegration.

### 6.3.1 Gleitvorgang ohne äußere Einwirkungen

Zunächst wird der nach Freilassen einsetzende ungestörte Gleitvorgang eines auf einer geneigten Fläche befindlichen Gleitkörpers ohne äußere Einflüsse untersucht. Voraussetzung für das Einsetzen eines Gleitprozesses ist in diesem Fall die gemäß Gleichung (6.8) zur Überwindung des Reibwiderstandes definierte Mindesthangneigung. Alternativ lässt sich die Gleichung (6.8) anstatt auf den Neigungswinkel  $\varphi$  auch auf die Hangneigung  $b = \frac{\Delta z}{\Delta y}$  beziehen:

$$b = \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

$$\mu < \tan \varphi = b \quad \rightarrow \quad \mu < b_{min} \quad (6.24)$$

Sind die Voraussetzungen zum Einsetzen des Gleitprozesses gemäß Gleichung (6.24) gegeben, lässt sich der Zusammenhang zwischen verstrichener Zeit  $t$  und zurückgelegtem Gleitweg  $s$  z.B. aus der folgenden Energiebilanz herleiten:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{dis} \quad (6.25)$$

Werden die an der Bewegung beteiligten Energieanteile auf den in Hangrichtung zurückgelegten Weg  $s = \frac{u}{\cos \varphi}$  bezogen, nimmt die Energiegleichung die folgende Form an:

$$\Delta s = s_0 - s_1$$

$$E_{kin} = \frac{m \cdot \dot{s}_1^2}{2} \quad E_{pot} = -mg \cdot \Delta s \cdot \sin \varphi \quad E_{dis} = -\mu \cdot mg \cdot \cos \varphi \cdot \Delta s$$

$$\frac{m \cdot \dot{s}_1^2}{2} - mg \cdot \Delta s \cdot \sin \varphi = -\mu \cdot mg \cdot \cos \varphi \cdot \Delta s$$

$$\dot{s}_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta s \cdot (\sin \varphi - \mu \cdot \cos \varphi)}$$

$$(6.26)$$

Aus der allgemeingültigen Definition der Geschwindigkeit als Ableitung des Weges nach der Zeit  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$  folgt:

$$dt = \frac{1}{\dot{s}} \cdot ds = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta s \cdot (\sin \varphi - \mu \cdot \cos \varphi)}} ds \quad (6.27)$$

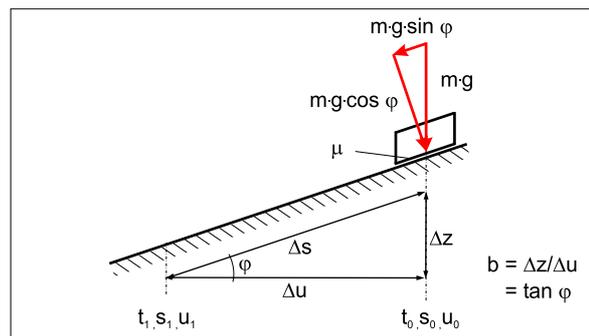
Lösen des Integrals führt auf den folgenden Zusammenhang zwischen verstrichener Zeit  $t$  und zurückgelegtem Gleitweg  $s$ :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta s}{g \cdot (\sin \varphi - \mu \cdot \cos \varphi)}} \rightarrow \Delta s = \frac{1}{2} \cdot t_1^2 \cdot g \cdot (\sin \varphi - \mu \cdot \cos \varphi) \quad (6.28)$$

$$\text{bzw. mit: } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$$

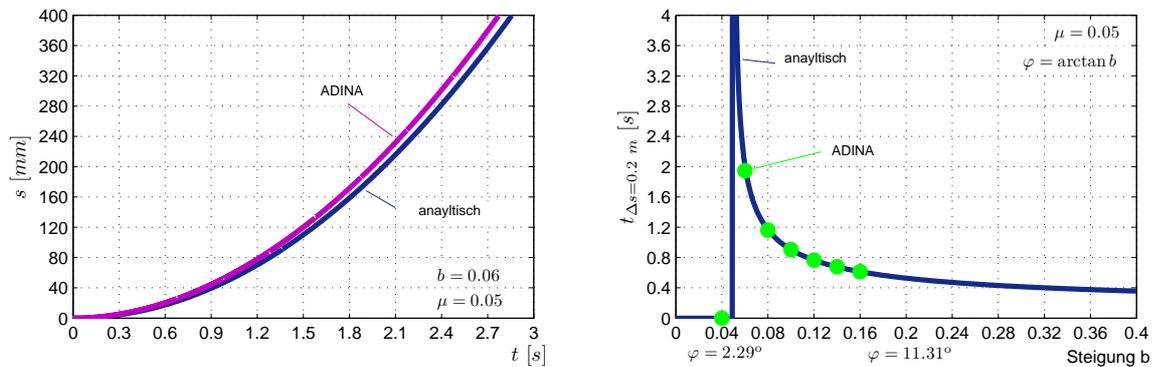
$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta s \cdot \sqrt{1+b^2}}{g \cdot (b-\mu)}} \rightarrow \Delta s = \frac{t_1^2 \cdot g \cdot (b-\mu)}{2 \cdot \sqrt{1+b^2}} \quad (6.29)$$

Das dem ungestörten Gleitvorgang zugrunde gelegte Gedankenmodell ist in Bild 6.7 nochmals graphisch dargestellt.



**Bild 6.7:** Auf geneigter Gleitfläche befindlicher Gleitkörper ohne Fremdeinwirkungen

Die in Bild 6.8 gegenübergestellten analytisch und mit Hilfe des FE-Modells erhaltenen Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung.

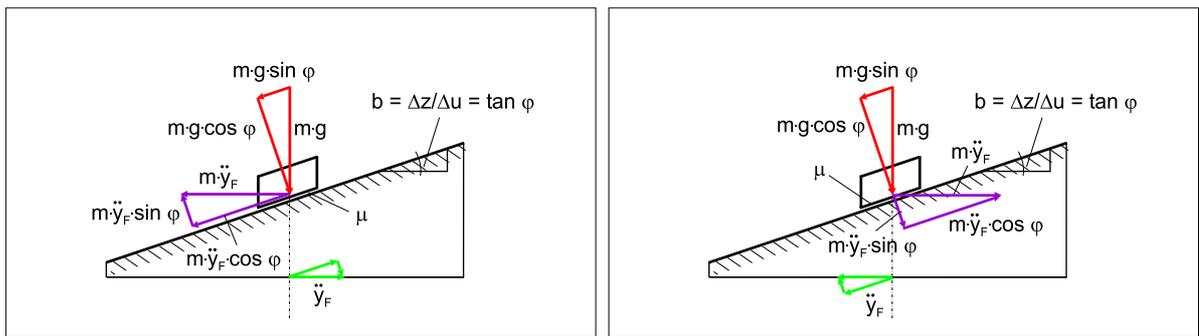


**Bild 6.8:** Gegenüberstellung der für einen auf einer geneigten Reibfläche befindlichen Gleitkörper numerisch und analytisch erhaltenen Ergebnisse

An dieser Stelle ist auf die Tatsache hinzuweisen, dass ähnlich wie die Pendeleigenfrequenz auch die Geschwindigkeit des Gleitvorgangs unabhängig von der vorhandenen Masse des Gleitkörpers ist. Vielmehr wird der Geschwindigkeitsverlauf allein durch die Erdbeschleunigung  $g$ , den vorhandenen Reibwiderstand  $\mu$  und die Hangsteigung  $b$  bzw. den Neigungswinkel  $\varphi$  bestimmt, vorausgesetzt der Luftwiderstand kann aufgrund des Oberfläche-Masse-Verhältnisses vernachlässigt werden.

### 6.3.2 Fußpunktbeschleunigung in Hangrichtung

Das in Kapitel 6.3.1 eingeführte Gedankenmodell wird nun um eine in  $y$ -Richtung einwirkende Fußpunkterregung  $\ddot{y}_F$  erweitert, wie dies in Bild 6.6 als „Fall 1“ dargestellt ist. In Abhängigkeit der Steigung  $b$  wird zunächst diejenige Mindestfußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$  ermittelt, die erforderlich ist, um einen auf einer geneigten Fläche und aufgrund der Einhaltung der Randbedingung  $\mu \geq b = \tan \varphi$  in Ruhe befindlichen Gleitkörper in Bewegung zu versetzen. Wie in Bild 6.10 dargestellt, ist hierbei in Abhängigkeit der Richtung der einwirkenden Fußpunktbeschleunigung zu unterscheiden, ob diese einen hangaufwärts oder einen hangabwärts gerichteten Gleitvorgang bewirkt.



**Bild 6.9:** Auf geneigter Fläche befindlicher Gleitkörper mit Fußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$  in Hangrichtung

Die zur Initiierung des Hangabwärtsgleitens erforderliche Mindestfußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$ , *hangabwärts* resultiert aus der Bildung des folgenden Kräftegleichgewichts:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Reibwiderstand}} &\leq F_{\text{Losbrechkraft}} \\
 \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \varphi - m \cdot \ddot{y}_F \cdot \sin \varphi) &\leq m \cdot g \cdot \sin \varphi + m \cdot \ddot{y}_F \cos \varphi \\
 \sin \varphi \cdot (g + \mu \cdot \ddot{y}_F) &\geq \cos \varphi (\mu \cdot g - \ddot{y}_F) \\
 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} &\geq \frac{\mu \cdot g - \ddot{y}_F}{g + \mu \cdot \ddot{y}_F} \\
 \text{mit: } \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} &= \tan \varphi = b \\
 \rightarrow \ddot{y}_F, \text{ hangabwärts} &\geq \frac{g \cdot (\mu - b)}{1 + b \cdot \mu} \quad \text{falls: } \mu \geq b \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

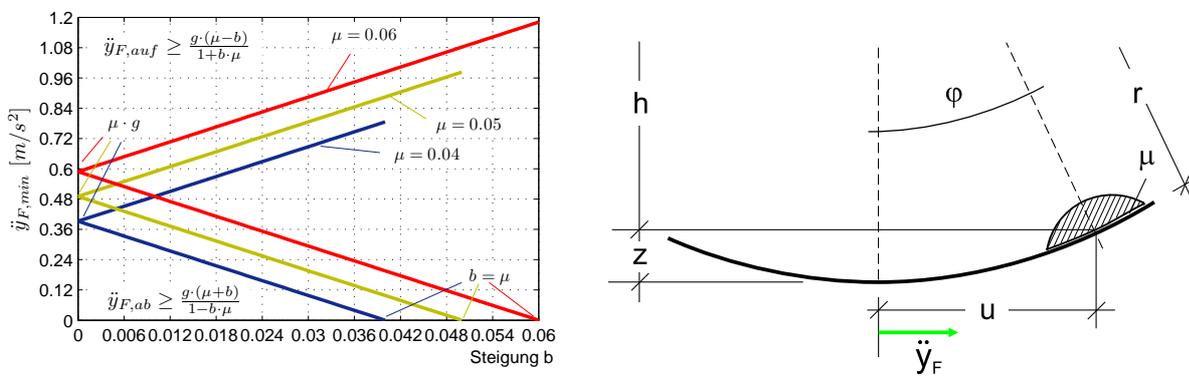
Die zur Initiierung des Hangaufwärtsgleitens erforderliche Mindestfußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$ , *hangaufwärts* berechnet in derselben Weise zu:

$$\ddot{y}_F, \text{ hangaufwärts} \geq \frac{g \cdot (\mu + b)}{1 - b \cdot \mu} \quad \text{falls: } \mu \geq b \quad (6.31)$$

In Bild 6.10 sind die Gleichungen (6.30) und (6.31) für diskrete Werte des Reibkoeffizienten

$\mu$  in Abhängigkeit der Steigung  $b$  ausgewertet und graphisch dargestellt. Folgerichtig ist den beiden Geraden in Abhängigkeit des Reibkoeffizienten  $\mu$  bei  $b = 0$  jeweils derselbe Startwert  $\ddot{y}_{F, \min} = g \cdot \mu$  gemeinsam, der jeweils diejenige Mindestfußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$  definiert, die erforderlich ist, um einen in der Waagerechten befindlichen Gleitkörper in Bewegung zu versetzen.

Ab diesem Punkt nimmt die zur Initiierung eines abwärts gerichteten Gleitvorgangs erforderliche Fußpunktbeschleunigung mit zunehmender Steigung  $b$  linear ab, um ebenfalls folgerichtig im Schnittpunkt mit der Abszisse bei  $b = \mu$  zu enden. Wie bereits in Kapitel 6.3.1 erläutert, definiert dieser Punkt die Schwelle, ab der der vorhandene Reibwiderstand allein durch die geweckte Hangabtriebskraft überwunden wird.



**Bild 6.10:** Für diskrete Werte des Reibkoeffizienten  $\mu$  zur Bewegungsinitiierung erforderliche Mindestbeschleunigung  $\ddot{y}_{F, \min}$  in Abhängigkeit der Hangneigung  $b$ ; Konkav geformte Gleitfläche

Die Ergebnisse lassen sich mit dem in Kapitel 6.3.1 eingeführten FE-Modell leicht bestätigen, indem eine über die Zeit linear zunehmende Fußpunktbeschleunigung ergänzt und der Zeitpunkt der Initiierung des Gleitprozesses abgegriffen wird.

Wird die Gleichung (6.30) anstatt auf eine ebene auf eine konkave Gleitfläche mit dem Radius  $r$  bezogen, ist der konstante Wert der Steigung  $b$  durch eine Variable in Abhängigkeit des Neigungswinkels  $b = \tan \varphi$  und damit in Abhängigkeit der Auslenkung  $u = r \cdot \sin \varphi$  zu ersetzen.

$$\ddot{y}_{F, \text{hangabwärts}} \geq g \cdot \frac{\mu - \tan \varphi}{1 + \mu \cdot \tan \varphi} \quad (6.32)$$

$$\text{bzw. mit: } r \cdot \sin \varphi = u \rightarrow \varphi = \arcsin \frac{u}{r} \rightarrow \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \arcsin \frac{u}{r} = \frac{u}{r \cdot \cos \varphi}$$

$$\ddot{y}_{F, \text{hangabwärts}} \geq g \cdot \frac{\mu - \frac{u}{r \cdot \cos \varphi}}{1 + \mu \cdot \frac{u}{r \cdot \cos \varphi}}$$

$$\ddot{y}_{F, \text{hangabwärts}} \geq g \cdot \frac{\mu \cdot r \cdot \cos \varphi - u}{r \cdot \cos \varphi + \mu \cdot u}$$

(6.33)

$$\begin{aligned}
\text{mit: } r^2 &= h^2 + u^2 \quad \text{und: } h = r \cdot \cos \varphi \quad \rightarrow \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{r}\right)^2} \\
\ddot{y}_F, \text{ hangabwärts} &\geq g \cdot \frac{\mu \cdot r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u}{r}\right)^2} - u}{r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u}{r}\right)^2} + \mu \cdot u} \\
\ddot{y}_F, \text{ hangabwärts} &\geq g \cdot \frac{\mu \cdot \sqrt{r^2 - u^2} - u}{\sqrt{r^2 - u^2} + \mu \cdot u} \tag{6.34}
\end{aligned}$$

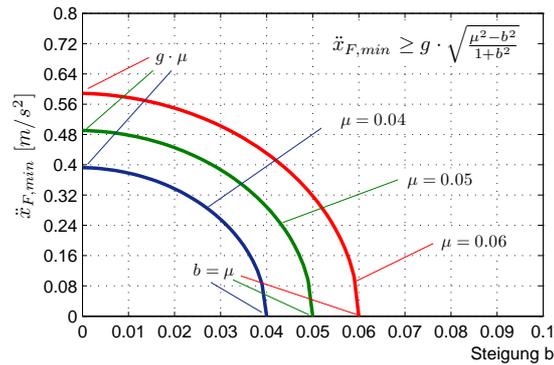
### 6.3.3 Fußpunktbeschleunigung quer zur Hangrichtung

Ergänzend zu Kapitel 6.3.2 wird nun der in Bild 6.6 als „Fall 2“ bezeichnete Zustand betrachtet, der durch eine quer zur Hangrichtung wirkende Fußpunkterregung  $\ddot{x}_F$  gekennzeichnet ist. Da in diesem Fall von der Fußpunktbeschleunigung kein Einfluss auf die Kontaktpressung ausgeht, bleibt der zu überwindende Reibwiderstand  $F_{\text{Reibwiderstand}} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \varphi$  in Abhängigkeit von der Auflast stets konstant. Die zur Überwindung des Reibwiderstandes angreifende resultierende Kraft setzt sich nunmehr aus der Hangabtriebskraft  $F_{\text{Abtrieb}} = m \cdot g \cdot \sin \varphi$  und aus der durch die Fußpunktbeschleunigung geweckten Trägheitskraft  $F_{\text{Trägheit}} = m \cdot \ddot{x}_F$  zusammen. Die zur Initiierung des Gleitprozesses erforderliche Mindestbeschleunigung quer zum Hang berechnet sich wiederum aus dem Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
F_{\text{Reibwiderstand}} &\leq F_{\text{Losbrechkraft}} \\
\mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \varphi) &\leq \sqrt{(m \cdot \ddot{x}_F)^2} + (m \cdot g \cdot \sin \varphi)^2 \\
\ddot{x}_F^2 &\geq (\mu \cdot g \cdot \cos \varphi)^2 - (g \cdot \sin \varphi)^2 \\
\ddot{x}_F &\geq g \cdot \sqrt{(\mu \cdot \cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2} \\
\text{mit: } \cos^2 \varphi &= \frac{1}{1 + b^2} \quad \text{und: } \sin^2 \varphi = \frac{b^2}{1 + b^2} \\
\ddot{x}_F &\geq g \cdot \sqrt{\frac{\mu^2}{1 + b^2} - \frac{b^2}{1 + b^2}} \\
\ddot{x}_F &\geq g \cdot \sqrt{\frac{\mu^2 - b^2}{1 + b^2}} \tag{6.35}
\end{aligned}$$

Bild 6.11 zeigt die graphische Auswertung der Gleichung (6.35) in Abhängigkeit der Steigung  $b$  für diskrete Werte des Reibkoeffizienten  $\mu$ .

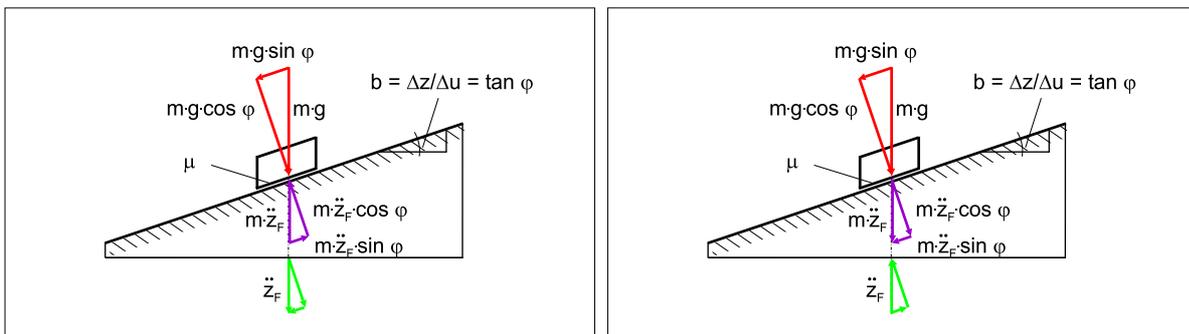
Folgerichtig stimmen Start- und Endpunkte der Kurven in Bild 6.11 mit denjenigen der in Kapitel 6.3.2 hergeleiteten und in Bild 6.10 dargestellten Kurven überein. Die erhaltenen Ergebnisse lassen sich wiederum nach Einfügen einer entsprechend quer zur Hangneigung gerichteten Fußpunktbeschleunigung im FE-Modell bestätigen.



**Bild 6.11:** Zur Bewegungsinitiierung erforderliche Mindestbeschleunigung  $\ddot{x}_{F,min}$  in Abhängigkeit der Hangneigung  $b$ , ausgewertet für diskrete Werte des Reibkoeffizienten  $\mu$

### 6.3.4 Fußpunktbeschleunigung in vertikaler Richtung

Im Gegensatz zu den zuvor betrachteten Fällen der Fußpunkterregung geht von vertikal gerichteten Erschütterungen kein Einfluss auf die Initiierung eines Gleitprozesses für auf geneigten Flächen gelagerte Gleitkörper aus. Diese zunächst unerwartete Tatsache wird anhand des in Bild 6.12 dargestellten Gedankenmodells nachfolgend kurz erläutert:



**Bild 6.12:** Auswirkungen vertikaler Fußpunktbeschleunigungen  $\ddot{z}_F$  auf einen auf einer geneigten Fläche befindlichen Gleitkörper

Der Grund liegt in der der Erdbeschleunigung  $g$  entsprechend identischen Wirkrichtung, derzufolge deren zusätzliche vertikale Fußpunktbeschleunigungen  $\ddot{z}_F$  lediglich die Abminderung bzw. Zunahme der insgesamt vorhandenen Vertikalbeschleunigung  $g \pm \ddot{z}_F$  bewirken. In der Folge liefert das Aufstellen des Kräftegleichgewichts lediglich die bereits bekannte Mindestneigung  $b_{min}$ , die erforderlich ist, um den vorhandenen Reibwiderstand allein aus der Wirkung der Hangabtriebskraft zu überwinden.

Streng genommen gilt diese Feststellung indes nur unter der Voraussetzung, dass die Abhängigkeit des Reibkoeffizienten  $\mu$  von der jeweils vorhandenen Kontaktpressung vernachlässigt werden kann. Tatsächlich geht die Zunahme der Kontaktpressung üblicherweise mit der Abnahme des Reibkoeffizienten einher, und die Initiierung des Gleitvorgangs wird in der Folge bereits für

geringfügig flachere Neigungswinkel erhalten. Im Fall geringerer Kontaktpressungen gilt dies entsprechen umgekehrt.

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Reibwiderstand}} &= F_{\text{Losbrechkraft}} \\
 \mu \cdot m \cdot (g \pm \ddot{z}_F) \cdot \cos \varphi &\leq m \cdot (g \pm \ddot{z}_F) \cdot \sin \varphi \\
 \mu \cdot \cos \varphi &\leq \sin \varphi \\
 \mu &\leq \tan \varphi = b
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

### 6.3.5 Fußpunktbeschleunigung in und quer zur Hangrichtung

In diesem Kapitel wird die Situation des gleichzeitigen Einwirkens der horizontalen Fußpunktbeschleunigungs-Komponenten  $\ddot{y}_F$  und  $\ddot{x}_F$  betrachtet. In diesem Fall lautet das Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Reibwiderstand}} &= F_{\text{Losbrechkraft}} \\
 \mu \cdot m \cdot \cos \varphi - \mu \cdot \ddot{y}_F \cdot m \cdot \sin \varphi &\leq \sqrt{(m \cdot \ddot{x}_F)^2 + (m \cdot g \cdot \sin \varphi + m \cdot \ddot{y}_F \cdot \cos \varphi)^2} \\
 \mu^2 \cdot [g \cdot \cos \varphi - \ddot{y}_F \cdot \sin \varphi]^2 &\leq \ddot{x}_F^2 + [g \cdot \sin \varphi + \ddot{y}_F \cdot \cos \varphi]^2
 \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren wird die Gleichung zu:

$$-\ddot{x}_F^2 + \ddot{y}_F^2 \cdot (\mu^2 \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) - 2 \cdot \ddot{y}_F \cdot [g \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot (\mu^2 + 1)] + g^2 \cdot (\mu^2 \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0$$

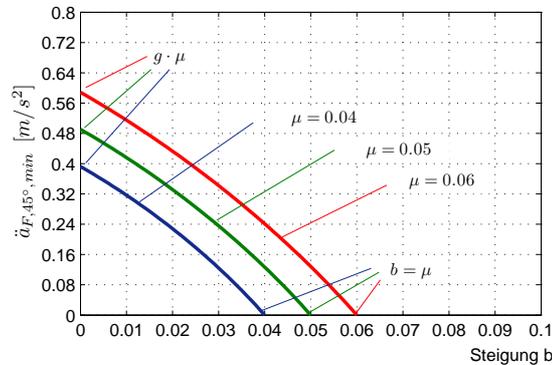
Eine Lösung wird lediglich erhalten, wenn die beiden Beschleunigungskomponenten in Bezug zueinander gesetzt werden. Dies ist für den Erdbebenfall aufgrund des stochastischen Charakters jedoch nicht möglich. Gleichwohl lässt sich der Fall der Fußpunkterregung mit einem Einfallswinkel von  $45^\circ$  zur Hangneigung untersuchen, indem die beiden Beschleunigungskomponenten  $\ddot{y}_F = \ddot{x}_F$  zu jeweils gleichen Teilen angesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_{F,(45^\circ)}^2 \cdot (\mu^2 \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi - 1) - 2 \cdot \ddot{y}_F \cdot [g \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot (\mu^2 + 1)] + g^2 \cdot (\mu^2 \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) &= 0 \\
 \text{mit: } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \quad \text{und: } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} & \\
 \ddot{y}_{F,(45^\circ)}^2 \cdot [\mu^2 \cdot b^2 - 1 - (1+b^2)] - \ddot{y}_F \cdot [2 \cdot g \cdot b \cdot (\mu^2 + 1)] + g^2 \cdot (\mu^2 - b^2) &= 0 \\
 \ddot{y}_{F,(45^\circ),1/2} = \frac{g \cdot b \cdot (\mu^2 + 1)}{\mu^2 \cdot b^2 - 1 - (1+b^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{g \cdot b \cdot (\mu^2 + 1)}{\mu^2 \cdot b^2 - 1 - (1+b^2)}\right)^2 - \frac{g^2 \cdot (\mu^2 - b^2)}{\mu^2 \cdot b^2 - 1 - (1+b^2)}} &
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Die zur Bewegungsinitiierung gesuchte Mindestbeschleunigung resultiert dann entsprechend aus  $\ddot{a}_{F, 45^\circ} = \sqrt{\ddot{y}_F^2 + \ddot{x}_F^2}$ . Für den Sonderfall des Gleichsetzens der quer gerichteten Fußpunktbeschleunigung  $\ddot{x}_F$  mit der hangabwärtsgerichteten Fußpunktbeschleunigung  $\ddot{y}_F$  folgt für den Schwellenwert  $\ddot{a}_{F, 45^\circ}$ :

$$\ddot{a}_{F, 45^\circ} = \frac{g \cdot b \cdot (\mu^2 + 1)}{\mu^2 \cdot b^2 - 1 - (1 + b^2)} - \sqrt{\left(\frac{g \cdot b \cdot (\mu^2 + 1)}{\mu^2 \cdot b^2 - 1 - (1 + b^2)}\right)^2 - \frac{g^2 \cdot (\mu^2 - b^2)}{\mu^2 \cdot b^2 - 1 - (1 + b^2)}} \quad (6.38)$$

In Bild 6.13 ist die Gleichung (6.38) wiederum in Abhängigkeit der Steigung  $b$  für diskrete Werte des Reibkoeffizienten  $\mu$  ausgewertet und graphisch dargestellt.

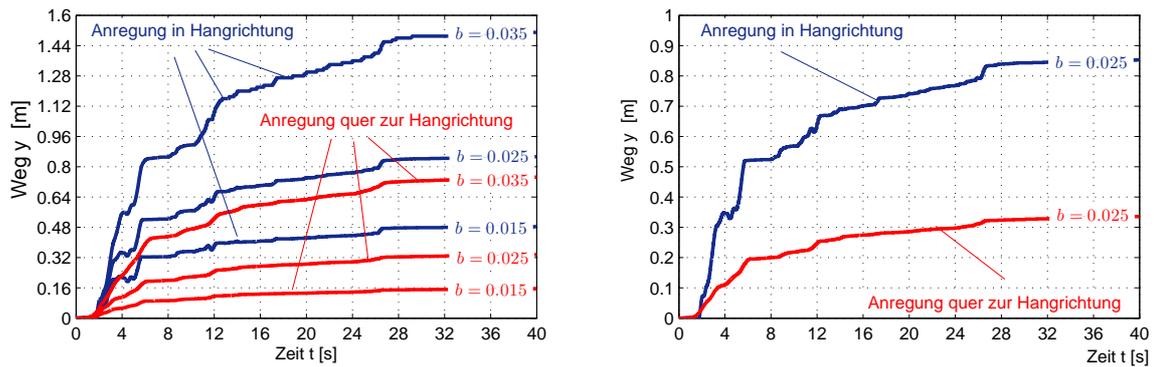


**Bild 6.13:** Zur Bewegungsinitiierung erforderliche Mindestbeschleunigung  $\ddot{x}_{F,min}$  in Abhängigkeit der Hangneigung  $b$  für diskrete Werte des Reibkoeffizienten  $\mu$

### 6.3.6 Fußpunkterregung in Form von Akzellerogrammen

Abschließend wird der auf einer Schräge befindliche Gleitkörper für den Fall einer realen Erdbebenbeanspruchung untersucht. Als Fußpunktbeschleunigung dient das in Bild 6.16 dargestellte Akzellerogramm des El-Centro Bebens, das jeweils getrennt in und quer zur Hangrichtung in Ansatz gebracht wird. Das Verhalten des Gleitkörpers für diese Anregungsszenarien wird für drei fiktive Neigungswinkel in der Höhe von  $b = 0.15$ ,  $b = 0.25$  und  $b = 0.35$  simuliert. Die entsprechend resultierenden Verschiebungskurven sind in Bild 6.14 dargestellt.

Fußpunktbeschleunigungen quer zur Hangrichtung haben erwartungsgemäß stets monoton ansteigende Verschiebungsverläufe des Gleitkörpers zur Folge, während Anregungen in Hangrichtung aufgrund der alternierenden Trägheitskräfte teilweise auch mit hangaufwärts gerichteten Verschiebungen einhergehen. In der Tendenz zeigt sich im zweit genannten Fall dennoch ein deutlicheres Bestreben zum Hangabwärtsgleiten, und es werden entsprechend größere zurückgelegte Wegstrecken erhalten.



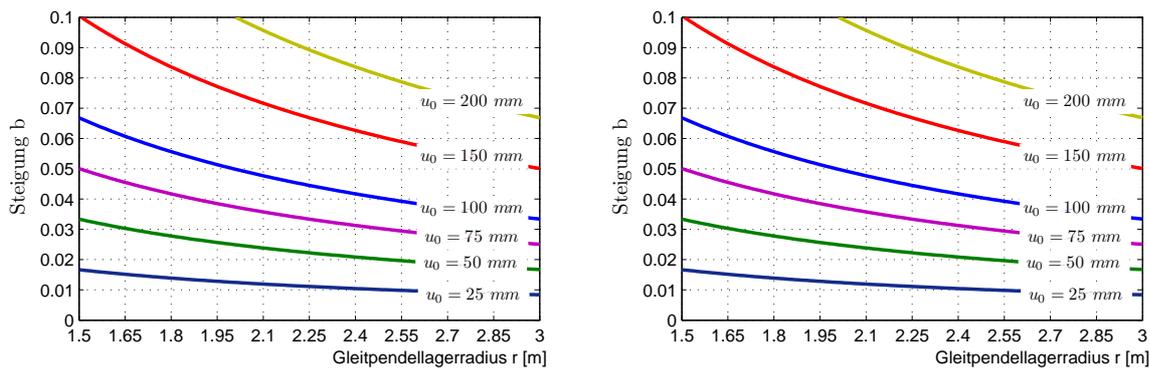
**Bild 6.14:** Graphische Darstellung der Bewegungsverläufe eines auf einer Schrägen befindlichen Gleitkörpers für Erdbebenanregungen in und quer zur Hangrichtung für verschiedene Steigungen

### 6.3.7 Bewertung der Ergebnisse

Erwartungsgemäß lässt sich anhand der erhaltenen Ergebnisse zeigen, dass im Fall von auf geneigten Flächen gelagerten Gleitkörpern bereits geringe Erschütterungen bzw. Fußpunktbeschleunigungen ausreichen, um einen Gleitprozess zu initiieren. Weiterhin wird ersichtlich, dass der darauf folgende Gleitvorgang im Fall der Fußpunkterregung quer zur Hangrichtung stets hangabwärts und im Fall der Anregung in Hangrichtung vorrangig hangabwärts gerichtet ist. Das generelle Bestreben der hangabwärtsgerichteten Gleitbewegung im zweit genannten Fall erklärt sich zum Einen aus der Hangabtriebskraft selbst und zum anderen aus dem in Bild 6.10 graphisch dargestellten, unterschiedlich hohen Niveau der Fußpunkterregung, die jeweils erforderlich ist, um einen hangabwärts- oder einen hangaufwärts gerichteten Gleitprozess zu initiieren.

Generell lässt sich aber festhalten, dass jeder ausgelöste Gleitvorgang in der Tendenz eine günstige Wirkung auf das Rückstellverhalten gleitpendelgelagerter Systeme ausübt. Gerade den in der Erdbebenanregung enthaltenen höherfrequenten Beschleunigungsanteilen ist in diesem Zusammenhang besondere Bedeutung beizumessen, da diese neben der potentiellen Bewegungsinitiierung vor allem auch dafür Sorge tragen, dass eine bereits erfolgte Gleitbewegung aufrecht erhalten wird, ohne jedoch hierbei wesentliche Trägheitskräfte in der eigentlichen Tragstruktur zu wecken. In diesem Zusammenhang ist auch der auf die Starkbebendauer nachfolgende Erschütterungsverlauf von Interesse, da diesem eine günstige Wirkung auf die letztendlich verbleibende Auslenkung zugeschrieben werden kann. In besonderem Maße gilt dies auch vor dem Hintergrund, dass die Verläufe üblicher Akzellerogramme mit fortschreitender Bebedauer eine zunehmend symmetrischere und ausgewogenere Form annehmen.

In Bild 6.15 sind die sich für diskrete Anfangsauslenkungen  $u_0$  einstellenden Hangneigungen  $b$  für übliche Gleitpendellagerradien  $r$  zwischen  $r = 1500 \text{ mm}$  und  $r = 3000 \text{ mm}$  unter Einbeziehung der Zusammenhänge  $\varphi = \arcsin\left(\frac{u}{r}\right)$  und  $b = \tan \varphi$  ausgewertet.

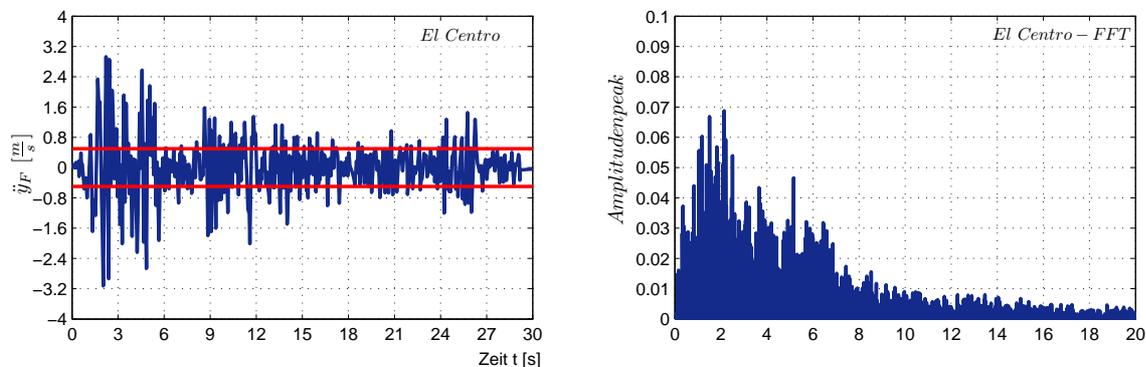


**Bild 6.15:** Für diskrete Anfangsauslenkungen  $u_0$  in Abhängigkeit des Gleitpendellagerradius  $r$  ausgewertete Hangneigungen  $b$

Der Vergleich der in den Bildern 6.11, 6.10 und 6.13 dargestellten und zur Gleitinitiiierung erforderlichen Mindestfußpunktbeschleunigungen  $\ddot{y}_F$  mit den in Bild 6.15 gegebenen, bei Gleitpendellagern üblicherweise vorhandenen Hangneigungen  $b$  zeigt, dass bereits geringe Erschütterungen ausreichen, um einen Gleitprozess zu initiieren.

Bereits für Fußpunktbeschleunigungen zwischen  $\ddot{y}_F = 0.1 \frac{m}{s^2}$  und  $\ddot{y}_F = 0.5 \frac{m}{s^2}$  sind offensichtlich in den allermeisten Fällen Gleitbewegungen die Folge.

Der Abgleich mit dem in Bild 6.16 wiedergegebenen Akzellerogramm des EL-Centro Erdbebens lässt entsprechend vermuten, dass die vorhandenen Erschütterungen für die üblichen Gleitpendellager-Konfigurationen ausreichend sind, um einen anhaltenden Gleitvorgang zu gewährleisten. Wird der Beschleunigungsverlauf des El-Centro Erdbebens mittels des in Kapitel 2.4.3 beschriebenen FFT-Algorithmus vom Zeit- in den Frequenzbereich übersetzt, lässt sich weiterhin zeigen, dass dieser ein breites Spektrum an Erregerfrequenzen bereit hält. Dieser Umstand wirkt sich ebenfalls günstig auf die Rückstellwirkung aus.



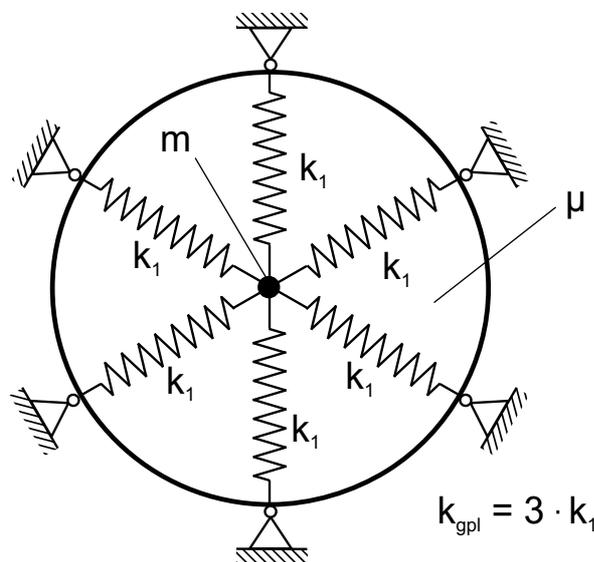
**Bild 6.16:** Akzellerogramm des El-Centro Erdbebens und zugehörige Fast-Fourier-Transformation

## 6.4 Betrachtung der Rückstellwirkung am Gleitpendellager

Wie die in Kapitel 6.3 hergeleiteten Ergebnisse verdeutlichen, stellt die Behandlung des Gleitpendellagers als ebenes Problem lediglich eine Näherung dar. In besonderem Maße gilt dies hinsichtlich der Rückstellproblematik, da hier im Fall der ebenen Betrachtung der gesamtheitliche Energieeintrag unterschätzt wird.

Um eine möglichst realitätsnahe Einschätzung der Rückstellwirkung des Gleitpendellagers zu erhalten, wird nachfolgend ein vereinfachtes FE-Simulationsmodell entwickelt, mit dem sich die tatsächlichen Effekte mit überschaubarem numerischen Aufwand untersuchen lassen. Die Masse der aufgehenden Baustruktur wird hierzu vereinfacht auf eine einfache Punktmasse zurückgeführt, die wiederum auf einer ebenen Kontaktfläche aufgelagert wird. Den Kontaktelementen wird im vorliegenden Fall ein konstant gehaltener Reibkoeffizient  $\mu$  zugewiesen und dessen real vorhandene Abhängigkeit von der Kontaktpressung, der Temperatur und der Gleitgeschwindigkeit entsprechend vernachlässigt.

Die aufgrund der nicht vorhandenen Lagerschalenkrümmung fehlende Rückstellwirkung des Gleitpendellagers wird durch die Anordnung eines sechssternigen Federkranzes in das FE-Modell implementiert. Wie in [92] aufgeführt, bringt diese Anordnung den Vorteil mit sich, dass das Gesamtsystem unabhängig von der Auslenkungsrichtung stets mit derselben Gesamtfedersteifigkeit  $k_{gpl} = 3 \cdot k_1$  reagiert. In Bild 6.17 ist die vereinfachte Modellvorstellung des Gleitpendellagers zur Implementierung in ein FE-Modell schematisch wiedergegeben.



**Bild 6.17:** Vereinfachte Modellvorstellung des Gleitpendellagers zur Implementierung in ein FE-Programm

Im vorliegenden Fall ist es aufgrund der für übliche Gleitpendellager gering ausfallenden Auslenkungswinkel  $\varphi$  ausreichend, die horizontale Federsteifigkeit des Gleitpendellagers  $k_{gpl}$  aus der linearisierten Formel der Gleichung (4.95) abzuleiten. Die entsprechend für das FE-Modell

benötigten Einzelfedersteifigkeiten  $k_1$  berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} k_{gpl} &= 3 \cdot k_1 = \frac{mg}{r} \\ k_1 &= \frac{m \cdot g}{3 \cdot r} \end{aligned} \quad (6.39)$$

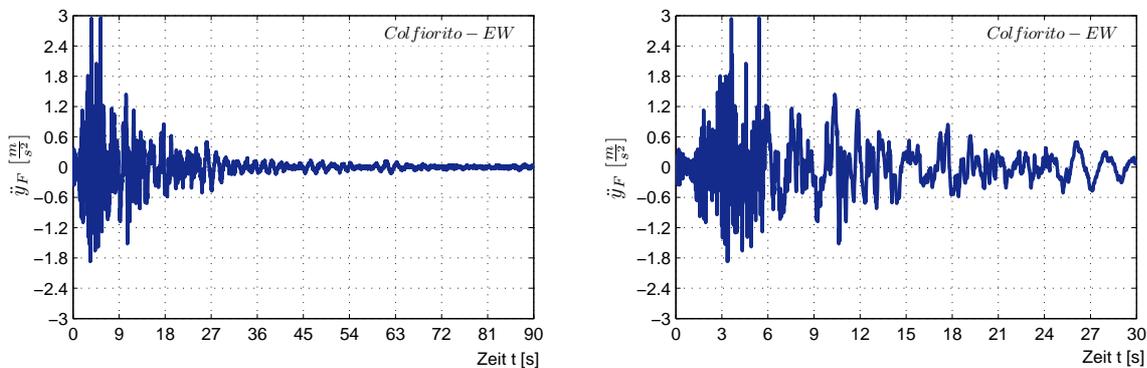
Stellvertretend für andere Gleitpendellagerkonstellationen werden den nachfolgenden Simulationsrechnungen hier die folgenden Systemparameter zugrunde gelegt:

- oberhalb der Isolierebene vorhandene Bauwerksmasse:  $m_2 = 10\,024.46 \text{ kg}$
- Reibkoeffizient:  $\mu = 0.05$
- Gleitpendellagerradius:  $r = 2.2 \text{ m}$
- horizontale Gleitpendellagersteifigkeit:  $k_{gpl} = \frac{10\,024.46 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2.2 \text{ m}} = 44\,700 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- Resultierende Federkonstante der Einzelfedern:  $k_1 = \frac{44\,700 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{3} = 14\,900 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

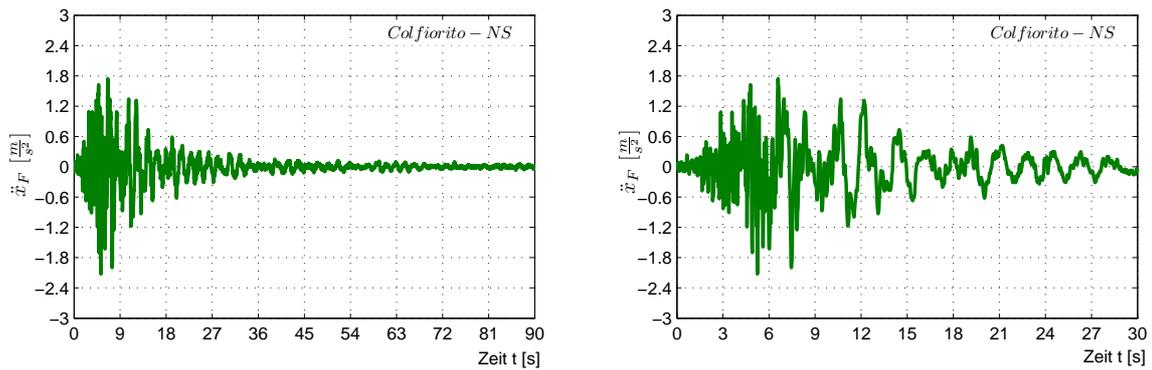
Zur Bewertung der erhaltenen Ergebnisse in Hinsicht auf die vorhandene Rückstellwirkung wird der Vorschlag von Professor MAURO DOLCE aufgegriffen, demzufolge diese als ausreichend eingestuft werden kann, sofern die verbleibende Auslenkung  $d_{res}$  maximal den 0.5-fachen Wert der maximal hervorgerufenen Relativverschiebung entspricht [82, 81].

$$d_{res} \leq 0.5 \cdot d_d \quad (6.40)$$

Für die Simulationsberechnung werden hier die in den Bildern 6.18 und 6.19 dargestellten Fußpunktbeschleunigungen des so genannten COLFIORITO-Erdbebens aus dem Jahre 1997 zugrunde gelegt [110].

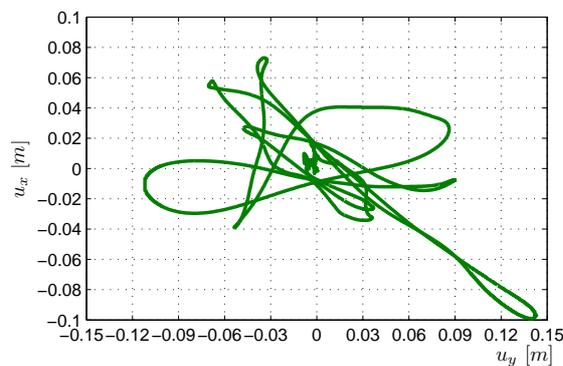


**Bild 6.18:** Akzellerogramm des COLFIORITO-Erdbebens für die OW-Richtung



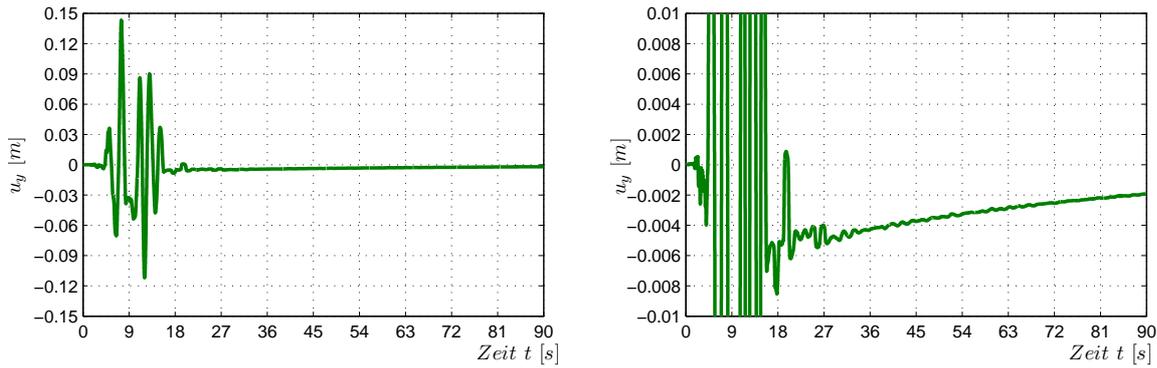
**Bild 6.19:** Akzellerogramm des COLFIORITO-Erdbebens für die NS-Richtung

Die in den Bildern 6.20, 6.21 und 6.22 dargestellten Ergebnisse der FE-Simulationsrechnungen zeigen, dass die nach dem Beben verbleibenden Auslenkungen mit  $d_{res} \approx 5 \text{ mm}$  weit unterhalb des von MAURO DOLCE vorgeschlagenen Grenzkriteriums  $d_{res} \leq 0.5 \cdot d_d$  liegen. Vorrangig kann dies auf den durch die permanentem Erschütterungen bereitgestellten Energieeintrag zurückgeführt werden, den für eine entsprechend lang anhaltende und fortwährende Gleitbewegung sorgt. In diesem Zusammenhang sind insbesondere die in den üblichen Erdbebenverläufen enthaltenen höherfrequenten Beschleunigungsanteilen als günstig zu bewerten.

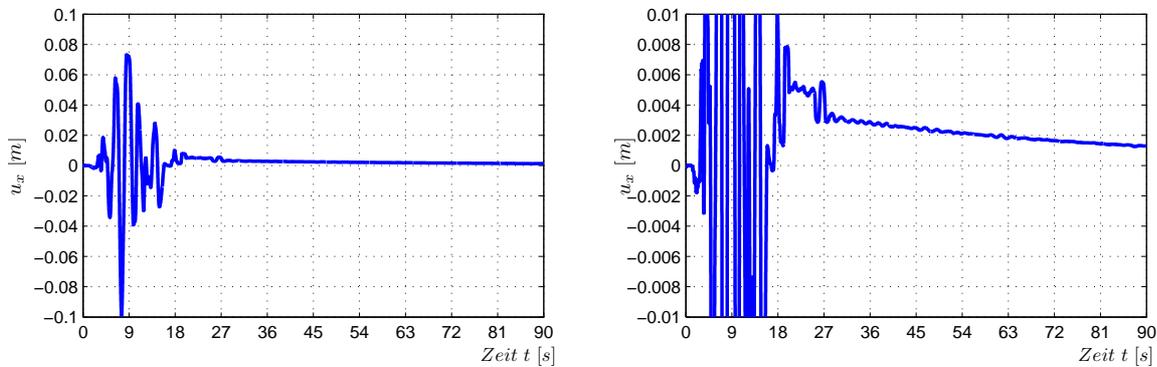


**Bild 6.20:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene Relativverschiebungen in der x-y-Ebene

Die aus den Bildern 6.21 und 6.22 hervorgehende Abnahme der Auslenkungen im Zeitbereich zwischen  $t = 30 \text{ s}$  und  $t = 90 \text{ s}$  ist indes auf numerische Effekte zurückzuführen und tritt in der Realität so nicht auf. Entsprechend ist die in der Realität verbleibende Auslenkung der Relativverschiebung in etwa im Zeitbereich nach  $t = 30 \text{ s}$  abzugreifen.



**Bild 6.21:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in y-Richtung



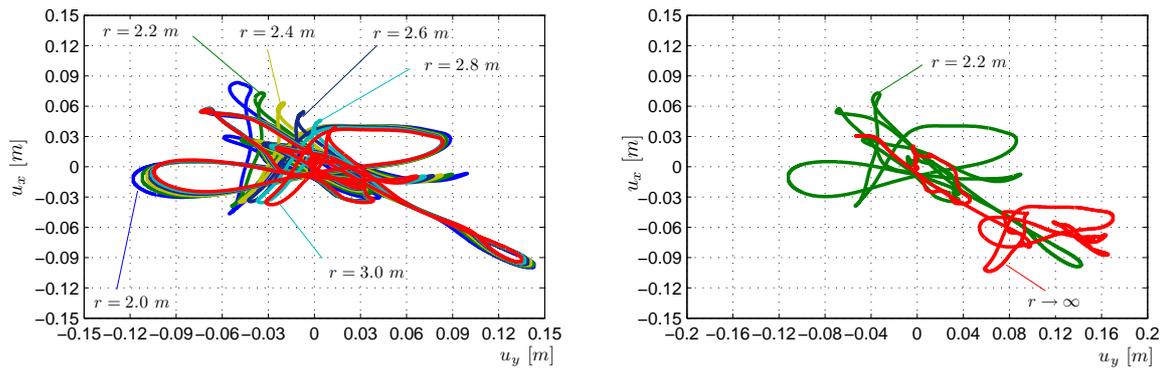
**Bild 6.22:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in x-Richtung

### 6.4.1 Parameterstudie mit variierendem Gleitpendellagerradius

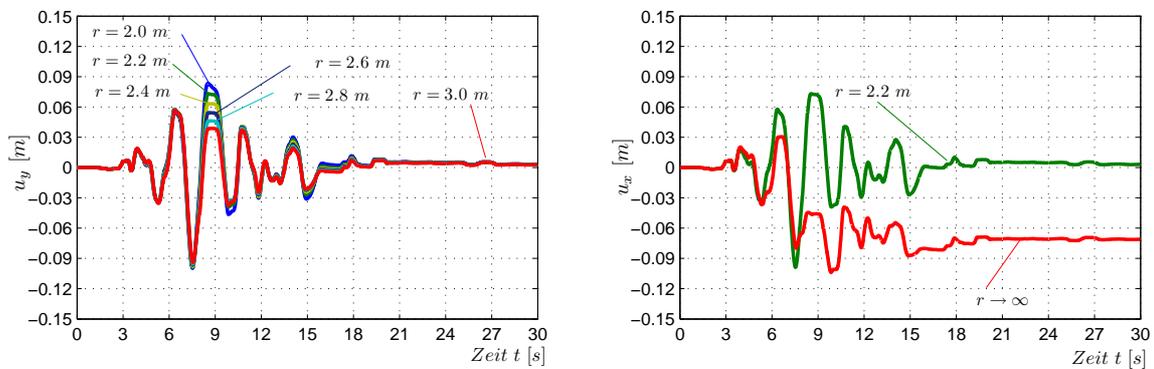
Offensichtlich ist es zur Berechnung der zurückbleibenden Auslenkung im Fall der Anregung durch das COLFIORITO-Erdbeben ausreichend die Reaktion für den Zeitbereich über die ersten 30 s zu betrachten. Entsprechend wird der nachfolgenden Parameterstudie lediglich dieser Zeitbereich zugrunde gelegt.

Im ersten Schritt werden die Auswirkungen der Variation des Gleitpendellagerradius  $r$  auf das Rückstellverhalten untersucht. Dazu werden der Gleitpendellagerradius  $r$  in diskreten Schritten angehoben und jeweils die Reaktionen auf die Erschütterungen des COLFIORITO-Erdbebens berechnet. Der Reibkoeffizient wird hierbei unverändert mit dem Wert in der Höhe von  $\mu = 0.05$  in Ansatz gebracht. In den Bildern 6.23, 6.24 und 6.25 sind die erhaltenden Ergebnisse der Parameterstudie zusammengefasst.

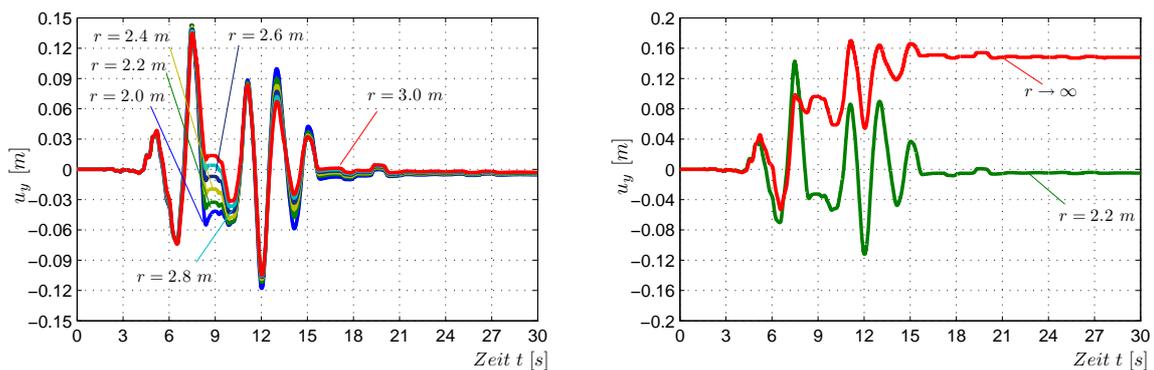
Erwartungsgemäß zeigt sich, dass der Einfluss des Gleitpendellagerradius auf die Rückstellwirkung innerhalb der üblicherweise eingesetzten Gleitpendellager-Konstellationen gering ausfällt. Im Vergleich zu den maximal hervorgerufenen Relativverschiebungen von  $u_{y,max} \approx 140 \text{ mm}$



**Bild 6.23:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene Relativverschiebungen in der x-y-Ebene für verschiedene diskrete Gleitpendellagerradien  $r$



**Bild 6.24:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in y-Richtung für verschiedene diskrete Gleitpendellagerradien  $r$



**Bild 6.25:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in x-Richtung für verschiedene diskrete Gleitpendellagerradien  $r$

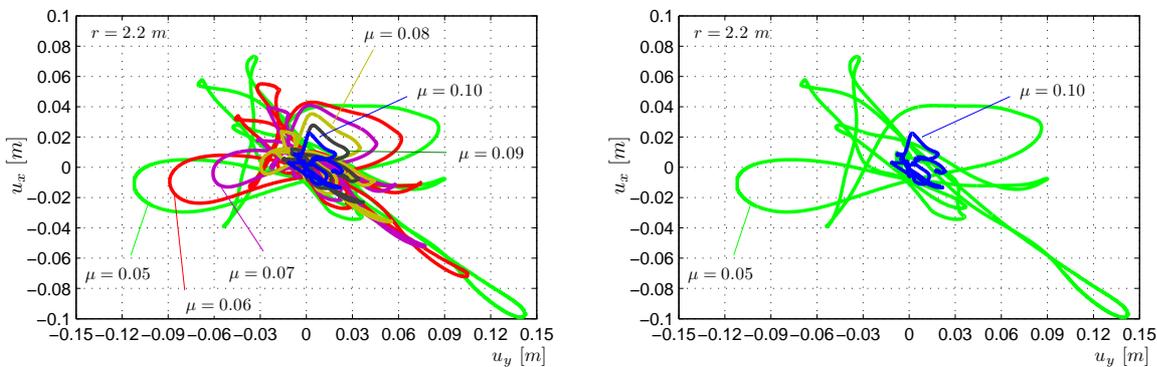
und  $u_{x,max} \approx 100 \text{ mm}$  bleibt die zurückbleibende Auslenkung mit Werten von  $u_{y,res} \approx 5.0 \text{ mm}$  und  $u_{x,res} \approx 3.0 \text{ mm}$  generell äußerst gering. In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, dass die maximalen Auslenkungsamplituden nicht zwingend zum gleichen Zeitpunkt, sondern vielmehr oftmals zeitversetzt auftreten. Die maximale radiale Relativverschiebung ist daher den

Zeitverläufen der x-y-Ebene zu entnehmen und erreicht in der vorliegenden Parameterstudie mit  $u_{r,max} \approx 174.0 \text{ mm}$  ihr Maximum. Wird dieser Wert in Bezug zur maximal verbleibenden Auslenkung von  $u_{r,res} \approx \sqrt{(5.0 \text{ mm})^2 + (3.0 \text{ mm})^2} = 5.83 \text{ mm}$  gesetzt, resultiert daraus ein Verhältniswert in der Höhe von 3.3 %.

Ergänzend zu der vorliegenden Parameterstudie wird das System noch für den Zustand der exakt ebenen Gleitfläche untersucht. Aufgrund der entsprechend ausbleibenden Rückstellkräfte werden in diesem Fall radial verbleibende Verschiebungswege in der Höhe von  $u_{r,res} \approx \sqrt{(147.5 \text{ mm})^2 + (-71.1 \text{ mm})^2} = 163.8 \text{ mm}$  erhalten. Damit erreichen diese beinahe das Niveau der in radialer Richtung maximal hervorgerufenen Relativverschiebungen in Höhe von  $u_{r,max} = 187.2 \text{ mm}$ .

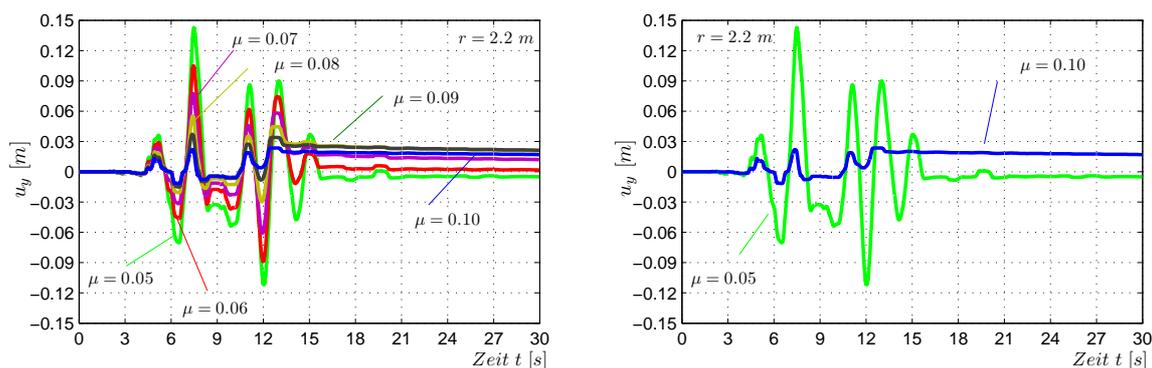
## 6.4.2 Parameterstudie mit variierendem Reibkoeffizienten

Im zweiten Schritt wird anstelle des Gleitpendellagerradius  $r$  der Reibkoeffizient  $\mu$  in diskreten Schritten variiert. Der Gleitpendellagerradius wird hierbei mit einem Wert von  $r = 2200 \text{ mm}$  konstant gehalten. Die erhaltenen Ergebnisse können wiederum den Bildern 6.26, 6.27 und 6.28 entnommen werden.

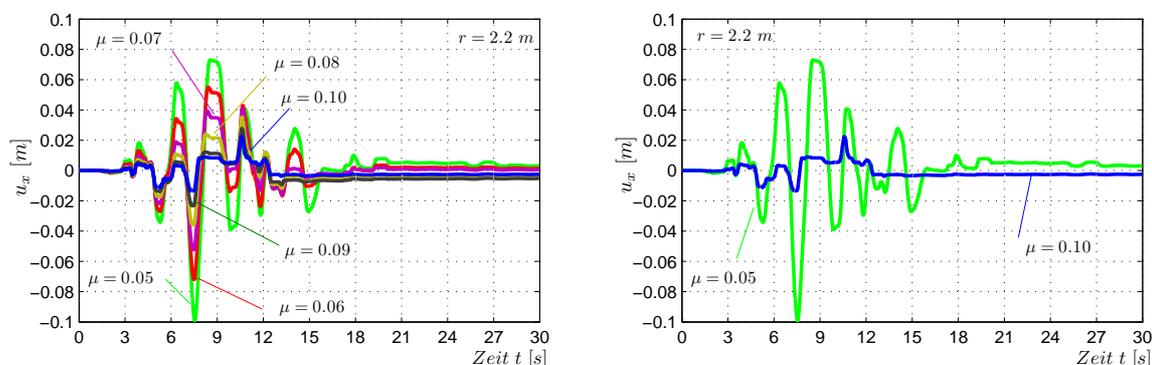


**Bild 6.26:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene Relativverschiebungen in der x-y-Ebene für unterschiedliche diskrete Reibkoeffizienten  $\mu$

Erwartungsgemäß nehmen die verbleibenden Restverschiebungen mit zunehmendem Reibkoeffizient  $\mu$  zu, während die maximal hervorgerufenen Relativverschiebungen abnehmen. Der Maximalwert der radial verbleibenden Auslenkung wird hier für einen Reibkoeffizienten von  $\mu = 0.09$  mit  $u_{r,res} = 21.92 \text{ mm}$  erreicht, nimmt dann jedoch für den nächst höheren Reibkoeffizienten von  $\mu = 0.10$  wieder auf  $u_{r,res} = 17.15 \text{ mm}$  ab. Dies erklärt sich aus der Tatsache, dass derart hohe Reibwiderstände bereits eine stark hemmende Wirkung auf die hervorgerufenen Relativverschiebungs-Verläufe ausüben, die sich im vorliegenden Fall in der maximalen erreichten radialen Relativverschiebung in Höhe von  $u_{r,res} = 25.76 \text{ mm}$  zeigt. Für einen Reibko-



**Bild 6.27:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in y-Richtung für verschiedene diskrete Reibkoeffizienten  $\mu$



**Bild 6.28:** Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in x-Richtung für verschiedene diskrete Reibkoeffizienten  $\mu$

effizienten von  $\mu = 0.09$  wird hierfür immerhin bereits ein Wert in Höhe von  $u_{r,res} = 43.94 \text{ mm}$  erreicht. Der Bezug der verbleibenden Auslenkung auf die maximal erreichte Relativverschiebung erscheint hier vor dem Hintergrund der zugrunde gelegten hohen Reibkoeffizienten nicht sinnvoll, da die erreichte Isolierungswirkung hierdurch generell in Frage gestellt ist.

## 6.5 Auswertung der Ergebnisse und Schlussfolgerungen für das Rückstellverhalten

Die in der Parameterstudie erhaltenen Ergebnisse zeigen, dass die bisher entwickelten Rückstellungskriterien hinsichtlich der sinnvollen Auslegung von Gleitpendellagern wenig aussagekräftig sind. So ergibt sich beispielsweise für ein Gleitpendellager mit einem Radius von  $r = 2\,200 \text{ mm}$  und einer zugrunde gelegte Bemessungsverschiebung in Höhe von  $d_{Ed} = 115.0 \text{ mm}$  gemäß dem in Gleichung (6.23) gegebenen Energiekriterium der folgende maximal zulässige Reibkoeffizient:

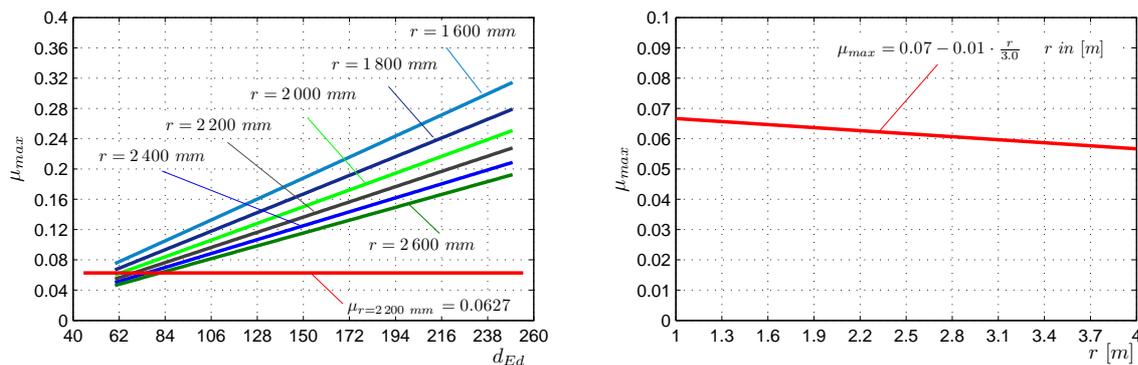
$$\mu_{max} \leq \frac{4}{115.0 \text{ mm}} \cdot \left( 2200 \text{ mm} - \sqrt{(2200 \text{ mm})^2 - (115.0 \text{ mm})^2} \right) = 0.105$$

Wie in Bild 6.29 dargestellt, wird durch das Kriterium offensichtlich vor allem der Einfluss des Gleitpendellagerradius  $r$  überschätzt, obwohl der tatsächliche Einfluss auf das Rückstellverhalten für die üblichen Gleitpendellagerkonfigurationen offensichtlich gering ausfällt. Weiterhin werden tendenziell zu hohe zulässige Reibkoeffizienten zugelassen, die zu einer bereits deutlichen Hemmung der Isolierungswirkung führen. Neben der damit in Frage gestellten Entkopplungswirkung ist dies zudem vor dem Hintergrund negativ zu bewerten, dass der gesamtheitliche Betrag der Energiedissipation als Funktion aus Reibkoeffizienten und zurückgelegtem Relativweg entsprechend abnimmt. In diesem Zusammenhang sind deutlich reduzierte Verschiebungswege in zweierlei Hinsicht als kontraproduktiv zu bewerten.

Anstatt der bisherigen Vorgaben zur Auslegung von Gleitpendellagern erscheint es daher vielmehr sinnvoll, den maximal zulässigen Reibkoeffizienten  $\mu$  generell pauschal zu begrenzen. Hierdurch wird neben einem ausreichenden Rückstellverhalten vor allem auch ein vernünftiges Verhältnis zwischen Isolierungswirkung und Dissipationsvermögen sichergestellt.

Im Fall der Erdbebenisolierung mit Gleitpendellagern wird daher vorgeschlagen, den maximal zulässigen Reibkoeffizienten  $\mu_{max}$  mit der nachfolgenden auf den Gleitpendellagerradius  $r$  bezogenen Gleichung zu ermitteln:

$$\mu_{max} \leq 0.07 - 0.01 \cdot \frac{r}{3.0} \quad \text{mit: } r \text{ in [m]} \quad (6.41)$$



**Bild 6.29:** Gegenüberstellung der gemäß Energiekriterium und der gemäß Gleichung (6.41) erhaltenen maximal zulässigen Reibkoeffizienten

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Erdbebenschutzsystemen im Allgemeinen und legt den Schwerpunkt auf die Auslegung von Gleitpendellagern, die zum Zweck der Erdbebenisolierung neben dem Einsatz von Elastomerlagern die Standardlösung darstellen. Die Festlegung des Gleitpendellagerradius  $r$  wird üblicherweise am gewünschten Beanspruchungsniveau orientiert und geht in der Folge aus dem für den Standort zugrunde zulegenden Antwortspektrum indirekt über die entsprechend abzulesende Eigenperiode  $T$  hervor. Wesentlich komplexer gestaltet sich die sinnvolle Festlegung und Bewertung des Reibkoeffizienten  $\mu$ , der aber ebenfalls einen erheblichen Einfluss auf das Verhalten des Isolierungssystems im Erdbebenfall hat. Ein zu niedriger Wert hat übermäßig große Relativverschiebungen während der Erdbebenanregung zur Folge, während sich zu hohe Werte in zweierlei Hinsicht negativ auswirken. Diese äußern sich zum Einen in der zunehmenden Tendenz, einen kumulativen Verschiebungsaufbau und ein damit verbundenes Herauswandern aus der Solllage zu begünstigen, zum Anderen wird die Isolierungswirkung des Systems generell zunehmend gehemmt und im schlimmsten Fall wird ein Auftreten von Relativverschiebungen gänzlich unterbunden. In der Folge kann ein zu hoch gewählter Reibkoeffizienten die vollständige Aufhebung der Isolierungswirkung bewirken. Daher wird in dieser Arbeit ein Vorschlag zum Aufstellen eines vereinfachten FE-Modells entwickelt, mit dem sich die Auswirkungen und Phänomene von mit Gleitpendellagern isolierten Strukturen in realistischer Art und Weise und ohne unverhältnismäßig hohen Rechenaufwand nachvollziehen lassen. Auf Grundlage der aus diesem Modell im Rahmen einer Parameterstudie erhaltenen Ergebnisse wird ferner eine Bestimmungsgleichung abgeleitet, die eine Begrenzung des Reibkoeffizienten auf sinnvolle Werte in einfacher Art und Weise ermöglicht.

Zunächst werden in Kapitel 2 die Grundlagen des Erdbebeningenieurwesens sowie die zur Verfügung stehenden Berechnungsverfahren hergeleitet und erläutert. Hierbei wird sowohl auf die

Ursachen und Entstehungsprozesse von Erdbeben als auch auf die für den Bauingenieur wesentlichen seismologischen Begriffe eingegangen. Die darauf folgenden Unterkapitel sind der mathematischen Beschreibung der Schwingungsphänomene von Baustrukturen gewidmet. Beginnend bei der harmonischen Anregung bis hin zur transienten Anregung von Mehrmassenschwingern werden die die Probleme beherrschenden Differentialgleichungen ausführlich hergeleitet und die jeweils zur Verfügung stehenden Lösungswege aufgezeigt. Besonderer Augenmerk wird hierbei auf die Berechnung und Generierung von elastischen und plastischen Antwortspektren gerichtet. In Hinsicht auf die Anwendung des Antwortspektrenverfahrens auf Mehrmassenschwinger wird darüber hinaus auch die Modalanalyse von Mehrmassenschwingern ausführlich behandelt. Weiterhin werden als alternative Berechnungsverfahren zur Ermittlung der auf Bauwerke einwirkenden Erdbebenreaktionen den verschiedenen Algorithmen der Zeitverlaufsintegration breiter Raum zugestanden, und es werden die auftretenden numerischen Effekte und Eigenschaften dargestellt. Ferner wird aufgrund der zu einem späteren Zeitpunkt erfolgenden Anwendung auf das Gleitpendellagermodell in diesem Zusammenhang auch auf die für die Zeitverlaufsberechnungen zur Verfügung stehenden nicht-linearen Methoden am Beispiel der NEWTON-RAPHSON-Iteration eingegangen.

In Kapitel 3 werden die zur Verfügung stehenden Erdbebenschutzsysteme vorgestellt und deren Funktionsweise und Mechanismen erläutert und diskutiert. Aufgrund des transienten Charakters typischer Erdbebenverläufe kommen Schwingungsdämpfer zum Zweck des Erdbebenschutzes eher selten zum Einsatz. Die damit zu erzielende Reduzierung der Erdbebenbeanspruchung hält sich in Abhängigkeit des Frequenzgehalts, der Schwingungsabfolge und der Anzahl der im Frequenzbereich des Schwingungsdämpfers liegenden und im Bauwerk hervorgerufenen Schwingungszyklen oftmals in Grenzen. Dies gilt indes nicht für aktive Schwingungsdämpfer, die aber in Hinsicht auf Langlebigkeit und Zuverlässigkeit kritisch zu hinterfragen sind.

Ein wesentlich breiteres Anwendungsgebiet im Erdbebeningenieurwesen kann den so genannten Dissipations-Elementen zugesprochen werden. Diese entsprechen dem Konstruktionsprinzip, Bauwerken durch die Bereitstellung einer möglichst hohen Anzahl von Fließgelenken ein möglichst duktileres Tragverhalten zu verleihen, womit eine deutliche Reduzierung der Erdbebenbeanspruchung bewirkt wird, die in den einschlägigen Normen durch den so genannten Verhaltensfaktor  $q$  ausgedrückt wird. Im Gegensatz zur Methode, die Fließgelenke in die Tragstruktur zu integrieren, besitzen Dissipations-Elemente den Vorteil, explizit an dafür geeigneten Stellen im Tragwerk angeordnet und vor allem nach einem Erdbebenereignis einfach ausgetauscht werden zu können.

Abschließend wird auf das eigentliche Thema dieser Arbeit, die Methode der Erdbebenisolierung eingegangen. Die zur Verfügung stehenden Systeme sowie ihre allgemeine Auslegung werden vorgestellt und diskutiert.

Die Erdbebenisolierung durch den Einsatz von Gleitpendellagern ist Gegenstand des Kapitels 4.

Zunächst werden der allgemeine Aufbau und die Funktionsweise erläutert. Anschließend werden die mathematischen Beschreibungen des nicht-linearen Pendelschwingers und des Einfreiheitsgradschwingers hergeleitet und die daraus resultierenden Ergebnisse und Phänomene dargestellt und diskutiert. Im nächsten Schritt erfolgt die Anwendung der Kinematik und Kinetik auf das Gleitpendellager, um anschließend die vereinfachte Darstellung mit Hilfe des Sekanten-Steifigkeits-Verfahrens aufzuzeigen.

Ein weiteres Unterkapitel ist den zwischenzeitlich zahlreichen Abwandlungen und Weiterentwicklungen des Gleitpendellagers gewidmet, um zum Schluss noch auf das vergleichsweise günstige Verhalten unter Torsionsbeanspruchungen der aufgehenden Struktur einzugehen.

In Kapitel 5 werden die an der Bundeswehr der Universität München an Gleitpendellagern durchgeführten Versuche beschrieben sowie die erhaltenen Testergebnisse dokumentiert und interpretiert. Die als Ergebnis erhaltene Schar der Reibkoeffizienten wird statistisch ausgewertet und die Standardabweichung aufgezeigt.

Auf das Rückstellverhalten von Gleitpendellagern wird in Kapitel 6 eingegangen. Dazu werden zunächst die in der Normung vorhandenen Regelungen dargestellt und in Bezug auf die Anwendung auf Gleitpendellager ausgewertet und hinterfragt. Anschließend werden die Phänomene der Rückstellwirkung von Gleitpendellagern anhand von vereinfachten Modellen aufgezeigt. Dazu werden zunächst die Effekte untersucht, die die Bewegungsform eines auf einer ebenen Fläche aufgelagerten und verschiedenen Fußpunkterregungs-Szenarien ausgesetzten Gleitkörpers beschreiben. Die sowohl analytisch hergeleiteten als auch mit Hilfe eines FE-Modells nachvollzogenen Ergebnisse zeigen, dass von den Bodenerschütterungen eine vergleichsweise hohe rückstellende Wirkung ausgeht.

Diese am tatsächlichen Gleitpendellager näher zu untersuchen, ist das Ziel der Entwicklung eines räumlichen FE-Modells, dessen auf wenige Einzelemente reduzierte Struktur eine in Bezug auf die Rechenzeit kostengünstige Simulation der durch die Erdbebenerschütterungen hervorgerufenen Schwingungsverläufe erlaubt. Die daran anschließende Parameterstudie zeigt, dass die bisherigen Auslegungskriterien hinsichtlich der Auslegung von Gleitpendellagern zum Teil nicht zufrieden stellende Vorgaben liefern. In der Folge wird eine einfache und allein auf den Gleitpendellagerradius  $r$  bezogene Bestimmungsgleichung entwickelt, die eine anwendungsfreundliche Festlegung des maximal zulässigen Reibkoeffizienten  $\mu$  erlaubt.

## 7.2 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Bemessungsgleichung zur Festlegung des maximal zulässigen Reibkoeffizienten  $\mu$  aufgestellt, um dem Tragwerksplaner eine Hilfestellung bei der Auslegung von Gleitpendellager-Systemen an die Hand zu geben. Diese wurde an den Ergebnissen der an

einem vereinfachten FE-Modell durchgeführten Parameterstudie kalibriert, der als Anregungsszenario die Akzellerogramme des so genannten COLFIORITO-Erdbebens zugrunde gelegt wurde. Neben der Verifikation durch auf entsprechenden Rütteltischen durchgeführten Versuchen wären daher vor allem auch Variationsrechnungen auf Grundlage weiterer Erdbebenverläufe anzustreben. In diesem Zusammenhang wäre insbesondere auch der Einfluss zu untersuchen, der von der Charakteristik und dem Frequenzgehalt der einwirkenden Erdbeben ausgeht. Es ist z.B. zu vermuten, dass Akzellerogramme, die Standorte mit mächtigen Sedimentaufschüttungen repräsentieren, wesentlich geringere Anteile an höherfrequente Beschleunigungsanteilen enthalten, als Akzellerogramme für felsige Gründungssituationen.

Weiterhin wären Variationsrechnungen in Hinblick auf die den Reibkoeffizienten beeinflussenden Parameter von Interesse, die den Einfluss der unterschiedlichen Werte für Haft- und Gleitreibung sowie die Abhängigkeiten von der Temperaturentwicklung, der Auflagerpressung und der Gleitgeschwindigkeit berücksichtigen.

Die nach einem Beben verbleibende Restverschiebung könnte weiterhin als Anfangsbedingung für jeweils erneute Verlaufsrechnungen verwendet werden, um den Einfluss einer verschobenen Ausgangslage näher zu untersuchen. Die an einem in der Ebene entwickelten Modell erhaltenen Ergebnisse zeigen, dass Gleitpendellager auf eine vorhandene Anfangsauslenkung eher gutmütig reagieren [114].

Letztendlich könnten die im Rahmen der Versuchsreihe aufgestellten zwei- und dreidimensionalen FE-Modelle genutzt werden, um die sich für die verschiedenen Auslenkungszustände einstellende Pressungsverteilung in den jeweiligen Kontaktebenen näher zu untersuchen. Von besonderem Interesse wären solche Simulationsrechnungen in Hinsicht auf die Gleitpendellagerausführung, in der die Kalottenführung der oberen Lagerschale aufgelöst und durch einen der unteren Lagerschale entsprechenden Gegenpart ersetzt ist. Die Lagehalterung des Gleitschuhs erfordert in diesem Fall gewisse Zwängungen, die unter Umständen mit hohen Kantenpressungen einhergehen.

# Literaturverzeichnis

- [1] AASHTO-10: *Guide Specification for Seismic Isolation Design, Third Edition*. American Association of State Highways and Transportation Officials, Washington, D.C., USA, 2010.
- [2] AASHTO-91: *Guide Specification for Seismic Isolation Design*. American Association of State Highways and Transportation Officials, Washington, D.C., USA, 1991.
- [3] AASHTO-99: *Guide Specification for Seismic Isolation Design, Third Edition*. American Association of State Highways and Transportation Officials, Washington, D.C., USA, 1999.
- [4] Adams, R. D.: *Properties of Aftershock Sequencies*. DSIR, Geophysics Division, Seismological Observatory, Wellington, Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering, 1968.
- [5] ADINA R & D Inc.: *ADINA 8.6*. FEM-Programm, 2009.
- [6] ASCE 7-05: *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*. American Society of Civil Engineers, Reston, VA:ASCE, USA, 2005.
- [7] ASCE 7-10: *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*. American Society of Civil Engineers, Reston, VA:ASCE, USA, 2010.
- [8] Bachmann, H.: *Erdbebensicherung von Bauwerken*. 2., überarbeitete Auflage, Birkhäuser Verlag, Berlin, 2002.
- [9] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. 2., vollständig neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [10] Baur, M.: *Elastomerlager und nichtlineare Standorteffekte bei Erdbebeneinwirkung*. Dissertation, Technische Universität Karlsruhe, 2003.
- [11] Becker, T. C.: *Advanced Modeling of the Performance of Structures Supported on Triple Friction Pendulum Bearings*. Thesis, University of California, Engineering - Civil and Environmental Engineering, Berkeley, 2011.

- 
- [12] Becker, T. C.; Keldrauk, E.; Mieler, M.; Mahin, S.; Stojadinovic, B.: *Effect of Mass Offset on the Torsional Response in Friction Pendulum Isolated Structures*. 15<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, Portugal, Paper No. 752, 2012.
- [13] Boller, C.; Seeger, T.: *Materials Data for Cyclic Loading, 5 Volume Set (Msm, Vol 42a-E)*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1998.
- [14] Brady, A. G.: *Strong-motion accelerographs: Early history*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 38, Issue 9, pp. 1121-1134, John Wiley & Sons, 2009.
- [15] Braun, C.: *Erdbebensicherung im Hochbau: Onassis-House und Akropolis-Museum*. Pressemitteilung, Maurer Söhne Brückenausrüstung, 2005.
- [16] Braun, C.; Fobo, W.: *Recentering Bridge Bearings - new devices to improve a known design concept*. The 7th German-Japanese bridge symposium, Osaka, 2007.
- [17] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 7., überarbeitete und ergänzte Auflage, Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2008.
- [18] Bruneau, M.; Rojahn, C.: *Recommended LRFD Guidelines for the Seismic Design of Highway Bridges, Part I: Specifications*. MCEER/ATC-49, ATC/MCEER Joint Venture, Prepared under the MCEER Highway Project 094, Task F3-1, Federal Highway Administration, 2003.
- [19] Burtscher, S.; Dorfmann, A.; Bergmeister, K.: *Mechanical Aspects of High Damping Rubber*. 2nd Int. PhD Symposium in Civil Engineering, Budapest, 1998.
- [20] Butz, T.: *Fouriertransformation für Fußgänger*. 4., überarbeitete Auflage, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2005.
- [21] Chen, W.-F.; Scawthorn, C.: *Earthquake Engineering Handbook, New Directions in Civil Engineering*. Crc Press LLC, 2000 N.W Corporate Blvd., Boca Raton, Florida 33431, 2003.
- [22] Chopra, A. K.: *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2001.
- [23] Chopra, A. K.: *Elastic response spectrum: a historical note*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 36, Issue 1, pp. 3-12, John Wiley & Sons, 2007.
- [24] Clough, R. W.; Penzien, J.: *Dynamics of Structures*. Third Edition, Computers & Structures, Inc., 2003.

- 
- [25] Constantinou, M. C.: *Friction Pendulum Double Concave Bearing*. Technical Report, University at Buffalo, The State University of New York, Red Jacket Quadrangle, Buffalo, NY 14261, 2004.
- [26] Corral, A.: *Renormalization-Group Transformations and Correlations of Seismicity*. Physical Review Letters, PRL 95, 028501, 2005.
- [27] Das, S.; Henry, C.: *Spatial Relation between Main Earthquake Slip and its Aftershock Distribution*. Reviews of Geophysics, Volume 41, Issue 3, pp. 1-16, American Geophysical Union Publication, 2003.
- [28] Davoodi, M.; Sadjadi, M.; Goljahani, P.; Kamalian, M.: *Effects of Near-Field and Far-Field Earthquakes on Seismic Response of SDOF System Considering Soil Structure Interaction*. 15<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, Portugal, 2012.
- [29] DIN EN 1337-2: 2004-06: *Lager im Bauwesen - Teil 2: Gleitteile; Deutsche Fassung EN 1337-2:2004*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 2004.
- [30] DIN EN 15129: 2010-06: *Erdbebenvorrichtungen; Deutsche Fassung*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 2007.
- [31] DIN EN 1998-1: 2010-12: *Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben - Teil 1: Erdbebeneinwirkungen und Regeln für Hochbauten; Deutsche Fassung EN 1998-1:2004 + AC:2009*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 2010.
- [32] DIN EN 1998-1/NA: 2011-01: *Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter - Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben - Teil 1: Grundlagen, Erdbebeneinwirkungen und Regeln für Hochbauten*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 2011.
- [33] DIN EN 1998-2: 2006-06: *Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben - Teil 2: Brücken; deutsche Fassung EN 1998-2:2005*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 2006.
- [34] DIN EN 1998-2: 2011-12: *Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben - Teil 2: Brücken; deutsche Fassung EN 1998-2:2005 + A1:2009 + A2:2011 + AC:2010*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 2011.
- [35] DIN EN 1998-2/NA: 2011-03: *Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter - Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben - Teil 1: Brücken*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 2011.
- [36] Eggert, H.; Kauschke, W.: *Structural Bearings*. Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 2002.

- [37] Elenas, A.: *Athens Earthquake of 7 September 1999: Intensity Measures and Observed Damages*. ISET Journal of Earthquake Technology, Technical Note, Vol. 40, No. 1, pp. 77-97, 2003.
- [38] Fajfar, P.: *Capacity spectrum method based on inelastic demand spectra*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 28, Issue 9, pp. 979-993, John Wiley & Sons, 1999.
- [39] Federal Emergency Management Agency (FEMA-351): *Recommended Seismic Evaluation and Upgrade Criteria for Existing Welded Steel Moment-Frame Buildings*. Washington, 2000.
- [40] Federal Emergency Management Agency (FEMA-352): *Recommended Postearthquake Evaluation and Repair Criteria for Welded Steel Moment-Frame Buildings*. Washington, 2000.
- [41] Felzer, K.; Brodsky, E.: *Decay of aftershocks density with distance indicates triggering by dynamic stress*. Natur Journal, Vol. 441, pp. 735-738, 2006.
- [42] Fenz, D. M.; Constantinou, M. C.: *Behaviour of the double concave Friction Pendulum Bearing*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 35, Issue 11, pp. 1403-1424, John Wiley & Sons, 2006.
- [43] Fenz, D. M.; Constantinou, M. C.: *Mechanical Behaviour of Multi-Spherical Sliding Bearings*. Technical Report MCEER-08-0007, Task Number 10.2.2, University at Buffalo, The State University of New York, Red Jacket Quadrangle, Buffalo, NY 14261, 2008.
- [44] Fenz, D. M.; Constantinou, M. C.: *Modeling Triple Friction Pendulum Bearings for Response-History Analysis*. Earthquake Spectra, Volume 24, No. 4, pages 1011-1028, 2008.
- [45] Fenz, D. M.; Constantinou, M. C.: *Spherical sliding isolation bearings with adaptive behavior: Theory*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 37, Issue 2, pp. 163-183, John Wiley & Sons, 2008.
- [46] Frisch, W.; Meschede, M.: *Plattentektonik, Kontinentalverschiebung und Gebirgsbildung*. 3., unveränderte Auflage, Primusverlag, Darmstadt, 2009.
- [47] Giarini, D.; Grünthal, G.; Shedlock, K.; Zhang, P.: *The Global Seismic Hazard Map*. The Global Seismic Hazard Program (GSHAP), a project of the UN/International Decade of Natural Disaster Reduction, conducted in 1992-1998.
- [48] Grünthal, G.; Mayer-Rosa, D.; Lenhardt, W. A.: *Abschätzung der Erdbebengefährdung für die D-A-CH-Statten - Deutschland, Österreich, Schweiz*. Die Bautechnik, Heft 10, Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 1998.

- [49] Haibach, E.: *Betriebsfestigkeit, Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. 3., korrigierte und ergänzte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [50] Hall, J. F.: *Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 32, Issue 1, pp. 15-29, John Wiley & Sons, 2003.
- [51] Hamidi, M.; Naggar, M. H. E.; Vafai, A.; Ahmadi, G.: *Seismic isolation of buildings wiht sliding concave foundtation (SCF)*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 38, Issue 9, pp. 1121-1134, John Wiley & Sons, 2009.
- [52] Hosseini, S. B.: *Neue Planungskonzepte für ländliche Siedlungen in erdbebengefährdten Gebieten im Nordiran*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [53] Housner, G. W.: *Unexpected Stress Failures during Earthquakes*. Earthquake Spectra, Volume 13, No.3, 1997.
- [54] Huber, P.; Nützel, O.; Weber, F.: *Design, Test und Anwendung von adaptiven Seildämpfern in Schrägseilbrücken, Vorgehensweisen und Einsatz in der Praxis*. VDI Tagung Baudynamik, Kassel, Germany, 2006.
- [55] Häußler-Combe, U.: *Praktische Baudynamik*. Vorlesungskript der Professur für spezielle Massivbauwerke der Technischen Universität Dresden, Arbeitsfassung, Karlsruhe, 2003.
- [56] Iemura, H.; Taghikhany, T.; Takahashi, Y.; Jain, S. K.: *Effect of variation of normal force on seismic performance of resilient sliding isolation systems in highway bridges*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 34, Issue 15, pp. 1777-1797, John Wiley & Sons, 2005.
- [57] International Code Council, Inc.: *International Building Code (IBC)*. Country Club Hills, USA, 2009.
- [58] IRIS: *Magnitude 7.8 NEPAL, Saturday, April 25,2015 at 06:11:26 UTC*. IRIS - Incorporated Reserach Institutions for Seismology, IRIS Education & Public Outreach and The University of Portland, 2015.
- [59] Jansen, L. M.; Dyke, S. J.: *Semi-Active Control Strategies for MR Dampers: A Comparative Study*. 1., Auflage, Springer Verlag, Wien, 2009.
- [60] Kageyama, M.; Iba, T.; Umeki, K.; Somaki, T.; Hino, Y.; Ikutama, S.: *Study on three-dimensional seismic isolation system for next generation nuclear power plant: independent cable reinforced rolling-seal air spring*. 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, Paper No.1346, 2004.

- [61] Kalkan, E.; Adalier, K.; Pamuk, A.: *Near Source Effects and Engineering Implications of recent Earthquakes in Turkey*. Fifth International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering, Paper No. 3.30, New York, NY, 2004.
- [62] Kammeyer, K.-D.; Kroschel, K.: *Digitale Signalverarbeitung, Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB-Übungen*. 6., korrigierte und ergänzte Auflage, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [63] Katz, C.: *Anmerkung zur Überlagerung von Antwortspektren*. D-A-CH-Mitteilungsblatt im Bauingenieur, Springer-VDI-Verlag, Band 84, 2009.
- [64] Kelly, T. E.: *Base Isolation of Structures*. Holmes Consulting Group Ltd, Wellington, New Zealand, p. 32, 2001.
- [65] Kravchuk, N.; Colquhoun, R.; Porbaha, A.: *Development of a Friction Pendulum Bearing Base Isolation System for Earthquake Engineering Education*. Proceedings of the 2008 American Society for Engineering Education Pacific Southwest Annual Conference, Department of Civil Engineering, California State University, Sacramento, 2008.
- [66] Kumar, A.; Poonam; Saini, B.; Sehgal, V.: *Active Vibration Control of Structures against Earthquakes using modern Control Theory*. Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing), Vol. 8, No. 3, 2007.
- [67] Kuntz, R. J.; Tanner, D. L.: *Earthquake Mitigation Technology, Life, Safety, Structures, Contents and Function*. Disaster Recovery Journal, Vol. 5, No. 4, 1999.
- [68] Link, M.: *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. 3. Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002.
- [69] de la Llera, J. C.; Almazán, J. L.: *An experimental study of nominally symmetric and asymmetric structures isolated with the FPS*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 32, Issue 6, pp. 891-918, John Wiley & Sons, 2003.
- [70] Lombardi, A. M.: *Probabilistic interpretation of Bath's Law*. Annals of Geophysics, Vol. 45, N. 3/4, pp. 455-472, Published by INGV, Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, 2002.
- [71] Luco, J. E.: *Response of a double-wedge base-isolation device*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, John Wiley & Sons, 2004.
- [72] Ma, Q.; Kahn, M.: *Free vibration tests of a scale model of the South Rangitikei Railway Bridge*. New Zealand Society for Earthquake Engineering Inc, NSZEE Conference 2008, Paper Number 62, 2008.

- [73] Magnus, K.; Popp, K.; Sextro, W.: *Schwingungen, Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. 8., überarbeitete Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [74] Mahin, S.: *Lessons from Recent Earthquakes: The Need for More Resilient Cities*. Proceedings of the International Symposium on Engineering Lessons Learned from the 2011 Great East Japan Earthquake, Tokyo, Japan, 2011.
- [75] Malekzadeh, M.; Taghikhany, T.: *Adaptive Behavior of Double Concave Friction Pendulum Bearing and its Advantages over Friction Pendulum Systems*. Civil Engineering, Volume 17, Issue 2, pp. 81-88, 2010.
- [76] Mano, T.: *Determination of Tensile Capacity of Elastomeric Bearings*. Structural Engineering International, Volume 25, pp. 134-140, IABSE, ETH Zürich, Switzerland, 2015.
- [77] Marioni, A.: *Innovative Antiseismic Devices for Bridges*. Aktuelle Probleme der Brückendynamik, D-A-CH-Tagung 2003, Dok. D 0198, Zürich, S. 89-100, 2003.
- [78] Medeot, R.: *The Evolution of Aseismic Devices for Bridges in Italy*. Proceedings of the 3<sup>rd</sup> World Congress on Joint Sealing and Bearing Systems for Concrete Structure, Vol.2, pp. 1295-1320, Toronto, 1991.
- [79] Medeot, R.: *Re-Centering Capability Evaluation of Seismic Isolation Systems Based on Energy Concepts*. 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, Paper No. 3106, 2004.
- [80] Medeot, R.: *Lesson learned from the shake table tests on Steel Hysteretic Elements and Curved Surface Sliding Isolators*. International Seminar, Development of Innovative Anti-Seismic Systems in the Framework of the LESSLOSS and other Research Projects, LNEC-Labótorio Nacional de Engenharia Civil Avendio do Brasil, 101, Lisbon, Portugal, 2007.
- [81] Medeot, R.: *Experimental Validation of Re-Centering Capability Evaluation based on Energy Concepts*. The 14<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Beijing, China, 2008.
- [82] Medeot, R.: *Re-Centering Capability of Seismic Isolation Systems: A controversial matter moving scarcely towards its settlement*. 15<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, Portugal, Paper No. 878, 2012.
- [83] Meinhardt, C.; Siepe, D.: *Application of Tuned Mass Control Systems for Earthquake Protection*. Large Structures and Infrastructures for Environmentally Constrained and Urbanised Areas, IABSE Symposium, Venice, 2010.

- [84] Meskouris, K.; Hinzen, K. G.; Butenweg, C.; Mistler, M.: *Bauwerke und Erdbeben. Grundlagen - Anwendungen - Beispiele*. 2., erweiterte und aktualisierte Auflage, Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2007.
- [85] Meskouris, K.; Hinzen, K. G.; Butenweg, C.; Mistler, M.: *Bauwerke und Erdbeben. Grundlagen - Anwendungen - Beispiele*. 3., Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011.
- [86] Müller, F.; Keintzel, E.: *Erdbebensicherung von Hochbauten*. Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 1985.
- [87] Moreschi, L. M.; Singh, M. P.: *Design of yielding metallic and friction dampers for optimal seismic performance*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 32, pp. 1291-1311, John Wiley & Sons, 2003.
- [88] Morishita, M.; Kitamura, S.; Moro, S.; Kamishima, Y.; Somaki, T.: *Study on 3-dimensional seismic isolation system for next generation nuclear power plant - vertical component isolation system with coned disk spring*. 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, Paper No. 620, 2004.
- [89] Naeim, F.: *The Seismic Design Handbook*. 2., Auflage, Springer-Verlag, Netherlands, 2001.
- [90] Naeim, F.; Kelly, J. M.: *Design of Seismic Isolated Structures, From Theory to Practice*. John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [91] Paulay, T.; Bachmann, H.; Moser, K.: *Erdbebenbemessung von Stahlbetonbauten*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
- [92] Petersen, C.: *Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau*. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg.
- [93] Petersen, C.: *Stahlbau*. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage, 2., durchgesehener Nachdruck, Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1997.
- [94] Petersen, C.: *Dynamik der Baukonstruktionen*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 2000.
- [95] Petersen, C.: *Studien zum Einsatz von Erdbebenschutzsystemen*. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, 2005.
- [96] Petersen, C.: *Dämpfungs-Umrechnungsfaktor  $\eta$ , Festschrift zum 60. Geburtstag von Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ingbert Mangerig*. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Seite 11-18, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, 2010.
- [97] Petersen, C.; Beutler, H.; Braun, C.; Mangerig, I.: *Erdbebenschutzsysteme für den Hoch- und Brückenbau*. Stahlbau-Kalender 2005, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 2005.

- [98] Pocanschi, A.; Phocas, M. C.: *Kräfte in Bewegung*. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2003.
- [99] Ponzo, F.; Cesare, A. D.; Nigro, D.; Simonetti, M.; Leccese, G.: *Shaking table tests of a base isolated structure with double concave friction pendulums*. 2014 NZSEE Conference, New Zealand Society for Earthquake Engineering Inc, Paper Number O43, 2014.
- [100] Popov, V.: *Kontaktmechanik und Reibung, Von der Nanotribologie bis zur Erdbebendynamik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [101] prEN 1998-2: 200X: *Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance - Part 2: Bridges; DRAFT No 3, Final Project Team Draft (Stage 34)*. CEN, Europäisches Komitee für Normung, 2003.
- [102] Radaaj, D.; Vormwald, M.: *Ermüdungsfestigkeit, Grundlagen für Ingenieure*. Dritte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [103] Reitherman, R.: *International Aspects of the History of Earthquake Engineering, Part 1*. Earthquake Engineering Research Institute, Oakland, California, 2008.
- [104] Renault, P. L. A.: *Bewertungsverfahren zur Beurteilung der Erdbebensicherheit von Brückenbauwerken*. Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen (TH), 2007.
- [105] Renzi, E.; Perno, S.; Pantanella, S.; Ciampi, V.: *Design, test and analysis of a light-weight dissipative bracing system for seismic protection of structures*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 36, Issue 4, pp. 519-539, John Wiley & Sons, 2007.
- [106] Riddell, R.: *Inelastic response spectrum: Early history*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 37, Issue 8, pp. 1175-1183, John Wiley & Sons, 2008.
- [107] Roussis, P. C.; Constantinou, M. C.: *Experimental and Analytical Study of Seismically Isolated Structures with Uplift Restraint*. 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, Paper No. 1685, 2004.
- [108] Roussis, P. C.; Constantinou, M. C.: *Experimental and Analytical Studies of Structures Seismically Isolated with an Uplift-Restraining Isolation System*. Technical Report MCEER-05-0001, Task Number 03.2.2, University at Buffalo, The State University of New York, Red Jacket Quadrangle, Buffalo, NY 14261, 2006.
- [109] Roussis, P. C.; Constantinou, M. C.: *Uplift-restraining Friction Pendulum seismic isolation system*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 35, Issue 5, pp. 577-593, John Wiley & Sons, 2006.

- [110] Rovelli, A.; Calderoni, G.: *Stress Drops of the 1997-1998 Cofiorito, Central Italy Earthquakes: Hints for a Common Behaviour of Normal Faults in the Apennines*. Pure and Applied Geophysics, Volume 171, pp. 2731-2746, Springer Basel, 2014.
- [111] Sahasrabudhe, S. S.; Nagarajaiah, S.: *Semi-active control of sliding isolated bridges using MR dampers: an experimental and numerical study*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 34, Issue 8, pp. 965-983, John Wiley & Sons, 2005.
- [112] Sannino, U.; Vlad, I.: *Anti-Seismic Systems: History, Development and Scientific Basis*. The General Association of the Engineers in Romania, Buletinul AGIR nr. 2-3, 2009.
- [113] Seiler, C.; O. Fischer, C. B., Hans Distl: *Semi-aktive Schwingungsdämpfer*. Beton- und Stahlbetonbau 98, 2003.
- [114] Seltenhammer, A.; Bucher, C.: *Modellierung und Analyse von Erdbebenschutzsystemen*. Die Bautechnik, D-A-CH-Mitteilungsblatt, Band 85, S2-S9 Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 2010.
- [115] Soong, T.; Dargush, G.: *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*. John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chichester, West Sussex PO19 1UD, England, 1997.
- [116] Soong, T. T.; Spencer Jr, B. F.: *Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice*. Engineering Structures, Volume 24, p. 243-259, 2002.
- [117] Studer, J. A.; Koller, M. G.; Laue, J.: *Bodendynamik: Grundlagen, Kennziffern, Probleme und Lösungsansätze*. 3., völlig neu bearbeitete Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [118] Taylor, A. W.: *Primer on seismic isolation*. Published by the American Society of Civil Engineers, 1801 Alexander Bell Drive, Reston, Virginia 20191, 2004.
- [119] The MathWorks, I.: *Matlab Version 7.0.1.24704(R14)*. Mathematikprogramm, 2004.
- [120] Tremblay, R.; Timler, P.; Brunau, M.; Filiatrault, A.: *Performance of steel structures during the 1994 Northridge earthquake*. Canadian Journal of Civil Engineering, Volume 22, p. 338-360, 1995.
- [121] Tsai, C.; Chen, W.-S.; Chiang, T.-C.; Chen, B.-J.: *Component and shaking table tests for full-scale multiple friction pendulum systems*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 35, Issue 13, pp. 1653-1675, John Wiley & Sons, 2006.
- [122] Vayas, I.: *Tragverhalten, Auslegung und Nachweise von Stahlhochbauten in Erdbebengebieten*. Stahlbau-Kalender 2008, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 2008.

- [123] Wang, Y.-P.; Chung, L.-L.; Liao, W.-H.: *Seismic Response Analysis of Bridges isolated with Friction Pendulum Bearings*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 27, Issue 10, pp. 1069-1093, John Wiley & Sons, 1998.
- [124] Waterloo Maple Inc.: *Maple 12.0*. Mathematikprogramm, 2008.
- [125] Weber, B.: *Vorlesung Tragwerksdynamik*. ETH Zürich, Abteilung für Bauingenieurwesen Institut für Baustatik und Konstruktion, 2002.
- [126] Wenzel, F.: *Fling*. Vortragsband der Dreiländerdachtagung D-A-CH 1999 der Deutschen Gesellschaft für Erdbebeningenieurwesen und Baudynamik e.V. (DGEB), Technische Universität Berlin, S.A. Savidis (Hrsg.), 1999.
- [127] Wielandt, E.: *Seismographen*. Wechselwirkungen: Jahrbuch aus Lehre und Forschung der Universität Stuttgart, 1996.
- [128] Xiongyan, L.; Suduo, X.; Yancheng, C.: *Three-dimensional seismic isolation bearing and its application in long span hangars*. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, Vol. 12, No.1, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [129] Zayas, V.; Low, S.; Mokha, A.: *Technical Presentation for North Carolina Department of Transportation Raleigh, N. Carolina*. Earthquake Protection Systems, Inc. (EPS), 451 Azuar Drive; Bldg. 759, Mare Island, Vallejo, California 94592, 2009.
- [130] Zayas, V. A.; Low, S. S.; Mahin, S. A.: *The FPS Earthquake Resisting System: Experimental Report*. Report No. UCB/EERC-87/01, Earthquake Engineering Research Center, University of California Berkeley, Berkeley, CA, USA, 1987.
- [131] Zayas, V. A.; Low, S. S.; Mahin, S. A.: *A Simple Pendulum Technique for achieving Seismic Isolation*. Earthquake Spectra, Vol. 6, No. 2, pp. 317-333, 1990.
- [132] Zhang, Y.: *Semi-Active Control of Dynamically Excited Structures Using Active Interaction Control*. Thesis, Report No. EERL 2001-01, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2001.
- [133] Zürn, W.; Widmer-Schmidrig, R.: *Globale Eigenschwingungen der Erde*. Physik Journal, Nr. 10, Seite 49-55, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2002.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Tektonische Lithosphärenplatten, Quelle: United States Geological Survey (USGS)	8
2.2	Modell der Plattengrenzen . . . . .	8
2.3	Weltkarte der Erdbebengefährdung, nach [47] . . . . .	10
2.4	Prinzipielle Darstellung eines Herdgebietes, nach [86] . . . . .	14
2.5	Ausbreitung von seismische Wellen . . . . .	16
2.6	Fortpflanzung von seismischen Wellen im Erdinneren . . . . .	16
2.7	Beschleunigungsverlauf und Husid-Diagramm der NS-K des Friaul-Bebens nach [94]	19
2.8	Einfreiheitsgradschwinger mit Fußpunkterregung . . . . .	20
2.9	$V_r$ und $\varphi_{p,r}$ für unterschiedliche Dämpfungsgrade . . . . .	28
2.10	$V_a$ und $\varphi_{p,a}$ für unterschiedliche Dämpfungsgrade . . . . .	30
2.11	Relativverschiebung $u$ und Absolutverschiebung $y$ infolge harmonischer Fußpunkterregung . . . . .	34
2.12	Relativverschiebung $u$ und Absolutverschiebung $y$ infolge harmonischer Fußpunkterregung . . . . .	34
2.13	Hysteresekurve des viskos gedämpften Einfreiheitsgradschwingers . . . . .	36
2.14	Zur Definition des logarithmischen Dekrements $\Lambda = 2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}$ . . . . .	38
2.15	Angenäherte FOURIER-Reihe und zugehörige Schwingungsreaktion des EFS . .	41
2.16	Angenäherte diskrete FOURIER-Reihe für eine periodische und eine aperiodische Funktion . . . . .	43
2.17	Verfälschtes Ergebnis als Folge von Kappungseffekten bei Anwendung der DFR .	44

2.18	Zurückführung einer zeitlich veränderlichen Last auf eine Folge von Impulsen; Auswirkung des Dämpfungsgrades $\xi$ auf die Maximalwerte der Einflussfunktion $g(t)$ . . . . .	47
2.19	Schwingungsreaktion auf eine Fußpunkterregung in Form eines Sinus-Impulses . .	50
2.20	Annäherung des realen Verlaufs der Fußpunkterregung durch einen Polygonzug .	52
2.21	Berechnung der Schwingungsreaktion mit Hilfe des Übertragungsverfahrens . . .	53
2.22	Vergrößerungsfunktionen $V_r$ und $V_1$ ; Originalschrieb und fiktiv gemessenes Akzellerogramm . . . . .	56
2.23	Dreifreiheitsgradschwinger . . . . .	58
2.24	Steifigkeiten . . . . .	60
2.25	Eigenkreisfrequenzen und zugehörige Eigenformen . . . . .	63
2.26	Verläufe der RAYLEIGH-Dämpfung für unterschiedliche Stützwerte . . . . .	66
2.27	Verschiedene Ansätze zur Approximation der Verschiebungskomponenten . . . .	67
2.28	Periodenverlängerung und Amplitudenabfall . . . . .	71
2.29	Schwingungsreaktion des Stockwerkrahmens auf Fußpunkterregung . . . . .	73
2.30	Nichtlineare Rückstellfunktionen nach [94] . . . . .	74
2.31	Veranschaulichung der NEWTON-RAPHSON-Iteration . . . . .	77
2.32	Gegenüberstellung der Schwingungsreaktion eines EFS mit linearer bzw. ideal elastoplastischer Rückstellfunktion . . . . .	78
2.33	Vergleich eines Systems mit ideal elastoplastischer Rückstellfunktion mit und ohne viskoser Dämpfung . . . . .	79
2.34	Einfreiheitsgradschwinger unterschiedlicher Schwingdauer $T$ und Beschleunigungsverlauf . . . . .	81
2.35	Antwortspektren für unterschiedliche Dämpfungsgrade . . . . .	81
2.36	Gegenüberstellung von korrekten Spektral- und Pseudospektralwerten . . . . .	83
2.37	Doppelt-logarithmische Darstellung von Antwortspektren . . . . .	84
2.38	Empfohlene elastische Antwortspektren gemäß EC8 [31] . . . . .	86
2.39	Ansätze zur Abminderung des Tragwiderstandes . . . . .	87

2.40	Abminderungsfunktionen für elastische Antwortspektren in Abhängigkeit verschiedener Duktilitätsfaktoren sowie am Beispiel rechnerisch ermittelte Abminderungsfaktoren . . . . .	88
2.41	Elastische Antwortspektren und inelastische Beispielbemessungsspektren gemäß DIN EN 1998-1/NA:2011-01 [32] . . . . .	90
3.1	Studie zur Periodenabhängigkeit von Schwingungsdämpfern als Erdbebenschutzsystem . . . . .	101
3.2	Gegenüberstellung der Reaktionsverläufe von zwei mit Schwingungsdämpfern ausgerüsteten Systemen . . . . .	103
3.3	Fließgelenkmechanismen für einfache Rahmensysteme und alternative Anordnung von Dissipations-Elementen . . . . .	106
3.4	Dreieckselement . . . . .	106
3.5	Funktionsprinzip von Dissipations-Elementen . . . . .	109
3.6	Maximalbeanspruchungen der Hysterese-Elemente in Form von Längsspannungen in Richtung der x-Achse . . . . .	109
3.7	Stahl-Hysterese-Element mit eingprägter sinusförmiger Kopfverschiebung $u$ . . .	110
3.8	Temperaturentwicklung in Grad [C°] und Ermüdungsbruch eines auf Kurzzeitfestigkeit belasteten Stahl-Hysterese-Elements . . . . .	111
3.9	Verschiedene Mechanismen für die Erdbebenisolierung . . . . .	113
3.10	Belastungsreduzierung durch Periodenverschiebung im Antwortspektrum . . . . .	116
3.11	Zeitverlaufsberechnung der einzelnen Systeme mit und ohne Basisisolierung . . .	117
4.1	Schematischer Aufbau des Gleitpendellagers im zentriertem sowie im ausgelenkten Zustand . . . . .	120
4.2	Ebene Bewegung des Pendelschwingers . . . . .	121
4.3	Energiekurve und Phasenporträt des ebenen Schwerependels . . . . .	126
4.4	Verläufe der elliptischen Funktion $\text{sn}(k, \omega_0 \cdot t)$ in Abhängigkeit des Auslenkwinkels	129
4.5	Das vollständige elliptische Integral $K(k)$ . . . . .	130
4.6	Periode eines Fadenpendels mit $l = 3 \text{ m}$ . . . . .	131
4.7	Analytisch und mit ADINA berechneter Verlauf der Pendelschwingung . . . . .	132

---

4.8	Beispielsystem . . . . .	132
4.9	Schwingungsverläufe des frei ausschlagenden reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers . . . . .	135
4.10	Kraft-Verformungs-Verläufe des Gleitpendellagers mit $r = 2.0\text{ m}$ , $G = 4000\text{ kN}$ und $\mu = 0.05$ . . . . .	140
4.11	ebenes FE-Modell eines Gleitpendellagers . . . . .	141
4.12	Hysterese des Gleitpendellagers mit $r = 2.0\text{ m}$ , $G = 4000\text{ kN}$ und $\mu = 0.05$ . . .	142
4.13	äquivalente Steifigkeit $k_{\text{äqui}}$ und äquivalenter Dämpfungsgrad $\xi_{\text{äqui}}$ in Abhängigkeit von $\hat{u}$ für einen Gleitpendellagerradius von $r = 2.0\text{ m}$ und variierende Reibkoeffizienten $\mu$ . . . . .	144
4.14	Beispielsystem . . . . .	147
4.15	Ergebnisse der Zeitverlaufsberechnung des Referenzmodells ohne Erdbebenisolierung und des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers . . . . .	148
4.16	Verschiebungsverläufe des nicht erdbebenisolierten Referenzmodells und des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers . . . . .	149
4.17	Ergebnisse der Zeitverlaufsberechnung des nicht erdbebenisolierten Referenzmodells und des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers . . . . .	150
4.18	Iterative Annäherung des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens sowie resultierende Hysterese-Kurven . . . . .	152
4.19	Verformungs- und Kraftverläufe des gemäß dem Sekanten-Steifigkeitsverfahrens berechneten System . . . . .	152
4.20	Reib-Antwortspektrum . . . . .	155
4.21	Geschwindigkeits- und Verschiebungsspektrum des reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers . . . . .	155
4.22	Verschiedenen Eigenperioden zugeordnete Beschleunigungsverläufe des reibgedämpften Einfreiheitsgradschwingers . . . . .	156
4.23	Erdbebenreaktion des auf einen Einfreiheitsgradschwinger reduzierten Beispielsystems . . . . .	156
4.24	Schematischer Aufbau des doppelt konkaven Gleitpendellagers ( <b>DCFP</b> -Lager) im zentrierten sowie im ausgelenkten Zustand . . . . .	160

4.25	Hysteresekurven des Beispielsystems des doppelt konkaven Gleitpendellagers ( <b>DCFP</b> -Lagers) . . . . .	163
4.26	In der zeitlichen Abfolge nummerierte Hystereseschleifen des doppelt konkaven Gleitpendellagers ( <b>DCFP</b> -Lagers) anhand des Beispielsystems . . . . .	163
4.27	Schematischer Aufbau des <b>TPB</b> -Lagers sowie des modifizierten einfachen Gleitpendellagers . . . . .	165
4.28	Schematischer Aufbau des <b>SDCFP</b> -Lagers sowie rotationsbedingter Horizontalversatz . . . . .	166
4.29	Eigenperioden in Abhängigkeit der Krümmungsradien sowie mögliche Rotationszustände des <b>SDCFP</b> -Lagers . . . . .	167
4.30	Schematischer Aufbau eines Zug-Druck-Gleitpendellagers sowie von Gleitpendellagern mit richtungsabhängigem Verhalten . . . . .	168
4.31	Schematischer Aufbau des so genannten <b>Double-Wedge Isolators</b> . . . . .	169
5.1	Teststand - Gleitpendellager . . . . .	172
5.2	Hystereseschleifen des Akropolis-Gleitpendellagers Nr. 76 für drei unterschiedliche Auflastniveaus $F_V$ . . . . .	174
5.3	Einzel-Hystereseschleifen des Akropolis-Gleitpendellagers Nr. 76 für eine Auflast von $F_V = 4450 \text{ kN}$ . . . . .	174
5.4	FE-Simulationsmodelle der Gleitpendellagerversuche . . . . .	178
5.5	Gegenüberstellung der messtechnisch registrierten und der mit Hilfe der FE-Simulationsmodelle analytisch gewonnenen Hysteresekurven . . . . .	179
5.6	Gleitpendellager im ausgelenktem Zustand während des Versuchsablaufs . . . . .	179
5.7	Versuchsaufbau für die Bilkent-Gleitpendellager . . . . .	181
6.1	Schematische Verschiebungsverläufe seismischer Isolationssysteme mit und ohne ausreichendem Rückstellvermögen . . . . .	184
6.2	Kriterium zur Sicherstellung eines ausreichend hohen Rückzentrierungsvermögens gemäß <b>AASHTO</b> der Version 1991 sowie der Versionen 1999 und 2010 nach [79] . . . . .	186
6.3	Kriterien zur Sicherstellung einer ausreichenden Rezentrierung . . . . .	190
6.4	Position des Hängenbleibens nach vorheriger Auslenkung und anschließendem Freilassen . . . . .	192

6.5	Zusammenhang zwischen Gleitpendellagerradius $r$ und Eigenperiode $T_0$ sowie für diskrete Bemessungsverschiebungswerte $d_{Ed}$ gemäß dem Energiekriterium der Gleichung (6.23) ausgewertete maximal zulässige Reibkoeffizienten $\mu_{max}$ . . . . .	195
6.6	Auf geneigter Reibfläche befindlicher Gleitkörper mit in unterschiedlichen Richtungen einwirkenden Fußpunktbeschleunigungen . . . . .	196
6.7	Auf geneigter Gleitfläche befindlicher Gleitkörper ohne Fremdeinwirkungen . . .	198
6.8	Gegenüberstellung der für einen auf einer geneigten Reibfläche befindlichen Gleitkörper numerisch und analytisch erhaltenen Ergebnisse . . . . .	198
6.9	Auf geneigter Fläche befindlicher Gleitkörper mit Fußpunktbeschleunigung $\ddot{y}_F$ in Hangrichtung . . . . .	199
6.10	Für diskrete Werte des Reibkoeffizienten $\mu$ zur Bewegungsinitiierung erforderliche Mindestbeschleunigung $\ddot{y}_{F,min}$ in Abhängigkeit der Hangneigung $b$ ; Konkav geformte Gleitfläche . . . . .	200
6.11	Zur Bewegungsinitiierung erforderliche Mindestbeschleunigung $\ddot{x}_{F,min}$ in Abhängigkeit der Hangneigung $b$ , ausgewertet für diskrete Werte des Reibkoeffizienten $\mu$ . . . . .	202
6.12	Auswirkungen vertikaler Fußpunktbeschleunigungen $\ddot{z}_F$ auf einen auf einer geneigten Fläche befindlichen Gleitkörper . . . . .	202
6.13	Zur Bewegungsinitiierung erforderliche Mindestbeschleunigung $\ddot{x}_{F,min}$ in Abhängigkeit der Hangneigung $b$ für diskrete Werte des Reibkoeffizienten $\mu$ . . .	204
6.14	Graphische Darstellung der Bewegungsverläufe eines auf einer Schrägen befindlichen Gleitkörpers für Erdbebenanregungen in und quer zur Hangrichtung für verschiedene Steigungen . . . . .	205
6.15	Für diskrete Anfangsauslenkungen $u_0$ in Abhängigkeit des Gleitpendellagerradius $r$ ausgewertete Hangneigungen $b$ . . . . .	206
6.16	Akzellerogramm des El-Centro Erdbebens und zugehörige Fast-Fourier-Transformation . . . . .	206
6.17	Vereinfachte Modellvorstellung des Gleitpendellagers zur Implementierung in ein FE-Programm . . . . .	207
6.18	Akzellerogramm des COLFIORITO-Erdbebens für die OW-Richtung . . . . .	208
6.19	Akzellerogramm des COLFIORITO-Erdbebens für die NS-Richtung . . . . .	209

6.20	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene Relativverschiebungen in der x-y-Ebene . . . . .	209
6.21	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in y-Richtung . . . . .	210
6.22	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in x-Richtung . . . . .	210
6.23	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene Relativverschiebungen in der x-y-Ebene für verschiedene diskrete Gleitpendellagerradien $r$ . . . . .	211
6.24	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in y-Richtung für verschiedene diskrete Gleitpendellager- radien $r$ . . . . .	211
6.25	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in x-Richtung für verschiedene diskrete Gleitpendellager- radien $r$ . . . . .	211
6.26	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene Relativverschiebungen in der x-y-Ebene für unterschiedliche diskrete Reibkoeffizienten $\mu$ . . . . .	212
6.27	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in y-Richtung für verschiedene diskrete Reibkoeffizienten $\mu$	213
6.28	Für die Anregung des COLFIORITO-Erdbebens erhaltene zeitliche Verläufe der Relativverschiebungen in x-Richtung für verschiedene diskrete Reibkoeffizienten $\mu$	213
6.29	Gegenüberstellung der gemäß Energiekriterium und der gemäß Gleichung (6.41) erhaltenen maximal zulässigen Reibkoeffizienten . . . . .	214

# Tabellenverzeichnis

2.1	Kurzform der makroseismischen Intensitätsskala EMS-98 - aus [48] . . . . .	11
2.2	Freigesetzte Energie in Abhängigkeit von der Magnitude . . . . .	13
2.3	Gegenüberstellung unterschiedlicher Magnitudenskalen . . . . .	13
2.4	Gegenüberstellung der Modalen und der RAYLEIGH-Dämpfung . . . . .	66
2.5	Gegenüberstellung der Zentralen Differenzenmethode und der Beschleunigungs- methode . . . . .	68
2.6	Berechnungsanweisung der Zentralen Differenzenmethode und des NEWMARK- Verfahrens . . . . .	70
2.7	Parameterwerte zur Beschreibung der empfohlenen elastischen Antwortspektren vom Typ 1 für Zonen starker Seismizität mit Oberflächenwellenmagnituden $M_S \geq$ 5.5) . . . . .	85
2.8	Parameterwerte zur Beschreibung der empfohlenen elastischen Antwortspektren vom Typ 2 für Zonen schwacher Seismizität mit Oberflächenwellenmagnituden $M_S < 5.5$ ) . . . . .	86
2.9	Werte der Parameter zur Beschreibung des elastischen horizontalen Antwortspek- trums gemäß [32] . . . . .	90
2.10	Beteiligungsfaktoren $L_i$ und Modale Massen $M_i$ des Stockwerkrahmens . . . . .	92
2.11	Im Stockwerkrahmen hervorgerufene Trägheitskräfte . . . . .	93
2.12	Beiwerte für die vollständige quadratische Kombination (CQC) . . . . .	95
2.13	Gegenüberstellung der nach verschiedenen Methoden berechneten Trägheitskräfte	96
3.1	Vergleich der Systemantwort mit und ohne Erdbebenisolierung . . . . .	116

4.1	Eigenperiodenzunahme des Pendelschwingers in Abhängigkeit des Auslenkungswinkels $\hat{\varphi}$ . . . . .	122
4.2	Eigenperiodenzunahme des Gleitpendellagers in Abhängigkeit des Gleitpendellagerradius $r$ mit $T_0 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ , $T(\hat{u}) \approx T_0 \cdot \left[1 + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{0.3 \text{ m}}{r}\right)^2\right]$ und $\hat{\varphi} = \arcsin\left(\frac{\hat{u}}{r}\right)$	140
4.3	System reibgedämpfter Zweifreiheitsgradschwinger . . . . .	148
4.4	Sekanten-Steifigkeitsverfahren unter Anwendung der Zeitverlaufsmethode . . . .	151
4.5	Vergleich der Ergebnisse des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens mit der korrekten Lösung des reibgedämpften Zweifreiheitsgradschwingers . . . . .	153
4.6	Sekanten-Steifigkeitsverfahren mit Hilfe des Antwortspektrums . . . . .	154
4.7	Gegenüberstellung der Ergebnisse des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens mit denjenigen der korrekten Lösung . . . . .	154
4.8	Iteratives Vorgehen des Sekanten-Steifigkeitsverfahrens zur Bestimmung der Erdbebenreaktion des Zweifreiheitsgradschwingers mit Hilfe von Antwortspektren . .	157
4.9	Kraft-Verformungs-Beziehung des doppelt konkaven Gleitpendellagers . . . . .	162
5.1	Versuchsergebnisse Gleitpendellager Nr. 76 . . . . .	174
5.2	Versuchsergebnisse Gleitpendellager Nr. 76 . . . . .	176
5.3	Testablaufschemata der SÖGÜTÖZÜ-Gleitpendellager . . . . .	180
5.4	Versuchsergebnisse . . . . .	180
5.5	Spaltmaße vor und nach dem Test . . . . .	181
5.6	Testablaufschemata der Gleitpendellager für die BILKENT-Universität . . . . .	182
5.7	Versuchsergebnisse . . . . .	182