

**Optimale Steuerung in der vertikalen Fahrzeugdynamik  
Echtzeitfähige proaktive Vorausschau und impulsive Systemdynamik**

Johannes Michael

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Gutachter/Gutachterin:

1. Prof. Dr. rer. nat. Matthias Gerds
2. Prof. Dr. rer. nat. Martin Arnold

Die Dissertation wurde am 07.12.2016 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 02.06.2017 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 13.06.2017 statt.



# Danksagung

Als erstes möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Matthias Gerds für die Unterstützung bei der Erarbeitung dieser Dissertation bedanken. Danke für die Diskussionen und die Möglichkeit an so vielen unterschiedlichen Projekten zu arbeiten und so viel zu lernen.

Danke an Prof. Dr. Martin Arnold für die Übernahme des Zweitgutachtens dieser Arbeit und an Prof. Dr. Ing. Ferdinand Svaricek, der den Vorsitz der Prüfungsausschusses übernommen hat.

Besonders danke ich meinen Freunden und Kollegen an der Universität der Bundeswehr für die schöne Zeit, die offenen Ohren, das mittägliche Asyl und alle Unternehmungen die Ablenkung verschafft haben.

Ein besonderer Dank geht an meine Familie, die mich immer unterstützt hat, nicht nur beim Korrekturlesen dieser Arbeit, sondern auch in allen anderen Belangen, mein Leben lang.

Als letztes möchte ich mich bei meiner Frau Nadine bedanken. Ohne sie hätte ich diese Arbeit nie fertig gestellt. Danke, dass du dir meine Sorgen und Zweifel angehört und mich immer wieder motiviert hast. Ich liebe dich.



# Kurzzusammenfassung

Die am Institut für Ingenieurmathematik der Universität der Bundeswehr verfasste Arbeit befasst sich mit neuen Ansätzen im Bereich der vertikalen Fahrzeugdynamik. Ziel ist es, ein quantitatives Bewertungskriterium mit Hilfe einer angepassten Steuerung zu optimieren. Die betrachteten Kriterien beziehen sich auf den empfundenen Komfort der Fahrt, sowie Sicherheit- und Betriebsfestigkeit. Dabei wird zuerst die kontinuierliche Dynamik mit einem echtzeitfähigen Erkennungsalgorithmus kombiniert und im Anschluss eine Erweiterung auf Dynamiken mit impulsiven Kontaktbedingungen betrachtet.

Da die zugrundeliegenden Optimalsteuerungsprobleme schwer in Echtzeit lösbar sind, wird eine Steuerung bzgl. singulär auftretender Fahrbahnereignisse definiert, die mit Hilfe weniger Parameter beschrieben werden können. Beispiele für derartige Ereignisse sind Schlaglöcher und Fahrbahnschwellen. Der Vorteil dieser Formulierung ist, dass mit Hilfe der parametrischen Sensitivitätsanalyse ein Aufdatierungsschritt für vorab berechnete nominelle Ereignisse durchgeführt werden kann, der Echtzeitfähig ist. Ein auf einer Support-Vektor-Maschine basierender Klassifizierungsalgorithmus erkennt anhand der Daten eines Oberflächenscans, ob ein Ereignis vorliegen kann und ruft anschließend ein Parameteridentifizierungsverfahren auf, um die zugehörige optimierte Steuerung zu bestimmen. Das Verfahren wird anhand von Softwaresimulationen auf seine Echtzeitfähigkeit überprüft.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit dem möglichen Reifen-Boden-Kontaktverlust des Fahrzeugs bei der Überfahrt kritischer Ereignisse. Dafür wird eine Riemann-Stieltjes-Integral-Formulierung mit unterlagerten Kontaktbedingungen verwendet. Die Kontakte werden dabei mit Hilfe eines Optimierungsproblems mit verallgemeinerten Restitutionskoeffizienten gelöst. Es werden explizite Integrationsverfahren für die Problemklasse vorgestellt und deren Konvergenzordnung nachgewiesen. Aufbauend wird das Problem um eine parametrisierte Steuerung erweitert und Existenzaussagen über Parametersensitivitäten nachgewiesen. Abschließend werden zwei auf dem Gradientenverfahren basierende Optimierungsverfahren vorgestellt und Resultate für Beispiele der vertikalen Fahrzeugdynamik gezeigt.



# Abstract

This thesis was written at the institute of computational mathematics of the University of the German Federal Armed Forces and investigates new approaches in the field of vertical vehicle dynamics using optimal control techniques. The objective is to optimize a quantitative cost function using an adapted control. The considered optimization criteria comprise ride comfort as well as safety and durability values.

The first part of the thesis investigates a formulation using continuous dynamics and develops a machine learning based detection algorithm in combination with a sensitivity update rule that shows real-time performance. Therefore the regarded disturbances are assumed to appear as so called singular events, e.g. potholes and thresholds. Those can be parameterized using a small amount of parameters, what is then used to calculate the optimal control and the parameter sensitivities with respect to changes in the disturbances.

In the second main part the dynamics are extended to impulsive systems, s.th. also contact losses between wheel and road surface can be included. This formulation is done using Riemann-Stieltjes-Integrals and a restitution law using generalized coefficients. For this problem formulation explicit integration methods are presented and investigated. The existence of parameter sensitivities for the discontinuous system are developed and on top of that two gradient method based optimization routines are shown and their performance is evaluated for examples from the field of vertical vehicle dynamics.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>3</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>9</b>
1.1 Motivation . . . . .	9
1.2 Beiträge der Arbeit . . . . .	10
1.3 Aufbau . . . . .	10
<b>2 Vertikale Fahrwerkregelung</b>	<b>13</b>
2.1 Aktiv vs. Semiaktiv . . . . .	13
2.2 Regelungsstrategien - ein Überblick . . . . .	14
2.3 Fahrbahn-Preview . . . . .	15
2.4 Preview-Regelungsansätze . . . . .	16
<b>3 Theoretischer Hintergrund</b>	<b>19</b>
3.1 Vertikale Fahrzeugmodelle als Mehrkörpersystem . . . . .	19
3.1.1 Einführung in die Mehrkörperdynamik . . . . .	19
3.1.2 Elemente in der vertikalen Fahrzeugdynamik . . . . .	20
3.1.3 Das Viertelfahrzeugmodell . . . . .	22
3.1.4 Das Halbfahrzeugmodell . . . . .	24
3.1.5 Das Vollfahrzeugmodell . . . . .	25
3.1.6 Erweiterte Fahrzeugmodelle . . . . .	26
3.2 Optimale Steuerung . . . . .	28
3.2.1 Problemstellung . . . . .	29
3.2.2 Transformationsmöglichkeiten . . . . .	32
3.2.3 Unendlichdimensionale Optimierung . . . . .	33
3.2.4 Diskretisierung - endlichdimensionales Optimierungsproblem . . . . .	41
3.2.5 Notwendige und hinreichende Bedingungen . . . . .	49
3.2.6 Dualität . . . . .	52
3.2.7 Sequentielle-Quadratische-Programmierung . . . . .	54
3.3 Parametrische Sensitivitätsanalyse . . . . .	61
<b>4 Optimale Steuerung vertikaler Fahrzeugmodelle</b>	<b>67</b>
4.1 Die Zielfunktion . . . . .	67
4.1.1 Gütekriterien der vertikalen Fahrzeugdynamik . . . . .	67
4.1.2 Frequenzanalyse als Komfortkriterium . . . . .	69

4.2	Semi-aktive Steuerung . . . . .	74
4.2.1	Lineares Dämpfermodell . . . . .	75
4.2.2	Das Bingham-Modell . . . . .	80
4.2.3	Bi-viskoses Dämpfermodell . . . . .	81
4.2.4	Klassisches Coulomb-Reibungsmodell eines semi-aktiven Dämpfers . . . . .	83
4.2.5	Das Bouc-Wen-Modell . . . . .	83
4.2.6	Datenfitting experimenteller Messungen . . . . .	85
4.3	Aktive Steuerung . . . . .	89
4.3.1	Verzögerung der Aktoren . . . . .	90
4.3.2	Erweiterung der Zielfunktion für aktive Steuerungen . . . . .	91
4.3.3	Steuerung mittels Krafteinleitung . . . . .	91
4.3.4	Steuerung durch Verstellung des Federfußpunktes . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Proaktive Echtzeitsteuerung</b>	<b>99</b>
5.1	Begriffsdefinition . . . . .	99
5.2	Klassifikation singulärer Fahrbahnanregungen . . . . .	100
5.2.1	Parametrisierte Fahrbahnereignisse . . . . .	100
5.2.2	Zielfunktionsgewichtung $\kappa$ als zusätzlicher Freiheitsgrad . . . . .	103
5.3	Erkennung . . . . .	104
5.3.1	Sensorgeometrie . . . . .	104
5.3.2	Erkennungsalgorithmus als Ausgleichsproblem . . . . .	106
5.3.3	Wahl der Zielfunktion . . . . .	107
5.4	Vorfilterung mittels Support-Vektor-Maschinen . . . . .	109
5.4.1	Support-Vektor-Maschinen . . . . .	109
5.4.2	Multi-Class-SVMs . . . . .	113
5.4.3	Beispiele . . . . .	114
5.5	Closed-Open-Loop Preview-Regelung mittels Sensitivitätsupdate . . . . .	116
5.6	Beispiele . . . . .	119
5.7	Preview-Regelung als Vorsteuerung . . . . .	125
5.8	Preview-Regelung als Anfangsschätzung für Nachoptimierung . . . . .	125
5.9	Wahl der Gitterauflösung . . . . .	126
5.10	Weitere notwendige Parameter . . . . .	127
5.11	Die Simulationssoftware sensUp . . . . .	129
5.11.1	Programmaufbau . . . . .	129
5.11.2	Echtzeitfähigkeit . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Impulsive Systeme als Riemann-Stieltjes-Integral</b>	<b>131</b>
6.1	Motivation . . . . .	131
6.1.1	Kontaktverlust . . . . .	131
6.1.2	Hüpfender Ball . . . . .	132
6.2	Impulsive Systeme . . . . .	133
6.2.1	Formulierung unilateraler Bindungen . . . . .	133
6.2.2	Restitutionsgesetze . . . . .	136
6.2.3	Modellierungsmethoden des impulsiven Systems . . . . .	139
6.3	Theorie . . . . .	144

6.3.1	Funktionen beschränkter Variation . . . . .	144
6.3.2	Das Riemann-Stieltjes-Integral . . . . .	147
6.4	Allgemeine Systemgleichung impulsiver Systeme . . . . .	151
6.5	Diskretisierung - Numerische Quadraturformeln . . . . .	156
6.5.1	Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur für Stieltjes-Integrale . . . . .	156
6.5.2	Numerische Approximation zustandsabhängiger impulsiver Systeme . . . . .	158
6.5.3	Verallgemeinerte Quadraturformeln für impulsive Systeme . . . . .	165
6.5.4	Zusammengesetzte Newton-Cotes-Quadratur . . . . .	169
6.6	Kontaktformulierung . . . . .	169
6.6.1	Systemdynamik . . . . .	170
6.6.2	Kontaktüberprüfung . . . . .	171
6.6.3	Berechnung der Kontaktimpulse . . . . .	173
6.6.4	Beispiele . . . . .	177
6.6.5	Zeno-Verhalten . . . . .	181
<b>7</b>	<b>Optimale Steuerung impulsiver Systeme</b>	<b>183</b>
7.1	Vorangegangene Arbeiten . . . . .	183
7.2	Parametersensitivitäten des impulsiven Systems . . . . .	184
7.3	Vergleich mit Sensitivitätsresultaten hybrider Systeme . . . . .	196
7.4	Numerische Berechnung optimaler Steuerungen . . . . .	196
7.5	Gradientenbasierte Optimierung . . . . .	197
7.5.1	Projiziertes Gradientenverfahren . . . . .	197
7.5.2	Gradientenberechnung aus Stufenkosten . . . . .	198
7.5.3	Beispiele . . . . .	199
7.6	Gradientenberechnung mit Hilfe von Mollifiern . . . . .	204
7.6.1	Glättung mit Hilfe von Mollifiern . . . . .	204
7.6.2	Glättung der Zustände für erweiterte Zielfunktionen . . . . .	207
7.6.3	Glättung der Zielfunktion . . . . .	208
7.6.4	Beispiele . . . . .	211
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>217</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>221</b>



# Tabellenverzeichnis

3.1	Konstanten . . . . .	26
5.1	Parameter Grenzen für verschiedene Äquivalenzklassen . . . . .	103
5.2	Vergleich der Zielfunktionswerte der unterschiedlichen Steuerungen einer Stufenüberfahrt eines Viertelfahrzeugs . . . . .	120
5.3	Vergleich der Zielfunktionswerte der unterschiedlichen Steuerungen einer Schwellenüberfahrt eines Viertelfahrzeugs . . . . .	122
5.4	Vergleich der Zielfunktionswerte der unterschiedlichen Steuerungen einer Schwellenüberfahrt eines Halffahrzeugs . . . . .	122
5.5	Vergleich der Zielfunktionswerte der unterschiedlichen Steuerungen einer Schwellenüberfahrt eines Vollfahrzeugs . . . . .	124
6.1	Konvergenzverhalten des Riemann-Stieltjes-Verfahrens und der verallgemeinerten Trapezregel für das Beispiel des hüpfenden Balls . . . . .	168
7.1	Konvergenz der gemittelten Funktion gegen die Ursprungsfunktion gemessen in verschiedenen Normen . . . . .	208



# Abbildungsverzeichnis

3.1	Schematische Darstellung eines allgemeinen Kraftelements . . . . .	21
3.2	Schematische Darstellung eines Federelements . . . . .	21
3.3	Darstellung verschiedener Federkennlinien: linear (durchgezogen), progressiv (gestrichelt), degressiv (gepunktet), approximativ linear (gestrichpunktet) . . . . .	22
3.4	Schematische Darstellung eines Dämpferelements . . . . .	22
3.5	Schematischer Aufbau des Viertelfahrzeugmodells . . . . .	23
3.6	Schematischer Aufbau des Halbfahrzeugmodells . . . . .	24
3.7	Schematischer Aufbau des Vollfahrzeugmodells . . . . .	25
3.8	Schematischer Aufbau eines LKW-Modells (vgl.: [Simeon et al., 1994]) . . . . .	28
4.1	Von [International Organization for Standardization, 1997] empfohlene Frequenzgewichtung der vertikalen Beschleunigungsamplituden (Datenquelle: [International Organization for Standardization, 1997]) . . . . .	71
4.2	Einseitiges Amplitudenspektrum der Aufbaubeschleunigung eines Viertelfahrzeugs bei einer Schlaglochüberfahrt für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen: $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt: $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet: $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	72
4.3	Einseitiges Amplitudenspektrum der Reifenbeschleunigung eines Viertelfahrzeugs bei einer Schlaglochüberfahrt für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen: $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt: $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet: $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	73
4.4	Einseitiges Amplitudenspektrum der Aufbaubeschleunigung eines Viertelfahrzeugs bei einer Schwellenüberfahrt für gewichtete und ungewichtete Amplitudenspektren (gestrichelt: ungewichtete Zielfunktion (4.7), durchgezogen: gewichtete Zielfunktion (4.8)) . . . . .	73
4.5	Schematische Darstellung einer semi-aktiven Dämpfung an einem Viertelfahrzeug (nach: [Rajamani, 2006]) . . . . .	74
4.6	Vergleich der vertikalen Position von Reifen und Aufbau einer Stufenüberfahrt ( $\mathcal{T}(0, 05)$ ) mit linearer semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	75
4.7	Vergleich der vertikalen Position von Reifen und Aufbau einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit linearer semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	76
4.8	Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit linearer semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	77
4.9	Vergleich des Frequenzgangs der Radbeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit linearer semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	77

4.10	Draufsicht auf das Kopfsteinpflasterprofil mit eingefärbtem Höhenprofil . . . . .	78
4.11	Ausgewählte Spuren für die Vollfahrzeuganregung (durchgezogen - rechte Spur, gestrichpunktet - linke Spur) . . . . .	78
4.12	Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung der ungesteuerten (gestrichpunktet) und optimierten (durchgezogen) Schlechtwegüberfahrt . . . . .	79
4.13	Berechnungsergebnisse einer Überfahrt über Kopfsteinpflaster (durchgezogen: optimal gesteuert, gestrichpunktet: ungesteuert) . . . . .	79
4.14	Kennfeld eines elektrorheologischen Dämpfers (Quelle: Fludicon GmbH) . . . . .	80
4.15	Schematische Darstellung des Bingham-Modells (vgl. [Spencer et al., 1997]) . . . . .	80
4.16	Kraft-Geschwindigkeits-Darstellung des bi-viskosen Modells für verschiedene Steuerungen	82
4.17	Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit bi-viskoser semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	82
4.18	Vergleich der vertikalen Auslenkung von Reifen und Aufbau einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit bi-viskoser semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	83
4.19	Bestapproximierende Coulomb-Reibungsmodelle eines elektrorheologischen Dämpfers für unterschiedliche Messdaten (Daten: Fludicon GmbH) . . . . .	84
4.20	Schematische Darstellung des erweiterten Bouc-Wen-Modells (vgl. [Butz und von Stryk, 2002]) . . . . .	84
4.21	Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit Bouc-Wen-Dämpfer für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	85
4.22	Vergleich der vertikalen Auslenkung von Reifen und Aufbau einer Schwellenüberfahrt ( $\mathit{mathcal{P}}(0.05, 1.0)$ ) mit Bouc-Wen-Dämpfer für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	86
4.23	Vergleich der Spline-Interpolation (gestrichpunktet) mit der PCHIP-Interpolation (durchgezogen) . . . . .	86
4.24	2D-Spline-Interpolation eines Dämpferkennfelds erzeugt unerwünschte Oszillationen . . . . .	87
4.25	2D-PCHIP-Interpolation eines Dämpferkennfelds . . . . .	88
4.26	Vergleich der Steuerungen für $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ (durchgezogen) und $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ (gestrichelt) . . . . .	89
4.27	Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit pchip-Dateninterpolation für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	89
4.28	Verhalten einer mit einem $PT_1$ -Glied verzögerten Steuerung (durchgezogen: $u_{ist}$ , gestrichelt $u_{soll}$ ) . . . . .	90
4.29	Zwei Modellierungsmöglichkeiten aktiver Fahrwerke . . . . .	92
4.30	Vergleich der vertikalen Position von Reifen und Aufbau einer Stufenüberfahrt ( $\mathcal{T}(0.05)$ ) mit aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	93



4.31	Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Stufenüberfahrt ( $\mathcal{T}(0.05)$ ) mit aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	94
4.32	Vergleich der vertikalen Position von Reifen und Aufbau einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	94
4.33	Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen - $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt - $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet - $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ ) . . . . .	95
4.34	Vertikalen Position des Fahrersitzes bei ungesteuerter (durchgezogen) und optimal gesteuerter (gestrichelt) Überfahrt . . . . .	95
4.35	Vergleich der Amplituden der Fahrersitzbeschleunigung des optimal gesteuerten Überfahrt (gestrichelt) mit der Ungesteuerten (durchgezogen) . . . . .	96
4.36	Darstellung der optimalen Steuerung (gestrichelt) zusammen mit der Kabinengeschwindigkeit (durchgezogen) . . . . .	96
5.1	Beispielgeometrien der singulären Ereignisse . . . . .	101
5.2	Trajektorie der Radnabe bei einer Stufenüberfahrt mit unelastisch angenommenem Reifen	102
5.3	Schematische Darstellung des Preview-Algorithmus . . . . .	104
5.4	Vergleich der möglichen Sensorpositionierungen und des erfassbaren Straßenbereichs .	104
5.5	Geometrie der Scannerdaten . . . . .	105
5.6	Geometrischer Vergleich der Fehler $\delta_z$ und $\delta_l$ . . . . .	108
5.7	Ausgewählte Elemente der Multi-Class-SVM . . . . .	115
5.8	Ausschnitt der Erkennung und Klassifizierung einer Schwellenüberfahrt . . . . .	117
5.9	Closed-loop Regelung . . . . .	119
5.10	Echtzeit open-loop Sensitivitätsupdate . . . . .	119
5.11	Vergleich der nominellen (gestrichelt), reoptimierten (durchgezogen) und aufdatierten (gestrichpunktet) Steuerung eines Viertelfahrzeugs bei einer Stufenüberfahrt mit variierter Stufenhöhe . . . . .	120
5.12	Sensitivität der Steuerung bzgl. der Stufenhöhe eines Viertelfahrzeugs . . . . .	121
5.13	Vergleich der nominellen (gestrichelt), reoptimierten (durchgezogen) und aufdatierten (gestrichpunktet) Steuerung eines Viertelfahrzeugs bei einer Schwellenüberfahrt mit variierten Schwellenparametern . . . . .	121
5.14	Sensitivität der Steuerung bzgl. der Schwellenhöhe und -länge eines Viertelfahrzeugs .	122
5.15	Sensitivität der Steuerung bzgl. der Stufenhöhe eines Halbfahrzeugs . . . . .	123
5.16	Vergleich der nominellen (gestrichelt), reoptimierten (durchgezogen) und aufdatierten (gestrichpunktet) Steuerung eines Halbfahrzeugs bei einer Stufenüberfahrt mit variierter Stufenhöhe . . . . .	123
5.17	Vergleich der nominellen (gestrichelt), reoptimierten (durchgezogen) und aufdatierten (gestrichpunktet) Steuerung eines Vollfahrzeugs bei einer Schwellenüberfahrt mit variierten Schwellenparametern . . . . .	124
5.18	Blockschaltbild eines Reglers mit Vorsteuerung (vgl. [Lunze, 2010]) . . . . .	125
5.19	Verhalten der upgedateten Kostenfunktion im Vergleich zur Reoptimierten bei größer werdender Parameterabweichung (Höhenveränderung - durchgezogen, Längenveränderung - gestrichelt) . . . . .	126

5.20	Steuerungsabhängigkeit von der Aufbaumasse . . . . .	127
5.21	Steuerungsabhängigkeit von der Überfahrtgeschwindigkeit . . . . .	128
5.22	Nutzeroberfläche der Simulationssoftware <b>sensUp</b> . . . . .	130
6.1	Klassisches Viertelfahrzeugmodell bei einer Schwellenüberfahrt . . . . .	132
6.2	Darstellung des in Beispiel 6.4 definierten beschränkten Gebiets . . . . .	135
6.3	Allgemeine Darstellung zweier Körper mit Abstandsfunktion $g(K_i, K_j)$ . . . . .	136
6.4	Darstellung zweier hybrider Systeme . . . . .	140
6.5	Position des Aufbaus (gestrichelt) und des Reifens (durchgezogen) dargestellt über der Zeit . . . . .	155
6.6	Geschwindigkeit des Reifens (durchgezogen) und $\alpha_4$ (gestrichelt) dargestellt über der Zeit	155
6.7	Darstellung der Spezialfälle mit Hilfe zweier möglicher approximierender (gestrichelt und gepunktet) im Vergleich zu tatsächlichen Trajektorie (durchgezogen) . . . . .	166
6.8	Darstellung der Zustandstrajektorie in Zustands- und verallgemeinerten Koordinaten .	178
6.9	Entwicklung der kinetischen (gestrichpunktet), potentiellen (gestrichelt) und der Gesamtenergie (durchgezogen) des Balles . . . . .	178
6.10	Zeitliche Entwicklung der verallgemeinerten Koordinaten eines Viertelfahrzeugs bei Überfahrt eines Schlaglochs . . . . .	179
6.11	Zustandstrajektorie eines Viertelfahrzeugs bei Überfahrt eines Schlaglochs . . . . .	180
6.12	Zeitliche Entwicklung der verallgemeinerten Koordinaten eines Halffahrzeugs bei Überfahrt einer Bodenschwelle . . . . .	181
6.13	Darstellung der Trajektorie des Halffahrzeugmodells . . . . .	181
6.14	Veranschaulichung des Drift-Off-Effekts am Beispiel eines Viertelfahrzeugs für verschiedene Schrittweiten . . . . .	182
7.1	Trajektorie der ungesteuerten (gestrichelt) und der optimierten (durchgezogen) Stufenüberfahrt . . . . .	200
7.2	Darstellung der verallgemeinerten Koordinaten über der Zeit . . . . .	200
7.3	Frequenzgang der ungesteuerten (gestrichelt) und der optimierten (durchgezogen) Stufenüberfahrt . . . . .	201
7.4	Oben: Optimale Steuerung, unten: Vergleich der Zielfunktionsentwicklung bei konstanter (gestrichelt) und optimierter (durchgezogen) Steuerung . . . . .	201
7.5	Entwicklung des Zielfunktionswerts im Laufe der Optimierungsroutine . . . . .	202
7.6	Trajektorie der ungesteuerten (gestrichelt) und optimierten (durchgezogen) Schwellenüberfahrt . . . . .	202
7.7	Ausgewählte Zustände des Halffahrzeugs dargestellt über der Zeit . . . . .	203
7.8	Oben: Optimale Steuerung für Vorder- (durchgezogen) und Hinterrad (gestrichelt), Unten: Vergleich der Zielfunktionsentwicklung bei konstanter (gestrichelt) und optimierter (durchgezogen) Steuerung . . . . .	203
7.9	Entwicklung des Zielfunktionswerts im Laufe der Optimierungsroutine . . . . .	204
7.10	Vergleich der gemittelten Geschwindigkeit mit zugehöriger Beschleunigung mit der ursprünglichen unstetigen Geschwindigkeit . . . . .	209
7.11	Darstellung der Zielfunktion und der Iterationen des Algorithmus . . . . .	211
7.12	Vergleich der Zielfunktion für verschiedene Diskretisierungsschrittweiten dargestellt über $u_2$ für $u_1 = 0$ . . . . .	212

7.13 Vergleich der optimierten Trajektorie (gestrichelt) mit Ungesteuerten (durchgezogen) .	213
7.14 Steuerung und Zielfunktionsentwicklung der Ausgangssteuerung (gestrichelt) und der Steklov-Approximation (durchgezogen) . . . . .	213
7.15 Vergleich des Frequenzgangs des Aufbaus der ungesteuerten (gestrichelt) und optimier- ten Schwellenüberfahrt (durchgezogen) . . . . .	214
7.16 Entwicklung des Zielfunktionswerts dargestellt über den Iterationen . . . . .	214
7.17 Optimierte Trajektorie mit Radbeschleunigung als Zielfunktion . . . . .	215
7.18 Steuerung und Zielfunktionsentwicklung der Ausgangssteuerung (gestrichelt) und der Steklov-Approximation (durchgezogen) mit Radbeschleunigung als Zielfunktion . . . .	215
7.19 Vergleich des Frequenzgangs des Reifens der ungesteuerten (gestrichelt) und optimierten Schwellenüberfahrt . . . . .	216



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Diese Arbeit entwickelte sich aus dem Teilprojekt „Proaktive Fahrwerkregelung mit echtzeitfähigen Algorithmen für parameterabhängige Optimalsteuerungsprobleme“ des vom Bundesministerium für Bildung und Forschung finanzierten Projekts SNiMoRed (Simulation und nichtlineare Modellreduktion), einem Verbundprojekt der Universitäten Kaiserslautern, Halle, der Universität der Bundeswehr München und den Industriepartnern Audi und John Deere. Ziel des Projekts war die Weiterentwicklung der Simulation komplexer Mehrkörpersysteme und die Betrachtung einzelner Systemkomponenten mit Hilfe von Ansätzen aus der Modellreduktion und der Mehrskalungsverfahren. Darauf aufbauend sollte das Potential mathematischer Optimierungs- und Optimalsteuerungsmethoden in der Fahrzeugdynamik untersucht werden. Dabei wurde die Einschränkung des Problems auf die vertikale Fahrzeugdynamik getroffen, d.h. dass lediglich die Hub-, Wank- und Nickbewegungen des Fahrzeugs betrachtet werden. Dies stellt eine im Allgemeinen hinreichend genaue Modellierung des Fahrzeugs dar, weshalb auch ein Großteil der Veröffentlichungen diese Einschränkung verwenden. Eine Hinzunahme weiterer Freiheitsgrade wie die Beschleunigung und das Lenkverhalten liefern hier je nach Fahrsituation noch bessere Ergebnisse.

Ziel des resultierenden Optimierungsproblems ist es, eine Steuerung zu berechnen, bei der ein gewünschtes Komfort-, bzw. Sicherheitskriterium den bestmöglichen Wert einnimmt. Doch selbst für die einfachsten Modelle zeigten erste Berechnungen optimaler Steuerungen schnell, dass die Echtzeitfähigkeit der Lösung des Problems für allgemeine Straßenprofile nur schwer realisierbar ist. Somit musste ein anderer Ansatz gefunden werden, der eine Echtzeitfähigkeit und damit eine Anwendbarkeit in einem realen Versuchsfahrzeug zeigt. Die Literaturrecherche lieferte eine große Anzahl an Ansätzen des Problems mit Hilfe geschlossener Regelkreise, wohingegen die Zahl der Veröffentlichungen zu diesem Thema aus dem Bereich der optimalen Steuerung, d.h. der open-loop Steuerung, vergleichsweise gering ausfiel.

Aus mathematischer Sicht sind die bereits vorgestellten Systeme, wie die Magic-Body-Control von Mercedes, [Weist et al., 2013] oder das BOSE-Ride-System [Parison, 2010] ein höchst interessantes Thema für die Anwendung optimaler Steuerungen, wofür in dieser Arbeit ein Schritt in Richtung der realen Anwendung in diesem Kontext gemacht wird. Neben der Berechnung der Steuerungen wird auch auf die Erkennung und Charakterisierung der Fahrbahnereignisse eingegangen. Der kombinierte Algorithmus aus Erkennung und online-Update wird anhand einer Simulationssoftware getestet und die Echtzeitfähigkeit verifiziert.

Eine Erweiterung der Betrachtung ergab sich durch die Hinzunahme von Kontaktbedingungen in die verwendeten Modelle. Dafür wurden die klassischen Fahrzeugmodelle derart erweitert, dass auch ein kompletter Kontaktverlust zwischen Reifen und Fahrwerk auftreten kann. Dies führte in einem ersten Ansatz auf zusätzliche Komplementaritätsbedingungen, die stets erfüllt sein müssen. Werden zusätzlich noch Stoßgesetze berücksichtigt, müssen Restitutionsgesetze betrachtet werden, welche die Bestimmung von Lösungen weiter erschweren. Ziel der Untersuchungen war eine möglichst geschlossene Formulierung, die eine hohe Allgemeingültigkeit aufweist. Dabei fiel das Augenmerk auf die Verwendung von Riemann-Stieltjes-Integralen, die eine einfache Systemgleichung liefern. Das impulsive Verhalten wird hier im Integrator eines Integrals „versteckt“ und mit Hilfe einer Funktion beschränkter Variation formuliert. Nach einer Analyse, ob diese Modelle für die betrachtete Anwendung geeignet sind, wurde die Hinzunahme einer Steuerung und die daran anschließende Optimierung untersucht. Da die Dynamik und das Zielfunktional i.A. nicht die notwendigen Voraussetzungen für klassische Optimierungsverfahren erfüllen, wurden hier Abstiegsverfahren mit unterschiedlichen Gradientenapproximationen herangezogen.

## 1.2 Beiträge der Arbeit

Im Bereich der echtzeitfähigen Steuerung bietet diese Arbeit eine weiterführende Betrachtung, was mit berechneten optimalen Steuerungen und der Verwendung von echtzeitfähigen Updates möglich ist. Die Betrachtung eines parametrischen Optimalsteuerungsproblems mit der Möglichkeit zur Anpassung der Steuerung für vorausliegende Fahrbahnereignisse wurde in diesem Zusammenhang noch nicht durchgeführt. Da, wie bereits erwähnt, eine generelle Echtzeitfähigkeit nicht zu erwarten ist und bestehende Regelalgorithmen stochastische Straßenanregungen bereits sehr effizient ausgleichen können, werden lediglich solche Ereignisse betrachtet, die einen punktuellen Einfluss auf den empfundenen Komfort und die Sicherheit besitzen. Solche Ereignisse sind beispielsweise die Überfahrt von Schlaglöchern oder Dehnungsfugen von Brücken. Die mathematische Erkennung der Ereignisse und deren Charakterisierung wurde so auch noch nirgends durchgeführt.

Die Kombination, eine impulsive Systemdynamik mittels Riemann-Stieltjes-Integralen zu formulieren und dies als Grundlage für ein Optimalsteuerungsproblem zu verwenden, ist in dieser Form noch nicht untersucht worden. Die gezeigten Verfahren weisen trotz der geringen Regularität des Problems vielversprechende Resultate auf und bieten die Grundlage weiterführende Untersuchungen durchzuführen.

## 1.3 Aufbau

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Hauptteile. Der erste Teil behandelt die optimale Steuerung vertikaler Fahrzeugmodelle im Hinblick auf den Entwurf echtzeitfähiger Algorithmen. Dafür wird in Kapitel 2 ein Überblick über bestehende Algorithmen, Modelle und Regelungssysteme gegeben. Anschließend befasst sich Kapitel 3 mit der Bereitstellung der theoretischen Grundlagen der optimalen Steuerung, deren Transformations- und Diskretisierungsmethoden, sowie der parametrischen Sensitivitätsanalyse für die Echtzeitsteuerung. In Kapitel 4 wird darauf aufbauend die optimale Steuerung vertikaler Fahrzeugmodelle für unterschiedliche Systemarchitekturen und verwendeten Fahrzeug- und Dämpfermodellen diskutiert. Durch Einführung eines parameterabhängigen Optimalsteuerungsproblems in Abschnitt 5 wird die Echtzeitsteuerung für singuläre Ereignisse erläutert, sowie die Ereigniserkennung mit Hilfe einer Support-Vektor-Maschine vorgestellt.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Modellbildung und Optimierung impulsiver Systeme in der Fahrzeugdynamik. Dafür werden in Kapitel 6 die theoretischen Hilfsmittel bereitgestellt und damit die impulsive Systemgleichung formuliert. Des Weiteren werden Quadraturformeln für die numerische Berechnung zur Verfügung gestellt und ein Optimierungsproblem zur Lösung der Kontaktprobleme erläutert. Im Kapitel 7 wird das Problem um eine Steuerung erweitert und numerische Verfahren gezeigt, mit deren Hilfe impulsive Systeme mit Steuerung optimiert werden können.





# Kapitel 2

## Vertikale Fahrwerkregelung

Die Regelung der vertikalen Fahrzeugdynamik beschäftigt sich mit der Entwicklung von Verfahren, das vertikale Fahrverhalten eines Fahrzeugs zu verbessern. Dabei werden gewisse Komfort- und Sicherheitskriterien betrachtet, die mit Hilfe geeigneter Regelungsverfahren möglichst optimal eingehalten werden. So sollen beispielsweise die auf die Insassen wirkenden Beschleunigungen minimiert, die Radlastschwankungen nicht zu groß werden und der benötigte Federweg im Rahmen der baubedingten Grenzen bleiben. Passive Dämpfungssysteme werden dafür vorab einmalig für einen Kompromiss aller Faktoren ausgelegt, d.h. es werden die zu verbauenden Dämpfer und Federelemente bestimmt, die ein gewünschtes Maß an Komfort und Handling bieten. Dass diese beiden Ziele nicht gleichzeitig optimal erfüllt werden können, wird im Laufe dieser Arbeit noch erläutert. Durch die feste Wahl der Komponenten ist eine nachträgliche Anpassung lediglich durch einen Bauteilwechsel möglich. Um diesen Nachteil zu umgehen, existieren bei geregelten Fahrwerken für diese Aufgabe Aktuatoren, die durch externe Steuersignale ihre Eigenschaften verändern, wodurch die Fahreigenschaften des Fahrzeugs flexibel verändert werden können.

### 2.1 Aktiv vs. Semiaktiv

Die Aktoren lassen sich dabei in *aktiv* und *semiaktiv* unterteilen. Bei der Regelung eines Fahrwerks gilt es demnach, zuerst die Frage nach dem zu verwendenden Aktuator zu beantworten. Das *aktive* Fahrwerk verfügt über die Fähigkeit zustandsunabhängig Kräfte in das Fahrwerk einzubringen. Dies kann beispielsweise ein Hydraulikzylinder oder ein Linearmotor sein, der im Fahrwerk verbaut ist. Bei der *semiaktiven Fahrwerksregelung* kann hingegen lediglich die Dämpferkennlinie variiert und damit indirekt die vom verbauten Dämpfer wirkende Kraft beeinflusst werden. Da dieser nur bei einer vorherrschenden Relativgeschwindigkeit seiner beiden Befestigungspunkte auf das System wirken kann, besteht hier keine Möglichkeit, den Aufbau zum Beispiel aktiv anzuheben.

Selbstverständlich limitiert die Verwendung eines semiaktiven Fahrwerks die mögliche Einflussnahme. Jedoch benötigt ein aktives Fahrwerk einen Aktuator, der i.A. deutlich mehr Energie braucht, da beispielsweise hydraulische Zylinder zur aktiven Verstellung genutzt werden, welche wiederum eine Hydraulikpumpe voraussetzen. Ein semiaktives Fahrwerk kann unter Umständen durch den Tausch eines passiven Dämpferelements durch einen Magneto- oder Elektrorheologischen Dämpfer und den Einbau eines zugehörigen Steuergeräts realisiert werden. Es wird lediglich der Anschluss an die Versorgungsspannung des Fahrzeugs benötigt. Welches System letztendlich bevorzugt wird, hängt weitestgehend vom gewünschten Einsatzgebiet ab. Im Folgenden werden bis auf in Kapitel 4 semiaktive

Systeme betrachtet, jedoch beschränkt sich die Theorie und Anwendung nicht auf diese hier vorgenommene Einschränkung. Ein weitergehender Überblick über die unterschiedlichen Dämpfersysteme kann in [Sharp und Crolla, 1987] gefunden werden.

## 2.2 Regelungsstrategien - ein Überblick

Es existieren diverse Ansätze, die sich mit der Regelung der Vertikaldynamik von Fahrzeugen beschäftigen. Um einen Überblick zu schaffen, werden hier einige davon kurz erläutert. Dass diese Liste nicht vollständig ist, erklärt sich durch die unüberschaubare Vielfalt an Veröffentlichungen zu diesem Thema. Deshalb werden hier nur grundlegende Regelstrategien vorgestellt. Siehe dazu auch [Tseng und Hedrick, 1994, Sharp und Peng, 2011, Esmailzadeh und Fahimi, 1997, Elbeheiry et al., 1996]

**Skyhook-Regler:** Ein sehr einfaches Regelungskonzept für semiaktive Fahrwerke, das häufig Verwendung findet und als Referenz herangezogen wird, ist der so genannte *Skyhook-Regler*, welcher erstmalig 1974 in [Karnopp et al., 1974] erwähnt wird. Dabei wird eine virtuelle Verbindung durch einen Dämpfer zwischen Aufbau und einem fixierten Punkt im „Himmel“ angenommen. Da dies ein nicht realisierbares System darstellt, wird die Regelung des Fahrwerkdämpfers nun so gewählt, dass das Systemverhalten möglichst dem idealen Skyhook-Verhalten entspricht. Die daraus resultierende Regelungsstrategie erweist sich als extrem einfach, vgl. [Savaresi et al., 2010, Gopala Rao und Narayanan, 2009].

$$c_{sky} = \begin{cases} c_{min} & \text{wenn } \dot{z}_b (\dot{z}_b - \dot{z}_w) \leq 0, \\ c_{max} & \text{wenn } \dot{z}_b (\dot{z}_b - \dot{z}_w) > 0. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $\dot{z}_b$  die vertikale Geschwindigkeit des Aufbaus (body),  $\dot{z}_w$  die des Rades (wheel) und  $c_{sky}$  den einzustellenden Dämpferkennwert. Dieser so genannte *On-Off-Skyhook-Regler* betrachtet lediglich das Vorzeichen des Produkts zwischen Aufbaugeschwindigkeit und Einfeldergeschwindigkeit und stellt den Dämpfer auf seinen maximalen bzw. minimalen Wert. Obwohl die Regelung eine so simple Gestalt aufweist wird damit doch eine vergleichsweise gute Komfortverbesserung erreicht [Simon, 2001]. Es existieren noch Varianten dieses Reglers, wie beispielsweise eine lineare Regelung, die kein Bang-Bang-Verhalten aufweist, sowie beschleunigungs- und leistungsorientierte Varianten, vgl. [Savaresi et al., 2010, Savaresi, 2005, Morselli und Zanasi, 2008].

**Groundhook:** Das Pendant zur Skyhook-Regelung ist der *Groundhook-Regler*, der einem analogen Ansatz zur Minimierung der dynamischen Radlastschwankungen folgt. Wie der Name bereits andeutet wird hier ein virtueller Dämpfer zwischen Reifen und Straße eingefügt. Die daraus resultierende Regelstruktur erweist sich als ähnlich einfach wie die des On-Off-Skyhook Regelgesetzes, siehe [Savaresi et al., 2010].

$$c_{ground} = \begin{cases} c_{min} & \text{wenn } -\dot{z}_w (\dot{z}_b - \dot{z}_w) \leq 0, \\ c_{max} & \text{wenn } -\dot{z}_w (\dot{z}_b - \dot{z}_w) > 0. \end{cases}$$

Es können auch hybride Regelungsstrategien entwickelt werden, die über einen variablen Parameter zwischen Sky- und Groundhook-Regelung gewichten und so einen Kompromiss aus Komfort und Handling ergeben.

**Linear-Quadratische Regelung:** Der Ansatz der linear-quadratischen Regelung, beispielsweise in [Hac und Youn, 1992] zu finden, basiert auf einem Optimalsteuerungsproblem, bei dem eine lineare Systemdynamik mit einem quadratischen Zielfunktional gekoppelt wird. Mit Hilfe der resultierenden notwendigen Bedingungen, siehe [Gerds, 2012], lässt sich damit ein Regler-Gesetz herleiten, das in Form eines Zustandsfeedbacks implementiert werden kann. In [Hrovat, 1997] findet sich ein Überblick über die Anwendbarkeit des LQ-Reglers in der vertikalen Fahrzeugdynamik. Aufgrund der stochastischen Straßenanregung wird hier häufig der Erwartungswert des Zielfunktional herangezogen, was einem Linearen-Gauss-Regler (*engl.: linear-gaussian-control*), vgl. [ElMadany und Abduljabbar, 1999] entspricht.

**$H_\infty$ -Regler:** Auch dem so genannten  $H_\infty$ -Regler liegt ein Optimierungsproblem zu Grunde. Das betrachtete Zielfunktional basiert jedoch anstatt auf der  $L_2$ -Norm auf der  $H_\infty$ -Norm. Dadurch wird ein gegen Fehler sehr robustes Regelverhalten erreicht, da der Maximalwert des Amplitudengangs der Übertragungsfunktion minimiert wird. Meist wird hier jedoch aufgrund der Komplexität des Optimierungsproblems anstelle des Minimums des maximalen Amplitudengangs lediglich ein Regler gesucht, der den Maximalwert unter eine vorher definierte Schranke bringt, vgl. [Iwasaki und Skelton, 1994, Geering und Roduner, 1999]. In [Rossi und Lucente, 2004] und [Sammier et al., 2003] wird die  $H_\infty$ -Regelung für ein Viertelfahrzeug im Detail erläutert und beispielsweise mit dem Skyhook-Regler verglichen.

## 2.3 Fahrbahn-Preview

Bereits vor über 50 Jahren haben sich Wissenschaftler über eine Verbesserung der eben vorgestellten Methoden Gedanken gemacht. Wie kann dem Regler mehr Information zugespielt werden, damit er ein besseres Verhalten aufweist. Der Begriff des *Fahrbahn-Preview*s wurde entwickelt. Um die Terminologie Preview, also Vorausschau, in der Fahrzeugregelung zu verdeutlichen wird hier ein Beispiel aus [Bender, 1968] rekapituliert .

*“Let us imagine, for example, that an opaque curtain were held across the road at a given distance in front of an automobile moving at constant speed. As this distance is increased, the driver is able to steer the vehicle with increasing accuracy; however, when the curtain is very far in front of the car (say a mile or more) the driver would neither be able to follow the road perfectly nor would he find preview information on great distances to be useful.”*

Durch dieses Beispiel wird deutlich wie stark Informationen über die Zukunft benötigt werden, um ein Fahrzeug zu bewegen. Man stelle sich vor: Der Vorhang befindet sich sehr dicht vor dem Fahrzeug. Eine sichere Fahrt wäre damit nicht mehr möglich. Jedoch steigt der Nutzen nicht bis ins Unendliche, wenn der Vorausschauhorizont immer weiter wächst, da sehr weit entfernt liegende Informationen noch keinen bzw. einen sehr geringen Einfluss auf die aktuelle Situation haben.

Eben dieses Konzept wird bei der Preview-Steuerung in der vertikalen Fahrzeugdynamik ausgenutzt. Die zusätzliche Information, die der Regler dabei erhält, ist die Information über das Oberflächenprofil eines vorausliegenden Fahrbahnsegments, mit deren Hilfe ein verbessertes Fahrverhalten erzielt werden soll. Dabei ist die Idee, Informationen über die zukünftige Fahrbahnoberfläche zu nutzen, keinesfalls neu. Bereits in den 60er Jahren des 20. Jahrhunderts veröffentlichte [Bender, 1968] ein Paper über

die Verwendung von Preview-Informationen mit endlichem und unendlichem Vorausschauhorizont. In [Tomizuka, 1975, Tomizuka, 1976] wurden die Überlegungen weitergeführt und die zu dieser Zeit wichtige Frage gestellt:

*„How to obtain preview information?“*

Ein erster Ansatz der Datenerfassung lieferte die wheelbased- oder *zero-preview*-Methode. Dabei werden die Beschleunigungen und Aufhängungsverschiebungen der Vorderachse herangezogen, um für die Hinterachse eine Regelung zu bestimmen, die die gewünschten Verbesserungen der Fahreigenschaften liefert. Dazu wird angenommen, dass die hinteren Räder die identischen Fahrbahnunregelmäßigkeiten überfahren wie die jeweiligen Vorderräder. Diese Regelungsstrategie kann beispielsweise bei Lastkraftwagen angewendet werden, um die dynamischen Lasten der Ladung zu verringern, vgl. [Huisman et al., 1993, Huisman, 1994, Louam et al., 1988]. Der Nachteil dieser Regelung besteht hauptsächlich darin, dass an der Vorderachse keine Information genutzt werden kann, um den Fahrkomfort und die Fahr-sicherheit zu verbessern, womit der erreichbare Effekt deutlich verringert wird.

Dies wird beim so genannten *Look-Ahead-Preview* umgangen, denn es wird angenommen, dass die Oberfläche eines vorausliegenden Fahrbahnsegments bekannt ist und zur Regelung herangezogen werden kann. Karnopp veröffentlichte 1968 eine Arbeit, wie Preview-Information bei langen, aktiv gefe-derten Zügen generiert werden kann [Karnopp, 1968]. Dazu erfassen die ersten Wagons die Unebenheiten anhand von Sensoren im Fahrwerk und geben diese Information an die folgenden weiter. Der letzte Wagon hat damit einen Vorausschauhorizont der Kolonnenlänge. Einen Vergleich zwischen wheelbased- und Look-Ahead-Preview-Strategie kann in [Barton-Zeipert, 2014] und [Schindler, 2009] gefunden werden.

Mit den Entwicklungen der jüngeren Sensortechnologie kann das Problem der Oberflächenerfassung als gelöst betrachtet werden. Natürlich muss noch Aufwand zur Aufbereitung der Daten betrieben werden, aber grundsätzlich gibt es diverse Messmethoden, die vorausliegende Straßenoberfläche zu erfassen. [Barton-Zeipert, 2014] und [Schindler, 2009] geben jeweils einen Überblick über die Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten unterschiedlicher Sensorik und ihrer Motivation für die Wahl der jeweils verwendeten Messsysteme in Bezug auf Genauigkeit, Abtastrate sowie Größe und Gewicht. Sensorsysteme, die bereits im Fahrzeug zum Einsatz kommen, sind beispielsweise Ultraschallsensoren zur Distanzmessung bei Einparkhilfen, Stereokameras, die beim Magic Body Control System von Mercedes Benz bereits eine Oberflächeninformation liefern [Weist et al., 2013], Photonic-Mixing-Device (PMD) Kameras oder LIDAR-Sensoren (engl. light detection and ranging). Auf welches System zurückgegriffen wird hängt stark von den benötigten Daten und dem Einsatzgebiet ab und soll hier nicht weiter ausgeführt werden.

In dieser Arbeit wird angenommen, dass ein Messsystem vorhanden ist, das mit einer definierten Genauigkeit, Auflösung und Abtastrate Entfernungsinformationen liefert, die zur Erkennung singulärer Ereignisse verwendet werden können.

## 2.4 Preview-Regelungsansätze

Es existiert eine fast unüberschaubare Zahl an Veröffentlichungen zum Thema der Preview-Steuerung, weshalb eine vollständige Auflistung aller Themengebiete fast nicht möglich ist. Zur Darstellung des

aktuellen Stands der Technik auf diesem Gebiet werden hier einige Konzepte kurz vorgestellt, die häufig als Referenz herangezogen werden und welche bereits in der Praxis Verwendung finden. Für Preview-Regelungen sei auf den ausführlichen Überblick in [Schindler, 2009] und [Marzbanrad et al., 2002] verwiesen. Dort werden die Entwicklungen verschiedener Ansätze verglichen und auf ihre Einsatzfähigkeit bewertet.

**Optimalregler-Ansatz:** Diese Methodik basiert auf dem bereits kurz erläuterten linear-quadratischen Reglerprinzip. Die Bestimmung des optimalen Feedbacks kann derart erweitert werden, so dass auch Preview-Informationen einbezogen werden können. So stehen sowohl deterministische (tatsächlich gemessene) und stochastische (aus den gemessenen Daten angenommene) Informationen der vorausliegenden Straße zur Verfügung. In [Tomizuka, 1975] wird beispielsweise die Fahrbahn außerhalb des bekannten Preview-Bereichs durch weißes Rauschen modelliert und in [Hac, 1992] werden sowohl die Straße als auch die Messdaten durch Rauschen beeinflusst. Da keine deterministischen Daten vorhanden sind, ist es lediglich möglich, den Erwartungswert der gewählten Kostenfunktion zu minimieren. Es wird jedoch gezeigt, dass sowohl für einen vollständig bekannten Vorausschauhorizont, als auch bei teilweise stochastischen Charakterisierungen mit Hilfe von Techniken der Variationsrechnung ein Feedback-Gesetz hergeleitet werden kann, siehe auch [Huisman et al., 1993, Huisman, 1994]. Laut [Schindler, 2009] liegen die großen Probleme dieses Ansatzes jedoch in der fehlenden Möglichkeit, nichtlineare Dynamiken des Fahrzeugs zu betrachten und Beschränkungen an den Federweg einzubeziehen. In [van der Aa et al., 1997] wird erstmals eine auf einem nichtlinearen Optimalsteuerungsproblem mit Zustandsbeschränkungen basierende Lösung mit Hilfe eines SQP-Verfahrens bestimmt. Obwohl die Rechenzeiten nicht für einen direkten Einsatz im Fahrzeug geeignet sind, bilden sie dennoch den Ausgangspunkt, der im Verlauf dieser Arbeit verwendeten Techniken.

**Model-Prädiktive-Regelung:** Auch mit Hilfe Model-Prädiktiver-Regelung (MPC), siehe [Grüne und Pannek, 2011], können Algorithmen zur Regelung der Fahrdynamik entwickelt werden. Der MPC-Ansatz basiert auf der wiederholten Berechnung optimaler Steuerungen für ein Teilstück der vorausliegenden Strecke der Horizontlänge  $T_h$  und einer festen Steuerfrequenz  $f$  mit Hilfe eines mathematischen Ersatzmodells. Das Optimierungsergebnis besteht aus  $M = T_h \cdot f$  Steuersignalen, von denen ein Teil  $m < M$  am realen System angewendet wird. Dies führt je nach Modellgüte und Qualität der Vorausschau zu einer mehr oder weniger exakten Verfolgung der berechneten Trajektorie. Anschließend wird der Vorgang mit dem aktuellen Zustand als Startschätzung wiederholt, wodurch in jeder Iteration ein Teilstück der Prozesssteuerung bestimmt wird und der Algorithmus dadurch in der Zeit voranschreitet. Der Vorteil dieser Regelungsstrategie ist einerseits, dass die zu lösenden Optimalsteuerungsprobleme nicht den gesamten Zeithorizont abdecken müssen, wodurch die Berechnungszeit deutlich reduziert wird. Andererseits wird durch die zugrundeliegende Schleifenstruktur während des Prozesses wiederholt der tatsächliche Zustand in die Berechnung aufgenommen, wodurch das Verfahren robuster gegen Modellfehler ist, als die open-loop Anwendung einer vorausberechneten Steuerung.

In [Gordon und Sharp, 1998, Ahmed und Svaricek, 2013a, Ahmed und Svaricek, 2013b, Witters und Swevers, 2010] wird das Prinzip der MPC Steuerung für die vertikale Fahrzeugdynamik verwendet. Dabei wird anstelle des Fahrbahnprofils dessen Beschreibung im Frequenzraum herangezogen. Basierend auf [International Organization for Standardization, 1995] werden die Straßenoberflächen bzgl. ihres Amplitudengangs klassifiziert und für die unterschiedlichen Klassen sowie Ereignisse, beispielsweise in Form von Schwellen, optimale Dämpferparameter bestimmt. Anhand der Oberflächeninformationen der vorausliegenden Straße kann diese nominelle Feedforward Steuerung dann mit Hilfe einer Lookup

Tabelle während der Fahrt bestimmt werden. In [Cho et al., 2005] wird ein aktives Halffahrzeug mit einem MPC-Ansatz geregelt.

**Preview-Regelung in der Fahrzeugdynamik:** Regelungstechnische Ansätze, die nicht mehr mit einem einzelnen Regelungsbegriff zu beschreiben sind, finden sich beispielsweise in [Foag und Grübel, 1987, Foag, 1990, Schindler, 2009]. Dabei werden verschiedene Regelungskonzepte kombiniert und in mehr oder weniger kaskadierter Form verwendet. In den genannten Arbeiten wird ebenfalls auf die Gewinnung der Preview-Daten und deren Speicherung und Aufbereitung eingegangen. In [Schindler, 2009] wird erstmals eine konkrete Realisierung des gesamten Regelsystems in einem Fahrzeug vorgestellt. Dort wird auch auf die Arbeit [van der Aa et al., 1997] mit der Bemerkung verwiesen, dass der Ansatz, die Steuerung durch Lösung eines restringierten Optimierungsproblems zu bestimmen, wünschenswert ist. Jedoch wird dort auch bemerkt, dass die Berechnung zu zeitintensiv ist, um eine Echtzeitfähigkeit zu erreichen. An diesem Punkt setzt die in Kapitel 5 vorgestellte Methodik an und liefert, wenn auch nicht für allgemeine Straßenprofile, ein echtzeitfähiges Steuerungskonzept.

# Kapitel 3

## Theoretischer Hintergrund

### 3.1 Vertikale Fahrzeugmodelle als Mehrkörpersystem

In diesem Kapitel werden Fahrzeugmodelle eingeführt, die in der Regelung vertikaler Fahrzeugdynamik Anwendung finden und auch in dieser Arbeit verwendet werden. Diese Modelle werden unter anderem auch in [Mitschke und Wallentowitz, 2004] und [Rajamani, 2006] betrachtet. Die Grundlagen der Mehrkörpersysteme und deren Dynamik werden im Folgenden vorausgesetzt. Für eine genauere Einführung sei auf [Woernle, 2011, Shabana, 2005, Schiehlen, 2012, Pfeiffer, 2010] verwiesen.

#### 3.1.1 Einführung in die Mehrkörperdynamik

Mehrkörpersysteme beschreiben, wie der Name bereits verrät, Systeme, die aus mehreren Körpern bestehen, welche über verschiedenartige Bindungen untereinander interagieren. Ein Körper wird in dieser Arbeit immer als *Starrkörper* angenommen, d.h. dass er keine elastischen oder plastischen Verformungen erfährt. Wird diese Einschränkung nicht durchgeführt, führt dies im Allgemeinen auf ein System aus partiellen Differentialgleichungen, die die internen Effekte eines jeden Einzelkörpers beschreiben.

Aus der Struktur des Mehrkörpersystems lässt sich mit Hilfe des so genannten *Freischneidens* ein Formalismus zur Gewinnung der Bewegungsgleichungen herleiten. Dieser basiert auf dem dritten Newtonschen Axiom, dass die Änderung des Impulses gleich der Summe der angreifenden Kräfte ist (*Impulssatz*) und dem *Drallsatz*, der besagt, dass die Änderung des Drehimpulses gleich der Summe der angreifenden Momente ist. Durch das Freischneiden der Massen werden alle angreifenden Kräfte und Momente formal sichtbar gemacht, wodurch sich für jeden Teilkörper ein System aus Bewegungsgleichungen auf Basis der eben erwähnten Axiome herleiten lässt. Die angreifenden Kräfte hängen im Allgemeinen von den jeweiligen aktuellen Zuständen aller Teilkörper ab, so dass sich ein großes Gleichungssystem ergibt. Diese Methodik wird oft auch als synthetische Methode bezeichnet, da sich das Gleichungssystem aus den Axiomen der einzelnen Teilkörper zusammensetzt. Aufgrund von Zwangsbedingungen stellt dieses System keine minimale Darstellung des Mehrkörpersystems dar. So muss in einem weiteren Schritt ein System mit verallgemeinerten Koordinaten gefunden werden, welches nicht weiter reduziert werden kann. Dafür wird das Prinzip von D'Alembert-Lagrange verwendet mit dessen Hilfe sich die Bewegungsgleichungen herleiten lassen. Dieser Schritt stellt in komplexen Mehrkörpersystemen häufig einen nicht zu vernachlässigenden Aufwand dar.

Alternativ können die Bewegungsgleichungen auch mit Hilfe der Lagrange-Gleichung zweiter Art hergeleitet werden. Dabei wird die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energie  $U$  des Gesamtsystems mit Hilfe von verallgemeinerten Koordinaten  $q \in \mathbb{R}^N$  dargestellt. Diese gilt es zuerst zu bestimmen, weshalb dieser Weg als analytische Methode bezeichnet wird, da das System zuerst genau betrachtet werden muss, um einen sinnvollen Satz an verallgemeinerten Koordinaten zu erhalten. Mit Hilfe der Lagrange-Gleichung zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

können daraus direkt die Bewegungsgleichungen des Systems bestimmt werden.

Für kleinere Systeme ist es häufig einfacher den analytischen Weg einzuschlagen. Jedoch erweisen sich beide Wege für große Systeme als von Hand schwer durchführbar, weshalb auf eine rechnergestützte Herleitung der Bewegungsgleichungen zurückgegriffen werden sollte. Dafür können beispielsweise Softwarepakete wie Simpack [Rulka und Eichberger, 2002] oder Modelica [Otter et al., 2003] Verwendung finden. Dort müssen die einzelnen Komponenten erstellt und die Beziehungen untereinander definiert werden. Die Bewegungsgleichungen werden anschließend durch das Programm automatisch bestimmt.

Unabhängig vom gewählten Verfahren erhält man im allgemeinen ein Differentialgleichungssystem in folgender Gestalt:

$$M(q)\ddot{q} = b(q, \dot{q}) + k(q),$$

wobei  $M(q)$  die möglicherweise zustandsabhängige Massenmatrix des Systems darstellt.  $b(q, \dot{q})$  stellt die Bindungskräfte dar und  $k(q)$  die angreifenden Volumenkräfte, wie beispielsweise die Gravitationskraft. Hier wurde angenommen, dass keine weiteren externen Kräfte wirken und eine Koordinatendarstellung in Minimalkoordinaten vorgenommen wurde. Es können zusätzlich noch algebraische Gleichungen auftreten, die in dieser Arbeit jedoch nicht betrachtet werden.

### 3.1.2 Elemente in der vertikalen Fahrzeugdynamik

Für die vertikale Fahrzeugdynamik sind folgende grundlegende Elemente wichtig, aus denen ein Großteil der üblichen Modelle zusammengesetzt ist.

Als Erstes spielt das *Masseelement* eine zentrale Rolle. Es stellt das Ersatzmodell jeglicher beweglicher Massen eines Systems dar. Dabei wird es meist als isolierter Punkt ohne räumliche Ausdehnung jedoch mit der Raumdimension entsprechenden Anzahl an Zuständen modelliert. In einem dreidimensionalen Raum besitzt ein Masseelement demnach sechs Zustandsgrößen, namentlich seine Position in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und drei voneinander unabhängige Winkel, die die Lage im Raum beschreiben. Die in dieser Arbeit betrachteten Modelle bestehen grundlegend aus zwei verschiedenen Masseelementen, nämlich der Aufbaumasse und den Radmassen. Bei den in Kapitel 3.1.6 vorgestellten Modellen treten noch detailliertere Unterteilungen der Massen auf.

Der Zustand eines Massepunkts in der Fahrzeugdynamik wird mit Hilfe kartesischer Koordinaten für dessen räumliche Position und der *Gier-Nick-Roll*-Konvention zur eindeutigen Definition der Orientierung beschrieben, die wiederum in der DIN-ISO-Norm 8855 [DIN, 2013] erläutert wird. Die Winkelkonvention bezeichnet eine spezielle Wahl von Euler-Winkeln, bei denen zuerst um die  $z$ -Achse anschließend um die resultierende  $y$ -Achse und zuletzt um die mitgedrehte  $x$ -Achse rotiert wird.



Ein Masselement besitzt, wie der Name bereits verrät, eine träge Masse  $m$ , sowie im mehrdimensionalen Fall Trägheitselemente um die jeweiligen Drehachsen, welche mit Hilfe des Trägheitstensors  $T$  beschrieben werden. Je nach gewähltem körperfesten Koordinatensystem hat der Trägheitstensor unterschiedliche Gestalt. Für die hier betrachteten Beispiele sei angenommen, dass das körperfeste System ein Hauptachsensystem ist und der Trägheitstensor dadurch Diagonalgestalt hat:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Um Kräfte zwischen einzelnen Masselementen modellieren zu können, werden in der Mehrkörpersimulation verschiedene *Kraftelemente* verwendet. Ein allgemeines Kraftelement, wie es schematisch in Abbildung 3.1 dargestellt ist, stellt ein Ersatzelement eines aktiv Kraft in das System leitenden Bauteils, beispielsweise eines Hydraulikzylinders, dar. Hier kann die angreifende Kraft extern vorgegeben werden.



Abbildung 3.1: Schematische Darstellung eines allgemeinen Kraftelements

Das *Federelement*, auch *elastisches Kraftelement* genannt, ist das zweite notwendige Bauteil aller vertikalen Fahrzeugmodelle. Es stellt das idealisierte Verhalten einer Feder dar. Dabei ist es in erster Linie irrelevant, ob es sich im realen Modell um eine Spiralfeder, Blattfeder oder Torsionsfeder handelt.

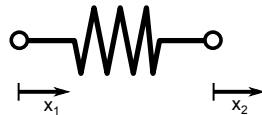


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung eines Federelements

Die Kraft, die ein Federelement ausübt, lässt sich allgemein durch

$$F_{Feder} = f_F(x_1 - x_2)$$

beschreiben, wobei  $x_1$  und  $x_2$  hier die Position des linken und rechten Aufhängepunkts der Feder darstellen. Die Funktion  $f_F$  entspricht dabei der Abbildung der Federsteifigkeit. Diese kann linear, progressiv oder degressiv sein, vgl. [Grote und Feldhusen, 2014], wobei auch Knicke der Federkennlinie bei speziellen Federn möglich sind. In Abbildung 3.3 sind verschiedene Federkennlinien dargestellt. Die in dieser Arbeit verwendeten Federn werden als linear angenommen, was einer guten Approximation vieler Fahrzeugfedern entspricht, solange sich der Federweg nicht dem Anschlag nähert. Dort steigt die Federkennlinie stark progressiv an und geht, wenn sich die Dehnung oder Einfederung dem Anschlagpunkt nähert, gegen unendlich.

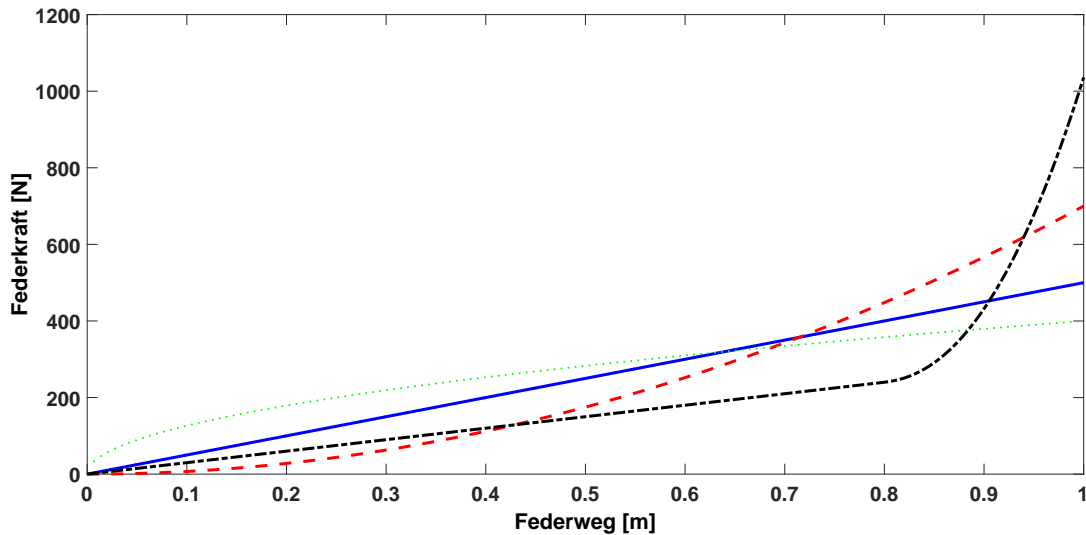


Abbildung 3.3: Darstellung verschiedener Federkennlinien: linear (durchgezogen), progressiv (gestrichelt), degressiv (gepunktet), approximativ linear (gestrichpunktet)

Als letztes wird das *Dämpferelement* eine zentrale Rolle in der zukünftigen Betrachtung einnehmen. In Abbildung 3.4 ist das entsprechende Symbol eines Strukturschaubilds skizziert. Ähnlich wie das Federelement existieren für verschiedene Dämpfertypen auch unterschiedliche funktionale Zusammenhänge, die jedoch allgemein dargestellt werden können durch

$$F_{Dämpfer} = f_D(\dot{x}_1 - \dot{x}_2).$$

Grundsätzlich bewirkt ein Dämpfer stets eine Kraft, die der vorherrschenden Bewegung entgegen gerichtet ist und diese somit hemmt. So klingt die Amplitude eines idealen Schwingsystems bestehend aus einer Masse, einer Feder und einem Dämpfer nur ab, wenn die Funktion  $f_D \neq 0$  ist. Im Kapitel 4.2 werden verschiedene Dämpfermodelle vorgestellt und beschrieben.



Abbildung 3.4: Schematische Darstellung eines Dämpferelements

Die vier vorgestellten Elemente stellen selbstverständlich nicht alle Möglichkeiten dar, die die Modellierung eines Mehrkörpersystems beinhalten kann. So können in komplizierten Modellen auch diverse Lagerungen, beispielsweise bei detaillierten Aufhängungsmodellen oder der Betrachtung eines Fahrzeugs mit Anhänger eine Rolle spielen. Derartige Elemente werden jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht benötigt.

### 3.1.3 Das Viertelfahrzeugmodell

Das in der Literatur am häufigsten vorzufindende Modell ist das Viertelfahrzeug, siehe [Hac, 1992, El-Madany und Abduljabbar, 1999, Rajamani, 2006]. Es hat aufgrund seines einfachen Aufbaus und der daraus resultierenden geringen Anzahl an Freiheitsgraden den Vorteil, dass viele Regelungs- und Steueralgorithmien ohne zusätzliche Vereinfachung angewandt werden können. Einen weiteren Vorteil stellt

natürlich auch die Möglichkeit, dass sich die Ergebnisse an einem einfach konstruierten Versuchsstand verifiziert lassen, dar.

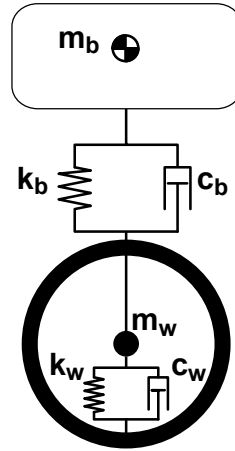


Abbildung 3.5: Schematischer Aufbau des Viertelfahrzeugmodells

Das Modell spiegelt die Dynamik einer einzelnen Radaufhängung, also wie der Name schon sagt eines Viertels des Fahrzeugs, wider. Es basiert auf der Annahme, dass sowohl der Reifen als auch der Aufbau durch je eine Punktmasse approximiert werden, die mittels Federn und Dämpfern miteinander verbunden sind. Beim klassischen Viertelfahrzeug wird diese Verbindung jeweils durch eine Parallelschaltung einer Feder und eines Dämpfers realisiert, siehe Abbildung 3.5. Unter Verwendung der in Kapitel 3.1.1 erwähnten Techniken kann folgendes Differentialgleichungssystem hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} m_b \ddot{z}_b &= F_{Feder,b} + F_{Dämpfer,b} \\ m_w \ddot{z}_w &= -F_{Feder,b} - F_{Dämpfer,b} + F_{Feder,w} + F_{Dämpfer,w}. \end{aligned}$$

Die Indizes  $b$  (body) und  $w$  (wheel) bezeichnen die Aufbau-Feder/-Dämpfer und die Rad-Feder/-Dämpfer. Wird angenommen, dass sowohl Feder als auch Dämpfer eine lineare Charakteristik aufweisen, löst sich das System folgendermaßen auf:

$$m_b \ddot{z}_b = k_b(z_w - z_b) + c_b(\dot{z}_w - \dot{z}_b), \quad (3.1a)$$

$$m_w \ddot{z}_w = -k_b(z_w - z_b) - c_b(\dot{z}_w - \dot{z}_b) + k_w(z_\rho - z_w) + c_w(\dot{z}_\rho - \dot{z}_w). \quad (3.1b)$$

Hier bezeichne  $m_b$  die Masse des Aufbaus,  $m_w$  die des Reifens  $k_b$  und  $k_w$  die jeweiligen Federkonstanten,  $c_b$  und  $c_w$  die Dämpferkonstanten und  $z_b$ ,  $z_w$  und  $z_\rho$  die vertikalen Positionen des Aufbaus, Reifens und der Straße. Mit  $\dot{z}_\square$  bzw.  $\ddot{z}_\square$  sind die jeweiligen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bezeichnet. Der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten lautet hier  $q = [z_b, z_w]$  und die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q} = [\dot{z}_b, \dot{z}_w]$ .

Das Differentialgleichungsmodell (3.1a)-(3.1b) wurde normalisiert, sodass die äußeren Kräfte, also in diesem Fall die statischen Gewichtskräfte nicht explizit auftreten. Der Nullpunkt wurde derart verschoben, dass er die statische Einfederung in Ruhelage widerspiegelt. Dadurch vereinfacht sich das Modell einerseits durch das Wegfallen eines zusätzlichen Terms in der rechten Seite und andererseits ist es einfacher, einen nicht schwingenden Anfangspunkt für die Berechnungen zu wählen.

### 3.1.4 Das Halbfahrzeugmodell

Die erste Erweiterung, die sich an das Viertelfahrzeug anschließt, ist das Halbfahrzeug. Es beschreibt ein Einspurmodell mit einer Aufbaumasse und zwei Reifen, welche auch hier wieder mittels Feder-Dämpfer-Elementen untereinander verbunden sind. Die zusätzliche  $x$ -Ausdehnung des Modells benötigt noch die Kenntnis über die Hebelkräfte der Fahrwerkelemente, die durch die Abstände der Kraftangriffspunkte vom Massenschwerpunkt bestimmt werden. Der Vorderreifen befindet sich in einem Abstand  $l_F$  vor dem Massenschwerpunkt und der Hinterreifen entsprechend in einem Abstand  $l_R$ . Der neue Freiheitsgrad des Aufbaus ist der sogenannte *Nick-* oder *Pitchwinkel*  $\varphi$ .

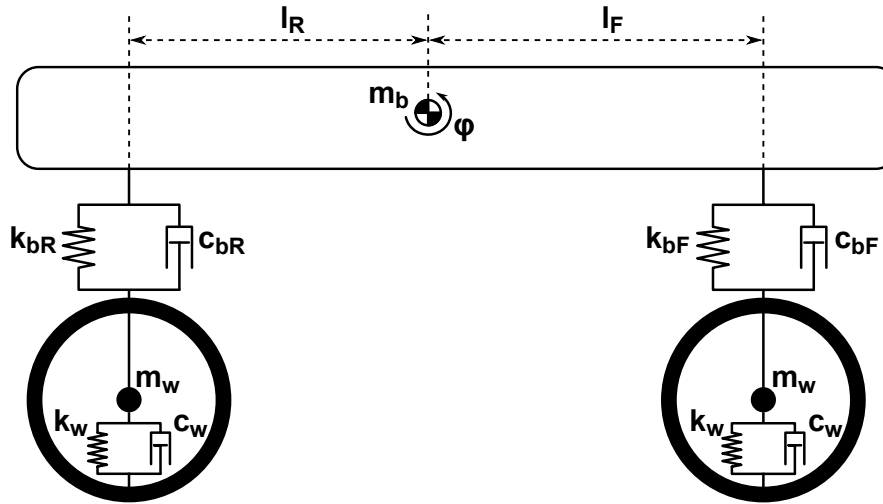


Abbildung 3.6: Schematischer Aufbau des Halbfahrzeugmodells

In Abbildung 3.6 ist der schematische Aufbau des Fahrzeugmodells dargestellt. Auch hier lassen sich die Differentialgleichungen beispielsweise über die angreifenden Kräfte herleiten.

$$m_b \ddot{z}_b = F_{bwF} + F_{bwR}, \quad (3.2a)$$

$$m_w \ddot{z}_{wF} = F_{w\rho F} - F_{bwF}, \quad (3.2b)$$

$$m_w \ddot{z}_{wR} = F_{w\rho R} - F_{bwR}, \quad (3.2c)$$

$$I_y \ddot{\varphi} = \cos(\varphi)(l_F F_{bwF} - l_R F_{bwR}). \quad (3.2d)$$

Die Kräfte in Gleichungen (3.2a) - (3.2d) berechnen sich mit den linearen Elementgleichungen und der Winkelbeziehung zwischen Nickwinkel und Angriffspunkt der Radaufhängung zu

$$F_{bwi} = k_b(z_{wi} - (z_b + l_i \sin(\varphi))) + c_{bi}(\dot{z}_{wi} - (\dot{z}_b + l_i \dot{\varphi} \cos(\varphi))), \quad i \in \{F, R\} \quad (3.3a)$$

$$F_{w\rho i} = k_w(z_{\rho i} - z_{wi}) + c_w(\dot{z}_{\rho i} - \dot{z}_{wi}), \quad i \in \{F, R\}, \quad (3.3b)$$

wobei der Index  $bw$  die Kräfte zwischen Aufbau und Rad beschreibt und  $w\rho$  diejenigen zwischen Rad und Straße. F steht hier für das Vorderrad (front) und R für das Hinterrad (rear). In vielen Arbeiten wird hier eine Kleinwinkelnäherung auf  $\sin(\varphi)$  angewandt, um ein lineares Systemverhalten verwenden zu können. Beispielsweise muss für die Anwendbarkeit eines Linear-Quadratischen-Reglers die Systemdynamik linear in Zustand und Steuerung sein. Da hier keine Notwendigkeit einer solchen Einschränkung vorliegt, wird keine Linearisierung vorgenommen.

Der zusätzliche Zustand  $\varphi$  erfordert die Kenntnis der Massenträgheit um die  $y$ -Achse  $I_y$ . Dieser kann entweder aus konkreten Angaben der Hersteller gewonnen oder mit der in [Rajamani, 2006] erläuterten Vereinfachung aus den Abmessungen und der Aufbaumasse berechnet werden. Dies liefert die Formel

$$I_y = m_b l_F l_R. \quad (3.4)$$

Falls keine Informationen über die Massenträgheit bekannt sind, so kann mit (3.4) zumindest ein approximativer Zahlenwert bestimmt werden. Für die nachfolgenden Rechnungen wird, sofern nicht anders angegeben, auf diese Formel zurückgegriffen.  $I_y$  bewirkt lediglich eine Skalierung der Differentialgleichung und hat deshalb keinen Einfluss auf die Anwendbarkeit der vorgestellten Algorithmen.

Da es sich bei diesem Modell um ein Einspurmodell handelt, sind die Straßenanregung des vorderen und hinteren Reifens nicht unabhängig voneinander. Bei bekannter Geschwindigkeit  $v$  ergibt sich die hintere Anregung um  $\Delta t = (l_F + l_R)/v$  in der Zeit verschoben, d.h.

$$z_{\rho_F}(t) = z_{\rho_R}(t + \Delta t).$$

Dies gilt unter der Voraussetzung, dass keine Kurvenfahrten betrachtet werden, was in dieser Arbeit stets angenommen wird.

### 3.1.5 Das Vollfahrzeugmodell

Als letzte Erweiterung wird nun noch das Vollfahrzeugmodell vorgestellt. Bei diesem wird durch Hinzunahme zweier weiterer Radaufhängungen die Spurbreite des Fahrzeugs eingeführt. Der Aufbau wird durch eine zweidimensionale Platte approximiert mit der Länge  $l = l_F + l_R$  und der Breite  $w = w_l + w_r$ . Er besitzt den zusätzlichen Freiheitsgrad des *Wankens* oder *Rollens*  $\psi$ . Die Geometrie des Modells ist in Abbildung 3.7 dargestellt und beschreibt auch die jeweiligen Offsets der Aufhängungspunkte vom Massenschwerpunkt des Aufbaus.  $F$  und  $R$  bezeichnen wie beim Halffahrzeugmodell die vordere bzw. hintere Fahrzeugachse und  $l$  und  $r$  die linke bzw. rechte Spur.

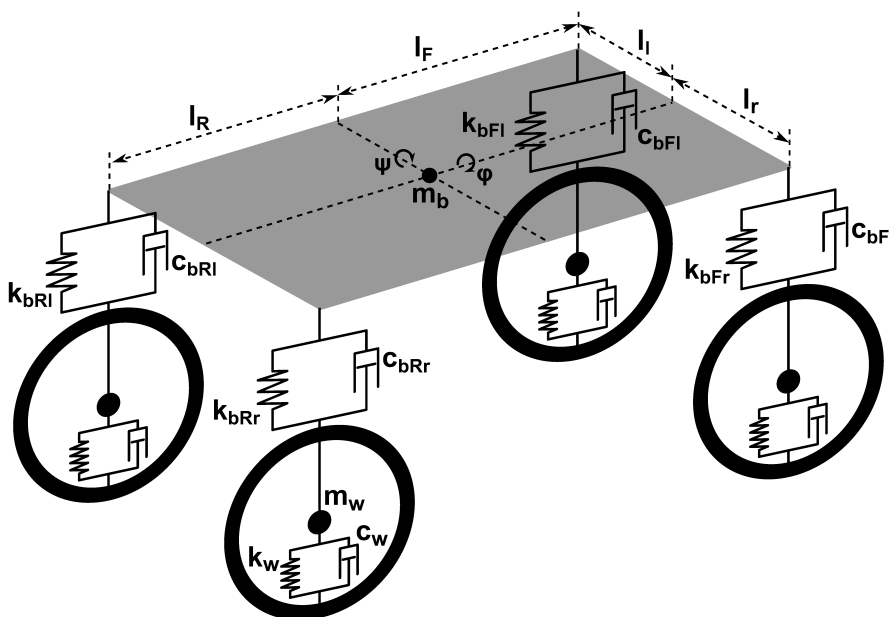


Abbildung 3.7: Schematischer Aufbau des Vollfahrzeugmodells

Aufbaumasse	$m_b$	229.0	kg
Radmasse	$m_w$	31.0	kg
Federkonstante Fahrzeugfeder	$k_b$	20.0	kN/m
Federkonstante Reifenfeder	$k_w$	128.0	kN/m
Dämpfungskonstante Reifen	$c_w$	0.76	kNs/m
Untere Schranke Dämpfungskonstante	$u_{min}$	0.1	kNs/m
Obere Schranke Dämpfungskonstante	$u_{max}$	2.8	kNs/m
Fahrzeuglänge nach vorne/hinten	$l_F, l_R$	1.4	m
Fahrzeughöhe links/rechts	$w_l, w_r$	0.8	m

Tabelle 3.1: Konstanten

Die Differentialgleichungen haben folgende Gestalt:

$$m_b \ddot{z}_b = F_{bwFr} + F_{bwFl} + F_{bwRr} + F_{bwRl}, \quad (3.5a)$$

$$m_w \ddot{z}_{wij} = -F_{bwij} + F_{wpij}, \quad i \in \{F, R\}, j \in \{r, l\}, \quad (3.5b)$$

$$I_y \ddot{\varphi} = \cos(\varphi) (l_F (F_{bwFr} + F_{bwFl}) - l_R (F_{bwRr} + F_{bwRl})), \quad (3.5c)$$

$$I_x \ddot{\psi} = \cos(\psi) (w_r (F_{bwFr} + F_{bwRr}) - w_l (F_{bwFl} + F_{bwRl})). \quad (3.5d)$$

Die Berechnung der wirkenden Kräfte  $F$  kann analog zu den Gleichungen (3.3a) - (3.3b) durchgeführt werden, jedoch müssen zwei sukzessive Rotationen betrachtet werden. Mit Hilfe von Rotationsmatrizen lässt sich der rotierte Zustand eines Koordinatenpunkts folgendermaßen darstellen:

$$\tilde{X}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\psi) \sin(\varphi) & \cos(\psi) \sin(\varphi) \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ -\sin(\varphi) & \sin(\psi) \cos(\varphi) & \cos(\varphi) \cos(\psi) \end{pmatrix} X_{ij}, \quad i \in \{F, R\}, j \in \{l, r\}.$$

Dabei bezeichnet  $X_{ij} = (l_i, w_j, 0)^\top$  die Koordinaten eines Radaufhängungspunkts im körperfesten Koordinatensystem mit Massenschwerpunkt im Koordinatenursprung. Zu beachten sind die hinzukommenden Vorzeichen bzgl. des Koordinatenschwerpunkts. Da in dieser Arbeit ausschließlich die vertikale Bewegung betrachtet wird, ist lediglich die letzte Zeile des Gleichungssystems (3.1.5) von Interesse. Die Verschiebungen, die aufgrund der Rotation in horizontaler Richtung induziert werden, werden als klein angenommen und finden keine Berücksichtigung. In Tabelle 3.1 sind einige im Rahmen dieser Arbeit verwendete Konstanten aufgelistet.

### 3.1.6 Erweiterte Fahrzeugmodelle

Natürlich sind die bis hierher vorgestellten PKW-Modelle lediglich die einfachsten Vertreter der Klasse mathematischer Fahrzeugmodelle. Ausgehend vom Vollfahrzeugmodell kann jede Komponente individuell weiterentwickelt und somit an die reale Dynamik eines Fahrzeugs angepasst werden. So können spezielle Aufhängungstypen, wie ein Doppelquerlenker oder eine Aufhängung mittels Starachse, vgl. [Mitschke und Wallentowitz, 2004, Rajamani, 2006], berücksichtigt werden. Abbildungen typischer Radaufhängungen, wie einer MacPherson- oder Short-Long-Aufhängung finden sich beispielsweise in [Aubouet, 2010]. Auch die Eigenschaften des Reifens sind in den Modellen bisher nicht berücksichtigt worden. Der Reifen kann beispielsweise mit Hilfe von Finiten-Elementen, komplexen Modellumgebungen wie der CDTire Bibliothek des Fraunhofer ITWM [Gallrein und Bäcker, 2007]

oder vereinfachten Kontaktmodellen, wie in [Kimmerle und Moritz, 2014], detaillierter dargestellt werden.

Der Nachteil, der aus einer detaillierten Modellierung des Fahrzeugs entsteht, ist in erster Linie die stark erhöhte Komplexität und die damit verbundene größere benötigte Rechenleistung bzw. Zeit. Da das Ziel dieser Arbeit in der Berechnung optimaler Steuerungen und deren Anwendbarkeit für echtzeitfähige Algorithmen besteht, wird an dieser Stelle auf eine zu komplexe Modellierung des Fahrzeugs verzichtet. Dies stellt jedoch keine Einschränkung an die Anwendbarkeit dieser Modelle für die betrachteten Probleme dar.

### **Einbeziehung der Dynamik des menschlichen Körpers**

Einen weiteren möglichen Erweiterungspunkt bietet die Einbeziehung der Dynamik des menschlichen Körpers. Dabei werden, wie in [Yoshimura et al., 2005, Liang und Chiang, 2008] beschrieben, die Wirbelsäule und die Kontaktpunkte des Körpers mit dem Fahrzeug über mechanische Elemente modelliert und das Fahrzeugmodell so um weitere Komponenten ergänzt. Damit wäre es beispielsweise denkbar, die auf die Lendenwirbel wirkenden Beschleunigungen im Zielfunktional mit zu berücksichtigen oder auch unterschiedlich wirkende Kräfte zwischen Sitz und Körper bzw. Boden und Füßen zu betrachten. In dieser Arbeit wird dieser Schritt jedoch nicht weiter verfolgt.

### **LKW-Modell**

Ein weiteres Modell, das sich als interessant herausgestellt hat, ist das Modell eines Lastkraftwagens mit Auflieger, wie es beispielsweise in [Simeon et al., 1994, Simeon, 2013] vorgestellt wird. In Abbildung 3.8 ist eine mögliche Modellierung dieses Modells dargestellt. So kann beispielsweise ebenfalls der Fahrkomfort des Fahrers, also der Beschleunigung der Masse  $m_S$ , berücksichtigt werden. Dabei sind verschiedene Möglichkeiten des aktiven oder semiaktiven Eingreifens möglich. Es kann, wie in den bereits vorgestellten Fahrzeugmodellen an der Aufhängung eingegriffen werden, was aufgrund der häufig verwendeten Blattfedern jedoch nicht immer möglich ist. Meist ist die Fahrerkabine über Feder-Dämpfer-Elemente von der Chassis-Bewegung entkoppelt, so das in diesem Fall ein weiterer möglicher Angriffspunkt entsteht. Als letztes kann, wie bereits erwähnt, auch lediglich der Sitz aktiv gesteuert werden, vgl. [Parison, 2010]. Hierbei können möglicherweise die Entkoppelung der Sitzbewegung von der Bewegung der Fahrerkabine, als auch ihre Relativbewegung zu Pedalen und Lenkrad zusätzlich berücksichtigt werden. Aufgrund des hohen Gewichts von Lastkraftwagen ist hier auch eine Federung, die den Fahrbahnbelag möglichst wenig belastet ein möglicher Angriffspunkt für eine Optimierung.

### **Traktor-Modell**

Zuletzt soll noch die Komfortoptimierung eines landwirtschaftlich genutzten Traktors erwähnt werden. Diese Fahrzeuge besitzen meist keine Federung der Aufhängung, vgl. [William und Ii, 1983], befahren jedoch auf Feldwegen und Feldern sehr unregelmäßige Oberflächen. Gerade in diesem Umfeld erscheint es sinnvoll, eine Optimierung des Komforts des Fahrers durch Steuerung des Fahrersitzes einzubauen. Ob ein proaktives Eingreifen, wie es in den folgenden Kapiteln vorgestellt wird, zielführend ist, sei hier in Frage gestellt, da eine optische Oberflächenvermessung des vorausliegenden Abschnitts wenig Sinn macht, da sich der Erdboden unter dem Druck der Reifen verformt. Ein Zero-Preview-Ansatz in Kombination mit einem aktiven Sitz nach dem Modell von BOSE [Parison, 2010] sollte jedoch einen

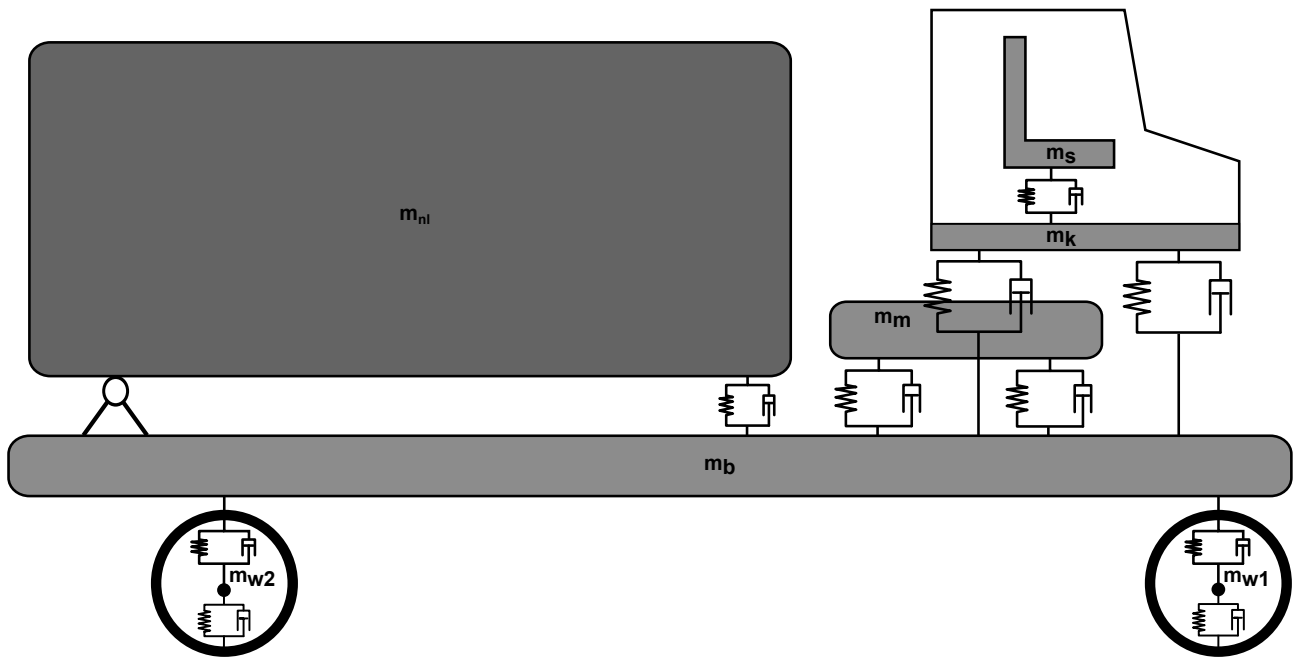


Abbildung 3.8: Schematischer Aufbau eines LKW-Modells (vgl.: [Simeon et al., 1994])

deutlichen Komfortgewinn bewirken. Die Beschleunigungen der Vorderachse können, da das Erdreich bereits verdrängt und verdichtet wird, als Input für die Regelung verwendet werden.

## 3.2 Optimale Steuerung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Bereitstellung des theoretischen Hintergrunds der optimalen Steuerung. Im Grunde kann die optimale Steuerung als ein oberstes Ziel jedes Prozesses angesehen werden. Nachdem eine Steuerung gefunden wurde, mit der ein gegebenes System unter Einhaltung aller auferlegten Beschränkungen die definierte Aufgabe erfüllt, stellt sich als nächstes meist die Frage, ob dies vielleicht noch „besser“ bewerkstelligt werden kann. Die optimale Steuerung hat zum Ziel dieses besser in mathematischer Form darzustellen und nicht nur eine bessere, sondern im Idealfall die beste Steuerung zu bestimmen.

Dass diese Fragestellungen nicht nur ein theoretisches Konstrukt darstellen, sondern selbst im täglichen Leben auftreten, zeigen die folgenden Beispiele.

### Beispiel: Optimale Autofahrt

Bei der Autofahrt versucht der Fahrer je nach gegebener Situation sein Ziel in möglichst kurzer Zeit bzw. möglichst kraftstoffsparend zu erreichen. Um die Formulierung in diesem Beispiel einfach zu halten, soll sich das Auto auf einer geraden Linie bewegen, s.d. keine komplexe Dynamik berücksichtigt werden muss. Schreibt man dieses Problem mathematisch auf, so besteht die Aufgabe darin, ein Fahrzeug vom Anfangspunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  zum Zielpunkt  $x_f \in \mathbb{R}$  zu bewegen. Zusätzlich soll gelten, dass das Fahrzeug am Anfang und am Ende des Manövers in Ruhe ist. Was gesteuert werden kann ist die Beschleunigung des Autos, das der Einfachheit halber als Massenpunkt mit der Masse  $m = 1$  modelliert wird und sich lediglich in einer Dimension bewegen kann. Das Problem, die Strecke möglichst schnell



zu bewältigen, schreibt sich folgendermaßen, vgl. [Tröltzsch, 2010]:

$$\begin{aligned} \min_{u \in U_{ad}} J &= t_f, \\ \text{u.d.Nb. } \ddot{x}(t) &= u(t), \\ x(t_0) &= x_0, \\ x(t_f) &= x_f, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}(t_f) = 0, \\ u(t) &\in [u_{min}, u_{max}], \forall t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet  $x(t)$  die Position des Fahrzeugs zum Zeitpunkt  $t$ .  $\dot{x}(t)$  und  $\ddot{x}(t)$  sind die erste bzw. zweite Ableitung der Position, stehen also für die Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Eine kraftstoff- und bremsbelagsparende Lösung erhält man, wenn das Zielfunktional folgendermaßen gewählt wird:

$$\min_u J = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^2 dt$$

Dabei wird jede Geschwindigkeitsänderung, die im Laufe der Fahrt getätigt wird, bestraft. Wie man leicht bei einer Spritverbrauchsanzeige feststellt, wird beim Beschleunigen besonders viel Kraftstoff benötigt, wohingegen bei einer gleichbleibenden Geschwindigkeit der Kraftstoffverbrauch relativ gering ist. Hier ist anzumerken, dass zusätzlich eine obere Schranke an die zur Verfügung stehende Zeit einzuführen ist, da ansonsten die Ankunftszeit beliebig groß gewählt werden kann, womit ein geringerer Steuerungsaufwand erzielt wird.

### Beispiel: Roboter in Fertigungszellen

In der Planung und Programmierung von Industrieanlagen sollen Prozesse möglichst schnell durchgeführt werden, wie exemplarisch das Schweißen in Fertigungszellen der Automobilindustrie. Hierzu ist es nötig, alle Bewegungen der Schweißroboter derart zu koordinieren, dass die Aufgaben zuverlässig durchgeführt werden können, jedoch zu keinem Zeitpunkt eine Kollision zwischen einzelnen Robotern oder Roboterarmen und dem Schweißgut auftritt, vgl. [Landry et al., 2013]. Diese Beschränkungen an die erlaubten Zustände der Roboter müssen in Form von Nebenbedingungen formuliert werden und erschweren die Bestimmung optimaler Steuerungen.

#### 3.2.1 Problemstellung

In dieser Arbeit werden lediglich Optimalsteuerungsprobleme betrachtet, deren zugrunde liegende Systemdynamik durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden können. Eine Erweiterung auf Differential-Algebraische-Gleichungen kann beispielsweise in [Gerds, 2012] gefunden werden. Auch eine Betrachtung von partiellen Differentialgleichungen ist möglich. Für diese Problemstellung sei auf die Monographie von Fredi Tröltzsch [Tröltzsch, 2010] verwiesen. Die theoretischen Grundlagen, die hier vorgestellt werden, orientieren sich an [Gerds, 2012] und [Clarke, 2013].

Die Optimalsteuerung unterscheidet sich von der Optimierung darin, dass es zwei unterschiedliche Typen von Variablen gibt. Auf der einen Seite stehen die von Außen direkt beeinflussbaren Variablen  $u$ , die Steuerung, und auf der anderen Seite der Zustand des Systems  $x$ , der sich implizit aus dem

Anfangszustand  $x_0$  und der angewandten Steuerung ergibt, jedoch nicht direkt verändert werden kann.

Ziel der optimalen Steuerung ist es nun, für ein gegebenes dynamisches System die Steuerung zu finden, die eine vorher zu definierende Zielfunktion minimiert. Beispiele für solche Zielfunktionen sind etwa die benötigte Zeit vom Anfangs- zum Endzustand, eine Summation der aufgewandten Steuerkosten oder die Endposition eines gewissen Zustands des Systems. Um eine einheitliche Darstellung einführen zu können, wird zuerst etwas Notation eingeführt. Der Zustand des Systems zur Zeit  $t$  wird mit  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  und die Steuerung mit  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  bezeichnet, wobei  $n_x$  und  $n_u$  die Dimensionen des Zustands- bzw. Steuervektors sind. Die Dynamik sei gegeben durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit von erster Ordnung angesehen werden.

### Definition 3.1: System-Differentialgleichung

Sei  $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ ,  $t_0 < t_f$ , ein kompaktes Zeitintervall, sowie  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$  und es gelte  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$  und  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ . Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (3.6)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.7)$$

heißt *Differentialgleichung des Systems* oder *Systemdynamik*.

Eine Lösung des Steuerungssystems liefert die folgende Definition.

### Definition 3.2: Lösung der Differentialgleichung

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung nach Definition 3.1.  $x(\cdot)$  heißt Lösung von (3.6) mit Anfangswert (3.7) für eine gegebene Steuerung  $u$ , wenn

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt$$

für alle  $t \in [t_0, t_f]$  erfüllt ist.

Die Theorie, wann eine Differentialgleichung eine Lösung besitzt, kann beispielsweise in [Aulbach, 2004] und anderen Werken über gewöhnliche Differentialgleichungen gefunden werden. Das Optimalsteuerungsproblem, das im Folgenden genauer betrachtet wird, besitzt die folgende Gestalt:

### Problem 3.3: Optimalsteuerungsproblem

Gegeben sei das kompakte Zeitintervall  $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$  mit  $t_0 < t_f$ , die Funktionen

$$f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x} \quad (3.8)$$

$$f_c : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.9)$$

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.10)$$

$$\psi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\psi} \quad (3.11)$$

$$s : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s} \quad (3.12)$$

$$c : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c} \quad (3.13)$$

mit hinreichender Regularität sowie die nicht-leere Menge der zulässigen Steuerungen  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ . Das zugehörige Optimalsteuerungsproblem lautet:

Minimiere die Zielfunktion

$$\varphi(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_c(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.14)$$

bezüglich aller

$$x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x} \quad \text{und} \quad u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}, \quad (3.15)$$

die die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (3.16)$$

die Randbedingungen

$$\psi(x(t_0), x(t_f)) = 0_{n_\psi}, \quad (3.17)$$

die Steuerungs-Zustandsbeschränkungen

$$c(t, x(t), u(t)) \leq 0_{n_c}, \quad (3.18)$$

die reinen Zustandsbeschränkungen

$$s(t, x(t)) \leq 0_{n_s} \quad (3.19)$$

und die Steuerungsbeschränkung

$$u(t) \in \mathbb{U} \quad (3.20)$$

erfüllen.

Die Schreibweise  $0_n$  bezeichnet hier einen  $n$ -dimensionalen Vektor, dessen Einträge alle identisch 0 sind. Wenn die Anfangszeit  $t_0$  bzw. die Endzeit  $t_f$  unbekannt ist, werden diese in die Optimierungsvariablen mit aufgenommen. Es handelt sich dann um ein *freies Anfangs-* bzw. *Endzeitproblem*. Hängen die Funktionen  $f, f_c, \varphi, s, c$  nicht explizit von der Zeit  $t$  ab, so spricht man von einem *autonomen*, ansonsten von einem *nicht autonomen* Problem.

Die Steuerbeschränkung (3.20) ist in vielen realen Problemen über elementweise Boxbeschränkungen gegeben, d.h. es werden für jede Raumdimension der Steuerung obere und untere Schranken definiert:

$$\mathbb{U} := \{u \in \mathbb{R}^{n_u} \mid u_{i,\min} \leq u_i \leq u_{i,\max}, i = 1, \dots, n_u\}$$

Die Zielfunktion (3.14), häufig auch Zielfunktional genannt, wird im Folgenden mit  $J(x, u, t_0, t_f)$  betitelt. Es wird angenommen, dass die Anfangs- und Endzeit des Prozesses bekannt sind und somit nicht als Argument der Zielfunktion aufgeführt werden müssen. Treten beide Summanden aus Gleichung (3.14) auf, also sowohl die kontinuierlichen Integralkosten, als auch die Randkosten  $\varphi$ , wird das Problem als *Bolza-Problem* bezeichnet. Gilt  $\varphi \equiv 0$ , so wird es *Lagrange-Problem* genannt und wenn  $f_c \equiv 0$  ist, so heißt es *Mayer-Problem*.

Im Allgemeinen hängt der Zielfunktionswert von Steuerung und Zustand ab. Jedoch kann aufgrund der gegebenen Systemdynamik mithilfe eines Steuerungs-Zustands-Operators der Zustand vollständig durch den Anfangszustand  $x(t_0) = x_0$  und die Steuerung angegeben werden. Der Zustand kann dann folgendermaßen notiert werden:

$$x = x(\cdot, x_0, u).$$

Deshalb besitzt auch die Zielfunktion lediglich eine Abhängigkeit von  $x_0$  und  $u$ , d.h. es gilt

$$J = \tilde{J}(x_0, u) := J(x(\cdot, x_0, u), u).$$

Im Falle eines vorgegebenen Anfangszustands hängt das Zielfunktional lediglich von der Steuerung  $u$  ab ( $J(u)$ ).

Die Randbedingungen (3.17) haben häufig die Form

$$\psi(x(t_0), x(t_f)) = \begin{pmatrix} x(t_0) - x_0 \\ \tilde{\psi}(x_f) \end{pmatrix},$$

wobei  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$  ein gegebener Anfangswert ist und  $\tilde{\psi}(x_f)$  eine mögliche Bedingung an den Endzustand darstellt.

### 3.2.2 Transformationsmöglichkeiten

Dieses Kapitel soll sich kurz mit möglichen Transformationen, Problem 3.3 umzuschreiben, befassen.

#### Nicht-Autonom $\rightarrow$ Autonom

Auch wenn die im Folgenden betrachteten Probleme durchweg autonom sind soll hier kurz erläutert werden, dass diese Eigenschaft generell hergestellt werden kann. Führt man einen zusätzlichen Zustand  $T(t)$  ein, der der Differentialgleichung

$$\dot{T}(t) = 1, \quad T(t_0) = t_0,$$

genügt, so wird das Problem in eine autonome Form gebracht. Es hat dann folgende Gestalt:

*Minimiere*

$$J(x, u) = \varphi(T(t_0), T(t_f), x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_c(T(t), x(t), u(t)) dt,$$

*unter den Nebenbedingungen*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(T(t), x(t), u(t)), \\ \dot{T}(t) &= 1, \\ T(t_0) &= t_0, \\ \psi(x(t_0), x(t_f)) &= 0, \\ c(T(t), x(t), u(t)) &\leq 0_{\mathbb{R}^{n_c}}, \\ s(T(t), x(t)) &\leq 0_{\mathbb{R}^{n_s}}, \\ u(t) &\in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

#### Freie Anfangs-/Endzeit $\rightarrow$ Festes Zeitintervall

Der Fall einer freien Endzeit lässt sich ebenfalls mit der Hilfe einer passenden Transformation eliminieren. Dazu wird eine neue Zeitvariable  $\tau$  eingeführt sowie eine Funktion  $t(\tau)$ , die folgender Gleichung genügt:

$$t(\tau) = t_0 + \tau(t_f - t_0), \quad \tau \in [0, 1]$$

Damit wird das Problem auf das Einheitsintervall bzgl. der Zeit abgebildet. Definiert man den Zustand und die Steuerung bzgl. der neuen Zeit mittels

$$\begin{aligned}\bar{x}(\tau) &= x(t(\tau)) = x(t_0 + \tau(t_f - t_0)), \\ \bar{u}(\tau) &= u(t(\tau)) = u(t_0 + \tau(t_f - t_0)),\end{aligned}$$

so schreibt sich die Differentialgleichung als

$$\frac{d}{d\tau}\bar{x}(\tau) = \frac{d}{d\tau}x(t(\tau)) = \dot{x}(t(\tau))\frac{d}{d\tau}t(\tau) = (t_f - t_0)\dot{x}(t(\tau)) = (t_f - t_0)f(t(\tau), \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)).$$

Dabei werden  $t_0$  und  $t_f$  als konstante Zustände betrachtet, die die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}t_0(\tau) &= 0, & t_0(0) &= \text{frei}, \\ \frac{d}{d\tau}t_f(\tau) &= 0, & t_f(0) &= \text{frei},\end{aligned}$$

erfüllen. Je nachdem ob nur  $t_0$  oder  $t_f$  unbestimmt sind, muss dies lediglich für die unbekannte Zeit durchgeführt werden.

### Lagrange-Problem $\rightarrow$ Mayer-Problem

Die letzte Transformation, die hier erläutert wird, befasst sich mit der Umformung eines gegebenen Lagrange- bzw. Bolza-Problems in ein Mayer-Problem. Dafür muss der Integralteil aus der Zielfunktion eliminiert werden. Dies wird erreicht, indem man einen neuen Zustand  $x_c$  definiert, der eben diesen Integralteil widerspiegelt:

$$\dot{x}_c(t) = f_c(t, x(t), u(t)), \quad x_c(t_0) = 0$$

Zur Endzeit  $t_f$  gilt damit dann

$$x_c(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} f_c(t, x(t), u(t)) dt,$$

womit die Zielfunktion äquivalent umgeformt werden kann zu

$$\bar{\varphi}(t_0, t_f, \bar{x}(t_0), \bar{x}(t_f)) = \varphi(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f)) + x_c(t_f).$$

Hier bezeichnet  $\bar{x}$  den um  $x_c$  erweiterten Zustandsvektor  $[x, x_c]^\top$ .

### 3.2.3 Unendlichdimensionale Optimierung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Darstellung des Optimalsteuerungsproblems aus Problem 3.3 als unendlichdimensionales Optimierungsproblem. Damit ist es im Anschluss möglich, die notwendigen Bedingungen für ein Minimum zu formulieren. Eine ausführliche Version der hier präsentierten Resultate kann in [Gerds, 2012] gefunden werden. In dieser Arbeit soll lediglich ein kurzer Überblick gegeben werden, um ein besseres Verständnis des Optimalsteuerungsproblems zu schaffen.

#### Funktionsräume

In Problem 3.3 wurde keine Aussage über die Räume getroffen, in denen der Zustand  $x$  und die Steuerung  $u$  liegen. Um dies nachzuholen müssen zunächst einige Funktionsräume eingeführt werden, die im Folgenden Verwendung finden.

**Definition 3.4: Raum der  $L_p$  Funktionen**

Gegeben sei das kompakte Intervall  $[t_0, t_f]$  mit  $t_0 < t_f$ .

1. Sei  $1 \leq p < \infty$ . Der Raum  $L_p([t_0, t_f])$  umfasst alle messbaren Funktionen  $f : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\int_{t_0}^{t_f} |f(t)|^p dt < \infty.$$

Das Integral ist als Lebesgue-Integral zu verstehen.

2. Der Raum  $L_\infty([t_0, t_f])$  umfasst alle messbaren Funktionen  $f : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ , für die gilt

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [t_0, t_f]} |f(t)| := \inf_{N \subset [t_0, t_f]} \sup_{t \in [t_0, t_f] \setminus N} |f(t)| < \infty,$$

wobei  $N$  eine Menge mit Lebesgue-Maß 0, d.h.  $\mu(N) = 0$ , ist.

3. Sei  $1 \leq p \leq \infty$ , dann ist der Raum  $L_p^n([t_0, t_f])$  definiert als der Produktraum

$$L_p^n([t_0, t_f]) = L_p([t_0, t_f]) \times L_p([t_0, t_f]) \times \dots \times L_p([t_0, t_f]).$$

Jedes Element  $f \in L_p^n([t_0, t_f])$  ist eine Abbildung von  $f : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Der folgende Satz kann in allgemeinerer Fassung in [Dobrowolski, 2010] gefunden werden und liefert die Existenz der  $L_p$ -Norm.

**Satz 3.5: Existenz der  $L_p$ -Norm**

Für  $1 \leq p \leq \infty$  sind die Räume  $L_p([t_0, t_f])$  Banach-Räume unter der Norm

$$\|f\|_p := \left( \int_{t_0}^{t_f} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(t)|.$$

Auch die Definition der Begriffe *Banach-Raum* und *Norm* kann in [Dobrowolski, 2010] nachgeschlagen werden und wird als bekannt vorausgesetzt. Mit der  $L_p$ -Norm ist die Unterscheidung von Funktionen in  $L_p$ -Räumen nicht derart möglich, wie es aus dem endlichdimensionalen Fall bekannt ist.

**Bemerkung 3.6: Äquivalenzklassen von Funktionen**

Die  $L_p$ -Räume mit zugehöriger Norm unterscheiden Funktionen lediglich bzgl. Äquivalenzklassen. Zwei Funktionen, für die gilt

$$\|f - g\|_p = 0 \tag{3.21}$$

können sich auf einer Nullmenge unterscheiden, da das Integral invariant bzgl. Änderungen auf Nullmengen ist. Demnach existieren für jedes  $f \in L_p([t_0, t_f])$  unendlich viele Funktionen  $g \in L_p([t_0, t_f])$ , für die Gleichung (3.21) erfüllt ist.

Eine weitere benötigte Definition ist die der absolut stetigen Funktionen.

**Definition 3.7: Absolut stetige Funktionen**

Gegeben sei das kompakte Intervall  $[t_0, t_f]$  mit  $t_0 < t_f$ . Eine Funktion  $f : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *absolut stetig*, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  und disjunkte Intervalle  $(a_i, b_i) \subseteq [t_0, t_f]$ ,  $i = 1, \dots, m$  gilt:

$$\sum_{i=1}^m |b_i - a_i| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Die Menge der absolut stetigen Funktionen wird mit  $AC([t_0, t_f])$  bezeichnet.

Einige Eigenschaften von absolut stetigen Funktionen können in [Natanson, 1981] nachgeschlagen werden. Mit Definition 3.7 ist es möglich, die Sobolev-Räume  $W_{q,p}$  wie folgt einzuführen. Diese werden benötigt, da der Raum  $W_{1,\infty}([t_0, t_f])$  eine natürliche Wahl einer Lösung der Differentialgleichung aus Problem 3.3 darstellt.

**Definition 3.8: Raum der  $W_{q,p}$ -Funktionen**

Gegeben sei das kompakte Intervall  $[t_0, t_f]$  mit  $t_0 < t_f$ , sowie  $1 \leq q, p \leq \infty$ .

1. Der Raum  $W_{q,p}([t_0, t_f])$  umfasst alle absolut stetigen Funktionen  $f : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  mit absolut stetiger Ableitung bis zur Ordnung  $q - 1$  und

$$\|f\|_{q,p} < \infty,$$

wobei die Norm definiert ist als

$$\|f\|_{q,p} := \left( \sum_{i=0}^q \|f^{(i)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{q,\infty} := \max_{0 \leq i \leq q} \|f^{(i)}\|_\infty.$$

2. Für gegebene  $1 \leq q, p \leq \infty$  ist der Raum  $W_{q,p}^n([t_0, t_f])$  definiert als der Produktraum

$$W_{q,p}^n([t_0, t_f]) := W_{q,p}([t_0, t_f]) \times \dots \times W_{q,p}([t_0, t_f]).$$

Jedes Element  $f \in W_{q,p}^n([t_0, t_f])$  ist eine Abbildung von  $f : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die  $W_{q,p}$ -Räume sind für  $0 \leq q, p \leq \infty$  Banach-Räume mit der in Definition 3.8 angegebenen Norm.

Zuletzt werden noch die  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen definiert.

**Definition 3.9: Raum der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen**

Gegeben sei das kompakte Intervall  $[t_0, t_f]$  mit  $t_0 < t_f$ , sowie  $n, k \in \mathbb{N}$ . Der Raum der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird mit  $C_k^n([t_0, t_f])$  bezeichnet.

### Optimalsteuerungsproblem als unendlichdimensionales Optimierungsproblem

Nun lässt sich das Optimalsteuerungsproblem 3.3 in ein gewöhnliches Optimierungsproblem umschreiben. Dazu werden die Funktionen aus Gleichung (3.15) in den passenden Funktionenräumen wie folgt definiert

$$x \in W_{1,\infty}^{n_x}([t_0, t_f]), \quad u \in L_{\infty}^{n_u}([t_0, t_f]).$$

Die Wahl des Steuerungsraums  $L_{\infty}^{n_u}([t_0, t_f])$  ist derart zu verstehen, dass auch bei unbeschränkter Steuerung, d.h.  $\mathbb{U} = \mathbb{R}^{n_u}$ , die Steuerung bzgl. der  $L_{\infty}$ -Norm beschränkt sein soll, d.h. lediglich auf Mengen vom Maß 0 den Wert unendlich annehmen darf. Die Wahl des Raums für den Zustandsvektor ergibt sich daraus, dass dieser den Anfangswert

$$x(t_0) = x_0$$

und die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \quad \text{fast überall} \quad (3.22)$$

#### Beispiel 3.10

Dieses Beispiel soll zur Veranschaulichung der eingeführten Räume dienen und auch den in Gleichung (3.22) verwendeten Begriff der fast überall geltenden Differentialgleichung erläutern ohne zu tief in die Theorie einsteigen zu müssen.

Gegeben sei  $t_0 = 0$ ,  $t_f = 2$ , sowie  $n_x = n_u = 1$ . Betrachtet wird das folgende System:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t) & (3.23) \\ x(0) &= 0 \\ u(t) &= \begin{cases} 0 & t \in [0, 1) \\ \infty & t = 1 \\ 1 & t \in (1, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

Für die so definierte Steuerung gilt  $u \in L_{\infty}([0, 2])$ , da  $\|u\|_{\infty} = 1$ . Der Wert „unendlich“ wird lediglich auf der Nullmenge  $t = 1$  angenommen und spielt somit für die Unendlichnorm keine Rolle. Die Lösung des Systems berechnet sich als

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1) \\ t - 1 & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung (3.23) gilt nur auf den Intervallen  $[0, 1)$  und  $(1, 2]$ . Jedoch nicht im Punkt  $t = 1$ . Der Zustand  $x$  ist absolut stetig und es gilt  $x \in W_{1,\infty}$  mit  $\|x\|_{1,\infty} = \max\{\|x\|_{\infty}, \|\dot{x}\|_{\infty}\} = 1$ . Im Punkt  $t = 1$  ist  $x$  allerdings nicht differenzierbar, jedoch Lipschitzstetig.

Mit den obigen Annahmen lässt sich nun der Optimierungsvektor  $z := (x, u)$  aus dem Produktraum

$$z \in Z = W_{1,\infty}^{n_x}([t_0, t_f]) \times L_{\infty}^{n_u}([t_0, t_f])$$

definieren. Dieser bildet zusammen mit der Norm

$$\|z\|_Z = \max\{\|x\|_{1,\infty}, \|u\|_{\infty}\}$$



einen Banach-Raum. Wenn Steuerungsbeschränkungen vorliegen, also  $u(t) \in \mathbb{U}$  gilt, so muss der Raum der zulässigen Funktionen für  $u$  eingeschränkt werden auf

$$u \in U_{ad} \subset L_{\infty}^{n_u}([t_0, t_f]),$$

$$U_{ad} = \{u \in L_{\infty}^{n_u}([t_0, t_f]) \mid u(t) \in \mathbb{U} \text{ fast überall in } [t_0, t_f]\}.$$

Damit schränkt sich die Menge der Optimierungsvariablen ein zu

$$z \in Z_{ad} = W_{1,\infty}^{n_x}([t_0, t_f]) \times U_{ad}. \quad (3.24)$$

Fasst man die Gleichungsnebenbedingungen (3.16) und (3.17) des Optimalsteuerungsproblems zusammen, so erhält man

$$H : Z \longrightarrow V, \quad H(z) = \begin{pmatrix} f(\cdot, z(\cdot)) - \dot{x}(\cdot) \\ \psi(x(t_0), x(t_f)) \end{pmatrix}$$

mit  $V = L_{\infty}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_{\psi}}$ .

Für die Umformulierung der Ungleichungsnebenbedingungen (3.18) und (3.19) wird die Definition eines Kegels benötigt.

#### Definition 3.11: Kegel, Dualkegel

Sei  $X$  ein Vektorraum.

1. Eine nicht-leere Menge  $K \subset X$  heißt Kegel mit Scheitelpunkt  $0_X$ , wenn gilt

$$\forall k \in K, \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha k \in K.$$

2. Sei  $K$  ein Kegel mit Scheitelpunkt  $0_X$  und  $x_0 \in X$ , dann heißt  $x_0 + K$  Kegel mit Scheitelpunkt  $x_0$ .
3. Sei  $K \subset X$  eine Teilmenge eines Banach-Raums  $X$ . Der *positive Dualkegel* von  $K$  ist definiert durch

$$K^+ := \{x^* \in X^* \mid x^*(k) \geq 0 \forall k \in K\}.$$

Der *negative Dualkegel* von  $K$  ist definiert durch

$$K^- := \{x^* \in X^* \mid x^*(k) \leq 0 \forall k \in K\}.$$

Dabei bezeichnet  $X^*$  den *Dualraum* von  $X$ , also den Raum der linearen stetigen Funktionale auf  $X$ .

Definiert man

$$K_1 := \{k \in L_{\infty}^{n_c}([t_0, t_f]) \mid k(t) \geq 0 \text{ fast überall in } [t_0, t_f]\},$$

$$K_2 := \{k \in C^{n_s}([t_0, t_f]) \mid k(t) \geq 0 \text{ in } [t_0, t_f]\}$$

so ergibt sich der Kegel  $K_G = K_1 \times K_2$  als nichtleer über dem Banach-Raum  $(W, \|\cdot\|_W)$  mit

$$W := L_{\infty}^{n_c}([t_0, t_f]) \times C^{n_s}([t_0, t_f]),$$

$$\|(w_1, w_2)\|_W := \max \{\|w_1\|_{\infty}, \|w_2\|_{\infty}\}.$$

Damit können die Ungleichungsnebenbedingungen geschrieben werden als

$$G : Z \longrightarrow W, \quad G(z) = \begin{pmatrix} -c(\cdot, z(\cdot)) \\ -s(\cdot, x(\cdot)) \end{pmatrix} \in K_G,$$

Die Funktionen  $H(z)(\cdot)$  und  $G(z)(\cdot)$  können zu einem Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$  ausgewertet werden. Sie definieren die zulässige Menge des Optimierungsproblems:

**Definition 3.12: Zulässige Menge des Optimierungsproblems**

Die *zulässige Menge* eines Optimierungsproblems über dem Raum  $Z$  mit Gleichungsbeschränkungen  $H : Z \longrightarrow V$  und Ungleichungsbeschränkungen  $G : Z \longrightarrow W$  sei definiert als

$$\Sigma := \{z \in Z_{ad} \mid H(z) = 0_V, G(z) \in K_G\}.$$

Die Punkte  $z \in \Sigma$  werden als *zulässige Punkte* bezeichnet.

Mit diesen Vorkenntnissen ist es nun möglich, ein allgemeines unendlichdimensionales Optimierungsproblem zu betrachten, wobei bekannt ist wie sich die Nebenbedingungen aus den Eigenschaften des Optimalsteuerungsproblems zusammensetzen.

**Problem 3.13: Allgemeines Optimierungsproblem**

Sei  $Z$  ein Banach-Raum, sowie  $\Sigma \subset Z$  eine nicht-leere Menge und  $J : Z \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional. Das allgemeine Optimierungsproblem lautet:

$$\text{Minimiere } J(z) \quad \text{bzgl. aller } z \in \Sigma.$$

Um notwendige Bedingungen formulieren zu können, muss noch der Begriff des Minimums definiert werden.

**Definition 3.14: Lokales/globales Minimum**

Gegeben sei ein Banach-Raum  $Z$ , die zulässige Menge  $\Sigma \subset Z$ , sowie ein Zielfunktional  $J : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Ein *lokales Minimum* in  $\hat{z}$  ist gegeben, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass

$$J(\hat{z}) \leq J(z), \quad \forall z \in \Sigma \cap B_\varepsilon(\hat{z}) \quad (3.25)$$

gilt. Ist die Ungleichung für alle  $z \in \Sigma$  erfüllt, so liegt ein *globales Minimum* vor. Handelt es sich in (3.25) um eine echte Ungleichung, d.h. sie ist mit „<“ erfüllt, so bezeichnet man das Minimum als *strikt*.

## Notwendige und hinreichende Bedingungen

In diesem Abschnitt werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Optimierungsproblems vorgestellt. Er orientiert sich an [Gerds, 2012] und [Alt, 2002]. Dort kann bei Interesse eine ausführliche Herleitung der verwendeten Aussagen mit Beweisen gefunden werden.

Um notwendige Bedingungen formulieren zu können werden zunächst noch ein paar Definitionen benötigt.

**Definition 3.15: Konische Hülle**

Sei  $X$  ein Vektorraum,  $A \subset X$  und  $x \in A$ . Die Menge

$$K(A, x) := \{\alpha(a - x) \mid a \in A, \alpha \geq 0\}$$

heißt der von  $A - x$  erzeugte Kegel oder die *konische Hülle* von  $A - x$ .

**Definition 3.16: Tangentialkegel**

Sei  $\Sigma$  eine nicht-leere Teilmenge eines Banach Raums  $Z$ .  $d \in Z$  heißt *Tangentialrichtung an  $\Sigma$  in  $z$* , wenn es eine Folge  $z^{(k)} \in \Sigma, k \in \mathbb{N}$ , mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} \rightarrow z$  und eine Folge  $a^{(k)} \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ , mit

$\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)} \rightarrow 0$  gibt, so dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z^{(k)} - z)}{a^{(k)}} = d.$$

Die Menge

$$T(\Sigma, z) := \{d \in Z \mid d \text{ ist Tangentialrichtung an } \Sigma \text{ in } z\}$$

heißt *Tangentialkegel von  $\Sigma$  in  $z \in \Sigma$* .

Der Tangentialkegel ist ein abgeschlossener Kegel mit Scheitelpunkt in 0.

**Definition 3.17: Linearisierungskegel**

Seien  $Z, W$  und  $V$  Banach Räume und  $Z_{ad}$  eine nicht-leere Teilmenge von  $Z$  (vgl. (3.24)). Seien  $G : Z \rightarrow W$  und  $H : Z \rightarrow V$  Fréchet-Differenzierbar. Der *Linearisierungskegel von  $K_G$  und  $Z_{ad}$  in  $z$*  ist gegeben durch

$$T_{lin}(K_G, Z_{ad}, z) := \{d \in K(Z_{ad}, z) \mid G'(z)(d) \in K(K_G, G(z)), H'(z)(d) = 0_V\}.$$

Der Beweis des folgenden Korollars kann in [Gerdt, 2012] nachgelesen werden.

**Korollar 3.18: Zusammenhang zwischen  $T(\Sigma, z)$  und  $T_{lin}(K_G, Z_{ad}, z)$** 

Seien  $G$  und  $H$  Fréchet-Differenzierbar. Seien  $K(Z_{ad}, z)$  und  $K(K_G, G(z))$  abgeschlossen, dann gilt  $T(\Sigma, z) \subset T_{lin}(K_G, Z_{ad}, z)$ .

Der Tangentialkegel liefert eine anschauliche Möglichkeit, eine notwendige Bedingung erster Ordnung zu formulieren.

**Satz 3.19: Notwendige Bedingung mit Hilfe von  $T(\Sigma, z)$** 

Sei  $J : Z \rightarrow \mathbb{R}$  Fréchet-Differenzierbar im Punkt  $\hat{z}$  und sei  $\hat{z}$  ein lokales Minimum von Problem 3.13, dann gilt

$$J'(\hat{z})(d) \geq 0 \quad \forall d \in T(\Sigma, \hat{z}).$$

In Worten beschreibt dieser Satz das Verhalten der Zielfunktion in einem lokalen Minimum. Die Ableitung der Zielfunktion ist in alle zulässigen Richtungen, welche durch die Tangentialrichtungen  $d \in T(\Sigma, \hat{z})$  beschrieben werden, nicht negativ. Dies stellt gerade die Eigenschaft eines lokalen Minimums dar. In der Praxis ist es im Allgemeinen jedoch schwer, eine Darstellung des Tangentialkegels zu erhalten, was diesen Satz nur theoretisch zu einem nützlichen Hilfsmittel bei der Bestimmung lokaler Minima macht.

Der folgende Satz liefert eine notwendige Bedingung erster Ordnung, die die Grundlage für die darauffolgenden Betrachtungen darstellt.

**Satz 3.20: Fritz-John Optimalitätsbedingungen erster Ordnung**

Gegeben seien die Banach-Räume  $Z$ ,  $V$  und  $W$  mit zugehörigen Normen.

1. Sei  $Z_{ad} \subset Z$  eine nicht-leere abgeschlossene konvexe Menge und  $K_G \subset W$  ein nicht-leerer abgeschlossener konvexer Kegel mit Scheitelpunkt  $0_W$ .
2. Seien  $J : Z \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G : Z \rightarrow W$  Fréchet-Differenzierbar und  $H : Z \rightarrow V$  stetig Fréchet-Differenzierbar.
3. Sei  $\hat{z}$  ein lokales Minimum von Problem 3.13.
4. Die Bildmenge von  $H'(\hat{z})$  sei keine echte dichte Teilmenge von  $V$ .

Dann existieren nicht-triviale Multiplikatoren

$$(l_0, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R} \times W^* \times V^*, (l_0, \mu^*, \lambda^*) \neq (0, 0_{W^*}, 0_{V^*}),$$

so dass

$$l_0 \geq 0, \tag{3.26a}$$

$$\mu^* \in K_G^+, \tag{3.26b}$$

$$\mu^*(G'(\hat{z})) = 0, \tag{3.26c}$$

$$l_0 J'(\hat{z})(d) - \mu^*(G'(\hat{z})(d)) - \lambda^*(H'(\hat{z})(d)) \geq 0, \quad \forall d \in Z_{ad} - \{\hat{z}\}. \tag{3.26d}$$

**Definition 3.21: Fritz-John-Punkt, KKT-Punkt, Lagrange-Multiplikatoren, Komplementaritätsbedingungen**

1. Jeder nicht-triviale Punkt  $(z, l_0, \mu^*, \lambda^*) \in Z \times \mathbb{R} \times W^* \times V^*$ , der die Fritz-John-Bedingungen (3.26a) - (3.26d) erfüllt, heißt *Fritz-John-Punkt* von Problem 3.13.
2. Jeder Fritz-John-Punkt mit  $l_0 \neq 0$  heißt *Karush-Kuhn-Tucker-Punkt (KKT-Punkt)* von Problem 3.13.
3. Die Multiplikatoren  $l_0$ ,  $\mu^*$  und  $\lambda^*$  werden *Lagrange-Multiplikatoren* genannt.
4. Die Bedingungen (3.26b) und (3.26c) heißen *Komplementaritätsbedingungen*.

Das Problem eines Fritz-John-Punkts ist, dass  $l_0 = 0$  gelten kann und somit die Aussage völlig unabhängig von der Zielfunktion ist. Diese Einschränkung besitzt ein KKT-Punkt nicht mehr und im Falle eines KKT-Punkts kann  $l_0$  zu 1 normiert werden, weshalb  $l_0$  hier nicht explizit aufgelistet werden muss. Für die Existenz eines KKT-Punkts muss noch eine so genannte Regularitätsbedingung erfüllt sein. Es existieren mehrere Regularitätsbedingungen, die einen KKT-Punkt garantieren. Dazu zählen die *Robinson-Bedingung*, die *Bedingung der linearen Unabhängigkeit*, die *Abadie Bedingung*, die *Slater-Bedingung* und die Bedingung von *Mangasarian-Fromowitz*. Details hierzu können in [Gerdts, 2012] und für den endlichdimensionalen Fall in [Geiger und Kanzow, 2013] und [Alt, 2002] gefunden werden.

Hier soll lediglich die Bedingung der linearen Unabhängigkeit (engl. *linear independency constraint qualification (LICQ)*) aufgeführt werden.

**Definition 3.22: Bedingung der linearen Unabhängigkeit (LICQ)**

Sei  $\hat{z} \in \text{int}(Z_{ad})$  und

$$T : Z \rightarrow W \times V, \quad T := (G'(\hat{z}), H'(\hat{z})).$$

Die *Bedingung der linearen Unabhängigkeit* ist erfüllt, wenn  $T$  surjektiv ist.

Der Name erklärt sich aus der Eigenschaft für den endlichdimensionalen Fall, da sich die Bedingung dann folgendermaßen schreibt:

**Definition 3.23: Bedingung der linearen Unabhängigkeit für endlichdimensionale Optimierungsprobleme (LICQ)**

Die LICQ ist in einem Punkt  $\hat{z}$  für das Problem 3.13 erfüllt, wenn gilt:

1.  $\hat{z} \in \text{int}(Z_{ad})$
2. Die Ableitungen  $G'_i(\hat{z}), i \in A(\hat{z})$ , und  $H'_i(\hat{z}), i = 1, \dots, n_H$ , sind linear unabhängig.

Der folgende Satz garantiert nun die Existenz eines KKT-Punkts:

**Satz 3.24: Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen**

Es gelten die Annahmen aus Satz 3.20. Zusätzlich sei die LICQ Bedingung in  $\hat{z}$  erfüllt. Dann existieren Multiplikatoren  $(\mu^*, \lambda^*) \in W^* \times V^*$ ,  $(\mu^*, \lambda^*) \neq (0_{W^*}, 0_{V^*})$ , so dass

$$\mu^* \in K_G^+, \tag{3.27a}$$

$$\mu^* (G(\hat{z})) = 0, \tag{3.27b}$$

$$J'(\hat{z})(d) - \mu^* (G'(\hat{z})(d)) - \lambda^* (H'(\hat{z})(d)) \geq 0, \quad \forall d \in Z_{ad} - \{\hat{z}\} \tag{3.27c}$$

gilt.

### 3.2.4 Diskretisierung - endlichdimensionales Optimierungsproblem

Da in dieser Arbeit keine Verfahren der unendlichdimensionalen Optimierung Anwendung finden, wird nun erläutert, wie das allgemeine Optimalsteuerungsproblem aus Problem 3.13 durch ein endlichdimensionales Problem approximiert und das daraus resultierende Problem gelöst werden kann. Dieser Ansatz wird im Allgemeinen als *“first discretize, then optimize“*, also erst Diskretisieren und dann Optimieren bezeichnet. Details hierzu können in [Gerdtts, 2012] und [Betts, 2010] gefunden werden.

Eine Diskretisierung basiert darauf, eine Funktion, wie beispielsweise die Steuerung  $u \in L_\infty([t_0, t_f])$ , durch eine Funktion in einem endlichdimensionalen Unterraum  $L_{app}([t_0, t_f]) \subset L_\infty([t_0, t_f])$  zu beschreiben. Als Beispiel sei hier die Funktionsapproximation mit Hilfe von Polynomen vom Höchstgrad  $n$ , Splines der Ordnung  $k$  oder die Finite Element Diskretisierung erwähnt. Im vorliegenden Fall handelt es sich um eine Diskretisierung der auftretenden Funktionen  $x$  und  $u$  bzgl. der Zeit  $t$ . Dazu wird ein *Diskretisierungsgitter*

$$\mathcal{G}_N := \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f\} \tag{3.28}$$

definiert, auf dem die Steuerungen, Zustände und Beschränkungen lediglich an dessen  $N + 1$  Gitterpunkten  $t_i, i = 0, \dots, N$ , ausgewertet werden. Die jeweilige Schrittweite errechnet sich durch  $h_i = t_{i+1} - t_i, i = 0, \dots, N - 1$ , und die Gitterweite als die maximale Schrittweite  $h = \max_{i=1, \dots, N-1} h_i$ . Häufig werden *äquidistante* Gitter zur Diskretisierung verwendet, d.h.  $h = h_i$  für alle  $i = 0, \dots, N - 1$ . Daraus ergibt sich das einfache Gesetz zur Bildung der Gitterpunkte

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{mit} \quad h = \frac{t_f - t_0}{N}.$$

Grundsätzlich können hier zwei unterschiedliche Diskretisierungsansätze unterschieden werden: die *volle Diskretisierung* und die *reduzierte Diskretisierung*, die im Folgenden diskutiert werden.

### Steuerungsdiskretisierung

Die Steuerung  $u$  kann auf verschiedene Arten diskretisiert werden. Einige Methoden basieren auf einer globalen Approximation der Steuerung. In [Kang et al., 2008] werden beispielsweise Pseudospektralmethoden verwendet, bei denen die Steuerung mit Hilfe von global definierten Legendre-Polynomen angenähert wird. Ein Nachteil dieser Methoden kann darin gesehen werden, dass sich eine Änderung eines Gewichtungsparmeters der Diskretisierung global auf das Verhalten der Steuerung auswirkt. Um diesen Punkt zu umgehen, können Approximationen verwendet werden, die jeweils nur lokale Träger besitzen, also außerhalb eines kompakten Intervalls identisch Null sind. Damit ändert eine Variation eines Diskretisierungsparameters die Steuerung lediglich auf dem Bereich, auf den die jeweilige Basisfunktion wirkt. Ein Beispiel für solch eine Approximation bietet die *B-Spline* (*Basic-Spline*) Darstellung. Für über die hier dargestellten Details hinausgehende Informationen sei auf [Gerdtts, 2012], [Hanke-Bourgeois, 2009] und [Hämmerlin und Hoffmann, 1994] verwiesen.

#### Definition 3.25: Spline

Ein Spline  $s$  auf dem Intervall  $[t_0, t_f]$  heißt Spline der Ordnung  $k$ , falls gilt:

1.  $s$  ist eine  $k - 1$  mal stetig differenzierbare Funktion auf  $[t_0, t_f]$ .
2. Es gibt Stützstellen  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ , so dass  $s$  auf jedem Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$  ein Polynom vom Grad  $k$  ist.
3. Die Menge der Splines der Ordnung  $k$  wird mit  $S_k(t_0, t_1, \dots, t_N)$  bezeichnet.

Für die Wahl einer Basis kann die folgende Menge verwendet werden, vgl. [Hämmerlin und Hoffmann, 1994]:

$$B_k = \left\{ 1, t, t^2, \dots, t^k, (t - t_1)_+^k, \dots, (t - t_{N-1})_+^k \right\},$$

wobei

$$(t - t_i)_+ := \begin{cases} 0 & t \leq t_i \\ t - t_i & t > t_i \end{cases}$$

gilt. Diese Basis besitzt den oben bereits erwähnten Nachteil, dass die Basisfunktionen keinen kompakten Träger haben. Bei B-Splines wird eine andere Basis gewählt, deren Elemente jeweils nur auf einem kompakten Teilintervall von Null verschieden sind.

**Definition 3.26: B-Spline**

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G}_N$  definiert wie in (3.28). Für das Hilfsgitter

$$\mathcal{G}_N^k := \{\tau_i \mid i = 1, \dots, N + 2k - 1\}$$

seien die Hilfsgitterpunkte definiert als

$$\tau_i := \begin{cases} t_0 & \text{wenn } 1 \leq i \leq k, \\ t_{i-k} & \text{wenn } k+1 \leq i \leq N+k-1, \\ t_N & \text{wenn } N+k \leq i \leq N+2k-1. \end{cases}$$

Die *B-Splines*  $B_i^k(\cdot)$  der Ordnung  $k$ ,  $i = 1, \dots, N+k-1$ , werden mittels der rekursiven Formel

$$B_i^1(t) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$B_i^k(t) := \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} B_i^{k-1}(t) + \frac{\tau_{i+k} - t}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}} B_{i+k}^{k-1}(t)$$

gebildet.

Die so definierten B-Splines besitzen die folgenden Eigenschaften:

- Die  $B_i^k(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N+k-1$  sind auf den Intervallen  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , Polynome vom Höchstgrad  $k-1$ .
- Sie bilden eine Basis des Spline-Raums  $S_{k-1}(t_0, t_1, \dots, t_N)$ .
- Sie haben einen kompakten Träger

$$B_i^k(t) \begin{cases} > 0 & \text{wenn } t \in (\tau_i, \tau_{i+k}), \\ = 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{für } k > 1.$$

- Sie sind essentiell beschränkt, d.h.  $B_i^k(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_f])$ .

Von praktischer Relevanz sind besonders die B-Splines der Ordnung  $k=1$ , welche den Raum der stückweise konstanten Funktionen aufspannen, sowie  $k=2$ , die die stückweise linearen Funktionen erzeugen. Der Fall  $k=4$  liefert ebenfalls einen interessanten Raum, da bei Funktionen, die durch kubische Splines aufgespannt werden, mit dem Auge keine Knicke der Funktion mehr feststellbar sind. Die diskretisierte Steuerung  $u_M(\cdot)$  ergibt sich für die gewählte Ordnung  $k$  des Splines und des Steuerungsgitters  $\mathcal{G}_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  aus der Menge

$$\mathcal{U}_M := \left\{ \sum_{i=1}^{N+k-1} \omega_i B_i^k(\cdot) \mid \omega_i \in \mathbb{R}^{n_u}, i = 1, \dots, N+k-1 \right\}. \quad (3.29)$$

Sie hängt nun von den endlich vielen Gewichten  $\omega_i$  ab und kann formal geschrieben werden als

$$u_M(t) := u_M(t; \omega) = u_M(t; \omega_1, \dots, \omega_{N+k-1}),$$

wobei hier auch wieder daran zu denken ist, dass  $\omega_i \in \mathbb{R}^{n_u}$  gilt. Die Anzahl der Steuerungsparameter ist demnach  $M = n_u(N+k-1)$ . Außerdem gilt auch für  $\mathcal{U}_M([t_0, t_f]) \subset L_\infty([t_0, t_f])$ .

Die in dieser Arbeit verwendeten Steuerungen werden durchweg mit einer stückweise konstanten Steuerung ( $k = 1$ ) berechnet, da dies eine einfache Implementierung auf Versuchsständen ermöglicht.

### Diskretisierung der Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen

Nun wird die Diskretisierung der Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen betrachtet. Dazu werden die Funktionen  $c$  und  $s$  lediglich an den Gitterpunkten  $t_i \in \mathcal{G}_N$  ausgewertet.

$$\begin{aligned} c(t_i, x(t_i), u(t_i)) &\leq 0_{n_c}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ s(t_i, x(t_i)) &\leq 0_{n_s}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Damit ist nicht gesichert, dass die Beschränkungen auch zwischen den Stützstellen erfüllt sind. Mit der Bezeichnung für den diskretisierten Zustand  $x(t_i) \approx x_i$  und  $\bar{x}^\top = [x_0, x_1, \dots, x_N, \omega]$ , lässt sich dies zusammenfassen zu

$$G(\bar{x}) = \begin{pmatrix} c(t_0, x_0, u_M(t_0; \omega)) \\ c(t_1, x_1, u_M(t_1; \omega)) \\ \vdots \\ c(t_N, x_N, u_M(t_N; \omega)) \\ s(t_0, x_0) \\ s(t_1, x_1) \\ \vdots \\ s(t_N, x_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_c+n_s)(N+1)}. \quad (3.30)$$

Die Randbedingung (3.17) schreibt sich damit als

$$\psi(x_0, x_N) = 0_{n_\psi}.$$

### Diskretisierung der Differentialgleichung

Nun soll kurz auf die Diskretisierung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_f]$$

eingegangen werden. Da es sich in dem hier vorliegenden Fall stets um Anfangswertprobleme handelt, kann eine Randbedingung aus Gleichung (3.17) geschrieben werden als

$$\psi_i(x(t_0), x(t_f)) = x_i(t_0) - x_{0,i}, \quad i = 1, \dots, n_x,$$

weil der Zustand zum Zeitpunkt  $t_0$  durch  $x(t_0) = x_0$  vorgegeben ist. Es wurde hier der Einfachheit wegen angenommen, dass die Anfangsbedingungen als die ersten  $n_x$  Gleichungen von  $\psi$  dargestellt werden.

Bei dieser Diskretisierung soll dasselbe Gitter  $\mathcal{G}_N$  verwendet werden. Es wird also eine Approximation des Zustands  $x$  zu den Zeitpunkten  $t_i, i = 0, \dots, N$ , gesucht. Die Theorie zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen, vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], [Gerdtts, 2012] und [Collatz, 2013], liefert verschiedene Methoden zur Lösung dieses Problems. Es gibt explizite und implizite Verfahren, Ein- und Mehrschrittverfahren, sowie Verfahren mit und ohne Schrittweitensteuerung. In dieser Arbeit werden lediglich allgemeine Einschrittverfahren vorgestellt, da diese auch in der späteren numerischen Betrachtung Verwendung finden. Diese sind folgendermaßen definiert:



**Definition 3.27: Einschrittverfahren für diskretisierte Optimalsteuerungsprobleme**

Seien  $u_M(\cdot; \omega)$  mit Gewichten  $\omega := [\omega_1, \dots, \omega_M]^\top$ ,  $\omega_i \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $i = 1, \dots, M$ , und Basis-Funktionen  $B_i : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, M$ , gegeben. Sei  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  eine gegebene stetige Funktion und  $\mathcal{G}_N$  ein Diskretisierungsgitter. Das Verfahren

$$\begin{aligned} x_N(t_0) &= x_0, \\ x_N(t_{i+1}) &= x_N(t_i) + h_i \phi(t_i, x_N(t_i), \omega, h_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

heißt *Einschrittverfahren* und die Funktion  $\phi$  *Inkrementfunktion*.

Das einfachste Einschrittverfahren stellt das explizite Euler-Verfahren dar. Dabei wird die rechte Seite der Differentialgleichung an der aktuellen Stelle ausgewertet und mit diesem Wert ein Schritt mit der Diskretisierungsschrittweite  $h_i$  durchgeführt. Es gilt  $\phi(t_i, x_N(t_i), \omega, h_i) = f(t_i, x(t_i), u_M(t_i; \omega))$  und damit

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + h_i f(t_i, x(t_i), u_M(t_i; \omega)).$$

Aufgrund der entstehenden Trajektorien wird das explizite Euler-Verfahren häufig auch als Polygonzugverfahren bezeichnet.

Die Approximationseigenschaft eines Einschrittverfahrens wird mit der so genannten *Konvergenzordnung* beschrieben. Diese beschreibt das Verhalten des maximalen Fehlers des Verfahrens bzgl. der Lösung der Differentialgleichung, wenn die Anzahl der Diskretisierungspunkte erhöht wird. Ein Einschrittverfahren hat Konvergenzordnung  $q$ , wenn gilt

$$\max_{i=0, \dots, N} \|x_N(t_i) - x(t_i)\|_2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^q}\right) \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Die Konvergenz kann mit Hilfe der lokalen Konsistenz und der Stabilität des Verfahrens nachgewiesen werden. Für weitere Details siehe [Gerds, 2012].

Das eben beschriebene Euler-Verfahren besitzt, Stabilität vorausgesetzt, Konvergenzordnung  $q = 1$ . Für eine hinreichend exakte Approximation, die keine allzu hohe Anzahl an Diskretisierungspunkten voraussetzt, wird eine höhere Konvergenzordnung benötigt. Ein Verfahren höherer Ordnung ( $q = 2$ ) stellt beispielsweise das Verfahren von Heun dar. Hier gilt

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f(t_i, x_N(t_i), u_M(t_i, \omega)), \\ \eta_2 &= f(t_i + h_i, x_N(t_i) + h_i \eta_1, u_M(t_{i+1}; \omega)), \\ \phi(t_i, x_N(t_i), \omega, h_i) &= \frac{h_i}{2} (\eta_1 + \eta_2). \end{aligned}$$

Es können Verfahren höherer Ordnung konstruiert werden, die alle in die Klasse der *Runge-Kutta-Verfahren* zusammengefasst sind. Die Verfahren von Euler und Heun sind lediglich die einfachsten Vertreter dieser Klasse.

### Volle Diskretisierung

Mit einem gewählten Einschrittverfahren kann die Differentialgleichung nun diskretisiert werden, indem jeder Schritt des Verfahrens in eine zusätzliche Gleichungsnebenbedingung des Optimierungsproblems umformuliert wird. Die hinzu kommenden Nebenbedingungen lauten mit der Bezeichnung  $x_i := x_N(t_i)$  damit

$$x_i + h_i \phi(t_i, x_i, \omega, h_i) - x_{i+1} = 0_{\mathbb{R}^{n_x}}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Die Anzahl der Gleichungsnebenbedingungen, die durch die Differentialgleichung hinzu kommen, ist  $N \cdot n_x$ . Werden alle Gleichungsnebenbedingungen mit der Bezeichnung  $\bar{x}^\top = [x_0, x_1, \dots, x_N, \omega] \in \mathbb{R}^{(N+1)n_x + M}$  zusammengefasst, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_0 + h_0 \phi(t_0, x_0, \omega, h_0) - x_1 \\ x_1 + h_1 \phi(t_1, x_1, \omega, h_1) - x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} + h_{N-1} \phi(t_{N-1}, x_{N-1}, \omega, h_{N-1}) - x_N \\ \psi(x_0, x_N) \end{pmatrix} = 0_{N \cdot n_x + n_\psi}. \quad (3.31)$$

Das hieraus resultierende Optimierungsproblem in Mayer-Form kann nun folgendermaßen dargestellt werden:

#### Problem 3.28: Volldiskretisiertes Optimierungsproblem

Minimiere

$$J(\bar{x}) = \varphi(x_0, x_N)$$

bezüglich aller  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_{\bar{x}}}$  unter den Nebenbedingungen

$$G(\bar{x}) \leq 0_{\mathbb{R}^{n_G}}, \quad H(\bar{x}) = 0_{\mathbb{R}^{n_H}}$$

mit  $G(\bar{x})$  aus (3.30) und  $H(\bar{x})$  aus (3.31).

Da die Dimensionen der Nebenbedingungen und die Anzahl der Optimierungsvariablen von der Anzahl der Gitterpunkte  $N$ , der Ordnung der Steuerungsdiskretisierung  $k$  und den Dimensionen  $n_x, n_u, n_c, n_s$  abhängen, kann diese Zahl hier sehr groß werden. Es können Fälle auftreten, in denen dies in die Millionen geht.

Zur Auswertung der notwendigen Bedingungen aus Satz 3.24 und zur Konstruktion eines Optimierungsverfahrens, vgl. Kapitel 3.2.7, werden die Ableitungen bzgl. der Optimierungsvariablen  $\bar{x}$  benötigt. Diese lassen sich strukturell leicht herleiten.

$$J'(\bar{x}) = \left( \varphi'_{x_N} \mid 0_{\mathbb{R}^{n_x}}^\top \mid \cdots \mid 0_{\mathbb{R}^{n_x}}^\top \mid \varphi'_{x_N} \mid 0_{\mathbb{R}^M}^\top \right)$$

$$G'(\bar{x}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} c'_{x,0} & & & c'_{u,0} u'_{M;\omega,0} & & \\ & c'_{x,1} & & c'_{u,1} u'_{M;\omega,1} & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & c'_{x,N} & c'_{u,N} u'_{M;\omega,N} & \\ \hline s_{x,0} & & & & & \\ & s_{x,1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & s_{x,N} & & \end{array} \right)$$

$$H'(\bar{x}) = \left( \begin{array}{ccc|c} \times_0 & -\mathbb{I}_{n_x} & & h_0\phi_{\omega,0} \\ & \times_1 & -\mathbb{I}_{n_x} & h_1\phi_{\omega,1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times_{N-1} & -\mathbb{I}_{n_x} & h_{N-1}\phi_{\omega,N-1} \\ \hline & \psi_{x,0} & & & \psi_{x,0} & \end{array} \right)$$

mit  $\times_i = \mathbb{I}_{n_x} + h_i\phi'_x(t_i, x_i, \omega, h_i)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ .

Hier bezeichnet der erste Index die Variable nach der abgeleitet und der zweite den Gitterpunkt an dem diese Ableitung ausgewertet wird. Alle Einträge, die hier nicht angegeben sind, werden mit Null befüllt. Man sieht, dass sich eine dünn besetzte Matrix ergibt, die eine spezielle Struktur aufweist. Bei der numerischen Lösung der Gleichungssysteme muss diese berücksichtigt werden, um die Rechenzeiten zu verringern. Ein nicht angepasster Algorithmus würde diese Struktur meist zerstören und vollbesetzte Matrizen erzeugen, was die Effizienz sehr beeinträchtigt. In [Betts und Huffman, 1992], [Betts und Huffman, 1999] und [Gertz und Wright, 2003] werden spezielle Ansätze zur Lösung dünn besetzter Gleichungssysteme vorgestellt, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen wird.

### Teildiskretisierung

Der Ansatz der reduzierten Diskretisierung oder Teildiskretisierung basiert auf der vollen Diskretisierung aus dem vorangegangenen Abschnitt. Hier werden jedoch die Zustandsdiskretisierungen nicht explizit als Gleichungsnebenbedingungen ausgewertet, vgl. Gleichung (3.2.4) und (3.31), sondern es wird auf die Eigenschaft zurück gegriffen, dass der diskretisierte Zustand  $x_{i+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  eindeutig durch den Zustand  $x_i$  am vorherigen Diskretisierungspunkt  $t_i$ , der angewendeten Steuerung  $u_M(t_i, \omega)$  und des verwendeten Einschrittverfahrens  $\phi$  definiert ist. Es gilt die Rekursionsvorschrift

$$x_{i+1} = x_i + h_i\phi(t_i, x_i, \omega, h_i).$$

Führt man dies bis auf den Anfangszustand zurück, so stellt man fest, dass lediglich eine Abhängigkeit vom Anfangszustand und der gewählten Steuerungsdiskretisierung, also den Steuerungsparametern  $\omega$ , besteht.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i\phi(t_i, x_i, u_M(t_i; \omega), h_i) \\ &= x_{i-1} + h_{i-1}\phi(t_{i-1}, x_{i-1}, u_M(t_{i-1}; \omega), h_{i-1}) + h_i\phi(t_i, x_i, u_M(t_i; \omega), h_i) \\ &= \dots = x_0 + \sum_{k=0}^i h_k\phi(t_k, x_k, u_M(t_k; \omega), h_k) \\ &= X_{i+1}(x_0, \omega). \end{aligned}$$

Dies ist keine unerwartete Beobachtung, denn bei festem Anfangswert  $x_0$  und vorgegebener Steuerung ist der Zustand zu allen Zeiten festgelegt und muss lediglich mit Hilfe der zugrunde liegenden Differentialgleichung berechnet werden. Das daraus resultierende Optimierungsproblem, wieder als Mayer-Problem dargestellt, besitzt folgende Gestalt:

**Problem 3.29: Teildiskretisiertes Optimierungsproblem**

Minimiere

$$J(x_0, \omega) = \varphi(x_0, x_N(x_0, \omega))$$

bezüglich aller  $\omega \in \mathbb{R}^M$  unter den Nebenbedingungen

$$G(x_0, \omega) \leq 0 \quad \text{und} \quad H(x_0, \omega) = 0.$$

Wobei hier die Nebenbedingungen die Form

$$G(x_0, \omega) = \begin{pmatrix} c(t_0, X_0(x_0, \omega), u_M(t_0; \omega)) \\ \vdots \\ c(t_N, X_N(x_N, \omega), u_M(t_N; \omega)) \\ s(t_0, X_0(x_0, \omega)) \\ \vdots \\ s(t_N, X_N(x_N, \omega)) \end{pmatrix}$$

$$H(x_0, \omega) = \psi(X_0(x_0, \omega), X_N(x_0, \omega))$$

besitzen.

Hier wird klar, dass lediglich eine Optimierung bezüglich der Steuerung durchgeführt wird und die Zahl der Optimierungsvariablen damit deutlich kleiner wird. Betrachtet man analog zur vollen Diskretisierung die entstehenden Ableitungen, so besitzen diese zwar eine deutlich kleinere Dimension, jedoch sind die Matrizen in diesem Fall nicht mehr dünn besetzt und die Bestimmung der Elemente wird komplizierter, da aufgrund der rekursiven Darstellung des Zustands eine mehrfache Anwendung der Kettenregel notwendig ist.

$$J(x_0, \omega) = (\varphi'_{x_0} + \varphi'_{x_N}(x_N(x_0, \omega)) \cdot X'_{N;x_0} \mid \varphi'(x_N(x_0, \omega)) \cdot X'_{N;\omega})$$

$$G'(x_0, \omega) = \begin{pmatrix} c'_{x,0} \cdot X'_{0;x_0} & c'_{x,0} \cdot X'_{0;\omega} + c'_{u,0} \cdot u'_{M;\omega,0} \\ c'_{x,1} \cdot X'_{1;x_0} & c'_{x,1} \cdot X'_{1;\omega} + c'_{u,1} \cdot u'_{M;\omega,1} \\ \vdots & \vdots \\ c'_{x,N} \cdot X'_{N;x_0} & c'_{x,N} \cdot X'_{N;\omega} + c'_{u,N} \cdot u'_{M;\omega,N} \\ \hline s'_{x,0} \cdot X'_{0;x_0} & s'_{x,0} \cdot X'_{0;\omega} \\ s'_{x,1} \cdot X'_{1;x_0} & s'_{x,1} \cdot X'_{1;\omega} \\ \vdots & \vdots \\ s'_{x,N} \cdot X'_{N;x_0} & s'_{x,N} \cdot X'_{N;\omega} \end{pmatrix}$$

$$H'(x_0, \omega) = (\psi'_{x_0} \cdot X'_{0;x_0} + \psi'_{x_f} \cdot X'_{N;x_0} \mid \psi'_{x_0} \cdot X'_{0;\omega} + \psi'_{x_f} \cdot X'_{N;\omega})$$

Die hierbei auftretenden Ableitungen der diskretisierten Zustände nach dem Anfangszustand bzw. der Steuerungsparametrisierung

$$X'_{i;x_0}, \quad X'_{i;\omega}, \quad i \in 0, 1, \dots, N,$$

werden Sensitivitäten genannt. Wie diese berechnet werden können ist in [Gerdtts, 2012] dargestellt. Es zeigt sich, dass sich die Bestimmung der Ableitungen im Fall der Teildiskretisierung wesentlich

komplizierter gestaltet, als es bei der vollen Diskretisierung der Fall ist. Dieser Nachteil muss für die Reduzierung der Dimension des Optimierungsproblems in Kauf genommen werden.

In allen folgenden Beispielen wird auf die reduzierte Diskretisierung zurückgegriffen, was auch den Beweggrund für deren Einführung darstellt.

### 3.2.5 Notwendige und hinreichende Bedingungen für endlichdimensionale Optimierungsprobleme

Im Folgenden werden die in Kapitel 3.2.3 gezeigten Bedingungen für endlichdimensionale Optimierungsprobleme formuliert. Da es sich hier um ein allgemeines Optimierungsproblem handelt, wird auf die spezielle Schreibweise aus den vorherigen Kapiteln verzichtet. Die Optimierungsvariable wird mit  $x$  bezeichnet und besitzt die Dimension  $n_x$ . Die betrachtete Problemstellung lautet:

#### Problem 3.30: Endlichdimensionales restringiertes Optimierungsproblem

Minimiere

$$J(x)$$

bezüglich aller  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  unter den Nebenbedingungen

$$H_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n_H, \quad \text{und} \quad G_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_G.$$

Nun sei zuerst angenommen, dass keine Gleichungsrestriktionen existieren, d.h. dass  $n_H = 0$  gilt. Die Zulässige Menge sei in diesem Fall mit  $\Sigma := \{x \mid G_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n_G\} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  bezeichnet und als abgeschlossen und konvex vorausgesetzt. Die notwendige Bedingung aus Satz 3.19 kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

#### Satz 3.31: Notwendige Bedingung endlichdimensionaler Optimierungsprobleme

Sei  $J(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n_x}$  nicht-leer, abgeschlossen und konvex, dann gilt:

1. Wenn  $\hat{x}$  ein lokales Minimum vom Problem 3.30 ist, gilt

$$\nabla J(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma.$$

2. Ist  $J$  konvex, so ist

$$\nabla J(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma,$$

hinreichend für ein globales Minimum von Problem 3.30 in  $\hat{x}$ .

Aufbauend auf diesen Satz lässt sich eine einfache Charakterisierung der notwendigen Bedingung herleiten, vgl. [Geiger und Kanzow, 2013].

#### Satz 3.32: Notwendige Fixpunktgleichung

Sei  $J(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n_x}$  nicht-leer, abgeschlossen und konvex, sowie  $\tau > 0$ , dann gilt

$$\nabla J(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma$$

genau dann, wenn  $x = \hat{x}$  der Fixpunktgleichung

$$x = Proj_{\Sigma}(x - \tau \nabla J(x)) \quad (3.32)$$

genügt.

Da sich in einem Iterationsverfahren die Bedingung aus Gleichung (3.32) leicht überprüfen lässt, liefert dieser Satz eine einfache Möglichkeit, ein Abbruchkriterium für restringierte Optimierungsprobleme zu definieren. Für den unrestringierten Fall erhält man aus (3.32) die Stationaritätsbedingung, dass  $\nabla J(\hat{x}) = 0$  ist.

Die Voraussetzung, dass die zulässige Menge eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Menge ist, ist für den Fall eines komponentenweise beschränkten Zustands erfüllt. Dies trifft bei den betrachteten diskretisierten Optimalsteuerungsproblemen mit boxbeschränkter Steuerung zu.

Für den endlichdimensionalen Fall können die Ungleichungsbeschränkungen folgendermaßen in aktive und inaktive Restriktionen unterteilt werden:

#### Definition 3.33: Aktive Ungleichungsbeschränkungen

Gegeben sei ein Optimierungsproblem 3.13 mit Gleichungsbeschränkungen  $H(x) = 0_{n_H}$  und Ungleichungsbeschränkungen  $G(x) \leq 0_{n_G}$ . Die Menge der *aktiven Ungleichungsbeschränkungen* ist definiert als

$$A(x) := \{1 \leq j \leq n_G \mid G_j(x) = 0\}.$$

$p(x) = \#A(x)$  ist dabei die Anzahl der aktiven Ungleichungen. Analog werden die Indizes, für die die Ungleichung nicht mit Gleichheit erfüllt ist, als *inaktive Restriktionen* bezeichnet.

Die aktiven Beschränkungen geben Auskunft darüber, ob die Restriktion in einer kleinen Umgebung beachtet werden muss oder nicht. Ist eine Ungleichung nicht mit Gleichheit erfüllt, so kann der Optimierungsparameter derart verändert werden, dass sich die Restriktion vergrößert. Ist die Beschränkung aktiv wird der Zustand unzulässig.

Für den Fall mit  $n_H \geq 0$  und keinen Voraussetzungen an die Konvexität der zulässigen Menge wird die Lagrange-Funktion benötigt. Diese ist wie folgt definiert:

#### Definition 3.34: Lagrange-Funktion

Die Funktion

$$L : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_G} \times \mathbb{R}^{n_H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, l_0, \mu, \lambda) = l_0 J(x) + \mu^\top G(x) + \lambda^\top H(x) \quad (3.33)$$

heißt Lagrange-Funktion des restringierten Optimierungsproblems in Problem 3.30.

Dabei heißen  $l_0, \mu$  und  $\lambda$  *Lagrange-Multiplikatoren* oder einfach nur Multiplikatoren. Im Falle eines KKT-Punktes kann  $l_0 = 1$  gesetzt werden und muss dann nicht explizit als Argument aufgeführt werden, d.h.  $L = L(x, \mu, \lambda)$ .

Mit diesen Bezeichnungen ist es möglich, die KKT-Bedingungen für Problem 3.30 anzugeben.

**Satz 3.35: KKT-Bedingungen für endlichdimensionale Optimierungsprobleme**

Betrachtet wird Problem 3.30 mit stetig differenzierbaren Funktionen  $J, G$  und  $H$ . Sei  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  ein lokales Minimum und sei zusätzlich die Bedingung der linearen Unabhängigkeit aus Definition 3.23 erfüllt, dann existieren eindeutig bestimmte Multiplikatoren  $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^{n_G}$  und  $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_H}$ , so dass das Tripel  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$  ein KKT-Punkt des Problems ist, d.h. es gilt

$$\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = 0, \quad (3.34a)$$

$$H(\hat{x}) = 0, \quad (3.34b)$$

$$\hat{\mu} \geq 0, \quad G(\hat{x}) \leq 0, \quad \hat{\mu}^\top G(\hat{x}) = 0. \quad (3.34c)$$

Ausgeschrieben liefert Gleichung (3.34a) folgende Gleichung:

$$\nabla J(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{n_H} \hat{\lambda}_j \nabla H_j(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{n_G} \hat{\mu}_i \nabla G_i(\hat{x}) = 0. \quad (3.35)$$

Für ein unbeschränktes Problem vereinfacht sich dies wieder zu der bekannten Bedingung, dass  $\nabla J(\hat{x}) = 0$  in einem lokalen Minimum gilt. Gleichung (3.34b) liefert eine Zulässigkeit bzgl. der Gleichungsrestriktionen und die Komplementaritätsbedingung (3.34c) garantiert, dass die Ungleichungsbeschränkungen eingehalten werden. Dabei gilt  $\hat{\mu}_i G_i(\hat{x}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n_G$ . Geometrisch lässt sich die Komplementaritätsbedingung an einem Beispiel ohne Gleichungsrestriktionen erläutern, d.h. es gilt

$$\min J(x), \quad u.d.Nb. \quad G(x) \leq 0.$$

Sei dazu  $\hat{x}$  ein KKT-Punkt des Problems, so gilt

$$\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = \nabla J(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{n_G} \hat{\mu}_i \nabla G_i(\hat{x}) = 0,$$

also

$$-\nabla J(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{n_G} \hat{\mu}_i \nabla G_i(\hat{x}).$$

Da für  $G_i(\hat{x}) \neq 0$   $\hat{\mu}_i = 0$  gilt liegt der negative Gradient, also eine mögliche Abstiegsrichtung in dem Kegel, der von den Gradienten der aktiven Ungleichungsbeschränkungen erzeugt wird. Eine mögliche Verbesserung der Zielfunktion ist somit nur möglich, indem man den zulässigen Bereich verlässt.

Als letztes wird nun noch eine hinreichende Optimalitätsbedingung angegeben. Dabei handelt es sich um eine Bedingung zweiter Ordnung.

**Satz 3.36: Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung**

Betrachtet wird Problem 3.30 mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $J, G$  und  $H$ . Sei  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$  ein KKT-Punkt von Problem 3.30 mit

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) d > 0 \quad (3.36)$$

für alle  $d \in T_C(\Sigma, \hat{x})$  mit  $d \neq 0_{n_x}$ .

Dann gibt es eine Umgebung  $B_\varepsilon(\hat{x})$  von  $\hat{x}$  und ein  $\alpha > 0$ , so dass

$$J(x) \geq J(\hat{x}) + \alpha \|x - \hat{x}\|$$

für alle  $x \in \Sigma \cap B_\varepsilon(\hat{x})$  gilt.

Unter der positiven Definitheit der zweiten Ableitung der Lagrangefunktion auf  $T_C(\Sigma, \hat{x})$  existiert demnach eine Umgebung, in der die Zielfunktion durch eine lineare Funktion von unten beschränkt werden kann. Dabei ist  $T_C(\Sigma, \hat{x})$  der in  $\hat{x}$  zugehörige kritische Kegel. Dieser lässt sich schreiben als

$$T_C(\Sigma, \hat{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^{n_x} \left| \begin{array}{l} \nabla H_j(\hat{x})^\top d = 0, \quad j = 1, \dots, n_H, \\ \nabla G_i(\hat{x})^\top d \leq 0, \quad i \in A(\hat{x}), \mu_i = 0, \\ \nabla G_i(\hat{x})^\top d = 0, \quad i \in A(\hat{x}), \mu_i > 0 \end{array} \right. \right\}. \quad (3.37)$$

Zum Vergleich sei hier der linearisierte Kegel aus Definition 3.17 für den endlichdimensionalen Fall angegeben:

$$T_{lin}(\Sigma, \hat{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^{n_x} \left| \begin{array}{l} \nabla H_j(\hat{x})^\top d = 0, \quad j = 1, \dots, n_H, \\ \nabla G_i(\hat{x})^\top d \leq 0, \quad i \in A(\hat{x}) \end{array} \right. \right\}. \quad (3.38)$$

Man erkennt, dass der kritische Kegel (3.37) eine Teilmenge des linearisierten Kegels (3.38) ist. Der Name gründet sich aus der Eigenschaft, dass die Richtungen  $d \in T_C(\Sigma, \hat{x})$  die Richtungsableitung  $\nabla J(\hat{x})^\top d$  aufgrund der KKT-Bedingungen verschwinden lassen. Dazu wird  $\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})^\top d$  betrachtet.

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})^\top d &= \nabla J(\hat{x})^\top d + \sum_{j=1}^{n_H} \hat{\lambda} \nabla H_j(\hat{x})^\top d + \sum_{i=1}^{n_G} \hat{\mu}_i \nabla G_i(\hat{x})^\top d \\ &= \nabla J(\hat{x})^\top d + \sum_{j=1}^{n_H} \hat{\lambda} \nabla H_j(\hat{x})^\top d + \sum_{i \in I_A(\hat{x})} \hat{\mu}_i \nabla G_i(\hat{x})^\top d \\ &= \nabla J(\hat{x})^\top d = 0. \end{aligned}$$

Aus diesem Grund ist für diese Richtungen keine Aussage über das lokale Verhalten der Zielfunktion möglich und es muss für diese die zusätzliche Bedingung 2.Ordnung (3.36) gelten.

### 3.2.6 Dualität

In Kapitel 5.4 über Support-Vektor-Maschinen wird der Begriff der Dualität eine wichtige Rolle spielen, weshalb dieser nun eingeführt wird, vgl. [Geiger und Kanzow, 2013, Ulbrich und Ulbrich, 2012]. Dafür wird die bisher vorgestellt Formulierung eines Optimierungsproblems als primale Form bezeichnet.

#### Problem 3.37: Primalproblem

Minimiere  $J(x)$  bzgl. aller  $x \in \Sigma$  unter den Nebenbedingungen

$$H_j(x) = 0, j = 1, \dots, n_H, \quad \text{und} \quad G_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n_G.$$

Das hierzu duale Problem benötigt die folgende Funktion:

#### Definition 3.38: Duale Zielfunktion

Die Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^{n_H+n_G} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

mit

$$\phi(\lambda, \mu) := \inf_{x \in \Sigma} L(x, l_0 = 1, \mu, \lambda) = J(x) + \mu^\top G(x) + \lambda^\top H(x)$$

heißt *duale Zielfunktion* von Problem 3.37

Das duale Problem zielt nun auf die Maximierung der dualen Zielfunktion bzgl. der Lagrange-Multiplikatoren ab. Es besitzt die Problemformulierung:



**Problem 3.39: Dualproblem**

Maximiere  $\phi(\lambda, \mu)$  unter den Nebenbedingungen

$$\mu \geq 0, \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n_H}.$$

Häufig bildet die duale Formulierung ein einfacher zu lösendes Optimierungsproblem, weshalb diese Transformation angewendet wird.

**Beispiel - Quadratisches Optimierungsproblem**

Dieses Beispiel soll anhand eines gegebenen primalen quadratischen Optimierungsproblems die Formulierung des zugehörigen dualen Problems zeigen. Dieses Beispiel stammt aus [Cristianini und Shawe-Taylor, 2000]. Die Notation wird hier passend zur späteren Anwendung der Support-Vektor-Maschinen gewählt. Gegeben sei das folgende quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{w \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} w^\top Q w, \\ \text{u.d.Nb.:} \quad & X w - c \leq 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Dabei sei  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, positiv definite Matrix,  $c \in \mathbb{R}^m$  und  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Das zugehörige duale Problem ergibt sich als:

$$\begin{aligned} \max \quad \phi(\alpha) = \inf_w \quad & \left( \frac{1}{2} w^\top Q w + \alpha^\top (X w - c) \right), \\ \text{u.d.Nb.:} \quad & \alpha \geq 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

mit der dualen Variablen  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ .

Vorausgesetzt, dass der zulässige Bereich nicht leer ist, kann das eindeutige Minimum der quadratischen Lagrangefunktion bzgl.  $w$  durch Auflösen der notwendigen Bedingung erster Ordnung bestimmt werden.

$$\nabla_w L(w, \alpha) = Q w + X^\top \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = -Q^{-1} X^\top \alpha$$

Einsetzen dieser Beziehung in (3.40) liefert

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \frac{1}{2} \left( Q^{-1} X^\top \alpha \right)^\top Q \left( Q^{-1} X^\top \alpha \right) + \alpha^\top \left( -X Q^{-1} X^\top \alpha - c \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha^\top X Q^{-1} X^\top \alpha - \alpha^\top X Q^{-1} X^\top \alpha - \alpha^\top c \\ &= -\frac{1}{2} \alpha^\top X Q^{-1} X^\top \alpha - \alpha^\top c. \end{aligned}$$

Damit kann mit der Abkürzung  $P = X Q^{-1} X^\top$  das duale Problem geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \max \quad \phi(\alpha) &= -\frac{1}{2} \alpha^\top P \alpha - \alpha^\top c, \\ \text{u.d.Nb.:} \quad & \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Dies stellt wieder ein quadratisches Programm dar, jedoch besitzt dieses einfachere Beschränkungen als die ursprüngliche primale Formulierung.

### 3.2.7 Sequentielle-Quadratische-Programmierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer kurzen Einführung in ein Lösungsverfahren des diskretisierten Optimalsteuerungsproblems. Es wird das so genannte *Sequential-Quadratic-Programming-Verfahren*, kurz SQP-Verfahren, herangezogen. Die Erläuterungen orientieren sich an den Arbeiten [Kraft, 1988], [Geiger und Kanzow, 1999], [Gerds, 2012], [Gerds und Lempio, 2011] und [Ulbrich und Ulbrich, 2012] sowie den darin referenzierten Quellen. Es existieren noch weitere Verfahren zur Lösung des hier betrachteten Problems, wie beispielsweise Innere-Punkt-Verfahren und Multiplikator-Penalty-Methoden.

#### Lagrange-Newton-Verfahren

Zur Herleitung des SQP-Verfahrens wird nun zuerst das *Lagrange-Newton-Verfahren* erläutert. Dabei wird ein Gleichungsrestringiertes endlichdimensionales Optimierungsproblem betrachtet.

##### Problem 3.40: Lagrange-Newton-Problem

Seien  $J, H_j : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n_H$ , zweimal stetig differenzierbar und  $H = (H_1, \dots, H_{n_H})^\top$ .

Minimiere  $J(x)$  bzgl. aller  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  unter den Nebenbedingungen

$$H_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n_H.$$

Betrachtet man die notwendigen Bedingungen (KKT-Bedingungen) von Problem 3.40 mit der Lagrange-Funktion aus Definition 3.34, so schreiben sich diese nach Satz 3.35 folgendermaßen:

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla J(x) + \lambda^\top \nabla H(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Das Lagrange-Newton-Verfahren zielt nun auf das Finden eines KKT-Punktes, der die notwendigen Bedingungen (3.41) erfüllt, also eine Nullstelle der nichtlinearen Gleichung

$$T(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}) \\ H(\hat{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

ist. Zur Lösung dieses Problems wird, wie es der Name bereits andeutet, das Newton-Verfahren verwendet. Dieses berechnet bei geeignetem Startwert eine Nullstelle eines nichtlinearen Gleichungssystems, wie es in Gleichung (3.42) vorliegt.

##### Problem 3.41: Nullstellensuche

Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Gesucht ist eine Lösung  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  des nichtlinearen Gleichungssystems

$$F(x) = 0.$$

Das Newton-Verfahren zur Lösung von Problem 3.41 ergibt folgenden Algorithmus:

**Algorithmus 3.42: Newton-Verfahren**

- (0) Wähle  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  und setze  $k := 0$ .
- (1) Ist  $F(x^k) = 0$ : STOP.
- (2) Bestimme  $d^k \in \mathbb{R}^n$  als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$F'(x^k)d = -F(x^k).$$

- (3) Setze  $x^{k+1} = x^k + d^k$ ,  $k \leftarrow k + 1$ , und gehe zu (1).

Das Newton-Verfahren besitzt unter der Voraussetzung, dass die Ableitung von  $F$  lokal Lipschitz-stetig ist, quadratische Konvergenz in einer Umgebung der Nullstelle und konvergiert, falls diese Eigenschaft nicht erfüllt ist, immerhin noch superlinear.

Wie bereits erwähnt, soll das Newton-Verfahren auf die notwendigen Bedingungen erster Ordnung angewandt werden, um einen KKT-Punkt zu bestimmen. Dies ist auch das Vorgehen beim Newton-Verfahren zur Minimierung einer gegebenen Funktion  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Die notwendige Bedingung, dass die erste Ableitung in einem Minimum verschwindet, also  $\nabla F(\hat{x}) = 0$  gilt, liefert das Verfahren

$$x^{k+1} = x^k - \nabla^2 F(x^k)^{-1} \nabla F(x^k), \quad k \in \mathbb{N}$$

was lediglich einen Spezialfall des oben beschriebenen Newton-Verfahrens für nichtlineare Gleichungssysteme darstellt.

Das Lagrange-Newton-Verfahren ist eine Anwendung des eben beschriebenen Verfahrens auf die notwendigen Bedingungen (3.42) für Problem 3.40. Es lässt sich in folgendem Algorithmus zusammenfassen:

**Algorithmus 3.43: Lagrange-Newton-Verfahren**

- (0) Wähle  $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_H}$ , und setze  $k = 0$ .

- (1) Ist

$$T(x^k, \lambda^k) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x^k, \lambda^k) \\ H(x^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

STOP.

- (2) Berechne  $(\Delta x, \Delta \lambda) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_H}$  als Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$T'(x^k, \lambda^k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = -T(x^k, \lambda^k) \quad (3.43)$$

mit

$$T'(x^k, \lambda^k) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) & H'(x^k)^\top \\ H'(x^k) & 0 \end{pmatrix}.$$

- (3) Setze  $[x^{k+1}, \lambda^{k+1}] = [x^k, \lambda^k] + [\Delta x, \Delta \lambda]$ ,  $k \leftarrow k + 1$  und gehe zu (1).

Der folgende Satz liefert Voraussetzungen für die oben erwähnte lokale quadratische Konvergenz des Lagrange-Newton-Verfahrens.

**Satz 3.44: Konvergenz des Lagrange-Newton-Verfahrens**

Annahmen:

1. Sei  $(\hat{x}, \hat{\lambda})$  ein KKT-Punkt.
2. Seien  $J, H_j, j = 1, \dots, n_H$ , zweimal stetig differenzierbar mit Lipschitz-stetiger zweiter Ableitung.
3. Sei die KKT-Matrix

$$T'(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\lambda}) & H'(\hat{x})^\top \\ H'(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

regulär.

Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , s.d. das Lagrange-Newton-Verfahren für alle  $(x^0, \lambda^0) \in B_\varepsilon(\hat{x}, \hat{\lambda})$  konvergiert. Des Weiteren existiert eine Konstante  $C \geq 0$ , s.d. für alle hinreichend großen  $k$  gilt

$$\|(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) - (\hat{x}, \hat{\lambda})\| \leq C \|(x^k, \lambda^k) - (\hat{x}, \hat{\lambda})\|^2,$$

d.h. die Konvergenzrate ist quadratisch.

Die Annahme, dass die KKT-Matrix (3.44) regulär ist kann unter folgenden Voraussetzungen garantiert werden:

**Bemerkung 3.45: Regularität der KKT-Matrix**

Die KKT-Matrix aus Gleichung (3.44) ist regulär, wenn gilt:

1. Die Gradienten  $\nabla H_j(\hat{x}), j = 1, \dots, n_H$  sind linear unabhängig (LICQ-Bedingung)
2. Es gilt:

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\lambda}) d > 0, \text{ für alle } d \in \mathbb{R}^{n_x}, d \neq 0_{n_x}, \text{ mit } H'(\hat{x})d = 0_{n_H}.$$

Diese Bedingungen sind auch eine hinreichende Bedingung zweiter Ordnung, dass  $\hat{x}$  ein lokales Minimum des Problems darstellt, vgl. dazu Satz 3.36 unter der Annahme, dass keine Ungleichungsrestriktionen vorliegen.

**Sequentielle-Quadratische-Programmierung**

Beim SQP-Verfahren, siehe [Büskens und Maurer, 2000, Gerds, 2012], werden zusätzlich zu Gleichungsrestriktionen auch Ungleichungsrestriktionen zugelassen, was zu dem folgenden Problem führt.

**Problem 3.46: Restringiertes Optimierungsproblem**

Seien  $J, G_i, H_j : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n_G, j = 1, \dots, n_H$ , zweimal stetig differenzierbar und  $G = (G_1, \dots, G_{n_G})^\top, H = (H_1, \dots, H_{n_H})^\top$ .

Minimiere  $J(x)$  bzgl. aller  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  unter den Nebenbedingungen

$$H_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n_H,$$

$$G_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_G.$$

Wie der Name bereits verrät, werden bei der Sequentiellen-Quadratischen-Programmierung sequentiell, also nacheinander, quadratische Probleme gelöst. Ein quadratisches Optimierungsproblem liegt dann vor, wenn die Zielfunktion quadratisch ist und die Nebenbedingungen affin linear sind. Das quadratische Teilproblem, das beim SQP-Verfahren verwendet wird, besitzt folgende Gestalt.

**Problem 3.47: Quadratisches Minimierungsproblem**

Minimiere

$$\frac{1}{2}d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k, \lambda^k) d + \nabla J(x^k)^\top d$$

bzgl.  $d \in \mathbb{R}^{n_x}$  unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} H(x^k) + H'(x^k)d &= 0_{n_H}, \\ G(x^k) + G'(x^k)d &\leq 0_{n_G}. \end{aligned}$$

Die Motivation für diese Wahl des Problems entstammt der Äquivalenz von Problem 3.47 mit dem Lagrange-Newton-Verfahren aus Algorithmus 3.43, wenn  $n_G = 0$  ist und somit keine Ungleichungsrestriktionen auftreten. Betrachtet man die notwendigen Bedingungen von Problem 3.47 für  $n_G = 0$  in einem Punkt  $(x^k, \lambda^k)$ , so ergeben sich diese aus der Lagrange-Funktion des quadratischen Problems

$$L_{QP}(d, \eta) = \frac{1}{2}d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k, \lambda^k) d + \nabla J(x^k)^\top d + \eta^\top (H(x^k) + H'(x^k)d)$$

zu

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k, \lambda^k) d + \nabla J(x^k)^\top + (H'(x^k))^\top \eta \\ H(x^k) + H'(x^k)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was sich zu dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k, \lambda^k) & (H'(x^k))^\top \\ H'(x^k)d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \eta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla J(x^k)^\top \\ H(x^k) \end{pmatrix}$$

umformen lässt. Eine Subtraktion von  $(H'(x^k))^\top \lambda^k$  auf beiden Seiten liefert dann

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k, \lambda^k) & (H'(x^k))^\top \\ H'(x^k)d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \eta - \lambda^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L(x^k, \lambda^k) \\ H(x^k) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Vergleicht man nun (3.45) mit (3.43), so stellt man fest, dass die beiden Gleichungssysteme mit der Substitution  $\Delta x = d$  und  $\Delta \lambda = \eta - \lambda^k$  identisch sind. Die Aufdatierung aus Algorithmus 3.43 liefert die neuen Iterationspunkte

$$x^{k+1} = x^k + d, \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta \lambda = \eta.$$

Für den Fall, dass lediglich Gleichungsrestriktionen auftreten stimmt das SQP-Verfahren also mit dem Lagrange-Newton-Verfahren überein und hat demnach auch die gleichen Konvergenzeigenschaften. Dass trotz der Hinzunahme von Ungleichungsbeschränkungen dieselben quadratischen Teilprobleme verwendet werden können, zeigt folgender Satz.

**Satz 3.48**

Wenn  $(0, \bar{\eta}, \bar{\xi})$  ein KKT-Punkt des quadratischen Programms aus Problem 3.47 für ein  $(x^k, \mu^k, \lambda^k)$  ist, dann ist  $(x^k, \bar{\eta}, \bar{\xi})$  ein KKT-Punkt des SQP-Problems 3.46.

**Beweis:** Der Beweis gestaltet sich recht einfach, da die Aussage durch Einsetzen gezeigt werden kann. Seien dazu die Nebenbedingungen des quadratischen Problems (QP) definiert als

$$H_{QP}(d) = H(x^k) + H'(x^k)d, \quad G_{QP}(d) = G(x^k) + G'(x^k)d$$

und die Lagrange-Funktion

$$L_{QP}(d, \eta, \xi) = \frac{1}{2}d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k, \lambda^k)d + \nabla J(x^k)^\top d + \eta^\top H_{QP}(d) + \xi^\top G_{QP}(d)$$

Die KKT-Bedingungen im Punkt  $(0, \bar{\eta}, \bar{\xi})$  lauten

$$\begin{aligned} \nabla_x L_{QP}(0, \bar{\eta}, \bar{\xi}) &= \nabla J(x^k)^\top + \bar{\eta}^\top H'(x^k) + \bar{\xi}^\top G'(x^k) = 0, \\ H_{QP}(0) &= H(x^k) = 0, \\ \bar{\xi} &\geq 0, \quad G_{QP}(0) = G(x^k) \leq 0, \quad \bar{\xi}^\top G_{QP}(0) = \bar{\xi}^\top G(x^k) = 0. \end{aligned}$$

Dies sind gerade die KKT-Bedingungen des SQP-Problems, weshalb  $(x^k, \bar{\eta}, \bar{\xi})$  ein KKT-Punkt ist.  $\square$

Das lokale SQP-Verfahren kann damit in folgendem Algorithmus zusammengefasst werden.

#### Algorithmus 3.49: Lokales SQP-Verfahren

- (0) Wähle Startwert  $(x^0, \mu^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_H} \times \mathbb{R}^{n_G}$  und setze  $k = 0$ .
- (1) Falls  $(x^k, \mu^k, \lambda^k)$  ein KKT-Punkt von Problem 3.46 ist: STOP.
- (2) Berechne einen KKT-Punkt  $(d^k, \mu^{k+1}, \lambda^{k+1}) \in \mathbb{R}^{n_x+n_H+n_G}$  des quadratischen Optimierungsproblems 3.47.
- (3) Setze  $x^{k+1} = x^k + d^k, k \leftarrow k + 1$  und gehe zu (1).

Das SQP-Verfahren ist, wie der Algorithmus zeigt, ein zweistufiges Verfahren, das, um die Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems zu finden, in jedem Iterationsschritt ein quadratisches Optimierungsproblem aufstellt und die neue Iterierte durch Addition der gefundenen Suchrichtung  $d^k$  bestimmt. Zur Lösung des quadratischen Teilproblems existieren Verfahren, die diese möglichst effizient lösen können. Zu erwähnen sind hier *Aktive-Mengen-Strategien für quadratische Probleme* und an QP angepasste *Innere-Punkte-Verfahren*, vgl. [Nocedal und Wright, 1999] und [Geiger und Kanzow, 2013]. Auf diese Verfahren wird hier allerdings nicht näher eingegangen.

Die lokalen Konvergenzeigenschaften sind in folgendem Satz formuliert. Ein Beweis kann in [Geiger und Kanzow, 2013] oder [Gerds und Lempio, 2011] gefunden werden.

#### Satz 3.50: Lokaler Konvergenzsatz des SQP-Verfahrens

Sei  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_H} \times \mathbb{R}^{n_G}$  ein KKT-Punkt von Problem 3.46, für den folgende Voraussetzungen gelten:

1.  $J, H_i, i = 1, \dots, n_H, G_j, j = 1, \dots, n_G$  sind zweimal stetig differenzierbar.
2. Die Gradienten  $\nabla H_j(\hat{x}), j = 1, \dots, n_H$ , und  $\nabla G_i(\hat{x}), i \in A(\hat{x}) = \{i \mid G_i(\hat{x}) = 0\}$ , sind linear unabhängig (LICQ).
3. Es gelte die strikte Komplementaritätsbedingung  $\hat{\mu}_i - G_i(\hat{x}) > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n_G$ .

4. Es gelte die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung:

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) d > 0$$

für alle  $d \in \mathbb{R}^{n_x}$  mit  $d \neq 0$ ,  $\nabla H_j(\hat{x})^\top d = 0$ ,  $j = 1, \dots, n_H$ , und  $\nabla G_i(\hat{x})^\top d = 0$ ,  $i \in A(\hat{x})$ .

Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für jeden Startwert  $(x^0, \mu^0, \lambda^0) \in B_\varepsilon(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$  für die durch Algorithmus 3.49 erzeugte Folge  $\{(x^k, \mu^k, \lambda^k)\}$  gilt:

- (a) Das SQP-Verfahren 3.49 ist wohldefiniert und die Folge  $\{(x^k, \mu^k, \lambda^k)\}$  konvergiert superlinear gegen  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$ .
- (b) Sind die zweiten Ableitungen von  $J, H_j, G_i$  zusätzlich Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenzrate quadratisch.

Da die Bestimmung der Hessematrix der Lagrange-Funktion  $\nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k, \lambda^k)$  in jedem Iterationsschritt sehr aufwändig sein kann, wird in der Praxis oft eine geeignete Approximation  $Q^k$  verwendet, wie es auch bei den *Quasi-Newton-Verfahren* gemacht wird. Außerdem kann der Fall auftreten, dass die Hessematrix indefinit ist, was das Lösen der quadratischen Teilprobleme erschwert, da diese dann nicht konvex sind. Häufig kommt die *modifizierte BFGS-Update-Formel* von Powell [Powell, 1978] zur Anwendung, die folgendermaßen definiert ist:

$$Q_{k+1} = Q_k + \frac{q^k (q^k)^\top}{(q^k)^\top d^k} - \frac{Q_k d^k (q^k)^\top Q_k}{(q^k)^\top Q_k d^k},$$

mit

$$\begin{aligned} d^k &= x^{k+1} - x^k, \\ q^k &= \theta_k y^k + (1 - \theta_k) Q_k d^k, \\ y^k &= \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^k) - \nabla_x L(x^k, \lambda^k), \\ \theta_k &= \begin{cases} 1, & \text{wenn } (d^k)^\top y^k \geq 0.2 (d^k)^\top Q_k d^k, \\ \frac{0.8 (d^k)^\top Q_k d^k}{(d^k)^\top Q_k d^k - (d^k)^\top y^k} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Diese garantiert, wenn mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix  $Q^0$  gestartet wird, dass auch alle weiteren Iterierten  $Q^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , symmetrisch und positiv definit sind. Die Symmetrie und die positive Definitheit der Matrix  $Q^k$  ist für die Lösbarkeit des quadratischen Teilproblems hilfreich, da diese beispielsweise bei der Aktive-Mengen-Strategie zur eindeutigen Lösbarkeit benötigt wird. Weil bei Verwendung der modifizierten BFGS-Formel nicht mehr das exakte Optimierungsproblem gelöst wird, geht die quadratische Konvergenz des Verfahrens verloren. Es lässt sich aber immernoch eine lokal superlineare Konvergenz erreichen.

Hier muss angemerkt werden, dass die Iterationen des Verfahrens allerdings nicht zulässig für das gegebene Problem sein müssen. Es ist lediglich sichergestellt, dass bei Konvergenz der Grenzwert die Nebenbedingungen erfüllt.

### Globalisierung des SQP-Verfahrens

Die Konvergenz aus Satz 3.50 liefert lediglich eine lokale Konvergenz in einer unbekanntem, hinreichend kleinen Umgebung. Um auch für beliebige Startwerte eine Konvergenz des Verfahrens zu erreichen, behandelt der nun folgende Abschnitt Globalisierungsmethoden des SQP-Verfahrens. Die Idee besteht darin, einen *Schrittweiten-* oder *Dämpfungsparameter*  $\delta_k$  einzuführen und die Aufdatierung in Schritt (3) aus Algorithmus 3.49 durch

$$x^{k+1} = x^k + \delta_k d^k$$

zu ersetzen. Die Schrittweite wird dabei durch eine Liniensuche entlang der Suchrichtung  $d^k$  bestimmt. Um bei dieser Suche entscheiden zu können, ob ein Punkt nun „besser“ als der aktuelle ist, werden sogenannte Bewertungsfunktionen verwendet. Diese bestimmen einen skalaren Wert, der sowohl vom Zielfunktionswert, als auch von den Verletzungen der Nebenbedingungen abhängt. Allgemein lässt sich eine Bewertungsfunktion schreiben als

$$P_r(x; \eta) := J(x) + \eta \cdot r(x),$$

wobei  $r : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow [0, \infty)$  eine stetige Funktion ist, die die Verletzung der Nebenbedingungen bestraft. Sie besitzt die Eigenschaften

$$r(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Sigma,$$

liefert also den Wert 0, wenn der Zustand sich im zulässigen Bereich  $\Sigma$  befindet und sonst einen positiven Wert. Zur Gewichtung zwischen Zielfunktion und Unzulässigkeit dient der Parameter  $\eta$ . Als Beispiel für eine typische Bewertungsfunktion wird hier die  $l_1$ -Bewertungsfunktion

$$l_1(x; \eta) := J(x) + \eta \left( \sum_{j=1}^{n_H} |H_j(x)| + \sum_{i=1}^{n_G} \max\{0, G_i(x)\} \right)$$

verwendet.

Das globalisierte SQP-Verfahren lässt sich nun folgendermaßen notieren. Dabei wird mit der  $l_1$ -Bewertungsfunktion eine *Armijo-Liniensuche* entlang der Suchrichtung  $d^k$  durchgeführt.

#### Algorithmus 3.51: Globalisiertes SQP-Verfahren

(0) Wähle Startwert  $(x^0, \mu^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_H} \times \mathbb{R}^{n_G}$ ,  $Q_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  symmetrisch und positiv definit,  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\sigma \in (0, 1)$ , und setze  $k = 0$ .

(1) Falls  $(x^k, \mu^k, \lambda^k)$  ein KKT-Punkt des Optimierungsproblems 3.46 ist: STOP

(2) Berechne einen KKT-Punkt  $(d^{k+1}, \mu^{k+1}, \lambda^{k+1}) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_H} \times \mathbb{R}^{n_G}$  des quadratischen Hilfsproblems

Minimiere

$$\frac{1}{2} d^\top Q^k d + \nabla J(x^k)^\top d$$

bzgl.  $d \in \mathbb{R}^{n_x}$  unter den Nebenbedingungen

$$H(x^k) + H'(x^k)d = 0_{n_H},$$

$$G(x^k) + G'(x^k)d \leq 0_{n_G}.$$



(3) Bestimme eine Schrittweite

$$\delta_k := \max \left\{ \beta^j \mid \begin{array}{l} j \in \mathbb{N}_0 \text{ und} \\ l_1(x^k + \beta^j d^k; \eta) \leq l_1(x^k; \eta) + \sigma \beta^j l'_1(x^k; \eta)(d^k) \end{array} \right\}.$$

(4) Berechne symmetrische, positiv definite Matrix  $Q^{k+1}$  (modifiziertes BFGS-Update).

(5) Setze  $x^{k+1} = x^k + \delta_k d^k$ ,  $k \leftarrow k + 1$  und gehe zu (1).

Ein Konvergenzbeweis des Verfahrens kann in [Han, 1977] gefunden werden. Idealerweise befindet man sich nach endlich vielen Schritten in einem Punkt, der als Startwert des lokalen SQP-Verfahrens zulässig ist und ab dem dann die superlineare Konvergenz gilt, womit auch das globale Verfahren diese Konvergenzrate aufweist.

Mit diesem Algorithmus stehen die nötigen Hilfsmittel zur Lösung endlichdimensionaler Optimierungsprobleme zur Verfügung. Es existiert auch eine umfangreiche Theorie zur Lösung optimaler Steuerungsprozesse mit Hilfe der notwendigen Bedingungen der optimalen Steuerung. Da die Implementierung der Beispielprogramme jedoch ausschließlich die diskretisierten endlichdimensionalen Optimierungsprozesse zur Lösung heranzieht, wird hier aus Platzgründen auf diesen Teil der Theorie verzichtet.

### 3.3 Parametrische Sensitivitätsanalyse

Da es sich bei den in dieser Arbeit betrachteten Problemen um Anwendungen handelt, bei denen das Ergebnis der Rechnung möglichst schnell, im Idealfall sogar in *Echtzeit* verfügbar sein muss, wird nun eine Möglichkeit vorgestellt, um eine echtzeitfähige Steuerung für optimale Steuerungsprozesse zu realisieren. Dieses Vorgehen basiert auf der Arbeit von Fiacco [Fiacco, 1983] und wird beispielsweise in [Gerdts, 2012, Gerdts, 2003, Büskens und Maurer, 2001] und [Büskens und Gerdts, 2001] verwendet.

Dazu werden die bisher vorgestellten Optimalsteuerungsprobleme um einen zusätzlichen Parameter  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$  erweitert. Dieser dient zur Definition einander ähnlicher Probleme, die sich lediglich in wenigen Parametern unterscheiden. Dazu wird das Optimalsteuerungsproblem 3.3 folgendermaßen ergänzt:

#### Problem 3.52: Parametrisches Optimalsteuerungsproblem

Gegeben sei das kompakte Zeitintervall  $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$  mit  $t_0 < t_f$ , die Funktionen

$$f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x},$$

$$f_c : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\psi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\psi}$$

$$s : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s},$$

$$c : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c},$$

mit hinreichender Regularität, sowie die nicht-leere Menge der zulässigen Steuerungen  $U$ . Das zugehörige Optimalsteuerungsproblem lautet:

Minimiere die Zielfunktion

$$\varphi(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f), p) + \int_{t_0}^{t_f} f_c(t, x(t), u(t), p) dt \quad (3.46)$$

bezüglich aller

$$x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x} \quad \text{und} \quad u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}, \quad (3.47)$$

die die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), p), \quad (3.48)$$

die Randbedingungen

$$\psi(x(t_0), x(t_f), p) = 0_{n_\psi}, \quad (3.49)$$

die Steuerungs-Zustandsbeschränkungen

$$c(t, x(t), u(t), p) \leq 0_{n_c} \quad (3.50)$$

und die reinen Zustandsbeschränkungen

$$s(t, x(t), p) \leq 0_{n_s} \quad (3.51)$$

für alle  $t \in [t_0, t_f]$  erfüllen.

Der Parameter kann demnach sowohl in der Differentialgleichung, als auch in den Steuerungs- und Zustandsbeschränkungen sowie den Randbedingungen auftreten. Auf die explizite Angabe der zulässigen Steuerungsmenge  $U$  wurde hier verzichtet, da diese Information in den Steuerungs-Zustandsbeschränkungen (3.50) mit aufgenommen werden kann. Dieses Problem kann mit den in Kapitel 3.2.3 und 3.2.4 vorgestellten Techniken in ein endlichdimensionales nichtlineares Optimierungsproblem transformiert werden.

### Problem 3.53: Nichtlineares parametrisches Optimierungsproblem (NLP( $p$ ))

Minimiere

$$J(x, p)$$

bezüglich aller  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  und den Nebenbedingungen

$$H_j(x, p) = 0, \quad j = 1, \dots, n_H,$$

$$G_i(x, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_G.$$

Für ein fest gewähltes  $\hat{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$  ist dieses Problem äquivalent zu Problem 3.30. Die Fragen, die bei diesem Problemtyp von Interesse sind, lauten:

1. Wenn Problem 3.53 für einen *nominellen Parameter*  $\hat{p}$  eine optimale Lösung  $\hat{x}$  besitzt, existiert für ein  $p$  in einer Umgebung von  $\hat{p}$  ebenfalls eine Lösung?
2. Welche Eigenschaften besitzt die Abbildung  $p \mapsto x(p)$ , die den Parameter auf die zugehörige optimale Lösung abbildet in einer Umgebung von  $\hat{p}$ ?

Die Idee, die bei der parametrischen Sensitivitätsanalyse ausgenutzt wird, ist, falls die beiden eben formulierten Fragen mit ja beantwortet werden können und die Abbildung  $p \mapsto x(p)$  sich als geeig-

net differenzierbar herausstellt, die Lösung  $x(p)$  durch die Lösung am nominellen Parameter  $\hat{x}(\hat{p})$  zu approximieren. Dies führt auf die Anwendung des Sensitivitätssatzes von Fiacco [Fiacco, 1983], wofür jedoch starke Voraussetzungen an die nominelle Lösung gefordert werden müssen, die in der folgenden Definition zusammengefasst werden.

**Definition 3.54: Stark-reguläres lokales Minimum**

Ein lokales Minimum  $\hat{x}$  von Problem 3.53 (NLP( $p$ )) heißt stark-regulär, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\hat{x}$  ist zulässig.
2. Die KKT-Bedingungen gelten im Punkt  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$ .
3. Die Bedingung der linearen Unabhängigkeit, Definition 3.22, ist für alle aktiven Beschränkungen erfüllt, d.h. die Gradienten

$$\nabla_x G_i(\hat{x}, \hat{p}), \quad i \in I_A(\hat{x}, \hat{p}), \quad \nabla_x H_j(\hat{x}, \hat{p}), \quad j = 1, \dots, n_H$$

sind linear unabhängig.

4. Die strikte Komplementaritätsbedingung gilt in  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$ , d.h.

$$\hat{\mu}_i - G_i(\hat{x}, \hat{p}) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_G.$$

5. Es gilt

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{p}) d > 0$$

für alle  $d \in T_C(\hat{x}, \hat{p})$  mit  $d \neq 0$ , wobei

$$T_C(\Sigma, \hat{x}, \hat{p}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^{n_x} \left| \begin{array}{l} \nabla_x H_j(\hat{x}, \hat{p}) d = 0, \quad j = 1, \dots, n_H, \\ \nabla_x G_i(\hat{x}, \hat{p}) d \leq 0, \quad i \in I_A(\hat{x}, \hat{p}), \mu_i = 0, \\ \nabla_x G_i(\hat{x}, \hat{p}) d = 0, \quad i \in I_A(\hat{x}, \hat{p}), \mu_i > 0 \end{array} \right. \right\}.$$

der kritische Kegel von Problem 3.53 ist, vgl. (3.37).

Bedingung 5 ist gerade die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung aus Satz 3.36. Damit ist es nun möglich den Sensitivitätssatz zu formulieren.

**Satz 3.55: Sensitivitätssatz**

Seien  $J, G$  und  $H$  definiert wie in Problem 3.53 und zweimal stetig differenzierbar. Sei  $\hat{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$  fest gewählt. Sei  $\hat{x} = x(\hat{p})$  ein stark-reguläres lokales Minimum von NLP( $\hat{p}$ ) mit Lagrange-Multiplikatoren  $\hat{\lambda}$  und  $\hat{\mu}$ .

Dann gibt es Umgebungen  $B_\varepsilon(\hat{p})$  und  $B_\delta(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$ , s.d. NLP( $p$ ) ein stark-reguläres lokales Minimum

$$(x(p), \mu(p), \lambda(p)) \in B_\delta(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda})$$

für alle  $p \in B_\varepsilon(\hat{p})$ , mit  $A(\hat{x}(\hat{p})) = A(x(p))$  besitzt.

Zusätzlich sind  $x(p)$  und  $\mu(p), \lambda(p)$  stetig differenzierbar bzgl.  $p$ . Die Ableitung von  $\hat{x}$  bzgl.  $p$

ergibt sich als

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dp}(\hat{p}) \\ \frac{d\mu}{dp}(\hat{p}) \\ \frac{d\lambda}{dp}(\hat{p}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L & (\nabla_x G)^\top & (\nabla_x H)^\top \\ \hat{\Xi} \cdot \nabla_x G & \hat{\Gamma} & 0 \\ \nabla_x H & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{xp}^2 L \\ \hat{\Xi} \cdot \nabla_p G \\ \nabla_p H \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

wobei  $\hat{\Xi} := \text{diag}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_{n_G})$  und  $\hat{\Gamma} := \text{diag}(G_1, \dots, G_{n_G})$  gilt. Alle Funktionen werden am Punkt  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{p})$  ausgewertet.

Der Sensitivitätssatz liefert demnach die Antwort auf die oben formulierten Fragen. In einer unbekannt-ten Umgebung des nominellen Parameters existiert auch eine Lösung des Problems mit verändertem Parameter und im Nominalpunkt ist die Abbildung  $p \rightarrow x(p)$  stetig differenzierbar. Es wird sogar eine Formel zur Berechnung der Ableitung angegeben. Dies gibt den Anreiz, die optimale Lösung in einem Punkt  $p$  mittels Linearisierung um den Punkt  $\hat{p}$  zu approximieren, also eine Taylorreihenentwicklung erster Ordnung durchzuführen:

$$x(p) = x(\hat{p}) + \frac{dx}{dp}(\hat{p})(p - \hat{p}) + o(\|p - \hat{p}\|). \quad (3.53)$$

Wie bei vielen mathematischen Sätzen ist auch hier keine Auskunft über die Größe der Umgebung von  $\hat{p}$  verfügbar. Besonders die Gleichheit der aktiven Beschränkungen stellt eine starke Limitierung dieses Bereichs dar und dies kann lediglich durch Lösen von NLP( $p$ ) eindeutig beantwortet werden.

In [Büskens und Maurer, 2001] wird eine Möglichkeit präsentiert, eine Approximation des Bereichs zu erhalten, in dem sich die aktiven Beschränkungen nicht ändern. Dazu wird eine Linearisierung der Ungleichungsrestriktionen und der Lagrange-Multiplikatoren bezüglich der Parameter durchgeführt. Es müssen zwei Fälle untersucht werden.

Eine Beschränkung wird inaktiv: In diesem Fall wechselt der zugehörige Lagrange-Multiplikator  $\mu_i, i \in I_A(\hat{x}, \hat{p})$  auf einen Wert  $\mu_i = 0$ . Betrachtet man einen möglichen Nulldurchgang der Linearisierung

$$0 = \mu_i(p) \approx \mu_i(\hat{p}) + \frac{d\mu_i}{dp}(\hat{p})(p_{\mu_i} - \hat{p}), \quad i \in I_A(\hat{x}, \hat{p}),$$

ergibt sich daraus unter der Voraussetzung, dass die Ableitungen  $\frac{d\mu_i}{dp_j}(\hat{p}) \neq 0, j = 1, \dots, n_p$ , erfüllen, die Approximation

$$p_{\mu_i,j} \approx \hat{p}_j - \frac{\mu_i(\hat{p})_j}{\frac{d\mu_i}{dp_j}(\hat{p})}, \quad j = 1, \dots, n_p. \quad (3.54)$$

Eine Beschränkung wird aktiv: Analog kann für das aktiv werden einer Beschränkung vorgegangen werden. Hier ist ein Nullstellendurchgang der Linearisierung der Ungleichungsbeschränkung  $G_i, i \neq I_A(\hat{x}, \hat{p})$  zu betrachten.

$$0 = G_i(x(p), p) \approx G_i(x(\hat{p}), \hat{p}) + \frac{dG_i}{dp}(x(\hat{p}), \hat{p})(p_{G_i} - \hat{p}), \quad i \neq I_A(\hat{x}, \hat{p}),$$

mit

$$\frac{dG_i}{dp}(\hat{p}) = \frac{dG_i}{dx}(x(\hat{p}), \hat{p}) \frac{dx}{dp}(\hat{p}) + \frac{dG_i}{dp}(x(\hat{p}), \hat{p})$$

liefert, unter der Annahme, dass die Ableitungen  $\frac{dG_i}{dp_j}(\hat{p})$  nicht verschwinden, die Approximation

$$p_{G_i,j} \approx \hat{p}_j - \frac{G_i(\hat{p})_j}{\frac{dG_i}{dp_j}(\hat{p})}, \quad j = 1, \dots, n_p. \quad (3.55)$$

Fasst man die berechneten Punkte aus (3.54) und (3.55) zu den Mengen

$$P^j = \{p_{\mu_{i,j}} \mid i = 1, \dots, n_G\} \cup \{p_{G_{i,j}} \mid i = 1, \dots, n_G\} \cup \{-\infty, \infty\}$$

zusammen, so kann für jeden Parameter ein kleinstes Intervall um den Nominalparameter  $\hat{p}$  bestimmt werden, das jeweils als Approximation des zulässigen Sensitivitätsbereichs herangezogen werden kann.

$$P_{\hat{p}}^j = \left[ \max_{p_j < \hat{p}_j} \{p_j \in P^j\}, \min_{p_j > \hat{p}_j} \{p_j \in P^j\} \right]$$

Alle Parameter zusammen liefern

$$P_{\hat{p}} = P_{\hat{p}}^1 \times P_{\hat{p}}^2 \times \dots \times P_{\hat{p}}^{n_p}$$

als Approximation des Sensitivitätsbereichs um  $\hat{p}$ .

Da die Bestimmung der Sensitivitäten  $\frac{dx}{dp_i}(\hat{p})$  die zweiten Ableitungen der Lagrange-Funktion  $\nabla_{xx}^2 L$  und  $\nabla_{xp}^2 L$  benötigt und deren Berechnung im Allgemeinen sehr aufwändig sein kann, besteht die Möglichkeit sie über einen Finite-Differenzen-Ansatz zu bestimmen.

$$\frac{dx}{dp}(\hat{p}) \approx \frac{x(\hat{p} + he_i) - x(\hat{p} - he_i)}{2h}.$$

Dabei müssen  $2n_p$  nichtlineare Optimierungsprobleme gelöst werden. Jedoch kann die Lösung  $x(\hat{p})$  des nominellen Problems  $NLP(\hat{p})$  als Startschätzung verwendet werden, was häufig bereits einen guten Startwert darstellt und die Rechenzeiten meist deutlich verringert.

#### Bemerkung 3.56: Sensitivitäten ohne stark-reguläres Minimum

In [Jittorntrum, 1984] wird die Existenz von Sensitivitäten mit abgeschwächten Voraussetzungen gezeigt. Dort wird, auch wenn die optimale Lösung nicht differenzierbar bzgl. der Parameter ist, die Existenz einer eindeutigen Richtungsableitung bzgl. jeder Parametervariation gezeigt.

Die in (3.53) gezeigte Approximation stellt die Grundlage der Echtzeit-Steuerung mittels Sensitivitätsupdates dar.

#### Algorithmus 3.57: Echtzeit Approximation von $NLP(p)$

- (0) Sei  $\hat{p}$  ein gegebener nomineller Parameter.
- (1) *Offline Berechnung:* Löse  $NLP(\hat{p})$  und (3.52).
- (2) *Online Update:* Berechne für einen gestörten Parameter  $p \neq \hat{p}$

$$\bar{x}(p) = x(\hat{p}) + \frac{dx}{dp}(\hat{p})(p - \hat{p}) \quad (3.56)$$

und nutze dies als Approximation von  $x(p)$ .

Da der Offline-Teil, Schritt (1), vor Inbetriebnahme durchgeführt und das Ergebnis abgespeichert werden kann, muss zur Laufzeit des Problems lediglich Gleichung (3.56) berechnet werden. Diese besteht nur aus einer Matrix-Vektor-Multiplikation und einer Vektor-Vektor-Addition. Bei den gewählten Dimensionen ergibt dies  $n_x \cdot n_p$  Multiplikationen und  $n_x \cdot (n_p - 1) + n_x$  Additionen. Diese Rechenzeiten können weitestgehend vernachlässigt werden, was die Echtzeitfähigkeit dieses Schrittes verdeutlicht.

Die durch das Update entstehende Approximation der optimalen Lösung muss nicht notwendigerweise zulässig sein, also die Nebenbedingungen  $H$  und  $G$  erfüllen. Mit dem folgenden Projektionsproblem, kann aus einem möglicherweise unzulässigem Punkt ein zulässiger gemacht werden.

**Problem 3.58: Projektionsproblem auf  $\Sigma$**

Minimiere

$$\frac{1}{2} \|x - \bar{x}(p)\|^2$$

bzgl.

$$x \in \Sigma(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \begin{array}{l} H_j(x, p) = 0, \quad j = 1, \dots, n_H \\ G_i(x, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_G \end{array} \right\}.$$

Dieses Problem sucht also den Punkt  $x \in \Sigma(p)$ , der dem mittels Sensitivitätsupdate berechneten Punkt bzgl. der Euklidischen Norm am nächsten ist.

Damit stehen nun die theoretischen Hilfsmittel zur Verfügung, um sowohl die optimale Steuerung, als auch das Problem der echtzeitfähigen Steuerung zu betrachten.

# Kapitel 4

## Optimale Steuerung vertikaler Fahrzeugmodelle

Nachdem nun die theoretischen Grundlagen erläutert wurden, behandelt dieses Kapitel die optimale Steuerung der in dieser Arbeit betrachteten Probleme. Dafür werden die in Kapitel 3.1 eingeführten vertikalen Fahrzeugmodelle als Dynamik des Optimalsteuerungsproblems verwendet. Die erste zu beantwortende Frage ist, wie eine Zielfunktion  $J(u)$  für das Problem gewählt werden muss, um das gewünschte Optimierungsergebnis, wie mehr Komfort oder besseres Handling, zu erhalten.

### 4.1 Die Zielfunktion

In diesem Abschnitt werden die möglichen Zielfunktionen eines Optimalsteuerungsproblems der vertikalen Fahrzeugdynamik erläutert. In [Foag und Grübel, 1987] wird beschrieben, wie verschiedene Kriterien hergeleitet werden. Dabei kommen in erster Linie subjektive Empfindungen von Testfahrern zum Einsatz, die eine Aussage darüber geben, wann das Fahrverhalten „besser“ ist. Natürlich hängt dies auch stark vom jeweiligen Auto bzw. dessen Zielgruppe ab. Ein Sportwagen hat sicherlich ein anderes optimales Fahrwerkverhalten als eine Limousine. Oft ist es auch sehr schwer eine mathematische Formulierung für ein spezielles Kriterium zu finden, das bei einem empfundenen besseren Verhalten einen kleineren Funktionswert liefert.

#### 4.1.1 Gütekriterien der vertikalen Fahrzeugdynamik

Die beiden konkurrierenden Hauptkriterien in der Fahrwerkodynamik sind auf der einen Seite der Komfort der Fahrzeuginsassen, welcher durch ein „weiches“ Fahrwerk erzielt wird, und auf der anderen Seite Sicherheits- und Betriebsfestigkeitskriterien, die meist durch ein „steiferes“ Fahrwerk erreicht werden. Beim Komfort wird hier die ISO Norm 2631-1 [International Organization for Standardization, 1997] herangezogen. Dort wird der wahrgenommene Fahrkomfort durch die auf den Körper wirkenden Beschleunigungen charakterisiert. Die Beschleunigungen werden hinsichtlich ihres Frequenzspektrums gewichtet, da bestimmte Frequenzbänder als unangenehmer empfunden werden als andere. In dem in Kapitel 3.2 eingeführten Kontext ist es jedoch schwierig eine Optimierung der auftretenden Frequenzen durchzuführen, da das Problem im Zeitbereich formuliert ist. Deshalb wird eine Gewichtung des Komforts bzgl. des RMS-Wertes (engl. *root-mean-square*), also der Wurzel aus den quadrierten

wirkenden Beschleunigungen verwendet:

$$a_{RMS} = \left( \frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1)$$

In der ISO-Norm wird eine weitere Variante vorgeschlagen, die bei stärkerer Gewichtung höherer Amplituden Anwendung findet, die so genannte Vibrations-Dosis-Methode (engl. *vibration-dose-method*). Dort wird anstelle der zweiten Potenz die vierte verwendet und analog auch die vierte Wurzel gezogen:

$$a_{VDM} = \left( \frac{1}{T} \int_0^T a(t)^4 dt \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Betrachtet man mehr als eine Beschleunigung, werden diese mit Hilfe einer gewichteten Summe der zweiten oder vierten Potenz integriert. Bei Halb- und Vollfahrzeugmodellen können auf die selbe Weise auch die Winkelbeschleunigungen ( $\ddot{\varphi}$  und  $\ddot{\psi}$ ) einbezogen werden. Damit die Zielfunktionen keine Wurzelterme enthalten, werden jeweils die quadrierten bzw. zur vierten Potenz genommenen Beschleunigungswerte verwendet, d.h.  $f_{comfort} = a_{RMS}^2$  oder  $f_{comfort} = a_{VDM}^4$ .

Wie bereits erwähnt, gilt es nicht nur den Fahrkomfort zu optimieren, sondern auch bestimmte Kriterien in Bezug auf Sicherheit und Betriebsfestigkeit zu erfüllen. Bei der Sicherheit spielt insbesondere die Normalkraft zwischen Reifen und Fahrbahnoberfläche eine Rolle. Nimmt diese Normalkraft ab, verringert sich auch die maximale Haftreibung in horizontaler Richtung, vgl. Kapitel 6.2.2. Um hier eine differenzierbare Zielfunktion zu erhalten, werden nicht nur Verringerungen der Normalkraft bestraft, sondern alle Abweichungen bzgl. der Gleichgewichtslage. In den verwendeten Modellen ist die Referenzkraft in den Nullpunkt verschoben, so dass lediglich die wirkende Kraft zwischen Straße und Rad betrachtet werden muss. Den zugehörigen Anteil der Zielfunktion erhält man durch Quadrieren und Integrieren:

$$f_{safety} = \int_0^T F_{w\rho}(t)^2 dt. \quad (4.2)$$

Ein weiterer zu berücksichtigender Faktor ist der genutzte Federweg der Radaufhängung. Da es sich um ein reales System handelt, bestehen Schranken an die mögliche Einfederung. Diese können entweder als harte Beschränkungen in die Nebenbedingungen der Optimierung aufgenommen werden oder als „weiche“ Schranken mittels Bestrafung in der Zielfunktion integriert werden, vgl. [van der Aa et al., 1997], wodurch der genutzte Federweg des gesamten Zeithorizonts bestraft wird. Die Einfederung ergibt sich aus der Differenz der vertikalen Position des Chassis Aufhängungspunktes und der des Reifens. Für ein Viertelfahrzeug gilt also  $z_b - z_w$ . Bei komplexeren Fahrzeugmodellen müssen noch weitere Zustandsgrößen wie Nick- und Wankwinkel einbezogen werden, um den Aufhängungspunkt zu bestimmen, wie es in Kapitel 3.1.4 und 3.1.5 bereits erläutert wurde. Für den Fall, dass harte Beschränkungen eingeführt werden, ergeben sich für das Viertelfahrzeug die linearen Zustandsrestriktionen

$$\begin{aligned} \varphi(x(t))_{S,u} &= z_b(t) - z_w(t) \leq z_{S,max}, & \forall t \in [0, T]. \\ \varphi(x(t))_{S,l} &= z_w(t) - z_b(t) \leq z_{S,min}, \end{aligned}$$

Bei Halb- und Vollfahrzeugmodellen müssen diese Beschränkungen für alle Radaufhängungen eingeführt werden. Die Methode der weichen Beschränkungen verzichtet auf dieses explizite Ausschließen bestimmter Zustände, sondern bestraft deren Verletzung in der Zielfunktion mit Hilfe des quadratischen Integralterms

$$f_{durability} = \int_0^T (z_b - z_w)^2 dt. \quad (4.3)$$



Bei dieser Variante wird das Lösen des Optimierungsproblems vereinfacht. Natürlich kann a priori nicht gesagt werden, ob die Lösung auch die harten Schranken erfüllt. Um dies zu erreichen, muss der zugehörige Gewichtungsfaktor erhöht werden und selbst dann kann nicht garantiert werden, dass es eine Lösung gibt, die die Schranken einhält. Im Falle der harten Beschränkungen würde der Optimierer hier mit einem Fehler enden, da keine zulässige Lösung existieren würde ( $\Sigma = \emptyset$ ).

Ein letzter Term, der die Berechnung vereinfacht, ist eine Bestrafung der Abweichung der Steuerung von einem vorher bestimmten Nominalwert  $u_0 \in \mathbb{U}$ . Damit tritt die Steuerung explizit in der Zielfunktion auf, welche damit regularisiert und die Berechnung der Sensitivitäten verbessert wird, vgl. Kapitel 3.2.

$$f_{\text{regularization}} = \int_0^T (u(t) - u_0)^2 dt \quad (4.4)$$

Die finale Zielfunktion setzt sich als gewichtete Summe der hier vorgestellten Einzelterme (4.2) - (4.4) zusammen:

$$J(u) = \kappa_c f_{\text{comfort}} + \kappa_s f_{\text{safety}} + \kappa_d f_{\text{durability}} + \kappa_r f_{\text{regularization}} \quad (4.5)$$

Mit den gewählten Gewichten  $\kappa = (\kappa_c, \kappa_s, \kappa_d, \kappa_r)$ ,  $\kappa_i \geq 0$ ,  $i \in \{c, s, d, r\}$ , lassen sich unterschiedliche Steuerziele definieren. Eine starke Gewichtung der Kabinenbeschleunigung liefert eine für den Fahrer komfortable Steuerung. Dementsprechend ist eine Steuerung, welche die Abweichung der Reifennormalkraft höher gewichtet, eine sichere bzw. sportliche Steuerung.

### 4.1.2 Frequenzanalyse als Komfortkriterium

In der ISO Norm 2631-1 [International Organization for Standardization, 1997] und [Mitschke und Wallentowitz, 2004] wird darauf hingewiesen, dass auf den Fahrer wirkende Beschleunigungen mit bestimmten Frequenzbereichen einen höheren Einfluss auf den empfundenen Komfort haben als andere. Aus diesem Grund wird bei der regelungstechnischen Herangehensweise des betrachteten Problems häufig der Amplitudengang der Beschleunigung betrachtet, um einen verbesserten Komfort nachzuweisen. Zusätzlich werden die berechneten Amplituden mit Gewichtungsfunktionen multipliziert, vgl. Abbildung 4.1, um Frequenzen, die maßgeblich für den empfundenen Komfort verantwortlich sind, stärker hervorzuheben. Dies ist jedoch nur dann notwendig, wenn eine Bewertungszahl angegeben wird, die sich aus den Amplituden der einzelnen Frequenzen berechnet.

Für die Berechnung der Fouriertransformierten wird hier auf die diskrete Fouriertransformation zurückgegriffen, vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009, Briggs und Henson, 1995]. Dabei wird eine Funktion  $f(t)$  mit  $N$  äquidistanten Stützstellen über dem Gitter  $\mathcal{G}_N = \{\tau_k \mid \tau_k = k \frac{t_f - t_0}{N}, k = 0, \dots, N - 1\}$  durch ein trigonometrisches Polynom approximiert. In komplexer Darstellung berechnen sich die Koeffizienten aus der Formel

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\tau_j) \exp\left(-\frac{i2\pi k j}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

wobei  $i$  die imaginäre Einheit darstellt. Mit der Abkürzung  $\eta^{k \cdot j} := \exp\left(-\frac{i2\pi k j}{N}\right)$  kann dies als Matrix-Vektor-Multiplikation  $\alpha = W \cdot f$  zusammengefasst werden. Mit  $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}]^\top$ ,  $f =$

$[f(\tau_0), \dots, f(\tau_{N-1})]^\top$  ergibt sich die Transformationsmatrix oder auch DFT-Matrix

$$W := \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \eta^{0 \cdot 0} & \eta^{0 \cdot 1} & \dots & \eta^{0 \cdot (N-1)} \\ \eta^{1 \cdot 0} & \eta^{1 \cdot 1} & \dots & \eta^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \eta^{(N-1) \cdot 0} & \dots & \dots & \eta^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix}.$$

Effektive Berechnungsmethoden der Transformatierten werden *Schnelle-Fourier-Transformation* (engl. *fast-fourier-transformation, FFT*) genannt und reduzieren den Berechnungsaufwand von  $\mathcal{O}(N^2)$  auf  $\mathcal{O}(N \log(N))$ .

### Ungewichtete Frequenzbewertung

Für die weiteren Betrachtungen sind einige Eigenschaften der Matrix  $W \in \mathbb{C}^{N \times N}$  interessant. Da die diskrete Fourier-Transformation invertierbar ist, ist  $W$  invertierbar und bei genauerer Betrachtung sieht man, dass sie auch symmetrisch ist. Eine weitere Eigenschaft, die in [Auslander und Tolimieri, 1979] gezeigt wird, ist, dass die Inverse von  $W$  die Gleichung  $W^{-1} = N\overline{W}^\top$  erfüllt. Damit gilt

$$\overline{W}^\top W = \frac{1}{N} \mathbb{I}. \quad (4.6)$$

Die Summe des quadrierten Amplitudenspektrums berechnet sich aus den quadrierten Beträgen der Fourier-Koeffizienten  $\|\alpha_k\|^2 = \alpha_k \bar{\alpha}_k$ . Für eine ungewichtete Frequenzbetrachtung ergibt sich mit Gleichung (4.6) daraus

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \sum_{k=0}^{N-1} \|\alpha_k\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \bar{\alpha}_k = \sum_{k=0}^{N-1} (Wf)_k \overline{(Wf)_k} \\ &= (Wf)^\top \overline{(Wf)} = f^\top W^\top \overline{W} f \stackrel{(4.6)}{=} \frac{1}{N} f^\top f. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bezeichnen die Eingangsdaten die Beschleunigung des Aufbaus  $f = \ddot{x}$  an den Gitterpunkten, so wird aus Gleichung (4.7) deutlich, dass sich die Zielfunktion für den ungewichteten Fall von der Minimierung der Aufbaubeschleunigung lediglich darin unterscheidet, dass bei der eben erläuterten Variante die diskretisierten Zustände zur Berechnung herangezogen werden. Bei der direkten Minimierung der Aufbaubeschleunigung wird diese im System als Zustand durch das Integrationsverfahren berechnet. Analog verhält es sich bei Betrachtung der Radbeschleunigungen.

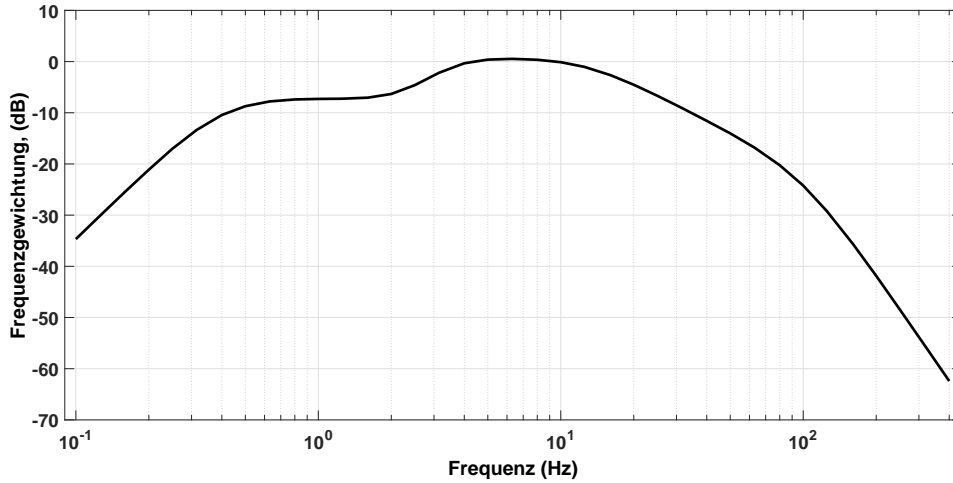


Abbildung 4.1: Von [International Organization for Standardization, 1997] empfohlene Frequenzgewichtung der vertikalen Beschleunigungsamplituden (Datenquelle: [International Organization for Standardization, 1997])

### Gewichtete Frequenzbewertung

Wie bereits erwähnt spielen bestimmte Frequenzen eine größere Rolle auf den empfundenen Komfort als andere. Um den Fokus der Optimierung auf diese Bereiche zu legen, wird deshalb häufig eine Gewichtung der Zielfunktion vorgenommen. In Abbildung 4.1 ist die in [International Organization for Standardization, 1997] vorgeschlagene Gewichtungsfunktion grafisch dargestellt. Für die Berechnung wird eine Gewichtungsmatrix  $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$  mit Diagonalgestalt definiert, für die gilt

$$G_{i,j} = \begin{cases} g(i, t_f, t_0), & \text{für } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, i, j \in 1, \dots, N.$$

Dabei hängen die Einträge  $g(i, t_f, t_0)$  von der betrachteten Periodenlänge  $t_f - t_0$  und der zugehörigen Gewichtung ab. Die gewichteten Amplituden berechnen sich nun als  $\beta = G\alpha$ , wodurch sich für die betrachtete Zielfunktion Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \sum_{k=0}^{N-1} \|\beta_k\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (GWf)_k \overline{(GWf)_k} \\ &= (GWf)^\top \overline{(GWf)} = f^\top W^\top G^\top G \overline{W} f = f^\top W^\top G^2 \overline{W} f. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Das Produkt  $W^\top G^2 \overline{W}$  ist für konstantes  $N$  ebenfalls konstant und kann im Voraus berechnet werden, um Rechenzeit zu sparen, für den Fall, dass kein Algorithmus zur schnellen Fourier Transformation Verwendung findet.

### Beispiel: Das Amplitudenspektrum für die kontinuierliche Zielfunktion

Dieses Beispiel vergleicht die Ergebnisse dreier Optimierungen des kontinuierlichen Modells. In Abbildung 4.2 wird der Amplitudengang der Überfahrt eines Viertelfahrzeugs über ein Schlagloch der Höhe  $h = -0.2m$  und Länge  $1.0m$  betrachtet. Die drei Probleme unterscheiden sich in der gewählten Zielfunktion aus (4.5) durch ein anders gewähltes  $\kappa$ . Bei der gestrichelten Lösung handelt es sich um die Optimierung des Handlings ( $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ ). Dies liefert für den Aufbau über den gesamten Frequenzbereich die größten Amplituden. Die durchgezogene Linie entspricht einer Gewichtung

mit  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , also einer reinen Komfort-bezogenen Optimierung, bzw. wie im vorherigen Kapitel erläutert eine ungewichtete Minimierung des Amplitudengangs. Hier liegen die Amplituden stets unter den anderen beiden Vergleichskurven. Die gestrichpunkteten Daten sind die Ergebnisse mit  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ , also der Referenzsteuerung mit konstanter Steuerung  $u = u_0$ .

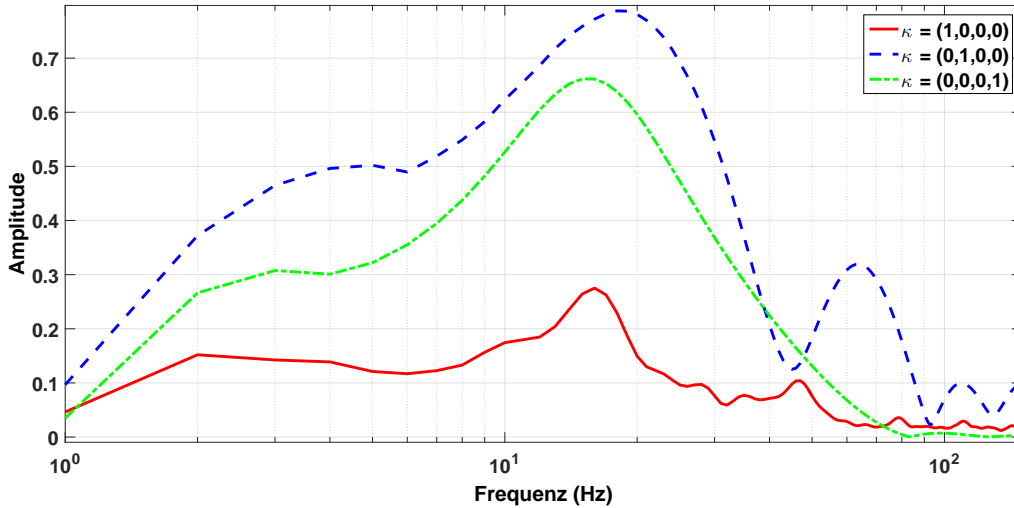


Abbildung 4.2: Einseitiges Amplitudenspektrum der Aufbaubeschleunigung eines Viertelfahrzeugs bei einer Schlaglochüberfahrt für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen:  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt:  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet:  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

In Abbildung 4.3 ist für dieselben Rechnungen das Amplitudenspektrum des Reifens dargestellt. Wie zu erwarten, verhält es sich hier umgekehrt. Die Komfortoptimierung liefert die Größten Amplituden und die Handlingoptimierung die geringsten, zumindest im Bereich 1-20Hz. Bei höheren Frequenzen gleichen sich die drei Ergebnisse einander wieder an.

Es wird für dieses Beispiel ersichtlich, dass die Komfortoptimierung die größte Reduzierung der Anregungsamplituden des Aufbaus erreicht, was nach den oben erläuterten Zusammenhängen das zu erwartende Resultat darstellt, und die Handlingoptimierung die Reifenfrequenzen dämpft.

Für die Darstellung des Amplitudengangs wird das einseitige Amplitudenspektrum betrachtet. Dabei wird die hier geltende Annahme ausgenutzt, dass die zu transformierenden Daten reell sind. Ist dies der Fall, so gilt für die Fourier-Koeffizienten  $\alpha_k = \bar{\alpha}_{N-k}$ . Nutzt man die äquivalente Formulierung der diskreten Fourier-Transformation nach [Briggs und Henson, 1995],

$$\alpha_k = \sum_{j=-N/2}^{N/2} f(\tau_j) \exp\left(-\frac{i2\pi kj}{N}\right),$$

wird deutlich, dass lediglich  $N/2$  unterschiedliche Frequenzen mit jeweils positivem und negativem Drehsinn auftreten. Mit diesen Kenntnissen lässt sich das einseitige Amplitudenspektrum definieren als die Wertepaare  $(\omega_k, 2\|\alpha_k\|)$  mit  $k = 0, \dots, N/2$ . Die  $\omega_k = \frac{k}{t_f - t_0}$  geben die jeweilige Frequenz an. Meist wird das Amplitudenspektrum über einer logarithmischen x-Achse, wie in Abbildung 4.2 und 4.3, dargestellt.

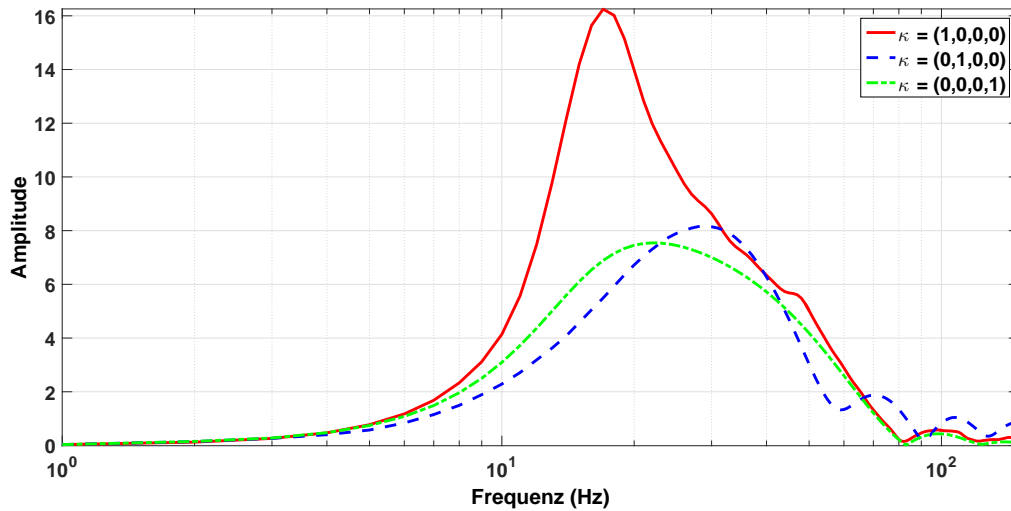


Abbildung 4.3: Einseitiges Amplitudenspektrum der Reifenbeschleunigung eines Viertelfahrzeugs bei einer Schlaglochüberfahrt für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen:  $\kappa = (1,0,0,0)$ , gestrichelt:  $\kappa = (0,1,0,0)$ , gestrichelpunktet:  $\kappa = (0,0,0,1)$ )

### Beispiel: Gewichtetes und ungewichtetes Amplitudenspektrum als Zielfunktion

In diesem Beispiel soll verglichen werden, inwieweit eine Gewichtung der auftretenden Frequenzen in der Zielfunktion Einfluss auf das Ergebnis hat. Es wird dasselbe Problem wie im vorhergehenden Beispiel betrachtet, jedoch wird nun als Zielfunktion das Amplitudenspektrum aus Gleichung (4.7) für den ungewichteten Fall und Gleichung (4.8) für die gewichtete Zielfunktion verwendet. In Abbildung 4.4 sind die jeweils resultierenden Amplitudenspektren miteinander verglichen.

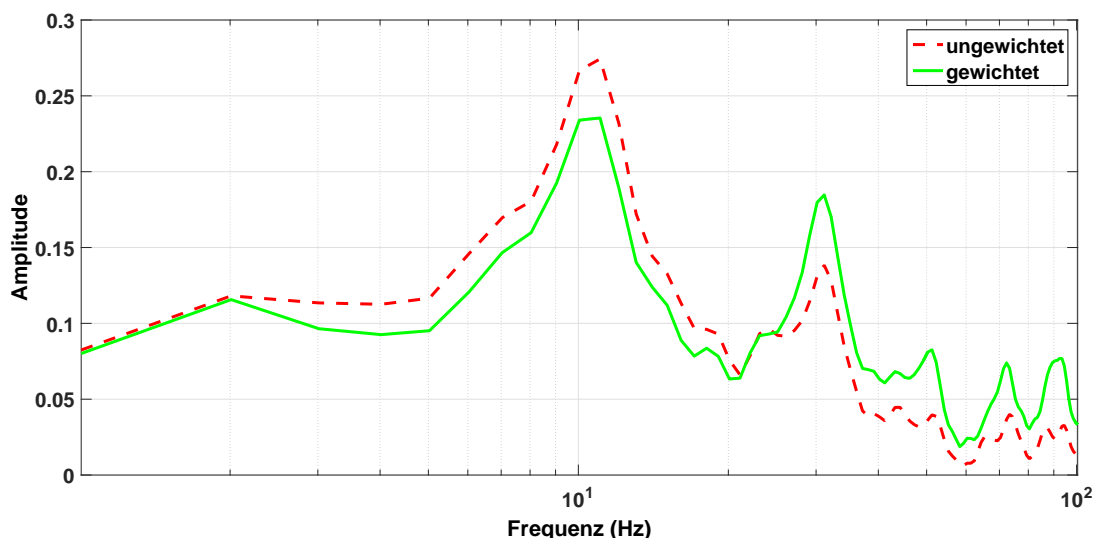


Abbildung 4.4: Einseitiges Amplitudenspektrum der Aufbaubeschleunigung eines Viertelfahrzeugs bei einer Schwellenüberfahrt für gewichtete und ungewichtete Amplitudenspektren (gestrichelt: ungewichtete Zielfunktion (4.7), durchgezogen: gewichtete Zielfunktion (4.8))

Es ist lediglich ein relativ kleiner Unterschied zu beobachten. Bei der gewichteten Zielfunktion sind

die Amplituden im stärker gewichteten Teil um  $10\text{Hz}$  etwas geringer, wohingegen sie bei höheren Frequenzen leicht über dem ungewichteten Resultat liegen.

Die folgenden Kapitel beschäftigen sich mit der Bereitstellung des optimalen Steuerungsproblems für semi-aktive und aktive Fahrwerkssteuerungen. Dafür werden unterschiedliche Modellierungen der Aktoren vorgestellt und auf ihre Anwendbarkeit hin untersucht.

## 4.2 Semi-aktive Steuerung

Bei der semi-aktiven Steuerung handelt es sich, wie bereits in Kapitel 2.1 kurz erläutert, um eine Methode, bei der passive Elemente aktiv gesteuert werden können. Im vorliegenden Fall sind die passiven Elemente der Fahrzeugaufhängung die Dämpfer, deren Charakteristik verändert werden kann. Nur im Falle einer Relativbewegung zwischen Aufbau und Rad kann daher ein Einfluss auf die wirkenden Kräfte genommen werden. Dieser Einfluss ist zudem durch das Vorzeichen der Bewegung stark limitiert. Dazu können beispielsweise mechanische Ventile verwendet werden, bei denen die Durchflussrate des Dämpferöls eingestellt werden kann oder es wird direkt Einfluss auf die Viskosität der Dämpferflüssigkeit genommen. Dies ist beispielsweise bei magneto- und elektrorheologischen Flüssigkeiten der Fall. Dabei werden entweder Magnetfelder oder angelegte Spannungen verwendet, um in der Flüssigkeit enthaltene Teilchen zur Interaktion zu bringen, was die Zähigkeit der Flüssigkeit verändert.

Da sich diese Arbeit nicht mit der materialwissenschaftlichen Seite beschäftigt, sei dazu auf die Literatur [Halsey, 1992, Ruzicka, 2000, Jolly et al., 1999b, Jolly et al., 1999a] verwiesen. Im Folgenden wird sich auf magneto- und elektrorheologische Dämpferelemente beschränkt. Deren Vorteil gegenüber dem mechanischen Dämpfer mit variablen Ventilen ist, dass die Viskosität deutlich schneller auf Änderungen reagiert und dass nur wenig Energie zur Ansteuerung benötigt wird. In [Gleichweit et al., 2013] werden die Probleme und Ansätze in der Fahrwerkssteuerung des Dämpferherstellers näher erläutert und in [McClamroch und Gavin, 1995] werden elektrorheologische Dämpfer zur semi-aktiven Schwingungsdämpfung in Gebäuden verwendet. Eine schematische Darstellung eines semi-aktiven Fahrwerks ist in Abbildung 4.5 zu finden.

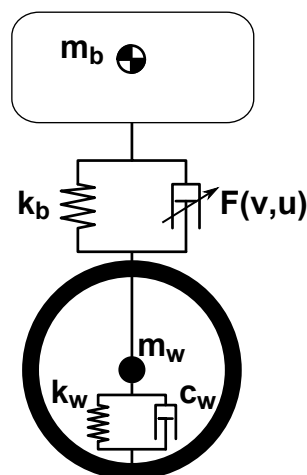


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung einer semi-aktiven Dämpfung an einem Viertelfahrzeug (nach: [Rajamani, 2006])

Die auf den in Kapitel 3.1 vorgestellten Modellen der vertikalen Fahrzeugdynamik basierenden optimalen Steuerungsprobleme für semi-aktive Steuerungen erhält man, indem die Dämpfungskonstante  $c_{bi} \in \mathbb{R}$  der Aufhängung durch eine steuerbare Größe  $c_{ui} \in [U_{min}, U_{max}]$  ersetzt wird. Dabei hängen die Steuerschranken  $U_{min}, U_{max}$  vom verwendeten Dämpfer ab. Die unterschiedlichen Dämpfermodelle, beginnend mit einem in der Theorie häufig verwendeten linearen Dämpfermodell, vgl. [Karnopp et al., 1974], bis hin zu komplexen Modellierungen anhand zur Verfügung stehender Kennlinien, werden im Folgenden genauer vorgestellt.

### 4.2.1 Lineares Dämpfermodell

Für das lineare Dämpfermodell wird hier eine Formulierung des Steuerbereichs unabhängig der gerade gewählten Schranken angegeben. Dazu wird die auftretende Dämpferkraft  $F_{u_i}$  als lineare Funktion der Steuerung  $u_i \in \mathbb{U} = [0, 1]$  und der Einfederungsgeschwindigkeit  $v \in \mathbb{R}$  dargestellt. Für den idealen linearen Dämpfer heißt das

$$F_{u_i}(v, u_i) = (U_{min} + u_i(U_{max} - U_{min}))v = c_{u_i}v.$$

#### Beispiel - Stufenüberfahrt

Das Verbesserungspotential eines semi-aktiven Fahrwerks mit linearem Dämpfer wird anhand einer Stufenüberfahrt demonstriert. Die genaue Geometrie der Stufe wird in Kapitel 5.2.1 erläutert. In diesem Beispiel wird definiert, dass es sich um eine Stufe der Höhe  $h = 0.05m$  handelt ( $\mathcal{T}(0.05)$ ). Der betrachtete Zeithorizont beträgt  $t_f = 1.5s$  und die Steuerungsdiskretisierung wird mit einer stückweise konstanten Steuerung mit 301 Stützstellen, also 300 Steuerungsintervallen durchgeführt.

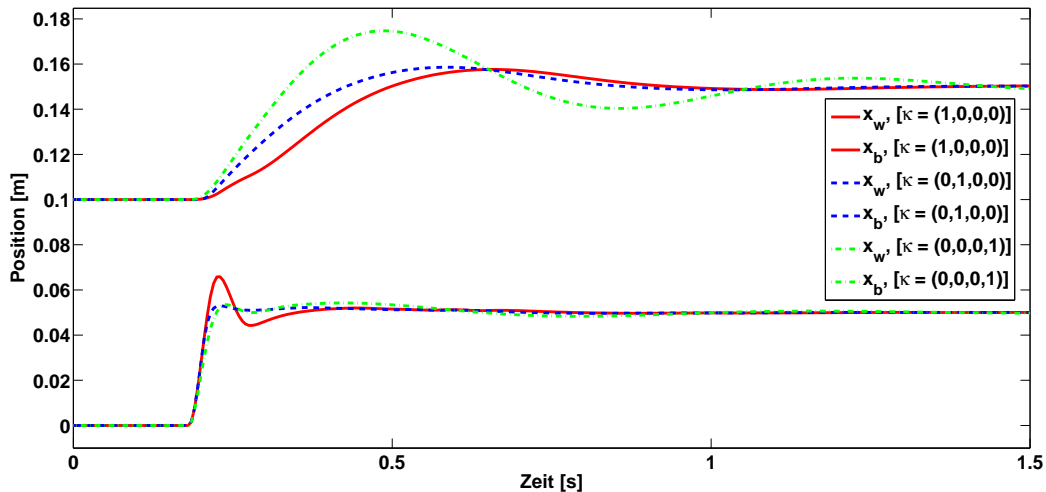


Abbildung 4.6: Vergleich der vertikalen Position von Reifen und Aufbau einer Stufenüberfahrt ( $\mathcal{T}(0,05)$ ) mit linearer semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichelpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

Je nach gewählter Zielfunktion sehen die Trajektorien deutlich unterschiedlich aus. Eine Darstellung ist in Abbildung 4.6 zu finden. So wird bei einer Komfortoptimierung die Bewegung des Aufbaus deutlich unterdrückt, wobei der Reifen eine starke Beschleunigung erfährt, wohingegen bei einer Handlingoptimierung der Aufbau deutlich nachschwingt.

### Beispiel - Schwellenüberfahrt

Bei einer Schwellenüberfahrt mit Höhe  $h = 0,05m$  und Länge  $l = 0,5m$ , ( $\mathcal{P}(0,05; 0,5)$ ), werden bei ansonsten identischer Problemstellung ähnliche Ergebnisse sichtbar. Wieder werden die Resultate der auf Komfort optimierten Steuerung mit der Handling optimierten Steuerung und der neutralen Steuerung verglichen. In Abbildung 4.7 ist die Position des Aufbaus und des Rades über der Zeit skizziert. Es ist ersichtlich, dass bei einer Komfort-optimalen Steuerung die Schwingung aufgrund der Unebenheit weitestgehend im Reifen kompensiert wird und lediglich eine langsame Wellenbewegung den Aufbau erreicht, die zusätzlich auch noch schnell abklingt. Der genau gegenteilig gerichtete Ansatz die Radlastschwankungen, also das Handling zu verbessern, bewirkt auch das entgegengesetzte Ergebnis. Die Schwingungen im Rad sind hier am geringsten und die im Aufbau am stärksten. Dies wird auch bei der Betrachtung der Komfortbewertung mittels Amplitudengang in Abbildung 4.8 ersichtlich. Die Steuerung mit  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$  verringert die auftretenden Amplituden am Aufbau über alle Frequenzen bzgl. der neutralen Steuerung, wohingegen  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$  fast auf dem gesamten Spektrum höhere Amplitudenwerte aufweist als der ungesteuerte Fall.

Wird hingegen die Radbeschleunigung betrachtet, so wird in Abbildung 4.9 deutlich, dass sich hier der Amplitudengang bei der Handlinggewichtung deutlich verringert hat und die Amplituden bei der Komfortoptimierung sogar den unregulierten Fall übersteigen. Dieses Beispiel zeigt, dass die beiden Kriterien nicht gleichzeitig zur Gänze erfüllt sein können. Eine Verbesserung des einen bewirkt stets eine Verschlechterung des anderen Kriteriums. Es muss somit ein Kompromiss gefunden oder situationsabhängig entschieden werden, welches Kriterium für die momentane Fahrsituation wichtiger ist.

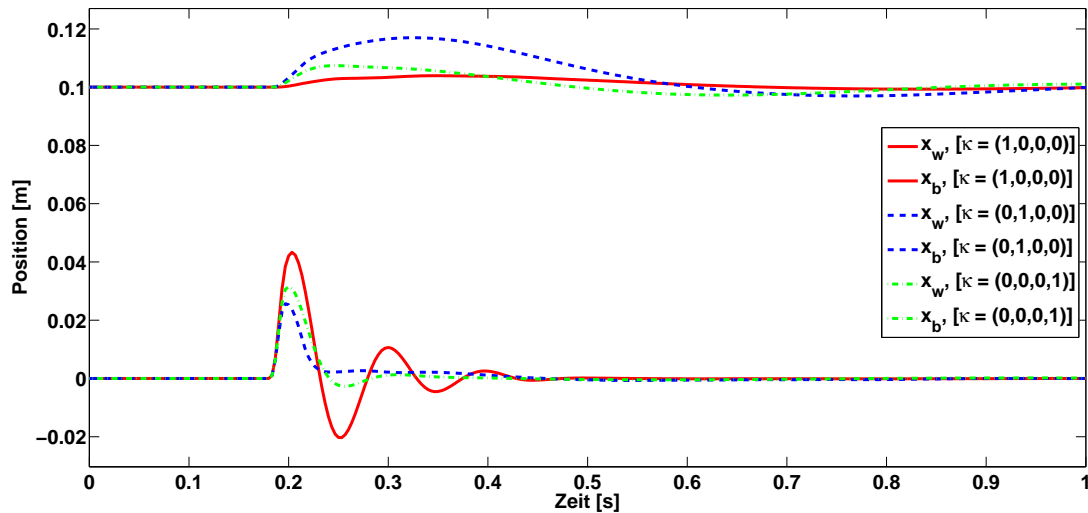


Abbildung 4.7: Vergleich der vertikalen Position von Reifen und Aufbau einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0,05, 1,0)$ ) mit linearer semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

### Beispiel - Vollfahrzeug mit Schlechtwegstrecke

Dieses Beispiel zeigt, dass die Optimierung nicht auf die bisher verwendeten einfachen Straßendaten angewiesen ist, sondern auch für stark schwankende Anregungen funktioniert. Dafür soll das Vollfahrzeugmodell über ein realistisches Stück Kopfsteinpflaster fahren. Die Fahrbahndaten werden mit Hilfe



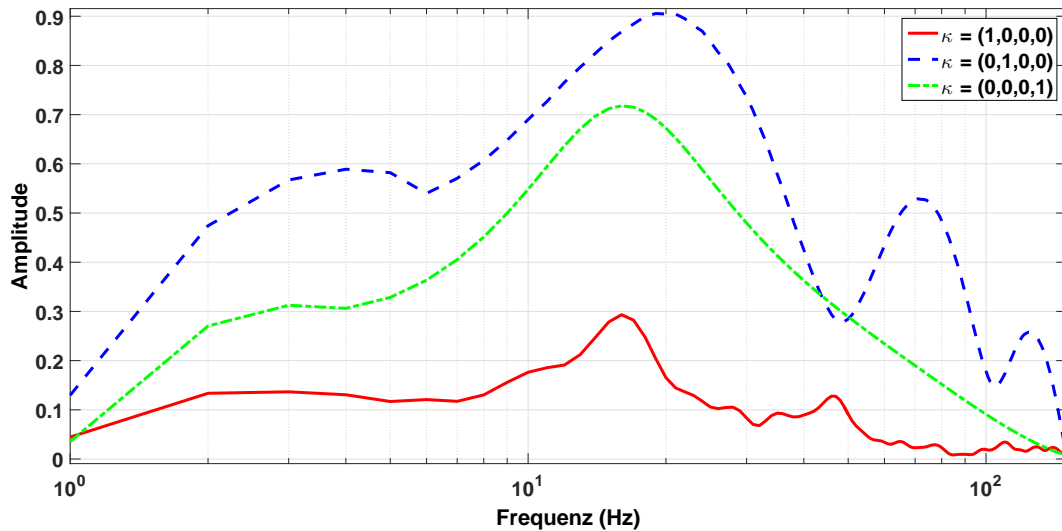


Abbildung 4.8: Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit linearer semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

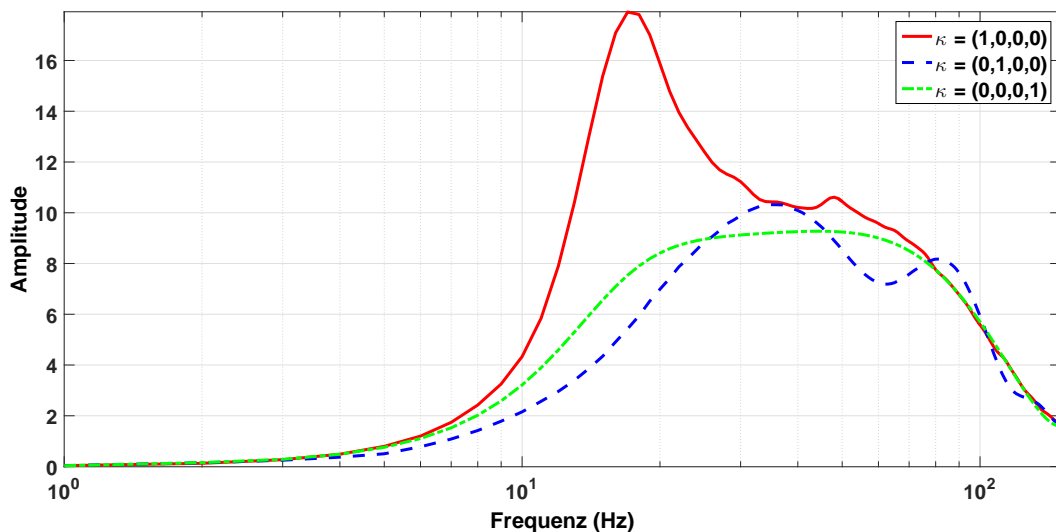


Abbildung 4.9: Vergleich des Frequenzgangs der Radbeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit linearer semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

der Softwarebibliothek `OpenCRG` erzeugt, vgl. [Vires Simulationstechnologie GmbH, 2015]. Es wird auf die Beispielstrecke namens *Belgian Block*, also Kopfsteinpflaster, zurückgegriffen. Diese Strecke befindet sich auf dem Testgelände von Mercedes Benz in Stuttgart. In Abbildung 4.10 ist eine Draufsicht der Fahrbahnoberfläche mit eingefärbtem Höhenprofil zu sehen. Es wird deutlich, dass dies eine exakt vermessene Fahrbahn darstellt, die große Unregelmäßigkeiten aufweist.

Für die Berechnung wurde jeweils eine linke und eine rechte Spur ausgewählt. Diese befinden sich bei  $y = -0,8$  und  $y = 0,8$ , was einer Spurweite des Fahrzeugmodells von  $1,6m$  entspricht. Zusätzlich wurden die Funktionswerte vom vorherigen Definitionsbereich der  $x$ -Koordinate  $730 - 740$  in das

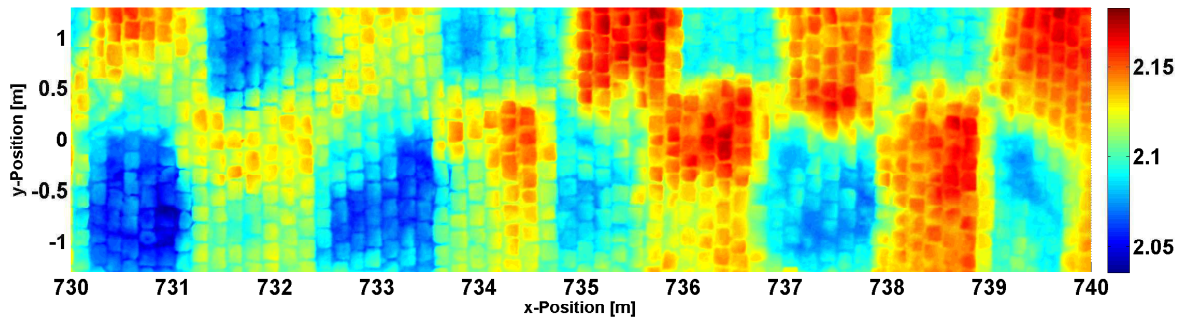


Abbildung 4.10: Draufsicht auf das Kopfsteinpflasterprofil mit eingefärbtem Höhenprofil

Intervall 0 – 10 verschoben. Die beiden daraus resultierenden Straßenanregungen sind in Abbildung 4.11 dargestellt.

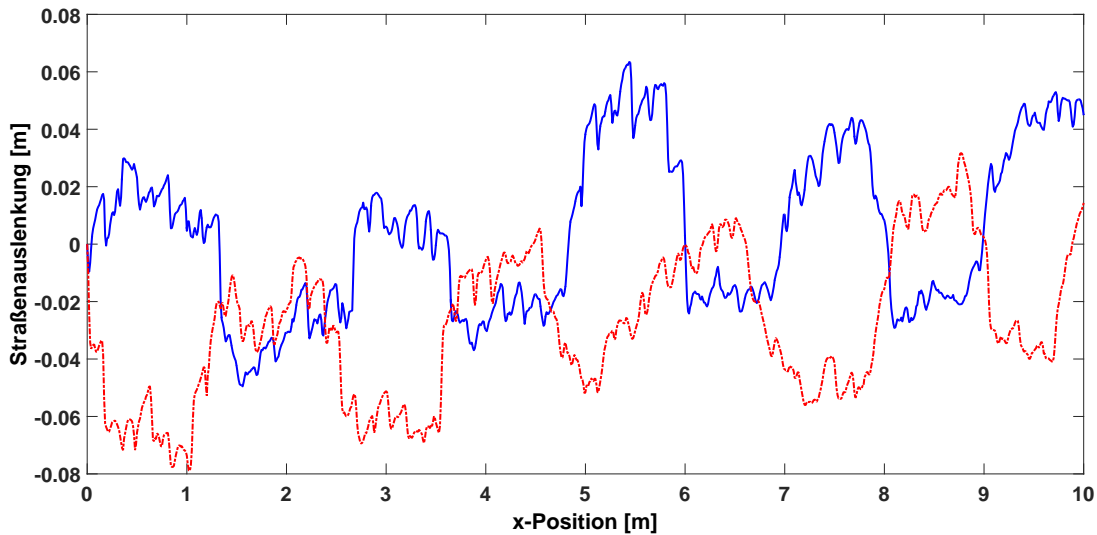


Abbildung 4.11: Ausgewählte Spuren für die Vollfahrzeuganregung (durchgezogen - rechte Spur, gestrichpunktet - linke Spur)

Vor und nach dem Kopfsteinpflaster wird die Straße mit konstanter Auslenkung  $x_\rho = 0$  fortgesetzt. Die Anfangsposition wurde so gesetzt, dass sich die Vorderachse direkt vor Beginn der Schlechtwegstrecke befindet. Alle anderen Anfangswerte wurden mit Gleichgewichtslage 0 festgelegt. Die Beispielrechnung verwendet die Komfort-optimierende Zielfunktion

$$J(u) = \int_0^{t_f} \ddot{x}_b^2(t) + \ddot{\varphi}^2(t) + \ddot{\psi}^2(t) dt,$$

sowie die Endzeit  $t_f = 1,5s$ , die Geschwindigkeit  $v = 11m/s$  und eine Steuerungsdiskretisierung mit 451 Stützstellen. Die Resultate sind in den Abbildungen 4.13a – 4.13d dargestellt. Bei der Betrachtung der vertikalen Auslenkung, sowie der Nick- und Wankbewegung über dem betrachteten Zeithorizont, wird deutlich, dass in allen Variablen eine Verringerung des Maximalausschlags, sowie auch der Schwingungsfrequenz erreicht wurde. Besonders bei der Wankbewegung wird deren deutliche Reduktion sichtbar.

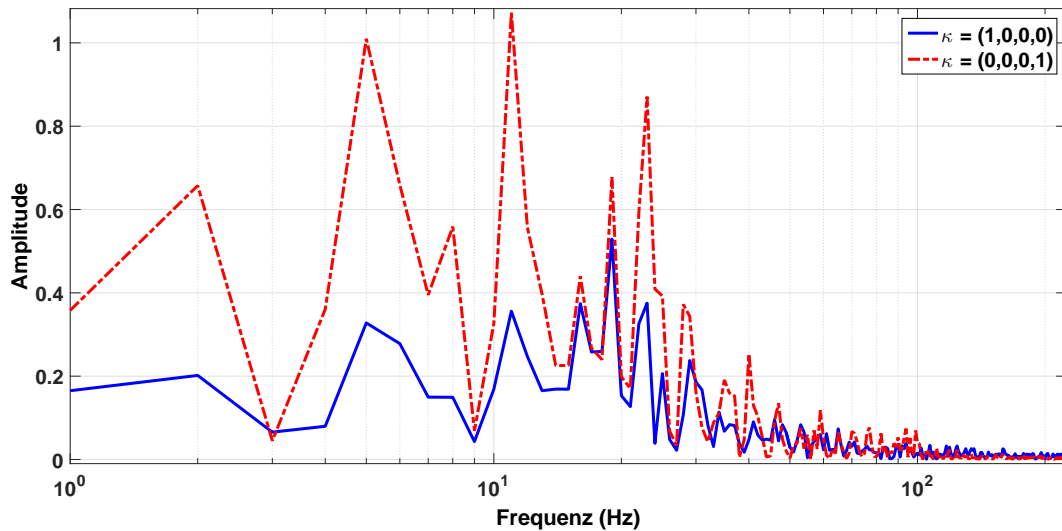


Abbildung 4.12: Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung der ungesteuerten (gestrichpunktet) und optimierten (durchgezogen) Schlechtwegüberfahrt

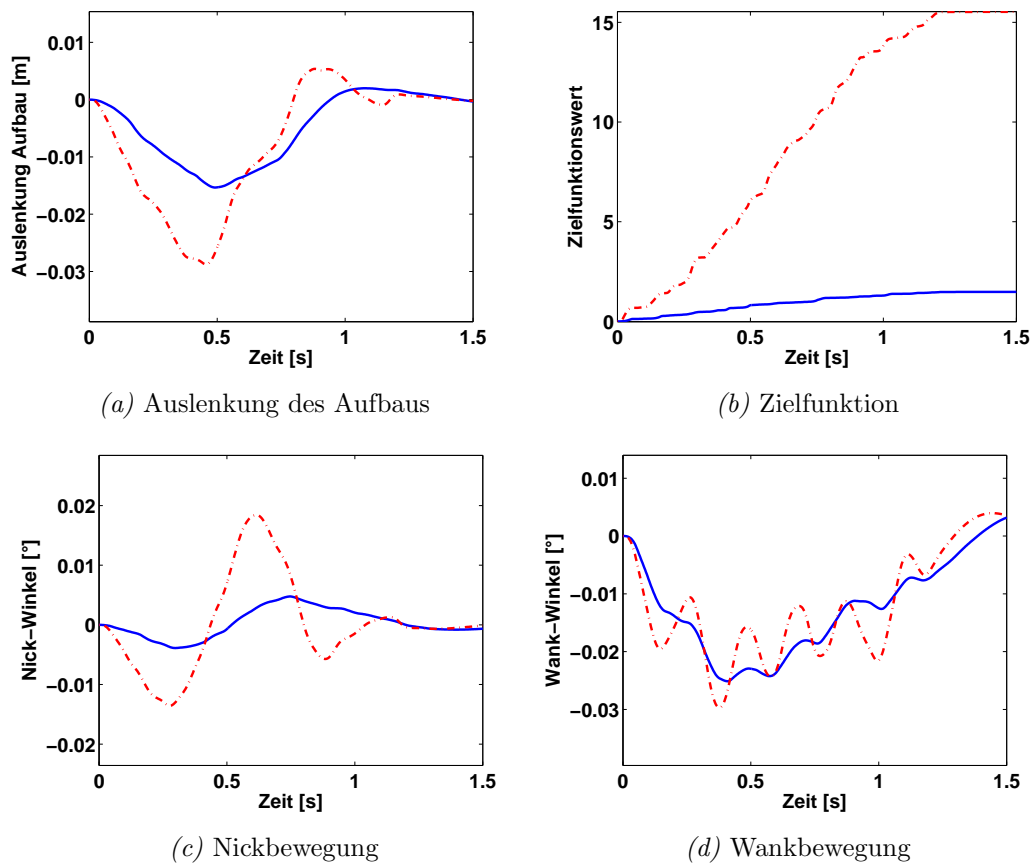


Abbildung 4.13: Berechnungsergebnisse einer Überfahrt über Kopfsteinpflaster (durchgezogen: optimal gesteuert, gestrichpunktet: ungesteuert)

Exemplarisch ist in Abbildung 4.12 der Frequenzgang der Aufbaubeschleunigung der ungesteuerten und optimierten Überfahrt dargestellt. Auch hier ist eine deutliche Reduktion der auftretenden Frequenzen sichtbar.

### 4.2.2 Das Bingham-Modell

Da das lineare Dämpfermodell meist nur für theoretische Betrachtungen interessant ist und auch die mechanischen Eigenschaften eines elektro- oder magnetorheologischen Dämpfers nicht widerspiegelt, werden hier realitätsnähere Modellierungen verschiedener Komplexität vorgestellt. Die Notwendigkeit dieser Modellierung wird deutlich, wenn man die in Abbildung 4.14 dargestellten Kennfelddaten eines elektrorheologischen Dämpfers betrachtet, siehe auch [Seong et al., 2006]. Dort sieht man, dass die vom Dämpfer verursachte Kraft nichtlinear vom anliegenden Steuerstrom und der Relativgeschwindigkeit abhängt.

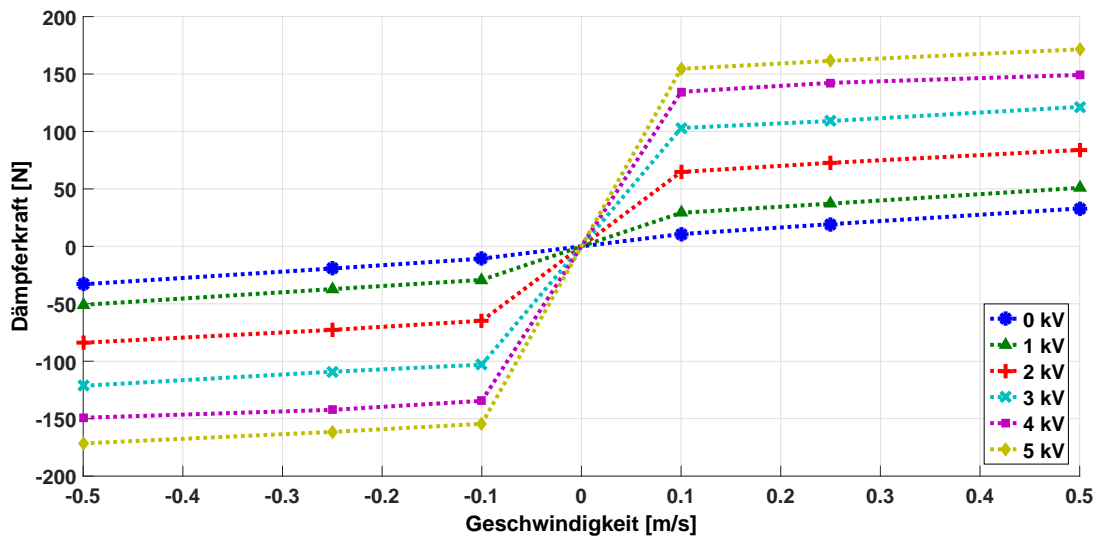


Abbildung 4.14: Kennfeld eines elektrorheologischen Dämpfers (Quelle: Fludicon GmbH)

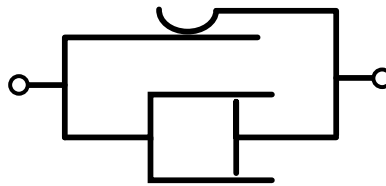


Abbildung 4.15: Schematische Darstellung des Bingham-Modells (vgl. [Spencer et al., 1997])

Das Bingham-Modell stellt eine Erweiterung des linearen Dämpfers durch die Hinzunahme eines parallel zum Dämpfer geschalteten Coulomb-Elements dar, vgl. [Spencer et al., 1997, Yang, 2001, Butz und von Stryk, 2002, Sapiński und Filuś, 2003]. In Abbildung 4.15 ist der Aufbau schematisch skizziert. Die wirkende Kraft des Dämpfers lässt sich in diesem Fall schreiben als

$$F_{ui}(v, u_i) = f_c(u_i) \operatorname{sign}(v) + c_0 v.$$

Hierbei bezeichnet  $c_0$  eine Konstante, die die Steigung des Kraftverlaufs für  $v \neq 0$  beschreibt und  $f_c(u_i) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Funktion, die in Abhängigkeit der gewählten Steuerung die affine Verschiebung in der Vertikalen bestimmt. Diese wird noch mit  $\operatorname{sign}(v)$  multipliziert, also dem Vorzeichen der

Einfederungsgeschwindigkeit, wobei die Signum-Funktion hier folgendermaßen definiert ist:

$$\text{sign}(v) = \begin{cases} 1 & v > 0 \\ 0 & \text{für } v = 0. \\ -1 & v < 0 \end{cases}$$

Dadurch wird garantiert, dass für  $v = 0$  auch  $F_{ui}(u, v) = 0$  gilt. Problematisch an dieser Formulierung in Bezug auf das optimale Steuerungsproblem ist, dass  $F_{ui}$  im Punkt  $v = 0$  nicht differenzierbar und noch nicht einmal stetig ist, wodurch die Regularitätseigenschaften (zweimal stetig differenzierbar) aus Kapitel 3.2.7 nicht erfüllt sind.

Die Funktion  $f_c(u_i)$  wird im Folgenden als linear angesehen. Dabei gilt

$$f_c(u_i) = c_{min} + u(c_{max} - c_{min}).$$

Diese Annahme gilt, wenn sich die Geraden durch die zusammengehörenden Datenpunkte linear bzgl. der angelegten Steuerung verschieben. Das Bingham-Modell approximiert die Kennfeldlinie durch zwei Halbgeraden, die jeweils um einen Faktor in positiver- bzw. negativer  $y$ -Richtung verschoben sind. Das Verhalten des Dämpfers um den Ursprung wird dabei nicht ausreichend betrachtet, da hier eine Unstetigkeit der Dämpferkraft entsteht. Eine erfolgreiche Implementierung dieses Modells in das verwendete Softwarepaket OCPID-DAE1, siehe [Gerds, 2013], war nicht möglich. Aufgrund der fehlenden Regularität konvergiert die Optimierung nicht erfolgreich, weshalb nun auf eine Erweiterung dieses einfachen Modells eingegangen wird.

### 4.2.3 Bi-viskoses Dämpfermodell

Damit der Bereich um die Ruhelage  $v = 0$  exakter auflöst werden kann und um die Regularität zu erhöhen, wird in [Butz und von Stryk, 2002, Stanway et al., 1987] und [Guo et al., 2006] ein bi-viskoses Modell vorgeschlagen. Dabei wird auf einem Intervall um  $v = 0$  das Bingham-Modell durch ein lineares Dämpfungsverhalten mit hoher Steigung ersetzt, welches im Schnittpunkt in das Bingham-Verhalten übergeht. Die beschreibende Abbildung lautet

$$F_{ui}(v, u_i) = \begin{cases} c_r v, & c_r |v| < f_c(u_i) + c_0 |v| \\ f_c(u_i) \text{sign}(v) + c_0 v, & c_r |v| \geq f_c(u_i) + c_0 |v| \end{cases}.$$

Die hier auftretende Konstante  $c_r$  für das lineare Verhalten um die Ruhelage und die eingestellte Dämpferhärte  $f_c(u_i)$  bestimmen den Übergang zwischen den beiden Phasen. Für  $c_r \rightarrow \infty$  geht das bi-viskose Modell in das Bingham-Modell über. In Abbildung 4.16 kann der Verlauf der Dämpferkraft für verschiedene Steuerungen betrachtet werden.

Diese Formulierung liefert, wie die Illustration zeigt, einen immerhin stetigen Kraftverlauf und ist fast überall differenzierbar. Die Ableitung ist stückweise konstant. Wegen der Nichtdifferenzierbarkeit in den beiden Knickstellen liegt jedoch keine stetige Differenzierbarkeit vor. Trotzdem ist es mit diesem Modell möglich das Optimalsteuerungsproblem erfolgreich zu lösen.

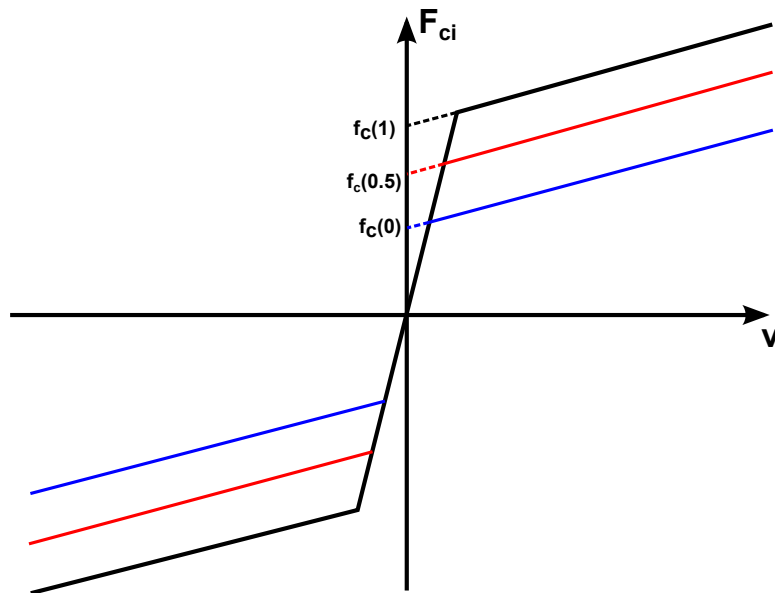


Abbildung 4.16: Kraft-Geschwindigkeits-Darstellung des bi-viskosen Modells für verschiedene Steuerungen

### Beispiel - Schwellenüberfahrt

Betrachtet wird das analoge Beispiel aus Kapitel 4.2.1 mit einem bi-viskosen Dämpferverhalten. In Abbildung 4.17 ist der Amplitudengang für drei gewählte Zielfunktionen dargestellt. Die Komfortoptimierung reduziert die auftretenden Amplituden fast über dem gesamten betrachteten Spektrum gegenüber der neutralen Steuerung. Eine Optimierung des Handlings hat, wie bereits vorher gezeigt, einen gegenteiligen Effekt. Aufgrund der unterschiedlichen Dämpferdynamik können die Ergebnisse nicht direkt mit Kapitel 4.2.1 verglichen werden. Qualitativ ist aus den Trajektorien in Abbildung 4.18 jedoch ein analoges Verhalten zu beobachten.

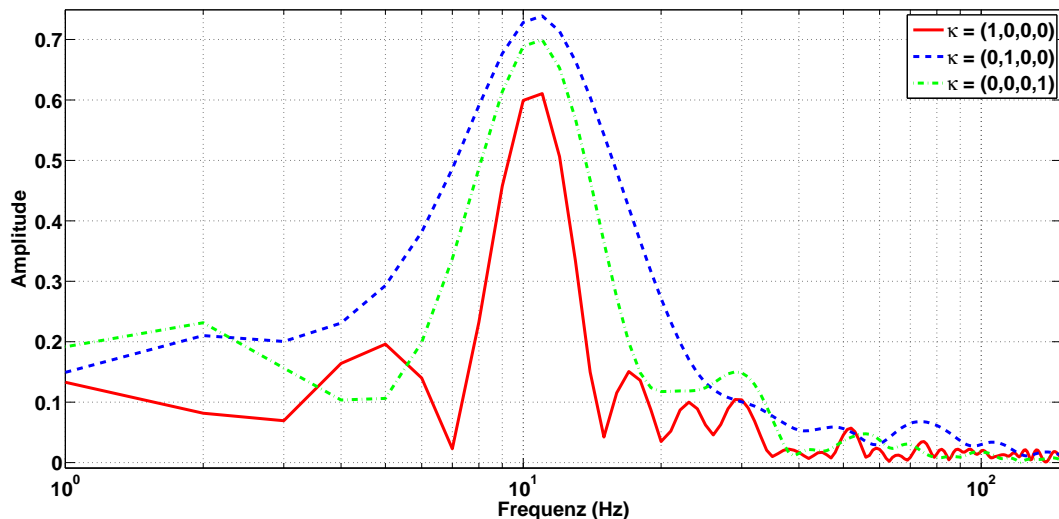


Abbildung 4.17: Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit bi-viskoser semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

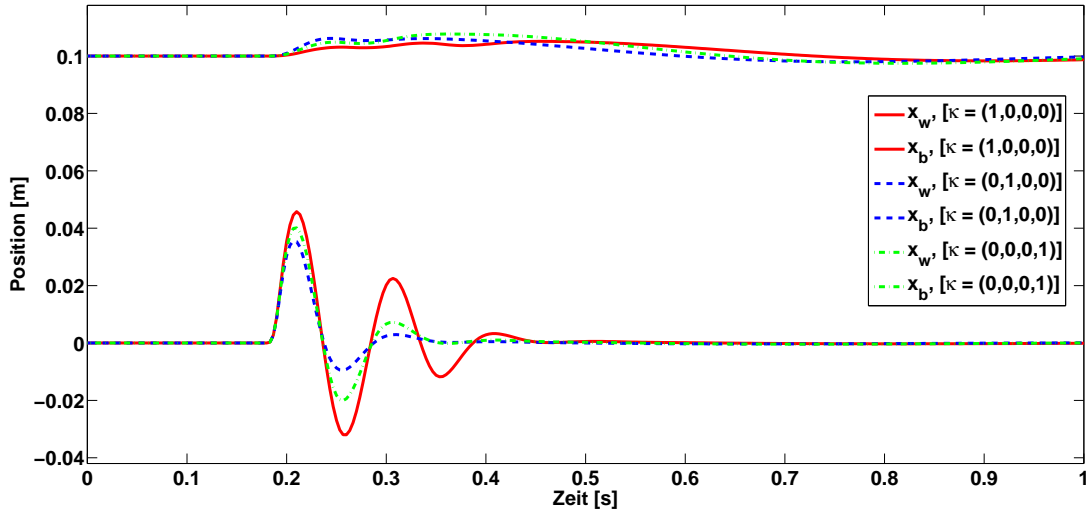


Abbildung 4.18: Vergleich der vertikalen Auslenkung von Reifen und Aufbau einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit bi-viskoser semi-aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichelpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

#### 4.2.4 Klassisches Coulomb-Reibungsmodell eines semi-aktiven Dämpfers

Das nächste Modell beschreibt eine Erweiterung des einfachen Reibungsmodells aus Kapitel 4.2.2, vgl. [Savaresi et al., 2010, Ahmed und Svaricek, 2014]. Dabei wird der Dämpfer für unterschiedliche Steuerungen durch je drei Parameter modelliert. Die Dämpferkraft genügt dabei der Gleichung

$$F_{ui}(v, u_i) = c(u)v - c_{sym}(u)|v| + c_{nl}(u)\sqrt{|v|}sign(v).$$

Die Parameter  $c(u)$ ,  $c_{sym}(u)$ ,  $c_{nl}(u)$  beschreiben dabei den Anteil der linearen Dämpfung, einen Unsymmetriefaktor und einen Faktor für das nichtlineare Verhalten des Dämpfers. Mit gegebenen Messdaten ist es möglich, mit Hilfe eines Minimierungsproblems die Bestapproximierende durch ein Kleinst-Quadrat-Problem zu bestimmen. In Abbildung 4.19 ist das Ergebnis für vier unterschiedliche angelegte Steuerungen an einen elektrorheologischen Dämpfer dargestellt. Es wird deutlich, dass das Ergebnis relativ gut ist, solange die Steigung der Dämpferkraft um die 0 nicht zu groß wird. Ansonsten liefert das Modell keine hinreichend gute Approximation. Aus diesem Grund wurde es nicht für Beispielrechnungen verwendet.

#### 4.2.5 Das Bouc-Wen-Modell

Ein Verhalten, das in Momentaufnahmen der vom Dämpfer aufbrachten Kraft nicht abzubilden ist, ist der Hysterese behaftete Anteil, der durch das Fluid verursacht wird, siehe dazu [Guo et al., 2006, Sapiński und Filuś, 2003, Ikhouane und Rodellar, 2007]. Der Hystereseeffekt führt dazu, dass die wirkende Dämpferkraft nicht nur vom aktuellen Zustand, sondern auch vom vorherigen Verlauf der Bewegung abhängt. Bei einer periodischen Anregung lässt sich die Dämpferkraft nicht durch eine Funktion darstellen.

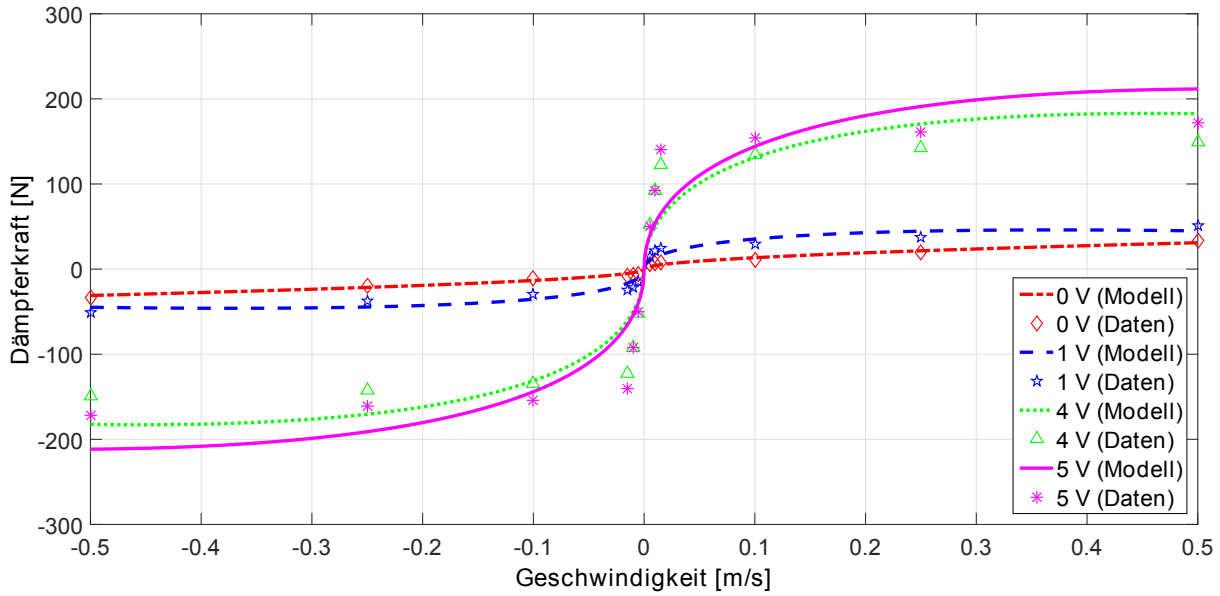


Abbildung 4.19: Bestapproximierende Coulomb-Reibungsmodelle eines elektrorheologischen Dämpfers für unterschiedliche Messdaten (Daten: Fludicon GmbH)

Um dieses Verhalten zu modellieren wird hier das erweiterte Bouc-Wen-Modell vorgestellt, vgl. [Guglielmino et al., 2008, Spencer et al., 1997, Rettig und von Stryk, 2005, Butz und von Stryk, 2002, Hoppe et al., 1999]. Das mechanische Ersatzmodell zeigt Abbildung 4.20.

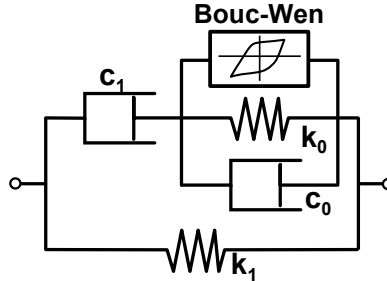


Abbildung 4.20: Schematische Darstellung des erweiterten Bouc-Wen-Modells (vgl. [Butz und von Stryk, 2002])

Der Zustand des Dämpfers wird durch ein Differentialgleichungssystem mit drei Zustandsvariablen  $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$  beschrieben. Für eine Herleitung sei auf die erwähnte Literatur und die darin enthaltenen Quellen verwiesen. Es gilt

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{c_0 + c_1} (c_1 v - \alpha y_2 - k_0 y_1), \quad (4.9a)$$

$$\dot{y}_2 = (A - \beta (1 + \text{sign}(\dot{y}_1 y_2)) y_2^2) \dot{y}_1, \quad (4.9b)$$

$$\dot{y}_3 = \eta (u_i - y_3). \quad (4.9c)$$

Die daraus resultierende Kraft ergibt sich als

$$F_{ui} = c_1 (v - \dot{y}_1) + k_1 ((x_b - x_w) - x_0),$$

wobei  $v = \dot{x}_b - \dot{x}_w$  die Einfederungsgeschwindigkeit darstellt.



Die Konstanten in (4.9a)-(4.9b) bestimmen sich in Abhängigkeit von  $y_3$  als

$$c_0 = c_{01} + y_3 c_{02},$$

$$c_1 = c_{11} + y_3 c_{12},$$

$$\alpha = \alpha_1 + y_3 \alpha_3.$$

Der Parametervektor  $p = (c_{01}, c_{02}, c_{11}, c_{12}, \alpha_1, \alpha_2, A, \beta, k_0, k_1, x_0, \eta)^\top$  des Problems kann mit Hilfe eines Parameteridentifizierungsproblems bestimmt werden, vgl. [Rettig, 2003]. Da der Zustand des Dämpfers mithilfe einer Differentialgleichung modelliert wird, ist eine Differenzierbarkeit des Zustands gesichert.

### Beispiel

Zur Veranschaulichung wird das Beispiel aus Kapitel 4.2.1 aufgegriffen und für das Bouc-Wen-Modell gelöst. In Abbildung 4.21 und 4.22 können der Amplitudengang und der Zustand des Systems für verschiedene Zielfunktionen betrachtet werden. Aufgrund der zusätzlichen Zustände des Dämpfers wächst die Dimension des Optimierungsproblems und die Rechenzeiten werden tendenziell länger.

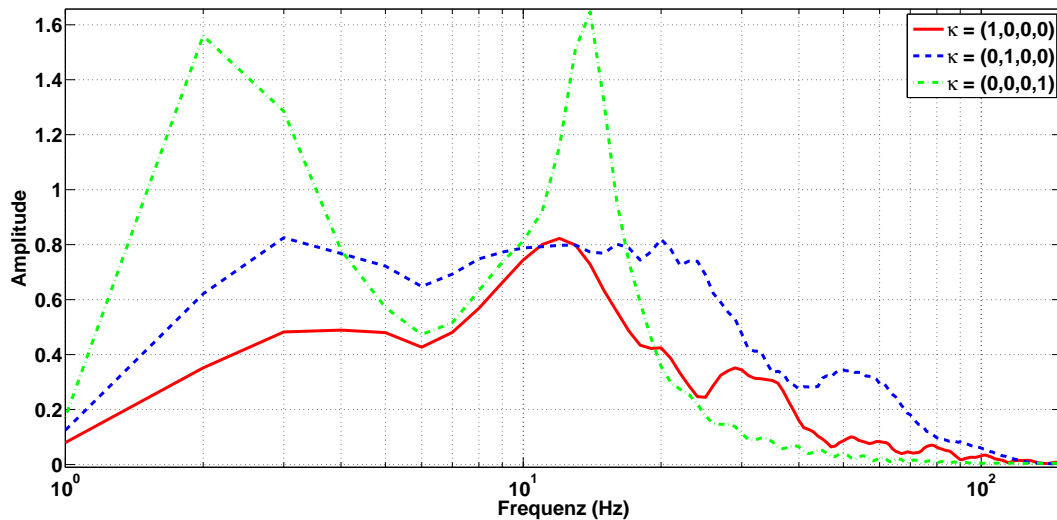


Abbildung 4.21: Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit Bouc-Wen-Dämpfer für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

### 4.2.6 Datenfitting experimenteller Messungen

In diesem letzten Modell eines elektro- oder magnetorheologischen Dämpfers soll die Möglichkeit der Dateninterpolation zur Verfügung gestellter Daten demonstriert werden. In praktischen Anwendungsfällen liegen häufig Kennfelder bzgl. der Einfederungsgeschwindigkeit  $v$  und der angelegten Spannung vor, aus denen eine Abbildung für den gesamten Steuerungs- und Geschwindigkeitsbereich definiert werden muss. Eine lineare Interpolation erscheint nicht sinnvoll, da wiederum lediglich eine stückweise Differenzierbarkeit gegeben wäre. In [Ehrgott und Masri, 1992] wird eine zweidimensionale Interpolation mittels Chebychev-Polynomen für die Modellierung klassischer Dämpfer vorgestellt, welche in [Gavin et al., 1996] für elektro- oder magnetorheologische Dämpfer erweitert wird. Die Interpolation mittels kubischen Splines stellt eine naheliegende Idee dar. Aufgrund des im vorangegangenen

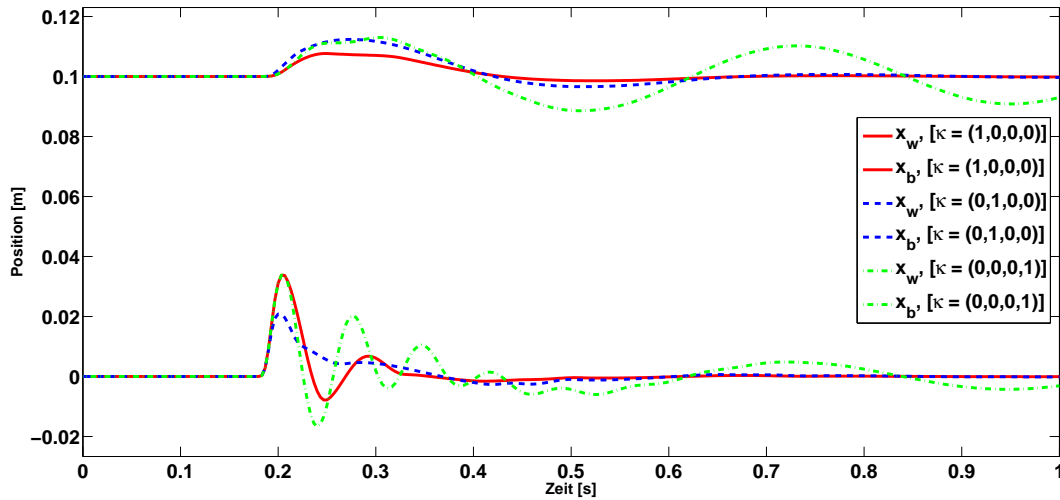


Abbildung 4.22: Vergleich der vertikalen Auslenkung von Reifen und Aufbau einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit Bouc-Wen-Dämpfer für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichelpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

Kapitel beschriebenen Verhalten der Dämpferkraft, vgl. beispielsweise Abbildung 4.16, erzeugt eine Splineinterpolation jedoch ein nicht gewünschtes Überschwingen der interpolierenden Kurve. Dieses Verhalten wird in Abbildung 4.23 und 4.24 deutlich sichtbar.

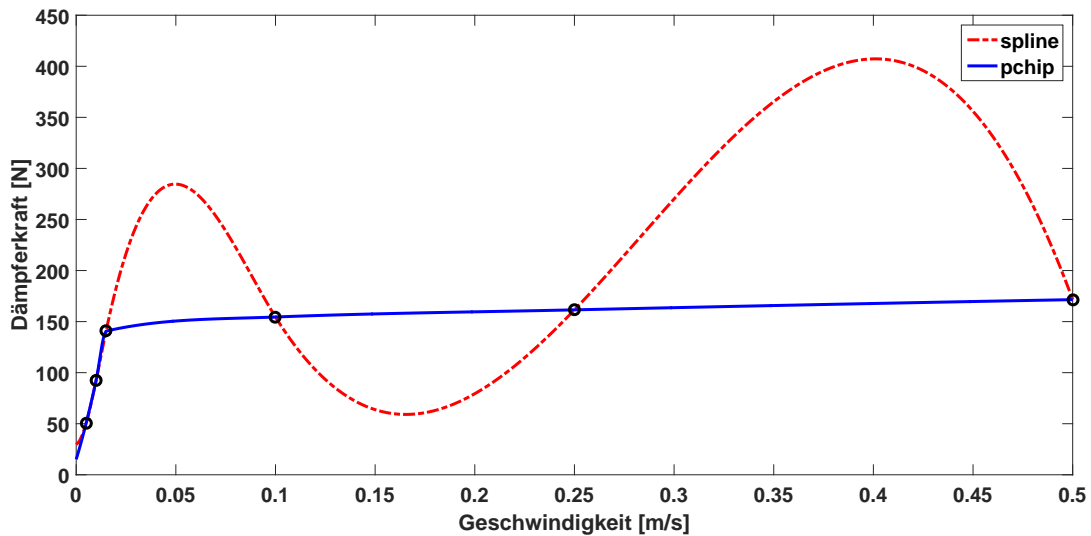


Abbildung 4.23: Vergleich der Spline-Interpolation (gestrichelpunktet) mit der PCHIP-Interpolation (durchgezogen)

### Form erhaltende stückweise kubische Hermite-Interpolation (PCHIP)

Weil das Überschwingen keinen realitätsnahen Verlauf der Dämpferkraft widerspiegelt, wird hier alternativ die Interpolation mittels *form erhaltenden stückweise kubischen Hermite-Polynomen* (engl.: *piecewise-cubic-hermite-interpolating-polynomials*, kurz: *pchip*) aus [Fritsch und Carlso, 1980, Kahaner et al., 1989] kurz vorgestellt. Die interpolierende Funktion wird lokal in jedem Intervall  $[x_i, x_{i+1}]$

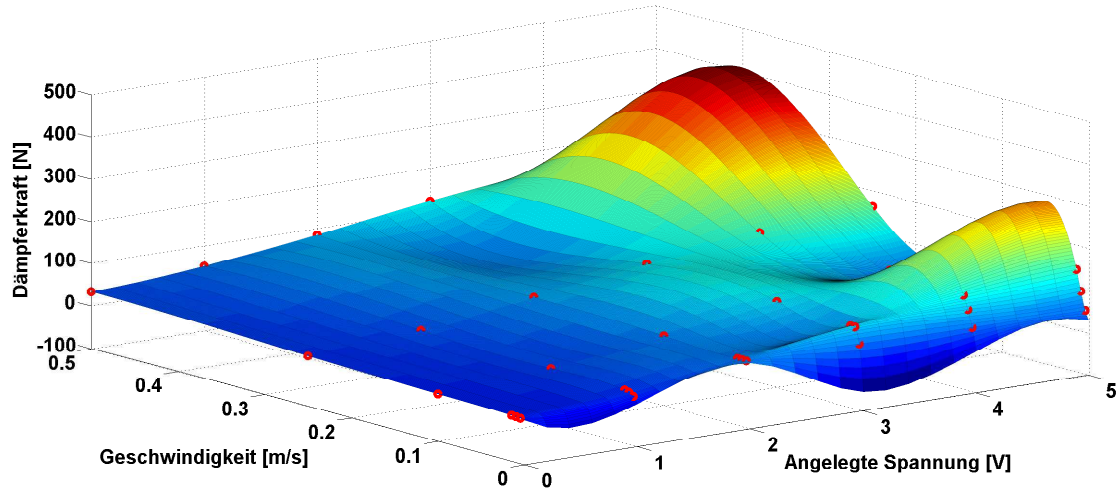


Abbildung 4.24: 2D-Spline-Interpolation eines Dämpferkennfelds erzeugt unerwünschte Oszillationen

als kubisches Polynom mit folgender Gestalt dargestellt:

$$p(x) = \frac{3h_i(x-x_i)^2 - 2(x-x_i)^3}{h_i^3}y_{i+1} + \frac{h_i^3 - 3h_i(x-x_i)^2 + 2(x-x_i)^3}{h_i^3}y_i \\ + \frac{(x-x_i)^2(x-x_i-h_i)}{h_i^2}d_{i+1} + \frac{(x-x_i)(x-x_i-h)^2}{h_i^2}d_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Hier sind  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$ , die Stützstellen,  $d_i, i = 0, \dots, m$ , die Steigung an den Stützstellen und  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . Wenn die Steigung vorgegeben ist, lässt sich das interpolierende Polynom direkt aufstellen. Ist dies nicht der Fall, so müssen die Steigungen noch berechnet werden. Die oben verwendete Spline-Interpolation berechnet die  $d_i$ 's unter der Voraussetzung, dass eine zweimal stetig differenzierbare Funktion entsteht. Beim PCHIP-Verfahren wird lediglich die stetige Differenzierbarkeit gefordert, die Steigungen jedoch so gewählt, dass bei monotonen Eingangsdaten diese Monotonie auch von der Interpolierenden wiedergegeben wird. Deshalb soll für diese Interpolationsmethode auch der Zusatz *formerhaltend* verwendet werden.

In [Moler, 2004] werden die Steigungen folgendermaßen berechnet:

1. Für innere Stützstellen  $0 < i < m$  können zwei Fälle auftreten: Die Steigungen der linear Interpolierenden haben zu den benachbarten Stützpunkten das selbe Vorzeichen oder nicht. Die Steigung in jedem Intervall ist dabei gegeben durch

$$\delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

- (a) Gilt  $\text{sign}(\delta_{i-1}) \neq \text{sign}(\delta_i)$ : Setze  $d_i = 0$ .
- (b) Gilt  $\text{sign}(\delta_{i-1}) = \text{sign}(\delta_i)$ : Setze  $d_i$  als gewichtetes harmonisches Mittel der benachbarten Steigungen

$$d_i = \frac{w_1 + w_2}{\frac{w_1}{\delta_{i-1}} + \frac{w_2}{\delta_i}} \quad \text{mit} \quad w_1 = 2h_i + h_{i-1}, \quad w_2 = h_i + 2h_{i-1}.$$

2. Die Steigungen  $d_0$  und  $d_m$  benötigen eine andere Berechnungsmethode, die hier exemplarisch für  $d_0$  dargestellt wird.

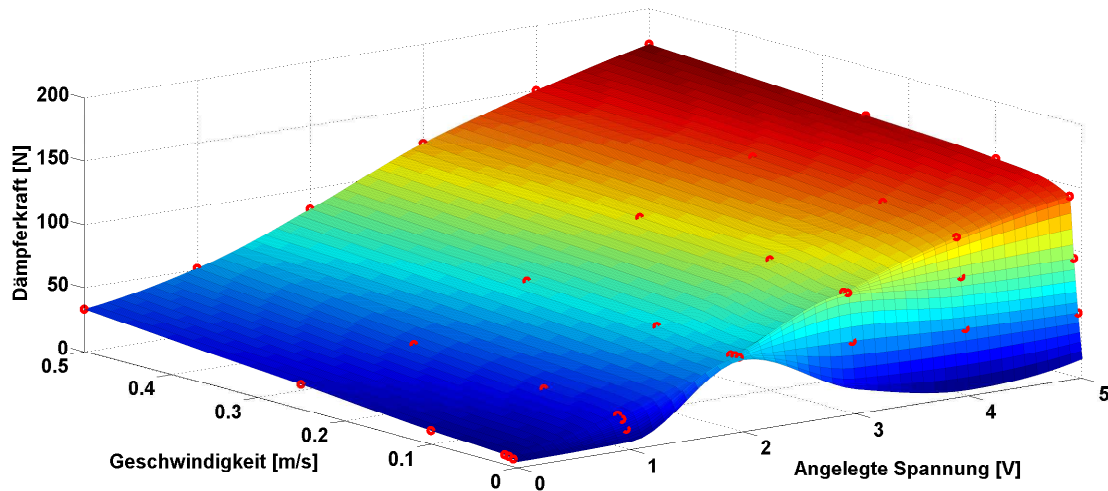


Abbildung 4.25: 2D-PCHIP-Interpolation eines Dämpferkennfelds

- (a) Berechne  $d_0 = \frac{(2h_0+h_1)\delta_0-h_0\delta_1}{h_0+h_1}$ .
- (b) Wenn  $\text{sign}(d_0) \neq \text{sign}(\delta_0)$ : Setze  $d = 0$ .
- (c) Wenn  $\text{sign}(\delta_0) \neq \text{sign}(\delta_1)$  und  $|d| > 3\delta_0$ : Setze  $d = 3\delta_0$ .

Für  $d_m$  ändern sich lediglich die Indizes 0 zu  $m - 1$  und 1 zu  $m - 2$ .

Für ein vorliegendes Dämpferkennfeld sind in den Abbildungen 4.24 und 4.25 die mittels Spline- und PCHIP-Interpolation berechneten interpolierten Kennfelder dargestellt. Die Hermite-Interpolierenden liefern das gewünschte Verhalten für die vorliegenden Daten. Wie oben bereits erwähnt sind bei der formerhaltenden Interpolation an den Stützstellen lediglich die ersten Ableitungen stetig und nicht wie bei kubischen Splines auch die zweiten Ableitungen.

### Beispiel

Nun wird in einem Beispiel die Anwendbarkeit der stückweisen kubischen Hermite Interpolation nachgewiesen. Da während der Überfahrt auch Relativgeschwindigkeiten des Dämpfers mit höherem Betrag als die maximal gegebenen Messdaten auftreten, werden die Dämpferkräfte außerhalb des Datenbereichs linear extrapoliert. Die Interpolation wird auf eine zweidimensionale Interpolation erweitert, indem zuerst für die vorherrschende Momentangeschwindigkeit die interpolierten Werte für die Steuersignale der Messreihe bestimmt werden. Anschließend wird ein weiteres Interpolationspolynom in Steuerungsrichtung bestimmt, welches am aktuell gewählten Punkt  $u(t)$  ausgewertet wird.

Es wird die Schwellenüberfahrt aus den vorangegangenen Beispielen betrachtet. Das Optimierungsverfahren konvergiert trotz der lediglich einmal stetig differenzierbaren rechten Seite gegen einen KKT-Punkt. Der Vergleich der resultierenden Frequenzgänge für verschiedene Zielfunktionen ist in Abbildung 4.27 dargestellt. Die Resultate besitzen eine ähnliche Charakteristik, wie die vorangegangenen Beispiele mit alternativer Dämpfermodellierung. In Abbildung 4.26 ist die komfort- mit der handlingmaximalen Steuerung verglichen. Eine interessante Beobachtung bietet das nahezu gespiegelte Verhalten der Steuerung bzgl. der Ausgangssteuerung mit konstantem Steuerwert  $u(t) = 0.5$ .

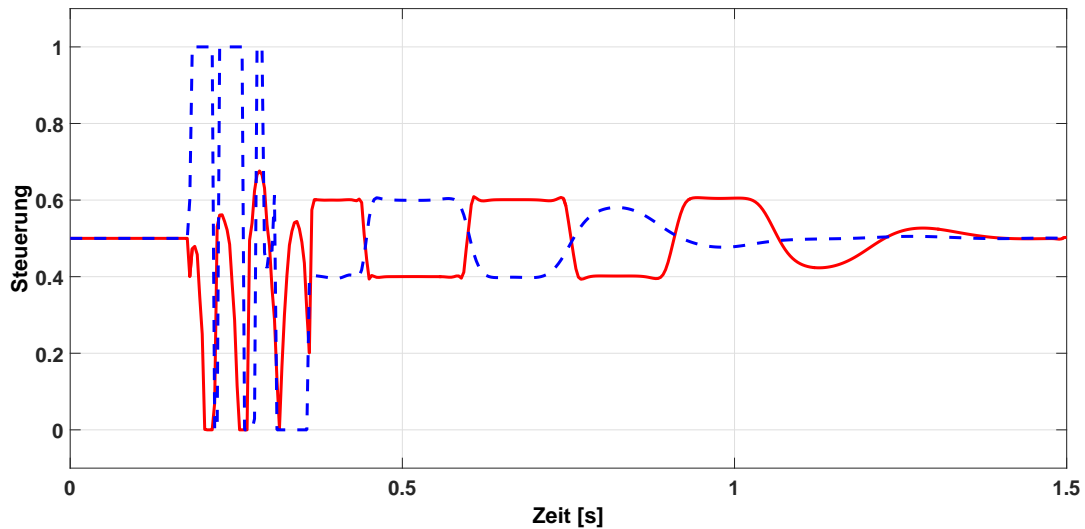


Abbildung 4.26: Vergleich der Steuerungen für  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$  (durchgezogen) und  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$  (gestrichelt)

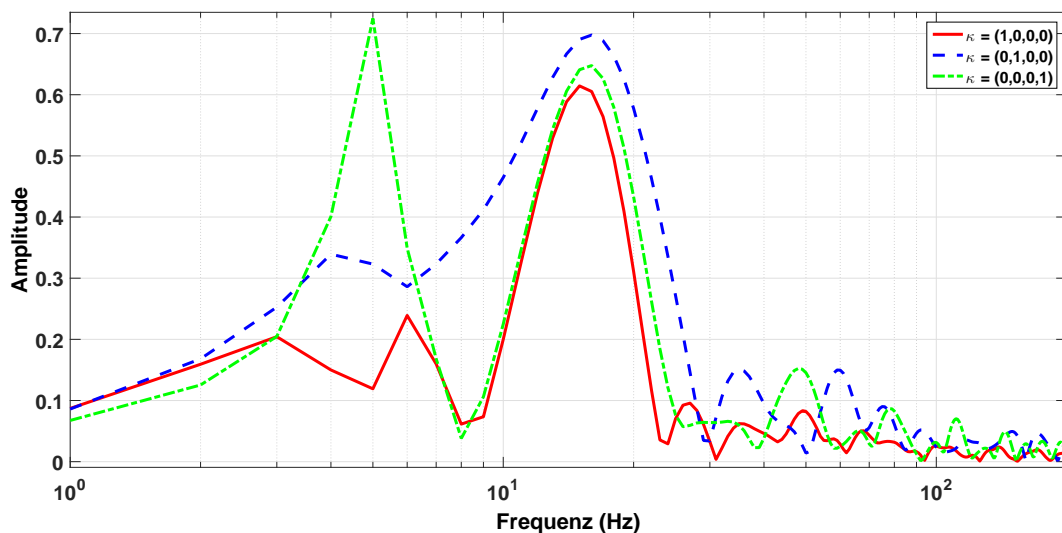


Abbildung 4.27: Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit pchip-Dateninterpolation für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

Im Bereich der semi-aktiven Steuerung bietet die Dämpfermodellierung mittels interpolierten Messdaten die umfangreichste Anpassbarkeit an ein reales System. Einzig der Hystereseffekt kann damit nicht abgebildet werden. Das verwendete Optimierungsverfahren funktioniert trotz der erwähnten unzureichenden Regularität für die getesteten Beispiele zuverlässig. Die Beispielrechnungen in Kapitel 5 basieren auf dem linearen Dämpfermodell aus Abschnitt 4.2.1. Dies beschränkt jedoch nicht die Einsatzfähigkeit des Echtzeitalgorithmus.

### 4.3 Aktive Steuerung

In der aktiven Steuerung werden, wie der Name bereits verrät, aktive Bauelemente zur Steuerung verwendet. Dies können beispielsweise hydraulische Zylinder sein, wie sie beim *Active-Body-Control*

Fahrwerk von Mercedes zum Einsatz kommen, oder Linearmotoren, wie beim aktiven Fahrwerk der Firma BOSE, vgl. [Schindler, 2009, Jones, 2005, Gysen et al., 2010].

### 4.3.1 Verzögerung der Aktoren

Da die Aktoren nicht so schnell auf Änderungen der Steuerung reagieren, wie es die rheologischen Flüssigkeiten im semi-aktiven Fall können, wird hier eine zeitverzögerte Reaktion auf die Sollsteuerung hinzugefügt. Dies wird über ein in der Regelungstechnik *PT1-Glied* genanntes Verzögerungsglied ersten Grades realisiert, vgl. [Lunze, 2010]. Es wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\dot{u}_{ist}(t) = \frac{u_{soll}(t) - u_{ist}(t)}{T}, \quad u_{ist}(t_0) = u_0, \quad T > 0. \quad (4.10)$$

Hier wurde die Bezeichnung bereits für das betrachtete Problem angepasst. Die Steuerung  $u_{soll}$  ist die Steuerung, auf die direkt Einfluss genommen wird und  $u_{ist}$  stellt den tatsächlichen Zustand des Aktuators dar. Verändert sich der Sollzustand sprunghaft, wie es bei der stückweise konstant gewählten Steuerung der Fall ist, so folgt der Ist-Zustand verzögert und nähert sich dem Eingabewert exponentiell an. Für eine Sprungeingabe von  $u_{soll}(0) = u_0$  zu  $u_{soll}(t), t > 0$  lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$u_{ist}(t) = u_0 + (u_{soll} - u_0) \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0.$$

In Abbildung 4.28 ist das Verhalten der tatsächlichen Steuerung für eine variierende Sollsteuerung dargestellt.

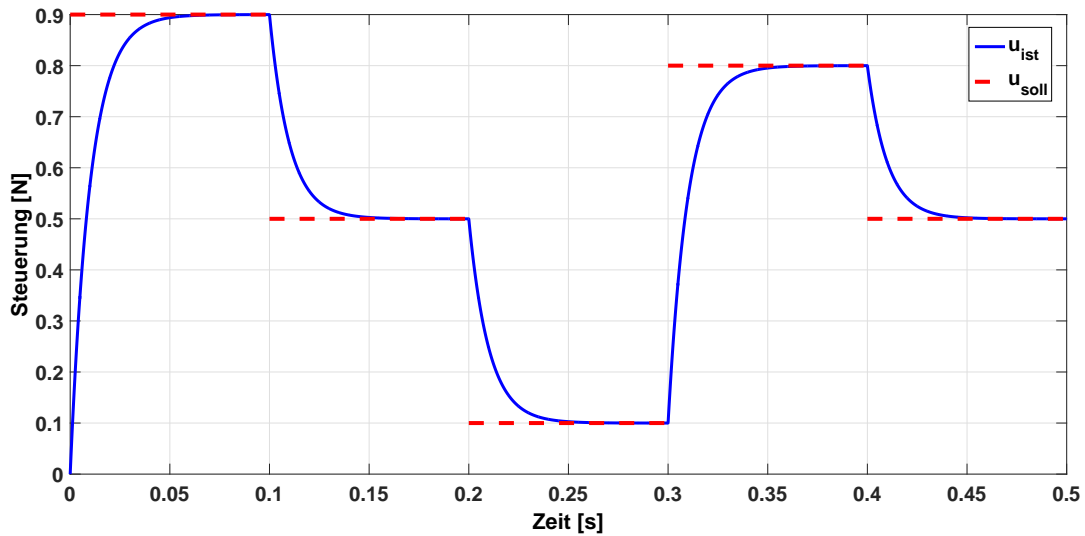


Abbildung 4.28: Verhalten einer mit einem  $PT_1$ -Glied verzögerten Steuerung (durchgezogen:  $u_{ist}$ , gestrichelt  $u_{soll}$ )

Mit der Konstanten  $T > 0$  wird die Geschwindigkeit der Anpassung eingestellt. Dabei gilt: Je kleiner  $T$ , desto schneller die Anpassung. Für die Beispielrechnungen wurde  $T = 0.01$  gewählt. Zur Einarbeitung in das Optimalsteuerungsproblem muss die Differentialgleichung (4.10) in das Differentialgleichungssystem aufgenommen werden, wobei der Zustand  $x$  um  $u_{ist}$  erweitert wird zu  $\bar{x} = [x, u_{ist}] \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ . Bei mehreren Steuerungen, wie es beim Halb- und Vollfahrzeug der Fall ist, muss dies für alle Steuerungen durchgeführt werden.

### 4.3.2 Erweiterung der Zielfunktion für aktive Steuerungen

Da bei einer aktiven Steuerung der Aufbau ohne äußere Krafteinwirkung in Bewegung gebracht werden kann, ist die Ruhelage  $x = (0, 0, 0, 0)$  lediglich für eine nicht eingreifende Steuerung asymptotisch stabil, d.h. es ist beispielsweise durch eine konstante Steuerung möglich den Aufbau um einige Zentimeter höher bzw. tiefer zu legen. Bei der optimalen Überfahrt über ein Hindernis kann sich am Ende des betrachteten Zeithorizonts ein statischer Offset einstellen oder auch eine konstante Geschwindigkeit des Aufbaus. Da jedoch bei der Betrachtung von Einzelereignissen der Zustand nach dem Ereignis zumindest näherungsweise wieder dem idealen Fahrzustand entsprechen soll, ist dies nicht das gewünschte Verhalten. Um dem entgegenzuwirken, werden zusätzliche Terme in die Zielfunktion aufgenommen, die den Endzustand normalisieren. Dazu werden die Einfederung und die Geschwindigkeit des Aufbaus am Ende des Zeitintervalls als Endkosten addiert. In Mayer-Form, vgl. Kapitel 3.2.2, schreibt sich dies als

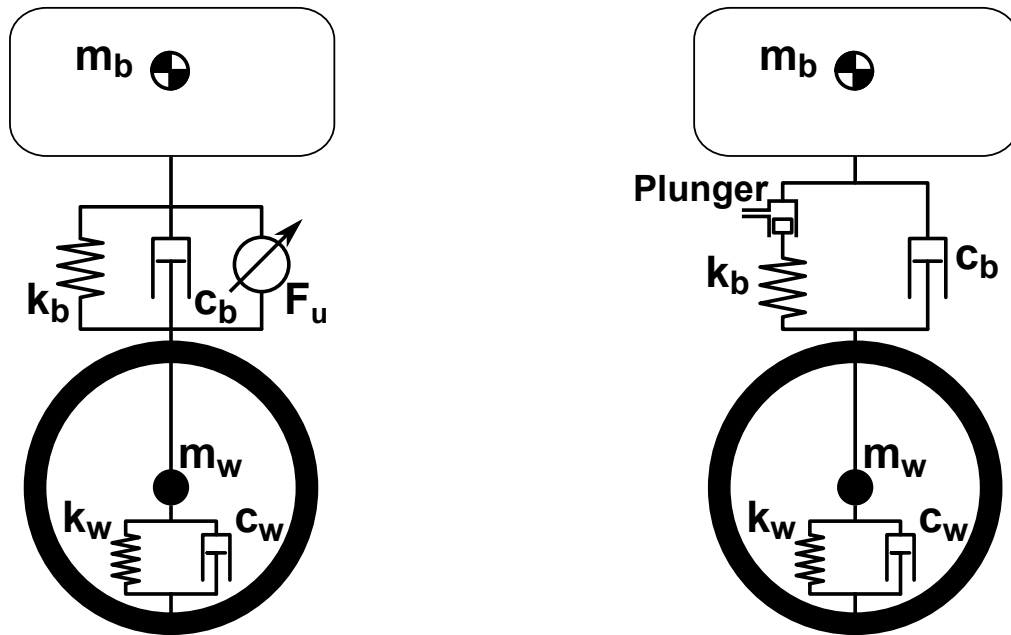
$$J(u) = \mu_c x_c(t_f) + \mu_v (\dot{x}_b(t_f))^2 + \mu_e (x_b(t_f) - x_w(t_f))^2.$$

Hierbei bezeichnet  $x_c$  den eingeführten Zustand für die kontinuierlichen Kosten,  $\mu_v$  gewichtet die Abweichung der Aufbaugeschwindigkeit am Ende des Zeithorizonts und  $\mu_e$  die Einfederung des Fahrwerks bezüglich seiner Ruhelage.

Da es auch bei aktiven Systemen verschiedene Ansätze zur Modellierung des Kraftelements existieren, können dort ebenfalls unterschiedliche Möglichkeiten vorgestellt werden. Aus Platzgründen werden nun zwei Varianten demonstriert, die jedoch das grundlegende Problem gut verdeutlichen.

### 4.3.3 Steuerung mittels Krafteinleitung

Als erstes wird die direkte Krafteinleitung in das System betrachtet, vgl. [Rajamani, 2006, Marzbanrad et al., 2002, Foag und Grübel, 1987, Foag, 1990]. Dies kann beispielsweise über einen Hydraulikkolben umgesetzt werden. Dieser wird parallel zur Feder-Dämpfer Aufhängung als Kraftelement eingefügt, mittels dessen die Steuerung realisiert wird, siehe Abbildung 4.29a. Ein Problem dieses Modells ist, dass dieses ideale Kraftelement nicht realisierbar ist. Der erwähnte Einbau eines Hydraulikkolbens bringt die Eigenschaft mit, dass diese Kolben nicht nur eine Kraft anbringen, sondern auch eine quasi starre Verbindung zwischen Aufbau und Radmasse erzeugen. Damit wird die Federung und Dämpfung der Radaufhängung umgangen und der Optimierungseffekt geht verloren, vgl. [Schindler, 2009]. Trotzdem soll eine kurze Betrachtung dieses Modells durchgeführt werden, da das deutlich größere Potential bzgl. Komfort- und Handlingverbesserung bei einer aktiven Steuerung sichtbar wird.



(a) Schematische Darstellung der aktiven Dämpfung mit einem parallel angebrachten Kraftelement (vgl. [Rajamani, 2006])

(b) Schematische Darstellung der aktiven Dämpfung mit einem seriell angebrachten Element zur Fußpunktverstellung (vgl. [Schindler, 2009])

Abbildung 4.29: Zwei Modellierungsmöglichkeiten aktiver Fahrwerke

#### Problem 4.1: Optimale Steuerung mit PT-1 Kraftelement

Minimiere

$$J(u; z_0, z_\rho)$$

bezüglich aller  $u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{U}$  unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} m_b \ddot{z}_b &= k_b(z_w - z_b) + c_b(\dot{z}_w - \dot{z}_b) + F_u, \\ m_w \ddot{z}_w &= -k_b(z_w - z_b) - c_b(\dot{z}_w - \dot{z}_b) + k_w(z_\rho - z_w) + c_w(\dot{z}_\rho - \dot{z}_w) - F_u, \\ \dot{F}_u &= \frac{u - F_u}{T}, \end{aligned}$$

mit gegebenen Anfangswerten  $z(0) = z_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0$ , PT-1 Verzögerungszeit  $T > 0$  und gegebenem Straßenprofil  $z_\rho : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Steuermenge wird definiert als  $\mathbb{U} := [-F_{Max}, F_{Max}]$  für eine gegebene maximale Kraft  $F_{Max}$ .

#### 4.3.4 Steuerung durch Verstellung des Federfußpunktes

Aufbauend darauf wird nun eine realitätsnähere Modellierung eines aktiven Fahrwerks vorgestellt. In [Schindler, 2009] wird das dort verwendete aktive Fahrwerk von Mercedes Benz durch die in Abbildung 4.29b gezeigte Geometrie beschrieben. Der obere Aufhängungspunkt der Fahrwerksfeder ist nicht direkt am Aufbau befestigt, sondern besitzt einen durch einen so genannten Plunger verstellbaren Fußpunkt. Der Plunger kann durch einen Hydraulikzylinder oder einen Linearmotor realisiert werden. Durch ein aktives Vorspannen der Feder können Kräfte ins Fahrwerk eingebracht werden oder durch eine Entlastung des Aufbaus von Schwingungen isoliert werden.

Das hieraus resultierende Optimalsteuerungsproblem besitzt für ein Viertelfahrzeug die folgende Ge-



stalt:

### Problem 4.2: Optimale Steuerung mit Fußpunktverstellung

Minimiere

$$J(u; z_0, z_\rho)$$

bezüglich aller  $u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{U}$  unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} m_b \ddot{z}_b &= k_b(z_w - (z_b + z_u)) + c_b(\dot{z}_w - \dot{z}_b), \\ m_w \ddot{z}_w &= -k_b(z_w - (z_b + z_u)) - c_b(\dot{z}_w - \dot{z}_b) + k_w(z_\rho - z_w) + c_w(\dot{z}_\rho - \dot{z}_w), \\ \dot{z}_u &= \frac{u - z_u}{T}, \end{aligned}$$

mit gegebenen Anfangswerten  $z(0) = z_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0, z_u(0) = 0$ , PT-1 Verzögerungszeit  $T > 0$  und gegebenem Straßenprofil  $z_\rho : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Steuermenge wird definiert als  $\mathbb{U} := [-z_{Max}, z_{Max}]$  für eine gegebene maximale Verschiebung des Plungers  $z_{Max}$ .

### Beispiel - Stufenüberfahrt mit Fußpunktverstellung

Nun wird das Beispiel aus Kapitel 4.2 für die aktive Steuerung umformuliert, um einen direkten Vergleich zu gewährleisten. Es wird in Abbildung 4.30 deutlich, dass die Aufbaubewegung bei einem aktiv gesteuerten Fahrwerk für die Stufenüberfahrt bereits vor Erreichen des eigentlichen Hindernisses beginnt. Damit kann ein weicherer Übergang gewährleistet werden. Diese Eigenschaft macht ein aktives Fahrwerk in Kombination mit einer vorausschauenden Sensorik besonders leistungsstark. Bei der komfortmaximalen Steuerung sind die auftretenden Frequenzamplituden (vgl. Abbildung 4.31) über das gesamte Spektrum deutlich verringert. Betrachtet man die zugehörige Trajektorie des Reifens, sieht man, dass dieser Komfortgewinn auf Kosten der dort auftretenden Schwingungen geschieht. Der Reifen beschreibt eine stark oszillierende Bewegung bevor er sich dem Gleichgewichtszustand nähert.

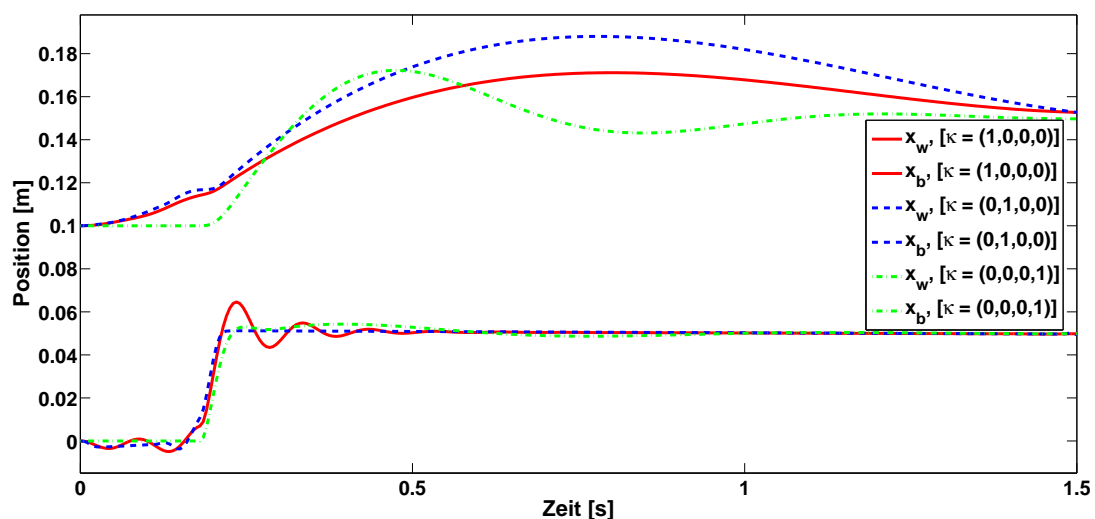


Abbildung 4.30: Vergleich der vertikalen Position von Reifen und Aufbau einer Stufenüberfahrt ( $\mathcal{T}(0.05)$ ) mit aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichelpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

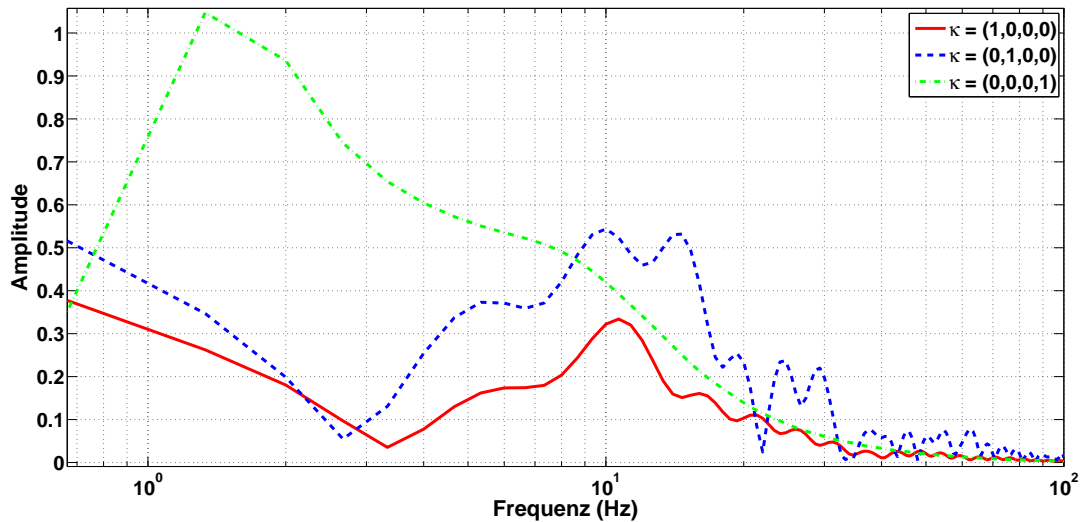


Abbildung 4.31: Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Stufenüberfahrt ( $\mathcal{T}(0.05)$ ) mit aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

### Beispiel - Schwellenüberfahrt mit Fußpunktverstellung

Eine Schwellenüberfahrt zeigt ein ähnliches Ergebnis. Durch eine vor Erreichen des Hindernisses aufgebrauchte Schwingung im Fahrwerk wird der Aufbau zur Komfortmaximierung angehoben, vgl. Abbildung 4.33, und nach Überquerung der Schwelle langsam wieder abgelassen. Die Schwingungen werden hier weitestgehend auf den Reifen übertragen. Für die sicherheitsmaximale Steuerung sind die Schwingungen im Reifen sehr gering und dieser folgt besonders nach dem Scheitelpunkt der Schwelle der Straßenanregung. Im Aufbau wird jedoch ein negativer Ausschlag der Position erzeugt, wodurch deutlich höhere Beschleunigungen verursacht werden, wie es in Abbildung 4.33 zu sehen ist.

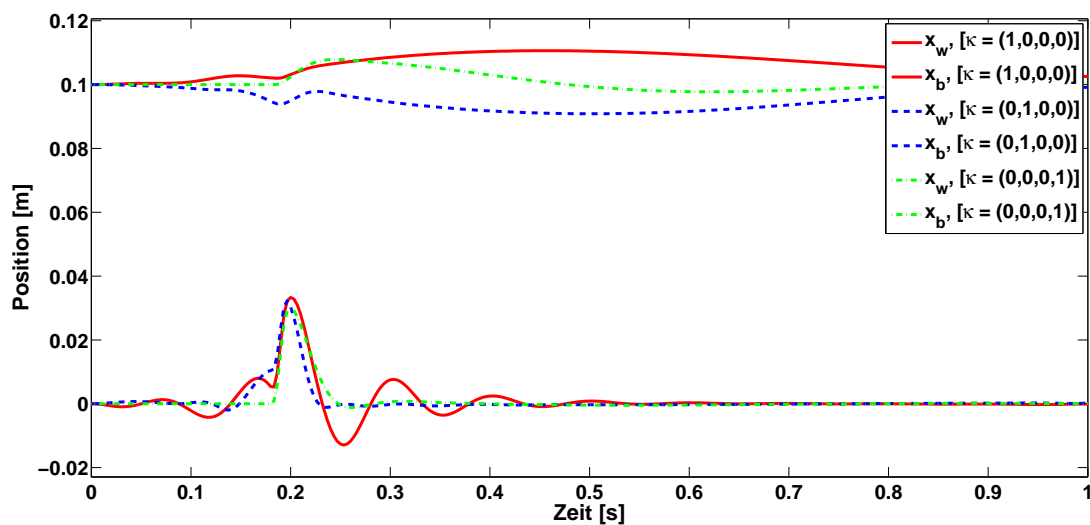


Abbildung 4.32: Vergleich der vertikalen Position von Reifen und Aufbau einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

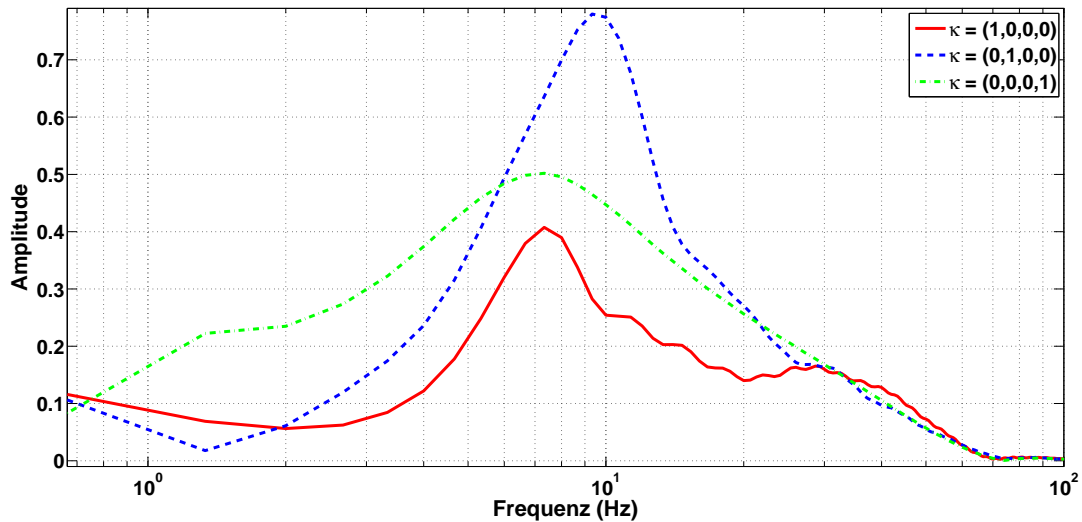


Abbildung 4.33: Vergleich des Frequenzgangs der Aufbaubeschleunigung einer Schwellenüberfahrt ( $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$ ) mit aktiver Steuerung für verschiedene Zielfunktionen (durchgezogen -  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ , gestrichelt -  $\kappa = (0, 1, 0, 0)$ , gestrichelpunktet -  $\kappa = (0, 0, 0, 1)$ )

### Beispiel - Aktiver LKW-Fahrersitz

Abschließend wird nun das in Kapitel 3.1.6 vorgestellte Modell eines Lastkraftwagens aus [Simeon et al., 1994] herangezogen, um eine aktive Federung eines Fahreressitzes ähnlich dem System von Bose zu bestimmen, vgl. [Jones, 2005]. Dazu wird ein Plunger zwischen Federbein und Sitz modelliert, dessen Dynamik ebenfalls mit Hilfe eines PT-1-Glieds approximiert wird.

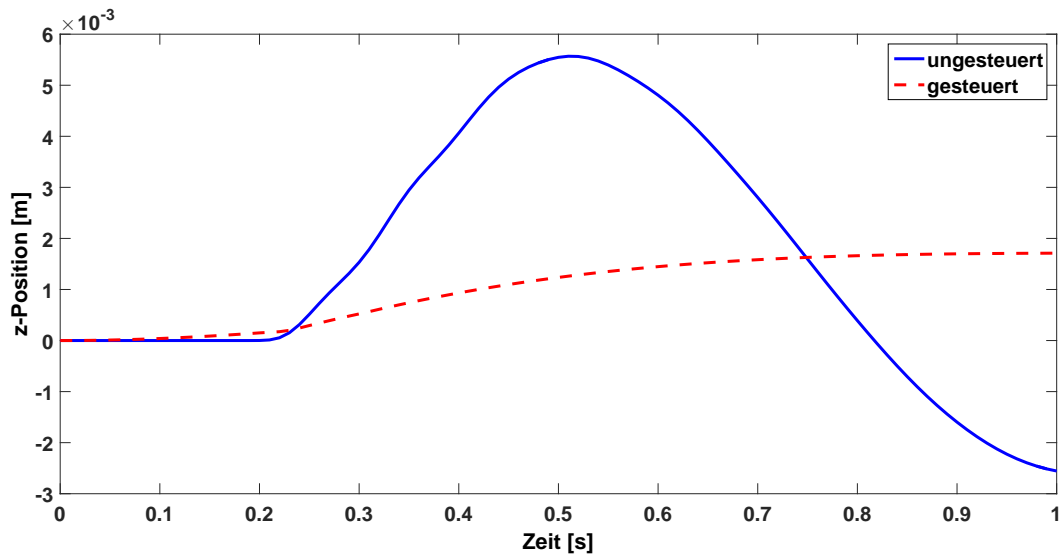


Abbildung 4.34: Vertikale Position des Fahrersitzes bei ungesteuerter (durchgezogen) und optimal gesteuerter (gestrichelt) Überfahrt

Betrachtet wird eine komfortoptimierende Schwellenüberfahrt  $\mathcal{P}(0.05, 1.0)$  mit  $\kappa = (1, 0, 0, 0)$ . Der Plunger hat einen Bereich von  $\pm 5\text{cm}$ , den er den Sitz anheben bzw. absenken kann. In den Abbildungen 4.34 und 4.35 sind die vertikale Position des Sitzes, sowie die auftretenden Amplituden der

Beschleunigungsfrequenzen dargestellt. In beiden Darstellungen wird die deutliche Verbesserung des Verhaltens sichtbar. Die Schwingungen des Fahrersitzes werden fast komplett unterdrückt und die Frequenzen werden über den gesamten betrachteten Frequenzbereich deutlich reduziert.

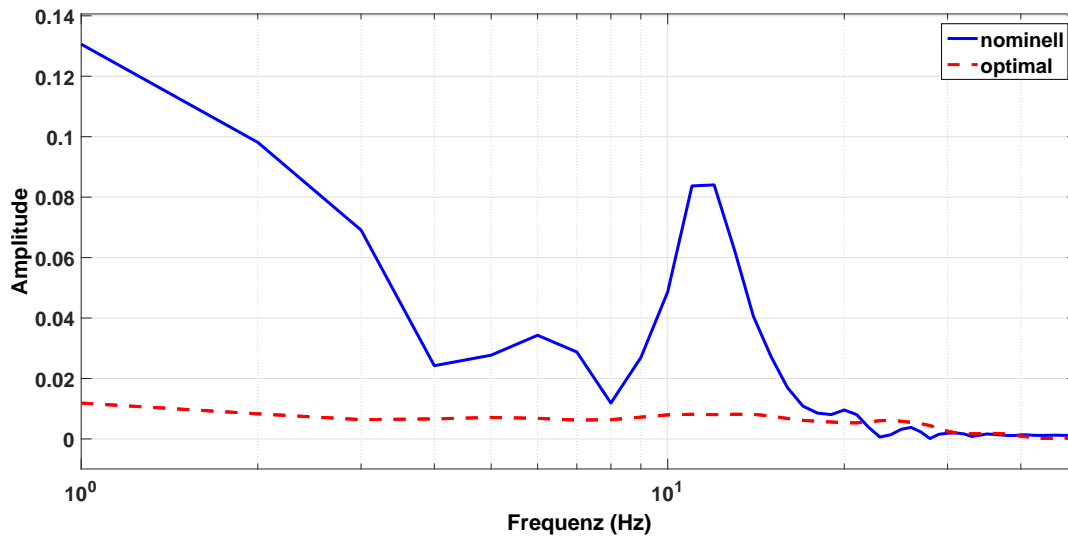


Abbildung 4.35: Vergleich der Amplituden der Fahrersitzbeschleunigung des optimal gesteuerten Überfahrts (gestrichelt) mit der Ungesteuerten (durchgezogen)

In Abbildung 4.36 ist die Plunger-Steuerung für die Überfahrt dargestellt. In der Grafik ist bzgl. der rechten  $y$ -Achse die vertikale Kabinengeschwindigkeit dargestellt. Das entgegengesetzte Verhalten der Sitzsteuerung ist gut zu sehen und entspricht dem, was intuitiv erwartet werden konnte.

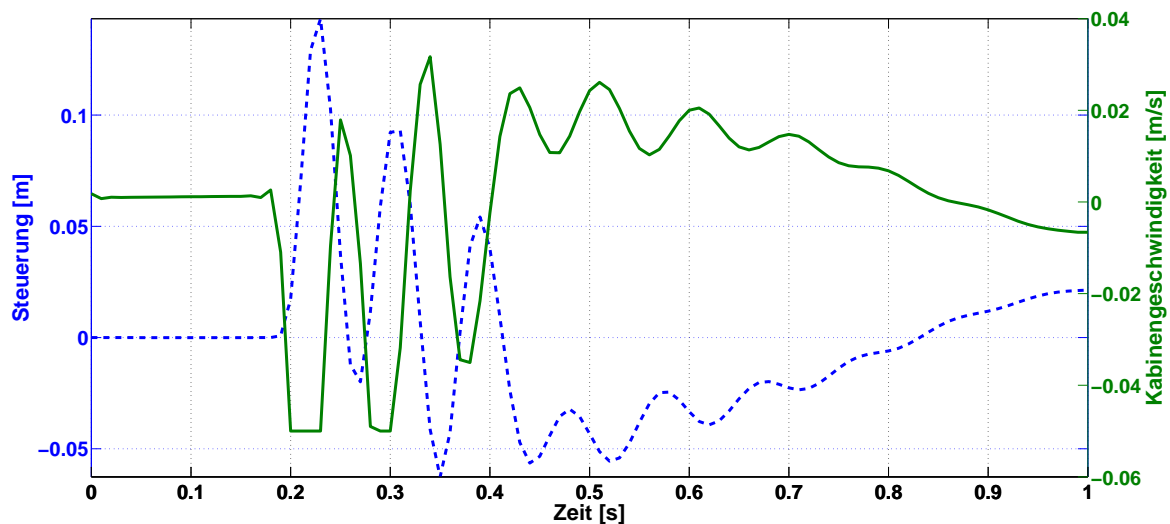


Abbildung 4.36: Darstellung der optimalen Steuerung (gestrichelt) zusammen mit der Kabinengeschwindigkeit (durchgezogen)

Die Beispiele zeigen die Anwendbarkeit der optimalen Steuerung für aktive Fahrwerke. Da ein Einbau dieser in ein eventuelles Versuchsfahrzeug oder einen Teststand jedoch schwerer zu realisieren ist, be-

schränkt sich die folgende Betrachtung auf den semi-aktiven Fall. Mit dem vorgestellten theoretischen Hintergrund besteht jedoch keine Einschränkung, dass die Verfahren nicht auch für aktive Steuerungen angewendet werden können.



## Kapitel 5

# Proaktive Echtzeitsteuerung singulärer Fahrbahnereignisse

In diesem Kapitel wird die echtzeitfähige Anwendbarkeit optimaler Steuerungsprobleme auf die Vertikaldynamiksteuerung von Fahrzeugmodellen, vgl. Kapitel 3.1.3 – 3.1.5, erläutert. Dazu werden zuerst die benötigten Begriffe definiert und anschließend der Echtzeitalgorithmus vorgestellt. Teile dieses Kapitels wurden bereits in [Michael und Gerdts, 2015] veröffentlicht.

Die dem Ansatz zugrunde liegende Idee basiert auf der in Kapitel 3.3 vorgestellten parametrischen Sensitivitätsanalyse. Unterschiedliche Fahrbahnanregungen werden mit Hilfe weniger Parameter charakterisiert und in Klassen unterteilt. Für diese Ereignisse werden sowohl die optimale Steuerung, als auch die zugehörige Parametersensitivität in einem offline Schritt berechnet und abgespeichert. Werden nun während der Fahrt bekannte Ereignisse erkannt, so wird anhand der identifizierten Parameter ein Online-Update durchgeführt, das lediglich die in Gleichung (3.56) dargestellte Auswertung erfordert.

### 5.1 Begriffsdefinition

Der erste Begriff, der in diesem Zusammenhang neu definiert werden muss, ist *proaktiv*. Dazu wird als Ausgangspunkt die Definition von [Scholz, 1989] herangezogen. „*Proaktivität bedeutet frühzeitiges Handeln, noch ehe die Umwelt das Unternehmen zu (reaktiven) Maßnahmen zwingt.*“ Da im vorliegenden Fall nicht von einem Unternehmen, sondern von einem System gesprochen wird und die Umwelt durch die Eingangsparameter repräsentiert wird, soll folgende Definition für die proaktive Steuerung verwendet werden:

#### Definition 5.1: Proaktive Steuerung

Proaktive Steuerung bedeutet frühzeitiges Reagieren auf veränderte Eingangsgrößen, noch bevor diese das System beeinflussen, mit dem Ziel ein gegebenes Kriterium zu verbessern.

Bezogen auf das vorliegende System bedeutet dies, dass das Fahrzeug auf eine vorausliegende Fahrbahnunregelmäßigkeit reagieren kann bevor diese überfahren wird. Die Steuerung kann derart gewählt werden, dass ein gewünschtes verbessertes Verhalten, d.h. einen kleineren Zielfunktionswert, erreicht wird.

Ein weiterer neuer Begriff ist der des *singulären Ereignisses*. Singulär steht laut [Dudenredaktion, 2006] für *nur vereinzelt auftretend, selten*. Die betrachteten Ereignisse müssen demnach entsprechend selten auftreten, wobei hier selten so zu verstehen ist, dass sie nicht in zu dichter Folge hintereinander auftreten und ihre lokalen Einflüsse auf die Vertikalbewegung des Fahrzeugs nicht bis zum nächsten Ereignis andauern. Im Kontext der Straßenbeschaffenheit sind vereinzelt auftretende Fahrbahnunregelmäßigkeiten gemeint. Formal lässt sich dies folgendermaßen definieren:

**Definition 5.2: Singuläres Fahrbahnereignis**

Ein singuläres Fahrbahnereignis ist ein Fahrbahnsegment, das sich mit seiner höheren Amplitude und geringeren Frequenz eindeutig vom umgebenden Oberflächenprofil isolieren lässt.

Um es einfach auszudrücken, handelt es sich bei singulären Ereignissen um kurzzeitige Störungen wie beispielsweise Stufen, Schwellen oder Schlaglöcher. Diese haben im Vergleich zu ungestörten Fahrbahnen, die aufgrund ihrer Rauheit nicht als perfekt glatt angenommen werden können, die in Definition 5.2 erwähnte geringere Frequenz und höhere Amplitude. Wobei erwähnt werden muss, dass keine exakte Abgrenzung gemacht werden kann, mit deren Hilfe singuläre Ereignisse von ihrer Umgebung strikt getrennt werden können.

## 5.2 Klassifikation singulärer Fahrbahnanregungen

In Definition 5.2 wurden singuläre Fahrbahnereignisse bereits formal definiert. Dies reicht jedoch nicht aus, um eine echtzeitfähige Steuerung mittels Sensitivitätsupdates zu definieren. Deshalb werden nun zuerst die verwendeten Fahrbahnereignisse und ihre Parametrisierung eingeführt.

### 5.2.1 Parametrisierte Fahrbahnereignisse

Um die Anwendbarkeit des Konzepts zu zeigen, werden hier zwei Vergleichsanregungen betrachtet. Ziel dieses Abschnitts ist es, Formulierungen für verschiedene singuläre Fahrbahnereignisse zu definieren, die, für das vertikale Einspurmodell, der Form  $z_\rho(x(t); p)$  genügen, also eine geschlossene Formulierung des Straßenzustands in Abhängigkeit der horizontalen Position  $x$  und der zu identifizierenden Parameter  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$  darstellen. In diesem Kontext bezeichnet der Begriff Einspurmodell nicht das aus der Fahrdynamik bekannte Modell, sondern das vertikale Mehrkörpersystem eines Fahrzeugs, das lediglich in einer Spur durch die Fahrbahn angeregt wird. Das Viertelfahrzeug- und das Halffahrzeugmodell sind demnach Einspurmodelle, das Vollfahrzeug ein Zweispurmodell, da hier die linken und rechten Räder unterschiedliche Anregungen erfahren.

#### Die Fahrbahnstufe $\mathcal{T}$

Bei der Fahrbahnstufe handelt es sich um das am einfachsten zu definierende singuläre Ereignis. Beispielsweise treten beim Überfahren von Brücken, dem Übergang zwischen andersartig geteerten Fahrbahnabschnitten oder in Baustellen immer wieder Kanten auf, die eine konstante Höhe über die Fahrbahnbreite haben.

Die einfachste Modellierung einer Stufe der Höhe  $h$  an der Position  $x = 0$  stellt die unstetige Funktion

$$z_\rho(x(t); h) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ h, & x(t) \geq 0 \end{cases}$$



dar. Dies liefert im Hinblick auf das Optimalsteuerungsproblem einen Sprung in der auf das Rad wirkenden Kraft. Im Modell geht aber zusätzlich zur Straßenauslenkung auch deren Änderungs­geschwindigkeit mit ein und diese liefert im vorliegenden Fall einen Dirac-Impuls, was keine realistische Änderungsrate darstellt. Um eine stetig differenzierbare Straßenanregung zu definieren, wird die Stufe geglättet, indem der Übergang mit Hilfe einer halben Cosinusschwingung modelliert wird, vgl. Abbildung 5.1a. Es gilt:

$$z_\rho(x(t); h) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ -0.5 h \left( \cos\left(\frac{\pi}{l_s} x(t)\right) - 1.0 \right), & 0 \leq x(t) \leq l_s \\ h, & x(t) > l_s \end{cases}$$

Dabei ist  $l_s$  definiert als die Übergangslänge zwischen den beiden Höhen, welche verhältnismäßig klein, jedoch fest gewählt wird, beispielsweise als  $l_s = 5\text{cm}$ . Eine Rechtfertigung für diese Modellierung liefert auch die Nichtberücksichtigung des abrollenden Reifens. In den vorgestellten Fahrzeugmodellen wird der Reifen lediglich über einen Massenpunkt modelliert, wodurch eine Änderung der Fahrbahnoberfläche direkt über die Feder-Dämpfer-Verbindung an diesen weitergegeben wird. In der Realität rollt der Reifen über ein Hindernis hinweg und verursacht bereits dadurch eine glättende Wirkung. Bei einer Stufenüberfahrt bewegt sich die Radnabe nicht ruckartig nach oben, sondern beschreibt ebenfalls eine stetige Kurve, vgl. Abbildung 5.2. Bei der Überfahrt bewegt sich die Nabe für einen vollständig unelastischen Reifen auf einer Kreisbahn. Wird eine elastische Verformung zugelassen, so wird auch die Nichtdifferenzierbarkeit am Beginn der Überfahrt geglättet.

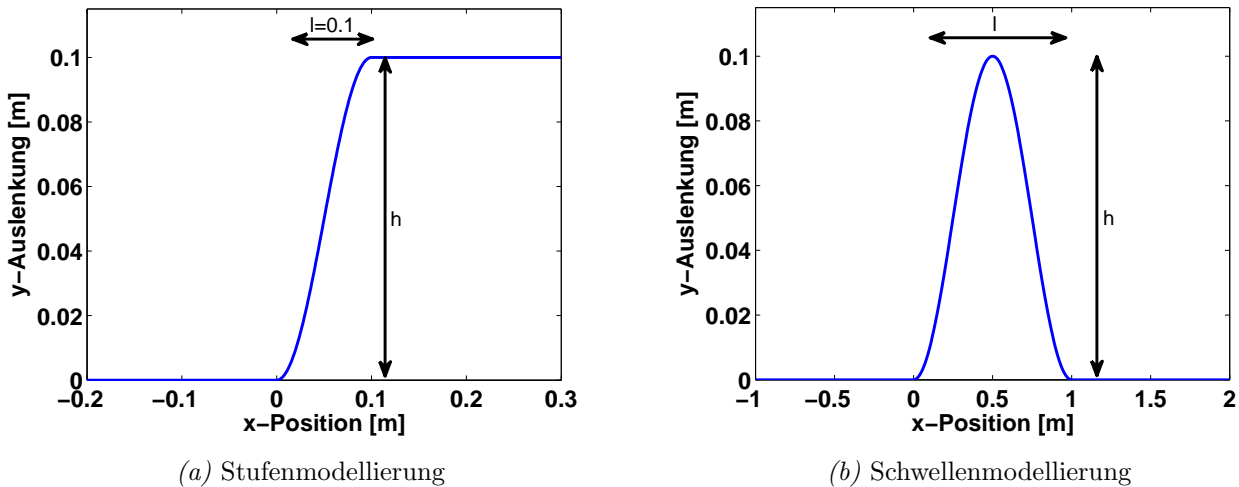


Abbildung 5.1: Beispielgeometrien der singulären Ereignisse

Wie die Modellierung bereits zeigt, hat eine Fahrbahnstufe für ein Einspurmodell lediglich einen zu bestimmenden Parameter: die Höhe  $h$ . Dies definiert die Äquivalenzklasse  $\mathcal{T}(h)$ . Um eine Stufe korrekt erkennen zu können, muss diese eine gewisse Mindesthöhe haben, da ansonsten jede noch so kleine Unebenheit als solche erkannt werden würde. Dies führt zu einer formalen Unterteilung der Stufen in „positive“ und „negative“ Stufen  $\mathcal{T}^+$  und  $\mathcal{T}^-$ . Diese Unterscheidung ist notwendig, damit der Erkennungsalgorithmus auf eine kompakte Parametermenge zurückgreifen kann. Der zulässige Bereich würde ansonsten folgende Gestalt besitzen  $[-h_{max}, -h_{min}] \cup [h_{min}, h_{max}]$ , welche durch die zur Verfügung stehenden Boxbeschränkungen nicht abgedeckt werden kann. In Tabelle 5.1 sind die verwendeten Parametergrenzen aufgelistet.

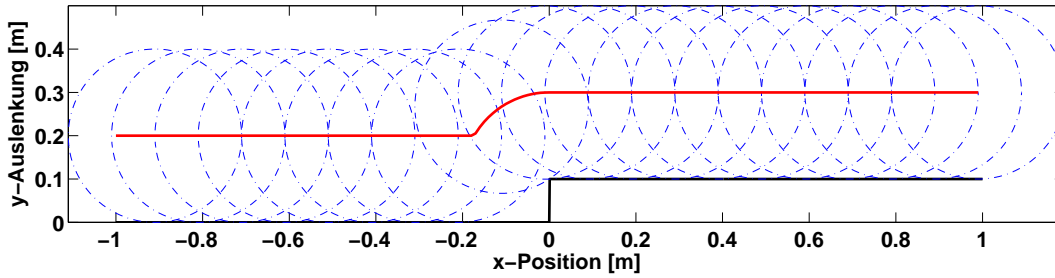


Abbildung 5.2: Trajektorie der Radnabe bei einer Stufenüberfahrt mit unelastisch angenommenem Reifen

Wird ein Zweispurmodell verwendet, kann ein zusätzlicher Parameter eingeführt werden, um eine Äquivalenzklasse zu bilden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Stufenhöhe beider Fahrspuren identisch ist, die Stufe also über die gesamte Fahrbahnbreite geht und unter einem Winkel  $\phi$  bzgl. der Orthogonalen zur Fahrtrichtung definiert ist. Dieser Winkel verursacht eine zeitliche Differenz, wann die Schwelle das jeweilige linke bzw. rechte Vorderrad erreicht. Die folgenden Gleichungen definieren die linke und rechte Fahrbahnanregung der Äquivalenzklasse  $\mathcal{T}(h, \phi)$  in Abhängigkeit von  $h$  und  $\phi$ .

$$z_{\rho l}(x(t); h, \phi) = \begin{cases} 0, & x(t) < -\sin(\phi)w_l, \\ -0.5h \left( \cos\left(\frac{\pi}{l_s}x(t)\right) + 1 \right), & \text{für } -\sin(\phi)w_l \leq x(t) \leq -\sin(\phi)w_l + l_s, \\ h, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$z_{\rho r}(x(t); h, \phi) = \begin{cases} 0, & x(t) < \sin(\phi)w_r, \\ -0.5h \left( \cos\left(\frac{\pi}{l_s}x(t)\right) + 1 \right), & \text{für } \sin(\phi)w_r \leq x(t) \leq \sin(\phi)w_r + l_s, \\ h, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alternativ kann auch die Klasse  $\mathcal{T}(h, s)$  verwendet werden, bei der der Parameter  $s \in \{l, r\}$  angibt auf welcher Seite die Stufe auftritt. Dabei ist zu bemerken, dass keine Ableitung bezüglich eines diskreten Parameters gebildet werden kann. Er dient lediglich zur Erkennung, ob das Ereignis die linke oder rechte Spur betrifft und bei der Auswahl der zugehörigen Steuerung.

### Das Schlagloch $\mathcal{P}$

Auch bei der Modellierung von Schlaglöchern bzw. Fahrbahnschwellen wird eine stetig differenzierbare Formulierung bevorzugt, vgl. Abbildung 5.1b. Dabei unterscheiden sich ein Schlagloch und eine Schwelle lediglich im Vorzeichen der Höhe. Eine negative Höhe liefert ein Schlagloch und eine positive eine Schwelle. Analog zu der Erläuterung in Abschnitt 5.2.1 wird auch hier die Unterteilung bzgl. der Höhe in  $\mathcal{P}^+$  bzw.  $\mathcal{P}^-$  vorgenommen, um eine kompakte Menge der zulässigen Parameter zu erhalten. Anstelle eines unstetigen Übergangs wird eine Cosinusschwingung mit definierter Amplitude und Frequenz herangezogen. Hier wird nun jedoch eine ganze Periode verwendet, um das Schlagloch zu definieren.

$$z_{\rho}(x(t); h, l) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \vee x(t) > l, \\ -0.5h \left( \cos\left(\frac{2\pi}{l}x(t)\right) + 1 \right), & 0 \leq x(t) \leq l \end{cases} \quad (5.1)$$

	$p$	$p_{min}$	$p_{max}$
$\mathcal{T}^+(h)$	$h$	0.05	0.2
$\mathcal{T}^-(h)$	$h$	0.05	0.2
$\mathcal{T}(h, \vartheta)$	$h$	0.05	0.2
	$\vartheta$	-10.0	10.0
$\mathcal{P}^+$	$h$	0.05	0.2
	$l$	0.2	1.5
$\mathcal{P}^-$	$h$	-0.05	-0.2
	$l$	0.2	1.5

Tabelle 5.1: Parametergrenzen für verschiedene Äquivalenzklassen

In Abbildung 5.1b ist die Geometrie der Schwellenmodellierung dargestellt. Die beschreibenden Parameter sind hierbei die Höhe  $h$  und die Länge  $l$ , deren Beschränkungen in Tabelle 5.1 zu finden sind. Für ein Einspurmodell liefert dies die Äquivalenzklasse  $\mathcal{P}(h, l)$ . Für Zweispurmodelle können auch hier verschiedene Klassen definiert werden. So kann wieder der Winkel zwischen der auf der ganzen Fahrbahnbreite definierten Schwelle und der Orthogonalen zur Fahrtrichtung einbezogen werden, was beispielsweise bei Geschwindigkeitsschwellen eine sinnvolle Modellierung liefert ( $\mathcal{P}(h, l, \phi)$ ). Mit Hilfe einer diskreten Variablen kann wiederum die Spur angegeben werden, an der das Ereignis angreift ( $\mathcal{P}(h, l, s)$ , mit  $s \in \{l, r\}$ ). Hiermit können Schlaglöcher oder so genannte Blow-Ups beschrieben werden, die nicht notwendigerweise beide Fahrspuren beeinflussen.

Natürlich können noch weitere Parameter berücksichtigt werden, wie beispielsweise verschiedene Höhen und Längen an der linken und rechten Spur ( $\mathcal{P}(h_l, l_l, h_r, l_r)$ ). Da diese Arbeit jedoch in erster Linie die Anwendbarkeit des Algorithmus zeigen soll, beschränkt sich die Betrachtung auf die angegebenen Fälle.

### 5.2.2 Zielfunktionsgewichtung $\kappa$ als zusätzlicher Freiheitsgrad

Die Anpassung der Gewichtungsfaktoren kann genutzt werden, um das Fahrverhalten des Automobils an individuelle Fahrerwünsche anzupassen, wie es in einigen PKW-Modellen bereits verfügbar ist. Ein Sportmodus verändert das Dämpfungs- und Federungsverhalten hin zu einem strafferen Fahrwerk, bei dem die Bodenhaftung eine wichtigere Rolle spielt, als der momentane Komfort. Zusätzlich kann auch über ein aktives Absenken des Fahrwerks und die damit veränderten Randbedingungen nachgedacht werden. Um eine kontinuierliche Verstellbarkeit der Gewichtung zu erhalten, kann in der verwendeten Formulierung der Gewichtungsvektor  $\kappa = (\kappa_k, \kappa_s \kappa_d, \kappa_r)$  (vgl. Gleichung (4.5)) in den Parametervektor mit aufgenommen werden. Eine alternative Möglichkeit wäre die Bereitstellung verschiedener Modi, die vorab berechnet werden und je nach eingestelltem Fahrverhalten die Steuerung des gewünschten Modus verwenden.

### 5.3 Erkennung

In diesem Kapitel soll die Frage behandelt werden, ob und wie aus den erhaltenen Oberflächenscans singuläre Ereignisse herausgefiltert und parametrisiert werden können. Der theoretische Entwurf dieser Aufgabe ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Sensordaten dienen als Eingabe des Erkennungsalgorithmus, der, falls möglich, das erkannte Event mit zugehörigen Parametern liefert.

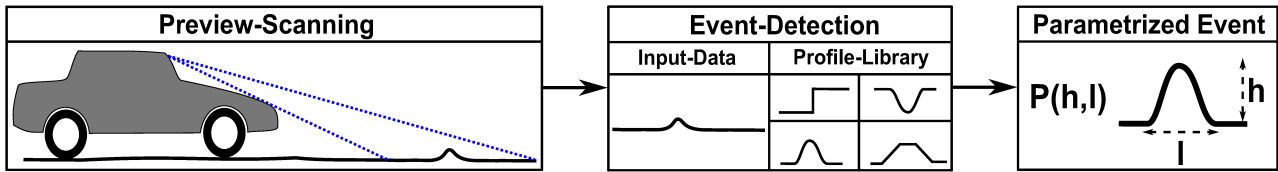


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung des Preview-Algorithmus

#### 5.3.1 Sensorgeometrie

Beim Entwurf eines Fahrzeugs mit Sensorik zur Erfassung der Straßenoberfläche stellt sich zuerst die Frage nach deren Positionierung. In [Schindler, 2009] wird eine Position auf Höhe der Frontscheinwerfer bevorzugt. Bei der aktuellen Mercedes S-Klasse hingegen befindet sich die 3D-Kamera in der Frontscheibe hinter dem Rückspiegel. Die Geometrie des Aufbaus ist in Abbildung 5.4 für die beiden Positionen dargestellt. Bei einem Einbau hinter dem Rückspiegel verhindert die Motorhaube ein Abtasten des Bereichs direkt vor dem Fahrzeug. In diesem Bereich ist der Winkel zwischen der Abstrahlrichtung und der Vertikalen am geringsten und bietet besonders für Schlaglöcher die exakteste Messung.

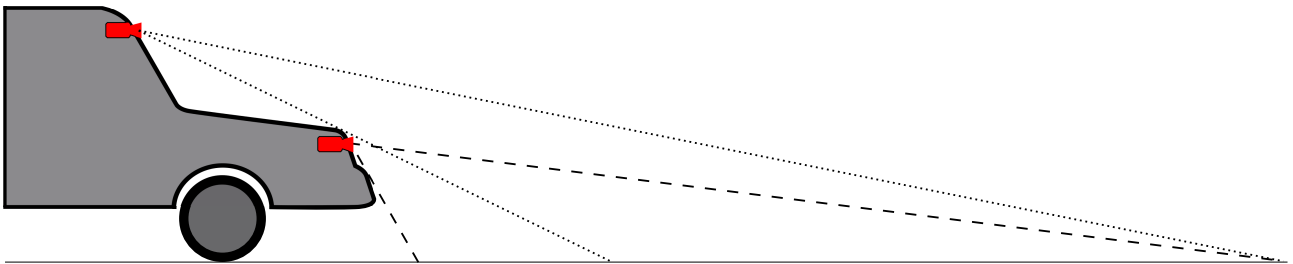


Abbildung 5.4: Vergleich der möglichen Sensorpositionierungen und des erfassbaren Straßenbereichs

In Abbildung 5.5 ist die detaillierte Geometrie der vom Scanner gelieferten Daten dargestellt. Der kleinste mögliche Scanwinkel wird mit  $\vartheta$  bezeichnet und der Öffnungswinkel mit  $\omega$ . Dieser ist bei vielen LIDAR-Sensoren meist deutlich größer als  $90^\circ$ , was jedoch zu nicht sinnvollen Daten führt. Deshalb muss  $\omega$  so gewählt werden, dass  $\vartheta + \omega < 90^\circ$  gilt. Je weiter sich dies den  $90^\circ$  annähert, desto größer ist zwar das abgescannte vorausliegende Straßenstück, jedoch sind die Daten dann auch sehr fehlerbehaftet bzw. liegt die Distanz außerhalb der maximalen Detektionseinstellung des Scanners. Die Winkelauflösung  $\delta$  beschreibt die Winkeldifferenz zweier Messstrahlen. Unter der Annahme, dass  $\omega$  ein Vielfaches von  $\delta$  ist, berechnet sich die Anzahl der gemessenen Straßenpunkte zu  $k = \frac{\omega}{\delta}$ . Bei einer Positionierung des Scanners hinter dem Rückspiegel ist  $\vartheta$  deutlich größer als bei einer Montage in den Frontscheinwerfern, weshalb hier nun angenommen wird, dass sich die Sensorik auf Höhe der

Scheinwerfer befindet. Der Algorithmus arbeitet mit beiden Positionen des Sensors, so dass er für die zur Verfügung stehende Geometrie lediglich parametrisiert werden muss.

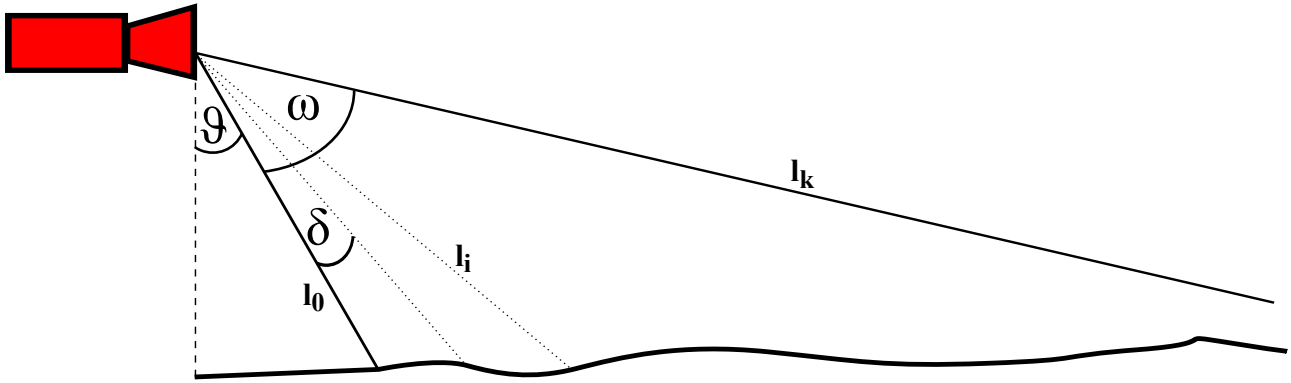


Abbildung 5.5: Geometrie der Scannerdaten

### Sensorsimulation

Für die Simulation eines LIDAR-Scanners müssen aus den gegebenen Straßendaten die gemessenen Distanzen  $l_i, i = 0, \dots, k$ , berechnet werden. Dies geschieht durch die Berechnung der Schnittpunkte der Abstrahlgeraden mit der Straßenoberfläche. Je nach Straßengeometrie kann es dazu kommen, dass mehr als ein Schnittpunkt existiert. Es wird jedoch stets der mit der geringsten Distanz gewählt, da dies den physikalisch sinnvollen Wert darstellt. Es gilt:

$$l_i = \min_{\tau_i} \left\{ \begin{pmatrix} \tau_i \\ x_l \end{pmatrix} \mid \left[ \begin{pmatrix} x_s \\ z_s \end{pmatrix} + \tau_i \begin{pmatrix} \cos(\vartheta + i \cdot \delta) \\ \sin(\vartheta + i \cdot \delta) \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} x_l \\ z_\rho(x_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bei ideal arbeitendem Sensor werden die berechneten Distanzen so übernommen. Jedoch tritt bei einer realen Messung ein Störfaktor auf, der abhängig von der Weglänge des Laserstrahls die Messungen verzerrt. In dieser Arbeit wird angenommen, dass die Störfunktion  $\sigma(l)$  linear von der Weglänge abhängt, d.h.

$$\bar{l}_i = l_i + \sigma(l_i) = l_i + \nu_i l_i = (1 + \nu_i) l_i,$$

wobei  $\nu_i, i = 1, \dots, k$ , Zufallszahlen im Rauschbereich  $\nu_i \in [-\nu_{max}, \nu_{max}]$  darstellen.

In [Schindler, 2009] wird zusätzlich ein so genannter Scan-Matching-Algorithmus vorgestellt, der aufeinanderfolgende Messungen miteinander kombiniert. Durch eine statistische Gewichtung alter und neuer Messdaten wird dort eine genauere Beschreibung der abgescannten Oberfläche erreicht.

Sind die Entfernungen  $l_i, i = 1, \dots, k$ , bekannt, so kann über die Geometrie eine Rückrechnung auf die tatsächliche Straßenoberfläche  $[x_i \ z_{\rho,i}]^\top$  erfolgen. Das Ergebnis ist eine diskrete Oberflächeninformation.

Wird ein Halb- oder Vollfahrzeugmodell verwendet ist zusätzlich noch die Information über den Nick- und Wankwinkel erforderlich. Diese müssen mit berücksichtigt werden, um eine korrekte Darstellung der Fahrbahnoberfläche zu erhalten. Eine Veränderung der Nickwinkels beispielsweise übt sich additiv auf den Abstrahlwinkel des Lidar-Scanners aus, während der Wankwinkel eine Veränderung der Abstrahlrichtung bewirkt.

### 5.3.2 Erkennungsalgorithmus als Ausgleichsproblem

Der hier vorgestellte Algorithmus zur Erkennung singulärer Ereignisse nutzt Techniken der nichtlinearen Optimierung zur Parameteridentifizierung. Dabei wird lediglich eine kurze Einführung in die Problemstellung gegeben. Für eine detaillierte Behandlung sei auf [Hanke-Bourgeois, 2009] verwiesen.

#### Das nichtlineare Ausgleichsproblem

Unter dem Begriff *Ausgleichsrechnung* versteht man eine Optimierungsmethode, die sich mit dem Lösen von Parameteridentifizierungsproblemen beschäftigt. Meist soll ein Systemverhalten identifiziert werden, über dessen Gestalt eine Annahme des funktionalen Zusammenhangs getroffen wurde, wie beispielsweise ein polynomialer Systemverlauf  $n$ -ter Ordnung:

$$y = \sum_{i=0}^n p_i x^i.$$

Zu bestimmen sind in diesem Fall die  $n+1$  Koeffizienten  $p_i$ . Liegt eine Reihe an Messdaten  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , vor, so kann für jeden Datensatz die Gleichung

$$y_j = \sum_{i=0}^n p_i x_j^i$$

aufgestellt werden. In vektorieller Form besitzt das Gleichungssystem folgende Gestalt:

$$Y = XA, \quad \text{mit} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Da im Allgemeinen mehr Messdaten als zu bestimmende Parameter vorliegen, d.h. es gilt  $m > n$ , handelt es sich um ein überbestimmtes Gleichungssystem, das, sofern die Daten nicht ohne Messfehler aufgenommen wurden und das Systemverhalten exakt der Ansatzfunktion entspricht, nicht lösbar ist.

Die Ausgleichsrechnung zielt nun nicht darauf ab eine exakte Lösung des Problems zu finden, sondern die Bestmögliche bezüglich eines definierten Zielfunktional. Häufig wird hier ein Kleinste-Quadrate-Zielfunktional verwendet, das wie folgt aussieht:

$$\min_{p \in \mathbb{P}} J(p) = \|Y - XA\|_2^2 = (Y - XA)^\top (Y - XA) = \sum_{i=0}^n (Y - XA)_i^2. \quad (5.2)$$

Es wird also das Minimum der Summe der quadratischen Abweichungen gesucht. Hierbei stellt  $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{n_p}$ ,  $n_p \in \mathbb{N}$ , den Raum der zulässigen Parameterwerte dar. Dieser kann sowohl beschränkt als auch unbeschränkt sein.

Betrachtet man die allgemeine Formulierung dieses Problems, so kann das nichtlineare Ausgleichsproblem als verallgemeinerte Version der oben beschriebenen linearen Parameterabhängigkeit geschrieben werden.

**Definition 5.3: Nichtlineares Ausgleichsproblem (NAP)**

Gegeben sei eine parameterabhängige Funktion  $F : \mathbb{P} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ . Des Weiteren seien  $m$  Datenpunkte  $(x_j, y_j), j = 1, \dots, m$  gegeben und es gelte  $m > n$ . Die Menge der zulässigen Parameter sei definiert als  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^p$ .

Mit der Definition  $x := [x_1, \dots, x_k]^\top$ ,  $y := [y_1, \dots, y_k]^\top$  lautet das quadratische nichtlineare Ausgleichsproblem damit

$$\min_{p \in \mathbb{P}} J(p) = \frac{1}{2} \|F(p, x, y)\|_2^2.$$

Bei der Erkennung singulärer Ereignisse kann auf diese Methodik zurückgegriffen werden. Dafür werden die Messdaten  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$ , zu einem Datensatz  $[x, y]$  mit  $x = [x_1, \dots, x_m]^\top$  und  $y = [y_1, \dots, y_m]^\top$  zusammengefasst. Die Funktion  $F(p, x, y)$  lautet dann

$$F(p, x, y) := \begin{pmatrix} y_1 - f(x_1, p) & y_2 - f(x_2, p) & \cdots & y_m - f(x_m, p) \end{pmatrix}^\top,$$

wobei die Funktion  $f(x_i, p)$  je nach gerade untersuchtem Event entsprechend gewählt werden muss.

Da jedoch nicht nur die Parameter des Ereignisses, sondern auch dessen Position ermittelt werden muss, wird der Parametervektor um ein zusätzliches Element  $d_{\mathcal{E}}$ , der Distanz erweitert. Dabei gilt:

$$z_\rho(x(t); d_{\mathcal{E}}, p) = z_\rho(x(t) - d_{\mathcal{E}}; p).$$

Für ein Schlagloch  $\mathcal{P}^-(h, l)$  ergibt sich  $f(x, p)$  damit als

$$f(x, \Delta x, h, l) = z_\rho(x; d_{\mathcal{E}}, h, l) = z_\rho(x + d_{\mathcal{E}}; h, l)$$

mit  $z_\rho$  aus Gleichung (5.1).

Dieses Problem muss für alle definierten Ereignisse aufgerufen werden. Abhängig vom zurückgelieferten Zielfunktionswert gilt es zu entscheiden, ob ein Ereignis erkannt wurde oder nicht. Bei perfekten Sensordaten und Straßenanregung wird der Algorithmus den Zielfunktionswert 0 zurückgeben.

**5.3.3 Wahl der Zielfunktion**

Bei den numerischen Tests hat sich herausgestellt, dass zwei unterschiedliche Zielfunktionen verwendet werden können. Beide haben ihre Vor- und Nachteile, die im Folgenden kurz erläutert werden. In Abbildung 5.6 sind die jeweiligen Problemgeometrien dargestellt.

Die erste betrachtete Zielfunktion verwendet die jeweilige vertikale lokale Abweichung der gemessenen Straße zum parametrisierten Ereignis. Die lokalen Fehler werden quadratisch aufsummiert, womit sich eine Zielfunktion analog zu Gleichung (5.2) ergibt:

$$F_z(p, x, z) := \sum_{i=1}^K (\delta_z)^2 = \sum_{i=1}^K (z_\rho(x_i; d_{\mathcal{E}}, h, l) - z_i)^2.$$

Diese Zielfunktion hat den Vorteil, dass sie relativ leicht auszuwerten ist und die Optimierung somit schneller durchgeführt werden kann. Zur Auswertung wird dabei pro Messpunkt lediglich eine Auswertung einer stückweise definierten Funktion benötigt.

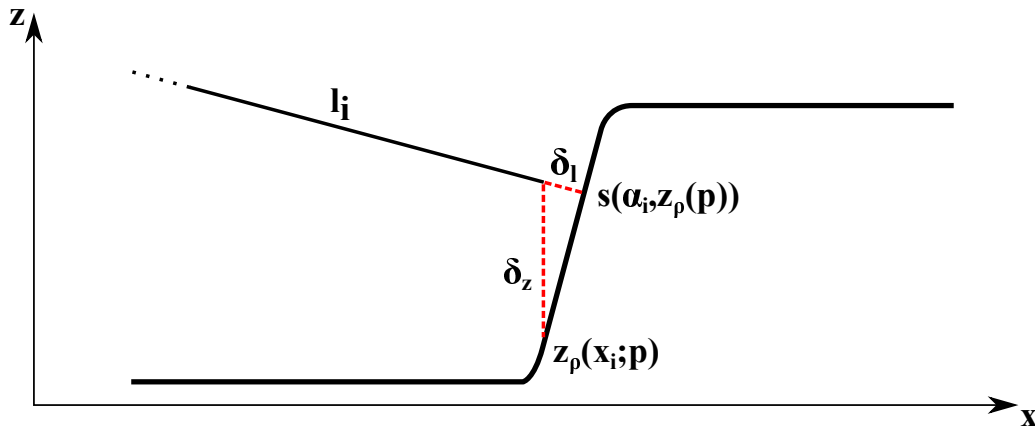


Abbildung 5.6: Geometrischer Vergleich der Fehler  $\delta_z$  und  $\delta_l$

Die zweite Zielfunktion, die sich als hilfreich erwiesen hat, betrachtet die gemessenen Distanzen des LIDAR-Scanners und vergleicht diese mit den entsprechenden Sollwerten für das zu testende Straßeneignis. Dazu wird in Abhängigkeit des Abstrahlwinkels  $\alpha_i$  der Schnittpunkt zwischen Messstrahl und Straße berechnet und die Differenz dieses Werts und dem Messwert in einer quadratischen Summe zusammengefasst:

$$F_l(p, \alpha, l) = \sum_{i=1}^K (\delta_l)^2 = \sum_{i=1}^K (l_i - l_{soll}(\alpha_i, z_\rho(p)))^2.$$

Die Funktion  $l_{soll}(\alpha_i, z_\rho(p))$  berechnet über den Schnittpunkt  $s(\alpha_i, z_\rho(p))$  der Messgeraden mit der Straße den Sollabstand. Ein Vergleich der berücksichtigten Fehler der beiden Zielfunktionen ist in Abbildung 5.6 dargestellt.

Die Zielfunktion  $F_l$  liefert besonders bei positiven Schlaglöchern und Stufen ein besseres Ergebnis. Da dort ein Rauschen der Sensordaten aufgrund des starken Anstiegs der Kurve einen Vergleich mit einem falschen Referenzpunkt verursacht, ist eine Abnahme der Zielfunktion bis unter die Erkennungsschranke nur schwer möglich. Durch die Schnittpunktberechnung ist diese Zielfunktion jedoch in der Auswertung deutlich aufwändiger als  $F_z$ . Auch der Konvergenzbereich erweist sich als kleiner, wodurch hier ein guter Anfangswert benötigt wird. Um diesen zu erhalten, kann beispielsweise erst das Parameteridentifizierungsproblem mit der Zielfunktion  $F_z$  gelöst werden. Das Ergebnis dieser Optimierung wird im Anschluss als Startwert für das Problem mit  $F_l$  als Zielfunktion verwendet.

Ein Event wird als erkannt deklariert, wenn im gefundenen Optimum für die Zielfunktionswerte  $\min(F_z(\hat{p}_z, x, z), F_l(\hat{p}_l, \alpha, l)) \leq \varepsilon_{\mathcal{E}}$  gilt. Die identifizierten Parameter werden auf den Parametersatz,  $\hat{p}_z$  oder  $\hat{p}_l$ , mit der besseren Zielfunktion gesetzt. Die Wahl der Schranke hängt einerseits von der Größenordnung der Fehler und andererseits von der Winkelauflösung des Scanners ab. Für einen sehr fein auflösenden Scanner muss die Schranke höher angesetzt bzw. die Zielfunktion entsprechend skaliert werden.



## 5.4 Vorfilterung mittels Support-Vektor-Maschinen

Da es im Allgemeinen nicht immer möglich ist mittels einfacher Betrachtung der Sensordaten zu entscheiden welches Event möglicherweise erkannt werden kann, wird hier ein Verfahren zur Vorfilterung vorgestellt. Dieses kann schnell entscheiden welches Optimierungsproblem gelöst werden muss. Ohne eine Vorfilterung ist es theoretisch notwendig für neue Sensordaten auf alle eventuell auftretenden Events zu testen. Dies resultiert im vorgestellten Fall der zwei Eventklassen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{P}$ , mit der Unterscheidung, ob die Höhe positiv oder negativ ist, im Lösen von vier Optimierungsproblemen. Im Anschluss kann dann anhand der Zielfunktion entschieden werden, ob und wenn welches Ereignis erkannt wurde. Um dies zu umgehen, werden *Support-Vektor-Maschinen* (SVM) verwendet. In [Papageorgiou und Poggio, 2000] werden SVMs beispielsweise zur Objekterkennung in der Bildverarbeitung gebraucht. Die vorgestellte Theorie stammt aus [Cristianini und Shawe-Taylor, 2000, Schölkopf et al., 2000], worauf auch für weitergehende Details verwiesen wird. Der Vorteil dieser Methode ist, dass mit einmalig erstellten Testdaten die SVM trainiert und abgespeichert werden kann. Zur Laufzeit des Programms muss lediglich die Entscheidungsfunktion ausgewertet werden, was einen vergleichsweise geringen Aufwand darstellt. Zusätzlich kann auch daran gedacht werden, während der Fahrt gewonnene Sensordaten zu speichern, zu klassifizieren und damit die Maschine zu verbessern.

### 5.4.1 Support-Vektor-Maschinen

Support-Vektor-Maschinen sind eine mathematische Klassifizierungsmethode, die aus dem Bereich des maschinellen Lernens stammt. Unter Klassifizierung wird hier die Entscheidung verstanden, ob ein Element zu einer von zwei Klassen gehört. Entwickelt hat sich die Methode aus der linearen Klassifizierung, bei der es die Aufgabe ist, eine trennende Hyperebene zu finden, die eine Menge an Daten und zugehörigen Klassifizierungen korrekt trennt. Das Optimierungsproblem, das diese Aufgabe beschreibt, besitzt folgende Gestalt.

#### Problem 5.4: Maximum-Margin-Klassifikation

Gegeben seien linear trennbare Trainingsdaten  $x_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, k$ , mit zugehörigen binären Klassifizierungen  $y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, k$ . Die Hyperebene  $(w, b)$  mit  $w \in \mathbb{R}^m$  und  $b \in \mathbb{R}$ , die das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2} \|w\|_2^2, \\ \text{u.d.Nb.} \quad & y_i (\langle w \cdot x_i \rangle + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

löst, stellt die trennende Hyperebene dar, die den minimalen Abstand  $\gamma := \frac{1}{\|w\|_2}$  aller Punkte zur Hyperebene maximiert.

Vorausgesetzt wird, dass das Optimierungsproblem in Problem 5.4 eine Lösung besitzt, d.h. dass eine trennende Hyperebene existiert. In vielen realen Anwendungen ist diese Voraussetzung nicht erfüllbar oder aufgrund von Messfehlern verletzt. Diese Formulierung wird auch *Maximal Margin Classifier*, also Maximaler Abstands-Klassifikator genannt. Der Begriff *margin* beschreibt den minimalen Abstand aller Trainingsdaten von der Hyperebene.

Das primale Problem 5.4 kann mit Hilfe der in Kapitel 3.2.6 vorgestellten Theorie in seiner dualen

Form dargestellt werden. Die duale Zielfunktion ergibt sich für dieses Problem als

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) &= \max_{\alpha \geq 0} \min_{w, b} \frac{1}{2} w^\top w - \sum_{i=1}^k \alpha_i (y_i (\langle w \cdot x_i \rangle + b) - 1) \\ &= \max_{\alpha \geq 0} \min_{w, b} \frac{1}{2} w^\top w - \sum_{i=1}^k \alpha_i (y_i \langle w \cdot x_i \rangle - 1) - \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i b\end{aligned}\quad (5.3)$$

Die Auswertung der notwendigen Bedingungen für ein Minimum der Lagrange-Funktion bzgl.  $b$  liefert:

$$\nabla_b L(w, b, \alpha) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i = 0$$

Setzt man dies ein, so verschwindet der letzte Summand in (5.3). Es gilt

$$\tilde{\phi}(\alpha) = \max_{\alpha \geq 0} \min_w \frac{1}{2} w^\top w - \sum_{i=1}^k \alpha_i (y_i \langle w \cdot x_i \rangle - 1),$$

was die duale Zielfunktion des Problems

$$\text{Minimiere } \frac{1}{2} \|w\|_2^2, \quad (5.4)$$

$$\text{u.d.Nb. } -y_i \langle w \cdot x_i \rangle + 1 \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.5)$$

darstellt. Ein Vergleich mit dem Beispiel eines quadratischen Optimierungsproblems aus Kapitel 3.2.6 Gleichung (3.39) zeigt, dass hier  $Q = \mathbb{I}_{m \times m}$  für die Zielfunktion (5.4) gilt. Die Nebenbedingung (5.5) definiert die Matrix  $X$ , sowie den Vektor  $c$  als

$$X = \begin{pmatrix} -y_1 x_1^\top \\ -y_2 x_2^\top \\ \vdots \\ -y_k x_k^\top \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit kann die duale Zielfunktion in Matrix-Form analog zu Gleichung (3.40) geschrieben werden als

$$\phi(\alpha) = -\frac{1}{2} \alpha^\top X X^\top \alpha - \alpha^\top c.$$

In Summenschreibweise resultiert daraus das duale Optimierungsproblem:

**Problem 5.5: Maximum-Margin-Klassifikation (duale Form)**

Gegeben seien linear trennbare Trainingsdaten  $x_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, k$ , mit zugehörigen binären Klassifizierungen  $y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, k$ . Der Parametervektor  $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^k$  sei die Lösung des Optimierungsproblems

$$\text{Maximiere } \sum_{i=1}^k \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i \cdot x_j \rangle, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}\text{u.d.Nb. } & \sum_{i=1}^k y_i \alpha_i = 0, \\ & \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k.\end{aligned}$$

Der Gewichtsvektor  $\hat{w} = \sum_{i=1}^k y_i \hat{\alpha}_i x_i$  stellt dann die trennende Hyperebene mit dem maximalen margin  $\gamma := \frac{1}{\|\hat{w}\|_2}$  dar.

#### Bemerkung 5.6: Bestimmung von $\hat{b}$

Da im Optimierungsproblem  $b$  nicht vorkommt, muss dessen optimaler Wert aus den primalen Bedingungen berechnet werden:

$$\hat{b} = -\frac{\max_{y_i=-1} (\langle \hat{w} \cdot x_i \rangle) + \min_{y_i=1} (\langle \hat{w} \cdot x_i \rangle)}{2} \quad (5.7)$$

#### Bemerkung 5.7: Support-Vektoren

Betrachtet man die KKT-Bedingungen des Optimierungsproblems aus Problem 5.5 im Optimum, so muss gelten

$$\hat{\alpha}_i \left( y_i (\langle \hat{w} \cdot x_i \rangle + \hat{b}) - 1 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Daraus resultiert, dass lediglich im Falle  $y_i (\langle \hat{w} \cdot x_i \rangle + \hat{b}) = 1$ , wenn also der Abstand des Eingangsvektors  $x_i$  zur Hyperebene 1 ist, der entsprechende Lagrange-Multiplikator  $\hat{\alpha}_i$  ungleich Null sein kann. Die Menge der Eingangsdaten, für die dies gilt, wird als *Support-Vektoren* bezeichnet, da lediglich diese in  $\hat{w}$  auftauchen. Die Menge der Indizes der Support-Vektoren sei mit  $sv = \left\{ i \in \{1, \dots, k\} \mid y_i (\langle \hat{w} \cdot x_i \rangle + \hat{b}) = 1 \right\}$  bezeichnet.

Die duale Darstellung spielt bei Support-Vektor-Maschinen eine wichtige Rolle, da hier die notwendige Erweiterung in einen höherdimensionalen Merkmalsraum (engl.: *feature-space*) effektiv durchgeführt werden kann. Diese Darstellung in einem höherdimensionalen Raum ist notwendig, um auch Probleme behandeln zu können, die nicht linear trennbar sind. In einem Raum, dessen Dimension größer ist, ist eine Trennung unter Umständen trotzdem möglich.

#### Definition 5.8: Kernfunktion

Ein *Kern* (engl. *kernel*) ist eine Funktion  $K : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ , s.d. für alle  $x, z \in X$

$$K(x, z) = \langle \phi(x) \cdot \phi(z) \rangle$$

gilt. Dabei ist  $\phi : X \rightarrow F$ , wobei  $F$  ein Merkmalsraum ist, der ein inneres Produkt besitzt.

Eine der einfachsten Kernfunktionen stellt für  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto x$ , das Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^m$  dar. Da jedoch im Rahmen dieser Arbeit keine detaillierte Einführung in Kernfunktionen gegeben wird, sei auf [Cristianini und Shawe-Taylor, 2000] und [Schölkopf et al., 2000] verwiesen.

Die wichtige Eigenschaft, die bei Support-Vektor-Maschinen Verwendung findet, ist, dass wenn die duale Formulierung gewählt und in Gleichung (5.6) anstatt des Skalarprodukts die Kernfunktion  $K(x_i, x_j)$  eingesetzt wird, siehe (5.8), die Darstellung eines Eingangsvektors  $x_i$  im Merkmalsraum nicht explizit ausgerechnet werden muss. Es wird lediglich die Kernfunktion für alle Kombinationen an Eingangsvektoren benötigt. Die entstehende Matrix  $K$  wird auch *Kernmatrix* (engl. *kernel matrix*) oder *Gram-Matrix* genannt. Damit lässt sich die Support-Vektor-Maschine als die Lösung des folgenden Problems schreiben.

**Problem 5.9: Maximum-Margin-Klassifikation im Merkmalsraum (duale Form)**

Gegeben seien Trainingsdaten  $x_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, k$ , mit zugehörigen binären Klassifizierungen  $y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, k$ , die im durch den Kern  $K(x, z)$  implizit definierten Merkmalsraum linear trennbar sind. Der Parametervektor  $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^k$  sei die Lösung des quadratischen Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & \sum_{i=1}^k \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k y_i y_j \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j), \\ \text{u.d.Nb.} \quad & \sum_{i=1}^k y_i \alpha_i = 0, \\ & \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$\hat{b}$  bestimme sich aus Gleichung (5.7) und die Entscheidungsfunktion  $\text{sign}(f(x))$  sei gegeben durch

$$f(x) = \sum_{i=1}^k y_i \hat{\alpha}_i K(x_i, x) + \hat{b}.$$

Dann stellt der Gewichtungsfaktor  $\hat{w} = \sum_{i=1}^k y_i \hat{\alpha}_i x_i$  die trennende Hyperebene mit dem maximalen margin  $\gamma := \frac{1}{\|\hat{w}\|_2} = \left( \sum_{i \in \text{sv}} \hat{\alpha}_i \right)^{\frac{1}{2}}$  dar.

Um auch fehlerbehaftete Daten zu klassifizieren, wird der so genannte *Soft-Margin-Classifizier* eingeführt. Dabei werden Schlupfvariablen hinzugefügt, mit denen auch eine Verletzung der Abstandsbedingung erlaubt ist. Um eine Verletzung zu bestrafen, werden diese additiv der Zielfunktion hinzugefügt. Das daraus resultierende Optimierungsproblem lautet:

**Problem 5.10: Soft-Margin-Klassifikation**

Gegeben seien Trainingsdaten  $x_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, k$ , mit zugehörigen binären Klassifizierungen  $y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, k$ , Schlupfvariablen  $\xi_i, i = 1, \dots, k$  und  $C \in \mathbb{R}^+$ . Die Hyperebene  $(w, b)$ , die das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + \frac{1}{2} C \sum_{i=1}^k \xi_i^2, \\ \text{u.d.Nb.} \quad & y_i (\langle w \cdot x_i \rangle + b) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ & \xi_i \geq 0 \end{aligned}$$

löst, stellt die trennende Hyperebene bzgl. der weichen Klassifikation dar.

Die Positivitätsbedingung an  $\xi_i$  kann weggelassen werden, da für negative Werte von  $\xi_i$  die erste Bedingung stets erfüllt ist. Für den Fall, dass in einem Optimum  $\xi_i > 1$  ist, liegt der Trainingspunkt sogar auf der falschen Seite der Hyperebene. Da es sich jedoch um einen Messfehler handeln kann, ist dies durchaus so gewollt, da andernfalls, wie bereits erwähnt, eine lineare Trennung nicht möglich ist. Die Lagrange-Funktion von Problem 5.10 mit den Lagrange-Multiplikatoren  $\alpha_i$  lautet

$$L(w, b, \xi, \alpha) = \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + \frac{1}{2} C \sum_{i=1}^k \xi_i^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_i (y_i (\langle w \cdot x_i \rangle + b) - 1 + \xi_i).$$

Durch Ableiten nach den primalen Variablen und deren Ersetzung lässt sie sich auch folgendermaßen schreiben:

$$L(w, b, \xi, \alpha) = \sum_{i=1}^k \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i \cdot x_j \rangle - \frac{1}{2C} \langle \alpha \cdot \alpha \rangle.$$

Daraus lässt sich das äquivalente duale Problem in impliziter Darstellung im Merkmalsraum herleiten.

#### Problem 5.11: Soft-Margin-Klassifikation im Merkmalsraum (duale Form)

Gegeben seien Trainingsdaten  $x_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, k$ , mit zugehörigen binären Klassifizierungen  $y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, k$ , die im durch den Kern  $K(x, z)$  implizit definierten Merkmalsraum linear trennbar sind. Die Parametervektoren  $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^k$  und  $\hat{b}$  seien die Lösung des quadratischen Optimierungsproblems:

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & \sum_{i=1}^k \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k y_i y_j \alpha_i \alpha_j \left( K(x_i, x_j) + \frac{1}{C} \delta_{ij} \right), \\ \text{u.d.Nb.} \quad & \sum_{i=1}^k y_i \alpha_i = 0, \\ & \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

$\hat{b}$  bestimme sich aus Gleichung (5.7) und die Entscheidungsfunktion  $\text{sign}(f(x))$  sei gegeben durch

$$f(x) = \sum_{i=1}^k y_i \hat{\alpha}_i K(x_i, x) + \hat{b}$$

und  $\hat{b}$  so gewählt wird, dass  $y_i f(x_i) = 1 - \frac{\hat{\alpha}_i}{C}, \forall \hat{\alpha}_i \neq 0$  ist.

Dabei ist  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta. Es existieren noch weitere Formulierungen, wie beispielsweise die Betrachtung der 1-Norm der Abstandsversetzung. Hier soll darauf jedoch nicht weiter eingegangen werden. Details können in [Cristianini und Shawe-Taylor, 2000] gefunden werden.

#### Definition 5.12: Support-Vektor-Maschine

Die aus einem Trainingsdatensatz  $x_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, k$ , mit Klassifizierungen  $y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, k$ , resultierende Support-Vektor-Maschine sei mit  $\text{svm}(x, y)$  bezeichnet.

Die zugehörige Entscheidungsfunktion wird mit  $\text{sign}(f(x)) := \text{sign}(\text{svmEval}(\text{svm}, x))$  bezeichnet.

### 5.4.2 Multi-Class-SVMs

Die Eigenschaft, dass SVMs lediglich zwischen zwei Klassen unterscheiden können, macht sie in dieser Form auf die vorliegende Problemstellung, unterschiedliche Ereignisse zu erkennen, nicht direkt anwendbar. Die zu erkennenden Ereignisse werden hierfür zur Ereignismenge  $\mathcal{E} = \{\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-, \mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-, \emptyset\}$  zusammengefasst. Dabei bezeichnet  $\emptyset$  das nicht erkannte Ereignis. Die Anzahl der Klassen  $N_{\mathcal{E}} = |\mathcal{E}|$  ist hier  $N_{\mathcal{E}} = 5$ . In [Hsu und Lin, 2002] werden verschiedene Möglichkeiten vorgestellt auch Probleme dieser Form mit Hilfe von SVMs zu klassifizieren. Hier wird lediglich die so genannte *one versus all* (1vsAll) Methode beschrieben, bei der je eine Klasse gegen alle anderen getestet wird.

**Algorithmus 5.13: 1vsAll-Multi-Class-SVM (Training)**

Gegeben seien Trainingsdaten  $x \in \mathbb{R}^{m,k}$  mit zugehörigen Klassifizierungen  $y \in W^k$ , wobei der Wertebereich von  $y$  definiert sei als  $W := [1, \dots, N_{\mathcal{E}}]$ .

(0) Setze  $i = 0$ .

(1) Bestimme  $\hat{y}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } y_j = i \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$  für  $j = 1, \dots, k$ .

(2) Trainiere  $svm(i) = svm(x, \hat{y})$  aus Definition 5.12.

(3) Wenn  $i < N_{\mathcal{E}}$ , setze  $i = i + 1$  und gehe zu (1), sonst gehe zu (4).

(4) Definiere  $Multisvm = [svm(1), \dots, svm(N_{\mathcal{E}})]$ .

Die Klassifizierung gestaltet sich in diesem Fall aufwändiger, da für alle enthaltenen SVMs getestet werden muss, wie die zu testenden Daten zu klassifizieren sind. Dieser Test reicht jedoch nicht aus, da ein Testdatensatz bei mehr als einem Klassifizierungsproblem zu einem positiven Ergebnis führen kann. Der folgende Algorithmus beschreibt das Vorgehen für diesen Fall.

**Algorithmus 5.14: 1vsAll-Multi-Class-SVM (Klassifizierung)**

Gegeben sei eine Multi-Class-SVM  $Multisvm$  bestehend aus  $N_{\mathcal{E}}$  SVMs  $svm(i), i = 1, \dots, N_{\mathcal{E}}$ . Für einen gegebenen Testdatensatz  $x \in \mathbb{R}^m$  lautet die Entscheidungsfunktion

$$y = \arg \max_{i=1, \dots, N_{\mathcal{E}}} (svmEval(svm(i), x)).$$

Der Testdatensatz wird der Klasse zugeordnet, bei der er den größten Abstand zur trennenden Hyperebene hat.

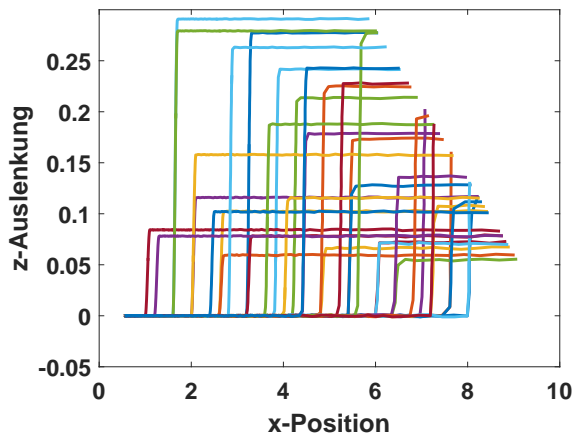
Mit der definierten Multi-Class-SVM ist es nun möglich durch Testen von  $N_{\mathcal{E}}$  Klassifizierungsproblemen zu entscheiden, ob die Eingangsdaten ein singuläres Ereignis darstellen oder nicht. Im Fall einer positiven Antwort muss lediglich ein Parameteridentifizierungsproblem für die erkannte Klasse gelöst werden. Liefert dies einen Zielfunktionswert, der unterhalb der definierten Schranke liegt, gilt das Event in diesem Frame als erkannt.

Durch eine weitere heuristische Vorfilterung der Daten kann die Multi-Class-SVM unterteilt werden. Dabei können Ereignisse mit negativem Ausschlag von solchen mit Positivem getrennt betrachtet werden. Dadurch werden zwei disjunkte Multi-Class-SVM's definiert, die jeweils weniger Klassen beinhalten.

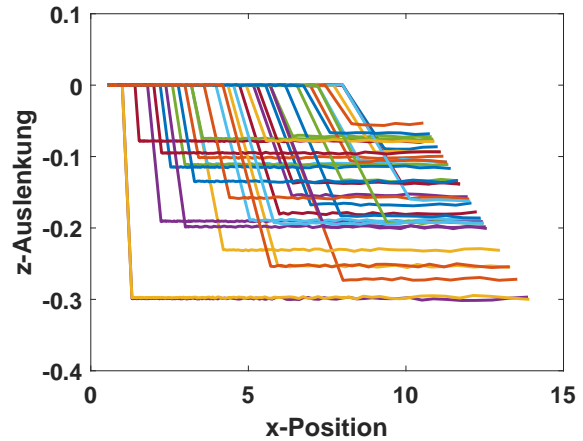
**5.4.3 Beispiele****Erstellung der Multi-Class-SVM**

Um die Multi-Class-SVM zu erstellen, werden von jeder Eventklasse einige Testdurchläufe durchgeführt. Dabei wird die gesamte Überfahrt über die Straße simuliert und für jeden Frame entschieden, ob ein Ereignis vorliegt. Der Klassifikator  $y$  wird dabei für ein  $c \in \mathcal{E}$  auf  $y = I(c)$  gesetzt, wobei  $I : \mathcal{E} \rightarrow [1, \dots, N_{\mathcal{E}}]$  eine bijektive Abbildung ist. Als Trainingsdaten wurden die Rohdaten des Sensors

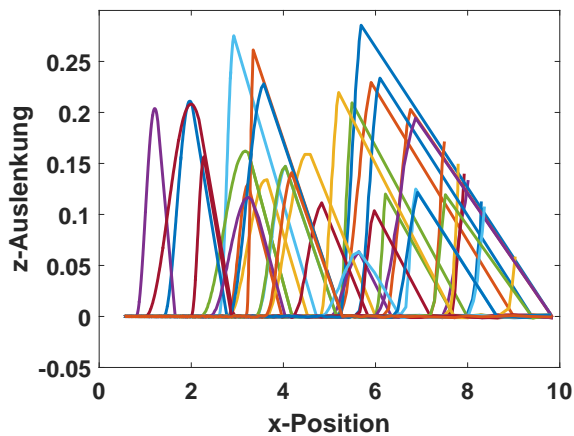
verwendet. Es ist darauf zu achten, dass der gesamte Parameterraum der zu erkennenden Events abgedeckt wird, da sonst besonders bei Ereignissen, deren Parameter nahe der Schranken liegen, Probleme auftreten können. In den Abbildungen 5.7a - 5.7e sind exemplarisch einige Sensordaten der einzelnen Klassen dargestellt, die zur Berechnung der SVMs verwendet wurden.



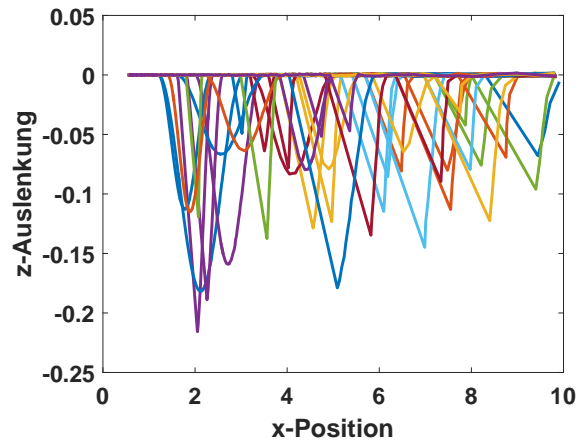
(a) Positive Schwelle



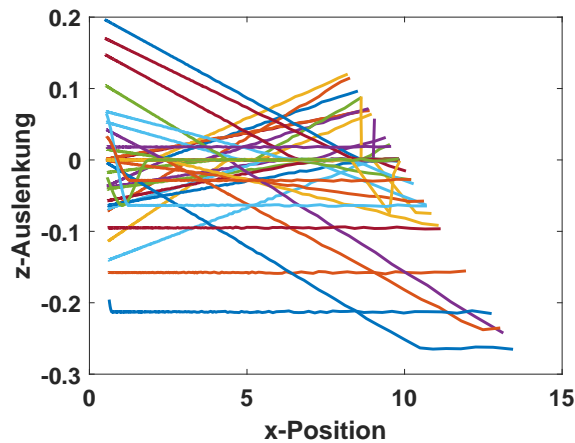
(b) Negative Schwelle



(c) Positives Schlagloch



(d) Negatives Schlagloch



(e) Nicht kategorisierte Daten

Abbildung 5.7: Ausgewählte Elemente der Multi-Class-SVM

Insgesamt wurden für die Erstellung der Multi-Class-SVM ca. 2000 Elemente aus jeder Eventklasse und 15000 nicht kategorisierte Datensätze erstellt. Die besten Erkennungsergebnisse lieferte eine Multi-Class-SVM, in die nur die Eventklassen aufgenommen wurden und das nicht-erkannte Ereignis  $\emptyset$  separat betrachtet wurde. Dazu kann eine weitere Vorfilterung das Auftreten von großen Höhenunterschieden detektieren. Nur in diesem Fall wird die Erkennung mit der SVM durchgeführt.

### Klassifizierung und Erkennung

Die Klassifizierung geschieht mit dem in Algorithmus 5.14 beschriebenen Verfahren. Dabei wird anhand der Sensordaten festgestellt, ob ein Event vorliegen kann oder nicht. Die Erkennung wird durchgeführt, wenn im Klassifizierungsschritt ein Event erkannt wurde. Für diesen Fall wird die entsprechende Zielfunktion ausgewertet und die Schranke für die Erkennung überprüft. Bei der Lösung des Optimierungsproblems ist anzumerken, dass eine gute Anfangsschätzung als Startwert die Optimierung stark beschleunigt und eine erfolgreiche Erkennung verbessert. Dies kann beispielsweise durch Überprüfung der minimalen bzw. maximalen Auslenkung der abgescannten Straße geschehen, um eine Startschätzung der Höhe zu erhalten. Außerdem kann, indem die Daten nach dem ersten Auftreten größerer Auslenkungen untersucht werden, eine Schätzung der Distanz zum Ereignis getätigt werden. Wenn ein Event erfolgreich erkannt wurde, können die identifizierten Parameter als Startschätzung für den nächsten Frame verwendet werden. Dabei kann die Distanz bei Kenntnis der Geschwindigkeit und der Zeitdifferenz ebenfalls bereits im Voraus angepasst werden. In den Abbildungen 5.8 sind einige Momentaufnahmen einer Beispielüberfahrt über eine Bodenschwelle dargestellt.

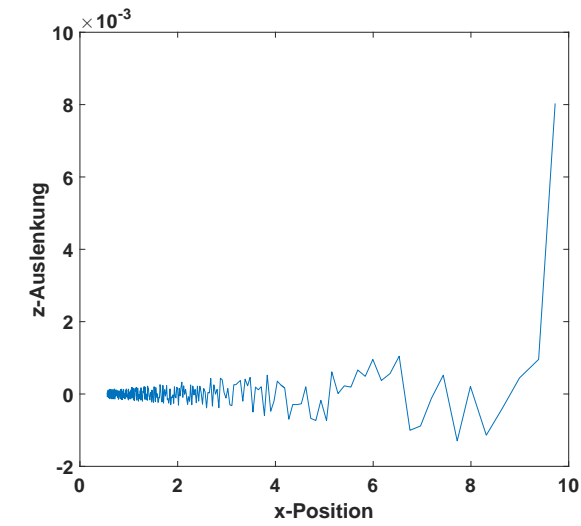
Dabei wird im ersten Bild noch kein Event erkannt und somit auch keine Parameteridentifizierung durchgeführt. Im zweiten Bild wird ersichtlich, dass die Vorfilterung die korrekten Klassen liefert, denn anhand der Sensordaten ist die Annahme, dass es sich um eine positive Stufe handelt die korrekte Entscheidung. Der Zielfunktionswert liegt hier jedoch mit 291 deutlich über der Erkennungsschranke. Die folgenden drei Aufnahmen zeigen die korrekt klassifizierte positive Schwelle, wobei in Bild 5.8d und 5.8e zusätzlich der Zielfunktionswert bei etwa  $10^{-3}$  die korrekte Erkennung kennzeichnet. Das letzte Bild zeigt das Ergebnis der Parameteridentifizierung für den Fall, dass das Ereignis nicht mehr im zulässigen Bereich liegt. Auch hier indiziert der Zielfunktionswert, dass die Erkennung nicht korrekt durchgeführt werden konnte.

## 5.5 Closed-Open-Loop Preview-Regelung mittels Sensitivitätsupdate

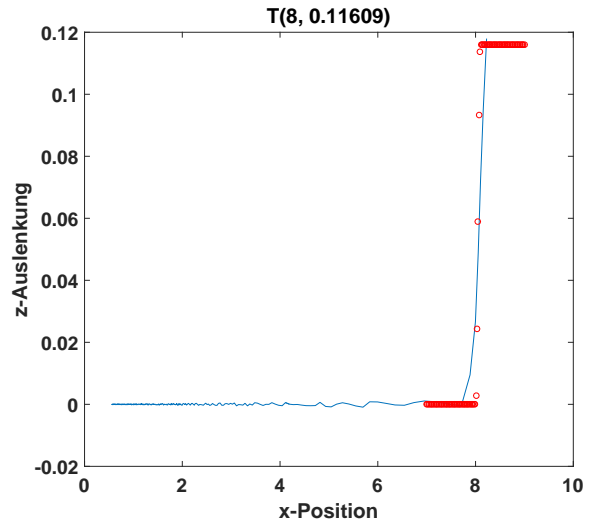
Nun gilt es, die erhaltenen parametrisierten Events für eine Echtzeitregelung zu verwenden. Die Idee, um Echtzeitfähigkeit zu erhalten ist, wie in Kapitel 3.2 erläutert, die parametrische Sensitivitätsanalyse anzuwenden. Der Algorithmus kann in ein offline- und ein online-Segment unterteilt werden. Wie beispielsweise in [Büskens und Maurer, 2000, Büskens und Maurer, 2001] erläutert, werden in einem ersten Schritt die optimalen Steuerungen und die zugehörigen Sensitivitäten offline auf einem Gitter, das auf dem Parameterraum definiert ist, berechnet. Dieses Gitter kann beispielsweise äquidistant in jeder Parameterdimension sein. Für einen allgemeinen Parameterraum

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{R}^{n_p} \mid p_i^{\min} \leq p_i \leq p_i^{\max}, \forall i = 1, \dots, n_p\}$$

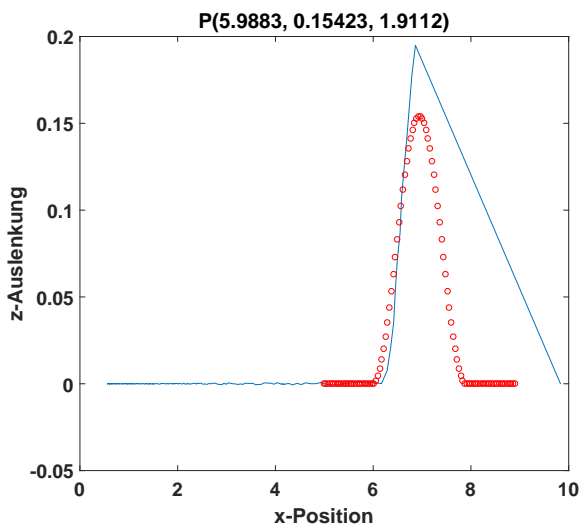




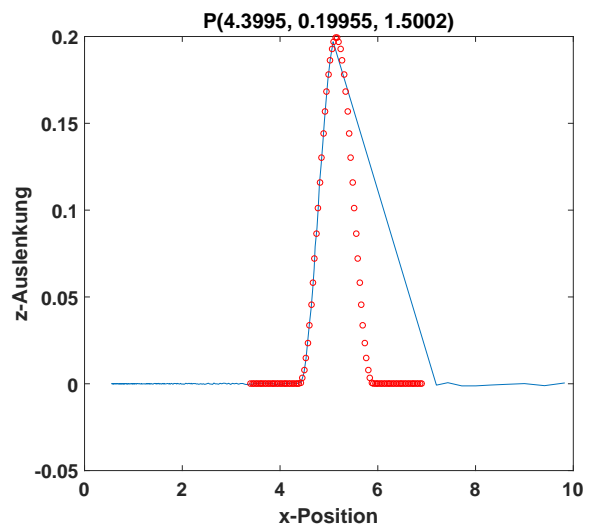
(a) Schritt 1



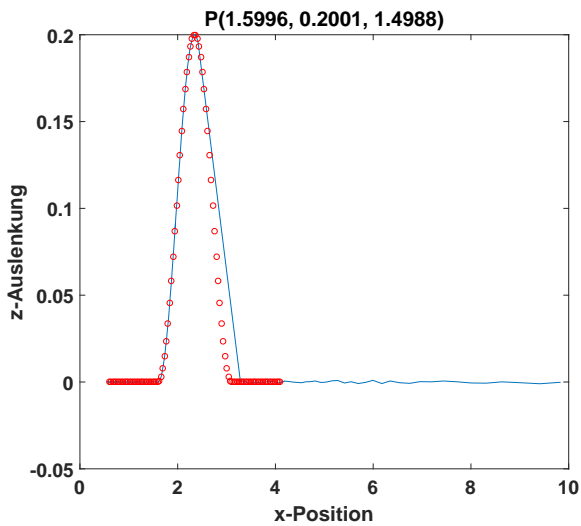
(b) Schritt 2



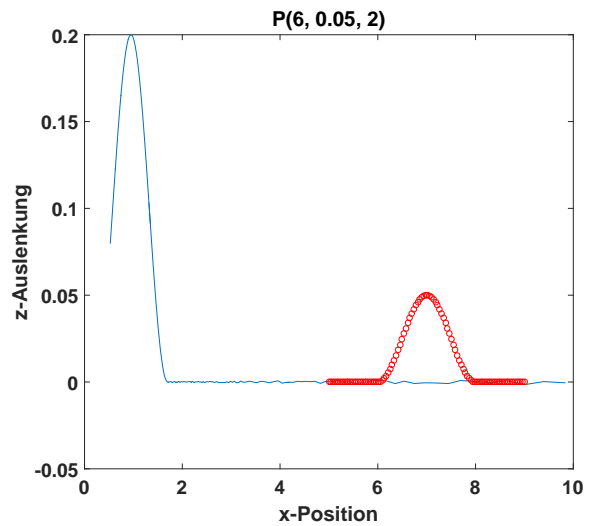
(c) Schritt 3



(d) Schritt 4



(e) Schritt 5



(f) Schritt 6

Abbildung 5.8: Ausschnitt der Erkennung und Klassifizierung einer Schwellenüberfahrt

und einer gegebenen Zahl an Gitterpunkten für jeden Parameter  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n_p$ , ergibt sich ein äquidistantes Parametergitter zu

$$\mathcal{G}_P = \{ \hat{p} \mid \hat{p}_i = p_i^{\min} + k_i \Delta p_i, \forall i = 1, \dots, n_p, k_i = 0, \dots, m_i \},$$

mit  $\Delta p_i = \left( \frac{p_i^{\max} - p_i^{\min}}{m_i} \right)$ . Dabei müssen die relativen Abstände für verschiedene Dimensionen nicht identisch sein. Wie sich später zeigen wird, ist es ratsam diese entsprechend des Einflusses einer Parametervariation auf die Steuerung zu wählen. Es gibt Parameter deren Einfluss auf die optimale Steuerung gering ist, was, um die Anzahl der Gitterpunkte gering zu halten, mit einer groben Diskretisierung abgedeckt werden kann. Bei anderen Parametern hingegen bewirken bereits kleine Variationen eine relativ große Änderung. Dies muss dann entsprechend fein aufgelöst werden.

Der offline Teil des Algorithmus liefert die optimalen Steuerungen  $u^*(\hat{p})$ , sowie die Sensitivitäten  $\frac{du^*(\hat{p})}{d\hat{p}}$  für alle nominellen Parameter  $\hat{p} \in \mathcal{G}_P$ . Nach der Formel für das Sensitivitätsupdate können somit aktualisierte Steuerungen für das erkannte Ereignis bestimmt werden. Der Update-Schritt schreibt sich nach Algorithmus 3.57 wie folgt

$$u(p) = u^*(\hat{p}_p) + \frac{du^*(\hat{p}_p)}{d\hat{p}} (p - \hat{p}_p),$$

wobei der zu verwendende nominelle Parameter  $\hat{p}_p$  als der nächste Nachbar bzgl. der 1-Norm bestimmt wird.

$$\hat{p}_p = \operatorname{argmin}_{q \in \mathcal{G}_P} \|p - q\|_1 = \operatorname{argmin}_{q \in \mathcal{G}_P} \sum_{i=1}^{n_p} (|p_i - q_i|).$$

Da hier, wie bereits in Kapitel 3.3 beschrieben, lediglich eine Matrix-Vektor-Multiplikation und eine Vektor-Vektor-Addition durchgeführt werden muss, kann diese Berechnung sehr schnell, d.h. echtzeitfähig, getätigt werden.

Nachdem der Erkennungsalgorithmus zusätzlich zum Parametervektor des erkannten Events auch die Distanz  $d_{\mathcal{E}}$  liefert, kann nun in Abhängigkeit von der momentan herrschenden Geschwindigkeit die Steuerung für die Überfahrt bereits zugewiesen werden. Die erhaltene diskretisierte Steuerung  $u(p)$  kann als eine zeitabhängige stückweise konstante Funktion betrachtet werden. Die Länge des betrachteten Steuerungshorizonts sei dabei mit  $T_{\mathcal{E}}$  bezeichnet. Damit lässt sich die tatsächlich angewandte Steuerung  $u_a(t)$  eines zum Zeitpunkt  $t_0$  erkannten Ereignisses folgendermaßen schreiben:

$$u_a(t_0 + t_{\mathcal{E}} + t) = u(p)(t), \quad \forall t \in [0, T_{\mathcal{E}}],$$

wobei sich der Zeitoffset  $t_{\mathcal{E}}$  aus der Momentangeschwindigkeit berechnet als

$$t_{\mathcal{E}} = \frac{d_{\mathcal{E}}}{v}.$$

Für das Zeitintervall  $[t_0 + t_{\mathcal{E}}, t_0 + t_{\mathcal{E}} + T_{\mathcal{E}}]$  ist damit bereits eine Steuerung festgesetzt. Ohne weitere Rücksicht auf ein abweichendes tatsächliches Straßenprofil zu nehmen, kann in diesem Zeitraum der Regelalgorithmus überbrückt und die mit Hilfe des Sensitivitätsupdates bestimmte Steuerung verwendet werden. In den Abbildungen 5.9 und 5.10 ist dieses Umschalten in einem Blockschaltplan dargestellt.

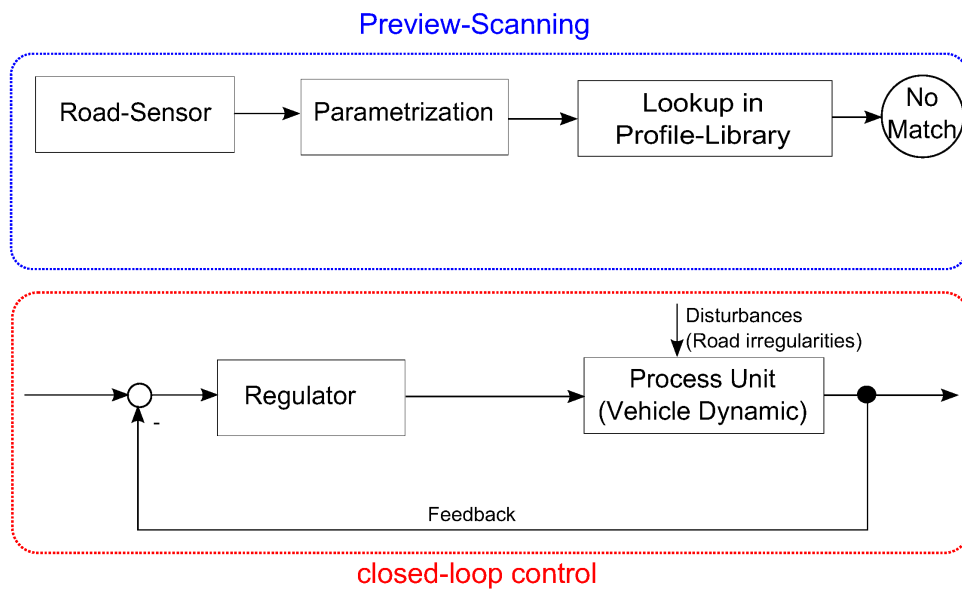


Abbildung 5.9: Closed-loop Regelung

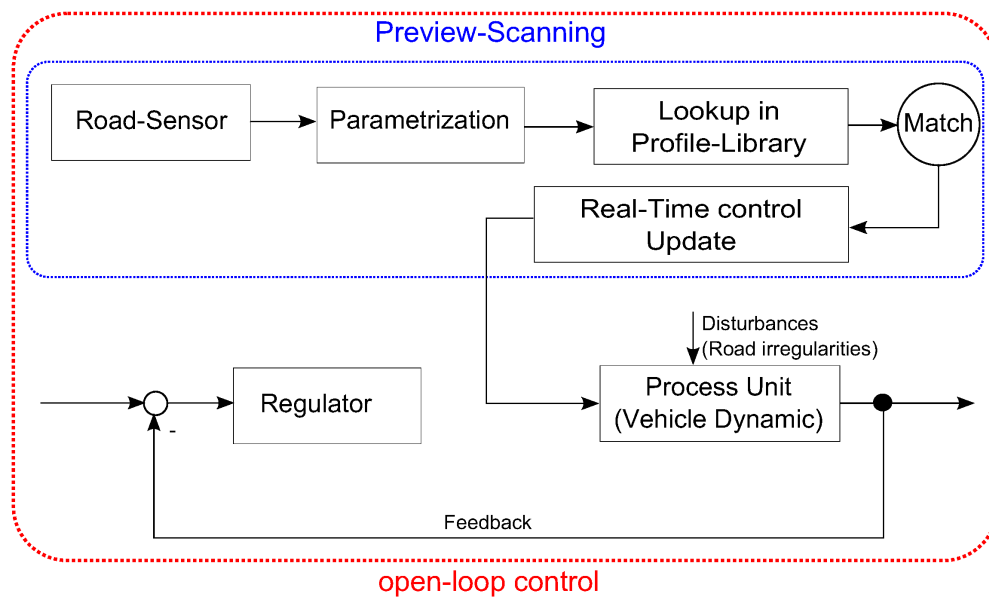


Abbildung 5.10: Echtzeit open-loop Sensitivitätsupdate

## 5.6 Beispiele

Die folgende Beispiele demonstrieren die Update-Eigenschaften des vorgestellten Algorithmus für unterschiedliche Szenarien. Dazu wurde jeweils die optimale Steuerung mit zugehöriger Sensitivitätsmatrix für den nominellen Parameter  $\hat{p}$  berechnet und abgespeichert. Für den gestörten Parametersatz  $p = \hat{p} + \Delta p$  wurde ebenfalls die optimale Steuerung sowie die Lösung mittels aufdatierter Steuerung berechnet. Für die Berechnungen wurde das lineare Dämpfermodell herangezogen, was jedoch keine Einschränkung der Anwendbarkeit auf die vorgestellten komplexeren Dämpfermodellierungen darstellt.

### Update einer Stufenüberfahrt eines Viertelfahrzeugs

Zuerst wird eine Stufenüberfahrt eines Viertelfahrzeugs betrachtet. Die Zielfunktion wird hier mit  $\kappa = (0.0, 1.0, 0.0, 0.1)$  gewichtet. Zur Bestimmung der Sensitivitäten ist es hilfreich eine schwach gewichtete Regularisierung bzgl. der Steuerung vorzunehmen, weshalb hier  $\kappa_{\text{regularization}} = 0.1$  gewählt wurde. Das nominelle singuläre Fahrbahnereignis ist hier als  $\mathcal{P}(-0.08)$ , d.h.  $\hat{p} = -0.08$ , definiert. Die Parametervariation ist mit  $\Delta p = -0.05$ , also  $5\text{cm}$  relativ groß. In der Abbildung 5.11 sind die nominelle Steuerung sowie die optimale Steuerung mit veränderter Stufenhöhe und die aufdatierte Steuerung dargestellt. Das Update-Verhalten zeigt deutlich, dass die Update-Formel eine Annäherung der Steuerung an die optimale Lösung bewirkt. In Tabelle 5.2 werden die erreichten Zielfunktionswerte der drei Steuerungen verglichen. Die absoluten Werte der Zielfunktion sind hier eher uninteressant, da diese von der Wahl der Gewichtungparameter abhängen. Meist ist die nominelle Steuerung nicht allzu weit vom optimalen Wert entfernt. Interessant ist, dass mit Hilfe des Updates eine Annäherung an den optimalen Zielfunktionswert erreicht wird, was auch hier zu erkennen ist.

Abbildung 5.12 zeigt die Parametersensitivität der Steuerung. Die großen Ausschläge treten bei einer starken Schwankung des Steuerungswerts auf. In Punkten, an denen sich die Steuerung am Rand befindet, ist die Sensitivität 0.

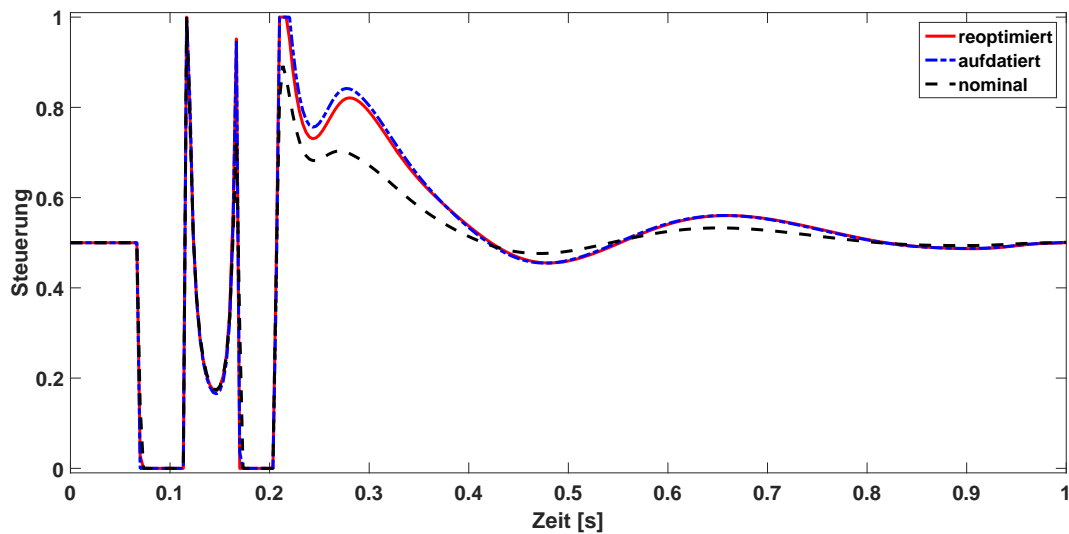


Abbildung 5.11: Vergleich der nominellen (gestrichelt), reoptimierten (durchgezogen) und aufdatierten (gestrichpunktet) Steuerung eines Viertelfahrzeugs bei einer Stufenüberfahrt mit variierter Stufenhöhe

	Nominelle Steuerung $u^*(\hat{p})$	Aufdatierte Steuerung $u^*(\hat{p}) + \frac{du^*(\hat{p})}{d\hat{p}} \Delta p$	Reoptimierte Steuerung $u^*(\hat{p} + \Delta p)$
Zielfunktionswert	1.1743	1.1689	1.1684

Tabelle 5.2: Vergleich der Zielfunktionswerte der unterschiedlichen Steuerungen einer Stufenüberfahrt eines Viertelfahrzeugs

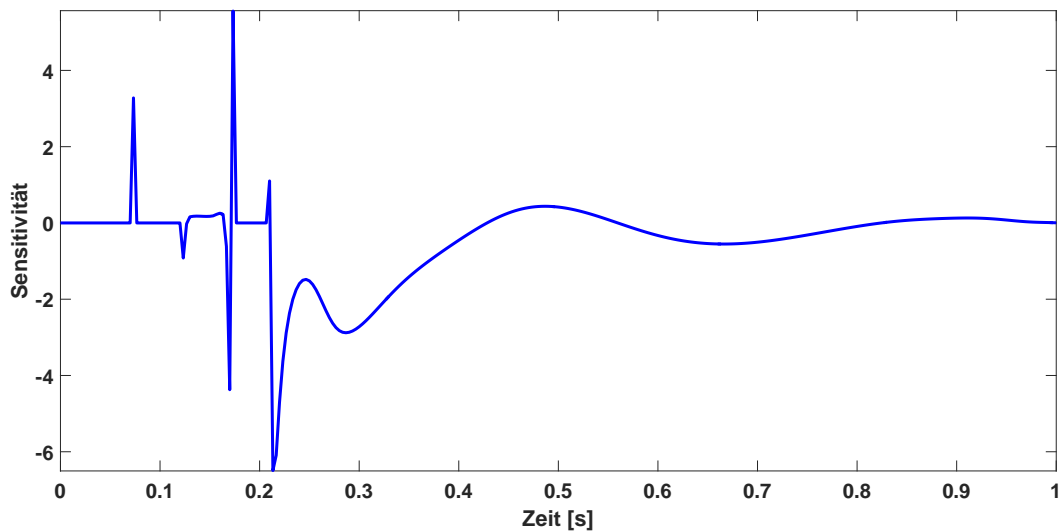


Abbildung 5.12: Sensitivität der Steuerung bzgl. der Stufenhöhe eines Viertelfahrzeugs

### Update einer Schwellenüberfahrt eines Viertelfahrzeugs

Analog zum vorherigen Beispiel wird hier eine Schwellenüberfahrt mit den Parametern  $\hat{p} = (0.15, 2.0)$ ,  $\Delta p = (0.025, 0.05)$  und  $\kappa = (0.0, 1.0, 0.0, 0.1)$  durchgeführt. Die Abbildungen 5.13 und 5.14, sowie Tabelle 5.3 zeigen die Update-Eigenschaft. Bei den Sensitivitäten wird deutlich, dass die Länge der Schwelle punktuell einen relativ großen Einfluss auf die Steuerung hat. Dies ist besonders am Beginn der Überfahrt der Fall.

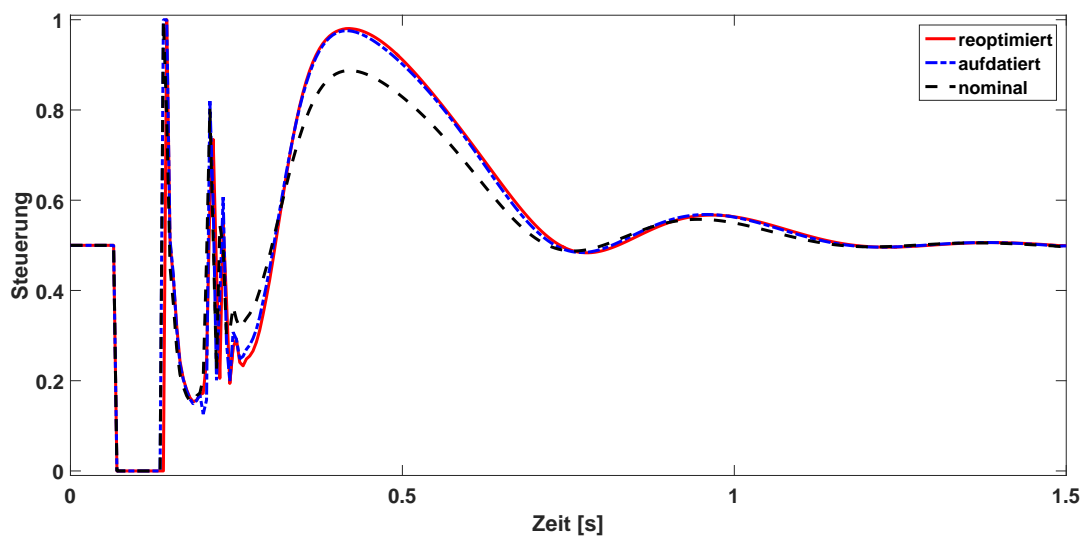


Abbildung 5.13: Vergleich der nominellen (gestrichelt), reoptimierten (durchgezogen) und aufdatierten (gestrichpunktet) Steuerung eines Viertelfahrzeugs bei einer Schwellenüberfahrt mit variierten Schwellenparametern

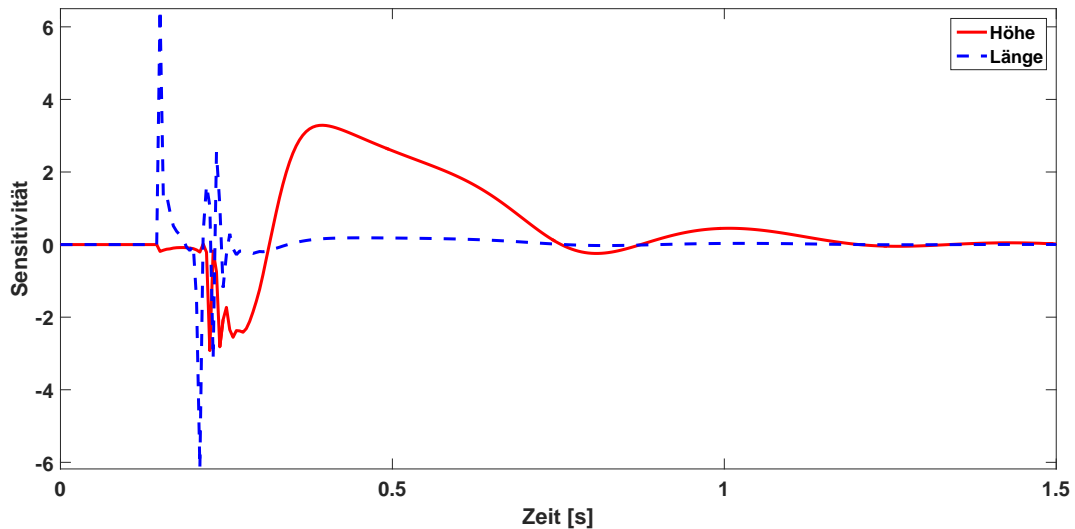


Abbildung 5.14: Sensitivität der Steuerung bzgl. der Schwellenhöhe und -länge eines Viertelfahrzeugs

	Nominelle Steuerung $u^*(\hat{p})$	Aufdatierte Steuerung $u^*(\hat{p}) + \frac{du^*(\hat{p})}{d\hat{p}} \Delta p$	Reoptimierte Steuerung $u^*(\hat{p} + \Delta p)$
Zielfunktionswert	1.4478	1.4166	1.3932

Tabelle 5.3: Vergleich der Zielfunktionswerte der unterschiedlichen Steuerungen einer Schwellenüberfahrt eines Viertelfahrzeugs

### Update einer Stufenüberfahrt eines Halffahrzeugs

Nun wird eine Überfahrt eines Halffahrzeugs über eine Stufe mit nomineller Höhe  $\hat{p} = 0.05$  betrachtet. Die tatsächlich überfahrene Stufe besitzt die Höhe  $p = 0.08$ , d.h. die Veränderung ist  $\Delta p = 0.03$ . Der Gewichtungsvektor der Zielfunktion ist hier zu  $\kappa = (10.0, 0.0, 1.0, 0.1)$  gewählt. In Abbildung 5.16 ist wieder das Update-Verhalten der Steuerung dargestellt. Zusätzlich wird ein lediglich zeitlich versetztes Verhalten der Steuerung des vorderen und hinteren Dämpfers sichtbar. Ebenso verhält es sich mit den Sensitivitäten in Abbildung 5.15. Eine Betrachtung der Steuerung und der Sensitivität des Vorderwads im Zeitintervall  $[0.0, 0.3]$  Sekunden zeigt, dass hier die Sensitivität meist am Anschlag ist, sowohl für das nominelle, als auch das variierte Fahrbahnereignis. Die Sensitivität ist in diesem Bereich auch fast überall 0. Die Verbesserung der Zielfunktion hin zum optimalen Wert ist in Tabelle 5.4 ersichtlich.

	Nominelle Steuerung $u^*(\hat{p})$	Aufdatierte Steuerung $u^*(\hat{p}) + \frac{du^*(\hat{p})}{d\hat{p}} \Delta p$	Reoptimierte Steuerung $u^*(\hat{p} + \Delta p)$
Zielfunktionswert	10.0602	10.055	10.0545

Tabelle 5.4: Vergleich der Zielfunktionswerte der unterschiedlichen Steuerungen einer Schwellenüberfahrt eines Halffahrzeugs

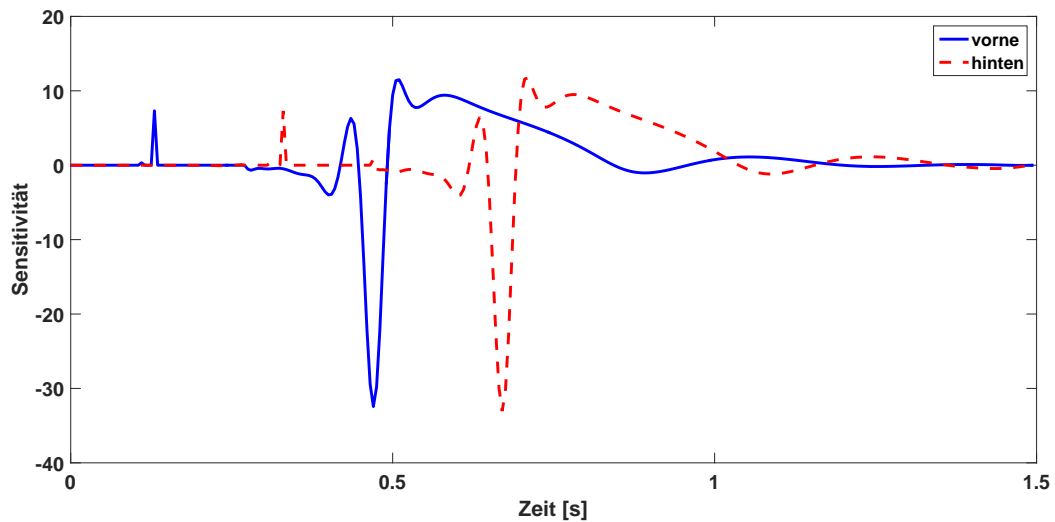


Abbildung 5.15: Sensitivität der Steuerung bzgl. der Stufenhöhe eines Halbfahrzeugs

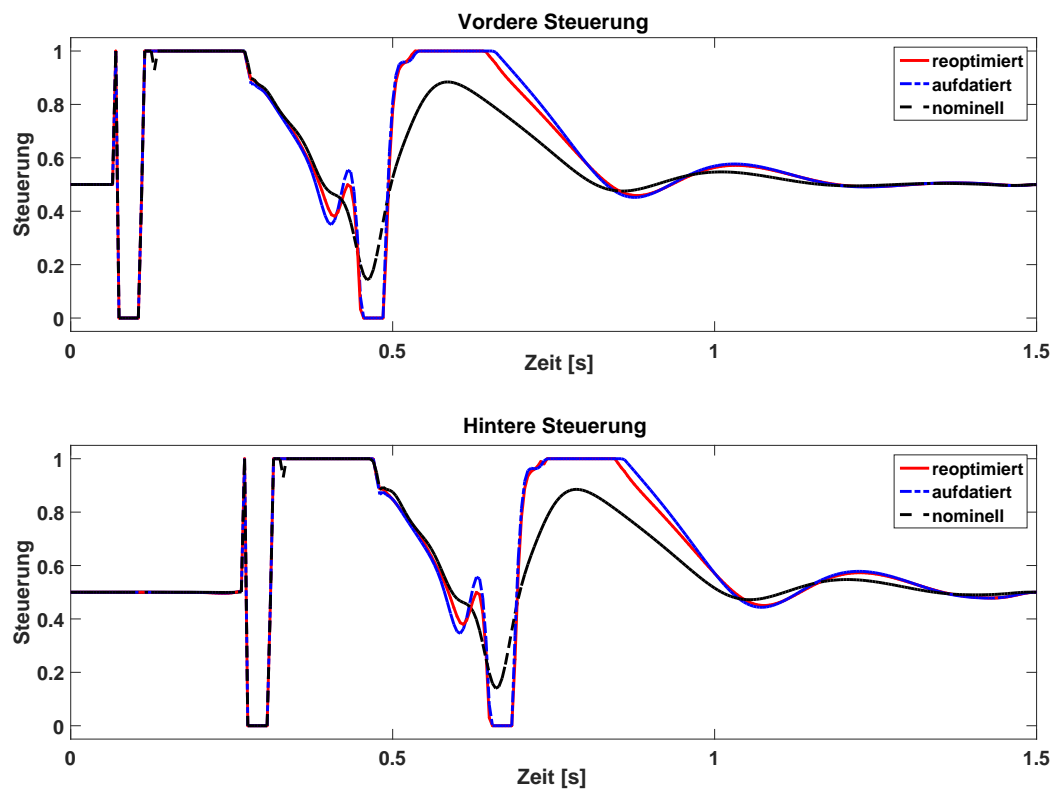


Abbildung 5.16: Vergleich der nominellen (gestrichelt), reoptimierten (durchgezogen) und aufdatierten (gestrichpunktet) Steuerung eines Halbfahrzeugs bei einer Stufenüberfahrt mit variiertes Stufenhöhe

### Update einer Schlaglochüberfahrt eines Vollfahrzeugs

Das letzte Beispiel zeigt das Update einer Überfahrt eines Vollfahrzeugs über eine Fahrbahnschwelle. Das nominelle Ereignis ist  $\mathcal{P}(0.15, 1.0)$ . Die überfahrene Schwelle  $\mathcal{P}(0.2, 1.025)$  wurde mit einer Störung von  $\Delta p = (0.05, 0.025)$  variiert.

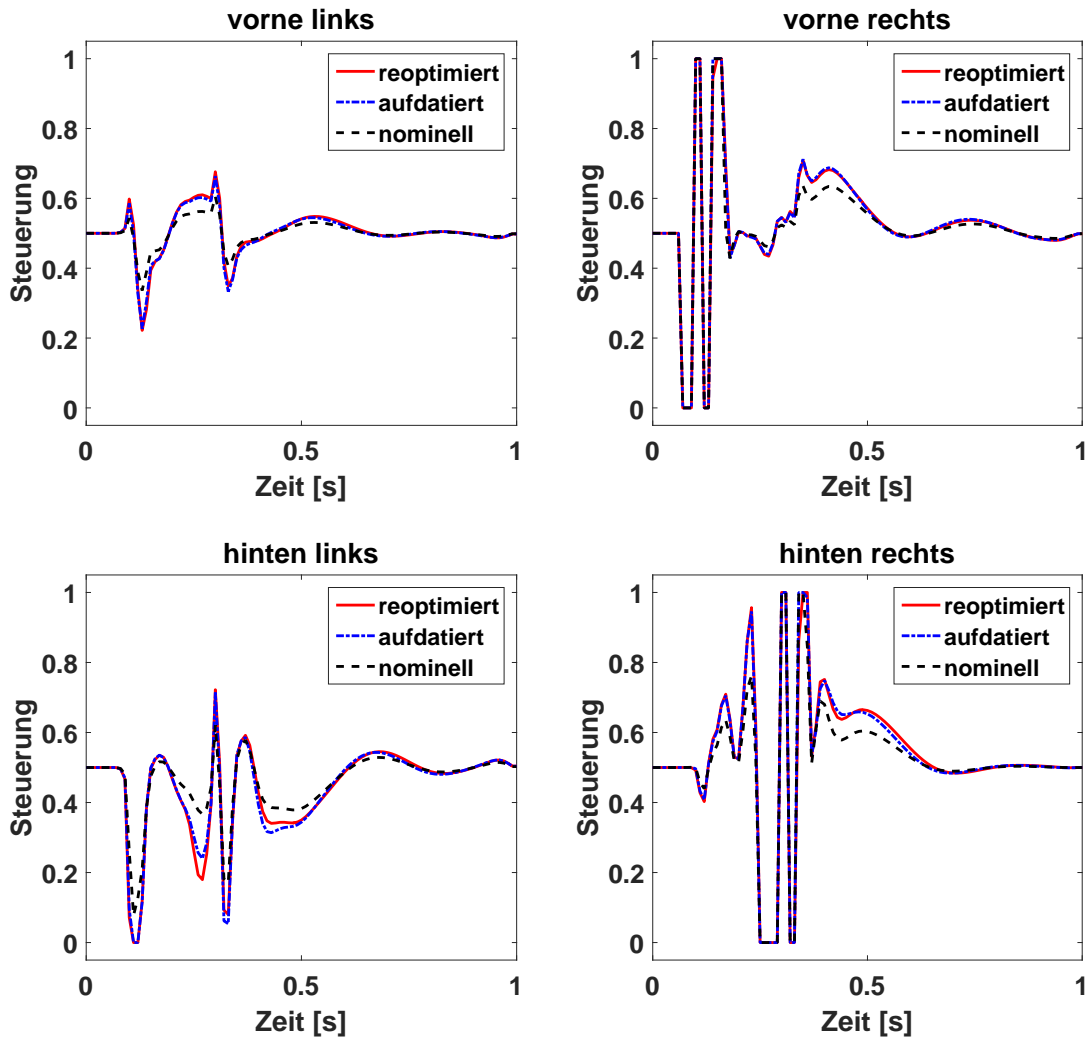


Abbildung 5.17: Vergleich der nominellen (gestrichelt), reoptimierten (durchgezogen) und aufdatierten (gestrichpunktet) Steuerung eines Vollfahrzeugs bei einer Schwellenüberfahrt mit variierten Schwellenparametern

	Nominelle Steuerung $u^*(\hat{p})$	Aufdatierte Steuerung $u^*(\hat{p}) + \frac{du^*(\hat{p})}{d\hat{p}} \Delta p$	Reoptimierte Steuerung $u^*(\hat{p} + \Delta p)$
Zielfunktionswert	1.4076	1.4068	1.4054

Tabelle 5.5: Vergleich der Zielfunktionswerte der unterschiedlichen Steuerungen einer Schwellenüberfahrt eines Vollfahrzeugs

Die Gewichtungsfaktoren der Zielfunktion sind hier  $\kappa = (100.0, 100.0, 10.0, 0.1)$ , wobei hier die vertikale Beschleunigung sowie Nick- und Wankwinkelbeschleunigung mit  $\kappa_{comfort} = 100.0$  gewichtet wurden. Das Steuerungsverhalten bezüglich des Updates ist in Abbildung 5.17 zu sehen. Die mittels Sensitivitätsupdate bestimmte Steuerung entspricht auch hier sehr gut der optimalen Steuerung für das tatsächliche Ereignis. In Tabelle 5.5 kann die Verbesserung der Zielfunktion abgelesen werden.



## 5.7 Preview-Regelung als Vorsteuerung

Wie bereits erwähnt, wird bei dem vorgestellten Algorithmus keine Rücksicht auf den tatsächlichen Straßenverlauf gelegt, sondern angenommen, dass dieser sich exakt nach dem Verlauf des erkannten Ereignisses richtet. Störungen sowie kleine Abweichungen werden ignoriert, was zu einem nicht optimalen Verhalten des Fahrzeugs bei der berechneten Steuerung führen kann. Als Erweiterung kann beispielsweise die berechnete Steuerung als Vorsteuerung für einen Regler herangezogen werden.

Bei einer Vorsteuerung wird eine Solltrajektorie und eine Sollsteuerung als gegeben betrachtet und der Regelkreis so ausgelegt, dass er Abweichungen von dieser Solltrajektorie nachregelt, vgl. [Lunze, 2010]. So wird in einem ersten Schritt die Abweichung der tatsächlichen Trajektorie  $x(t)$  zur Solltrajektorie  $x_{soll}(t)$  gebildet und diese in den verwendeten Regler als Eingangsgröße geschickt. Die daraus erhaltene Steuerung  $u_R(t)$  wird wiederum auf die vorhandene Sollsteuerung  $u_{soll}(t)$  addiert und dies an die Regelstrecke, also das tatsächliche physikalische System geschickt, in das zusätzlich noch weitere Fehler  $d$  eingehen. Der Schematische Aufbau einer Regelung mit Vorsteuerung ist in Abbildung 5.18 dargestellt.

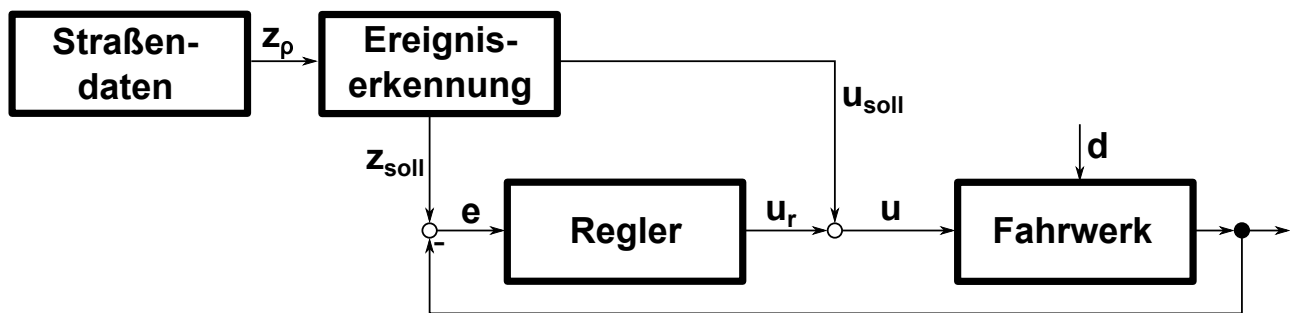


Abbildung 5.18: Blockschaltbild eines Reglers mit Vorsteuerung (vgl. [Lunze, 2010])

## 5.8 Preview-Regelung als Anfangsschätzung für Nachoptimierung

Wenn ein Ereignis erfolgreich erkannt wurde, bedeutet dies je nach Einstellung des Erkennungsalgorithmus nicht, dass das vorausliegende Fahrbahnsegment auch exakt der erkannten Störung entspricht. Viel wahrscheinlicher ist, dass kleine Abweichungen vorliegen und die gemessene Oberfläche nur näherungsweise dem entspricht, was die aufdatierte Steuerung erwartet. Da das erkannte Ereignis erst nach der Zeit  $t_{\mathcal{E}}$  das Vorderrad erreicht, kann diese Zeit genutzt werden, um eine Verbesserung der Steuerung zu berechnen. Dabei wird die Sensitivitätssteuerung als Anfangsschätzung in ein Optimalsteuerungsproblem mit der tatsächlich gemessenen Straße gesteckt und dies gelöst. Das Problem muss dabei nicht bis zur hinreichenden Genauigkeit iteriert werden, sondern kann, je nach zur Verfügung stehender Zeit, bereits nach wenigen Iterationen abgebrochen werden. Da die Anfangsschätzung der Steuerung bereits für eine ähnliche Straße berechnet wurde, kann angenommen werden, dass die Iterationen deutlich schneller konvergieren als ohne die Verwendung der Vorabinformationen.

## 5.9 Wahl der Gitterauflösung

Die Bestimmung der optimalen Steuerung mit zugehörigen Sensitivitäten auf dem Parametergitter  $\mathcal{G}_P$  erfordert das Lösen von  $|\mathcal{G}_P|$  Optimierungsproblemen. Auch wenn diese Berechnungen offline ausgeführt werden können, also die Echtzeitfähigkeit im laufenden Betrieb nicht beeinflussen, sind die Anzahl der Gitterpunkte ein nicht zu vernachlässigender Faktor. Sie bestimmen sich zu

$$|\mathcal{G}_P| = \prod_{i=1}^{n_p} \left( \frac{p_i^{max} - p_i^{min}}{\Delta p_i} + 1 \right).$$

Wenn die Gitterdiskretisierungen  $\Delta p_i$  entsprechend größer gewählt werden können, so reduziert sich nicht nur der Berechnungsaufwand, sondern infolgedessen auch der benötigte Speicherplatz und die Zeit, bis die benachbarte Steuerung eines erkannten Ereignisses gefunden wird. Auch wenn letzteres mit Hilfe von geeigneten Algorithmen verhältnismäßig klein gehalten werden kann, so spielt der benötigte Speicher bei einer realen Implementierung des Algorithmus eine entscheidende Rolle.

Um die Speicheranforderungen möglichst klein zu halten, empfiehlt es sich, das Verhalten der upgedateten Steuerung im Vergleich zur reoptimierten zu betrachten. Dass dies für jeden Parameter eine durchaus unterschiedliche Gestalt annehmen kann, wird in Abbildung 5.19 deutlich. Dort wird für ein Schlagloch einmal die Höhe und einmal die Länge variiert. Bei einer Höhenveränderung von  $0.06m$  weicht die Zielfunktion lediglich um etwa  $10^{-6}$  vom optimalen Wert ab, wohingegen eine betragsmäßig identische Änderung der Länge eine Abweichung von  $10^{-2}$  verursacht.

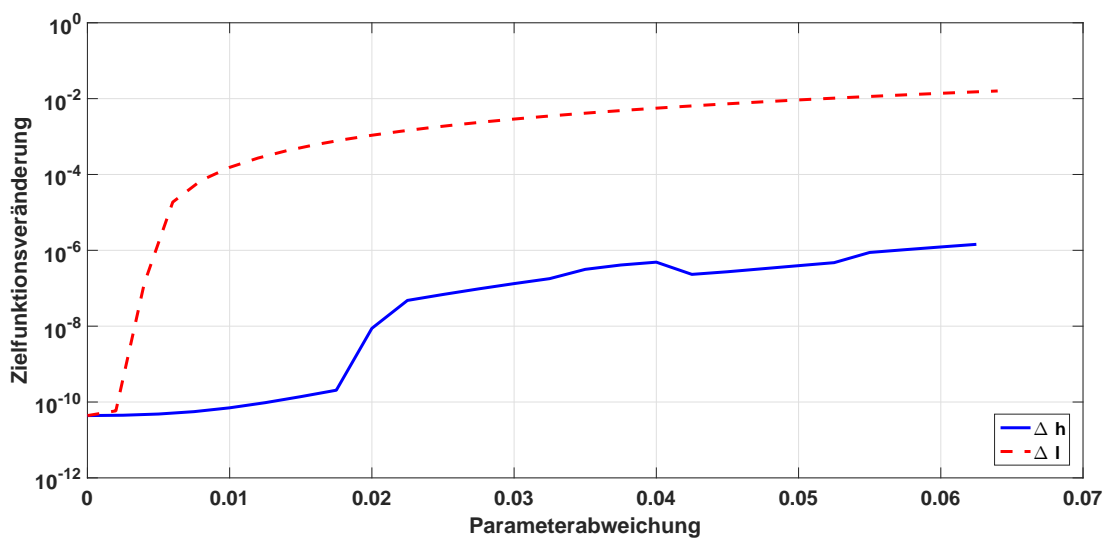


Abbildung 5.19: Verhalten der upgedateten Kostenfunktion im Vergleich zur Reoptimierten bei größer werdender Parameterabweichung (Höhenveränderung - durchgezogen, Längenveränderung - gestrichelt)

## 5.10 Weitere notwendige Parameter

Zu den bereits in Kapitel 5.2.1 erläuterten Parametern der singulären Ereignisse kommen noch weitere wichtige Kenngrößen hinzu, die einen Einfluss auf die verwendete Steuerung haben. Hierzu zählen in erster Linie die Masse des Aufbaus und die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs.

### Die Aufbaumasse

Da das Gewicht des Fahrzeugs nicht als konstant angenommen werden kann, sondern sich in Abhängigkeit der Zuladung, der Anzahl der Mitfahrer und des Tankinhalts ändert, gilt es zu betrachten, inwieweit dies einen Einfluss auf die optimale Steuerung hat. Hier wird angenommen, dass eine Messung des momentanen Gewichts mit Hilfe passender Sensoren zur Verfügung steht. Dafür können beispielsweise Kraftmessdosen in der Aufhängung verbaut werden oder über die statische Einfederung das aktuelle Gewicht berechnet werden.

Wie groß bzw. klein der Einfluss der Aufbaumasse auf die optimale Steuerung ist, wird in Abbildung 5.20 dargestellt. Dort ist die Steuerung einer Schwelle mit Länge  $l = 1.0m$  und Höhe  $h = 0.148m$  mit verschiedenen Aufbaumassen skizziert. Die Masse wurde hier von  $200kg$  bis  $420kg$  variiert. Deutlich wird, dass die optimale Steuerung selbst bei diesen großen Unterschieden keine entscheidenden Veränderungen aufweist. Dies legt die Annahme nahe, dass es ausreichen kann, die Steuerung nur auf einem relativ groben Gitter für den Massenparameter zu berechnen.

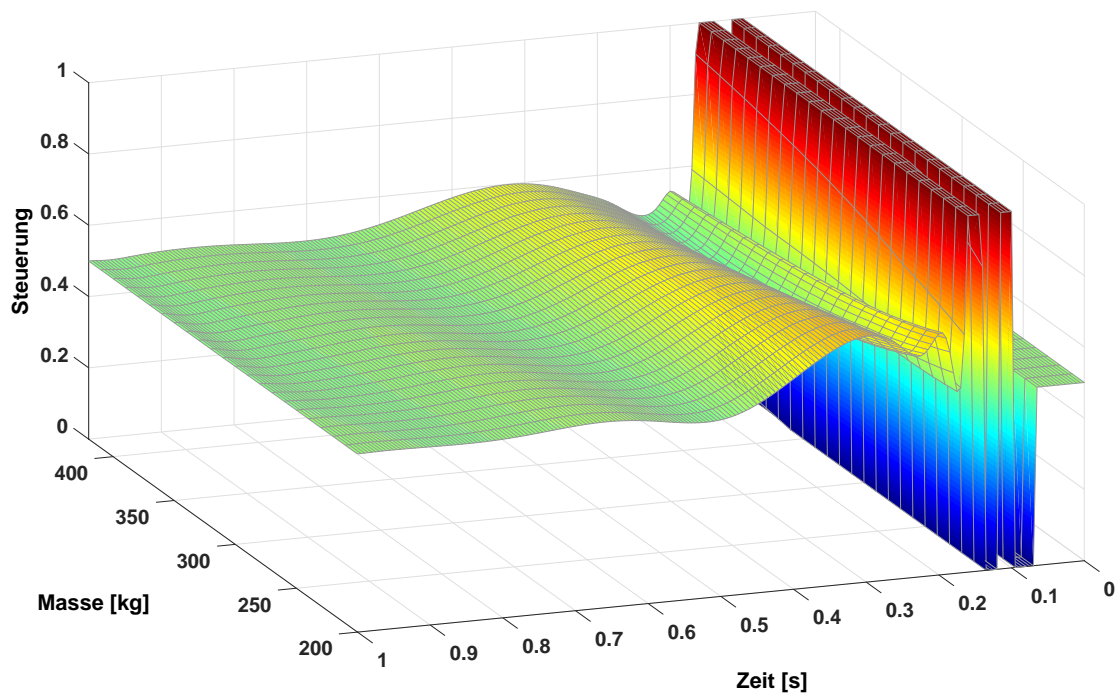


Abbildung 5.20: Steuerungsabhängigkeit von der Aufbaumasse

## Die Geschwindigkeit

Ebenso spielt die Geschwindigkeit mit der das Hindernis überfahren wird eine entscheidende Rolle bei der anzuwendenden Steuerung. Diese Messgröße steht ohne zusätzliche Sensorik im Fahrzeug zur Verfügung und kann leicht für ein Sensitivitätsupdate herangezogen werden. Trotz der Möglichkeit, dass sich die Geschwindigkeit im Laufe einer Überfahrt über ein Hindernis ändert, wird hier angenommen, dass sie konstant bleibt.

Dass eine Änderung der Geschwindigkeit einen deutlich größeren Einfluss auf die Steuerung hat, ist bereits intuitiv klar, da die Anregung schneller bzw. langsamer überfahren wird und sich somit die Relativgeschwindigkeiten verändern und auf der Zeitachse verschieben. In Abbildung 5.21 ist für das Hindernis  $\mathcal{P}(0.148, 2.0)$  die Steuerung für variierende Geschwindigkeiten dargestellt.

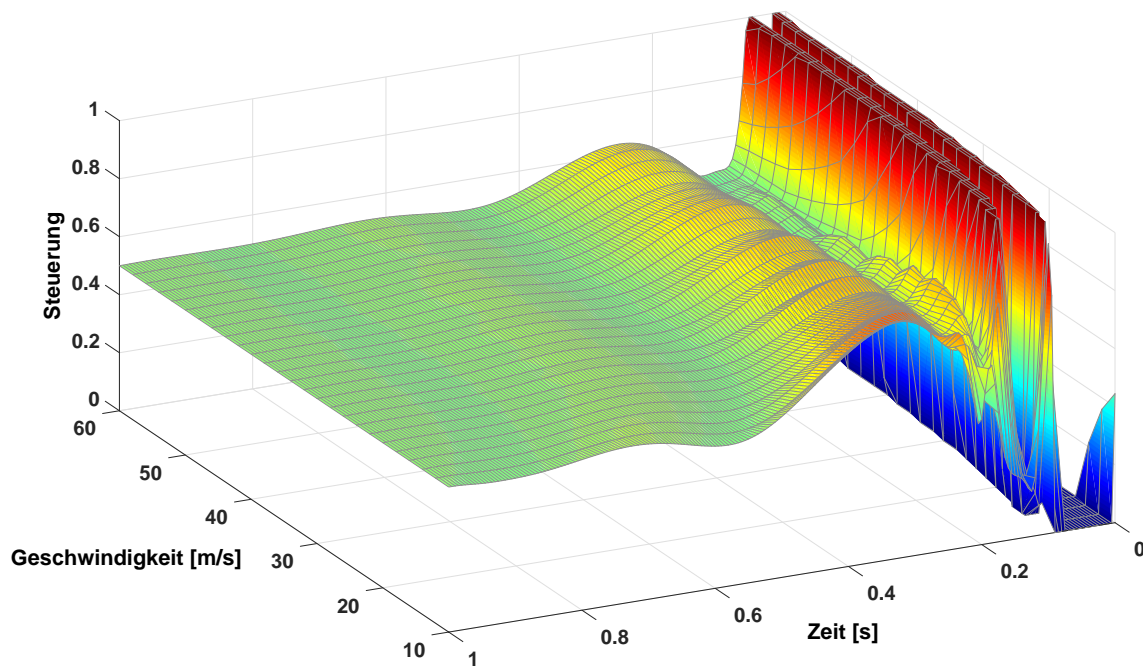


Abbildung 5.21: Steuerungsabhängigkeit von der Überfahrtgeschwindigkeit

Es ist leicht ersichtlich, dass die Geschwindigkeit einen deutlich größeren Einfluss auf die optimale Steuerung hat als die Fahrzeugmasse. Besonders bei geringeren Geschwindigkeiten, zwischen  $10\text{m/s}$  und  $16\text{m/s}$  wirkt sich eine Änderung stärker auf das Ergebnis aus. Die Steuerung verschiebt sich im weitesten Sinne in negativer Zeitrichtung, was aufgrund der rascheren Überfahrt auch so zu erwarten ist. Es ist demnach notwendig direkt vor dem Überfahren des Hindernisses die aktuelle Geschwindigkeit vom Tachometer abzufragen. Die Geschwindigkeit muss demnach mit hinreichend guter Auflösung in die Parameter aufgenommen werden.

## Erweiterte Zustandsparameter

Wenn der Algorithmus in einem realen Fahrzeug eingesetzt werden soll, so sind zusätzliche Parameter notwendig, die die momentan vorherrschende Fahrsituation beschreiben. So wird beispielsweise eine andere Steuerung optimal sein, wenn sich das Fahrzeug gerade in einer Kurvenfahrt befindet, als wenn es geradeaus fährt. Bei unvorhergesehenen Ereignissen muss der Regelalgorithmus zusätzlich in der Lage sein, sofort die Steuerung an die veränderten Umstände anzupassen, wie es beispielsweise bei einer plötzlichen Vollbremsung notwendig ist. Dieses Feld bietet ein weites Forschungsthema bezüglich der Realisierung in einem Versuchsfahrzeug.

## 5.11 Die Simulationssoftware sensUp

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Simulationssoftware mit dem Namen **sensUp** entwickelt. Der Name setzt sich aus einer Abkürzung des Begriffs **Sensitivitätsupdate** zusammen. Die Software verknüpft die beschriebenen Elemente und stellt in einer Simulation die Echtzeitfähigkeit des Algorithmus sowie dessen gute Regelungseigenschaften dar.

### 5.11.1 Programmaufbau

Der Aufbau der Softwareumgebung ist einfach gehalten. Alle Elemente können über die in Abbildung 5.22 dargestellte grafische Benutzeroberfläche gesteuert werden. Die Software generiert zufällige Ereignisse aus den in 5.2.1 definierten Eventklassen und fügt diese zu einer kontinuierlichen Straße zusammen. Der Sensor wird mit der in Kapitel 5.3.1 vorgestellten Methode simuliert. Die Sensordaten werden im Anschluss verwendet, um die in Abschnitt 5.3.2 aufgestellten Ausgleichsprobleme zu lösen.

Wird in mindestens drei aufeinanderfolgenden Frames das gleiche Ereignis erkannt, so wird dies als solches festgelegt. Mit Hilfe einer Nachbarschaftssuche wird das zu verwendende Referenzevent herausgesucht und das Sensitivitätsupdate durchgeführt, vgl. Kapitel 5.5. In diesem Programm ist die Vorfilterung mittels Support-Vektor-Maschinen noch nicht eingearbeitet, weshalb hierfür eine Heuristik verwendet wird, die die Sensordaten betrachtet und nach speziellen Merkmalen wie das Auftreten eines großen Messausschlags sucht. Die Steuerung wird lediglich während der Überfahrt des Ereignisses angesprochen und sonst auf einen konstanten Wert gesetzt.

Zum Vergleich wird parallel zum Fahrzeugmodell mit Eventerkennung ein identisch parametrisiertes zweites Fahrzeugmodell simuliert, das wahlweise mit einer wählbaren Dämpferkonstanten arbeitet oder einen *On-Off-Skyhook-Dämpfer* verwendet. Dieses soll zu Vergleichszwecken dienen, um die Leistungsfähigkeit des Algorithmus zu demonstrieren.

Im rechten unteren Plot in Abbildung 5.22 ist der Verlauf der Zielfunktionen der proaktiven Eventerkennung (rot) und der Skyhook-Dämpfung (blau) dargestellt. Die proaktive Steuerung liefert bei jedem Einzelevent einen deutlich geringeren Anstieg des Zielfunktionswerts.

### 5.11.2 Echtzeitfähigkeit

Um einen Nachweis über die Echtzeitfähigkeit des vorgestellten Verfahrens zu erbringen, werden abschließend noch einige Resultate aus durchgeführten Zeitmessungen vorgestellt. Hierbei werden ledig-

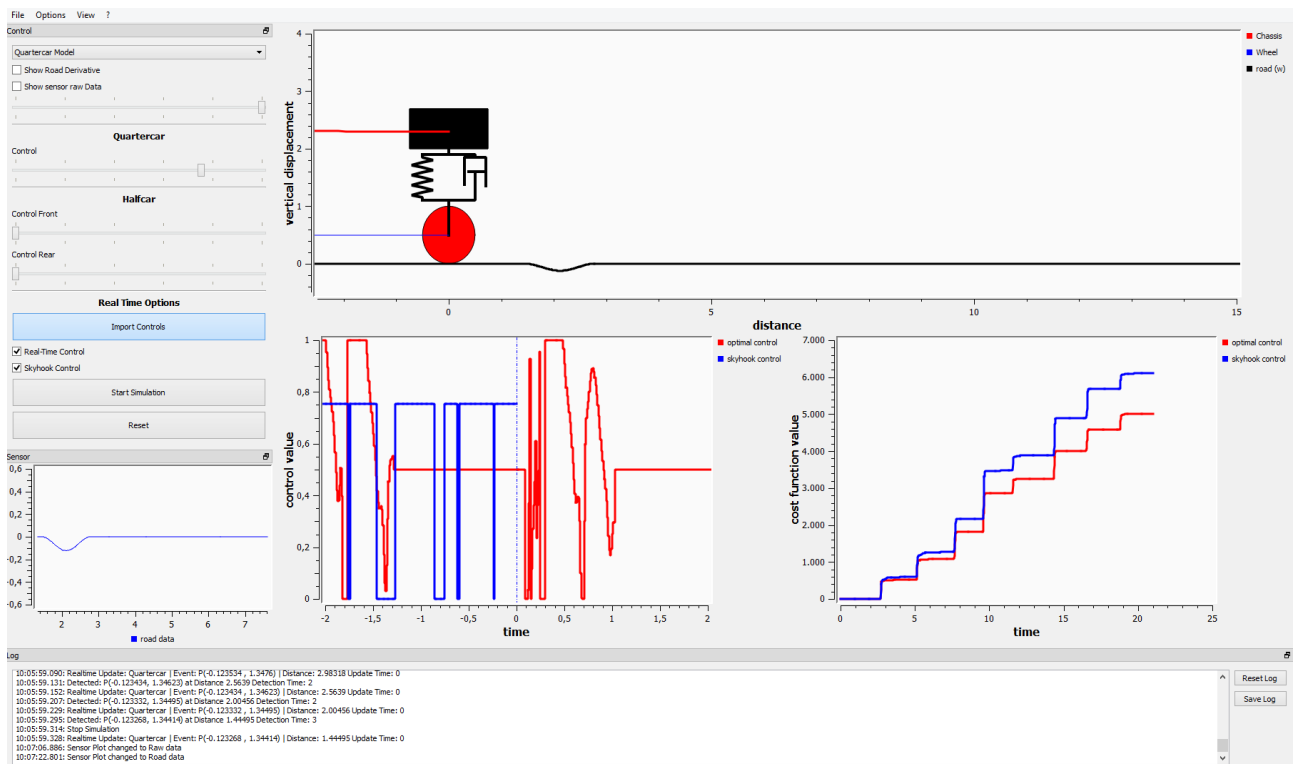


Abbildung 5.22: Nutzeroberfläche der Simulationssoftware sensUp

lich die Rechenzeiten zur Laufzeit betrachtet, da das Erstellen der Referenzsteuerungen und Sensitivitäten und auch die Bestimmung der Support-Vektor-Maschine nur einmalig vor Inbetriebnahme durchgeführt werden muss und die Ergebnisse der Berechnungen gespeichert und zum Beginn der Steuerung wieder geladen werden können.

Die in der Matlab-Implementierung gemessenen Rechenzeiten der Multi-Class-SVM-Erkennung belaufen sich auf einen Wert von maximal 10ms. Die Implementierung der Objekterkennung mittels SQP-Verfahren hat eine Rechenzeit von ebenfalls etwa 10ms und die Suche und Berechnung der anzuwendenden Steuerung mittels Sensitivitätsupdate liegt bei unter einer Millisekunde. Damit kommt die gesamte Rechenzeit pro Sensordatensatz auf einen Wert von rund 20ms, was bei einer Updaterate von 50Hz der zur Verfügung stehenden Zeit entspricht. Mit etwas Anpassungsaufwand an spezielle Hardware sollte es möglich sein, die Berechnungszeit noch deutlich zu reduzieren, so dass auch höhere Updateraten möglich sind bzw. ein Zeitpuffer zur Verfügung steht.

Mit diesem Ergebnis ist gezeigt, dass es mit Hilfe von Sensitivitätsupdates, einer proaktiven Fahrbahnvermessung und einer Parametrisierung singulärer Fahrbahnereignisse die Möglichkeit besteht, eine echtzeitfähige optimale Steuerung für ein proaktives Fahrwerk zu realisieren. Eine genaue Untersuchung, welche Ereignisse im realen Straßenverkehr auftreten, wie diese parametrisiert werden können und welche Fahrzeugparameter in die Optimierung aufgenommen werden müssen, ist nicht Teil dieser Arbeit, öffnet jedoch ein weites Feld an weitere Ansatzpunkte, die untersucht werden können. Im Bereich der Sensorik und Objekterkennung mit Hilfe von Support-Vektor-Maschinen oder anderen Identifizierungsmethoden steht ebenfalls ein weitreichendes Forschungsthema offen.

# Kapitel 6

## Impulsive Systeme als Riemann-Stieltjes-Integral

### 6.1 Motivation

Neben der in den vorangegangenen Kapiteln erläuterten Betrachtung der echtzeitfähigen Steuerung mittels Sensitivitätsupdates, ist ein weiteres Ziel dieser Arbeit die Formulierung und Untersuchung einer Problemklasse zur geschlossenen Darstellung des kontaktbehafteten Modells der vertikalen Fahrzeugdynamik. Die daraus resultierende Problemklasse ist nicht auf die Fahrzeugindustrie limitiert, jedoch werden die Beispiele das Thema aufgreifen, um eine die gesamte Arbeit umfassende Rahmenthematik zu bieten. Warum eine Betrachtung dieser Erweiterung nicht nur aus mathematischer Sicht interessant ist, soll die folgende Motivation kurz verdeutlichen.

#### 6.1.1 Kontaktverlust

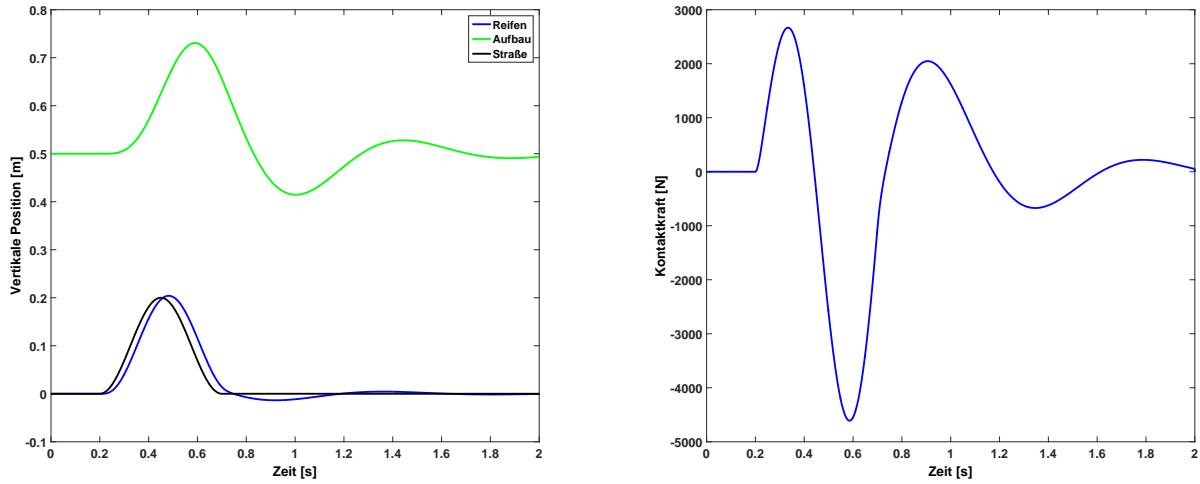
Betrachtet wird eine Überfahrt eines der in Kapitel 5.2.1 definierten singulären Ereignisse. In Abbildung 6.1 ist dies exemplarisch für eine Schwellenüberfahrt dargestellt. Es wird deutlich, dass die Trajektorie des Aufbaus und des Reifens zwar eine zu erwartende Bewegung vollführen, jedoch nach Überquerung des Scheitelpunkts der Schwelle eine betragsmäßig große negative Kontaktkraft auftritt. Noch deutlicher zeigt sich dieser Effekt beim Überfahren einer negativen Stufe. Der Grund für diesen Fehler liegt an der Modellierung des Reifen-Fahrbahn-Kontakts, welcher mit Hilfe der in Kapitel 3.1.2 erläuterten Elemente durch zweiseitige Bindungen approximiert wird. Vernachlässigt man Adhäsionskräfte, so ist es in der Realität jedoch nicht möglich, dass auf den Reifen eine in negativer  $z$ -Richtung gerichtete Kraft von der Straße wirkt. Außerdem kann bei einem vorherrschenden Abstand zwischen Reifen und Straße keine Kraft auf den Reifen wirken. Werden diese Einschränkungen zusammen mit der gegebenen Voraussetzung, dass sich der Reifen stets oberhalb der Fahrbahn befindet kombiniert, so kann dies für den eindimensionalen Fall geschrieben werden als

$$F_{w\rho} \geq 0, \quad (\text{Positivität der Kraft}), \quad (6.1a)$$

$$x_w - x_\rho \geq 0, \quad (\text{Reifen oberhalb der Fahrbahn}), \quad (6.1b)$$

$$F_{w\rho}(x_w - x_\rho) = 0, \quad (\text{Kontaktkraft nur bei Berührung}). \quad (6.1c)$$

In Gleichung (6.1c) wird die Komplementarität des Problems als Signorini-Kontakt-Bedingung ausgedrückt, vgl. [Signorini, 1959]. So kann eine positive Kraft lediglich wirken, wenn der Abstand zwischen



(a) Positionsverlauf

(b) Kraftverlauf

Abbildung 6.1: Klassisches Viertelfahrzeugmodell bei einer Schwellenüberfahrt

Rad und Straße Null ist, ansonsten muss sie verschwinden. Zusätzlich zu dem hier dargestellten Komplementaritätsproblem ist es nötig, eine Beziehung zwischen dem kinematischen Zustand vor und nach dem Kontakt herzustellen. Die Gleichungen (6.1a) - (6.1c) liefern dafür noch keine Aussage.

### 6.1.2 Hüpfender Ball

Ein einfaches Beispiel stellt ein vertikal fallen gelassener Ball dar, der den Boden berührt und wieder abspringt. Betrachtet man den Ball als Massenpunkt ohne räumliche Ausdehnung, der die Komplementaritätsbedingungen erfüllen muss, so folgt daraus lediglich, dass eine Kraft wirken muss, die verhindert, dass sich der Körper durch den Boden hindurch bewegt. Wie groß diese Kraft jedoch tatsächlich ist, ist nicht definiert. Betrachtet man die Differentialgleichung des fallenden Balls mit Masse  $m$

$$\ddot{z} = -mg + f,$$

der zum Zeitpunkt  $\tau$  auf den Boden  $z(\tau) = 0$  mit einer Geschwindigkeit  $\dot{z}(\tau) = v_0 < 0$  fällt, so wird schnell ersichtlich, dass eine Kraftübertragung immer eine Verletzung der Komplementaritätsbedingung zur Folge hat. Für eine sich stetig ändernde Geschwindigkeit, wie es die Lösung der Differentialgleichung ist, gilt

$$\forall f \in \mathbb{R} \exists \varepsilon, \text{ s.d. } \dot{z}(t) < 0 \forall t \in [\tau, \tau + \varepsilon],$$

woraus

$$z(t) = z(\tau) + \int_{\tau}^t \dot{z}(\sigma) d\sigma < 0 \quad \forall t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$$

folgt. Dieses Beispiel zeigt, dass bereits für den einfachen Fall eines Massenpunkts eine Formulierung mittels Kraftübertragung an ihre Grenzen stößt.

Für eine genauere Betrachtung muss die Kontaktphase detaillierter untersucht werden, was beispielsweise in den Arbeiten [Pfeiffer und Glocker, 2008] und [Brogliato, 1999] demonstriert wird. Die einfachste Möglichkeit den Kontakt zu modellieren besteht im so genannten *Newtonschen Stoßgesetz*. Mit



Hilfe eines *Restitutionskoeffizienten*  $\epsilon$  wird das Verhältnis der Geschwindigkeit vor und nach dem Stoß angegeben

$$\epsilon = -\frac{\dot{x}(\tau^+)}{\dot{x}(\tau^-)}, \quad \text{mit} \quad \dot{x}(\tau^-) = \lim_{t \nearrow \tau} \dot{x}(t), \quad \dot{x}(\tau^+) = \lim_{t \searrow \tau} \dot{x}(t).$$

Diese Beziehung liefert eine unstetige Geschwindigkeit, allerdings eine Trajektorie, die die Komplementaritätsbedingung nicht verletzt.

## 6.2 Impulsive Systeme

Die in den Gleichungen (6.1a) - (6.1c) eingeführte Problemklasse wird als Mehrkörpersystem mit *unilateralen Beschränkungen* bezeichnet, vgl. [Pfeiffer und Glocker, 2008, Brogliato, 1999]. Der Begriff unilateral bezeichnet dabei eine einseitig wirkende Bindung bzw. Beschränkung, siehe [Dudenredaktion, 2006], welche durch die Ungleichungsrestriktion (6.1b) beschrieben wird. Das Auftreten dieser Beschränkungen erschwert die Berechnung einer Trajektorie des Mehrkörpersystems deutlich, da eine einfache Vorwärtsintegration mit Hilfe eines Differentialgleichungslösers nicht mehr möglich ist. Es muss in jedem Zeitschritt überprüft werden, ob die unilaterale Beschränkung aktiv ist oder nicht und dementsprechend ändert sich die Systemdynamik.

### 6.2.1 Formulierung unilateraler Bindungen

In diesem Kapitel wird die in Kapitel 6.1 beschriebene Problemstellung konkretisiert und allgemein definiert. Dafür wird zuerst die Definition eines unilateral beschränkten Systems benötigt, vgl. [Brogliato, 1999].

#### Definition 6.1: Unilateral beschränktes System

Gegeben sei ein Mehrkörpersystem, das durch verallgemeinerte Koordinaten  $q \in \mathbb{R}^n$  beschrieben wird. Seien  $g_i(q) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , glatte Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1 im Zustandsraum des Systems, s.d.  $\nabla g_i(q) \neq 0$  in den relevanten Regionen gilt. Dann definiert die Ungleichung  $g(q) \geq 0$  einen Unterraum des Zustandsraumes  $\Phi = \{q \mid g(q) \geq 0\} = \bigcap_{i=1}^m \{q \mid g_i(q) \geq 0\}$ , auf den der Bewegungsraum des Systems eingeschränkt wird.

Es ist hier nicht notwendig, dass die Anzahl der Beschränkungen  $m$  kleiner als  $n$  ist. Die holonomen Beschränkungen  $g_i$  können zusätzlich zur aktuellen Systemkonfiguration  $q$  auch von der Zeit  $t$  abhängen. Dies ist beispielsweise bei sich bewegenden Hindernissen notwendig.

#### Definition 6.2: Aktive unilaterale Beschränkungen

Gegeben sei ein Mehrkörpersystem mit verallgemeinerten Koordinaten  $q \in \mathbb{R}^n$  sowie unilaterale Beschränkungen  $g_i(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Die Menge der aktiven Beschränkungen  $I_A(q)$  wird definiert als

$$I_A(q) = \{i \mid g_i(q) = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

**Bemerkung 6.3: Normalenvektoren der Beschränkungen**

Die Normalenvektoren

$$\nabla g_i(q), \quad i = 1, \dots, m,$$

der Beschränkungen zeigen bei dieser Definition ( $g(q) \geq 0$ ) aus den Beschränkungen heraus bzw. in den zulässigen Zustandsraum hinein. Wird die Beschränkung mit  $g(q) \leq 0$  definiert, zeigt auch der Normalenvektor in die entgegengesetzte Richtung. Dies ist unter anderem bei der Berechnung der Kontaktreaktionen wichtig.

Im folgenden Beispiel werden die Eigenschaften noch einmal kurz dargestellt.

**Beispiel 6.4: unilateral Beschränktes Gebiet**

Betrachtet wird der Zustandsraum  $q = [x, y] \in \mathbb{R}^2$ . Gegeben sind die unilateralen Beschränkungen

$$g_1(q) = x, \quad g_2(q) = 2 - y, \quad g_3(q) = y + 1 - \cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right), \quad g_4(q) = 1 - (x - 3)^2 - (y - 1)^2.$$

Das durch diese Beschränkungen definierte Gebiet ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Es bildet einen abgeschlossenen zulässigen Zustandsraum  $\Phi = \{q \mid g(q) \geq 0\}$ . Der Gradient von  $g(q)$  besitzt folgende Gestalt

$$\nabla_q g(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{2}{3}\pi \sin(\frac{2}{3}\pi x) & 1 \\ -2(x - 3) & -2(y - 1) \end{pmatrix}.$$

Die Normalenvektoren der Kontaktflächen ergeben sich in Abhängigkeit des Kontaktpunkts somit zu

$$\eta_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_3(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\pi \sin(\frac{2}{3}\pi x) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_4(x, y) = \begin{pmatrix} -2x + 6 \\ -2y + 2 \end{pmatrix}.$$

Diese sind ebenfalls in Abbildung 6.2 exemplarisch eingezeichnet.

In Abbildung 6.2 wird leicht ersichtlich, dass Ecken, wie sie in den Punkten  $(0, 0)$  und  $(0, 2)$  auftreten, Probleme verursachen können. Werden räumlich ausgedehnte Körper betrachtet, so kann selbst bei glatten Beschränkungen der Fall auftreten, dass zwei Beschränkungen gleichzeitig aktiv werden. Wie dies behandelt werden kann, wird beispielsweise in [Stewart, 2000, Pfeiffer und Glocker, 2008] beschrieben. Einspringende Ecken, auch wenn in diesem Beispiel keine vorhanden sind, nehmen bei der Gradientenbestimmung eine Sonderrolle ein. Hier können die zulässigen Richtungen mit Hilfe des Subdifferentials dargestellt werden, siehe [Fetecau et al., 2003, Glocker, 2004]. In dieser Arbeit wird auf diese Fälle nicht weiter eingegangen und es wird angenommen, dass keine singulären Punkte der Beschränkungen auftreten bzw. diese nicht als Kollisionen auftreten.

Eng verbunden mit unilateral beschränkten Systemen ist das von Giuseppe Fichera nach seinem Doktorvater Signorini benannte Signorini-Problem [Signorini, 1959, Fichera, 1970, Abadie, 2000, Anitescu und Potra, 2002]. Es formuliert die in den Gleichungen (6.1a) - (6.1c) postulierten notwendigen Eigenschaften eines Kontaktproblems.

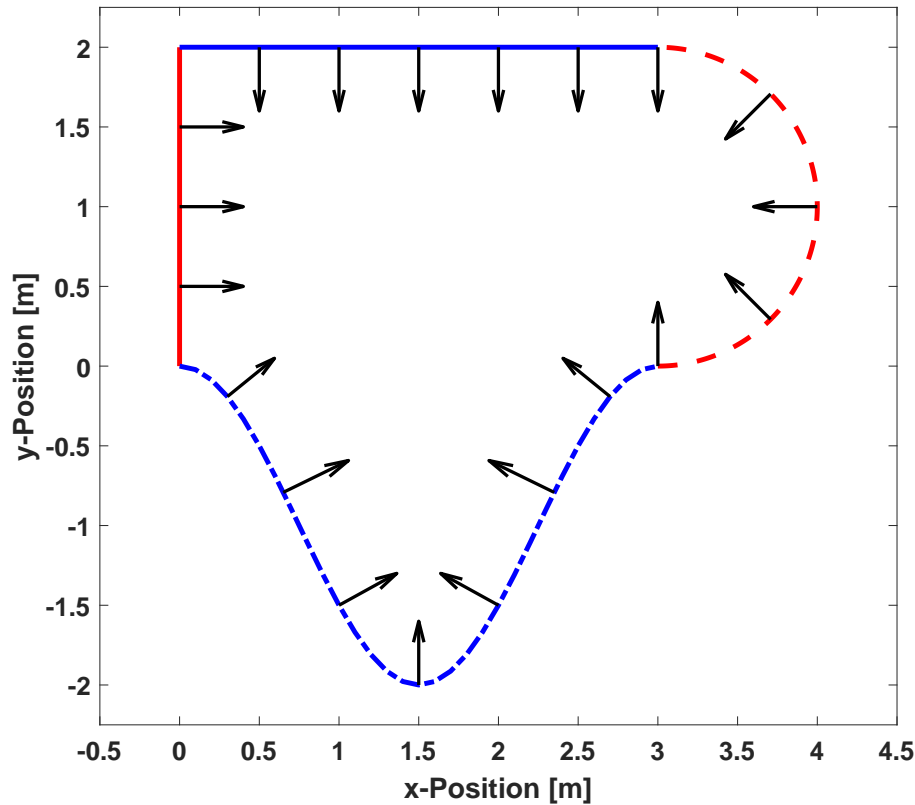


Abbildung 6.2: Darstellung des in Beispiel 6.4 definierten beschränkten Gebiets

### Definition 6.5: Signorini-Problem

Gegeben seien ein mechanisches Mehrkörpersystem mit verallgemeinerten Koordinaten  $q \in \mathbb{R}^n$ , sowie unilaterale Beschränkungen  $g(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für jede Beschränkung  $i = 1, \dots, m$ :

1. Unilaterale Beschränkung:

$$g_i(q) \geq 0$$

2. In aktiven Beschränkungen treten keine Adhäsionskräfte auf:

$$g_i(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i \geq 0$$

3. Wenn kein Kontakt vorhanden ist, ist die Kontaktkraft Null:

$$g_i(q) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0$$

Diese drei Bedingungen sind äquivalent zur Komplementaritätsbedingung

$$g_i(q) \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad g_i(q)\lambda_i = 0$$

Diese Definition ist eine Anpassung der klassischen Signorini-Bedingungen an die vorliegende Problematik. Ursprünglich wurden zwei Körper  $K_i$  und  $K_j$  betrachtet, die beispielsweise durch abgeschlossene

Mengen des  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  gegeben seien. Die Abstandsfunktion ist hier wie folgt definiert

$$g(K_i, K_j) := \min(\|x - y\|), \quad \text{mit } x \in K_i, y \in K_j,$$

und bezeichnet den minimalen Abstand der beiden Körper, wie er in Abbildung 6.3 dargestellt ist. Für Körper mit komplexer Gestalt, ist bereits die Bestimmung des Abstands eine nicht-triviale Aufgabe.

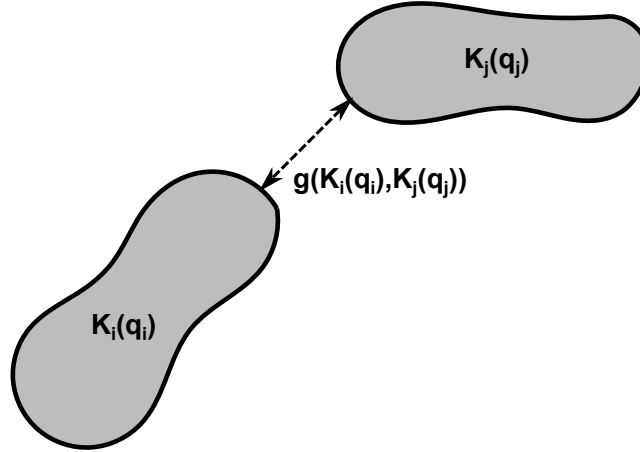


Abbildung 6.3: Allgemeine Darstellung zweier Körper mit Abstandsfunktion  $g(K_i, K_j)$

### 6.2.2 Restitutionsgesetze

Es existieren diverse Formulierungen der Kontaktmechanik, besonders wenn Reibeffekte betrachtet werden. Hier sollen einige Formulierungen kurz dargestellt werden. Aufgrund der unzähligen Veröffentlichungen zu diesem Thema ist diese Darstellung nicht vollständig und stellt lediglich einen Auszug möglicher Methoden dar.

Grundsätzlich haben die Formulierungen das Ziel, den Zustand miteinander kollidierender Körper, bzw. eines Körpers mit einer Zustandsbeschränkung, nach einem Kontakt zu bestimmen. Eine solche Abbildung wird als *Restitutionsgesetz* bezeichnet, siehe [Abadie, 2000, Brogliato, 1999].

#### Definition 6.6: Restitutionsgesetz

Gegeben sei ein Mehrkörpersystem mit verallgemeinerten Koordinaten  $q \in \mathbb{R}^n$  und verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ . Ein Restitutionsgesetz oder Stoßgesetz bezeichnet eine Abbildung  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , für die gilt:

$$\forall i \in I_A(q^-) \text{ mit } \nabla g_i(q^-)^\top \dot{q}^- \leq 0 \text{ folgt } \nabla g_i(q^+)^\top \mathcal{R}(\dot{q}^-) \geq 0.$$

Dabei gilt aufgrund der Stetigkeit der verallgemeinerten Koordinaten  $q^- = q^+$ .

Hier wird vorausgesetzt, dass das Restitutionsgesetz keinen Einfluss auf die verallgemeinerten Koordinaten  $q$  hat und lediglich die Geschwindigkeiten unstetig sein können. Diese Annahme ist für einen impulsiven Stoß als erfüllt vorausgesetzt. Ein so definiertes Restitutionsgesetz liefert eine Trajektorie, die das zulässige Gebiet  $\Phi$  nicht verlässt, da die Geschwindigkeit nach dem Stoß so gerichtet ist, dass sie in das zulässige Gebiet zeigt. Einige weitere Eigenschaften müssen laut [Chatterjee, 1997] bei der Formulierung eines Restitutionsgesetzes beachtet werden.

- Einhaltung physikalischer und mechanischer Gesetze (Energieerhaltung/-dissipation, Unabhängigkeit vom gewählten Koordinatensystem, ...)
- Gültigkeit für beliebig geformte Körper
- Konsistenz mit anderen bekannten Gesetzen, wie beispielsweise Reibungsgesetzen
- Korrekte Resultate für einfache Objekte, wie die Kollision eines Balls mit einer Wand
- Wenige Parameter und eine mögliche Einfachheit der Berechnung
- Physikalisch interpretierbare Parameter

Nun werden ein paar klassische Restitutionsgesetze vorgestellt.

### Newton'sches Stoßgesetz

Die erste und wohl bekannteste Darstellung eines Kontaktgesetzes liefert das Newton'sche Kontaktgesetz, siehe [Stronge, 1990, Glocker, 2004]. Es basiert auf der kinematischen Betrachtung des Zustands zum Kontaktzeitpunkt. Das zugehörige Restitutionsgesetz benötigt die relative Normalengeschwindigkeit zweier Körper  $v_{r,n}(\tau^-)$  zur Zeit vor dem Kontakt. Die Geschwindigkeit direkt nach einem Kontakt bestimmt sich aus dem konstanten *Restitutionskoeffizienten*  $\epsilon_n \in [0, 1]$

$$\epsilon_n = -\frac{v_{1,n}(\tau^+) - v_{2,n}(\tau^+)}{v_{1,n}(\tau^-) - v_{2,n}(\tau^-)} = \frac{v_{r,n}(\tau^+)}{v_{r,n}(\tau^-)}.$$

Für  $\epsilon_n = 0$  folgt  $v_{r,n}(\tau^+) = 0$ , was den völlig plastischen Fall beschreibt, und für  $\epsilon_n = 1$  gilt  $v_{r,n}(\tau^+) = -v_{r,n}(\tau^-)$ , also den elastischen Stoß modelliert. Die Bestimmung des Restitutionskoeffizienten stellt keine triviale Aufgabe dar und erfordert entweder eine exaktere Modellierung zur Generierung von Referenztrajektorien oder Messungen der Kontaktdynamik, welche dann durch Anpassung von  $\epsilon_n$  angenähert werden müssen. Jedoch hängt der Koeffizient jeweils von beiden in Kontakt tretenden Körpern ab und ist somit stets neu anzupassen.

Ein Problem des Newton'schen Stoßgesetzes unter Mitbetrachtung von Reibung ist, dass es bei einem nicht-zentralen Stoß zu einem Energieanstieg kommen kann, der gegen die postulierten notwendigen Eigenschaften eines Stoßgesetzes verstößt, vgl. [Stronge, 1990, Stronge, 1991, Abadie, 2000].

### Poissonsches Stoßgesetz

Das Poissonsche Stoßgesetz teilt den Stoß in zwei Phasen auf. Die erste beschreibt die Kompression bis zum Erreichen einer Relativgeschwindigkeit  $v_{r,n} = 0$  und die zweite die Expansion bis sich die Körper wieder getrennt haben. Nun wird der übertragene Impuls der Kompressionsphase  $P_{c,n}$  mit dem Impuls bis zur Trennung der Körper  $p_{e,n}$  ins Verhältnis gesetzt und dafür ein Restitutionskoeffizient angegeben.

$$\epsilon_n = \frac{p_{e,n}}{p_{c,n}}.$$

Der gesamte übertragene Impuls in Normalenrichtung ist damit  $p_n = p_{c,n} + p_{e,n} = (1 + \epsilon_n)p_{c,n}$ .

Unter gewissen Umständen kann es auch hier zu Problemen mit dem energetischen Gleichgewicht kommen. Jedoch dissipiert das Poissonsche Gesetz mehr Energie als erlaubt für den Fall eines nicht-zentralen Kontakts mit  $\epsilon = 1$ , vgl. [Stronge, 1991].

### Stoßgesetz von Stronge

Dieses Stoßgesetz betrachtet den Kontakt auf einer energetischen Ebene, vgl. [Stronge, 1990, Stronge, 1991]. Es wird die Arbeit, der Kompressionsphase mit der Arbeit der Expansionsphase ins Verhältnis gesetzt. Das daraus resultierende Gesetz lautet

$$\epsilon_n = -\frac{\int_{t_0}^{t_t} F_n(t)v_{r,n}(t)dt}{\int_{t_b}^{t_0} F_n(t)v_{r,n}(t)dt},$$

wobei  $F_n(t)$  die in Normalenrichtung wirkende Kraft darstellt,  $t_b$  den Zeitpunkt der ersten Berührung,  $t_0$  das Ende der Kompressionsphase und  $t_t$  den Zeitpunkt der Trennung beider Körper.

Laut [Stronge, 1991] ist dieses Stoßgesetz auch unter Berücksichtigung von Reibung energetisch konsistent.

### Reibungsbehaftete Kontakte

In den betrachteten Stoßgesetzen wurden lediglich die Geschwindigkeiten in Normalenrichtung  $v_{r,n}$  betrachtet. Tritt zusätzlich noch eine Tangentialgeschwindigkeit  $v_{r,t}$  auf, so muss auch das Auftreten möglicher Reibungseffekte mit berücksichtigt werden. Grundsätzlich ist Reibung eine der aktuellen Relativbewegung entgegengesetzt wirkende Kraft, die die Bewegung hemmt. Die Coulombsche Reibung für kontinuierlichen Kontakt besagt, dass für die Reibkraft gilt

$$F_t \leq \mu F_n, \quad \text{mit} \quad \frac{\langle F_t, v_{r,t} \rangle}{\|F_t\| \|v_{r,t}\|} = -1.$$

Hier ist zu beachten, dass für ein dreidimensionales Problem  $F_t, v_{r,t} \in \mathbb{R}^2$  gilt.

Da für den impulsiven Kontakt eine Formulierung in Abhängigkeit auftretender Kräfte nur bedingt praktikabel ist, wird hier für einen Stoß mit trockener Reibung das *Amontons-Coulomb Reibgesetz* auf Impulsebene verwendet, vgl. [Brogliato, 1999]. Dabei wird der in Tangentialrichtung wirkende Impuls  $P_t$  durch den Normalenimpuls  $P_n$  und einen Reibkoeffizienten  $\mu$  beschränkt.

$$\|P_t\| \leq \mu \|P_n\|$$

Die Wahl des Unterraums, in dem  $P_t$  liegen darf, ist dabei derart beschränkt, dass gilt

$$FC_0(q) = \{P_t \mid \langle P_t, P_n \rangle = 0\},$$

d.h. der tangentiale Impuls muss orthogonal auf den Normalenimpuls stehen, da ansonsten die Reibung für Adhäsionseffekte verwendet werden könnte. Zusammen mit dem Impuls in Normalenrichtung lässt sich der so genannte Reibkegel definieren, vgl. [Anitescu et al., 1999, Stewart, 2000].

$$FC(q) := \{P_t + P_n \mid P_t \in FC_0(q), \|P_t\| \leq \mu \|P_n\|\}$$

Die Abhängigkeit von den verallgemeinerten Koordinaten  $q$  resultiert aus der Abhängigkeit der Flächennormalen des Kontakts  $n(q)$  vom aktuellen Zustand.

Um den Impuls in Tangentialrichtung zu bestimmen, wird das *Prinzip der maximalen Dissipation* herangezogen. Es besagt, dass der tatsächliche Reibimpuls derjenige ist, der die maximale Dissipationsrate  $-v_{r,t}P_t$  verursacht. In mathematischer Formulierung lautet dies

$$\min_{P_t \in FC(q)} v_{r,t}^+ P_t,$$

wobei  $v_{r,t}^+ = v_{r,t}(\tau^+)$  gilt.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde die Formulierung auf einen einzelnen Kontakt beschränkt. Zur Verallgemeinerung auf mehrere Kontakte müssen die Reibkegel der Einzelkontakte zusammengefasst werden und dann die maximale Dissipation aller Kontakte bestimmt werden. In [Stewart und Trinkle, 1996] und [Anitescu und Potra, 1997] werden Probleme dieser Art als lösbar Komplementaritätsprobleme dargestellt, vgl. Kapitel 6.2.3.

### Energetische Restitutionskoeffizienten

Eine weitere Möglichkeit der Kontaktmodellierung wird in [Bowling et al., 2009] vorgestellt, auf die in Kapitel 6.6 näher eingegangen wird, da dies auch die in den numerischen Beispielen verwendete Formulierung darstellt. Sie betrachtet ähnlich wie Stronges Stoßgesetz die kinetische Energie des kollidierenden Körpers und nutzt das Prinzip der maximalen Dissipation zur Bestimmung des Zustands nach dem Stoß. Dabei werden Gleit- und Haftbedingungen in Tangentialrichtung detaillierter modelliert.

### Kontakte in der Kontinuumsmechanik

Eine in dieser Arbeit nicht näher betrachtete Modellierung resultiert aus der Kontinuumsmechanik. Dort werden die für elastische und plastische Verformungen benötigten Energien der Einzelkörper betrachtet, wobei die Komplementaritätsbedingungen aus (6.1c) nun für die Ränder der Körper gelten müssen, vgl. [Kikuchi und Oden, 1988]. Für die numerische Berechnung wird hier auf Finite-Element-Methoden, siehe [Braess, 2013], zurückgegriffen und die Bedingungen bzgl. der Knotenpunkte formuliert. Um das Problem zu vereinfachen können verschiedene Ansätze verwendet werden, wie es beispielsweise in [Kimmerle und Moritz, 2014] durchgeführt wurde, bei denen die Kontaktkraft zwischen einem Reifen und der Fahrbahn über das Hertzsche-Gesetz approximiert wurde.

### 6.2.3 Modellierungsmethoden des impulsiven Systems

Nachdem nun exemplarisch einige Restitutionsgesetze vorgestellt wurden, werden in diesem Abschnitt mögliche Modellierungsmethoden des impulsiven mechanischen Mehrkörpersystems erläutert.

#### Hybride Systeme

Eine Darstellung mit Hilfe von hybriden Systemen bietet eine intuitive Modellierung, vgl. [Lunze, 2002, Branicky, 1998, Azhmyakov et al., 2008, Attia et al., 2009, Lygeros et al., 2003]. Ein hybrides System soll hier folgender an die konkrete Problemstellung angepassten Definition genügen.

**Definition 6.7: Hybrides System**

Ein hybrides System ist ein Tupel

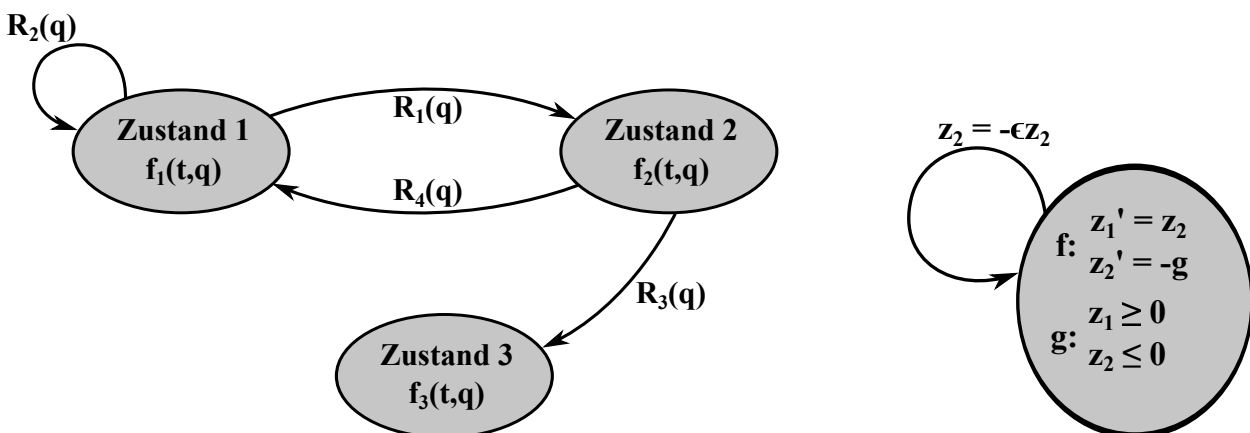
$$\mathcal{H} = (\mathcal{D}, \mathcal{Q}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{R}),$$

mit

- $\mathcal{D}$  - Menge der diskreten Zustände,
- $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{2n}$  - Menge der kontinuierlichen Zustände,
- $\mathcal{F} = \{f_i : \mathbb{R} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}\}_{i \in \mathcal{D}}$  - Systemdynamik der diskreten Zustände,
- $\mathcal{G} = \{g_i : \mathcal{D} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1, \dots, m}$  - Sprungbedingungen,
- $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_i : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{D} \times \mathcal{Q}\}_{i=1, \dots, m}$  - Sprungfunktionen der Beschränkungen.

In dieser Definition ist die Dimension des Zustandsraums  $\mathcal{Q}$  für mechanische Mehrkörpersysteme mit verallgemeinerten Koordinaten  $q \in \mathbb{R}^n$  und verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  angepasst. Mit Hilfe hybrider Systeme können viele reale Anwendungen modelliert werden, bei denen unterschiedliche Systemdynamiken mit diskreten Übergangspunkten zwischen den Zuständen auftreten.

Als Beispiel sei hier der Start einer Rakete genannt, bei dem in verschiedenen Phasen einzelne Raketenstufen abgesprengt werden. Die Systemdynamik ändert sich nach jeder Trennung aufgrund des Gewichtsverlusts und aufgrund der möglicherweise anderen Antriebsart, wofür die unterschiedlichen Systemdynamiken  $f_i$  verwendet werden können. Zusätzlich treten beim Absprengen, was hier als diskreter Schaltpunkt angenommen wird, impulsive Kräfte auf die Rakete auf, die die Geschwindigkeit innerhalb einer sehr kurzen Zeit im Vergleich zum gesamten Startvorgang verändern. Diese Übergänge können durch die Sprungfunktionen  $\mathcal{R}_i$  eingebaut werden.



(a) Beispiel einer grafischen Darstellung eines hybriden Systems  $\mathcal{H}$  mit drei Zuständen und vier Sprungfunktionen

(b) Beispiel eines hüpfenden Balles als hybrides System

Abbildung 6.4: Darstellung zweier hybrider Systeme



Die Systemstruktur eines hybriden Systems kann durch ein grafisches Zustandsmodell mit gerichteten Kanten dargestellt werden. In Abbildung 6.4a ist dies an einem einfachen System dargestellt. Die Sprungfunktionen  $\mathcal{R}_i(q)$  werden immer aufgerufen, wenn die entsprechende Sprungbedingung  $g_i(d, q) < 0$  erfüllt ist.

Für den in dieser Arbeit betrachteten Fall vereinfacht sich das zu verwendende hybride System derart, dass lediglich ein diskreter Zustand benötigt wird. Die Sprungbedingungen sind die unilateralen Beschränkungen und die Sprungfunktionen werden durch das jeweils verwendete Restitutionsgesetz ersetzt. Ein einfaches Beispiel des hüpfenden Balls ist in Abbildung 6.4b dargestellt.

Die Formulierung, dass die rechte Seite einer Differentialgleichung ein Element aus einer Menge möglicher, zustandsabhängiger rechter Seiten ist, wird häufig auch als *Differentialinklusion* bezeichnet. Für den Fall, dass auch noch impulsive Zustandsprünge vorliegen spricht man auch von *Differentialinklusionen mit Impulsen*, vgl. [Aubin et al., 2002, Randelovic, 2000]. In [Baier et al., 2012] werden Runge-Kutta-Methoden für den Fall, dass nur eine Systemdynamik auftritt vorgestellt.

Implementierungen numerischer Lösungsverfahren hybrider Systeme existieren bspw. für MATLAB, vgl. [Sanfelice et al., 2013]. Bei der Simulation der Trajektorien ist es hier besonders wichtig die Schaltzeitpunkte gut aufzulösen, um eine exakte Approximation des realen Prozesses zu erhalten. Bei der Betrachtung der in Definition 6.1 eingeführten Beschränkungen müssen hierfür die Vorzeichenwechsel der  $g_i(q), i = 1, \dots, m$ , betrachtet werden.

### Maß-Differentialgleichungen

Eine kontinuierliche Formulierung des Problems resultiert aus dem so genannten *Sweeping-Prozess* aus [Moreau, 1985, Moreau, 1988, Kunze und Marques, 2000]. Ein Sweeping-Prozess wird definiert mit Hilfe einer mengenwertigen, zeitabhängigen Funktion  $C(t)$ , die für alle  $t$  konvex ist und einem Massenpunkt  $x(t)$ , der von  $C(t)$  mitgerissen bzw. mitgefegt (engl. to sweep) wird, d.h. für den gilt  $x(t) \in C(t), \forall t$ . Befindet sich  $x(t)$  im Inneren von  $C(t)$ , so gilt  $x'(t) = 0$  und wenn  $x(t)$  auf dem Rand von  $C(t)$  ist, gilt  $x'(t) \in NC(x(t))$ , wobei  $NC(x(t))$  der Normalenkegel von  $C(t)$  an der Stelle  $x(t)$  ist. Daraus resultiert, dass sowohl die Position als auch die Geschwindigkeit Unstetigkeiten aufweisen können. Ein einfaches Beispiel dieses Prozesses stellt eine Münze dar, die auf dem Tisch liegt und sich innerhalb eines größeren Ringes befindet. Bewegt man den Ring, so bewegt sich die Münze mit, sobald sie den Ring berührt. Nimmt man an, dass keinerlei Verformung der Teilkörper auftritt, muss für eine bis zum Zeitpunkt  $\tau^-$  ruhende Münze gelten  $x'(\tau^+) = v_n(x(\tau^-))$ , wobei  $v_n(x(\tau^-))$  die Geschwindigkeit des Randes in Normalenrichtung im Punkt  $x(\tau^-)$  darstellt. Die Geschwindigkeit springt also von Null auf einen Wert ungleich Null, so dass die Münze im Ring bleibt. Würde zusätzlich die Position des Ringes ein unstetiges Verhalten aufweisen, können auch Unstetigkeiten in der Position der Münze auftreten.

Die in diesem Problem auftretenden Sprünge der Geschwindigkeit bzw. der Position können allgemein mit Hilfe einer Maß-Differentialgleichung formuliert werden, vgl. [Schmaedeke, 1965, Brogliato, 1999].

**Definition 6.8: Maß-Differentialgleichung**

Seien  $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine gegebene Abbildung und  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion beschränkter Variation, die rechtsseitig auf dem Zeitintervall  $I$  stetig ist, sowie  $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine stetige  $n \times m$  Matrix, die auf  $I$  definiert ist. Sei  $(t_0, x_0) \in S$  mit  $t_0 \in I$ . Die Differentialgleichung

$$Dx = f(t, x) + G(t)Du, \quad (6.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (6.3)$$

heißt *Maß-Differentialgleichung*. Dabei bezeichnet  $D$  den Ableitungsoperator im distributionellen Sinn.

Auf die exakte Definition und die Eigenschaften von Funktionen beschränkter Variation wird in 6.3.1 näher eingegangen. Eine Lösung von (6.2) zum Anfangswert (6.3) wird definiert als:

**Definition 6.9: Lösung einer Maß-Differentialgleichung**

Eine Lösung der Maß-Differentialgleichung (6.2)-(6.3) in  $S$  ist ein  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  von beschränkter Variation mit  $t_0 \in I$ , s.d.  $x(t)$  rechtsseitig stetig ist für alle  $t \in I$ . Zusätzlich gilt:

- $(t, x(t)) \in S, \quad \forall t \in I.$
- $x(t_0) = x_0.$
- Die distributionelle Ableitung von  $x(t)$  auf  $I$  ist  $f(t, x) + G(t)Du.$

Die Existenz und Stabilität der Lösungen von Maß-Differentialgleichungen wird beispielsweise in [Das und Sharma, 1972] betrachtet. In [Schmaedeke, 1965] werden Annahmen an die Funktion  $f$  getroffen, unter denen eine eindeutige Lösung von Gleichung (6.2) existiert. Die hier vorgestellte Modellierung hängt eng mit dem Verfahren zusammen, das in Kapitel 6.3.2 vorgestellt wird. Dort wird auch die Äquivalenz beider Formulierungen deutlich.

**Komplementaritätsprobleme**

Eine weitere Modellierungsmethode ist eine Formulierung mit Hilfe von Komplementaritätsproblemen. Der Begriff der Komplementaritätsbedingung ist bereits aus der Signorini-Bedingung in Definition 6.5 bekannt. Da diese allein das impulsive System nicht vollständig beschreiben kann, müssen die Bedingungen des Restitutionsgesetzes umformuliert werden, damit diese ebenfalls mit Hilfe von Komplementaritätsbedingungen einbezogen werden können. Siehe dazu [Anitescu und Potra, 1997, Stewart, 2000] und die Referenzen darin.

Für ein mechanisches Mehrkörpersystem mit verallgemeinerten Koordinaten  $q$ , verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}$ , Kopplungskräften  $k(q, \dot{q})$ , der potentiellen Energie  $V(q)$ , Kontaktkräften  $\lambda$ , Reibkräften  $\beta$  und Beschränkungen  $g_i(q) \geq 0, i = 1, \dots, m$ , sehen die Bewegungsgleichungen folgendermaßen aus:

$$M(q) \frac{d\dot{q}}{dt} = \left( \sum_{i=1}^m n^{(i)}(q) \lambda^{(i)} + D^{(i)}(q) \beta^{(i)} \right) - \nabla V(q) + k(q, \dot{q}). \quad (6.4)$$

Hier bezeichnet  $n^{(i)}(q) = \nabla g_i(q)$  die Normalenrichtung der  $i$ -ten Beschränkung und  $D^{(i)}(q)$  eine Matrix von Basisvektoren des Unterraums  $FC_0(q)$ , also eine Darstellung der möglichen Richtungen, in denen die Reibkraft wirken kann.

Die Komplementaritätsbedingung für die Normalkraft lautet, wie bereits in Definition 6.5 erläutert,

$$0 \leq \lambda^{(i)} \perp g_i(q) \geq 0. \quad (6.5)$$

Aus dem maximalen Dissipationsprinzip für dieses Problem

$$\min_{\beta} (\dot{q}^+)^{\top} D(q)^{(i)} \beta^{(i)}, \quad u.d.Nb. \quad \|\beta^{(i)}\| \leq \mu^{(i)} \lambda^{(i)}, \quad (6.6)$$

ergibt sich aufgrund der Konvexität von  $\|\beta\|$  und der Linearität der Zielfunktion ein konvexes Optimierungsproblem, das für  $\lambda^{(i)} > 0$  wegen  $\mu^{(i)} > 0$  die Slater-Bedingung erfüllt. Somit existiert ein Lagrangemultiplikator  $\sigma^{(i)}$ , s.d. die KKT-Bedingungen für nicht differenzierbare Funktionen erfüllt sind, siehe [Clarke, 2013].

$$0 \in D^{(i)}(q)^{\top} \dot{q}^+ + \sigma^{(i)} \partial(\|\beta^{(i)}\|), \quad (6.7)$$

$$0 \leq \sigma^{(i)} \perp \mu^{(i)} \lambda^{(i)} - \|\beta^{(i)}\| \geq 0. \quad (6.8)$$

Hier bezeichnet  $\partial(\cdot)$  das Subdifferential. Im Fall  $\lambda^{(i)} = 0$  gilt aufgrund der Nebenbedingung aus Gleichung (6.6)  $\beta^{(i)} = 0$ . Da  $\partial\|0\|$  eine Umgebung des Ursprungs enthält, existiert für alle  $\dot{q}^+$  und  $D^{(i)}(q)$  ein  $\sigma^{(i)} \geq 0$  mit  $0 \in D^{(i)}(q)^{\top} \dot{q}^+ + \sigma^{(i)} \partial(\|0\|)$ , weswegen (6.7)-(6.8) auch in diesem Fall erfüllt sind. Hier wurde zur Vereinfachung auf eine allgemeine Darstellung des Reibungsgesetzes, wie es in [Stewart, 2000] vorgestellt wird, verzichtet und die Coulombsche Reibung aus Kapitel 6.2.2 auf Kräfteebene verwendet. Damit bilden (6.7)-(6.8) eine zusätzliche Komplementaritätsbedingung, die für das unilaterale Problem erfüllt sein muss.

Das Restitutionsgesetz in Normalenrichtung wird hier durch das Newtonsche Stoßgesetz modelliert und liefert eine weitere Komplementaritätsbedingung der Form

$$0 \leq \lambda^{(i)} \perp n^{(i)}(q)^{\top} \left( \dot{q}^+ + \epsilon^{(i)} \dot{q}^- \right) \geq 0, \quad (6.9)$$

wobei  $\epsilon^{(i)}$  der Restitutionskoeffizient der  $i$ -ten Beschränkung ist.

Das gesamte unilateral beschränkte System wird somit durch die Dynamik (6.4) mit den Komplementaritätsproblemen (6.5), (6.7)-(6.8) und (6.9) beschrieben. In [Stewart, 2000] und [Anitescu und Potra, 1997] werden Zeitschrittverfahren vorgestellt, die diese Formulierung zur Vorwärtsintegration verwenden. Dabei wird Lemke's Methode zur Lösung der linearen Komplementaritätsprobleme herangezogen, siehe [Cottle et al., 2009, Chen und Mangasarian, 1995]. Alternativ können auch nichtglatte Newton-Verfahren verwendet werden, was in [Carfagno, 2008] vorgestellt wird.

Diese Vorstellung unterschiedlicher Modellierungsmethoden ist aufgrund der vielen unterschiedlichen Varianten nicht vollständig. Für einen weitergehenden Einblick sei auf [Brogliato, 1999] und die darin referenzierten Arbeiten verwiesen.

## 6.3 Theorie

Nachdem nun einige Modellierungsmethoden vorgestellt wurden, werden in diesem Kapitel die für die verwendete Formulierung benötigten Grundlagen eingeführt. Es werden insbesondere Funktionen beschränkter Variation und Riemann-Stieltjes-Integrale genauer betrachtet.

### 6.3.1 Funktionen beschränkter Variation

Die folgenden Definitionen und Sätze orientieren sich an den Arbeiten [Natanson, 1981, Fichtenholz, 1974, Carothers, 2000] und [Folland, 1984]. Betrachtet werden Funktionen, die eine abzählbare Menge an Unstetigkeitsstellen aufweisen können.

#### Definition 6.10: Funktionen beschränkter Variation

Gegeben seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , sowie die Funktion  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Dann heißt

$$V_a^b(\alpha) := \sup_{\Delta} \left\{ \sum_{k=1}^m |\alpha(y_k) - \alpha(y_{k-1})| : a = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b \right\} \quad (6.10)$$

die totale Variation von  $\alpha$  über  $[a, b]$ . Dabei bezeichnet

$$\Delta : a = y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = b$$

eine beliebige Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$ .

2. Falls  $V_a^b(\alpha) < \infty$  ist, so heißt  $\alpha$  *Funktion beschränkter Variation*  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ .

3. Die Menge aller Funktionen beschränkter Variation auf  $[a, b]$  wird mit

$$BV([a, b], \mathbb{R}) := \{ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid V_a^b(\alpha) < \infty \}$$

bezeichnet.

Beispiele für Funktionen aus  $BV$  sind:

- Monoton steigende beschränkte Funktionen
- Differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung
- Auf  $[a, b]$  Lipschitz-stetige Funktionen

Wenn  $[a, b] = \mathbb{R}$  gilt, wird der zugehörige Funktionenraum mit  $BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bezeichnet. Außerdem kann jede Funktion  $\alpha \in BV([a, b]; \mathbb{R})$  so fortgesetzt werden, dass  $\alpha \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  gilt, indem man  $\alpha(t) = \alpha(a)$  für  $t < a$  und  $\alpha(t) = \alpha(b)$  für  $t > b$  setzt. Umgekehrt ist jedes  $\alpha \in BV(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  auch in  $BV([a, b], \mathbb{R})$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ .

#### Satz 6.11: Eigenschaften von Funktionen beschränkter Variation

Gegeben sei ein Intervall  $[a, b], a < b$ , mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , zwei Funktionen beschränkter Variation  $\alpha, \beta \in BV([a, b], \mathbb{R})$ , sowie Skalare  $c, d \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

1.  $\alpha$  ist beschränkt, d.h.  $\alpha(t) \leq M, \forall t \in [a, b]$ .

2. Linearkombinationen sind wieder von beschränkter Variation,  $c\alpha + d\beta \in BV([a, b], \mathbb{R})$ .
3. Produkte sind wieder von beschränkter Variation,  $\alpha \cdot \beta \in BV([a, b], \mathbb{R})$ .
4. Sei  $\beta(x) \geq \sigma > 0$ , dann ist auch der Quotient von beschränkter Variation,  $\frac{\alpha}{\beta} \in BV([a, b], \mathbb{R})$ .
5. Für  $a < \xi < b$  gilt  $\alpha \in BV([a, \xi], \mathbb{R})$  und  $\alpha \in BV([\xi, b], \mathbb{R})$ .
6. Sei  $x \in [a, b]$ , dann ist die Funktion  $g(x) = V_a^x(\alpha)$  eine monoton wachsende, beschränkte Funktion.

Obwohl in Definition 6.10 keine Voraussetzungen über Stetigkeit oder Differenzierbarkeit getroffen werden, liefern die folgenden Sätze Aussagen über die Regularität der Funktionenklasse.

#### Satz 6.12: Abzählbare Unstetigkeitsstellen

Sei  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ . Dann ist die Menge aller Unstetigkeiten höchstens abzählbar. Die Zeitpunkte der Unstetigkeiten seien mit  $\tau_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  bezeichnet. Außerdem existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte in allen  $\tau_k$

$$\lim_{t \nearrow \tau_k} \alpha(t) = \alpha(\tau_k^-), \quad \lim_{t \searrow \tau_k} \alpha(t) = \alpha(\tau_k^+).$$

Zusätzlich besitzen Funktionen beschränkter Variation noch die folgenden Differenzierbarkeitseigenschaften.

#### Satz 6.13: Fast überall differenzierbar

Sei  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ , dann existiert die Ableitung  $\alpha'(t)$  fast überall in  $[a, b]$  und sie ist endlich und integrierbar.

Im Folgenden werden auch vektorwertige Funktionen beschränkter Variation betrachtet. Diese erfüllen Definition 3 komponentenweise und der zugehörige Raum sei definiert als

$$BV([a, b], \mathbb{R}^n) := \{\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in BV([a, b], \mathbb{R}), i = 1, \dots, n\}.$$

Es ist auch möglich die Funktionen beschränkter Variation auf dem  $\mathbb{R}^n$  durch eine vektorwertige Definition der totalen Variation in (6.10) zu definieren. Es kann jedoch gezeigt werden, dass die beiden Formulierungen äquivalent sind.

Später wird sich herausstellen, dass es für die benötigten Funktionen beschränkter Variation genügt, sich auf einen Unterraum zu beschränken und zwar auf die  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$  für die gilt  $\alpha(a) = 0$  und die eine rechtsseitige Stetigkeit erfüllen. Der zugehörige Raum wird folgendermaßen definiert.

#### Definition 6.14: Normalisierte Funktionen beschränkter Variation

Sei  $a, b \in \mathbb{R}$ , mit  $a < b$ . Mit

$$NBV([a, b], \mathbb{R}) := \{\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R}) \mid \alpha \text{ rechtsseitig stetig, } \alpha(a) = 0\}$$

wird der Raum der *normalisierten Funktionen beschränkter Variation* auf  $[a, b]$  bezeichnet.

Es kann zu jedem  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$  ein  $\alpha^* \in NBV([a, b], \mathbb{R})$  gefunden werden mittels

$$\alpha^*(t) := \alpha(t^+) - \alpha(a^+).$$

Entgegen der häufig verwendeten Formulierung, dass die normalisierten Funktionen beschränkter Variation bei  $t = 0$  den Wert 0 annehmen, werden sie hier mit 0 am Intervallbeginn definiert. Für die später betrachteten Probleme stellt dies keinen Unterschied dar, da das Argument  $t$  stets die Prozesszeit beschreibt und die betrachteten Prozesse bei  $t = 0$  starten werden.

Im folgenden Satz wird eine Norm auf  $BV([a, b], \mathbb{R})$  und  $NBV([a, b], \mathbb{R})$  definiert.

**Satz 6.15: Raum der Funktionen beschränkter Variation ist Banachraum**

1. Sei  $[a, b]$  ein nichtleeres Intervall und  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ . Weiter sei die Norm

$$\|\alpha\|_{TV[a,b]} = V_a^b(\alpha) + |\alpha(a^+)|$$

auf  $BV([a, b], \mathbb{R})$  definiert. Dann ist  $BV([a, b], \mathbb{R})$  ein Banachraum.

2. Sei zusätzlich  $\alpha$  rechtsseitig stetig und  $\alpha(a) = 0$ , d.h.  $\alpha \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ , dann ist  $NBV([a, b], \mathbb{R})$  mit der Norm

$$\|\alpha\|_{TV[a,b]} = V_a^b(\alpha)$$

ein Banachraum.

3. Für  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$  gilt die Norm

$$\|\alpha\|_{TV[a,b]} = \sum_{i=1}^n V_a^b(\alpha_i) + \|\alpha_i(a^+)\|_2.$$

Für ein differenzierbares  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$  erhält man folgendes Korrolar:

**Korrolar 6.16: TV-Norm für differenzierbare Funktionen**

Gegeben sei ein nichtleeres Intervall  $[a, b]$  und eine differenzierbare Funktion  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\|\alpha\|_{TV[a,b]} = \int_a^b |\alpha'(\tau)| \, d\tau.$$

Für ein vektorwertiges  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$  gilt

$$\|\alpha\|_{TV[a,b]} = \int_a^b \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau.$$

Die Klasse der absolut stetigen Funktionen aus Definition 3.7 spielt auch hier eine wichtige Rolle im Bezug auf die folgende Zerlegung von Funktionen beschränkter Variation. Aus deren Definition folgt direkt, dass  $\alpha$ , wenn es absolut stetig ist, auch gleichmäßig stetig ist. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes lässt sich außerdem zeigen, dass, wenn  $\alpha \in C^1([a, b])$  und  $\alpha'(t) < M, \forall t \in [a, b]$ , d.h. wenn  $\alpha$  eine beschränkte Ableitung besitzt,  $\alpha \in AC([a, b])$  gilt.

**Satz 6.17: Absolut stetige Funktionen sind von beschränkter Variation**

Sei  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine absolut stetige Funktion, dann gilt  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ .

Nun werden noch wichtige Zerlegungseigenschaften für Funktionen beschränkter Variation vorgestellt.

**Satz 6.18: Zerlegung in stetige Funktion und Sprungfunktion**

Sei  $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$  gegeben. Dann gilt

$$\alpha(t) = \alpha_{BV, \text{stetig}}(t) + \alpha_{\text{sprung}}(t)$$

wobei  $\alpha_{BV, \text{stetig}}(t)$  eine stetige Funktion beschränkter Variation und  $\alpha_{\text{sprung}}(t)$  die Sprungfunktion von  $\alpha(t)$  ist.

Die Sprungfunktion lässt sich definieren als

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{sprung}}(a) &= 0 \\ \alpha_{\text{sprung}}(t) &= [\alpha(a^+) - \alpha(a)] + \sum_{\tau_k < t} [\alpha(\tau_k^+) - \alpha(\tau_k^-)] + [\alpha(t) - \alpha(t^-)], \end{aligned}$$

wobei die Zeitpunkte  $\tau_k$  die Unstetigkeitsstellen von  $\alpha(t)$  sind, vgl. Satz 6.12.

**Satz 6.19: Zerlegung einer stetigen Funktion beschränkter Variation**

Es sei eine stetige Funktion  $\alpha_{BV, \text{stetig}}(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$  gegeben. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung der Form

$$\alpha_{BV, \text{stetig}}(t) = \alpha_{AC}(t) + \alpha_{\text{sing}}(t),$$

wobei  $\alpha_{AC}(t) \in AC([a, b], \mathbb{R})$  und  $\alpha_{\text{sing}}(t)$  eine singuläre Funktion ist. Dabei heißt eine Funktion singulär, falls sie nicht konstant, stetig, von beschränkter Variation und ihre Ableitung fast überall gleich Null ist.

Fasst man die Aussagen von Satz 6.18 und Satz 6.19 zusammen erhält man:

**Korollar 6.20: Dekomposition von Funktionen beschränkter Variation**

Sei  $\alpha(t) \in BV([a, b], \mathbb{R})$ . Dann kann  $\alpha(t)$  dargestellt werden in der Form

$$\alpha(t) = \alpha_{AC}(t) + \alpha_{\text{sing}}(t) + \alpha_{\text{sprung}}(t).$$

**6.3.2 Das Riemann-Stieltjes-Integral**

Ein weiteres mathematisches Element, das im Folgenden eine wichtige Rolle einnehmen wird, ist das Stieltjes-Integral, das wie folgt definiert ist:

**Definition 6.21: Das Stieltjes-Integral**

Seien  $f$  und  $\alpha$  endliche Funktionen auf  $[a, b]$  und  $\Delta := a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  mit  $\lambda = \max_{i=0..n-1} (t_{i+1} - t_i)$ . Falls

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)], \quad \text{mit } t_i \leq \xi_i \leq t_{i+1},$$

für  $\lambda \rightarrow 0$  gegen einen endlichen Grenzwert  $I$  konvergiert, der unabhängig von  $\Delta$  und  $\xi_i$  ist, so heißt dieser Grenzwert Stieltjes-Integral von  $f$  bezüglich  $\alpha$ , in Zeichen

$$I = \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau). \quad (6.11)$$

Falls das Integral (6.11) existiert, sagt man auch,  $f$  ist auf  $[a, b]$  bezüglich  $\alpha$  integrierbar.

Der wesentliche Unterschied zwischen einem Riemann- und einem Stieltjes-Integral ist, dass die zu integrierende Funktion am Auswertungspunkt nicht mit der Schrittweite  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  multipliziert wird, sondern mit der Differenz einer zweiten Funktion auf dem Intervall. Das Riemann-Integral ist ein Spezialfall des Stieltjes-Integrals für  $\alpha(x) = x$ ,  $x \in [a, b]$ .

Einige Eigenschaften des Stieltjes-Integrals werden im folgenden Satz zusammengefasst.

### Satz 6.22: Eigenschaften des Stieltjes-Integrals

Unter der Voraussetzung der Existenz der auftretenden Integrale gelten folgende Eigenschaften:

1.  $\int_a^b d\alpha(\tau) = \alpha(b) - \alpha(a)$
2.  $\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = 0$ , falls  $\alpha$  konstant
3.  $\int_a^b [f_1(\tau) + f_2(\tau)] d\alpha(\tau) = \int_a^b f_1(\tau) d\alpha(\tau) + \int_a^b f_2(\tau) d\alpha(\tau)$
4.  $\int_a^b f(\tau) d[\alpha_1(\tau) + \alpha_2(\tau)] = \int_a^b f(\tau) d\alpha_1(\tau) + \int_a^b f(\tau) d\alpha_2(\tau)$
5.  $\int_a^b kf(\tau) d(l \cdot \alpha(\tau)) = kl \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau)$ , ( $k, l = \text{const}$ )
6. Falls  $a < c < b$  und alle Integrale existieren, gilt

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = \int_a^c f(\tau) d\alpha(\tau) + \int_c^b f(\tau) d\alpha(\tau).$$

7. Ist  $f$  stetig und  $\alpha \in AC([a, b], \mathbb{R})$ , so gilt

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = \int_a^b f(\tau) \alpha'(\tau) d\tau. \quad (6.12)$$

Die Formel der partiellen Integration lässt sich für Stieltjes-Integrale folgendermaßen formulieren:

### Satz 6.23: Partielle Integration

Existiert eines der Integrale  $\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau)$  oder  $\int_a^b \alpha(\tau) df(\tau)$ , so existiert auch das andere und es gilt

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(\tau) df(\tau).$$

Der folgende Satz liefert eine Existenzbedingung des Stieltjes-Integrals, die für den in dieser Arbeit betrachteten Fall stets zutreffen wird.



**Satz 6.24: Existenz für Funktionen beschränkter Variation**

Ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ , so existiert das Riemann-Stieltjes-Integral.

Ein weiterer Spezialfall, der für die betrachteten impulsiven Systeme relevant ist, lautet:

**Satz 6.25: Stieltjes-Integration bzgl. einer Sprungfunktion**

Es sei  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und  $\alpha$  eine Sprungfunktion mit Sprungstellen  $\tau_k \in (a, b), k = 1, \dots, m$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) &= f(a)[\alpha(a^+) - \alpha(a)] + \sum_{k=1}^m f(\tau_k)[\alpha(\tau_k^+) - \alpha(\tau_k^-)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(b^-)] \\ &= a_0 f(a) + \sum_{k=1}^m a_k f(\tau_k) + a_{m+1} f(b), \end{aligned}$$

mit  $a_0 = \alpha(a^+) - \alpha(a)$ ,  $a_k = \alpha(\tau_k^+) - \alpha(\tau_k^-), k = 1, \dots, m$ , und  $a_{m+1} = \alpha(b) - \alpha(b^-)$ .

Mit Hilfe der normalisierten Funktionen beschränkter Variation kann man immer erreichen, dass der Integrator am Intervallbeginn den Wert Null annimmt. Im nächsten Satz wird die Äquivalenz der Integrale dargestellt.

**Satz 6.26: Äquivalenter Integrator**

Es sei  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ . Es sei  $\alpha^* \in NBV([a, b], \mathbb{R})$  die zu  $\alpha$  gehörende normalisierte Funktion beschränkter Variation. Dann gilt

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = \int_a^b f(\tau) d\alpha^*(\tau).$$

Es existiert auch eine Variante des Mittelwertsatzes für Stieltjes-Integrale mit monoton wachsenden Integratoren  $\alpha$ , aus der der Mittelwertsatz für Riemann-Integrale für  $\alpha(x) = x$  direkt folgt.

**Satz 6.27: Mittelwertsatz**

Es sei  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und  $\alpha$  monoton wachsend. Dann gilt

$$\int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) = f(\xi)[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

mit  $a \leq \xi \leq b$ .

Zur Abschätzung des Integrals dient der nächste Satz. Da eine stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall eine Majorante besitzt, ist der Ausdruck der rechten Seite der Ungleichung endlich.

**Satz 6.28: Beschränktheit**

Ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ , so gilt

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\alpha(\tau) \right| \leq \max_{a \leq \tau \leq b} |f(\tau)| \cdot V_a^b(\alpha).$$

Für impulsive Systeme ist es sinnvoll eine Summe aus Riemann- und Stieltjes-Integral zu betrachten. Die kontinuierliche Dynamik des Systems kann mit Hilfe des Riemann-Integrals modelliert werden und die Sprünge aufgrund der Beschränkungen und Restitutionsgesetze mit einem Stieltjes-Integral. Die folgende Definition führt dies nun für die betrachteten Funktionenklassen formal ein.

**Definition 6.29: Riemann-Stieltjes-Integral**

Sei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ ,  $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$  und  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ , dann heißt das Integral

$$I = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(\tau)d\alpha(\tau)$$

*Riemann-Stieltjes-Integral* von  $f$  und  $g$  bzgl.  $\alpha$ .

**Definition 6.30: Riemann-Stieltjes-Integralgleichung**

Gegeben seien  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$  und  $x_a \in \mathbb{R}$ . Die Gleichung

$$x(t) = x_a + \int_a^t f(t)dt + \int_a^t g(\tau)d\alpha(\tau) \quad (6.13)$$

wird als *Riemann-Stieltjes-Integralgleichung* bezeichnet.

Analog lässt sich so auch eine vektorwertige Integralgleichung definieren für  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ ,  $f, g \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ .

**Satz 6.31: Eigenschaften der Lösung der Integralgleichung**

Für eine Lösung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  von (6.13) gilt:

- $x \in BV([a, b], \mathbb{R})$ .

Gilt zusätzlich  $\alpha \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ , so gilt außerdem

- $x$  ist rechtsseitig stetig,
- $x - x_a \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ .

Der folgende Satz liefert den Zusammenhang zwischen der Formulierung mit Riemann-Stieltjes-Integralen und der in Definition 6.8 vorgestellten Maß-Differentialgleichung. Der Beweis ist in [Schmaedeke, 1965] zu finden.

**Satz 6.32: Äquivalenz der Integral- und Maß-Darstellung**

Eine Lösung  $x(t)$  der Riemann-Stieltjes-Integralgleichung (6.13) ist eine Lösung der dazugehörigen Maß-Differentialgleichung (6.2).

Die zugehörige Maß-Differentialgleichung hat mit den Bezeichnungen aus (6.13) folgende Gestalt:

$$Dx(t) = f(t) + g(t)D\alpha,$$

wobei  $D$  hier die distributionelle Ableitung bezeichnet.

Aufbauend auf dieser zusammengesetzten Formel zweier Integrale wird im nächsten Kapitel die Formulierung der impulsiven Systeme vorgestellt.

## 6.4 Allgemeine Systemgleichung impulsiver Systeme

Nach der Einführung der notwendigen theoretischen Hintergrundinformationen wird nun die Formulierung eines Systems mit unilateralen Beschränkungen vorgestellt. Dazu wird sich im Folgenden auf den allgemeinen Zustand  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  bezogen. Für mechanische Mehrkörpersysteme mit verallgemeinerten Koordinaten  $q(t) \in \mathbb{R}^l$  und Geschwindigkeiten  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^l$  wird

$$x(t) := \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2l} = \mathbb{R}^n \quad (6.14)$$

definiert. Dies ist äquivalent zum Umschreiben des Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung.

Es wird noch eine Notation eingeführt, die eine Zustandsabhängigkeit der Funktion  $\alpha$  bezüglich einer Funktion beschränkter Variation ermöglicht. Dabei seien unilaterale Beschränkungen nach Definition 6.1 mit zugehörigem Restitutionsgesetz gegeben. Für die betrachteten mechanischen Mehrkörpersysteme kann damit eine Funktion  $d(x(\tau_k))$  für jeden aktiven Kontakt angegeben werden.

### Definition 6.33: Sprungfunktion $\alpha$ für mechanische Mehrkörpersysteme

Gegeben sei ein mechanisches Mehrkörpersystem mit verallgemeinerten Koordinaten  $q(t) \in \mathbb{R}^l$  und Geschwindigkeiten  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^l$  und ein Zeitintervall  $[a, b]$ . Weiter sei  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ , ein Restitutionsgesetz nach Definition 6.6 und  $x \in BV([a, b], \mathbb{R}^{2l})$ . Dann wird die Sprungfunktion  $d(x(t))$  definiert als

$$d(x(t)) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{q}(t^-) + \mathcal{R}(\dot{q}(t^-)) \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Damit lässt sich  $\alpha$  folgendermaßen schreiben.

### Definition 6.34: Zustandsabhängige Funktion beschränkter Variation

Sei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ ,  $t \in [a, b]$  und  $x \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ . Sei  $\alpha : BV([a, b], \mathbb{R}^n) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert als

$$\alpha[x](t) := \sum_{\substack{\tau_k \leq t \\ A(x(\tau_k)) \neq \emptyset}} d(x(\tau_k)), \quad (6.16)$$

wobei  $\alpha_i[x](\cdot) \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt. Dann wird  $\alpha$  als zustandsabhängige Funktion beschränkter Variation bezeichnet.

Die Menge  $A$  stellt eine Menge der aktiven Restriktionen für  $x(t)$  dar. Für den betrachteten Fall mit  $x$  aus Gleichung (6.14) gilt  $A(x(t)) = I_A(q(t))$  mit  $I_A$  aus Definition 6.2. Die Definition von  $\alpha$  spiegelt ihren Charakter als Sprungfunktion wieder, vgl. Satz 6.25.

### Bemerkung 6.35: Abhängigkeit von $\alpha$ von der Zustandstrajektorie

Bei einem zustandsabhängigen  $\alpha$  nach Definition 6.34 ist die Auswertung der rechten Seite zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t \in [a, b]$  nicht direkt möglich. Aufgrund der Abhängigkeit

des Funktionswerts  $\alpha[x](t)$  von der gesamten Trajektorie von  $x$  auf dem Intervall  $[a, t]$  müssen immer alle Sprungpunkte vor dem Zeitpunkt  $t$  bestimmt werden.

In der numerischen Betrachtung spielt der absolute Funktionswert von  $\alpha$  jedoch keine Rolle. Für die lokale Entwicklung von  $x$  im Intervall  $[\tau_k - \varepsilon, \tau_k + \varepsilon]$  mit  $\varepsilon > 0$ , ist es wichtig, die Sprunghöhe im Punkt  $\tau_k$  zu kennen.

Damit lässt sich nun die hier benötigte Formulierung eines impulsiven Systems mit Steuerung definieren.

### Definition 6.36: Systemgleichung impulsiver Systeme

Sei  $\alpha[x](t) \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ ,  $F : ([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $G : ([a, b] \times \mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Gesucht wird eine Funktion  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , welche die Integralgleichung

$$x(t) = x_a + \int_a^t F(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \int_a^t G(\tau, x(\tau)) d\alpha[x](\tau),$$

$$x_a = x(a),$$

für  $a \leq t \leq b$  löst. Dies wird als impulsives System mit Steuerung  $u$  bezeichnet.

Für die im Allgemeinen vektorwertigen Integrale ist die Auswertung komponentenweise zu verstehen, d.h. es gilt die Gleichung

$$x_i(t) = x_{a,i} + \int_a^t F_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \sum_{j=1}^n \int_a^t G_{ij}(\tau, x(\tau)) d\alpha_j[x](\tau), \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei  $F(\tau, x(\tau)) = (F_1(\tau, x(\tau)), \dots, F_n(\tau, x(\tau)))^\top$  und  $G(\tau, x(\tau)) = (G_{ij}(\tau, x(\tau)))_{i,j=1,\dots,n}$  gilt.

### Bemerkung 6.37: Impulsives System vs. Impulsive Steuerung

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass sich aufgrund der Problemstellung in Definition 6.36 auf eine Steuerung der kontinuierlichen Dynamik beschränkt wird. In vielen Arbeiten wird genau das gegenteilige Extremum betrachtet und zwar eine impulsive Steuerung für ein ansonsten glattes System, vgl. [Bressan, 1987]. Dies führt auf eine andere Problemklasse, die hier nicht betrachtet wird.

In Definition 6.36 beschreibt  $F(\tau, x(\tau), u(\tau))$  die kontinuierliche Systemdynamik, also die Kopplungs- und Potentialkräfte. Die Funktion  $\alpha$  liefert zusammen mit  $G(\tau, x(\tau))$  die Sprünge bei Kontakt, wobei die Sprunghöhe der möglichen Unstetigkeiten bei einem Kontakt zum Zeitpunkt  $\tau_k$ , vom aktuellen Zustand  $x(\tau_k^-)$  abhängen kann. Dabei müssen  $\alpha$  und  $G$  passend gewählt werden. Es ist möglich die Sprunghöhe in  $G$  zu modellieren und  $\alpha$  die Rolle einer Indikatorfunktion für einen auftretenden Sprung zu überlassen. Alternativ kann in  $\alpha$  sowohl die Erkennung eines notwendigen Sprungs und dessen Dynamik modelliert werden. Dies hat unter anderem zur Folge, dass  $G$  nicht vom Zustand  $x$  abhängt. In den gewählten Beispielen wird sich auf den zweiten Fall beschränkt. Für die betrachtete Problemstellung lässt sich weiter  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  als konstante Matrix definieren. Dies hat den Vorteil, dass die Existenz des Stieltjes-Integrals leicht nachgewiesen werden kann.

Nun stellt sich die Frage nach der Existenz des Stieltjes-Integrals. Nach Satz 6.24 ist dies garantiert, wenn  $G$  stetig und  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$  gilt. Die beschränkte Variation für  $\alpha$  liefern unter entsprechenden Voraussetzungen die folgenden beiden Sätze.

**Satz 6.38: Beschränkte Variation für endlich viele Sprungstellen**

Sei  $\alpha[x](\cdot)$  definiert wie in Definition 6.34 und es existieren im Intervall  $[a, b]$  höchstens  $K \in \mathbb{N}$  Sprungstellen  $\tau_k$ . Ist die Sprungfunktion  $d(x(\tau_k))$  beschränkt für alle  $x(\tau_k), k = 1, \dots, K$ , so gilt  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:** Da lediglich endlich viele Sprungstellen  $\tau_k$  existieren und die Sprunghöhe jeweils durch  $M = \max_{\tau_k} \|d(x(\tau_k))\|$  beschränkt ist, folgt direkt  $V_a^b(\alpha[x]) \leq KM < \infty$ .  $\square$

Für ein impulsives System mit endlich vielen Kontakten ergibt sich die Existenz des Riemann-Integrals für ein bzgl.  $t$  und  $x$  Lipschitzstetiges  $F$  auch für unstetige Zustandstrajektorien. Dafür kann das Integral in die jeweiligen Teilintervalle zwischen Kontakten  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  aufgeteilt werden. Für jedes einzelne Intervall existiert das Riemann-Integral und damit auch die Summe der Teilintervalle.

$$\int_a^t F(\tau, x, u) d\tau = \int_a^{\tau_0} F(\tau, x, u) d\tau + \sum_{k=0}^{K-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F(\tau, x, u) d\tau + \int_{\tau_K}^t F(\tau, x, u) d\tau, \quad \text{mit } K = |\{\tau_k \leq t\}|.$$

Treten unendlich viele Kontakte auf, so müssen zusätzliche Voraussetzungen getroffen werden, dass  $\alpha[x]$  von beschränkter Variation ist.

**Satz 6.39: Beschränkte Variation für abzählbar viele Sprungstellen**

Sei  $\alpha[x](\cdot)$  definiert wie in Definition 6.34 mit  $\|x(a)\| < \infty$  und es existieren im Intervall  $[a, b]$  abzählbar viele Sprungstellen  $\tau_k, k \in \mathbb{N}$ . Gilt zusätzlich

- (a) Es existiert  $\varepsilon \in [0, 1)$ , s.d.  $\|x(\tau_k^+)\| \leq \varepsilon \|x(\tau_k^-)\|$ ,  $\forall \tau_k, k \in \mathbb{N}$ , erfüllt ist,
- (b)  $\|x(\tau_k^+)\| \geq \|x(\tau_{k+1}^-)\|$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\|x(a)\| \geq \|x(\tau_1^-)\|$ ,

so gilt  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:** Mit den Bedingungen (a) und (b) kann die Variation von  $\alpha[x]$  folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} V_a^b(\alpha[x]) &= \sum_{k=1}^{\infty} \|d(x(\tau_k))\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x(\tau_k^+) - x(\tau_k^-)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x(\tau_k^+)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x(\tau_k^-)\| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|x(\tau_k^+)\| + \sum_{k=0}^{\infty} \|x(\tau_{k+1}^-)\| \stackrel{(b)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \|x(\tau_k^+)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x(\tau_k^+)\| + \|x(a)\| \\ &\stackrel{(a)}{\leq} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \|x(\tau_k^-)\| + \|x(a)\| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \|x(a)\| + \|x(a)\| \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \|x(a)\| \\ &\leq \frac{2 \|x(a)\|}{1 - \varepsilon} < \infty \end{aligned}$$

$\square$

Die Bedingungen (a) und (b) liefern ein dissipatives System, da die Norm von  $x$  monoton fällt, wodurch die Reihe der Beträge der Sprunghöhen insgesamt auch beschränkt bleibt.

**Bemerkung 6.40:**  $\alpha[x] \in NBV([a, b], \mathbb{R}^n)$

Wird  $\alpha[x](a) = 0$  definiert und gilt  $A(x(a)) = \emptyset$ , so resultiert daraus  $\alpha[x] \in NBV([a, b], \mathbb{R}^{2n})$ .

**Bemerkung 6.41: Existenz des Integrals für mechanische Mehrkörpersysteme**

Für ein mechanisches Mehrkörpersystem sind die folgenden beiden Fälle hinreichend für die Existenz der zugrunde liegenden Integrale.

- Für ein konservatives System, d.h.  $\|x(t)\|$  ist konstant, dürfen lediglich endlich viele Sprungstellen im Intervall  $[a, b]$  liegen. Dadurch gelten die Voraussetzungen von Satz 6.38.
- Bei einem dissipativen System sind auch abzählbar viele Sprungstellen erlaubt. Die Bedingungen aus Satz 6.39 sind aufgrund der Dissipativität des Restitutionsgesetzes und der Systemdynamik  $F$  zwischen den Kontaktpunkten erfüllt.

**Beispiel Viertelfahrzeug**

Um die abstrakte Formulierung auf das in dieser Arbeit betrachtete Problem anzuwenden, wird nun die Systemgleichung für das Viertelfahrzeugmodell mit Newtonschem Kontaktgesetz vorgestellt. Dabei wird zur einfachen Darstellung die unilaterale Beschränkung mit  $g(z) = z_w \geq 0$  als konstant angenommen. Zusätzlich seien die Massen von Aufbau und Reifen als  $m_b = m_w = 1$  definiert.

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_b \\ z_w \\ \dot{z}_b \\ \dot{z}_w \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \text{Position Aufbau} \\ \text{Position Reifen} \\ \text{Geschwindigkeit Aufbau} \\ \text{Geschwindigkeit Reifen} \end{pmatrix}$$

$$z(t, z_0, u) = z_0 + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \dot{z}_b(\tau) \\ \dot{z}_w(\tau) \\ -g + k_b(z_w - z_b) + u(\dot{z}_w - \dot{z}_b) \\ -g - k_b(z_w - z_b) - u(\dot{z}_w - \dot{z}_b) \end{pmatrix} d\tau + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d\alpha[z(\tau)](\tau),$$

$$\text{mit } \alpha[x](t) = \left( 0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha_4[x](t) \right)^\top,$$

$$\alpha_4[x](t) = \sum_{\tau_k < t} d(\dot{z}_w(\tau_k)) = \sum_{\tau_k < t} -(1 + \varepsilon)\dot{z}_w(\tau_k^-)$$

$$\text{und } \tau_k := \min_{t > \tau_{k-1}} \{t \mid z_w(t^-) \leq 0 \text{ und } \dot{z}_w(t^-) \leq 0\}, \quad k = 1, \dots, K, \quad K \in \mathbb{N}$$

wobei  $\tau_0 = t_0$  gilt.

Hier entspricht  $\varepsilon \in [0, 1]$  der Elastizitätskonstante des Newtonschen Stoßgesetzes. Es gilt bei einem Kontakt

$$\dot{z}_w(t^+) = -\varepsilon\dot{z}_w(t^-).$$

In Abbildung 6.5 ist die Zustandstrajektorie des Aufbaus und die des Reifens für das Viertelfahrzeug dargestellt. Das Hüpfen des Reifens auf der Fahrbahnoberfläche ist, genauso wie das Einfedern der

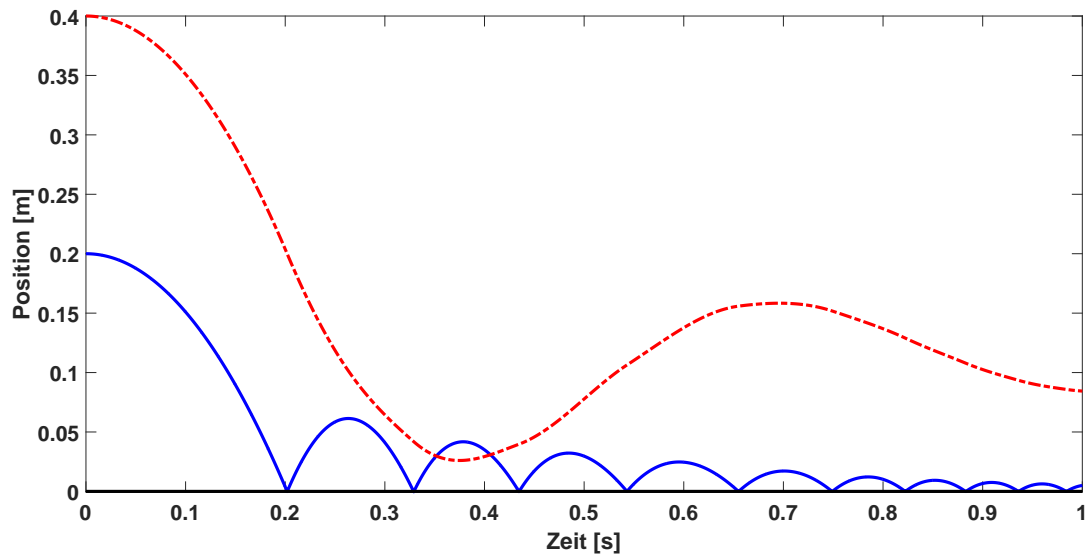


Abbildung 6.5: Position des Aufbaus (gestrichelt) und des Reifens (durchgezogen) dargestellt über der Zeit

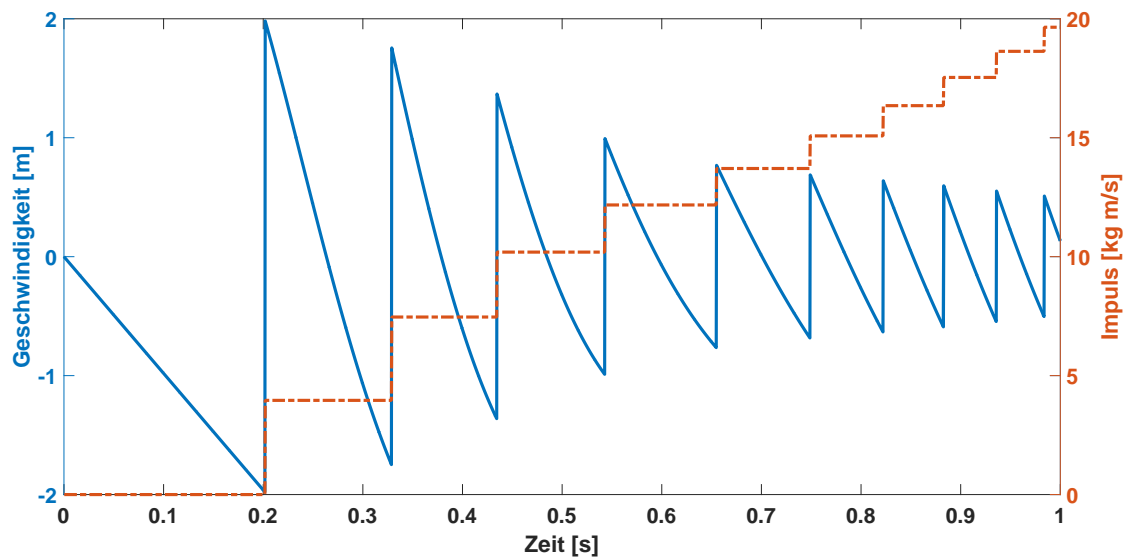


Abbildung 6.6: Geschwindigkeit des Reifens (durchgezogen) und  $\alpha_4$  (gestrichelt) dargestellt über der Zeit

Fahrzeugaufhängung, gut zu erkennen. In Abbildung 6.6 ist die Geschwindigkeit des Reifens  $\dot{z}_w$ , sowie die zeitliche Entwicklung von  $\alpha_4$  übereinander visualisiert. Das Verhalten von  $\alpha$  als Sprungfunktion wird hier gut sichtbar. Bei jedem Kontakt des Reifens mit der Fahrbahn wird ein Impuls übertragen, der eine instantane Veränderung der Geschwindigkeit verursacht. In  $\alpha$  wird der bis zu einem Zeitpunkt  $t$  übertragene Impuls kumuliert.

## 6.5 Diskretisierung - Numerische Quadraturformeln

Nachdem nun die benötigten theoretischen Grundlagen vollständig sind, wird in diesem Kapitel nun ein numerisches Verfahren zur Berechnung der Riemann-Stieltjes-Integrale vorgestellt.

### 6.5.1 Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur für Stieltjes-Integrale

Zuerst werden die geschlossenen Newton-Cotes-Quadraturverfahren für Stieltjes-Integrale erläutert, bevor sie auf Riemann-Stieltjes-Verfahren verallgemeinert werden. Tortorella beschreibt in [Tortorella, 1990] eine Methode, die Newton-Cotes-Quadraturformeln auf Stieltjes-Integrale anzuwenden.

#### Klassische Newton-Cotes-Quadratur

Die klassischen Newton-Cotes-Quadraturformeln basieren auf der Projektion der zu integrierenden Funktion  $f(t)$  auf ein Polynom vom Grad  $n$ . Der Raum der reellen Polynome vom Höchstgrad  $n$  sei hier mit  $\mathcal{Q}_n$  betitelt. Um das Polynom zu bestimmen, werden  $n + 1$  Stützstellen  $t_i, i = 0, \dots, n$ , benötigt, an denen die Funktion  $f$  ausgewertet wird. Betrachtet man das Intervall  $[a, b]$  und ist  $t_0 = a$  und  $t_n = b$ , so spricht man von geschlossenen Newton-Cotes-Regeln. Ist dies nicht der Fall, werden die entstehenden Quadraturformeln offene Newton-Cotes-Regeln genannt. Der Notation von Tortorella folgend, bezeichnet  $P_n(f) \in \mathcal{Q}_n$  die Projektion auf das interpolierende Polynom. Da die Integration eines Polynoms exakt durchgeführt werden kann, gilt

$$Q_n(f) = \int_a^b P_n(f)(t) dt.$$

Dabei steht  $Q_n(y)$  für die Quadratur, also die numerische Integration, des Polynoms vom Höchstgrad  $n$  auf das  $y$  projiziert wird. Die bekanntesten Vertreter der geschlossenen Newton-Cotes-Regeln sind die Trapezregel

$$Q_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \quad (6.17)$$

und die Simpson-Regel

$$Q_2(f) = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (6.18)$$

Um eine Quadraturformel für Stieltjes-Integrale zu erhalten, liefert eine einfache Ersetzung des Terms  $b - a$  durch  $\alpha(b) - \alpha(a)$  zumindest für  $n > 1$  nicht das gewünschte Resultat.

#### Quadraturformeln für Stieltjes-Integrale

Hier werden nun die geschlossenen Newton-Cotes-Formeln für Stieltjes-Integrale vorgestellt. Sie basieren, wie im klassischen Riemann-Fall, ebenfalls auf einer Projektion auf einen Polynomraum  $\mathcal{Q}_n$  vom Höchstgrad  $n$ . Die Projektion wird hier auch mit dem Operator  $P_n$  bezeichnet. Damit kann das Integral approximiert werden durch

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) \approx \int_a^b P_n(f)(t) d\alpha(t).$$

Anwendung der partiellen Integration aus Satz 6.23 liefert

$$\int_a^b P_n(f)(t) d\alpha(t) = P_n(f)(b)\alpha(b) - P_n(f)(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(t) dP_n(f)(t).$$



Da ein Polynom absolut stetig ist, liefert Gleichung (6.12) aus Satz 6.22 und die Interpolationseigenschaft  $P_n(f)(a) = f(a)$ ,  $P_n(f)(b) = f(b)$

$$\int_a^b P_n(f)(t) d\alpha(t) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(t) (P_n(f)(t))' dt.$$

Da  $\alpha(t) (P_n(f)(t))'$  nicht geschlossen integrierbar sein muss, wird hier ein weiteres mal auf den Polynomunterraum projiziert und man erhält die Quadraturformel

$$Q_n^S(f, \alpha) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b P_n(\alpha(P_n(f)))'(t) dt. \quad (6.19)$$

Als Beispiel werden auch hier die Quadraturformeln für  $n = 1$  und  $n = 2$  angegeben. Die Trapezregel ( $n = 1$ ) hat die Gestalt

$$Q_1^S = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2} (f(b) + f(a)),$$

welche im Vergleich zu (6.17) lediglich den oben erwähnten Unterschied in der Auswertung des Integrators besitzt. Bei der Simpsonregel

$$Q_2^S(f, \alpha) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + \frac{f(b) - f(a)}{3} \left( \alpha(a) - 2\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) + \alpha(b) \right) \quad (6.20)$$

wird der Unterschied zu (6.18) sofort ersichtlich. Der erste Summand stimmt mit der Simpsonregel für Riemann-Integrale überein, jedoch kommt noch ein zweiter Term hinzu, der die Auswertung des Integrators  $\alpha$  an den Stützstellen beinhaltet. Der folgende Satz zeigt, dass die hier erhaltenen Formeln auch für den Fall eines Riemann-Integrals gelten.

#### Satz 6.42: Äquivalenz mit Riemann-Integral

Sei  $\alpha(t) = t$ , dann gilt für alle  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  $Q_n(f)$  existiert,  $Q_n(f) = Q_n^S(f, \alpha)$ .

**Beweis:** Betrachtet man in der Quadraturformel (6.19) die Funktionen unter dem Integral wird ersichtlich, dass  $(P_n(f))' \in \mathcal{Q}_{n-1}$  gilt und damit  $\alpha(P_n(f))' \in \mathcal{Q}_n$ . Damit ist die Projektion auf  $\mathcal{Q}_n$  die Identitätsabbildung und es kann mit Hilfe einer partiellen Integration gezeigt werden

$$\begin{aligned} Q_n^S(x, \alpha) &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(t) (P_n(f))'(t) dt \\ &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(b)P_n(f)(b) + \alpha(a)P_n(f)(a) + \int_a^b P_n(f)(t) dt \\ &= \int_a^b P_n(f)(t) dt = Q_n(f). \end{aligned}$$

□

#### Zusammengesetzte Quadraturformeln

Um die Genauigkeit auf einem Intervall zu erhöhen, kann alternativ zur Verwendung einer Quadraturformel höheren Grades eine Unterteilung in  $N$  Subintervalle durchgeführt werden. Das Integral

des gesamten Intervalls berechnet sich damit als Summe der Integrale über den Subintervallen. Diese Methode führt zu den zusammengesetzten Newton-Cotes-Regeln, die hier für die Stieltjes-Integrale notiert wird.

**Definition 6.43: Zusammengesetzte Quadraturformel**

Sei  $N \in \mathbb{N}$  gegeben und  $\mathcal{G}_N = \{t_i \mid a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$  ein Diskretisierungsgitter auf dem Intervall  $[a, b]$ . Dann ist die zusammengesetzte Quadraturformel gegeben durch

$$Q_n^S(f, \alpha; [a, b], N) := \sum_{i=0}^{N-1} Q_n^S(f, \alpha; [t_i, t_{i+1}]),$$

wobei  $Q_n^S(f, \alpha; [t_i, t_{i+1}])$  für die Quadraturformel aus (6.19) mit den Intervallgrenzen  $[t_i, t_{i+1}]$  steht.

Für eine äquidistante Stützstellenwahl ist in [Tortorella, 1990] folgender Satz für die Trapezregel  $Q_1^S$  bewiesen, der eine Aussage über den Approximationsfehler trifft.

**Satz 6.44: Fehlerschranke der zusammengesetzten Quadratur**

Sei  $f$  Hölder-stetig auf  $[a, b]$  mit Exponent  $p \in [0, 1]$ , d.h.  $|f(\tau_1) - f(\tau_2)| = L|\tau_1 - \tau_2|^p$ ,  $\forall \tau_1, \tau_2 \in [a, b]$ ,  $\alpha \in BV([a, b], \mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $h = t_{i+1} - t_i$  die äquidistante Schrittweite der Stützstellen, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(t) d\alpha(t) - Q_1^S(f, \alpha; [a, b], N) \right| \leq L \left( \frac{h}{2} \right)^p V_a^b(\alpha).$$

## 6.5.2 Numerische Approximation zustandsabhängiger impulsiver Systeme

Betrachtet wird nun ein gegebenes Diskretisierungsgitter  $\mathcal{G}_N$  mit Schrittweite  $h = \frac{b-a}{N}$ . Der Zustand an den Gitterpunkten ist definiert als

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x, u) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} G(t, x) d\alpha[x](t).$$

Eine Approximation der beiden Integrale liefert

$$x_h(t_{i+1}) \approx x_h(t_i) + Q_n(F; [t_i, t_{i+1}]) + Q_n^S(G, \alpha[x]; [t_i, t_{i+1}]), \quad \text{mit } x_h(t_0) = x(a)$$

wobei  $Q_n^S(G, \alpha[x]; [t_i, t_{i+1}])$  eine Funktion ist, die von den Auswertungen von  $G$  und  $\alpha$  an den Stützstellen der Quadraturformel abhängt. Im Unterschied zu den eben vorgestellten Quadraturformeln unterscheidet sich der Integrator  $\alpha$  insofern von klassischen Funktionen beschränkter Variation, da er nicht an jedem Punkt a priori ausgewertet werden kann, siehe Bemerkung 6.35. Durch die  $x$ -Abhängigkeit unterliegt er stets der gesamten Vergangenheit der Trajektorie, was eine direkte Berechnung von  $\alpha(b)$  ohne Kenntnis der Funktion  $x$  auf  $[t_0, t_i]$  nicht möglich macht. Eine Auswertung des interpolierenden Quadraturpolynoms ist somit nicht explizit möglich. Zur Lösung der Integralgleichung lassen sich jedoch trotzdem Verfahren entwickeln, die den eben vorgestellten ähneln.

Für die verwendete analytische Betrachtung sind nicht nur die Zustände der numerischen Lösung an den Gitterpunkten  $t_i = a + ih$  relevant, sondern auch zu den Zeitpunkten dazwischen. Deshalb wird

im Folgenden die stetige Fortsetzung des numerischen Zustands definiert. Zur Vereinfachung sei hier angenommen, dass die Systemdynamik autonom ist, also nicht von  $t$  abhängt und die Steuerung  $u$  sei ebenfalls vernachlässigt. Für stetige Teilstücke lässt sich mit der nachstehenden Definition eine Fortsetzung der diskreten Zustandsapproximation bestimmen, indem die Inkrementfunktion derart erweitert wird, dass sie auch für Punkte zwischen den Gitterpunkten Funktionswerte liefert.

**Definition 6.45: Fortsetzung der numerischen Approximation**

Gegeben sei eine Systemdynamik  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ , sowie eine Inkrementfunktion  $\Phi_h$ , für die gilt

$$x_{h,i+1} = x_h(t_{i+1}) = x_h(t_i) + h\Phi_h(x_h(t_i), h, F) = x_h(t_i) + Q_n(F; [t_i, t_{i+1}]).$$

Die Fortsetzung von  $x_{h,i} = x_h(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , auf das gesamte Intervall  $[a, b]$  ist definiert als

$$x_h(t) = x_h(t_i) + (t - t_i)\Phi_h(x_h(t_i), t - t_i, F) =: x_h(t_i) + \Phi((t - t_i); x_h(t_i), t - t_i, F), t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Mit dieser Definition ist auch die Approximation  $x_h$  eine Funktion beschränkter Variation.

**Definition 6.46: Einschrittverfahren für Integralgleichungen**

Für gegebene Funktionen  $F, G, \alpha, u$ , wie in Definition 6.36, sei ein Einschrittverfahren des Riemann-Stieltjes-Integrals gegeben durch die Abbildungsvorschrift

$$x_{h,i+1} = x_{h,i} + \Phi(t_i, x_{h,i}, h, F, u, G, \alpha), \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

wobei  $x_{h,0} = x(a)$  gilt. Dabei gilt

$$\Phi(t_i, x_{h,i}, h, F, u, G, \alpha) \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(\tau, x_h(\tau), u(\tau))d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} G(\tau, x_h(\tau))d\alpha[x_h](\tau).$$

Prinzipiell unterscheidet sich diese Definition nicht von einem Einschrittverfahren bei Differentialgleichungen. Lediglich die Funktion  $\Phi$  steht hier für eine Quadraturformel zur Approximation des Integrals auf dem Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$  und nicht für eine Lösungsvorschrift einer Differentialgleichung.

Werden unstetige Trajektorien betrachtet, so bezeichnen  $\tilde{x}$  und  $\tilde{x}_h$  die Zustandstrajektorien, bei denen Kontakte ignoriert werden. Sie genügen den Evolutionsgleichungen

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_i) + \int_{t_i}^t F(t, \tilde{x}, u)dt, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

und

$$\tilde{x}_h(t) = x_h(t_i) + \Phi(t - t_i; \tilde{x}_h(t_i), t - t_i, F), \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

**Definition 6.47: Ordnung einer Approximation**

Eine numerische Approximation  $\tilde{x}_h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist von Ordnung  $l \in \mathbb{N}$ , wenn gilt

$$\|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_h(t)\| \leq Ch^l, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (6.21)$$

Im Folgenden wird lediglich eine unilaterale Beschränkung  $g(x(t)) = g_1(x(t)) \in \mathbb{R}$  betrachtet. Die gezeigten Eigenschaften lassen sich jedoch für mehrere Beschränkungen verallgemeinern.

**Satz 6.48: Approximation des kontinuierlichen Kontaktpunkts**

Gegeben sei ein Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , sowie ein impulsives System nach Definition 6.36. Sei  $x(\tau)$  ein isolierter Kontaktpunkt mit Nulldurchgang, für den gilt:

1.  $g$  sei Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $L_g$ .
2.  $g(x(\tau)) = g(\tilde{x}(\tau)) = 0$ .
3. Es existieren  $\sigma > 0$  und  $\delta > 0$ , s.d. gilt

$$|g(\tilde{x}(t))| \geq \sigma |t - \tau|, \quad (6.22)$$

für  $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$  und

$$g(\tilde{x}(\tau - \delta))g(\tilde{x}(\tau + \delta)) < 0.$$

Außerdem sei ein numerisches Verfahren der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  gegeben, s.d. (6.21) gilt. Dann existiert ein  $\tau_h \in \mathbb{R}$  mit  $g(\tilde{x}_h(\tau_h)) = 0$ , für das gilt

$$|\tau - \tau_h| \leq \delta(h) = C_1 h^l, \quad (6.23)$$

mit  $g(\tilde{x}_h(\tau - \delta(h)))g(\tilde{x}_h(\tau + \delta(h))) < 0$ , d.h. es findet ein Nulldurchgang der numerischen Lösung statt.

**Beweis:** Aus der Lipschitz-Stetigkeit folgt

$$|g(\tilde{x}(t)) - g(\tilde{x}_h(t))| \leq L_g \|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_h(t)\| \leq L_g C h^l$$

$$\Leftrightarrow -L_g C h^l \leq g(\tilde{x}(t)) - g(\tilde{x}_h(t)) \leq L_g C h^l.$$

Da ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann, dass  $g(\tilde{x}(t)) > 0$  für  $t < \tau$  und  $g(\tilde{x}(t)) < 0$  für  $t > \tau$ , können diese Fälle getrennt betrachtet werden.

Fall 1 ( $t < \tau$ ): Verwende die Ungleichung  $g(\tilde{x}(t)) - g(\tilde{x}_h(t)) \leq L_g C h^l$ :

$$g(\tilde{x}_h(t)) \geq g(\tilde{x}(t)) - L_g C h^l \stackrel{(6.22)}{\geq} \sigma |t - \tau| - L_g C h^l \stackrel{!}{>} 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma |t - \tau| > L_g C h^l$$

$$\Leftrightarrow |t - \tau| > \frac{L_g C h^l}{\sigma}$$

Für  $t \leq \tau - \frac{L_g C h^l}{\sigma}$  gilt demnach  $g(\tilde{x}_h(t)) > 0$ .

Fall 2 ( $t > \tau$ ): Verwende die Ungleichung  $-L_g C h^l \leq g(\tilde{x}(t)) - g(\tilde{x}_h(t))$ :

$$g(\tilde{x}_h(t)) \leq g(\tilde{x}(t)) + L_g C h^l \stackrel{(6.22)}{\leq} -\sigma |t - \tau| + L_g C h^l \stackrel{!}{<} 0$$

$$\Leftrightarrow -\sigma |t - \tau| < -L_g C h^l$$

$$\Leftrightarrow |t - \tau| > \frac{L_g C h^l}{\sigma}$$

Für  $t \geq \tau + \frac{L_g C h^l}{\sigma}$  gilt demnach  $g(\tilde{x}_h(t)) < 0$ .

Fasst man beide Fälle zusammen und definiert  $\delta(h) := \frac{L_g C}{\sigma} h^l$ , so gilt  $g(\tilde{x}_h(\tau - \delta(h)))g(\tilde{x}_h(\tau + \delta(h))) < 0$ . Es gibt also eine Umgebung  $B_{\delta(h)}(\tau)$  außerhalb der wiederum die Beschränkung bzgl. der numerischen Trajektorie verschiedene Vorzeichen besitzt. Aufgrund der Stetigkeit von  $\tilde{x}_h$  folgt daraus, dass ein  $\tau_h \in B_{\delta(h)}(\tau)$  existiert für das  $g(\tilde{x}_h(\tau_h)) = 0$  gilt.  $\square$

Für Berührungspunkte gilt folgender Satz.

**Satz 6.49: Berührungspunkt der kontinuierlichen Trajektorie**

Gegeben sei ein Intervall  $[a, b]$  sowie ein impulsives System nach Definition 6.36. Sei  $x(\tau)$  ein isolierter Berührungspunkt, d.h. ein Kontaktpunkt ohne Nulldurchgang, für den gilt:

1.  $g$  sei Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L_g$ .
2.  $g(x(\tau)) = 0$ .
3. Es existieren  $\sigma > 0$  und  $\delta > 0$ , s.d. gilt

$$|g(x(t))| \geq \sigma |t - \tau|, \quad (6.24)$$

für  $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$  und

$$g(x(\tau - \delta))g(x(\tau + \delta)) > 0.$$

Außerdem sei ein numerisches Verfahren der Ordnung  $l \in \mathbb{N}$  gegeben, s.d. (6.21) gilt. Falls die Trajektorie der numerischen Approximation einen Kontaktpunkt  $\tau_h$  mit echtem Nulldurchgang besitzt, dann gilt

$$|\tau - \tau_h| \leq \delta(h) = C_1 h^l, \quad (6.25)$$

mit  $g(x_h(\tau - \delta(h)))g(x_h(\tau + \delta(h))) < 0$ .

**Beweis:** Da die kontinuierliche Trajektorie lediglich einen Kontakt ohne Nulldurchgang besitzt, gilt  $\nabla g(x(\tau))^\top \dot{x}(\tau) = 0$ . Die Sprungfunktion  $\alpha$  ist eine Kontraktion bzgl. der Normalengeschwindigkeit, d.h.  $\|\alpha[x(\tau^-)](\tau^-)\| = \kappa \|\nabla g(x(\tau^-))^\top \dot{x}(\tau^-)\|$ ,  $\kappa \in [0, 1]$ . Es gilt demnach  $\alpha[x(\tau^-)](\tau^-) = 0$ , woraus  $\tilde{x}(t) = x(t)$  folgt. Aufgrund der Approximationseigenschaft der numerischen Lösung gilt  $\|x(t) - \tilde{x}_h(t)\| \leq Ch^l$ .

Nun können zwei Fälle unterschieden werden. Der erste Fall liefert eine kontinuierliche Trajektorie ohne Kontakt, d.h.  $g(\tilde{x}_h(t)) \geq 0 \forall t \in [a, b]$  woraus folgt  $\tilde{x}_h(t) = x_h(t)$ . Für diesen Fall ist nichts zu zeigen.

Im zweiten Fall entsteht in der numerischen Approximation ein Kontakt zum Zeitpunkt  $\tau_h$  mit Nulldurchgang. Hier lässt sich analog zum Beweis von Satz 6.48 zeigen, dass aufgrund der Bedingung (6.24) der Kontakt in einer Umgebung des Berührungspunkts liegen muss, für die gilt  $\tau_h \in B_{\delta(h)}(\tau)$  mit  $\delta(h) = C_1 h^l$ . Einziger Unterschied ist das Vorzeichen in Teil zwei des Beweises.  $\square$

Mit diesen Aussagen lässt sich die Approximationseigenschaft der numerischen Lösung nachweisen.

**Satz 6.50: Konvergenz der numerischen Approximation**

Gegeben sei ein impulsives System auf dem Intervall  $[a, b]$ , mit Lösung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sowie eine numerische Approximation  $x_h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einem äquidistanten Gitter mit Schrittweite  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , mit  $x(a) = x_h(a)$ , die für stetige Lösungen eine Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  besitzt, sowie numerische Kontaktpunkte lokalisiert und das entsprechende Intervall am Kontaktpunkt unterteilt. Des weiteren sei  $F$  Lipschitz-stetig bzgl. aller Argumente mit Lipschitz-Konstante  $L_F$  und die Sprunghöhe  $d(x(t))$  von  $\alpha$  sei Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L_\alpha$ .  $G$  sei definiert als Einheitsmatrix  $G \in \mathbb{I}_{n \times n}$ .

Es sei angenommen, dass die Voraussetzungen von Satz 6.48 und Satz 6.49 gelten und in jedem Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N$ , höchstens ein  $\tau_i$  existiert, in dem  $g(x(\tau_i)) = 0$  gilt. Zusätzlich sei  $\nabla g(x)$  beschränkt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

- (1) (Konsistenz) Für ein hinreichend kleines  $h > 0$  und  $x(t_i) = x_h(t_i)$  besitzt das Einschrittverfahren einen lokalen Fehler bzgl. der  $L_1$ -Norm in jedem Teilintervall der Ordnung  $l \in \mathbb{N}$ , d.h. es gilt

$$\|x - x_h\|_{L_1(t_i, t_{i+1})} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|x(t) - x_h(t)\| dt = O(h^l).$$

- (2) (Konvergenz) Die numerische Lösung konvergiert für  $h \rightarrow 0$  bzgl. der  $L_1$ -Norm gegen die kontinuierliche Lösung, d.h. es gilt

$$\|x - x_h\|_{L_1(a, b)} = \int_a^b \|x(t) - x_h(t)\| dt = O(h^{l-1}).$$

**Beweis:** (1): Es kann sich o.B.d.A auf das Intervall  $[a, a+h] = [t_0, t_1]$  eingeschränkt werden. Hier gilt  $x(t_0) = x_h(t_0)$  und die abzuschätzende Norm lautet

$$\|x - x_h\|_{L_1(t_0, t_1)} = \int_{t_0}^{t_1} \|x(t) - x_h(t)\| dt.$$

Fall 1: Wenn kein Kontakt auftritt, d.h. es gibt ein  $\varepsilon > 0$  mit  $g(x(t)) \geq \varepsilon > 0, \forall t \in [t_0, t_1]$ , so kann ein  $h$  gefunden werden, s.d.  $\varepsilon > Ch^l$  erfüllt ist. Damit besitzt auch die numerische Trajektorie keinen Kontaktpunkt und es gilt  $\tilde{x} = x$  und  $\tilde{x}_h = x_h$ . Damit gilt

$$\|x - x_h\|_{L_1(t_0, t_1)} = \int_{t_0}^{t_1} \|x(t) - x_h(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{t_1} Ch^n dt \leq Ch^{l+1}.$$

Fall 2: Im Falle eines Kontaktpunkts, d.h.  $\exists! \tau_1 \in [t_0, t_1] : g(x(\tau_1)) = 0$  sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 2a) Es handelt sich um einen Kontaktpunkt im Sinne von Satz 6.48. Dann existiert ein  $h$  klein genug, s.d.  $\tau_{h,1} \in B_{\delta(h)}(\tau_1)$  mit  $\delta(h) = O(h^l)$  gilt. Es kann o.B.d.A.  $\tau_{h,1} \leq \tau_1$  angenommen werden. Damit gilt

$$\begin{aligned} \|x - x_h\|_{L_1(t_0, t_1)} &= \int_{t_0}^{t_1} \|x(t) - x_h(t)\| dt \\ &= \underbrace{\int_{t_0}^{\tau_{h,1}} \|x(t) - x_h(t)\| dt}_{(I)} + \underbrace{\int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} \|x(t) - x_h(t)\| dt}_{(II)} + \underbrace{\int_{\tau_1}^{t_1} \|x(t) - x_h(t)\| dt}_{(III)}. \end{aligned}$$

Eine sukzessive Betrachtung der Integrale liefert:

$$(I) : \int_{t_0}^{\tau_{h,1}} \|x(t) - x_h(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{\tau_{h,1}} C(t - t_0)^l dt \leq Ch^l (\tau_{h,1} - t_0) \leq Ch^{l+1}$$

Im zweiten Teilintervall befindet sich die approximierte Lösung nach dem Kontakt und die tatsächliche Lösung noch davor, weshalb die numerische Lösung in Abhängigkeit der erfahrenen Unstetigkeit fortgesetzt wird.

$$\begin{aligned} (II) : & \int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} \|x(t) - x_h(t)\| dt = \int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} \left\| x(t) - \left( x_h(\tau_{h,1}^-) + \alpha[x_h](\tau_{h,1}^-) + \int_{\tau_{h,1}}^t F(x_h(\sigma)) d\sigma \right) \right\| dt \\ & \leq \int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} \underbrace{\|x(t)\|}_{\leq \bar{X}} dt + \int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} \underbrace{\|x_h(\tau_{h,1}^-)\|}_{\leq \bar{X} + Ch^l} dt + \int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} \underbrace{\|\alpha[x_h](\tau_{h,1}^-)\|}_{\leq \bar{\alpha}(\bar{X} + Ch^l)} dt \\ & \quad + \int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} \underbrace{\|\Phi((t - \tau_{h,1}); x_h(\tau_{h,1}^+), (t - \tau_{h,1}), F)\|}_{\leq \bar{\Phi}} dt \\ & \leq \left( \bar{X} (2 + \bar{\alpha}) + (1 + \bar{\alpha}) Ch^l + \bar{\Phi} h \right) \underbrace{(\tau_1 - \tau_{h,1})}_{\leq \delta(h)} \stackrel{(6.23)}{\leq} C_1 \delta(h) \leq C_1 h^l. \end{aligned}$$

Hier ist  $\bar{X} := \bar{X}(x_a)$  eine obere Schranke für  $x$ , welche aufgrund der Dissipativität des gegebenen Systems existiert,  $\bar{\alpha}$  obere Schranke für  $\alpha$  und  $\bar{\Phi}$  eine obere Schranke an die Fortschrittsfunktion des Einschrittverfahrens  $\Phi$  auf dem Intervall  $[\tau_{h,1}, \tau_1]$ . Diese hängt wiederum von der Systemdynamik  $F$  ab. Diese Schranken existieren, da die Funktionen stetig sind und auf der kompakten Menge  $\{x \mid \|x\| \leq \bar{X}\}$  ein Maximum besitzen.

Im dritten Intervall sind beide Trajektorien nach dem Kontakt, was eine Abschätzung bzgl. der unterschiedlichen Sprunghöhe notwendig macht. Deshalb werden zuerst die Zustände nach dem zweiten Kontaktpunkt verglichen:

$$\begin{aligned} & \|x(\tau_1^+) - x_h(\tau_1^+)\| \\ & = \left\| x(\tau_1^-) + \alpha[x](\tau_1^-) - x_h(\tau_{h,1}^-) - \alpha[x_h](\tau_{h,1}^-) - \Phi(\tau_1 - \tau_{h,1}; x_h(\tau_{h,1}^+), \tau_1 - \tau_{h,1}, F) \right\| \\ & \leq \left\| x(\tau_1^-) - x_h(\tau_{h,1}^-) \right\| + \left\| \alpha[x](\tau_1^-) - \alpha[x_h](\tau_{h,1}^-) - \Phi(\tau_1 - \tau_{h,1}; x_h(\tau_{h,1}^+), \tau_1 - \tau_{h,1}, F) \right\|. \end{aligned}$$

Eine Abschätzung der beiden Normen liefert:

$$\begin{aligned} \left\| x(\tau_1^-) - x_h(\tau_{h,1}^-) \right\| & = \left\| x(\tau_{h,1}^-) + \int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} F(x(\sigma)) d\sigma - x_h(\tau_{h,1}^-) \right\| \\ & \leq \underbrace{\left\| x(\tau_{h,1}^-) - x_h(\tau_{h,1}^-) \right\|}_{\leq Ch^l} + \underbrace{\int_{\tau_{h,1}}^{\tau_1} \|F(x(\sigma))\| d\sigma}_{\leq M_F} \stackrel{(6.23)}{\leq} C_2 h^l. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \alpha[x](\tau_1^-) - \alpha[x_h](\tau_{h,1}^-) - \Phi((\tau_1 - \tau_{h,1}); x_h(\tau_{h,1}^+), (\tau_1 - \tau_{h,1}), F) \right\| \\ & \leq \left\| \alpha[x](\tau_1^-) - \alpha[x_h](\tau_{h,1}^-) \right\| + \left\| \Phi((\tau_1 - \tau_{h,1}); x_h(\tau_{h,1}^+), (\tau_1 - \tau_{h,1}), F) \right\| \\ & \leq L_\alpha \left\| x(\tau_1^-) - x_h(\tau_{h,1}^-) \right\| + \bar{\Phi} \delta(h) \leq L_\alpha (Ch^l + M_F \delta(h)) + \bar{\Phi} \delta(h) \leq C_3 h^l. \end{aligned}$$

Woraus folgt, dass

$$\|x(\tau_1^+) - x_h(\tau_1^+)\| \leq C_4 h^l$$

gilt. Definiert man die Funktion

$$\hat{x}(t) = x_h(\tau_1^+) + \int_{\tau_1}^t F(\hat{x}(\sigma)) d\sigma,$$

also die Trajektorie, die am Kontaktpunkt der kontinuierlichen Lösung in momentanen Zustand der numerischen Lösung beginnt, liefert dies durch Anwendung des Gronwall-Lemmas eine Abschätzung für das dritte Integral:

$$\begin{aligned} (III) : \int_{\tau_1}^{t_1} \|x(t) - x_h(t)\| dt &= \int_{\tau_1}^{t_1} \|x(t) - \hat{x}(t) + \hat{x}(t) - x_h(t)\| dt \\ &\leq \int_{\tau_1}^{t_1} \|x(t) - \hat{x}(t)\| dt + \int_{\tau_1}^{t_1} \underbrace{\|\hat{x}(t) - x_h(t)\|}_{\leq C h^l} dt \\ &\leq \|x(\tau_1^+) - x_h(\tau_1^+)\| e^{(L_F(t-\tau_1))} + C h^{l+1} \leq C_5 h^l \end{aligned}$$

Daraus folgt die geforderte Abschätzung

$$\|x - x_h\|_{L_1(t_0, t_1)} = O(h^l).$$

Fall 2b) Handelt es sich bei dem Kontaktpunkt um einen Berührungspunkt, d.h. es gilt  $g(x(t)) \geq 0 \forall t \in [t_0, t_1]$  mit  $g(x(\tau_1)) = 0$ , folgt hier, dass die Normalengeschwindigkeit bzgl. des Kontakts Null sein muss, also  $\nabla g(x(\tau))^\top \dot{x}(\tau) = 0$ . Nach Satz 6.49 kann die numerische Trajektorie einen Kontaktpunkt mit Nulldurchgang lediglich im Punkt  $\tau_{h,1}$  besitzen, für den gilt  $\tau_{h,1} \in [\tau_1 - \delta(h), \tau_1 + \delta(h)]$ . Für die Abschätzung wird die Kontaktgeschwindigkeit

$$V(x, \dot{x}) = \nabla g(x)^\top \dot{x}$$

definiert. Für eine Abschätzung, wird eine Schranke an  $V(x_h(\tau_{h,1}), \dot{x}_h(\tau_{h,1}))$  benötigt, die mit Hilfe der kontinuierlichen Dynamik hergeleitet werden kann.

$$V(x(\tau_{h,1}), \dot{x}(\tau_{h,1})) = \underbrace{V(x(\tau_1), \dot{x}(\tau_1))}_{=0} + \int_{\tau_1}^{\tau_{h,1}} \underbrace{\frac{d}{dt} V(x(t), \dot{x}(t))}_{\leq \dot{V}_{max}} dt \leq (\tau_{h,1} - \tau_1) \dot{V}_{max} \leq \dot{V}_{max} \delta(h) \quad (6.26)$$

Die obere Schranke an  $V$  existiert, da  $\dot{x}$  durch die Systemdynamik  $F$  und  $\nabla g(x)$  aufgrund der Voraussetzung beschränkt sind. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} &\|V(x_h(\tau_{h,1}), \dot{x}_h(\tau_{h,1})) - V(x(\tau_{h,1}), \dot{x}(\tau_{h,1}))\| \\ &\leq \|V(x_h(\tau_{h,1}), \dot{x}_h(\tau_{h,1})) - V(x(\tau_{h,1}), \dot{x}_h(\tau_{h,1}))\| + \|V(x(\tau_{h,1}), \dot{x}_h(\tau_{h,1})) - V(x(\tau_{h,1}), \dot{x}(\tau_{h,1}))\| \\ &\leq \|\nabla g(x_h(\tau_{h,1})) - \nabla g(x(\tau_{h,1}))\| \|\dot{x}_h(\tau_{h,1})\| + \|\nabla g(x(\tau_{h,1}))\| \|\dot{x}_h(\tau_{h,1}) - \dot{x}(\tau_{h,1})\| \\ &\leq L_{\nabla g} \|x_h(\tau_{h,1}) - x(\tau_{h,1})\| \bar{x}_h + C h^{l-1} \leq K h^{l-1}, \end{aligned}$$

wobei  $\bar{x}_h$  eine obere Schranke an die Geschwindigkeit ist. Kombiniert man dies mit (6.26), folgt daraus

$$\|V(x_h(\tau_{h,1}), \dot{x}_h(\tau_{h,1}))\| \leq K_1 h^{l-1}.$$



Damit lässt sich nun die Norm-Abschätzung durchführen.

$$\begin{aligned} \|x - x_h\|_{L_1(t_0, t_1)} &= \int_{t_0}^{\tau_{h,1}} \underbrace{\|x(t) - x_h(t)\|}_{\leq Ch^l} dt + \int_{\tau_{h,1}}^{t_1} \left\| x(t) - \Phi \left( t - \tau_{h,1}, x_h(\tau_{h,1}^+), t - \tau_{h,1}, F \right) \right\| dt \\ &\leq Ch^{l+1} + \int_{\tau_{h,1}}^{t_1} \|x(t) - \hat{x}(t)\| dt + \int_{\tau_{h,1}}^{t_1} \underbrace{\left\| \hat{x}(t) - \Phi \left( t - \tau_{h,1}, x_h(\tau_{h,1}^+), t - \tau_{h,1}, F \right) \right\|}_{\leq Ch^l} dt \end{aligned}$$

Gronwall liefert:

$$\begin{aligned} &\leq 2Ch^{l+1} + \left\| x(\tau_{h,1}^+) - \hat{x}(\tau_{h,1}^+) \right\| \int_{\tau_{h,1}}^{t_1} e^{L_F(t-\tau_{h,1})} dt \\ &\leq 2Ch^{l+1} + \left\| x(\tau_{h,1}^+) - x_h(\tau_{h,1}^+) \right\| h e^{L_F h} \\ &= 2Ch^{l+1} + \left\| x(\tau_{h,1}^+) - x_h(\tau_{h,1}^-) - \alpha[x_h](\tau_{h,1}) \right\| h e^{L_F h} \\ &\leq 2Ch^{l+1} + \left( \left\| x(\tau_{h,1}^+) - x_h(\tau_{h,1}^-) \right\| + \|\alpha[x_h](\tau_{h,1})\| \right) h e^{L_F h} \\ &\leq 2Ch^{l+1} + \left( Ch^l + \kappa \left\| V(x_h(\tau_{h,1}^-), \dot{x}(\tau_{h,1}^-)) \right\| \right) h e^{L_F h} \\ &\leq 2Ch^{l+1} + \left( Ch^l + K_1 h^{l-1} \right) h e^{L_F h} \leq C_6 h^l \end{aligned}$$

Damit ist (1) gezeigt.

Der Beweis der Konvergenz (2) des globalen Fehlers kann analog zum Beweis der stetigen Funktionen mit Hilfe des Gronwall-Lemmas und einer Induktion über die Intervalle gezeigt werden.  $\square$

Das hier verwendete numerische Verfahren beruht auf der exakten Lokalisierung der Kontaktpunkte. Diese kann über eine Nullstellensuche der Schaltfunktion durchgeführt werden, wozu beispielsweise ein Newton- oder Bisektionsverfahren verwendet werden kann. Bei mehrfachen Kontakten werden diese sukzessive in der Reihenfolge ihres zeitlichen Auftretens behandelt. Besonders bei häufigen Kontakten kann dies zu zeitintensiven Berechnungen führen. In Abbildung 6.7 sind die auftretenden Fälle der approximierten Lösung dargestellt. Der Kontaktpunkt  $t_1$  ist ein Kontakt mit Nulldurchgang. Die gepunktete Fortsetzung der kontinuierlichen Lösung stellt die Trajektorie  $\tilde{x}(t)$  für diesen Kontakt dar. Für hinreichend kleines  $h$  liegt der Kontakt der numerischen Lösung in einer Umgebung  $B_{\delta(h)}$ , die mit  $h \rightarrow 0$  ebenfalls immer kleiner wird. Zum Zeitpunkt  $t_2$  hat die kontinuierliche Trajektorie einen Berührungspunkt. Nun kann der Fall auftreten, dass die Approximierende keinen Kontakt aufweist (gestrichpunktete Lösung) oder der Berührungspunkt wird zu einem echten Kontakt (gepunktet). In diesem Fall ist jedoch für ein von der Normalengeschwindigkeit abhängiges Restitutionsgesetz dafür verantwortlich, dass auch hier eine Konvergenz der numerischen Lösung gegen die tatsächliche Lösung stattfindet.

Die im folgenden Kapitel vorgestellten Diskretisierungsmethoden verzichten auf die exakte Lokalisierung des Kontaktpunkts, liefern jedoch trotzdem gute Ergebnisse für hinreichend kleine Schrittweiten.

### 6.5.3 Verallgemeinerte Quadraturformeln für impulsive Systeme

#### Riemann-Stieltjes-Verfahren

Eine direkt aus der Definition 6.21 resultierende Diskretisierungsmethode bildet das Riemann-Stieltjes-Verfahren, siehe [Fick, 2010]. Dabei wird das zu approximierende Integral auf dem Intervall  $[a, b]$  über

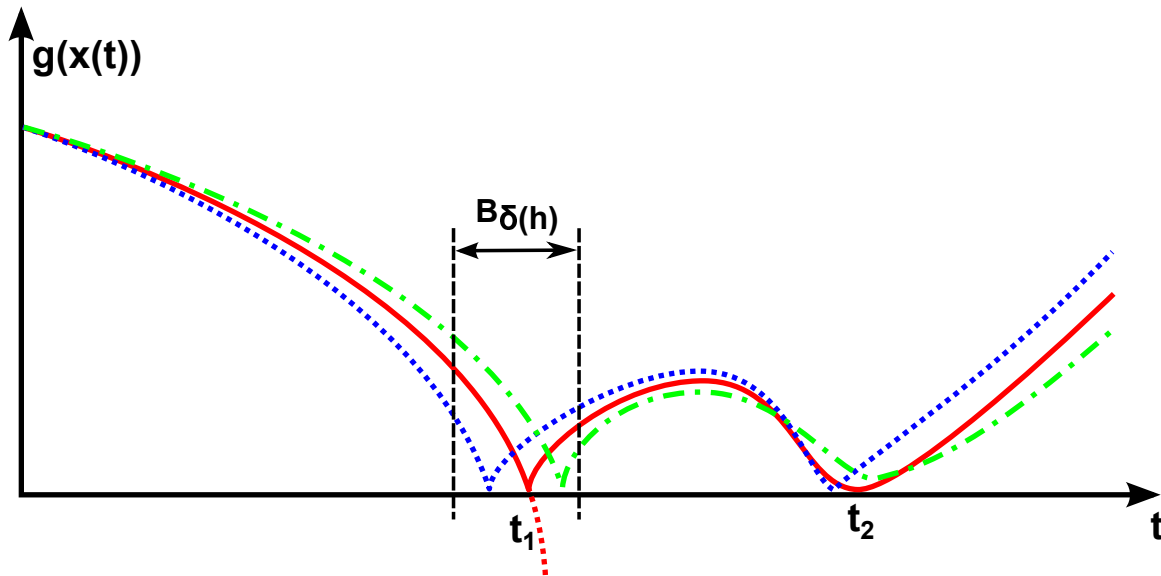


Abbildung 6.7: Darstellung der Spezialfälle mit Hilfe zweier möglicher approximierender (gestrichelt und gepunktet) im Vergleich zu tatsächlichen Trajektorie (durchgezogen)

dem äquidistanten Gitter  $\mathcal{G}_N$  diskretisiert und die Summenformulierung

$$\int_a^b G(\tau, x) d\alpha[x](\tau) \approx \sum_{i=0}^{N-1} G(t_i, x_i) [\alpha[x_h](t_{i+1}) - \alpha[x_h](t_i)]$$

verwendet. Die Bildungsvorschrift für den nächsten Gitterpunkt besitzt damit folgende Gestalt:

$$x_h(t_{i+1}) = x_h(t_i) + F(t_i, x_h(t_i), u) \cdot h + G(t_i, x_h(t_i)) \cdot [\alpha[x_h](t_{i+1}) - \alpha[x_h](t_i)]. \quad (6.27)$$

In der hier vorgestellten Formulierung handelt es sich um ein implizites Verfahren, da der Zustand  $x_h(t_{i+1})$  nicht bekannt ist, jedoch wie bereits erwähnt, zur Berechnung von  $\alpha$  benötigt wird. Um ein explizites Verfahren zu erhalten, wird eine Schätzung  $\tilde{x}_h(t_{i+1})$  benötigt. Die Bezeichnung orientiert sich hier an der eingeführten Darstellung der stetigen Trajektorien, da für die Berechnung der Schätzung die Kontakte vernachlässigt werden. Sie berechnet sich als

$$\tilde{x}_h(t_{i+1}) = x_n(t_i) + h \cdot F(t_i, x_h(t_i), u).$$

Die nächste Iterierte wird dann durch Einsetzen des geschätzten Zustands in Gleichung (6.27) berechnet.

$$x_h(t_{i+1}) = \tilde{x}_h(t_{i+1}) + G(t_i, x_h(t_i)) \cdot [\alpha[\tilde{x}_h](t_{i+1}) - \alpha[x_h](t_i)]$$

Dabei gilt

$$\alpha[\tilde{x}_h](t_{i+1}) = \alpha[x_h](t_i) + d(\tilde{x}_h(t_{i+1})),$$

wobei  $d(\tilde{x}_h(t_{i+1}))$  für eine Verletzung einer Zustandsbeschränkung das zugehörige Restitutionsgesetz auswertet.

### Verallgemeinertes Heun-Verfahren (Trapezregel)

Bei diesem Verfahren, vgl. [Tortorella, 1990], werden die Integrale nicht durch stückweise konstante, sondern stückweise lineare Funktionen approximiert. Dafür wird jeweils immer der Funktionswert an

zwei benachbarten Diskretisierungspunkten benötigt. Die Iterationsvorschrift schreibt sich folgendermaßen:

$$x_h(t_{i+1}) = x_h(t_i) + \frac{h}{2} [F(t_i, x_h(t_i), u) + F(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}), u)] + \frac{h_\alpha}{2} [G(t_i, x_h(t_i)) + G(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))],$$

mit

$$h_\alpha := \alpha[x_h](t_{i+1}) - \alpha[x_h](t_i).$$

Um auch hier ein explizites Verfahren zu erhalten, wird die aus dem expliziten Heun-Verfahren bekannte Approximation des zukünftigen Zustands verwendet. Diese liefert

$$\begin{aligned} \tilde{x}_h(t_{i+1}) &= x_h(t_i) + \frac{h}{2} \cdot [F(t_i, x_h(t_i), u) + F(t_{i+1}, x_h(t_i) + hF(t_i, x_h(t_i), u), u)], \\ x_h(t_{i+1}) &= x_h(t_i) + \frac{h}{2} [F(t_i, x_h(t_i), u) + F(t_{i+1}, \tilde{x}_h(t_{i+1}), u)] + \frac{h_\alpha}{2} [G(t_i, x_h(t_i)) + G(t_{i+1}, \tilde{x}_h(t_{i+1}))], \end{aligned}$$

mit

$$h_\alpha = \alpha[\tilde{x}_h](t_{i+1}) - \alpha[x_h](t_i) = d(\tilde{x}_h(t_{i+1})).$$

### Verallgemeinerte Simpsonregel

Die Simpsonregel für Riemann- und Stieltjes-Integrale wurde bereits in den Gleichungen (6.18) bzw. (6.20) vorgestellt. Auch hier kann mit Hilfe einer Summation ein Einschrittverfahren für Riemann-Stieltjes-Integrale hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} x_h(t_{i+1}) &= x_h(t_i) + \frac{h}{6} [F(t_i, x_h(t_i), u) + 4F(t_m, x_h(t_m), u) + F(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}), u)] \\ &\quad + \frac{\alpha[x_h](t_{i+1}) - \alpha[x_h](t_i)}{6} [G(t_i, x_h(t_i)) + 4G(t_m, x_h(t_m)) + G(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))] \\ &\quad + \frac{G(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) - G(t_i, x_h(t_i))}{3} [\alpha[x_h](t_i) - 2\alpha[x_h](t_m) + \alpha[x_h](t_{i+1})] \end{aligned}$$

Aufgrund der Auswertung an einem Zwischenschritt zum Zeitpunkt  $t_m = t_i + \frac{h}{2}$ , ist es hier umständlicher eine explizite Darstellung herzuleiten. Mit Hilfe der folgenden Approximationen ist es jedoch trotzdem möglich.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_h(t_m) &= x_h(t_i) + \frac{h}{4} \left[ F(t_i, x_h(t_i), u) + F\left(t_m, x_h(t_i) + \frac{h}{2} F(t_i, x_h(t_i), u), u\right) \right] \\ x_h(t_m) &= \tilde{x}_h(t_m) + \frac{G(\tilde{x}_h(t_m)) - G(x_h(t_i))}{2} [\alpha[\tilde{x}_h](t_m) - \alpha[x_h](t_i)] \\ \tilde{x}_h(t_{i+1}) &= x_h(t_m) + \frac{h}{4} \left[ F(t_m, x_h(t_m), u) + F\left(t_{i+1}, x_h(t_m) + \frac{h}{2} F(t_m, x_h(t_m), u), u\right) \right] \end{aligned}$$

Es wird je ein Schritt mit dem Heun-Verfahren mit der Schrittweite  $\frac{h}{2}$  durchgeführt, wobei vor dem zweiten Schritt die Kontaktbedingung zusätzlich ausgewertet und der Zustand entsprechend aktualisiert wird. Setzt man dies in die Simpsonregel ein, erhält man

$$\begin{aligned} x_h(t_{i+1}) &= x_h(t_i) + \frac{h}{6} [F(t_i, x_h(t_i), u) + 4F(t_m, x_h(t_m), u) + F(t_{i+1}, \tilde{x}_h(t_{i+1}), u)] \\ &\quad + \frac{\alpha[\tilde{x}_h](t_{i+1}) - \alpha[x_h](t_i)}{6} [G(t_i, x_h(t_i)) + 4G(t_m, x_h(t_m)) + G(t_{i+1}, \tilde{x}_h(t_{i+1}))] \\ &\quad + \frac{G(t_{i+1}, \tilde{x}_h(t_{i+1})) - G(t_i, x_h(t_i))}{3} [\alpha[x_h](t_i) - 2\alpha[\tilde{x}_h](t_m) + \alpha[\tilde{x}_h](t_{i+1})]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass

$$\alpha[\tilde{x}_h](t_{i+1}) = \alpha[\tilde{x}_h](t_m) + d(\tilde{x}_h(t_{i+1})) \quad (6.29)$$

$$\alpha[\tilde{x}_h](t_m) = \alpha[x_h](t_m) + d(\tilde{x}_h(t_m)) \quad (6.30)$$

gilt. Bei der Auswertung von  $F$  und  $G$  an der Zwischenstelle stellt sich die Frage, ob hier  $x_h(t_m)$  oder  $\tilde{x}_h(t_m)$  verwendet werden soll. Um beide gleichermaßen zu gewichten, wurde sich für eine Mittelung der beiden Werte entschieden:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t_m) &:= \frac{1}{2} (F(t_m, \tilde{x}_h(t_m), u) + F(t_m, x_h(t_m), u)), \\ \tilde{G}(t_m) &:= \frac{1}{2} (G(t_m, \tilde{x}_h(t_m)) + G(t_m, x_h(t_m))) \end{aligned}$$

Damit und unter Verwendung der Gleichungen (6.29) und (6.30) lässt sich (6.28) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} x_h(t_{i+1}) &= x_h(t_i) + \frac{h}{6} \left[ F(t_i, x_h(t_i), u) + 4\tilde{F}(t_m) + F(t_{i+1}, \tilde{x}_h(t_{i+1}), u) \right] \\ &+ \frac{d(\tilde{x}_h(t_{i+1})) + d(\tilde{x}_h(t_m))}{6} \left[ G(t_i, x_h(t_i)) + 4\tilde{G}(t_m) + G(t_{i+1}, \tilde{x}_h(t_{i+1})) \right] \\ &+ \frac{G(t_{i+1}, \tilde{x}_h(t_{i+1})) - G(t_i, x_h(t_i))}{3} [d(\tilde{x}_h(t_{i+1})) - d(\tilde{x}_h(t_m))]. \end{aligned}$$

### Numerische Konvergenzanalyse

Nach der theoretischen Betrachtung der Approximationseigenschaften von Integrationsverfahren mit Kontaktdetektion und der Vorstellung von Verfahren, die ohne diese auskommen, wird in diesem Abschnitt eine numerische Analyse des Konvergenzverhaltens durchgeführt. Dafür wird das einfache Modell eines hüpfenden Balls auf einer ebenen Fläche verwendet. Es werden die drei vorgestellten Verfahren verglichen, wobei als Referenz die feinste Diskretisierung ( $h = 1.0e - 7$ ) mit dem verallgemeinerten Simpson-Verfahren verwendet wird.

N	H	Riemann-Stieltjes-Verfahren	verallg. Trapezregel	verallg. Simpsonregel
100	1.0e - 2	5.1752e - 01	2.5569e - 01	1.4362e - 01
1000	1.0e - 3	1.6522e - 01	3.6560e - 02	2.0778e - 02
10000	1.0e - 4	2.2501e - 02	3.4390e - 03	2.2039e - 03
100000	1.0e - 5	2.1336e - 03	2.5075e - 04	2.2750e - 04
1000000	1.0e - 6	2.1910e - 04	2.2435e - 05	2.0756e - 05
10000000	1.0e - 7	1.8985e - 05	2.1924e - 06	

Tabelle 6.1: Konvergenzverhalten des Riemann-Stieltjes-Verfahrens und der verallgemeinerten Trapezregel für das Beispiel des hüpfenden Balls

In Tabelle 6.1 wird die lineare Konvergenz aller Verfahren sichtbar, wobei das Riemann-Stieltjes-Verfahren um den Faktor 10 langsamer konvergiert als die Trapezregel. Es wäre anzunehmen, dass das Simpson-Verfahren eine bessere Konvergenzrate ausweist. Dies lässt sich aus dieser Analyse jedoch nicht nachweisen, was an der nicht stattgefundenen Lokalisierung der Kontaktpunkte und der verwendeten Zustandsapproximation liegen kann.

### 6.5.4 Zusammengesetzte Newton-Cotes-Quadratur

Für die im weiteren Verlauf dieser Arbeit eingeführte Steuerungsdiskretisierung wird eine zusammengesetzte Quadraturformel für Riemann-Stieltjes-Integrale eingeführt. Da eine zu feine Auflösung der Steuerung einen hohen Rechenaufwand bei der Optimierung zur Folge hat, wird ein grobes Gitter  $\mathcal{G}_H(t_0, t_f)$  mit  $H = \frac{t_f - t_0}{M}$ ,  $M \in \mathbb{N}$ , eingeführt, auf dem die Steuerung eine stückweise konstante Funktion darstellt. Da die impulsive Dynamik jedoch für eine zu große Schrittweite nicht hinreichend exakt berechnet werden kann, wird auf jedem Teilintervall ein weiteres Gitter  $\mathcal{G}_h(t_i, t_{i+1})$  mit  $h = \frac{t_{i+1} - t_i}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , definiert, auf dem die Systemdynamik diskretisiert wird. Die Formel für die Berechnung des nächsten Zustands lautet

$$x_H(t_{i+1}) = x_H(t_i) + \sum_{j=0}^{N-1} \Phi(\tau_j, \eta_j^N, h, F, u_i, G, \alpha), \quad (6.31)$$

wobei mit  $\eta_j^N = x_h(t_i) + \sum_{k=0}^{j-1} \Phi(\tau_k, \eta_k^N, h, F, u_i, G, \alpha)$  mit  $\eta_0^N = x_h(t_i)$  die Zustände an den Subdiskretisierungspunkten bezeichnet sind.

## 6.6 Kontaktformulierung

In diesem Kapitel wird nun die verwendete Formulierung des Kontaktproblems eines Mehrkörpersystems mit Oberflächen behandelt. Die Darstellung wird dabei so gewählt, dass sie sich gut für Modelle der vertikalen Fahrzeugdynamik eignet, jedoch nicht darauf beschränkt ist. Es wird zur Vereinfachung angenommen, dass keine Kollisionen der Einzelkörper des Mehrkörpersystems untereinander auftreten und alle Massen vorerst als Punktmassen vorliegen. Eine Erweiterung in diese Richtung ist denkbar, wird jedoch im vorliegenden Fall nicht betrachtet.

Das Problem besteht darin, eine einheitliche Formulierung zu entwickeln, bei der das Kontaktproblem möglichst allgemein gelöst werden kann. Dafür werden verallgemeinerte Koordinaten des Mehrkörpersystems, verallgemeinerte Restitutionskoeffizienten („Coefficients of Restitution“ (COR)), vgl. [Bowling et al., 2009], sowie eine allgemeine Formulierung der Kontaktoberfläche bzw. unilateralen Beschränkung verwendet.

### Bemerkung 6.51: Zweidimensionale Darstellung

Um für die hier hergeleiteten Kontaktprobleme ein passendes System zu erhalten, ist es notwendig, dass die vertikalen Fahrzeugmodelle erweitert werden. Betrachtet man lediglich die Vertikalbewegung eines Fahrzeugs, können Reibungskräfte nicht betrachtet werden, da keine Bewegung tangential zur Oberfläche auftritt. Deshalb wird in diesem Kapitel angenommen, dass die Fahrzeugmodelle eine translatorische Bewegungskomponente in Fahrtrichtung besitzen.

### 6.6.1 Systemdynamik

Das Mehrkörpersystem soll aus einem zusammenhängenden System von  $K$  Körpern mit  $n$  Freiheitsgraden bestehen. Das System sei so transformiert, dass keine algebraischen Gleichungen auftreten. Die daraus resultierenden Systemgleichungen lassen sich folgendermaßen schreiben, [Bowling et al., 2009]:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + b(q(t), \dot{q}(t)) + k(q(t)) = J^\top(q(t))F(q(t), \dot{q}(t)), \quad (6.32)$$

wobei  $M(q(t))$  die Massenmatrix,  $b(q(t), \dot{q}(t))$  die Kopplungskräfte des Mehrkörpersystems und  $k(q(t))$  die angreifenden Gewichtskräfte darstellen. Alle weiteren angreifenden Kräfte, wie Kontakt-, Stoß- und Reibungskräfte sind im Vektor  $F$  zusammengefasst. Es wird im Folgenden angenommen, dass außer Kontakt- und Reibungskräften keine weiteren externen Kräfte auf das System wirken. Der Vektor  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet wieder die verallgemeinerten Koordinaten des Systems und  $\dot{q}(t)$ , bzw.  $\ddot{q}(t)$  die zugehörigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zum Zeitpunkt  $t$ . Für die Herleitung dieser Gleichung sei auf Kapitel 3.1 und die darin aufgeführten Referenzen verwiesen. Die Matrix  $J(q(t))$  ist definiert als die Jacobi-Matrix des Systems und bildet die verallgemeinerten Koordinaten auf das Referenzsystem ab. Details dazu können in [Craig, 1989] nachgelesen werden.  $J(q(t))$  ist definiert als

$$J(q(t)) = \begin{bmatrix} J_1(q(t)) \\ \vdots \\ J_K(q(t)) \end{bmatrix},$$

wobei die  $J_i(q(t))$  folgendermaßen bestimmt werden:

$$J_i(q) = \left( \frac{\partial \xi_i(q(t))}{\partial q_j} \right)_{j=1, \dots, n}. \quad (6.33)$$

Hier bezeichnet  $\xi_i(q(t))$  den Zustand des  $i$ -ten Teilkörpers im Inertialsystem, d.h. im allgemeinen dreidimensionalen Fall gilt

$$\xi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6, \quad \text{mit} \quad \xi_i(q(t)) = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & \phi_i & \theta_i & \psi_i \end{bmatrix}^\top, \quad i = 1, \dots, K.$$

Der Ortsvektor eines Teilkörpers sei definiert durch

$$\mathbf{r}_i(q(t)) = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}.$$

Das Referenzsystem ist im vorliegenden Fall das kartesische Inertialsystem  $x, y, z$ . Es gilt folgende Beziehung:

$$\mathbf{v}(q(t)) = \frac{d\xi(q(t))}{dt} = \frac{d\xi(q(t))}{dq} \frac{dq(t)}{dt} = J(q(t))\dot{q}(t),$$

wobei die Elemente  $v_{ij}$  von  $\mathbf{v}$  die translatorische Geschwindigkeit des Körpers  $i \in \{1, \dots, K\}$  in Richtung  $j \in \{x, y, z\}$  beschreiben und  $\omega_{ij}$  die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers  $i$  um die  $j$ -Achse. Im Folgenden wird die Zeitabhängigkeit häufig nicht explizit angegeben. Es gilt jedoch stets  $q = q(t)$ .

In einem kontaktlosen Zeitpunkt  $t \in [0, b]$  wirken keine externen Kräfte auf das System, was gleichbedeutend ist mit der Bedingung  $F(t) = 0$ . Eine Berechnung der wirkenden Kräfte entfällt somit. Daraus folgt, dass die Sprungfunktion  $\alpha \in BV([0, b])$  zum Zeitpunkt  $t$  konstant ist.

Zuerst wird nun eine grundlegende Überlegung angestellt, wie die Berechnung der Kontaktkräfte und somit auch des Zustands nach Kontakt abläuft. Details zu dieser Herleitung können in [Brach, 1989, Brach, 1998] und [Bowling et al., 2009] gefunden werden, wobei die Formulierung an das hier vorliegende Problem angepasst und erweitert wurde.

**Algorithmus 6.52: Berechnung der Kontaktreaktion**

1. Identifizierung aller in Kontakt stehender Körper zum Zeitpunkt  $\tau$ .
2. Projektion von  $J(q(\tau))$ , so dass nur die relevanten Geschwindigkeiten der aktiven Teilkörper berechnet werden.
3. Berechnung des lokalen Koordinatensystems normal und tangential zu den Kontaktpunkten auf den Kontaktflächen.
4. Transformation der globalen Geschwindigkeiten der relevanten  $d_{ij}$  in die lokalen Kontaktkoordinaten.
5. Berechnung des Zustands nach dem Stoß mittels verallgemeinerter Restitutionskoeffizienten.
6. Bestimmung der Funktion  $\alpha(\tau)$ .

Auf die einzelnen Schritte wird im Folgenden eingegangen.

## 6.6.2 Kontaktüberprüfung

### Identifikation der aktiven Kontakte

Zur Überprüfung, ob ein Kontakt geschlossen ist, wird zunächst eine geeignete Formulierung der Kontaktflächen benötigt. Diese seien mittels stetig differenzierbarer Funktionen  $c_k(x, y, z)$   $k = 1, \dots, C$ , gegeben. Für eine Koordinatenebene hat  $c$  folgende Gestalt:

$$c(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, c(x, z) = \begin{bmatrix} x \\ f(x, z) \\ z \end{bmatrix}, c(y, z) = \begin{bmatrix} f(y, z) \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Die Funktion  $f$  stellt hier jeweils eine Parametrisierung einer Ebene dar. Mit dieser Formulierung können beispielsweise Fahrbahnoberflächen abgebildet werden, weshalb sich im Folgenden auf diese Formulierung beschränkt wird. Jedoch können auch anders parametrisierte Kontaktbedingungen formuliert werden, wie beispielsweise eine Beschränkung, dass sich ein Körper innerhalb einer Kugel mit gegebenem Radius befindet.

Für jede Kontaktfläche muss definiert werden, auf welcher Seite sich das System befinden darf. Man denke dabei wiederum an eine Fahrbahnoberfläche oder eine Decke. Bei der Ersten darf sich das System darüber und bei der Zweiten lediglich darunter befinden. Dafür kann für jede Fläche ein Vektor definiert werden, der anzeigt, wo die zulässige Region bzgl. dieser Fläche ist. Dieser Indikator besitzt hier folgende Gestalt:

$$\boldsymbol{\nu}_k = \nu_k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \nu_k \in \{-1, 1\}.$$

$\nu_k = 1$  bedeutet, dass der in Koordinatenrichtung positive Bereich zulässig ist und  $\nu_k = -1$  entsprechend der negative Bereich. Sind alle Kontaktflächen definiert, so kann für jeden Teilkörper eine Distanzfunktion zu jeder Fläche definiert werden,

$$\rho_{jk} = \mathbf{r}_j(q) - c_k(x, y, z), \quad j = 1, \dots, K, \quad k = 1, \dots, C.$$

Der Körper befindet sich demnach im zulässigen Bereich, wenn

$$d_{jk} = \boldsymbol{\nu}_k^\top \rho_{jk} = \boldsymbol{\nu}_k^\top (\mathbf{r}_j(q) - c_k(x, y, z)) > 0, \quad j = 1, \dots, K, \quad k = 1, \dots, C,$$

gilt. Diese  $K \cdot C$  Nebenbedingungen können bei genauerer Kenntnis über das System zu den tatsächlich möglichen Kontakten reduziert werden. Bei einem Halbfahrzeug muss beispielsweise nicht getestet werden, ob das Chassis den Boden berührt, da dies in dem vereinfachten Modell nur durch die Reifen möglich ist. Kombiniert man die Elemente  $d_{jk}$  zur Zulässigkeitsmatrix  $D(q) \in \mathbb{R}^{K \times C}$ , so erhält man die Zulässigkeit des gesamten Systems durch komponentenweise Betrachtung der Zulässigkeitsungleichung

$$D(q) > 0.$$

Tritt nun ein Nulldurchgang eines Elements  $d_{jk}$  in  $D(q)$  auf, so bedeutet dies, dass der Teilkörper  $j$  mit der Kontaktfläche  $k$  kollidiert. Existieren ein oder mehrere  $d_{jk} \leq 0$ , so muss für jeden Kontakt die wirkende Kontaktreaktion berechnet werden. Die Körper mit zugehöriger Kontaktfläche, bei denen ein Kontakt auftritt, werden in der Menge der aktiven Kontakte

$$I_A(q) := \{(j, k) \mid \exists d_{jk} \leq 0\}$$

gelistet. Dabei ist zu beachten, dass eine Kontaktfläche und ein Körper mehrfach in dieser Menge auftauchen können. Die Mengen der aktiven Kontaktflächen (F) und Teilkörper (B) sind mit

$$I_{A,F}(q) := \{k \mid \exists (j, k) \in I_A(q)\}, \quad I_{A,B}(q) := \{j \mid \exists (j, k) \in I_A(q)\}$$

bezeichnet.

### Projektion von $J(q)$

Da  $J(q)\dot{q}$  die Geschwindigkeiten des gesamten Systems liefert, werden Werte berechnet, die zur Bestimmung der Kontaktdynamik nicht benötigt werden. Deshalb werden von  $J(q)$  lediglich die Zeilen ausgewählt, in denen Informationen über die relevanten Teilkörper stehen. Die Jacobi-Matrix der relevanten Teilkörper kann damit geschrieben werden als

$$\bar{J}(q) = (J_j(q)), \quad \text{mit } j \in I_{A,B}(q), \quad (6.35)$$

und der Definition von  $J_j(q)$  aus (6.33).



### 6.6.3 Berechnung der Kontaktimpulse

#### Berechnung des lokalen Kontaktkoordinatensystems

Zum Berechnen der Stoßdynamik werden nicht die Geschwindigkeiten im globalen Koordinatensystem, sondern im jeweils lokalen Kontaktsystem benötigt. Dies ist ein kartesisches Koordinatensystem, das eine Richtung normal zur Kontaktfläche im Berührungspunkt besitzt und deren andere Basisvektoren tangential zur Oberfläche stehen. Die Basis des Kontaktsystems lässt sich im Zweidimensionalen für die eingeführten Oberflächenparametrisierungen berechnen als:

$$\begin{aligned} c_k(x) = \begin{bmatrix} x \\ f_k(x) \end{bmatrix} : \quad \tilde{x}_{kt} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{df_k}{dx} \end{bmatrix}, & \tilde{x}_{kn} &= \nu_k \begin{bmatrix} -\frac{df_k}{dx} \\ 1 \end{bmatrix}, \\ c_k(y) = \begin{bmatrix} f_k(y) \\ y \end{bmatrix} : \quad \tilde{x}_{kt} &= \begin{bmatrix} \frac{df_k}{dy} \\ 1 \end{bmatrix}, & \tilde{x}_{kn} &= \nu_k \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{df_k}{dy} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Je nachdem, wie  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, C$ , definiert ist, muss die entsprechende Berechnungsmethode verwendet werden. Die Multiplikation mit  $\nu_k$  garantiert, dass die Normalenrichtung in den zulässigen Bereich zeigt.

Im dreidimensionalen Fall ergeben sich für die drei in (6.34) vorgestellten Parametrisierungen:

$$\begin{aligned} c_k(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f_k(x, y) \end{bmatrix} : \quad \tilde{x}_{kt} &= \frac{\partial c_k}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{kt'} = \frac{\partial c_k}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f_k}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{kn} = \nu_k (\tilde{x}_{kt} \times \tilde{x}_{kt'}) = \nu_k \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_k}{\partial x} \\ -\frac{\partial f_k}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} \\ c_k(x, z) = \begin{bmatrix} x \\ f_k(x, z) \\ z \end{bmatrix} : \quad \tilde{x}_{kt} &= \frac{\partial c_k}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial z} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{kt'} = \frac{\partial c_k}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial f_k}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{kn} = \nu_k (\tilde{x}_{kt} \times \tilde{x}_{kt'}) = \nu_k \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_k}{\partial x} \\ 1 \\ -\frac{\partial f_k}{\partial z} \end{bmatrix} \\ c_k(y, z) = \begin{bmatrix} f_k(y, z) \\ y \\ z \end{bmatrix} : \quad \tilde{x}_{kt} &= \frac{\partial c_k}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial y} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{kt'} = \frac{\partial c_k}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial z} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{kn} = \nu_k (\tilde{x}_{kt} \times \tilde{x}_{kt'}) = \nu_k \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial f_k}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_k}{\partial z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hierbei ist besonders auf die vertauschte Reihenfolge der Ableitungen von  $\tilde{x}_{kt}$  und  $\tilde{x}_{kt'}$  in der zweiten Berechnung zu achten.

Die lokalen Koordinatensysteme bestimmen sich aus den normierten Vektoren

$$T_k = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_{kn}}{\|\tilde{x}_{kn}\|} & \frac{\tilde{x}_{kt}}{\|\tilde{x}_{kt}\|} & \frac{\tilde{x}_{kt'}}{\|\tilde{x}_{kt'}\|} \end{bmatrix},$$

wobei die  $T_k$  orthogonale Transformationsmatrizen sind, d.h.  $T_k^\top = T_k^{-1}$ . Diese Transformationsmatrizen sind für alle  $k \in I_{A,F}(q)$  zu bestimmen und werden zur Transformationsmatrix

$$T := \begin{bmatrix} T_{k(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_{k(2)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & T_{k(m)} \end{bmatrix}$$

zusammengesetzt. Mit  $m = |I_{A,F}|$  und  $k(i)$  ist das  $i$ -te Element aus  $I_{A,F}$ . Da alle  $T_k$  invertierbar sind, gilt dies auch für  $T$ . Die Orthogonalität der  $T_k$  überträgt sich ebenfalls auf  $T$ .

### Bestimmung lokaler Kontaktgeschwindigkeiten

Die lokalen Kontaktgeschwindigkeiten in jedem Kontaktpunkt zwischen dem Körper  $j$  und der Kontaktfläche  $k$  können damit nun berechnet werden als

$$v_{jk}^c(q) = T_k^{-1}v_j(q) = T_k^{-1}J_j(q)\dot{q}.$$

Falls für einen Kontakt die Bedingung  $v_{jk,n} \leq 0$  nicht gilt, wird dieser aus der Liste der Kontakte entfernt, d.h.  $I_A(q) = I_A(q) \setminus \{(j, k) \mid v_{jk,n} > 0\}$ . Gegebenenfalls müssen auch die Mengen  $I_{A,F}$  und  $I_{A,B}$  und die Matrizen  $T$  und  $\bar{J}(q)$  aktualisiert werden. Die Bedingung garantiert, dass nur kompressive Kontakte berücksichtigt werden. Ein Kontakt mit  $d_{jk} = 0$  und  $v_{jk,n}^c > 0$  wird sich ohne Einwirken externer Kräfte wieder trennen. Eine Anwendung eines Stoßgesetzes würde hier falsche Resultate liefern. Fasst man alle Kontaktpunkte zusammen erhält man

$$v^c(q) = T^{-1}\bar{J}(q)\dot{q} = \mathcal{J}(q)\dot{q}, \quad \text{mit} \quad \mathcal{J}(q) = T^{-1}\bar{J}(q).$$

### Bestimmung des Post-Impact-Zustands

Nach den bisherigen Vorbereitungen besteht der nächste Schritt in der Bestimmung des Post-Impact Zustands. Dabei wird die Annahme getroffen, dass in Normalenrichtung jedes Stoßes das Newtonsche Stoßgesetz gilt, d.h.

$$v_{jk,n}^{c+} - e_{jk,n}v_{jk,n}^{c-} = 0.$$

Hierbei wird  $e_{jk,n}$  als *Coefficient of Restitution* (COR), also als Restitutionskoeffizient, in Normalenrichtung bezeichnet. Zur vollständigen Bestimmung der Geschwindigkeiten nach dem Stoß werden noch weitere Koeffizienten eingeführt, vgl. [Brach, 1998]. Für jeden im allgemeinen dreidimensionalen Kontaktpunkt wird ein Tripel  $(e_{jk,n}, e_{jk,t}, e_{jk,t'})$  benötigt, welches sowohl den Restitutionskoeffizienten in Normalenrichtung, als auch zwei weitere Koeffizienten für die Tangentialrichtungen beinhaltet. Die Geschwindigkeit nach dem Kontakt kann damit geschrieben werden mittels

$$v_{ij,k}^{c+} - e_{ij,k}v_{ij,k}^{c-} = 0, \quad (i, j) \in I_A(q), \quad k \in \{n, t, t'\}.$$

Fasst man dies zu einer vektoriellen Gleichung zusammen, erhält man

$$\mathbf{v}^{c+} = E\mathbf{v}^{c-}, \tag{6.36}$$

wobei  $E$  eine Diagonalmatrix mit den CORs auf der Diagonalen ist,  $E = \text{diag}(e_{jk,n}, e_{jk,t}, e_{jk,t'})$ . Lediglich für die Normalenkomponenten  $e_{jk,n}$  besteht die Beschränkung  $-1 \leq e_{jk,n} \leq 0$ , womit ein energiekonsistentes Abprallen erreicht wird.

Die Herleitung des Stoßgesetzes wird hier analog zu [Bowling et al., 2009] durchgeführt. Dafür sei angenommen, dass der Kontakt auf dem nichtleeren Intervall  $[t^-, t^+]$  stattfindet. Nur auf diesem kann eine Kraft wirken und es gilt

$$\int_{t^-}^{t^+} (M\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + k(q(t)))dt = \int_{t^-}^{t^+} J^\top(q)Fdt. \tag{6.37}$$

Zuerst werden in der rechten Seite der Gleichung die Elemente aus  $F$  eliminiert, welche auf Körper wirken, die nicht am Stoß beteiligt sind. Wendet man die Reduktion aus (6.35) auch auf  $F$  an, so reduziert sich (6.37) zu

$$\int_{t^-}^{t^+} (M\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + k(q(t)))dt = \int_{t^-}^{t^+} \bar{J}^\top \bar{F}dt.$$

Da nun nicht die Kräfte im Inertialsystem, sondern lediglich die im jeweils lokalen Kontaktsystem wirkenden Kräfte berechnet werden können, wird die Gleichung weiter transformiert.

$$\begin{aligned}
& \int_{t^-}^{t^+} (M\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + k(q(t))) dt = \int_{t^-}^{t^+} \bar{J}^\top T T^\top \bar{F} dt \\
\Leftrightarrow & \int_{t^-}^{t^+} (M\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + k(q(t))) dt = \int_{t^-}^{t^+} (T^\top \bar{J})^\top T^\top \bar{F} dt \\
\Leftrightarrow & \int_{t^-}^{t^+} (M\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + k(q(t))) dt = \int_{t^-}^{t^+} \mathcal{J}^\top \mathcal{F} dt.
\end{aligned}$$

Aufgrund des sehr kurzen Zeitintervalls werden die Gewichtskraft- und Kopplungskräfte keine Änderung erfahren und es bleibt lediglich

$$\begin{aligned}
& M(\dot{q}(t^+) - \dot{q}(t^-)) = \mathcal{J}^\top \mathbf{p} \\
\Leftrightarrow & \dot{q}(t^+) - \dot{q}(t^-) = M^{-1} \mathcal{J}^\top \mathbf{p} \\
\Leftrightarrow & \bar{J}(\dot{q}(t^+) - \dot{q}(t^-)) = \bar{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top \mathbf{p} \\
\Leftrightarrow & T^\top \bar{J}(\dot{q}(t^+) - \dot{q}(t^-)) = T^\top \bar{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top \mathbf{p} \\
\Leftrightarrow & \mathbf{v}^{c^+} - \mathbf{v}^{c^-} = \mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top \mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Dabei wurde der Übergang von einer kraftbezogenen Darstellung hin zu einer impulsiven Formulierung durchgeführt. Der wirkende Impuls ist  $\mathbf{p}$ . Zusammen mit (6.36) und der Invertierbarkeitsannahme an  $\mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top$  vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
& (E - \mathbb{I}) \mathbf{v}^{c^-} = \mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top \mathbf{p} \\
\Leftrightarrow & (\mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top)^{-1} (E - \mathbb{I}) \mathbf{v}^{c^-} = \mathbf{p} \\
\Leftrightarrow & (\mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top)^{-1} (E - \mathbb{I}) \mathcal{J} \dot{q}(t^-) = \mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Einsetzen von (6.39) in (6.38) liefert schließlich

$$\begin{aligned}
& \dot{q}(t^+) - \dot{q}(t^-) = M^{-1} \mathcal{J}^\top (\mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top)^{-1} (E - \mathbb{I}) \mathcal{J} \dot{q}(t^-) \\
\Leftrightarrow & \dot{q}(t^+) = \dot{q}(t^-) + M^{-1} \mathcal{J}^\top (\mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top)^{-1} (E - \mathbb{I}) \mathcal{J} \dot{q}(t^-) \\
\Leftrightarrow & \dot{q}(t^+) = (\mathbb{I} - \underbrace{M^{-1} \mathcal{J}^\top (\mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top)^{-1} \mathcal{J}}_{\bar{\mathcal{J}}} + M^{-1} \mathcal{J}^\top (\mathcal{J} M^{-1} \mathcal{J}^\top)^{-1} E \mathcal{J}) \dot{q}(t^-) \\
& \dot{q}(t^+) = (\mathbb{I} - \bar{\mathcal{J}} \mathcal{J} + \bar{\mathcal{J}} E \mathcal{J}) \dot{q}(t^-).
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Mit (6.40) ist nun eine Formel gefunden, mit der der Zustand nach dem Kontakt berechnet werden kann. Unbekannt sind hier noch die tangentialen Elemente von  $E$ . Diese müssen in einem weiteren Schritt bestimmt werden.

#### Bemerkung 6.53: Lösbarkeit

Damit Gleichung (6.40) eine Lösung besitzt, muss  $\bar{\mathcal{J}}$  existieren, was an die Invertierbarkeit von  $\mathcal{J}$  gekoppelt ist. Dies ist wiederum der Fall, wenn  $\bar{J}(q)$  invertierbar ist.

### Energiekonsistente Berechnung der Elemente von $E$

Für die Bestimmung der unbekanntenen Elemente von  $E$  wird angenommen, dass die CORs in Normalenrichtung bekannt sind und eine Abnahme der Energie implizieren, d.h.  $e_{jk,n} \in [-1, 0]$ . Nicht nur in Normalenrichtung muss das System energiekonsistent sein. Da es sich um passive Kontakte handelt, muss der Energieverlust insgesamt positiv sein.

Zur Bestimmung der wirkenden Reibungskräfte soll das Coulomb-Reibungsmodell herangezogen werden. Dies besagt im Allgemeinen

$$p_{fr} \leq \mu p_n,$$

was eine obere Schranke an den wirkenden Reibungsimpuls während des Kontakts darstellt. Damit das System dissipativ bleibt, muss die Gesamtenergie, also die Summe aus potentieller und kinetischer Energie, stets abnehmen. Da sich die potentielle Energie im betrachteten sehr kurzen Zeitraum des Kontakts nicht verändert, muss eine Abnahme der kinetischen Energie des Systems gefordert werden, d.h.

$$\dot{q}(t^+)^T M \dot{q}(t^+) = K^+ \leq K^- = \dot{q}(t^-)^T M \dot{q}(t^-).$$

Unter der Verwendung des *Prinzips der maximalen Dissipation*, d.h. dass die maximal mögliche Energie aus dem System abfließt, erhält man das folgende Minimierungsproblem.

#### Problem 6.54: Kontaktminimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{e_{jk,t}, e_{jk,t'}, (j,k) \in I_A} \quad & K^+(E) = \dot{q}(t^+)^T M \dot{q}(t^+), \\ \text{u.d.Nb.} \quad & \dot{q}(t^+) = (\mathbb{I} - \bar{\mathcal{J}}\mathcal{J} + \bar{\mathcal{J}}E\mathcal{J})\dot{q}(t^-), \\ & \mathbf{p}(E) = (\mathcal{J}M^{-1}\mathcal{J}^\top)^{-1}(E - \mathbb{I})\mathcal{J}\dot{q}(t^-), \\ & \|(p_{jk,t}(E), p_{jk,t'}(E))\|_2^2 \leq (\mu(j,k)p_{jk,n})^2, \quad \forall (j,k) \in I_A(q). \end{aligned}$$

Wobei  $\mu(j,k)$  der Reibungskoeffizient zwischen Körper  $j$  und Oberfläche  $k$  ist.

Setzt man in die Zielfunktion  $K^+(E)$  Gleichung (6.40) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} K^+(E) &= \dot{q}(t^+)^T M \dot{q}(t^+) \\ &= ((\mathbb{I} - \bar{\mathcal{J}}\mathcal{J} + \bar{\mathcal{J}}E\mathcal{J})\dot{q}(t^-))^T M ((\mathbb{I} - \bar{\mathcal{J}}\mathcal{J} + \bar{\mathcal{J}}E\mathcal{J})\dot{q}(t^-)) \\ &= \dot{q}(t^-)^T ((\mathbb{I} - \bar{\mathcal{J}}\mathcal{J}^\top)^{-1}\mathcal{J} + \bar{\mathcal{J}}E\mathcal{J})^\top M \underbrace{((\mathbb{I} - \bar{\mathcal{J}}\mathcal{J}^\top)^{-1}\mathcal{J} + \bar{\mathcal{J}}E\mathcal{J})}_{:=\mathcal{S}(E)} \dot{q}(t^-) \\ &= \dot{q}(t^-)\mathcal{S}(E)^\top M \mathcal{S}(E)\dot{q}(t^-). \end{aligned}$$

Da  $M$  als Massenmatrix positiv definit ist, gilt dies auch für  $\mathcal{S}(E)^\top M \mathcal{S}(E)$ . Deshalb handelt es sich bei dem obigen Problem um ein konvexes Zielfunktional. Die Längenbeschränkung an den Reibeimpuls liefert jedoch eine nichtlineare Nebenbedingung. Insgesamt bleibt das Problem konvex.

### Setzen des neuen Zustands

Nach Lösung des oben beschriebenen Problems ist der Post-Impact-Zustand des Systems bekannt und die Sprungfunktion  $\alpha$  kann in der Integrationsroutine des Stieltjes-Integrals wie folgt gesetzt werden:

$$\alpha[x(t)](t) = \alpha[x(t^-)](t^-) + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{q}(t^+) - \dot{q}(t^-) \end{pmatrix}$$

Damit wird erreicht, dass die neue Geschwindigkeit nach dem Kontakt der in der Kontaktproblem Berechneten entspricht. Da für die Integration mit dem verwendeten Integrationsverfahren das System auf erste Ordnung transformiert wurde, entspricht dies lediglich einer Änderung in der Geschwindigkeitskomponenten und die verallgemeinerten Koordinaten bleiben konstant.

### Transformation in ein System erster Ordnung

Die in (6.32) gegebene Gleichung kann in ein System erster Ordnung transformiert werden, indem der Zustand um die verallgemeinerten Geschwindigkeiten erweitert wird, d.h.  $x = [q \ \dot{q}]^\top$ . Damit wird aus (6.32)

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M(q) \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

wobei  $\mathbb{I}_n$  die  $n \times n$  Einheitsmatrix darstellt.

#### 6.6.4 Beispiele

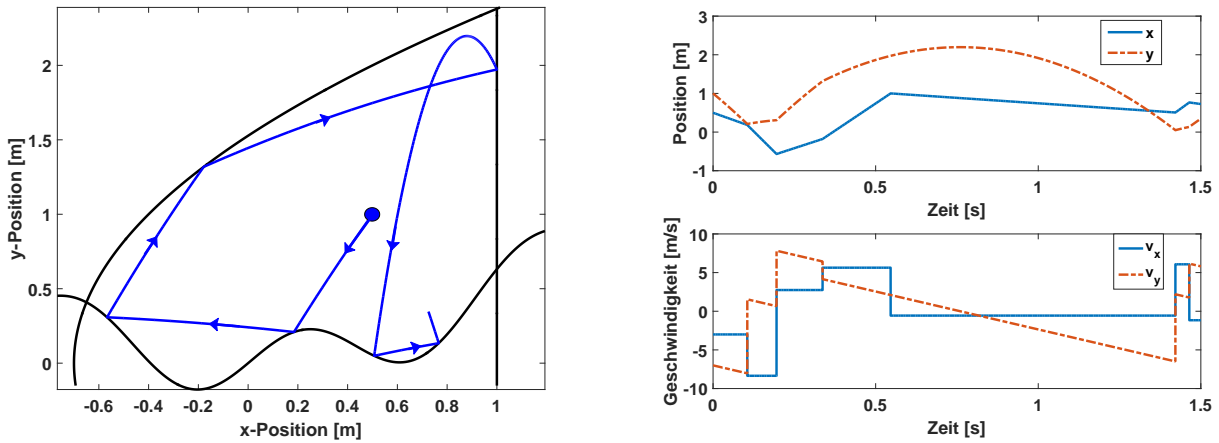
Nachdem nun alle notwendigen Hintergründe bekannt sind, werden einige Beispiele impulsiver Systeme vorgestellt, wobei besonders auf die Definition von Beschränkungen und relevanter Modelle der vertikalen Fahrzeugdynamik eingegangen wird.

#### Ball in der Box

Um sowohl die Reibeffekte, als auch die Betrachtung von Beschränkungen zu erläutern, wird das Beispiel des einfachen hüpfenden Balls auf das hier als *Ball in der Box* bezeichnete Problem erweitert. Dabei werden die Beschränkungen so gewählt, dass sie ein zulässiges Gebiet ergeben, das beschränkt und abgeschlossen ist. Die hier verwendeten Beschränkungen mit zulässiger Gebietsangabe und den entsprechenden Restitutions- und Reibkoeffizienten lauten:

$i$	1	2	3
$g_i(x, y)$	$g_1(x) = 0.2 \sin(7x)$	$g_2(y) = -0.7 + 0.3y^2$	$g_3(y) = 1.0$
$\nu_i$	1	1	-1
$e_{1i,n}$	1.0	1.0	0.1
$\mu_{1,i}$	0.01	0.0	0.0

Als Anfangsposition wird ein zulässiger Zustand  $x_0 = [0.2 \ 1.4]^\top$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = [-6.0 \ -6.0]^\top$  gewählt. Die Simulationsdauer beträgt 3 Sekunden. In den Abbildungen 6.8a, 6.8b sowie 6.9 sind die Zustände des Balls über der Zeit und die Trajektorie bzw. Energieentwicklung dargestellt. An der Trajektorie wird gut ersichtlich, dass die Position und insbesondere das Abprallverhalten des Balls dem intuitiv Erwarteten entspricht.



(a) Tajektorie des Balls mit eingezeichneten Beschränkungen

(b) Darstellung der Positions- und Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ - (durchgezogen) und  $y$ -Richtung (gestrichelt)

Abbildung 6.8: Darstellung der Zustandstrajektorie in Zustands- und verallgemeinerten Koordinaten

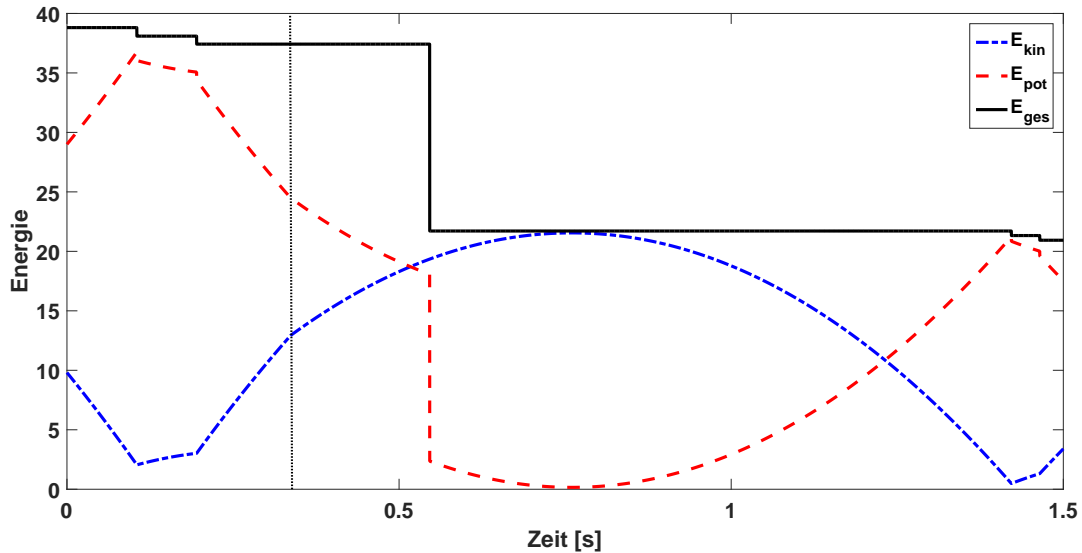


Abbildung 6.9: Entwicklung der kinetischen (gestrichpunktet), potentiellen (gestrichelt) und der Gesamtenergie (durchgezogen) des Balles

Bei der Entwicklung der Energie ist zum einen wichtig, dass diese zu keinem Zeitpunkt einen Zuwachs erhält, was der Dissipativität des Systems an den Kontaktpunkten entspricht, zum anderen, dass die Energie bei Kontakten mit einem Restitutionskoeffizienten kleiner 1 und/oder einem Reibkoeffizienten größer 0 auch tatsächlich abnimmt. Die Koeffizienten der einzelnen Beschränkungen sind hier so gewählt, dass möglichst alle Fälle abgedeckt werden. So findet bei einem Kontakt mit  $g_1$  lediglich ein Energieverlust aufgrund von Reibung statt,  $g_2$  ist völlig verlustfrei und bei  $g_3$  tritt keine Reibung auf. Der Restitutionskoeffizient ist jedoch mit  $e_{n3} = 0.1$  sehr gering, was zu einem schwachen Abprallen führt. Bei Betrachtung von Abbildung 6.9 wird der geringe Energieverlust aufgrund der Reibung bei den ersten und letzten beiden Kontakten deutlich. Beim dritten Kontakt, in der Grafik durch die vertikale gestrichelte Linie markiert, bleibt die Gesamtenergie konstant, was dem vorgeschriebenen Verhalten entspricht.

### Viertelfahrzeug

Als nächstes wird ein Beispiel des Viertelfahrzeugmodells untersucht. Da es sich bei der Darstellung der Kontaktflächen nicht um eine Zeit Auslenkung ( $z(t)$ ), sondern um eine  $x$ - $z$ -Darstellung ( $c(x, z) = [x \ z(x)]^\top$ ) handelt, muss das Viertelfahrzeugmodell, wie in Bemerkung 6.51 erläutert, um eine zusätzliche Dimension, der aktuellen  $x$ -Position erweitert werden. Die zugehörigen Differentialgleichungen haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, \\ \dot{v}_x &= 0.0.\end{aligned}$$

Für die Modellierung als System erster Ordnung werden demnach zwei zusätzliche Differentialgleichungen benötigt. Die Geschwindigkeit erfährt jedoch keine beschleunigenden oder bremsenden Kräfte. Die Veränderung der Geschwindigkeit wird lediglich durch die Reibung zum Kontaktzeitpunkt hervorgerufen.

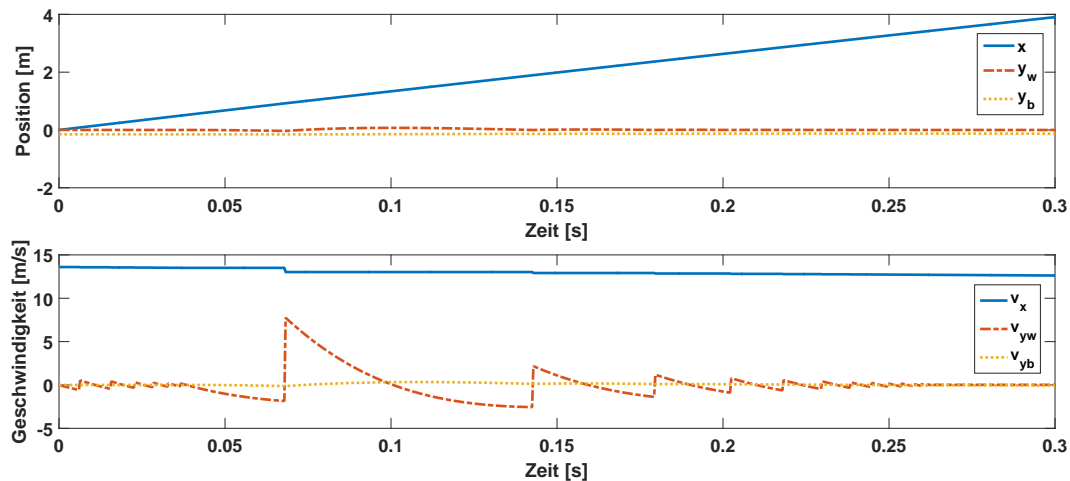


Abbildung 6.10: Zeitliche Entwicklung der verallgemeinerten Koordinaten eines Viertelfahrzeugs bei Überfahrt eines Schlaglochs

In den Abbildungen 6.10 und 6.11 ist eine beispielhafte Überfahrt eines Schlaglochs  $\mathcal{P}(-0.05, 0.6)$  dargestellt. Bei der Überfahrt mit der Anfangsgeschwindigkeit  $13.6 \text{ m/s}$  tritt ein Kontaktverlust zwischen Reifen und Boden auf, worauf ein in der ansteigenden Kante des Schlaglochs lokalisierter Zusammenstoß folgt, der ein Hüpfen des Reifens verursacht. Ebenfalls wird deutlich, dass die Translationsgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung im Laufe des Prozesses abnimmt, von  $13.6 \text{ m/s}$  auf etwa  $12.6 \text{ m/s}$ . Dies resultiert aus dem gewählten Reibkoeffizienten  $\mu = 0.25$ . Der Restitutionskoeffizient ist hier zu  $e_n = 0.85$  gewählt. Wird der Reibkoeffizient auf 0 gesetzt, so ändert sich die Geschwindigkeit lediglich bei dem Kontaktpunkt im Schlagloch, da hier der wirkende Impuls eine  $x$ -Komponente ungleich 0 hat.

### Halbfahrzeug

Nun wird auch das Halbfahrzeugmodell für die vorgestellte Formulierung angepasst und die daraus resultierenden Simulationsergebnisse gezeigt. Für die benötigte Darstellung der Kontaktformulierung muss das Halbfahrzeugmodell ebenfalls erweitert werden. Ein analoges Vorgehen zum Viertelfahrzeug führt nicht sofort zum gewünschten Ergebnis. Aufgrund der Kopplung der drei Massen in der

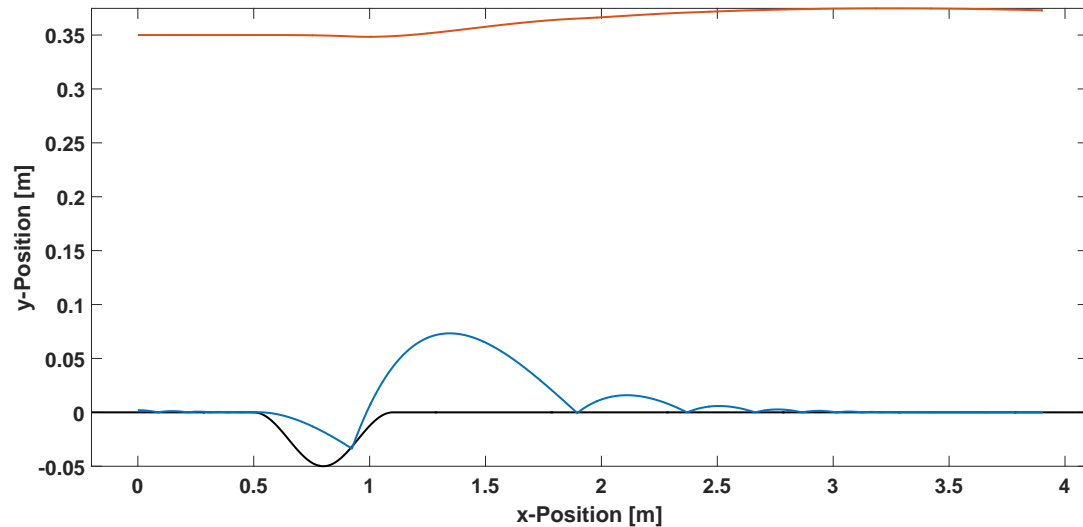


Abbildung 6.11: Zustandstrajektorie eines Viertelfahrzeugs bei Überfahrt eines Schlaglochs

Vorwärtsbewegung genügt es nicht, für Aufbau und Reifen lediglich einen gemeinsamen  $x$ -Zustand hinzuzunehmen. Bei Betrachtung einer Masse in  $x$ -Richtung, die sich aus der Summe der drei Einzelmassen zusammensetzt, kommt es bei gleichzeitigem Kontakt beider Räder in der Optimierungsroutine der Kontaktkoeffizienten unter Umständen zu Problemen. Dies liegt daran, dass die Transformationsmatrix  $\mathcal{J}$  hier eine sehr schlechte Kondition aufweist bzw. sogar singulär wird. Die Massen müssen demnach separat betrachtet werden.

Eine Idee dies einzuarbeiten wäre, zusätzliche algebraische Gleichungen einzuführen, die besagen, dass die Geschwindigkeiten zu jedem Zeitpunkt identisch sein müssen. Da die verwendeten Integrationsverfahren jedoch nicht für Differential-Algebraische-Gleichungen entwickelt wurden, wird hier eine andere Methode verwendet, die die algebraischen Bedingungen zumindest approximiert. Es wird dafür eine Modifikation des Systems mit Hilfe zweier zusätzlicher Freiheitsgrade eingeführt. Der Radaufhängungspunkt des Vorder- als auch des Hinterrads wird jeweils mit Hilfe eines Feder-Dämpfer-Elements mit dem Massenpunkt des Aufbaus in  $x$ -Richtung verbunden. Dadurch werden die horizontalen Geschwindigkeiten entkoppelt. Um trotzdem kein allzu elastisches System zu bekommen, müssen die Federsteifigkeit ( $300000.0 \text{ N/m}$ ) und Dämpferkonstante ( $10000.0 \text{ kgm}^2/\text{s}$ ) relativ groß gewählt werden. Dass diese Modellerweiterung nicht vollständig aus der Luft gegriffen ist, kann damit begründet werden, dass selbst bei einem sehr steifen Fahrwerk stets Verwindungen stattfinden und somit der Radstand nicht 100-prozentig konstant bleibt. Im Bezug auf die numerische Integration liefert diese Erweiterung, neben den zusätzlichen Zuständen, aufgrund der hohen Federsteifigkeit, eine Versteifung des Differentialgleichungssystems, was im Allgemeinen zu Problemen bei der Integration führen kann. Mit den verwendeten Algorithmen und Schrittweiten verursacht dies jedoch keine bemerkbaren Probleme.

Für dieses Beispiel wird eine Schwellenüberfahrt,  $\mathcal{P}(0.05, 0.5)$ , mit einer Geschwindigkeit von  $13.6 \text{ m/s}$  betrachtet. In den Abbildungen 6.12 und 6.13 sind die zeitliche Entwicklung einiger verallgemeinerter Koordinaten, sowie deren Ableitung und die Zustandstrajektorie des Fahrzeugs dargestellt. Wie zu erwarten war, verliert das jeweilige Rad bei der Überfahrt über die Schwelle den Bodenkontakt, bevor es sich nach mehreren Kontakten dem dauerhaften Kontaktzustand wieder nähert.



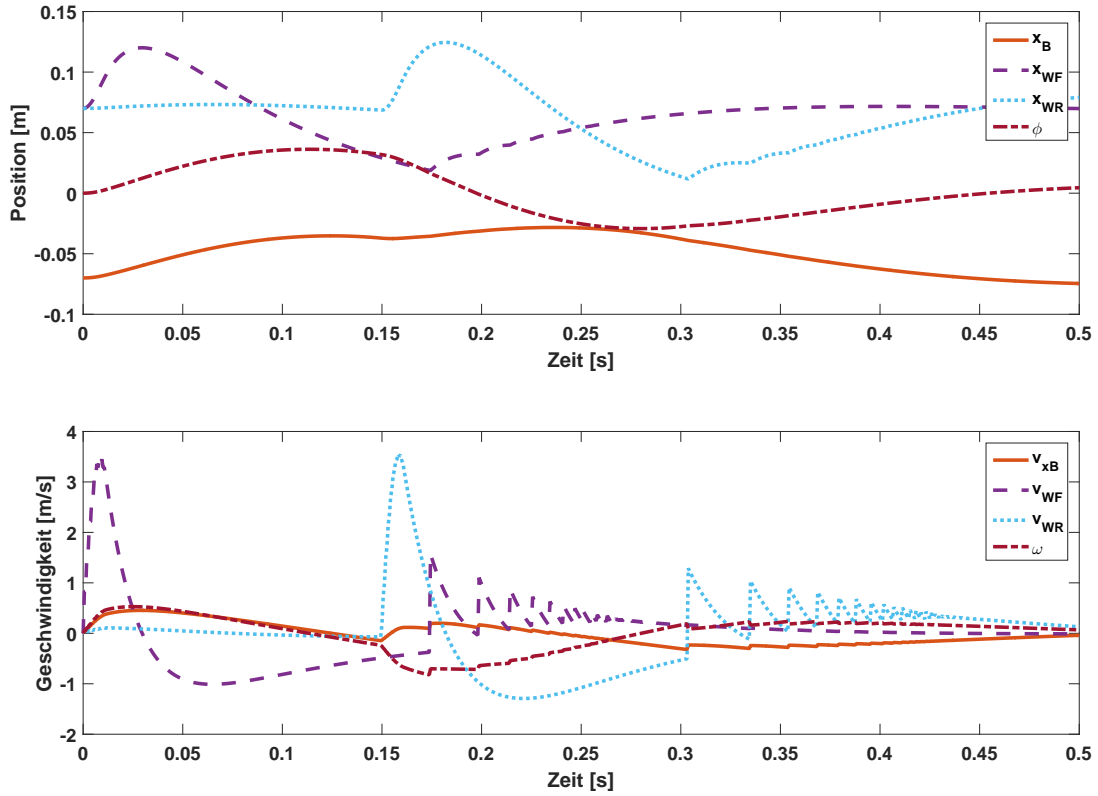


Abbildung 6.12: Zeitliche Entwicklung der verallgemeinerten Koordinaten eines Halffahrzeugs bei Überfahrt einer Bodenschwelle

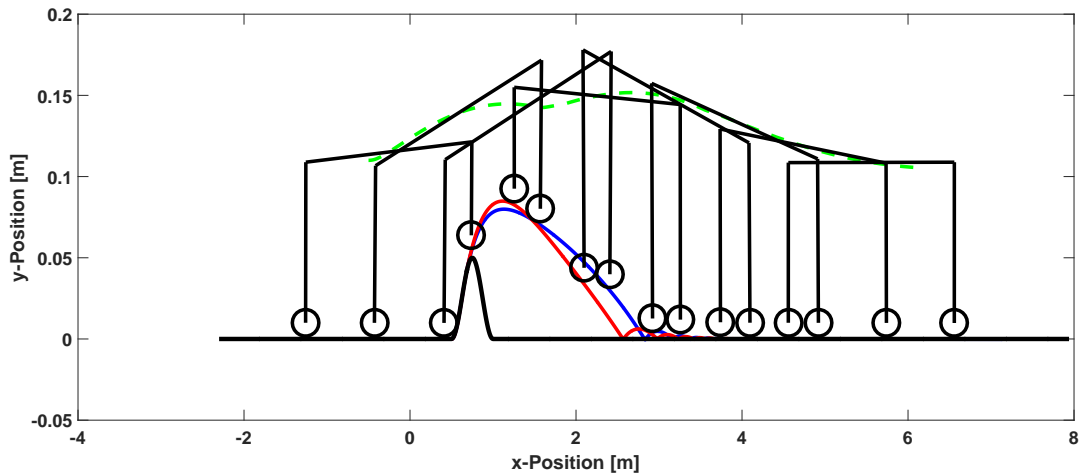


Abbildung 6.13: Darstellung der Trajektorie des Halffahrzeugmodells

### 6.6.5 Zeno-Verhalten

Ein Problem, das bei impulsiven Systemen dieser Art auftritt, ist das so genannte *Zeno*-Verhalten, vgl. [Heymann et al., 2002, Zheng et al., 2006]. Es beschreibt den Fall des Auftretens eines Häufungspunkts der Kontakte zweier Körper. Man stelle sich einen Ball vor, bei dem die Zeit zwischen zwei Aufprallzeitpunkten mit dem Boden sich jeweils halbiert, beginnend mit einer Zeitdifferenz von einer

Sekunde. Es wird zwangsläufig zu unendlich vielen Kontakten vor dem Zeitpunkt 2 Sekunden kommen, da sich die Kontaktzeitpunkte als geometrische Reihe darstellen lassen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$$

Wird ein Integrationsverfahren mit Kontaktlokalisierung verwendet und dieses Verhalten nicht separat behandelt, so führt dies dazu, dass die Integration nicht voranschreiten kann.

Da das vorgestellte Integrationsverfahren ohne eine exakte Kontaktlokalisierung auskommt, kann es nicht vorkommen, dass der zeitliche Fortschritt anhält. Dies ist ein grundlegender Vorteil der betrachteten Methodik. Jedoch führt die ungenaue Kenntnis über die Kontakte zu einem anderen Phänomen, das betrachtet werden muss. So kommt es je nach gewählter Schrittweite zu einem Wegdriften des Zustands in den unzulässigen Bereich, was daran liegt, dass lediglich ein Geschwindigkeits- aber kein Positionsupdate an Kontaktpunkten durchgeführt wird. Die neue Geschwindigkeit garantiert nicht, dass sich der Zustand bis zum nächsten Diskretisierungspunkt wieder in den zulässigen Bereich bewegt. Dieses Drift-Off-Verhalten kann numerisch minimiert werden, indem die Diskretisierungsschrittweite verkleinert wird. In Abbildung 6.14 ist der Effekt für verschiedene Schrittweiten am Beispiel eines Viertelfahrzeugs auf einer ebenen Fläche dargestellt. Je feiner die Diskretisierung, desto geringer wird die Interpenetration des unzulässigen Bereichs.

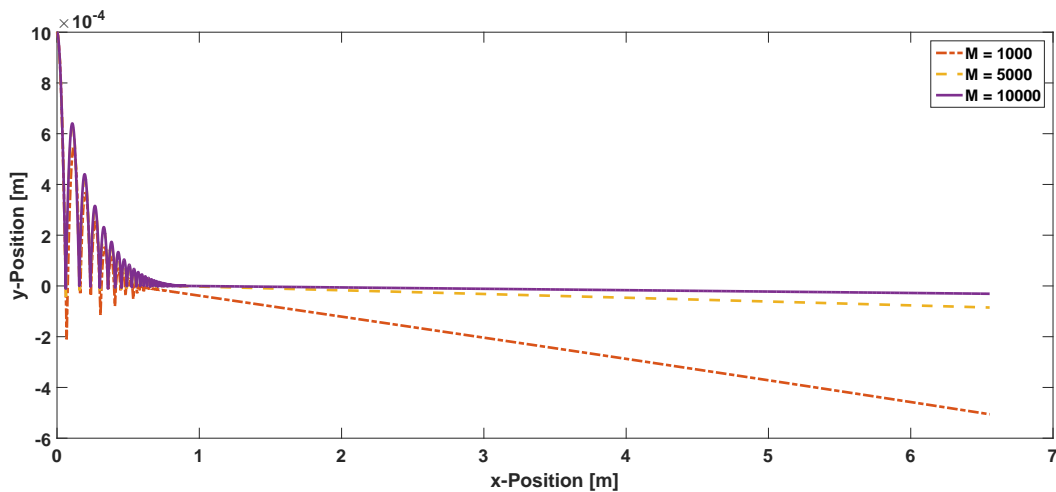


Abbildung 6.14: Veranschaulichung des Drift-Off-Effekts am Beispiel eines Viertelfahrzeugs für verschiedene Schrittweiten

Wird dieses Verhalten festgestellt, so wäre eine Möglichkeit auf die kontinuierliche Formulierung umzuschalten und für den Fall, dass die negativ wirkende Kraft auf den Reifen eine gegebene Schranke überschreitet, wieder zurück zur impulsiven Dynamik zu wechseln. Da bei dauerhaftem Kontakt in jedem Zeitschritt das Kontaktproblem gelöst werden muss, hätte dies auch den Vorteil, dass die Rechenzeiten deutlich reduziert werden können. Alternativ kann auch über eine Aktualisierung des Positionszustands mit Hilfe der Funktion  $\alpha$  nachgedacht werden, wodurch dieser dann jedoch nicht mehr stetig wäre.

# Kapitel 7

## Optimale Steuerung impulsiver Systeme

### 7.1 Vorangegangene Arbeiten

#### Optimale Steuerung mit Sprüngen

Ein Optimalsteuerungsproblem für ein System mit zustandsabhängigen Sprüngen zu betrachten ist nicht neu. Bereits 1965 untersuchte [Dickerson et al., 1965] eine ähnliche Problematik im Rahmen von mehrstufigen Raketen. Für die Differentialgleichungsformulierung mit zeit- und zustandsabhängigen Sprungbedingungen werden darin im Kontext der Variationsrechnung notwendige Bedingungen hergeleitet. In [Getz und Martin, 1980] werden ebenfalls Optimalsteuerungsprobleme mit Unstetigkeiten in den Zustandsvariablen betrachtet. Dort werden mit Hilfe geeigneter Transformationen im Rahmen des Maximum-Prinzips der optimalen Steuerung Bedingungen an die Hamilton-Funktion gezeigt. Auch hier ist die Systemdynamik in Form von Differentialgleichungen gegeben und die Sprungbedingungen sind explizit als Nebenbedingungen formuliert.

Da diese Arbeit eine abweichende Formulierung des Optimalsteuerungsproblems in Form einer Riemann-Stieltjes-Integralgleichung verwendet und nicht auf das Minimum-Prinzip eingeht, bieten diese Arbeiten keine direkte Vergleichsmöglichkeit. In anschließenden Forschungsarbeiten kann jedoch untersucht werden, ob sich diese Resultate auf das vorliegende Problem anwenden lassen.

#### Sensitivitätsanalyse unstetiger Prozesse

Im Jahr 1967 wird in [Rozenvasser, 1967] eine allgemeine Herleitung von Parametersensitivitäten von Differentialgleichungssystemen mit Sprüngen der Zustandsvariablen gegeben. In [Galán et al., 1999] und [Feehery, 1998] wird diese Theorie in Bezug auf hybride Systeme erweitert und erstmals Existenz und Eindeutigkeitsaussagen bzgl. Parametersensitivitäten hergeleitet. [Pfeiffer, 2008] zeigt eine übersichtliche Darstellung der Existenzaussagen von Sensitivitäten hybrider Systeme, sowie Erweiterungen bezüglich so genannter Filippov-Lösungen. Ähnliche Darstellungen sind ebenfalls in [Gerds, 2003] und [Burger und Gerds, 2016] zu finden.

Im Folgenden soll ein anderer Weg zum Nachweis der Existenz von Sensitivitäten eingeschlagen werden. Dieser Weg wurde aufgrund des zugrundeliegenden Problems und dessen Formulierung mittels einer Integralgleichung und implizit definierten Unstetigkeiten gewählt. Die Resultate werden im Anschluss

mit den bekannten Ergebnissen für hybride Systeme verglichen und in Verbindung gebracht.

## 7.2 Parametersensitivitäten des impulsiven Systems

Nachdem bisher die Steuerung des impulsiven Systems vernachlässigt wurde, werden im Folgenden Differenzierbarkeitseigenschaften bzgl. der Steuerung betrachtet. Auch wenn der Zustand selbst bzgl. der Zeit nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar ist, stellt sich die Frage, wie er sich verändert, wenn leicht variierte Steuerungen angewandt werden, d.h. ob Sensitivitäten bzgl. der Steuerung existieren.

Im Folgenden wird die Steuerung in diskretisierter Form  $u(t;p)$  nach Gleichung (3.29) dargestellt. Für die Diskretisierungsparameter gilt  $p_u \in \mathbb{R}^{M+k+1}$ , wobei  $M$  die Anzahl der Diskretisierungsintervalle und  $k$  die Ordnung der B-Spline Interpolation darstellt. Zusätzlich kann der Anfangswert  $x_a = x(p)(t_0)$  ebenfalls als Parameterabhängig betrachtet werden. Die einfachste Möglichkeit stellt ein freier Anfangswert dar, für den gilt  $x(t_0, p) = p_{x_0} \in \mathbb{R}^n$ . In diesem Fall gilt  $p = [p_{x_0}, p_u]^\top$ . Die Dimension von  $p$  sei mit  $n_p$  bezeichnet. Um die Abhängigkeit des Zustands von  $p$  deutlich zu machen, wird im Folgenden  $x(p)(\cdot)$  als Notation verwendet. Mit  $x(p) \in BV([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$  wird die Trajektorie von  $x$  mit Steuerung  $u(\cdot; p)$  bezeichnet. Die Sensitivität bezeichnet nun die Ableitung des Zustands nach den Parametern und schreibt sich formal wie folgt:

$$S(p)(t) = \frac{\partial x(p)}{\partial p}(t) = \frac{\partial}{\partial p} \left( x(p)(t_0) + \int_{t_0}^t F(x(p)(\tau), u(\tau; p)) d\tau + \int_{t_0}^t G(x(p)(\tau)) d\alpha[x(p)](\tau) \right).$$

Zuerst wird die Sensitivität bezüglich des Anfangswerts betrachtet.

### Satz 7.1: Sensitivität des Anfangswerts

Sei der Anfangswert gegeben durch die Relation

$$x(p)(t_0) = A(p),$$

mit differenzierbarer Funktion  $A$ . Dann existiert der Anfangswert der Sensitivität  $S(p)(t_0)$  und ist gegeben durch

$$S(p)(t_0) = \frac{dA(p)}{dp}.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich durch direktes Differenzieren der Anfangsbedingung. In [Pfeiffer, 2008] ist eine nicht autonome Version dieses Satzes mit Beweis zu finden. Für einen fest vorgegebenen Anfangswert erhält man

$$S(p)(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n_p}. \quad (7.1)$$

Um die Notation etwas zu vereinfachen, wird die Anfangszeit  $t_0 = 0$  gewählt und sowohl  $F$ , als auch  $G$  als autonom angenommen. Für die folgenden Betrachtungen sei angenommen, dass  $\alpha$  lediglich vom Zustand  $x(p)(t)$  und nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt. Die Kontaktpunkte seien mit  $\tau_i, i = 1, \dots, n_K$ , bezeichnet und zusätzlich sei angenommen, dass die Zahl der Kontaktpunkte im Intervall  $[0, t_f]$  abzählbar ist. Daraus folgt, dass die Intervalle  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$  nicht leer sind. Die Sprungfunktion  $\alpha$  besitze hier zusätzlich folgende Eigenschaft:

**Definition 7.2: Differenzierbarkeit der Sprungfunktion am Kontaktpunkt**

Eine Sprungfunktion  $\alpha$  wird als *differenzierbar am Kontaktpunkt* bezeichnet, wenn an jedem Kontaktpunkt  $\tau_i, i = 1, \dots, n_K$ , gilt

$$\alpha[x(p)(\tau_i)](\tau_i) - \alpha[x(p)(\tau_i^-)](\tau_i^-) = d(x(p)(\tau_i^-)),$$

wobei  $d : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  eine stetig differenzierbare Funktion darstellt.

Diese Formulierung unterscheidet sich auf den ersten Blick leicht von (6.15), stellt jedoch unter Berücksichtigung von (6.16) eine analoge Sprungfunktion dar. Mit dieser Voraussetzung kann nun die Differenzierbarkeit der Funktion  $x(p)(\cdot)$  bezüglich der Parameterwerte  $p$  untersucht werden. Dafür wird zur Vereinfachung angenommen, dass der Anfangswert  $x(p)(0) = x_a$  vorgegeben ist und nicht von den Parametern abhängt. Es gilt also die in Gleichung (7.1) vorgestellte Beziehung.

Für die Existenz der Sensitivität auf dem Zeitintervall  $[0, t_f]$  wird die Fréchet-Ableitung zu jedem Zeitpunkt betrachtet und gezeigt, dass diese für fast alle  $t \in [0, t_f]$  existiert.

Es wird die folgende Version des Lemmas von Gronwall benötigt, vgl. [Sell und You, 2002, Lemma D.2].

**Satz 7.3: Lemma von Gronwall**

Sei  $I$  das Intervall  $[0, t_f]$ . Sei  $z, L \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ ,  $b \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$  und  $\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ , s.d.

$$\alpha(t) \leq z(t) + L(t) \int_0^t b(s)\alpha(s)ds, \quad \text{für fast alle } t \in I,$$

dann gilt für fast alle  $t \in I$

$$\alpha(t) \leq z(t) + L(t) \int_0^t z(s)b(s)ds \cdot \exp\left(\int_0^t L(s)b(s)ds\right).$$

Damit kann nun der folgende Satz formuliert werden, der den kontinuierlichen Fall, also ohne Kontakt, betrachtet.

**Satz 7.4: Punktweise Sensitivität für kontinuierliche Dynamik**

Sei

$$x(p)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(p)(\tau), u(\tau; p))d\tau \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Dann existiert die Fréchet-Ableitung von  $x$  bzgl.  $p$  für alle  $t \in [0, t_f]$ . Die Sensitivität  $S(p)(t) := \frac{\partial x(p)(t)}{\partial p}$  ist dabei gegeben durch

$$S(p)(t) = \int_0^t F'_x(x(p)(\tau), u(\tau; p))S(p)(\tau) + F'_u(x(p)(\tau), u(\tau; p))\frac{\partial u(\tau; p)}{\partial p}d\tau. \quad (7.2)$$

**Beweis:** Für die Existenz der Fréchet-Ableitung ist zu zeigen, dass

$$\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{\|x(p + \varepsilon)(t) - x(p)(t) - S(p)(t)\varepsilon\|}{\|\varepsilon\|} = 0 \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (7.3)$$

erfüllt ist. Dazu wird zuerst der Zähler betrachtet:

$$\alpha(t) := \|x(p + \varepsilon)(t) - x(p)(t) - S(p)(t)\varepsilon\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^t F(x(p+\varepsilon)(\tau), u(\tau; p+\varepsilon)) d\tau - \int_0^t F(x(p)(\tau), u(\tau; p)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t F'_x(x(p)(\tau), u(\tau; p)) S(p)(\tau) \varepsilon + F'_u(x(p)(\tau), u(\tau; p)) \frac{\partial u(\tau; p)}{\partial p} \varepsilon d\tau \right\| \\
&= \left\| \int_0^t F(x(p+\varepsilon)(\tau), u(\tau; p+\varepsilon)) - F(x(p)(\tau), u(\tau; p)) \right. \\
&\quad \left. - F'_x(x(p)(\tau), u(\tau; p)) S(p)(\tau) \varepsilon - F'_u(x(p)(\tau), u(\tau; p)) \frac{\partial u(\tau; p)}{\partial p} \varepsilon d\tau \right\| \\
&\leq \underbrace{\left\| \int_0^t F(x(p+\varepsilon)(\tau), u(\tau; p+\varepsilon)) - F(x(p)(\tau), u(\tau; p+\varepsilon)) - F'_x(x(p)(\tau), u(\tau; p)) S(p)(\tau) \varepsilon d\tau \right\|}_{=:\alpha_1} \\
&\quad + \underbrace{\left\| \int_0^t F(x(p)(\tau), u(\tau; p+\varepsilon)) - F(x(p)(\tau), u(\tau; p)) - F'_u(x(p)(\tau), u(\tau; p)) \frac{\partial u(\tau; p)}{\partial p} \varepsilon d\tau \right\|}_{=:\alpha_2(t)}
\end{aligned}$$

Zuerst wird  $\alpha_2(t)$  mit Hilfe des Mittelwertsatzes weiter abgeschätzt.

$$\begin{aligned}
\alpha_2(t) = \left\| \int_0^t \int_0^1 \underbrace{F'_u(x(p)(\tau), u(\tau; p)) + \sigma [u(\tau; p+\varepsilon) - u(\tau; p)]}_{\tilde{F}'_u(\sigma, p+\varepsilon)} \underbrace{[u(\tau; p+\varepsilon) - u(\tau; p)]}_{= \frac{\partial u(\tau; p)}{\partial p} \varepsilon + R(\varepsilon^2)} \right. \\
\left. - F'_u(x(p)(\tau), p) \frac{\partial u(\tau; p)}{\partial p} \varepsilon d\sigma d\tau \right\|
\end{aligned}$$

Hier bezeichnet  $R(\varepsilon^2)$  das Restglied der Taylorentwicklung ersten Grades von  $u(\tau; p)$ .

$$\alpha_2(t) \leq \int_0^t \int_0^1 \left\| \tilde{F}'_u(\sigma, p+\varepsilon) - \tilde{F}'_u(0, p) \right\| \left\| \frac{\partial u(\tau; p)}{\partial p} \right\| \|\varepsilon\| + \left\| \tilde{F}'_u(\sigma, p+\varepsilon) \right\| R(\varepsilon^2) d\sigma d\tau$$

Aufgrund der Stetigkeit von  $F$  und  $x$  gilt  $\tilde{F}'_u(\sigma, p+\varepsilon) \rightarrow \tilde{F}'_u(0, p)$  für  $\|\varepsilon\| \rightarrow 0$ . Für hinreichend kleines  $\varepsilon$  gilt demnach  $\left\| \tilde{F}'_u(\sigma, p+\varepsilon) - \tilde{F}'_u(0, p) \right\| \leq M_1(\varepsilon)$  mit  $\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} M_1(\varepsilon) = 0$ . Außerdem ist die Ableitung  $\left\| \frac{\partial u(\tau; p)}{\partial p} \right\| < M_u$  beschränkt für alle  $\tau \in [0, t]$ . Auf dem kompakten Intervall  $[0, 1] \times [-\varepsilon_{max}, \varepsilon_{max}]$  ist auch  $F'_u$  beschränkt durch  $M_{F'_u}$  woraus folgt

$$\alpha_2(t) \leq t (M_1(\varepsilon) M_u \|\varepsilon\| + M_{F'_u} R(\varepsilon^2)) \leq A_2(\varepsilon) \|\varepsilon\|,$$

mit  $\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} A_2(\varepsilon) = 0$ .

Eine Betrachtung von  $\alpha_1(t)$  liefert:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) = \left\| \int_0^t \int_0^1 \underbrace{F'_x(x(p)(\tau) + \sigma (x(p+\varepsilon)(\tau) - x(p)(\tau)), u(\tau; p+\varepsilon))}_{\tilde{F}'_x(\sigma, p+\varepsilon)} (x(p+\varepsilon)(\tau) - x(p)(\tau)) \right. \\
\left. - \underbrace{F'_x(x(p)(\tau), u(\tau; p))}_{\tilde{F}'_x(0, p)} S(p)(\tau) \varepsilon d\sigma d\tau \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_0^1 \left\| \tilde{F}'_x(\sigma, p + \varepsilon)(x(p + \varepsilon)(\tau) - x(p)(\tau)) - \tilde{F}'_x(\sigma, p + \varepsilon)S(p)(\tau)\varepsilon \right. \\
&\quad \left. + \tilde{F}'_x(\sigma, p + \varepsilon)S(p)(\tau)\varepsilon - \tilde{F}'_x(0, p)S(p)(\tau)\varepsilon \right\| d\sigma d\tau \\
&\leq \int_0^t \int_0^1 \left\| F'_x(\sigma, p + \varepsilon) \right\| \underbrace{\left\| (x(p + \varepsilon)(\tau) - x(p)(\tau) - S(p)(\tau)\varepsilon) \right\|}_{=\alpha(\tau)} \\
&\quad + \left\| F'_x(\sigma, p + \varepsilon) - F'_x(0, p) \right\| \left\| S(p)(\tau) \right\| \|\varepsilon\| d\sigma d\tau
\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Stetigkeitsargumenten wie bei der Abschätzung von  $\alpha_2$  für  $F'_x$  und der Beschränktheit der Ableitung  $F'_x$  sowie  $S(p)(\tau)$  folgt

$$\alpha_1(t) \leq M_{F'_x} \int_0^t \alpha(t) dt + tM_2(\varepsilon)M_s\|\varepsilon\| \leq M_{F'_x} \int_0^t \alpha(t) dt + A_1(\varepsilon)\|\varepsilon\|.$$

Fasst man diese Ergebnisse zusammen, so gilt

$$\alpha(t) \leq M_{F'_x} \int_0^t \alpha(t) dt + A_1(\varepsilon)\|\varepsilon\| + A_2(\varepsilon)\|\varepsilon\| = M_{F'_x} \int_0^t \alpha(t) dt + A(\varepsilon)\|\varepsilon\|,$$

wobei  $A(\varepsilon) \rightarrow 0$  für  $\|\varepsilon\| \rightarrow 0$  erfüllt. Mit Hilfe des Gronwall-Lemmas aus Satz 7.3 folgt für  $z(t) = A(\varepsilon)\|\varepsilon\|$ ,  $L(t) = M_{F'_x}$  und  $b(s) = I$ :

$$\alpha(t) \leq A(\varepsilon)\|\varepsilon\| + M_{F'_x} \int_0^t A(\varepsilon)\|\varepsilon\| ds \exp(tM_{F'_x}) \leq A(\varepsilon)\|\varepsilon\|(1 + M_{F'_x}t \exp(tM_{F'_x})).$$

Da  $t \in [0, t_f]$  liegt, ist auch  $\exp(tM_{F'_x})$  beschränkt und es kann die Existenz des Fréchet-Differentials gezeigt werden.

$$\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{\|\varepsilon\|} \leq \lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{A(\varepsilon)\|\varepsilon\|(1 + M_{F'_x}t \exp(tM_{F'_x}))}{\|\varepsilon\|} = \lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} A(\varepsilon)(1 + M_{F'_x}t \exp(tM_{F'_x})) = 0$$

Damit ist (7.3) gezeigt. □

### Korollar 7.5: $L_\infty$ -Sensitivität für kontinuierliche Dynamik

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 7.4. Dann existiert die Sensitivität  $S(p) \in W^{1,\infty}([0, t_f], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p})$  und es gilt

$$\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{\|x(p + \varepsilon) - x(p) - S(p)\varepsilon\|_{L_\infty[0, t_f]}}{\|\varepsilon\|} = 0.$$

**Beweis:** Die Aussage über den Grenzwert folgt direkt aus der punktwweisen Existenz des Grenzwerts für alle  $t \in [0, t_f]$  aus Satz 7.4.

Dass  $S(p) \in W^{1,\infty}([0, t_f], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p})$  ist, folgt aus der Definition in Gleichung (7.2). □

Mit dieser Information kann nun die Frage beantwortet werden, ob bei zustandsabhängigen Kontaktpunkten ebenfalls Sensitivitäten existieren. Der Kontaktzeitpunkt hängt dabei von der Zustandstrajektorie, also implizit von den Parametern  $p$  ab. Folgender Satz formuliert Bedingungen unter denen die Existenz nachgewiesen werden kann. Dabei wurde  $G(t, x(t))$  als Einheitsmatrix gewählt, um den Beweis etwas zu verkürzen.

**Satz 7.6: Punktweise Sensitivität für impulsive Dynamik**

Sei die Dynamik gegeben durch

$$x(p)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(p)(\tau), u(\tau; p)) d\tau + \int_0^t d\alpha[x(p)](\tau), \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Dabei existiere genau ein Kontaktzeitpunkt  $\tau_1(p)$  in  $(0, t_f)$  und der Zustand nach Kontakt sei gegeben durch

$$x(p)(\tau_1^+(p)) = x(p)(\tau_1^-(p)) + d(x(p)(\tau_1^-(p))).$$

Die Funktion  $d : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  sei stetig differenzierbar. Weiter sei  $\tau_1(p)$  eindeutig gegeben durch

$$\tau_1(p) = \operatorname{argmin}_{\tau \in (0, t_f)} \left\{ g(\tilde{x}(p)(\tau)) = 0 \mid \frac{d}{dt} g(\tilde{x}(p)(\tau)) \neq 0 \right\}.$$

Dann existiert die Fréchet-Ableitung von  $x$  bzgl.  $p$  für alle  $t \in [0, t_f] \setminus \{\tau_1(p)\}$ . Die Sensitivität  $S(p)(t) := \frac{\partial x(p)(t)}{\partial p}$  ist dabei gegeben durch

$$S(p)(t) = \int_0^t F'_x(x(p)(s), u(s; p)) S(p)(s) + F'_u(x(p)(s), u(s; p)) \frac{\partial u(s; p)}{\partial p} ds \\ + \Delta S(p)(\tau(p)) \chi_{[\tau(p), t_f]}$$

mit

$$\Delta S(p)(\tau(p)) = [F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) - F(x(p)(\tau_1^+(p)), u(\tau_1^+(p); p)) \\ + d'(x(p)(\tau_1^-(p))) F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p))] \frac{d\tau_1(p)}{dp} \\ + d'(x(p)(\tau_1^-(p))) S(p)(\tau_1^-(p)).$$

Die Funktion  $g$  ist die Beschränkung, die aktiv wird. Die Notation  $\tilde{x}$  bezeichnet wieder den kontinuierlich fortgesetzten Zustand. Durch die Bedingung  $\frac{d}{dt} g(\tilde{x}(p)(\tau(p))) \neq 0$  kann mit dem Satz über implizite Funktionen gefolgert werden, dass die Ableitung  $\frac{d\tau_1(p)}{dp}$  in einer Umgebung von  $p$  existiert. Mit  $\chi_{[a, b]}$  sei die charakteristische Funktion des Intervalls  $[a, b]$  bezeichnet.

**Beweis:** Es muss für alle  $t \in [0, t_f]$  mit  $t \neq \tau_1(p)$  die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{\|x(p + \varepsilon)(t) - x(p)(t) - S(p)(t)\varepsilon\|}{\|\varepsilon\|} = 0 \quad (7.4)$$

gezeigt werden.

Die Kontaktzeit des gestörten Problems ist  $\tau_1(p + \varepsilon)$ . Aufgrund der Differenzierbarkeit kann dies dargestellt werden als

$$\tau_1(p + \varepsilon) = \tau_1(p) + \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon + R_\tau(\varepsilon^2),$$

mit  $R_\tau(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2)$ .

Für  $t < \tau_1^-(p)$  kann daraus gefolgert werden, dass für hinreichend kleines  $\varepsilon$  gilt  $t < \tau_1(p + \varepsilon)$ , wodurch auf dem Intervall  $[0, t]$ ,  $t < \tau_1(p)$  Satz 7.4 angewendet werden kann.



Betrachtet wird nun der Fall  $t > \tau_1^-(p)$ . Wieder kann  $t > \tau_1(p + \varepsilon)$  für hinreichend kleines  $\varepsilon$  garantiert werden. Mit dieser Information kann der Zähler aus Gleichung (7.4) ausgeschrieben und abgeschätzt werden. Für die folgenden Betrachtungen sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass  $\tau_1(p) < \tau_1(p + \varepsilon)$  gilt.

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \|x(p + \varepsilon)(t) - x(p)(t) - S(p)(t)\varepsilon\| \\
&= \left\| \underbrace{x(p + \varepsilon)(\tau_1^-(p))}_{=: \alpha_{1,1}} + \underbrace{\int_{\tau_1(p)}^{\tau_1(p+\varepsilon)} F(x(p + \varepsilon)(s), u(s; p + \varepsilon)) ds}_{=: \alpha_{4,1}} \right. \\
&\quad + \underbrace{d(x(p + \varepsilon)(\tau_1^-(p + \varepsilon)))}_{=: \alpha_{3,1}} + \underbrace{\int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t F(x(p + \varepsilon)(s), u(s; p + \varepsilon)) ds}_{=: \alpha_{2,1}} \underbrace{- x(p)(\tau_1^-(p))}_{=: \alpha_{1,2}} \\
&\quad - \underbrace{d(x(p)(\tau_1^-(p)))}_{=: \alpha_{3,2}} - \underbrace{\int_{\tau_1(p)}^{\tau_1(p+\varepsilon)} F(x(p)(s), u(s; p)) ds}_{=: \alpha_{4,2}} - \underbrace{\int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t F(x(p)(s), u(s; p)) ds}_{=: \alpha_{2,2}} \\
&\quad - \underbrace{S(p)(\tau_1^-(p))\varepsilon}_{=: \alpha_{1,3}} - \underbrace{d'(x(p)(\tau_1^-(p))) \left[ S(p)(\tau_1^-(p)) + F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \right]}_{=: \alpha_{3,3}} \varepsilon \\
&\quad - \underbrace{\left[ F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) - F(x(p)(\tau_1^+(p)), u(\tau_1^+(p); p)) \right]}_{=: \alpha_{4,3}} \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon \\
&\quad \left. - \underbrace{\int_{\tau_1(p)}^t F'_x(x(p)(s), u(s; p)) S(p)(s) \varepsilon + F'_u(x(p)(s), u(s; p)) \frac{\partial u(s; p)}{\partial p} \varepsilon ds}_{=: \alpha_{2,3}} \right\| \\
&\leq \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t) + \alpha_4(t)
\end{aligned}$$

Dabei gilt für die Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  bzw.  $\alpha_4$

$$\alpha_i(t) = \left\| \sum_j \alpha_{i,j} \right\|.$$

Da bis zum Zeitpunkt  $\tau_1^-(p)$  keine Trajektorie einen Kontakt erfahren hat, fällt  $\alpha_1(t)$  unter den in Satz 7.4 behandelten Fall. Schätzt man alle dort auftretenden Konstanten weiter ab, so folgt die Existenz eines  $A(\varepsilon) = o(\varepsilon)$  für das gilt

$$\alpha_1(t) = \alpha_1 = \|x(p + \varepsilon)(\tau_1^-(p)) - x(p)(\tau_1^-(p)) - S(p)(\tau_1^-(p))\varepsilon\| \leq A(\varepsilon)K_1\|\varepsilon\|. \quad (7.5)$$

Für  $\alpha_2(t)$  gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_2(t) &= \left\| \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t F(x(p + \varepsilon)(s), u(s; p + \varepsilon)) ds - \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t F(x(p)(s), u(s; p)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{\tau_1(p)}^t F'_x(x(p)(s), u(s; p)) S(p)(s) \varepsilon + F'_u(x(p)(s), u(s; p)) \frac{\partial u(s; p)}{\partial p} \varepsilon ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t F(x(p + \varepsilon)(s), u(s; p + \varepsilon)) - F(x(p)(s), u(s; p + \varepsilon)) + F(x(p)(s), u(s; p + \varepsilon)) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| -F(x(p)(s), u(s; p)) - F'_x(x(p)(s), u(s; p))S(p)(s)\varepsilon - F'_u(x(p)(s), u(s; p))\frac{\partial u(s; p)}{\partial p}\varepsilon ds \right\| \\
& + \left\| \int_{\tau_1(p)}^{\tau_1(p+\varepsilon)} F'_x(x(p)(s), u(s; p))S(p)(s)\varepsilon + F'_u(x(p)(s), u(s; p))\frac{\partial u(s; p)}{\partial p}\varepsilon ds \right\| \\
\leq & \underbrace{\left\| \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t F(x(p+\varepsilon)(s), u(s; p+\varepsilon)) - F(x(p)(s), u(s; p+\varepsilon)) - F'_x(x(p)(s), u(s; p))S(p)(s)\varepsilon ds \right\|}_{=:\beta_1(t)} \\
& + \underbrace{\left\| \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t F(x(p)(s), u(s; p+\varepsilon)) - F(x(p)(s), u(s; p)) - F'_u(x(p)(s), u(s; p))\frac{\partial u(s; p)}{\partial p}\varepsilon ds \right\|}_{=:\beta_2(t)} \\
& + \underbrace{\left( M_{F'_x}M_S + M_{F'_u}M_{u'_p} \right) \|\tau_1(p+\varepsilon) - \tau_1(p)\| \|\varepsilon\|}_{=:\beta_3}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $M_{F'_x}, M_{F'_u}$  obere Schranken an die Ableitungen von  $F$ . Diese existieren, da  $x$  und  $u$  auf der betrachteten Umgebung beschränkt sind.  $M_{u'_p}$  ist eine obere Schranke an die Ableitung von  $u$  und  $M_S$  eine Abschätzung für  $S(p)(s)$ . Letztere kann aus der Definition der Sensitivität und der Beschränktheit der darin auftretenden Funktionen gefolgert werden. Aus der Differenzierbarkeit von  $\tau_1(p)$  in  $p$  folgt die lokale Lipschitz-Stetigkeit auf einem kompakten Intervall  $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ , womit  $\beta_3$  weiter abgeschätzt werden kann.

$$\beta_3 \leq B_3 L_\tau \|\varepsilon\|^2 \quad (7.6)$$

Eine Betrachtung von  $\beta_2(t)$  liefert mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned}
\beta_2(t) = & \left\| \int_{\tau_1(p)}^t \int_0^1 \underbrace{F'_u(x(p)(s), u(s; p)) + \sigma_2 [u(s; p+\varepsilon) - u(s; p)]}_{=:F'_u(\sigma_2)} d\sigma_2 [u(s; p+\varepsilon) - u(s; p)] \right. \\
& \left. - F'_u(x(p)(s), u(s; p))\frac{\partial u(s; p)}{\partial p}\varepsilon ds \right\|
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung erster Ordnung von  $u(s; p)$  mit Restglied liefert

$$\begin{aligned}
& = \left\| \int_{\tau_1(p)}^t \int_0^1 F'_u(\sigma_2) \left[ \frac{du(s; p)}{dp}\varepsilon + R_u(\varepsilon) \right] - F'_u(x(p)(s), u(s; p))\frac{\partial u(s; p)}{\partial p}\varepsilon ds \right\| \\
& \leq \int_{\tau_1(p)}^t \int_0^1 \|F'_u(\sigma_2) - F'_u(x(p)(s), u(s; p))\| \left\| \frac{du(s; p)}{dp} \right\| \|\varepsilon\| + \|F'_u(\sigma_2)\| \|R_u(\varepsilon)\| d\sigma_2 ds.
\end{aligned}$$

Eine genaue Betrachtung von  $F'_u(\sigma_2)$  zeigt, dass dies für  $\|\varepsilon\| \rightarrow 0$  gegen  $F'_u(x(p)(s), u(s; p))$  konvergiert, weshalb für kleine  $\varepsilon$  die Differenz durch eine Funktion  $D_{F'_u}(\varepsilon)$  mit  $D_{F'_u}(\varepsilon) = o(\varepsilon)$  abgeschätzt werden kann. Außerdem gilt  $R_u(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ . Damit folgt

$$\beta_2(t) \leq t D_{F'_u}(\varepsilon) M_{u'_p} \|\varepsilon\| + t M_{F'_u} \|R_u(\varepsilon)\| \leq B_2(\varepsilon) \|\varepsilon\| + M_{\beta_2} \|R_u(\varepsilon)\|. \quad (7.7)$$

Die Abschätzung von  $\beta_1(t)$  kann ähnlich durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
\beta_1(t) = & \left\| \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t \int_0^1 \underbrace{F'_x(x(p)(s) + \sigma_1 [x(p+\varepsilon)(s) - x(p)(s)], u(s; p+\varepsilon))}_{=:F'_x(\sigma_1)} d\sigma_1 [x(p+\varepsilon)(s) - x(p)(s)] \right. \\
& \left. - F'_x(x(p)(s), u(s; p))S(p)(s)\varepsilon ds \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t \int_0^1 \|F'_x(\sigma_1)\| \underbrace{\| [x(p+\varepsilon)(s) - x(p)(s) - S(p)(s)] \|}_{=\alpha(s)} d\sigma_1 ds \\
&\quad + \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t \int_0^1 \|F'_x(\sigma_1) - F'_x(x(p)(s), u(s; p))\| \|S(p)(s)\| \|\varepsilon\| d\sigma_1 ds \\
&\leq M_{F'_x} \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t \alpha(s) ds + t D_{F'_x}(\varepsilon) M_S \|\varepsilon\| \\
&\leq M_{F'_x} \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t \alpha(s) ds + B_1(\varepsilon) \|\varepsilon\|. \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Dabei werden  $M_{F'_x}$  und  $D_{F'_x}(\varepsilon)$  mit analogen Argumenten hergeleitet.

Insgesamt kann damit aus den Ungleichungen (7.6), (7.7) und (7.8) gefolgert werden, dass

$$\begin{aligned}
\alpha_2(t) &\leq M_{F'_x} \int_{\tau_1(p+\varepsilon)}^t \alpha(s) ds + B_1(\varepsilon) \|\varepsilon\| + B_2(\varepsilon) \|\varepsilon\| + M_{\beta_2} \|R_u(\varepsilon)\| + B_3 L_\tau \|\varepsilon\|^2 \\
&\leq M_{F'_x} \int_0^t \alpha(s) ds + B(\varepsilon) \|\varepsilon\| + M_{\beta_2} \|R_u(\varepsilon)\|, \tag{7.9}
\end{aligned}$$

mit  $B(\varepsilon) = o(\varepsilon)$

Als nächstes wird eine Schranke für  $\alpha_3(t)$  hergeleitet.

$$\begin{aligned}
\alpha_3(t) &= \|d(x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p+\varepsilon))) - d(x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p))) + d(x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p))) - d(x(p)(\tau_1^-(p))) \\
&\quad - d'(x(p)(\tau_1^-(p))) \left[ S(p)(\tau_1^-(p)) + F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \right] \varepsilon \| \\
&\leq \underbrace{\|d(x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p+\varepsilon))) - d(x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p))) - d'(x(p)(\tau_1^-(p))) F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon\|}_{=:\gamma_1} \\
&\quad + \underbrace{\|d(x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p))) - d(x(p)(\tau_1^-(p))) - d'(x(p)(\tau_1^-(p))) S(p)(\tau_1^-(p)) \varepsilon\|}_{=:\gamma_2}
\end{aligned}$$

Eine Einzelbetrachtung der beiden Summanden unter Anwendung des Mittelwertsatzes liefert

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \left\| \int_0^1 \underbrace{d'(x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p)) + \sigma_1 [x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p+\varepsilon)) - x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p))])}_{=:d'(\sigma_1)} d\sigma_1 \right. \\
&\quad \cdot [x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p+\varepsilon)) - x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p))] - d'(x(p)(\tau_1^-(p))) F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon \left. \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^1 d'(\sigma_1) d\sigma_1 \left[ \int_{\tau_1(p)}^{\tau_1(p+\varepsilon)} F(x(p+\varepsilon)(s), u(s; p+\varepsilon)) ds \right] \right. \\
&\quad \left. - d'(x(p)(\tau_1^-(p))) F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon \right\| \\
&\leq \left\| \underbrace{\int_0^1 d'(\sigma_1) d\sigma_1}_{=:D'(\varepsilon)} M_F(\varepsilon) \left[ \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon + R_\tau(\varepsilon) \right] - d'(x(p)(\tau_1^-(p))) F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon \right\| \\
&\leq \|D'(\varepsilon) M_F(\varepsilon) - d'(x(p)(\tau_1^-(p))) F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p))\| \left\| \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon \right\| + \|D'(\varepsilon) M_F(\varepsilon) R_\tau(\varepsilon)\|.
\end{aligned}$$

Eine Betrachtung der Funktionsargumente zusammen mit der Eigenschaft, dass  $x(p+\varepsilon)(s)$  für  $s < \tau_1(p)$  stetig ist, folgt, dass

$$\begin{aligned} \lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} D'(\varepsilon) &\rightarrow d'(x(p)(\tau_1^-(p))) \\ \lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} M_F(\varepsilon) &\rightarrow F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \end{aligned}$$

gilt. Damit kann  $\gamma_1$  für hinreichend kleines  $\varepsilon$  geschrieben werden als

$$\gamma_1 \leq G_1(\varepsilon)M_{\tau'} \|\varepsilon\| + G_2 \|R_\tau(\varepsilon)\|, \quad (7.10)$$

mit  $G_1(\varepsilon) = o(\varepsilon)$  und  $R_\tau(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ . Für  $\gamma_2$  gilt

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \left\| \int_0^1 \underbrace{d'((x(p)(\tau_1^-(p)) + \sigma_2 [x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p)) - x(p)(\tau_1^-(p))]))}_{d'(\sigma_2)} d\sigma_2 [x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p)) - x(p)(\tau_1^-(p))] \right. \\ &\quad \left. - d'(x(p)(\tau_1^-(p)))S(p)(\tau_1^-(p))\varepsilon \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 d'(\sigma_2) d\sigma_2 [S(p)(\tau_1^-(p))\varepsilon + R_S(\varepsilon)] - d'(x(p)(\tau_1^-(p)))S(p)(\tau_1^-(p))\varepsilon \right\|. \end{aligned}$$

Die Ersetzung von  $[x(p+\varepsilon)(\tau_1^-(p)) - x(p)(\tau_1^-(p))]$  durch  $[S(p)(\tau_1^-(p))\varepsilon + R_S(\varepsilon)]$  folgt aus der Aussage von Satz 7.4, da  $\tau_1^-(p)$  noch vor der Unstetigkeitsstelle liegt. Weiteres Abschätzen liefert

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\leq \|D'(\sigma_2) - d'(x(p)(\tau_1^-(p)))\| \|S(p)(\tau_1^-(p))\| \|\varepsilon\| + \|D'(\sigma_2)\| \|R_S(\varepsilon)\| \\ &\leq G_3(\varepsilon)M_S \|\varepsilon\| + G_4 \|R_S(\varepsilon)\|. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Dabei ist  $G_3(\varepsilon) = o(\varepsilon)$  eine Abschätzung der Differenz  $\|D'(\sigma_2) - d'(x(p)(\tau_1^-(p)))\|$ , die aufgrund der Stetigkeit von  $d'$  und der Konvergenz des Arguments gegen  $x(p)(\tau_1^-(p))$  existiert.  $G_4$  ist eine obere Schranke von  $D'(\sigma_2)$ . Für  $R_S$  gilt  $R_S(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ .

Setzt man die Ergebnisse aus (7.10) und (7.11) zusammen, ergibt sich für  $\alpha_3(t)$

$$\begin{aligned} \alpha_3(t) &\leq G_1(\varepsilon)M_{\tau'} \|\varepsilon\| + G_2 \|R_\tau(\varepsilon)\| + G_3(\varepsilon)M_S \|\varepsilon\| + G_4 \|R_S(\varepsilon)\| \\ &\leq G(\varepsilon) \|\varepsilon\| + G_2 \|R_\tau(\varepsilon)\| + G_4 \|R_S(\varepsilon)\|. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Zuletzt wird noch  $\alpha_4$  abgeschätzt.

$$\begin{aligned} \alpha_4(t) &\leq \left\| \underbrace{\int_{\tau_1(p)}^{\tau_1(p+\varepsilon)} F(x(p+\varepsilon)(s), u(s; p+\varepsilon)) ds - F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon}_{\delta_1} \right\| \\ &\quad + \left\| \underbrace{\int_{\tau_1(p)}^{\tau_1(p+\varepsilon)} F(x(p)(s), u(s; p)) ds - F(x(p)(\tau_1^+(p)), u(\tau_1^+(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon}_{\delta_2} \right\| \end{aligned}$$

$$\delta_1 \leq \left\| M_F(p+\varepsilon) [\tau_1(p+\varepsilon) - \tau_1(p)] - F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p)) \frac{d\tau_1(p)}{dp} \varepsilon \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \|M_F(p + \varepsilon) - F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p))\| \left\| \frac{d\tau_1(p)}{dp} \right\| \|\varepsilon\| + M_F(p + \varepsilon) \|R_\tau(\varepsilon)\| \\
&\leq D_1(\varepsilon) \left\| \frac{d\tau_1(p)}{dp} \right\| \|\varepsilon\| + M_{F^-}(p + \varepsilon) \|R_\tau(\varepsilon)\| \\
&\leq D_1(\varepsilon) M_{\tau'} \|\varepsilon\| + M_1 \|R_\tau(\varepsilon)\|
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Da sich  $x(p+\varepsilon)(s)$  für  $s \in [\tau_1(p); \tau_1(p+\varepsilon)]$  noch vor dem Kontakt befindet, konvergiert die Abschätzung  $M_{F^-}(p + \varepsilon)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $F(x(p)(\tau_1^-(p)), u(\tau_1^-(p); p))$ , d.h. es gilt  $D_1(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ .

Für  $\delta_2$  kann analog eine identische Abschätzung durchgeführt werden. In diesem Fall befindet sich  $x(p)(s)$  für  $s \in [\tau_1(p); \tau_1(p + \varepsilon)]$  jedoch nach dem Kontakt, weshalb die Abschätzung sich von rechts der Unstetigkeitsstelle nähert und gegen  $F(x(p)(\tau_1^+(p)), u(\tau_1^+(p); p))$  konvergiert. Es existiert ein  $D_2(\varepsilon) = o(\varepsilon)$  für das die Ungleichung

$$\delta_2 \leq D_2(\varepsilon) M_{\tau'} \|\varepsilon\| + M_2 \|R_\tau(\varepsilon)\| \tag{7.14}$$

gilt. Aus den Ungleichungen (7.13) und (7.14) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\alpha_4(t) &\leq D_1(\varepsilon) M_{\tau'} \|\varepsilon\| + M_1 \|R_\tau(\varepsilon)\| + D_2(\varepsilon) M_{\tau'} \|\varepsilon\| + M_2 \|R_\tau(\varepsilon)\| \\
&\leq D(\varepsilon) \|\varepsilon\| + D_3 \|R_\tau(\varepsilon)\|.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Letztendlich können die  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  zusammengesetzt werden. Aus den gezeigten Ungleichungen (7.5), (7.9), (7.12) und (7.15) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &\leq A(\varepsilon) K_1 \|\varepsilon\| + M_{F'_x} \int_0^t \alpha(s) ds + B(\varepsilon) \|\varepsilon\| + M_{\beta_2} \|R_u(\varepsilon)\| \\
&\quad + G(\varepsilon) \|\varepsilon\| + G_2 \|R_\tau(\varepsilon)\| + G_4 \|R_S(\varepsilon)\| + D(\varepsilon) \|\varepsilon\| + D_3 \|R_\tau(\varepsilon)\| \\
&\leq M_{F'_x} \int_0^t \alpha(s) ds + \Sigma(\varepsilon) \|\varepsilon\| + \Gamma \|R(\varepsilon)\|.
\end{aligned}$$

Dabei gilt  $\Sigma(\varepsilon) = o(\varepsilon)$  und  $R(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ . Nun kann wie im Beweis von Satz 7.4 das Gronwall-Lemma angewendet werden mit  $z(t) = \Sigma(\varepsilon) \|\varepsilon\| + \Gamma \|R(\varepsilon)\|$ ,  $L(t) = M_{F'_x}$  und  $b(s) = I$ . Daraus resultiert

$$\alpha(t) \leq \Sigma(\varepsilon) \|\varepsilon\| + \Gamma \|R(\varepsilon)\| + M_{F'_x} t (\Sigma(\varepsilon) \|\varepsilon\| + \Gamma \|R(\varepsilon)\|) \exp(M_{F'_x} t). \tag{7.16}$$

Aufgrund der Beschränktheit von  $t \in [0, t_f]$  gilt

$$M_{F'_x} t \exp(M_{F'_x} t) \leq M_{F'_x} t_f \exp(M_{F'_x} t_f) =: E < \infty.$$

Setzt man dies zusammen mit (7.16) in den Zähler des Grenzwerts aus (7.4) ein, so erhält man aufgrund der Konvergenzeigenschaften von  $\Sigma$  und  $R$  für  $\|\varepsilon\| \rightarrow 0$  das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{\Sigma(\varepsilon) \|\varepsilon\| + \Gamma \|R(\varepsilon)\| + E (\Sigma(\varepsilon) \|\varepsilon\| + \Gamma \|R(\varepsilon)\|)}{\|\varepsilon\|} \\
&= \lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} (1 + E) \Sigma(\varepsilon) + \frac{(1 + E) \Gamma \|R(\varepsilon)\|}{\|\varepsilon\|} = 0.
\end{aligned}$$

Nun müssen noch die Fälle  $\tau_1(p + \varepsilon) < \tau_1(p)$  und  $\tau_1(p) = \tau_1(p + \varepsilon)$  betrachtet werden.

Gilt  $\tau_1(p + \varepsilon) < \tau_1(p)$  ändern sich im Beweis einige Integralgrenzen, sowie die Eigenschaft, welche Funktion sich vor bzw. nach dem Kontakt befindet. In der Abschätzung von  $\alpha_4$  konvergieren die

Grenzwerte von der jeweils anderen Seite gegen den Kontaktpunkt. Daher müssen die gewählten Terme der Differenz vertauscht werden.

Gilt  $\tau_1(p + \varepsilon) = \tau_1(p)$  verschwinden die mit  $\frac{d\tau_1(p)}{dp}$  multiplizierten Terme in  $\Delta S(p)(\tau_1(p))$ , sowie die zugehörigen Integrale in der Darstellung der Zustände.  $\square$

### Bemerkung 7.7: Abzählbar viele Kontaktpunkte

Die Aussage aus Satz 7.6 gilt auch für abzählbar viele Kontaktpunkte  $\tau_i(p)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Es kann dann sukzessive für Intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$  mit  $t_i \in [\tau_i(p), \tau_{i+1}(p)]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , mit  $\tau_0 = 0$  vorgegangen werden. Der Anfangswert der Sensitivität in jedem Intervall ist dabei der Endwert des Vorherigen, vgl. Satz 7.1 mit  $A_i(p) = x(p)(t_i)$ .

Satz 7.6 liefert die Existenz der Sensitivität zu allen Zeitpunkten außer in den Kontaktpunkten. Wird angenommen, dass kein dauerhafter Kontakt über ein endliches Zeitintervall auftritt, so gilt die folgende Aussage für den Funktionenraum:

### Satz 7.8: $L_\infty$ -Sensitivität für impulsive Dynamik mit endlich vielen Kontakten

Gelten die Voraussetzungen von Satz 7.6 mit endlich vielen Kontaktpunkten  $\tau_i(p)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , mit  $k \in \mathbb{N}$ , dann existiert die Sensitivität  $S(p) \in BV([0, t_f], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p})$  bzgl. der  $L_\infty$ -Norm.

**Beweis:** Die Aussage folgt aus der Definition der  $L_\infty$ -Norm. Da Nullmengen nicht berücksichtigt werden und jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}$  eine Nullmenge ist, wird das Supremum lediglich über die Punkte  $t \neq \{\tau_i(p), i = 1, \dots, K\}$  gebildet.

Dass  $S(p) \in BV([0, t_f], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_p})$  gilt, folgt aus der Beschränktheit der einzelnen Sprünge. Die auftretenden Funktionen sind jeweils beschränkt und da nur endlich viele Sprungstellen auftreten, kann die Eigenschaft direkt gefolgert werden.  $\square$

### Bemerkung 7.9: $L_\infty$ -Norm für abzählbar viele Kontaktpunkte

Damit die Summe aller Sprünge endlich bleibt, muss für abzählbar viele Kontaktpunkte analog zu Satz 6.39 eine Dissipativität der Kontakte gefordert werden.

### Gegenbeispiel für die Differenzierbarkeit bei Berührungspunkten

Bei den bisherigen Sätzen wurde sich lediglich auf das Auftreten von Kontaktpunkten mit echtem Nulldurchgang beschränkt. Es wird stets gefordert, dass

$$\frac{d}{dt}g(\tilde{x}(p)(\tau)) \neq 0$$

in den Kontaktpunkten gilt. Diese Eigenschaft ist im Beweis von Satz 7.6 für die Existenz von  $\frac{d\tau_1(p)}{dp}$  wichtig. Dass im Falle eines Berührungspunkts eine Differenzierbarkeit bzgl. der Steuerung nicht gegeben ist, zeigt das folgende Gegenbeispiel.

Dabei wird sich hier auf ein nicht vom Zustand abhängiges Beispiel bezogen. Es gelte die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(p)(t) = 2(1 - p)$$

mit Anfangsbedingung

$$x(p)(0) = 1, \quad \dot{x}(p)(0) = -2,$$

sowie der unilateralen Beschränkung

$$g(x(p)(t)) = x(p)(t) \geq 0.$$

Für  $p = 0$  ergibt sich die Lösung als

$$x(0)(t) = (t - 1)^2,$$

welche den eindeutigen Berührungspunkt

$$\tau(0) = 1$$

besitzt. Da für die Ableitung des Zustands

$$\dot{x}(0)(t) = 2(t - 1)$$

gilt, handelt es sich bei dem Kontakt um einen Berührungspunkt, da

$$\frac{d}{dt}g(x(p)(1)) = 0$$

gilt. Für  $p = \varepsilon > 0$  ergibt sich die Zustandstrajektorie vor dem Kontakt zu

$$x(\varepsilon)(t) = -\varepsilon t^2 + (t - 1)^2.$$

Der Kontaktzeitpunkt lautet

$$\tau_1(\varepsilon) = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon} < 1.$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich

$$\dot{x}(\varepsilon)(\tau(\varepsilon)) = -2\varepsilon\tau(\varepsilon) + 2(\tau(\varepsilon) - 1) < 0,$$

weshalb eine unstetige Zustandsänderung der Geschwindigkeit notwendig ist, um die Zulässigkeit der Lösung beizubehalten. Es gilt demnach

$$\dot{x}^+(\varepsilon)(\tau(\varepsilon)) \geq 0.$$

Die Geschwindigkeit für  $t \geq 1 > \tau(\varepsilon)$  lässt sich damit nach unten abschätzen durch

$$\begin{aligned} \dot{x}(\varepsilon)(t) &\geq \int_{\tau(\varepsilon)}^t 2(1 - \varepsilon)d\sigma = 2(1 - \varepsilon)(t - \tau(\varepsilon)) = 2(1 - \varepsilon) \left( t - \frac{1 - \sqrt{(\varepsilon)}}{1 - \varepsilon} \right) \\ &= 2(t - 1 - \varepsilon t + \sqrt{\varepsilon}) = \dot{x}(0)(t) - 2\varepsilon t + 2\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $\dot{x}$  für  $t \geq 1$  nicht bzgl.  $p$  differenzierbar sein kann.

### 7.3 Vergleich mit Sensitivitätsresultaten hybrider Systeme

Um einen Zusammenhang mit den bekannten Ergebnissen der Sensitivitätsanalyse hybrider Systeme zu erhalten, werden diese mit den Aussagen der vorangegangenen Sätze in Verbindung gebracht. Dafür werden die Resultate aus [Burger und Gerdts, 2016, Galán et al., 1999] und [Pfeiffer, 2008] herangezogen.

Der kontinuierliche Fall aus Satz 7.4 spiegelt lediglich die Sensitivität der Riemann-Integralgleichung bzgl. der Steuerung wider. Die äquivalente Formulierung als Differentialgleichung mit entsprechendem Anfangswert wird in [Pfeiffer, 2008, Satz 4.4] vorgestellt.

Satz 7.6 stellt eine Formulierung der Ergebnisse aus [Galán et al., 1999, Bemerkung 3], sowie [Burger und Gerdts, 2016, Kapitel 8.2] in Integralform dar. Von dort wurde auch die Sprungbedingung an die Sensitivität übernommen. Die Regularitätsbedingung  $\frac{d}{dt}g(\tilde{x}(u)(\tau)) \neq 0$  garantiert dort ebenfalls die Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrfunktion in einer Umgebung des Kontaktpunkts.

Das Gegenbeispiel der Differenzierbarkeit bei Berührungspunkten stellt gerade eine Verletzung dieser Regularitätsbedingung dar. Da in diesem Fall der Berührungspunkt für eine Veränderung der Steuerung zu einem echten Kontakt werden oder verschwinden kann, ist hier die Differenzierbarkeit bzgl.  $u$  nicht mehr gewährleistet.

Durch diesen Vergleich wird deutlich, dass die Resultate große Ähnlichkeit aufweisen, was selbstverständlich an der äquivalenten Formulierung des Riemann-Stieltjes-Systems als hybrides System liegt. Mit der vorgestellten Methode wird die bestehende Theorie damit auf eine bisher nur wenig betrachtete Problemklasse der Parametersensitivitäten bei Integralgleichungen erweitert.

### 7.4 Numerische Berechnung optimaler Steuerungen impulsiver Systeme

Nun werden, aufbauend auf die Simulation, verschiedene Verfahren zur Berechnung optimaler Steuerungen für impulsive Systeme mit Riemann-Stieltjes-Integralen vorgestellt. Für die Berechnung wird die in Kapitel 6.5.4 vorgestellte zusammengesetzte Newton-Cotes-Quadratur verwendet. In dieser Arbeit wird sich zudem lediglich auf die Betrachtung diskretisierter Steuerungen beschränkt. Die Steuerung ist auf einem hier als äquidistant angenommenen Gitter  $\mathcal{G}_u = \{t_i \mid i = 0, \dots, M\}$  mit  $M \in \mathbb{N}$  Steuerungsintervallen der Länge  $H = \frac{t_f - t_0}{M}$  dargestellt. Auf diesem Gitter kann die Steuerung, wie in Kapitel 3.2.4 vorgestellt, durch Splines abgebildet werden. Es wird sich auf einen Spline der Ordnung  $k = 1$ , also auf stückweise konstante Steuerungen, beschränkt. Damit wird die kontinuierliche Steuerung  $u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$  approximiert durch

$$u(t) \approx u(t; \mathbf{u}) = \mathbf{u}_i, \text{ für } t \in [t_i, t_{i+1}),$$

mit den Steuerungsparametern

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{M-1}] \in \mathbb{U}^M.$$

Für die Definition von  $\mathbb{U}$  wird auf Gleichung (3.2.1) verwiesen.



Das Optimalsteuerungsproblem besitzt damit folgende Gestalt:

**Problem 7.10: Optimalsteuerungsproblem des diskretisierten impulsiven Systems**

Gegeben sei ein impulsives System aus Definition 6.36, mit gegebenen Diskretisierungsschrittweiten  $H$ . Das Optimalsteuerungsproblem besitzt die Form:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}^M} \quad & J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), \mathbf{u}) dt, \\ \text{u.d.Nb.} \quad & x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(\tau), u(t; \mathbf{u})) d\tau + \int_{t_0}^t G(x(\tau)) d\alpha[x](\tau), \\ & x_0 = x(0) \\ & u_i \in [u_{\min}, u_{\max}], \quad i = 0, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

Die unilateralen Beschränkungen sind hier vollständig im Stieltjes-Anteil der Systemdynamik verborgen.

In jedem Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$  wird der Zustand auf einem ebenfalls äquidistanten Subdiskretisierungsgitter  $\mathcal{G}_N = \{\tau_{i,j} \mid j = 0, \dots, N\}$  mit Schrittweite  $h = \frac{H}{N}$  berechnet. Die Zustände auf dem Steuerungsgitter berechnen sich wie in Gleichung (6.31) vorgestellt.

Die Probleme, die sich bei der Berechnung optimaler Steuerungen für obiges Problem ergeben resultieren aus der Unstetigkeit des Zustands in der Geschwindigkeitskomponente bei der Kollision mit einer Beschränkung. Damit sind die Voraussetzungen für klassische Optimierungsverfahren, wie sie auszugsweise in Kapitel 4 vorgestellt wurden, nicht erfüllt. Selbst Optimierungsalgorithmen für nicht-differenzierbare Probleme, wie Bundle- und Trust-Region-Verfahren, benötigen eine stetige Funktion, die fast überall differenzierbar ist, vgl. [Schramm, 1989, Clarke, 2013]. Deshalb werden im Folgenden einige neue Ansätze für die Problematik vorgestellt und erste Ergebnisse präsentiert.

## 7.5 Gradientenbasierte Optimierung

### 7.5.1 Projiziertes Gradientenverfahren

Die vorgestellten Methoden basieren auf dem projizierten Gradientenverfahren, vgl. [Geiger und Kanzow, 1999, Gerds und Lempio, 2011]. Obwohl das vorliegende Problem nicht die notwendigen Regularitätseigenschaften erfüllt, lassen sich damit trotzdem Verfahren konstruieren, die die Kosten reduzieren. Das Verfahren kann mit folgendem Algorithmus beschrieben werden, wobei eine Armijo-Liniensuche angewandt wird.

**Algorithmus 7.11: Projiziertes Gradientenverfahren**

- (0) Berechne  $J(\mathbf{u}^{[0]})$  für eine Startschätzung  $\mathbf{u}^{[0]}$  der Steuerung und setze  $k = 0, e, \beta, \sigma \in (0, 1)$ .
- (1) Berechne  $\nabla J(\mathbf{u}^{[k]})$ .
- (2) Berechne  $\tilde{\mathbf{u}}^{[k]} = \text{Proj}_{\mathbb{U}}(\mathbf{u}^{[k]} - \nabla J(\mathbf{u}^{[k]}))$ .
- (3) Setze  $d = \tilde{\mathbf{u}}^{[k]} - \mathbf{u}^{[k]}$ .
- (4) Ist  $\|d\| = 0$ , STOP.

- (5) Führe eine Armijo-Liniensuche durch:
- (a) Setze  $j = 0$ .
  - (b) Falls  $J(u^{[k]} + \beta^j \cdot d) < J(u^{[k]}) - \sigma \cdot \beta^j \cdot \nabla J(u^{[k]})^\top d$  gehe zu (7).
  - (c) Sonst: Setze  $j = j + 1$  und gehe zu (a).
- (6) Setze  $u^{[k+1]} = u^{[k]} + \beta^j d$ ,  $k = k + 1$  und gehe zu (1).

Hierbei bezeichnet  $Proj_{\mathbb{U}}$  die elementweise Projektion von  $u$  auf die zulässige Menge  $\mathbb{U}$ . Das Abbruchkriterium in Schritt (4) ist äquivalent zum Optimalitätskriterium aus Satz 3.32. In einem lokalen Minimum verschwindet entweder der Gradient, oder der betrachtete Punkt befindet sich am Rand des zulässigen Bereichs und der Gradient zeigt orthogonal aus diesem heraus. Numerisch wird Bedingung (4) mit Hilfe einer zu unterschreitenden Schranke realisiert. Wenn der zulässige Bereich konvex ist, so ist  $u^{[k]} + \beta^j \cdot d$  automatisch ein zulässiger Punkt. Zusätzlich kann noch ein Abbruchkriterium eingeführt werden, wenn die Armijo-Schrittweite zu klein wird und somit keine Veränderung des aktuellen  $u^{[k]}$  stattfindet.

Nun stellt sich hier die Frage, wie die Ableitung  $\nabla J(u^{[k]})$  berechnet werden kann. Auch wenn in Satz 7.6 eine explizite Formel zur Berechnung der Parametersensitivität gezeigt wurde, werden nun zwei alternative Methoden vorgestellt dies durchzuführen. Die Erste besitzt einen intuitiven Zugang, ist jedoch lediglich für eine eingeschränkte Klasse an Zielfunktionen anwendbar, wohingegen die zweite Methode, die ein Glättungsverfahren zur Gradientenberechnung verwendet, auch allgemeine Zielfunktionen nutzen kann.

### 7.5.2 Gradientenberechnung aus Stufenkosten

Der erste hier betrachtete Ansatz beschränkt sich auf Probleme, deren Zielfunktionen durch kontinuierliche Kosten vom Lagrange-Typ dargestellt werden, d.h. es gilt:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u) dt.$$

Die Zielfunktion sei als monoton steigend angenommen:  $f(x, u) \geq 0$ . Diese wird mit Hilfe der in Kapitel 3.2.2 erläuterten Transformation in eine Zielfunktion vom Mayer-Typ umformuliert, indem der neue Zustand  $x_J(t)$  eingeführt wird, der folgender Differentialgleichung genügt:

$$x'_J(t, u) = f(x(t), u), \quad \text{mit} \quad x_J(0) = 0.$$

Damit kann die Zielfunktion mit Hilfe der Stufenkosten  $j_i(u)$  geschrieben werden als

$$J(u) = x_J(t_f, u) = H \sum_{i=0}^{M-1} \underbrace{\frac{x_J(t_{i+1}, u) - x_J(t_i, u)}{H}}_{:=j_i^2(u)} = H \sum_{i=0}^{M-1} j_i^2(u) = H \|j(u)\|_2^2,$$

wobei  $j(u) := [j_0(u), j_1(u), \dots, j_{M-1}(u)]^\top$  gilt. Die  $j_i$  beschreiben die Änderungsrate, also die gemittelte Steigung der Zielfunktion im Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$ . Da eine Skalierung der Zielfunktion keinen Einfluss auf die optimale Lösung hat, wird  $J(u)$  mit dem Faktor  $\frac{1}{2H}$  multipliziert und man erhält

$$J(u) = \frac{1}{2} \|j\|_2^2.$$

Der Gradient der Zielfunktion ergibt sich aufgrund der speziellen Form zu

$$\nabla J(\mathbf{u}) = j'(\mathbf{u})^\top j(\mathbf{u}),$$

welcher in Algorithmus 7.11 verwendet werden kann.

#### Bemerkung 7.12: Grenzen der Anwendbarkeit

An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Methode lediglich dann angewendet werden kann, wenn die Stufenkosten keine Beschleunigungen von Körpern approximieren, die impulsive Änderungen erfahren. Da das impulsive Verhalten eine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeit verursacht, kann dies nicht durch die diskrete Betrachtung an den Stützstellen wiedergegeben werden. Eine Methode dies noch einzuarbeiten wird in 7.6.1 beschrieben.

### Berechnung des Gradienten

Nun soll darauf eingegangen werden, wie  $\nabla J(u)$  berechnet werden kann. Dafür wird eine Sensitivitätsmatrix aufgestellt, die mittels Differenzenquotienten bestimmt wird. Es wird in der diskretisierten Steuerung jeweils ein Element  $u_i$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ , variiert und die Veränderung der  $j_k$ ,  $k = 0, \dots, M-1$ , betrachtet.

$$S = j'(\mathbf{u}) = \frac{dj}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \frac{j(\mathbf{u} + \delta_i) - j(\mathbf{u})}{\delta_i} \right]_{i=0..M-1},$$

wobei  $\delta_i \in \mathbb{R}^M$  hier den Vektor bezeichnet, der an der Stelle  $i$  den Eintrag  $\delta > 0$  hat und sonst nur Nulleinträge besitzt. Um die  $j_i(\mathbf{u})$  zu bestimmen muss für jedes  $i$  die Dynamik ausgewertet werden.  $S$  ergibt sich als untere Dreiecksmatrix, da die Veränderung von  $u_i$  für  $i > k$  keinen Einfluss auf  $j_k(\mathbf{u})$  hat. Unter Ausnutzung dieser Eigenschaft lässt sich die Berechnungszeit deutlich reduzieren. Zusätzlich handelt es sich um ein voll parallelisierbares Verfahren, wodurch die Berechnungszeit weiter verringert werden kann. Alternativ können anstelle des Differenzenquotienten in Vorwärtsrichtung auch zentrale Differenzen verwendet werden, d.h.

$$S = j'(\mathbf{u}) = \frac{dj}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \frac{j(\mathbf{u} + \delta_i) - j(\mathbf{u} - \delta_i)}{2\delta_i} \right]_{i=0..M-1}.$$

### 7.5.3 Beispiele

#### Stufenüberfahrt eines Viertelfahrzeugs

Das erste Beispiel stellt eine Überfahrt eines Viertelfahrzeugs über eine Stufe mit Höhe 0.05m dar. Aufgrund der hohen Geschwindigkeit und der schnellen Änderung des Fahrbahnprofils tritt Kontaktverlust zwischen Reifen und Fahrbahn auf. Hier wird nun mit Hilfe des oben beschriebenen Algorithmus eine Komfortoptimierung des Fahrzeugs berechnet. Die approximierte Zielfunktion von (4.1) hat die folgende Gestalt:

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M \frac{\dot{z}_b(t_{i+1}) - \dot{z}_b(t_i)}{H}.$$

In den Abbildungen 7.1 - 7.2 sind die optimierte Trajektorie, sowohl im Zustandsraum als auch im Raum der verallgemeinerten Koordinaten dargestellt. Auf die Position und Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung wurde verzichtet, da sich die Skalen hier zu sehr unterscheiden und die Vertikalbewegung nicht mehr sichtbar wäre. Bei der Zustandsraumdarstellung ist ebenfalls die ursprüngliche Trajektorie

mit konstanter Steuerung eingezeichnet. Es wird deutlich, dass die Komfortoptimierung die Schwingung des Aufbaus verlangsamt.

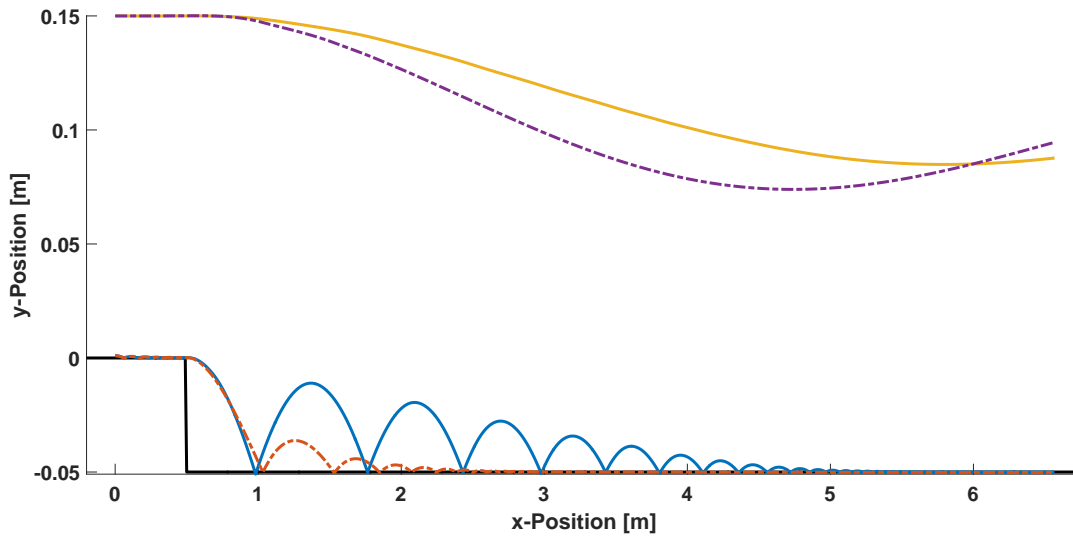


Abbildung 7.1: Trajektorie der ungesteuerten (gestrichelt) und der optimierten (durchgezogen) Stufenüberfahrt

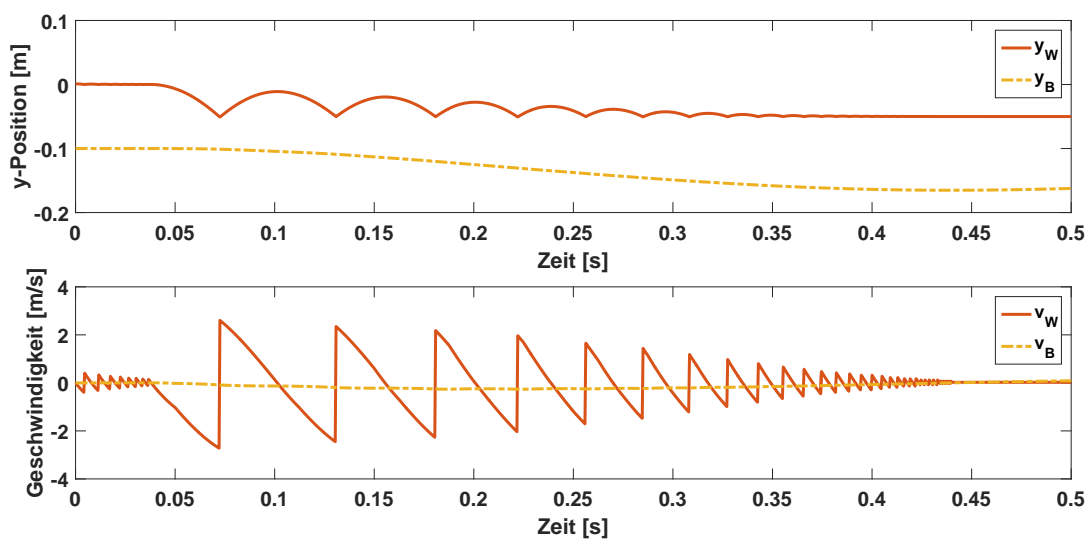


Abbildung 7.2: Darstellung der verallgemeinerten Koordinaten über der Zeit

In Abbildung 7.3 ist der Frequenzgang der Aufbaubeschleunigung vor und nach der Optimierung dargestellt. Die reduzierten Amplituden, besonders im niederfrequenten Bereich, werden deutlich sichtbar. Der Vergleich der Entwicklung der jeweiligen Zielfunktion ist in der unteren Abbildung von 7.4 zu sehen. Die berechnete optimale Steuerung ist in der oberen Grafik dargestellt.

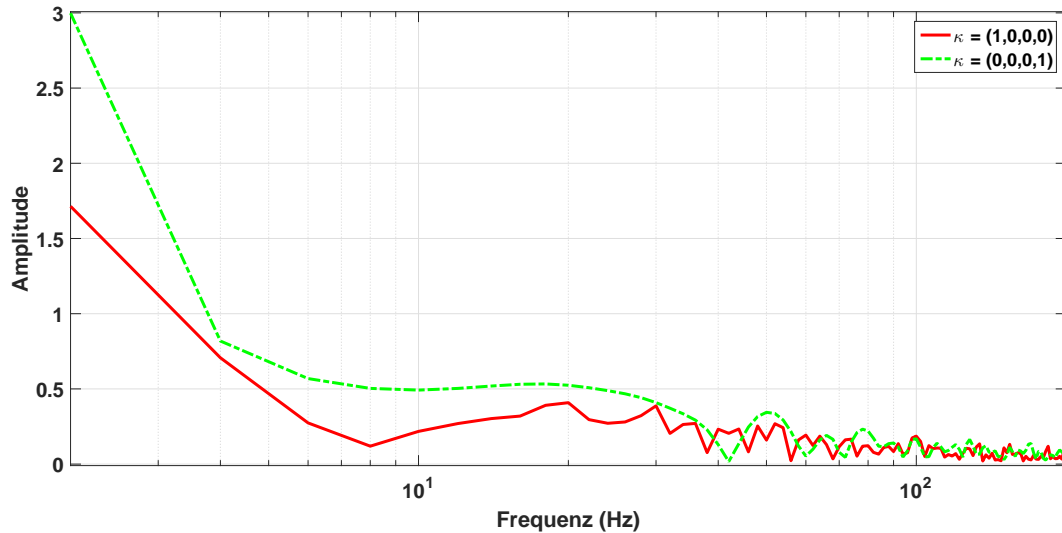


Abbildung 7.3: Frequenzgang der ungesteuerten (gestrichelt) und der optimierten (durchgezogen) Stufenüberfahrt

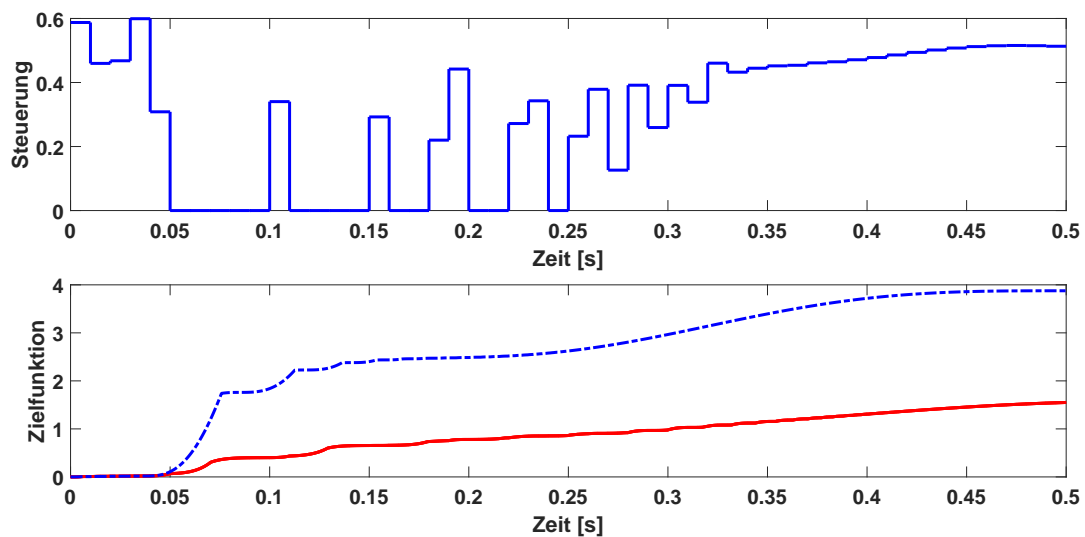


Abbildung 7.4: Oben: Optimale Steuerung, unten: Vergleich der Zielfunktionsentwicklung bei konstanter (gestrichelt) und optimierter (durchgezogen) Steuerung

In Abbildung 7.5 wird die Entwicklung der Zielfunktion über die Iterationen des Algorithmus abgebildet. Die Abnahme der Zielfunktion, sowie die Konvergenz des Algorithmus gegen sein Optimum wird deutlich wiedergegeben. Die Abbruchbedingung (4) aus Algorithmus 7.11 verringert sich hier lediglich bis zur Ordnung  $10^{-3}$ , weshalb wegen einer zu kleinen Armijo-Schrittweite abgebrochen wird. Die Verringerung von  $\|d\|$  ist jedoch festzustellen.

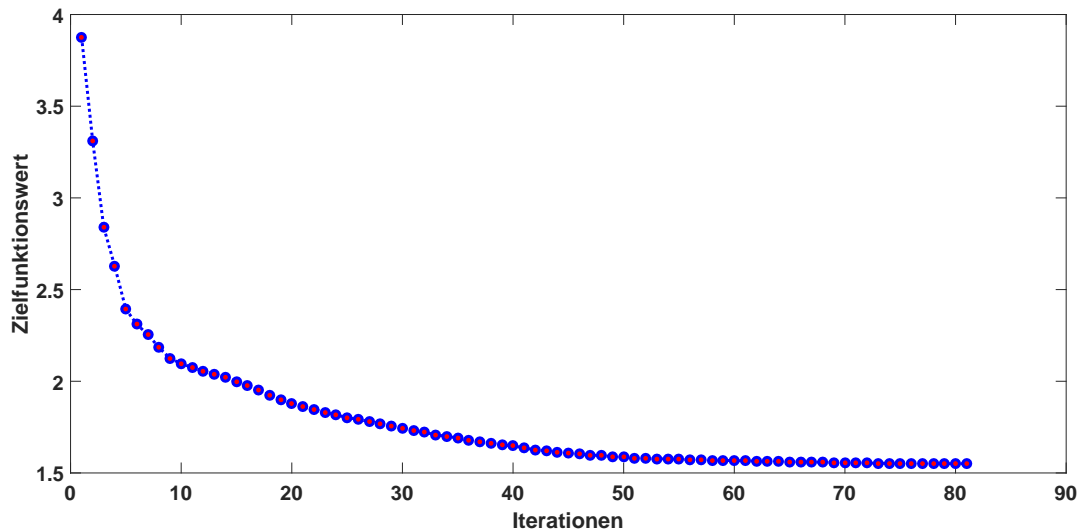


Abbildung 7.5: Entwicklung des Zielfunktionswertes im Laufe der Optimierungsroutine

### Schwellenüberfahrt eines Halbfahrzeugs

Nun wird das Beispiel aus Kapitel 6.6.4 herangezogen um eine Komfortoptimierung durchzuführen. Die Trajektorie ist in Abbildung 7.6 ebenfalls im Vergleich zu ihrem ursprünglichen Verlauf für konstantes  $u$  dargestellt. Durch die optimierte Steuerung werden auch hier Beschleunigungen vom Aufbau in die Reifen übertragen. Auch die absolute Auslenkung des Aufbaus wurde zu Lasten der Reifenauslenkung deutlich reduziert.

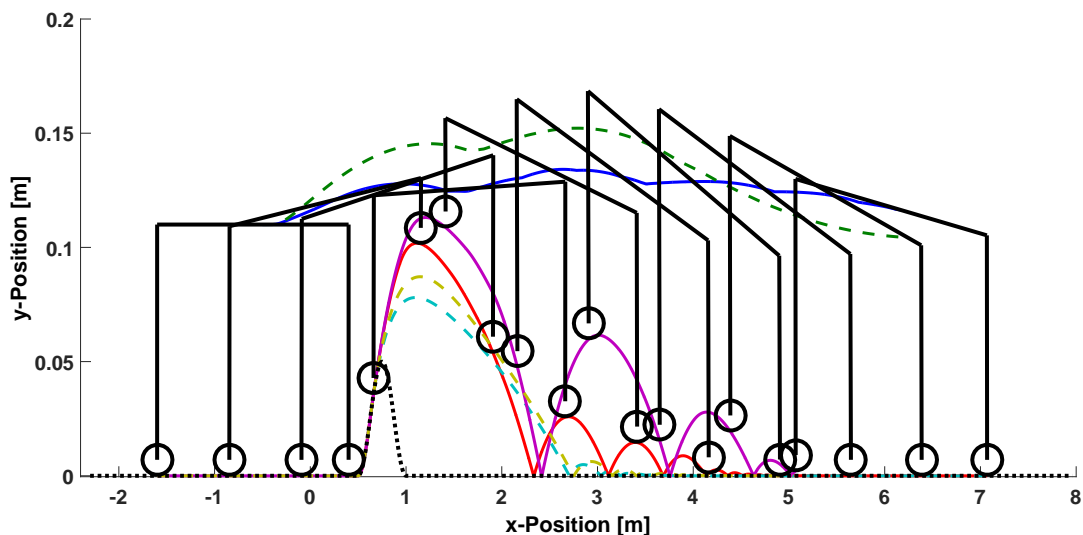


Abbildung 7.6: Trajektorie der ungesteuerten (gestrichelt) und optimierten (durchgezogen) Schwellenüberfahrt

Der Verlauf der berechneten Steuerung ist in Abbildung 7.8 zu sehen. Ein einfaches weich Stellen des Dämpfers genügt aufgrund der zeitversetzten Überfahrt des Vorder- und Hinterrads nicht mehr als identifizierbares Grundelement. Im unteren Diagramm ist die zeitliche Entwicklung der Zielfunktion dargestellt. Der Zielfunktionswert wurde hier um etwa 15% verbessert.

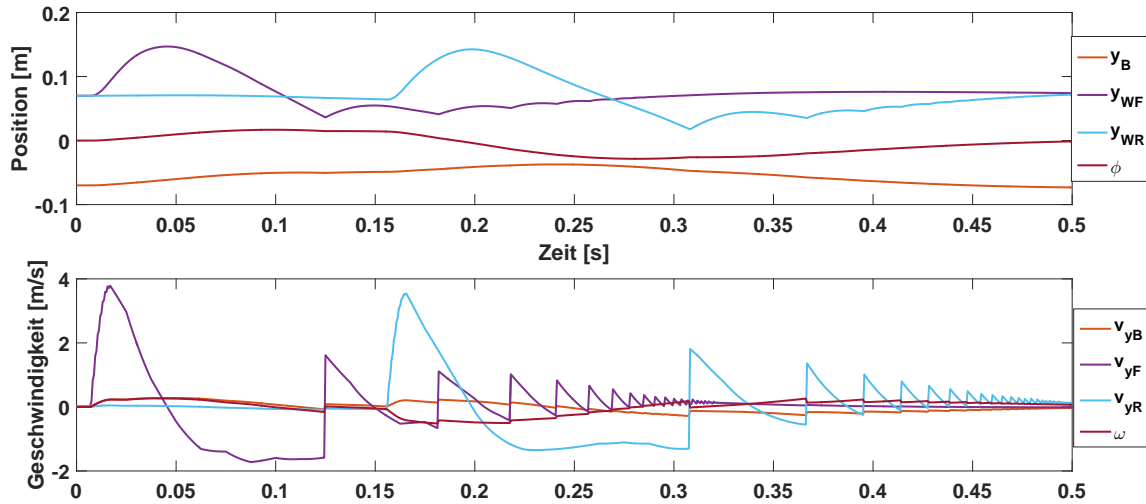


Abbildung 7.7: Ausgewählte Zustände des Halffahrzeugs dargestellt über der Zeit

Die Entwicklung der Verbesserung im Laufe der Iterationen ist in Abbildung 7.9 abgebildet. Auch hier wird die Konvergenz gegen ein zumindest lokales Optimum sichtbar. Was im Laufe der Optimierung nicht beobachtet werden kann, ist eine Konvergenz der Gradientennorm gegen 0. Dass trotzdem ein konvergentes Verhalten auftritt erinnert an die Minimierung nicht differenzierbarer Funktionen.

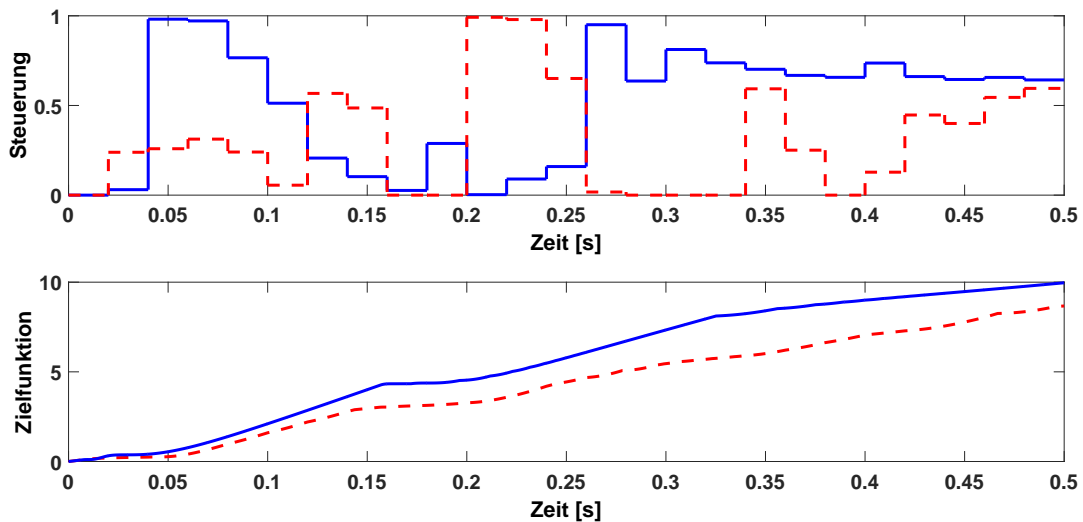


Abbildung 7.8: Oben: Optimale Steuerung für Vorder- (durchgezogen) und Hinterrad (gestrichelt), Unten: Vergleich der Zielfunktionsentwicklung bei konstanter (gestrichelt) und optimierter (durchgezogen) Steuerung

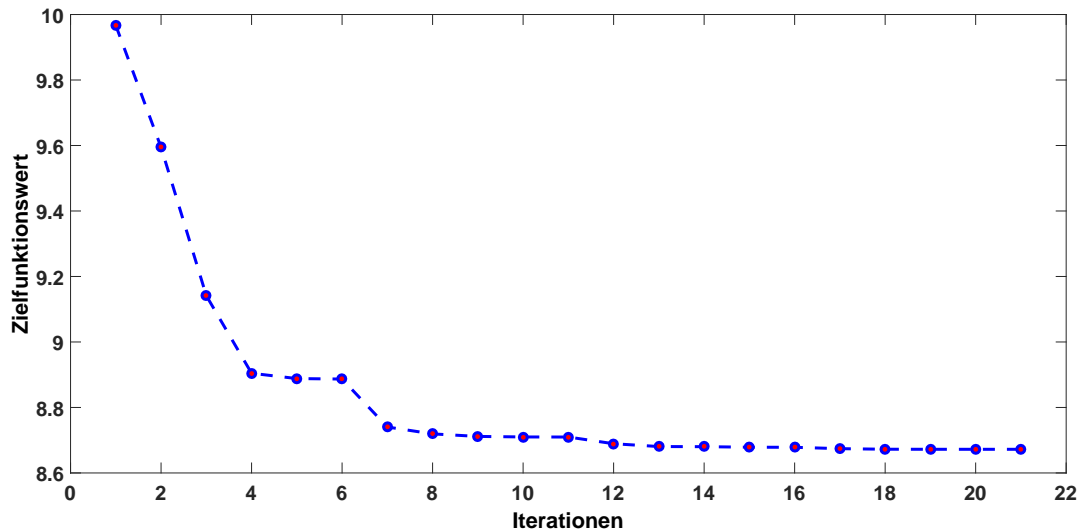


Abbildung 7.9: Entwicklung des Zielfunktionswertes im Laufe der Optimierungsroutine

## Zulässigkeit

Es stellt sich die Frage, ob die Gradientenapproximation zulässig ist. Ob die berechnete Richtung eine gute Approximation des Gradienten darstellt, kann hier nicht beantwortet werden. Jedoch liefert es eine Abstiegsrichtung, die in Kombination mit der Schrittweitensteuerung eine Verringerung des Zielfunktionswertes bewirkt.

Bei der Konvergenz des Verfahrens verhält es sich meist so, dass die Abbruchbedingung aus Algorithmus 7.11 zwar kleiner wird, jedoch nicht unter die eingestellte Schranke sinkt. Meist wird das Verfahren aufgrund einer zu kleinen Armijo-Schrittweite beendet. Dies liegt wohl daran, dass lediglich ein Element des Subdifferentials berechnet wird, vgl. Satz 7.19, und somit das Abbruchkriterium nicht detektiert wird.

## 7.6 Gradientenberechnung mit Hilfe von Mollifiern

Da, wie bereits erwähnt, die vorgestellte Gradientenapproximation mit Hilfe von Stufenkosten und finiten Differenzen lediglich für bestimmte Zielfunktionen angewendet werden kann und es keine theoretische Grundlage für die Gradientenberechnung und deren Zulässigkeit gibt, wird nun ein weiteres Verfahren vorgestellt.

### 7.6.1 Glättung mit Hilfe von Mollifiern

Um eine Optimierung des unstetigen Systems zu ermöglichen wird im Folgenden die Bestimmung des Zielfunktionsgradienten, sowie die Aufnahme kontaktbehafteter Beschleunigungsterme in die Zielfunktion mit Hilfe so genannter *Mollifier* bzw. *Glättungskerne* durchgeführt. Die hier vorgestellten Sätze und Definitionen sind in [Showalter, 1977, La Torre und Rocca, 2004] und [Ermoliev et al., 1995] zu finden.



## Glättungskerne

Zuerst werden die notwendigen Definitionen eingeführt, beginnend mit der Definition eines Mollifiers.

### Definition 7.13: Mollifier, Familie von Mollifiern, Familie gemittelter Funktionen

- Eine Funktion  $\psi_\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^+$ , heißt Mollifier oder Glättungskern, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\theta(z) dz = 1 \\ & - \text{supp } \psi_\theta := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \psi_\theta(z) > 0\} \subset B_\theta(0) \end{aligned}$$

- Eine *Familie von Mollifiern* ist eine Folge von Mollifiern  $\psi_{\theta_k}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k \rightarrow 0$ .
- Gegeben sei eine lokal integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine *Familie gemittelter Funktionen*  $\{f_{\theta_k}, \theta_k \in \mathbb{R}^+\}$  wird definiert durch

$$f_{\theta_k}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\psi_{\theta_k}(z)dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\psi_{\theta_k}(x-z)dz = f \star \psi_{\theta_k}.$$

Im Grunde stellen Mollifier spezielle Dichtefunktionen dar. Häufig wird die *Gauß'sche Dichtefunktion* verwendet, da diese zusätzlich noch aus  $C^\infty(\mathbb{R})$  ist.

### Beispiel 7.14: Beispiele für Mollifier

Hier sollen zwei häufig verwendete Klassen von Mollifiern vorgestellt werden, die selbst sehr unterschiedliche Stetig- und Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen.

- Die Familie der *Standard Mollifier* ist definiert durch

$$\psi_\theta(x) = \begin{cases} \frac{C}{\theta^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\|x\|^2 - \theta^2}\right), & \|x\| < \theta, \\ 0, & \|x\| \geq \theta, \end{cases}$$

mit  $C \in \mathbb{R}$ , s.d.  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\theta(x) dx = 1$ . Die so definierten Funktionen stellen eine Klasse von  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen dar.

- Die *Steklov-Mollifier*

$$\psi_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leq \frac{\theta}{2}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

hingegen sind nicht einmal stetig, können jedoch trotzdem zur Funktionsapproximation verwendet werden.

Eine Frage, die bei der Glättung von Funktionen im Raum steht, ist, ob und wie die Approximationen gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren. Der folgende Satz beantwortet dies für den Fall, dass die Ursprungsfunktion stetig ist.

### Satz 7.15: Konvergenz der geglätteten Funktion

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\{f_{\theta_k}, \theta_k \in \mathbb{R}^+\}$  eine Familie gemittelter Funktionen, dann konvergieren die  $f_{\theta_k}$  gleichmäßig gegen  $f$ , d.h.  $f_{\theta_k}(x_k) \rightarrow f(x)$  für alle  $x_k \rightarrow x$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Ist die zu glättende Funktion nicht stetig, kann nicht erwartet werden, dass eine gleichmäßige Konvergenz von  $f_{\theta_k}$  gegen  $f$  erfüllt ist. In [Ermoliev et al., 1995] werden Konvergenzkriterien für unterhalbstetige Funktionen gezeigt, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Für den hier vorherrschenden Anwendungsfall genügt folgender Satz, siehe [Showalter, 1977], der eine Konvergenz in der  $L^p$ -Norm garantiert.

**Satz 7.16: Konvergenz für  $L^p$ -Funktionen**

Sei  $f \in L^p(\mathbb{R})$  mit  $1 \leq p < \infty$  gegeben und  $\{f_{\theta_k}, \theta_k \in \mathbb{R}^+\}$  eine zugehörige Familie gemittelter Funktionen, dann gilt  $\|f_{\theta_k}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$  und  $\|f_{\theta_k} - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Die Idee, gemittelte Funktionen als Approximation zu verwenden, basiert auf der einfachen Bestimmung ihrer Ableitung.

**Satz 7.17: Differenzierbarkeitseigenschaften der gemittelten Funktionen**

Gegeben sei ein lokal integrierbares  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie stetig differenzierbare Glättungskerne  $\psi_{\theta_k} \in C^1(\mathbb{R})$ , dann sind auch die gemittelten Funktionen  $f_{\theta}$  stetig differenzierbar und der Gradient kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\nabla f_{\theta}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \nabla \psi_{\theta}(x - y) dy.$$

Diese Eigenschaft basiert auf der jeweiligen Darstellung des Faltungsintegrals. Je nachdem, wie der Glättungskern gewählt wird, kann seine Ableitung  $\nabla \psi_{\theta}$  analytisch angegeben werden um das Integral zu bestimmen.

## Das Mollifier-Subdifferential

**Definition 7.18: Mollifier-Subdifferential**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrierbar und  $f_{\theta_k}, k \in \mathbb{N}$  eine Familie gemittelter Funktionen, die aus der Faltung mit der Folge  $\psi_{\theta_k}, k \in \mathbb{N}$  hervorgeht. Dabei gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k \rightarrow 0$ . Unter der Annahme, dass  $f_{\theta_k} \in C^1$  gilt, definiert sich die Menge des  $\psi$ -Mollifier-Subdifferentials von  $f$  im Punkt  $x$  als

$$\partial_{\psi} f(x) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \{\nabla f_{\theta_k}(x_k) \mid x_k \rightarrow x\}.$$

Die Menge

$$\partial_{\Psi} f(x) := \bigcup_{\psi} \partial_{\psi} f(x)$$

bezeichnet die Menge des  $\Psi$ -Mollifier-Subdifferentials, wobei die Vereinigung über alle  $\psi$ , die glatte gemittelte Funktionen erzeugen, gebildet wird.

Die Menge  $\partial_{\psi} f(x)$  bildet eine abgeschlossene Menge, die von der konkreten Wahl des Glättungskerns  $\psi$  abhängt. Die Menge  $\partial_{\Psi}$  ist als Vereinigung über alle zulässigen Mollifier, die eine  $C^1$  Funktion liefern, ebenfalls abgeschlossen und hängt nicht mehr von einem bestimmten Glättungskern ab.

Für Optimierungsverfahren ist die folgende Aussage interessant, da sie eine notwendige Bedingung für ein lokales Minimum liefert.

**Satz 7.19: Notwendige Bedingung lokaler Minima**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stark unterhalbstetig und lokal integrierbar und  $\{\psi_{\theta_k}\}$  eine beliebige Folge glatter Mollifier, dann gilt  $0 \in \partial_{\psi} f(x^*)$ , wenn  $x^*$  ein lokales Minimum von  $f$  ist.

In [Ermoliev et al., 1995] wird folgende Beziehung zum Clarke'schen Subdifferential gezeigt.

**Satz 7.20: Zusammenhang  $\psi$ -Subdifferential zum Clarke'schen Subdifferential**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  unterhalbstetig und lokal integrierbar, dann gilt

$$\text{co } \partial_{\psi} f(x) \subset \partial_{\Psi} f(x) \subset \partial_C f(x),$$

wobei  $\partial_C f(x)$  das Clarke'sche Subdifferential bezeichnet. Wenn zusätzlich  $f$  lokal Lipschitzstetig ist, so gilt

$$\text{co } \partial_{\psi} f(x) = \partial_{\Psi} f(x) = \partial_C f(x).$$

Der Beweis dazu kann in [Ermoliev et al., 1995] gefunden werden.

In [Mahdavi-Amiri und Yousefpour, 2011] wird aufbauend auf dieser Aussage das Clarke'sche Subdifferential mit Hilfe von Mollifier-Subgradienten approximiert.

## 7.6.2 Glättung der Zustände für erweiterte Zielfunktionen

Wie bereits erläutert, ist es mit der in Kapitel 7.5.2 vorgestellten Formulierung nicht möglich die Beschleunigungen der kontaktbehafteten Körper in die Zielfunktion einzubeziehen. Dies liegt daran, dass die Unstetigkeiten in der Geschwindigkeit dafür verantwortlich sind, dass diese lediglich fast überall existieren. Ein Ignorieren der Sprünge erscheint auch nicht sinnvoll, da in diesen Punkten die größten Beschleunigungen vorherrschen. Eine erste Anwendung der vorgestellten Glättungskerne ergibt sich daraus, die Geschwindigkeit durch eine stetig differenzierbare Approximation zu ersetzen, die im Grenzfall ( $\theta_k \rightarrow 0$ ) gegen die unstetige Trajektorie konvergiert.

Die Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  sind Funktionen beschränkter Variation und lassen sich als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellen. Monoton wachsende Funktionen sind integrierbar, und somit gilt auch  $\dot{q} \in L_1([t_0, t_f])$ . Kombiniert man diese Eigenschaft mit Satz 7.16, so erhält man die Konvergenz der gemittelten Approximationen gegen die unstetige Ursprungsfunktion in der  $L_1$ -Norm.

Die Ableitung der Geschwindigkeit kann damit ebenfalls mit Hilfe der Ableitungsregel für gemittelte Funktionen bestimmt werden:

$$\frac{d}{dt} \dot{q}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \dot{q}_{\theta_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \dot{q}(t) \frac{d}{dt} \psi_{\theta_k}(s-t) dt.$$

### Beispiel der Zustandsmittelung

Dieses Beispiel soll die Konvergenz des Glättungsverfahrens und der berechneten Ableitungen für ein Viertelfahrzeug zeigen. Dafür wird eine Stufenüberfahrt betrachtet und die Geschwindigkeiten mit einer Familie von Standard-Mollifiern  $\psi_{\theta_k}$  nach Beispiel 7.14 gemittelt. Die  $\theta_k$  werden dabei als  $\theta_k = \frac{0.1}{2^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  gewählt. Die Konvergenz ist in Tabelle 7.1 in verschiedenen Normen dargestellt.

$k$	$\ v_w - v_{w,\psi_{\theta_k}}\ _{\infty}$	$\ v_w - v_{w,\psi_{\theta_k}}\ _{L_1}$	$\ v_w - v_{w,\psi_{\theta_k}}\ _{L_2}$
0	$2.5890 \cdot 10^0$	$4.3603 \cdot 10^{-1}$	$6.3421 \cdot 10^{-1}$
1	$2.6116 \cdot 10^0$	$4.2560 \cdot 10^{-1}$	$6.2539 \cdot 10^{-1}$
2	$2.6350 \cdot 10^0$	$3.0883 \cdot 10^{-1}$	$3.9431 \cdot 10^{-1}$
3	$2.6287 \cdot 10^0$	$1.7479 \cdot 10^{-1}$	$1.9768 \cdot 10^{-1}$
4	$2.5833 \cdot 10^0$	$9.5911 \cdot 10^{-2}$	$9.6487 \cdot 10^{-2}$
5	$2.4713 \cdot 10^0$	$4.8543 \cdot 10^{-2}$	$3.7707 \cdot 10^{-2}$
6	$2.2382 \cdot 10^0$	$2.3224 \cdot 10^{-2}$	$1.5896 \cdot 10^{-2}$
7	$1.7862 \cdot 10^0$	$1.0661 \cdot 10^{-2}$	$3.8070 \cdot 10^{-3}$
8	$1.0646 \cdot 10^0$	$5.0784 \cdot 10^{-3}$	$3.7800 \cdot 10^{-4}$
9	$5.3239 \cdot 10^{-1}$	$2.5391 \cdot 10^{-3}$	$9.4526 \cdot 10^{-5}$
10	$2.6620 \cdot 10^{-1}$	$1.2696 \cdot 10^{-3}$	$2.3631 \cdot 10^{-5}$
11	$1.3310 \cdot 10^{-1}$	$6.3477 \cdot 10^{-4}$	$5.9079 \cdot 10^{-6}$
12	$6.6549 \cdot 10^{-2}$	$3.1738 \cdot 10^{-4}$	$1.4770 \cdot 10^{-6}$
13	$3.3274 \cdot 10^{-2}$	$1.5868 \cdot 10^{-4}$	$3.6924 \cdot 10^{-7}$
14	$1.6637 \cdot 10^{-2}$	$7.9334 \cdot 10^{-5}$	$9.2302 \cdot 10^{-8}$
15	$8.3185 \cdot 10^{-3}$	$3.9660 \cdot 10^{-5}$	$2.3070 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 7.1: Konvergenz der gemittelten Funktion gegen die Ursprungsfunktion gemessen in verschiedenen Normen

In den Abbildungen 7.10a - 7.10d sind ausgewählte Schritte der Familie gemittelter Funktionen dargestellt. Im jeweils oberen Koordinatensystem ist die ursprüngliche unstetige Geschwindigkeit des Reifens und ihre stetig differenzierbare Approximation, im unteren die über die Ableitung des Glättungskerns berechnete Beschleunigung des Reifens abgebildet. Die Beschleunigung nimmt im Grenzfall ein scheinbar singuläres Verhalten an, jedoch ist die Funktion in jedem Punkt stetig differenzierbar, da zur Mittlung die  $C^\infty$ -Standard-Mollifier verwendet wurden. Das Integral des Quadrats dieser Funktion kann somit zumindest theoretisch als Handlingkriterium in die Zielfunktion aufgenommen werden, was ohne die Glättung nicht möglich war.

### 7.6.3 Glättung der Zielfunktion

Zusätzlich ist es mit diesen Informationen möglich die Ableitung der Zielfunktion  $J(u)$  zu bestimmen und die in Kapitel 7.5.1 vorgestellte Berechnung über finite Differenzen durch ein theoretisch fundiertes Verfahren zu ersetzen. Aufgrund der in 7.2 gezeigten Eigenschaften sind die Zustände  $x$  bzgl.  $u$  Hölderstetig. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die Zielfunktion, wie der folgende Satz zeigt.

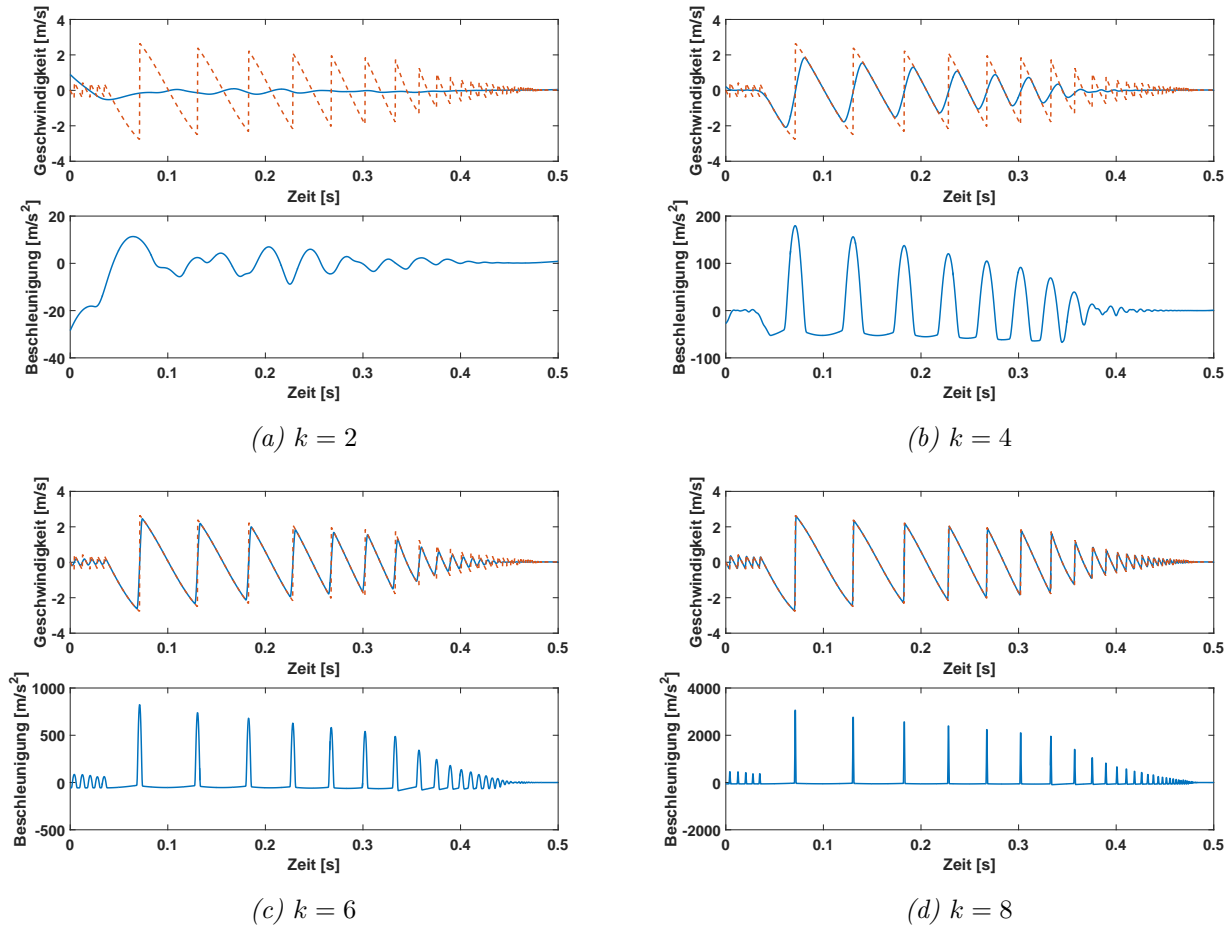


Abbildung 7.10: Vergleich der gemittelten Geschwindigkeit mit zugehöriger Beschleunigung mit der ursprünglichen unstetigen Geschwindigkeit

### Satz 7.21: Hölderstetigkeit der Zielfunktion

Gegeben sei ein Zielfunktional  $J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(u)(t), u) dt$  mit Lipschitz-stetigem  $f$  bzgl. aller Argumente. Der Zustand  $x(u)(t)$  sei Hölder-stetig bzgl.  $u$ , dann ist auch  $J(u)$  Hölder-stetig.

**Beweis:** Der Beweis kann durch direktes Einsetzen der Eigenschaften von  $f$  und  $x$  geführt werden. Hier ist der Einfachheit halber  $f$  wieder als autonom vorausgesetzt.

$$\begin{aligned}
 \|J(u) - J(u + \varepsilon)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_f} f(x(u)(t), u) - f(x(u + \varepsilon)(t), u + \varepsilon) dt \right\| \\
 &\leq \int_{t_0}^{t_f} \|f(x(u)(t), u) - f(x(u)(t), u + \varepsilon)\| dt + \int_{t_0}^{t_f} \|f(x(u)(t), u + \varepsilon) - f(x(u + \varepsilon)(t), u + \varepsilon)\| dt \\
 &\leq \int_{t_0}^{t_f} L_u \|\varepsilon\| dt + \int_{t_0}^{t_f} L_x \|x(u)(t) - x(u + \varepsilon)(t)\| dt \\
 &\leq (t_f - t_0) \left( L_u \|\varepsilon\| + L_x K \left( \|\varepsilon\| + \|\varepsilon\|^{\frac{1}{2}} \right) \right) \leq A \|\varepsilon\| + B \|\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

□

Mittelt man  $J(u)$  nun bzgl.  $u$ , so konvergiert die geglättete Zielfunktion  $J_{\theta_k}$  gleichmäßig gegen  $J$ , was direkt aus der Stetigkeit mit Hilfe von Satz 7.15 folgt. Damit kann die Gradientenberechnung für ein

Abstiegsverfahren durch die Berechnung des folgenden Grenzwerts ersetzt werden:

$$\partial_\psi J(u) \ni \nabla J(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla J_{\theta_k}(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{M_u}} J(u) \nabla \psi_{\theta_k}(v - u) dv, \quad (7.17)$$

wobei hier  $M_u$  die Anzahl der unabhängigen diskretisierten Steuerungen, der Optimierungsparameter, darstellt, d.h.  $M_u = M \cdot n_u$ . Dies entspricht der Approximation eines Elements des Mollifier-Subdifferentials aus Definition 7.18. Gilt zusätzlich noch, dass  $J(u)$  lokal Lipschitz-stetig ist, so kann der Gradient direkt mit Hilfe der Steklov-Mollifier dargestellt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla J_\theta(u) &= \sum_{i=1}^{M_u} e_i \frac{1}{\theta^{M_u-1}} \int_{u_1-\theta/2}^{u_1+\theta/2} \cdots \int_{u_{i-1}-\theta/2}^{u_{i-1}+\theta/2} \int_{u_{i+1}-\theta/2}^{u_{i+1}+\theta/2} \cdots \int_{u_{M_u}-\theta/2}^{u_{M_u}+\theta/2} \\ &\quad \frac{1}{\theta} \left[ J \left( u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \frac{\theta}{2}, u_{i+1}, \dots, u_{M_u} \right) - J \left( u_1, \dots, u_{i-1}, u_i - \frac{\theta}{2}, u_{i+1}, \dots, u_{M_u} \right) \right] \\ &\quad du_{M_u} \cdots du_{i+1} du_{i-1} \cdots du_1. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Wie die Gleichungen (7.17) und (7.18) zeigen, ist die Berechnung für große  $M_u$  sehr rechenintensiv, da für jede Dimension  $M_u - 1$  Integrale hintereinander ausgeführt werden müssen. Die einzelnen Dimensionen sind jedoch parallel berechenbar, wodurch mit ausreichend Rechenkernen die Gradientenberechnung stark beschleunigt werden kann.

Eine Approximation der Integrale mit Hilfe der Trapezregel, was aufgrund des in der Regel sehr kleinen Integrationsintervalls eine probate Näherung darstellt, ergibt sich für die Elemente des Gradienten die Berechnungsformel

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(u)}{\partial u_i} &= e_i \frac{1}{2^{M_u-1} \theta} \sum_{\delta \in \{-1,1\}^{M_u-1}} J \left( u_j + \delta_j \frac{\theta}{2}, u_i + \frac{\theta}{2} \right) - J \left( u_j + \delta_j \frac{\theta}{2}, u_i - \frac{\theta}{2} \right) \\ &= e_i \frac{1}{2^{M_u-1} \theta} \sum_{\delta \in \{-1,1\}^{M_u}} \delta_i J \left( u + \delta \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Dabei ist die Schreibweise hier so zu verstehen, dass die Summe über alle möglichen  $-1, +1$  Kombinationen von  $\delta$  gebildet wird und  $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, M_u$  gilt. Bildlich gesprochen werden alle Zielfunktionswerte an den Ecken des  $M_u$ -dimensionalen Quaders mit der Kantenlänge  $\theta$  um  $u$  aufsummiert. Dabei bekommen die Ecken, die in der  $i$ -ten Dimension um  $-\frac{\theta}{2}$  verschoben sind, ein positives Vorzeichen und die um  $\frac{\theta}{2}$  verschobenen ein negatives. Damit reduziert sich der Rechenaufwand auf das einmalige Berechnen aller  $2^{M_u}$  Eckpunkte, welche dann zur Gradientenbestimmung lediglich unterschiedlich aufsummiert werden müssen.

In [Ermoliev et al., 1995] und [Gupal, 1977] wird aufbauend auf den hier vorgestellten Techniken ein Optimierungsverfahren präsentiert. Es basiert auf approximierten Subdifferentials, die mit Hilfe Familien gemittelter Funktionen berechnet werden, und Ideen stochastischer quasi-Gradientenverfahren mit dynamischen instationären Optimierungsmethoden. Dieser Algorithmus wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht nachprogrammiert. Die Methodik verspricht bei Wahl geeigneter Schrittweiten fast sicher die Existenz einer Teilfolge, die gegen einen Häufungspunkt konvergiert, der die Stationaritätsbedingung  $0 \in \partial_\psi J(x^*)$  erfüllt. In dieser Arbeit wird im Folgenden ein auf dem projizierten Gradientenverfahren Algorithmus 7.11 basierendes Verfahren verwendet. Da lediglich ein Element des Subdifferentials berechnet wird, ist mit diesem Verfahren die Gültigkeit der notwendigen Bedingung aus Satz 7.19 schwer zu überprüfen.

### 7.6.4 Beispiele

#### Konvergenzverhalten für $M_u = 2$

In diesem ersten Beispiel wird das Konvergenzverhalten für eine sehr grobe Steuerung betrachtet. Es werden lediglich 2 Steuerungsintervalle eingeführt, d.h.  $u = [u_1, u_2]^\top$ . Damit kann das Verhalten der Steuerung im Laufe der Iterationen und des Gradienten grafisch dargestellt und andere Effekte, wie das Verhalten der Zielfunktion, untersucht werden. Betrachtet wird hier eine Stufe  $\mathcal{T}(-0.05)$  des Viertelfahrzeugmodells und ein Zeithorizont von 0.5 Sekunden.

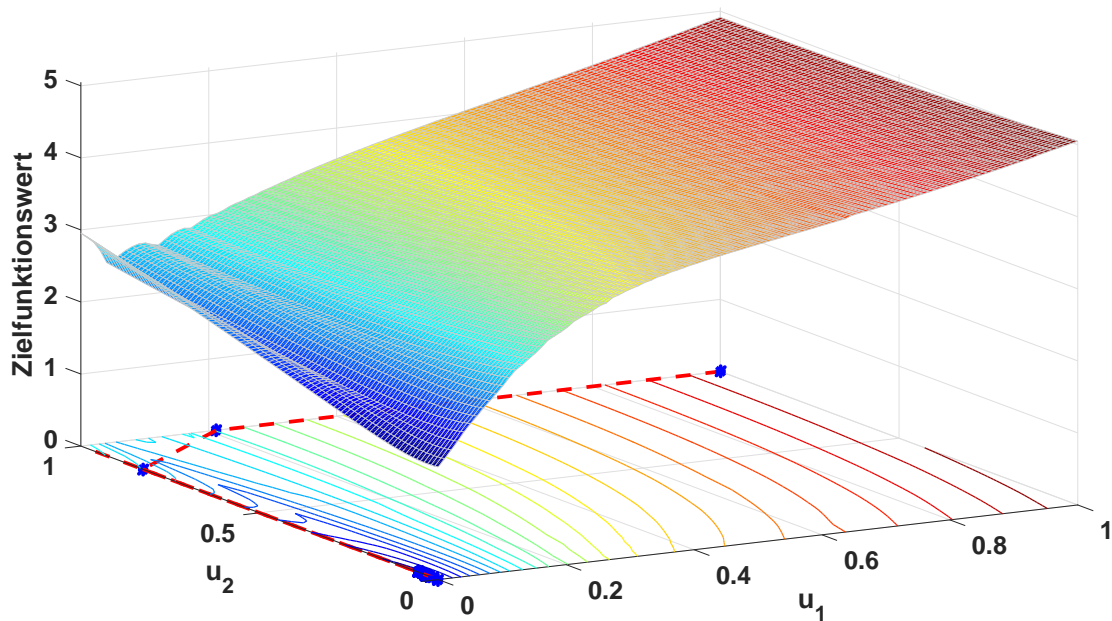


Abbildung 7.11: Darstellung der Zielfunktion und der Iterationen des Algorithmus

Der Verlauf der Optimierung ist in Abbildung 7.11 dargestellt. Beginnend beim Punkt  $u = [1.0, 1.0]^\top$  läuft der Algorithmus zuerst in negativer  $u_1$ -Richtung orthogonal zu den Höhenlinien. Nach zwei Schritten gilt  $u_1 = 0$  und es werden noch 32 Iterationen durchgeführt, bevor der Algorithmus im Minimum  $u = [0.0, 0.033]^\top$  endet.

Diese Berechnung wurde mit einer sehr hohen Subdiskretisierung von 5000 Schritten pro Intervall durchgeführt, also einer Schrittweite von  $h = 5.0 \cdot 10^{-5}$  Sekunden. Beispielrechnungen haben gezeigt, dass eine hinreichend kleine Zeitschrittwahl für das Optimierungsproblem notwendig ist, damit die Iterationen gegen das Minimum laufen. Sonst bleibt der Algorithmus teilweise in anderen Punkten hängen, die bei Betrachtung der Zielfunktion aus Abbildung 7.11 jedoch kein Minimum darstellen. Um die Frage, wie sich die Diskretisierung des Problems lokal auf das Verhalten der Zielfunktion auswirkt, an diesem Beispiel genauer zu beleuchten, wurde die Zielfunktion in einer Umgebung des Minimums mit verschiedenen Schrittweiten berechnet. In Abbildung 7.12 ist ein kleiner Ausschnitt der Zielfunktion über der Steuerung  $u_2$  für  $u_1 = 0$  dargestellt. Es fällt auf, dass bei zu großer Schrittweite ein relativ starkes Rauschen den Verlauf stört. Ein ähnliches Phänomen wurde in [Stewart und Anitescu, 2010] ebenfalls für Optimalsteuerungsprobleme mit unstetigen Differentialgleichungen bzgl.

einer Untersuchung des Anfangswerts festgestellt. Dieses nicht-glatte Verhalten führt bei der Optimierung unter Umständen dazu, dass der Optimierungsalgorithmus in einem lokalen Minimum hängen bleibt, das lediglich durch die Ungenauigkeit der Berechnung erzeugt wurde. Der vom Algorithmus gefundene Minimalwert ist mit der vertikalen Linie gekennzeichnet. Da sowohl die Diskretisierung der Trajektorie einen Fehler aufweist, als auch die Optimierung der Kontaktpunkte für leicht unterschiedliche Eingangsparameter in unterschiedlichen lokalen Minima landen kann, sowie zusätzliche numerische Rundungsfehler auftreten können, ist es an diesem Punkt schwer herauszufinden, woran dieses Rauschen tatsächlich liegt. Nach den bisherigen Erkenntnissen hilft eine feine Zeitdiskretisierung den Effekt zu minimieren, jedoch muss dabei immer auch daran gedacht werden, dass eine feinere Zeitdiskretisierung auch einen erhöhten Rechenaufwand verursacht.

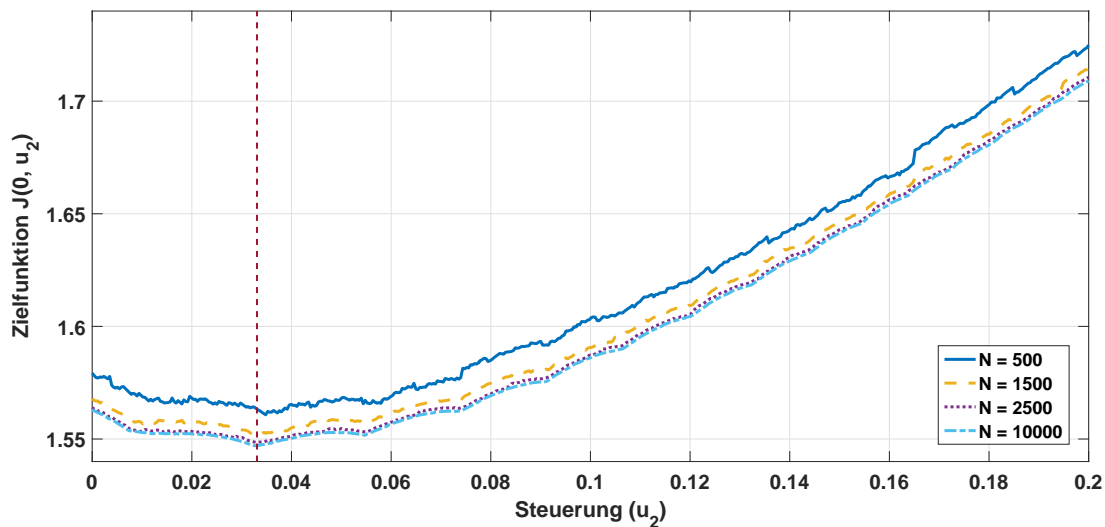


Abbildung 7.12: Vergleich der Zielfunktion für verschiedene Diskretisierungsschrittweiten dargestellt über  $u_2$  für  $u_1 = 0$

### Steklov-Gradienten bei Schwellenüberfahrt

Um die Anwendbarkeit der vorgestellten Gradientenapproximation auch für eine größere Anzahl an Optimierungsvariablen zu zeigen, wird nun ein Beispiel vorgestellt. Dabei wird die lokale Lipschitzstetigkeit der Zielfunktion bzgl.  $u$  angenommen, da ansonsten nicht die in (7.18) vorgestellte Bestimmung des Gradienten verwendet werden kann. In der Implementierung wurde zusätzlich die Trapezapproximation der Integrale aus (7.19) verwendet, um die Rechenzeiten zu reduzieren.

Hier wird die Schwellenüberfahrt  $\mathcal{P}(0.05, 0.6)$  eines Viertelfahrzeugs mit einer Steuerungsdiskretisierung von  $M = 10$  auf einem Zeithorizont von 0.5 Sekunden betrachtet. Bereits diese relativ grobe Auflösung verlangt die Berechnung von  $2^{10} = 1024$  Trajektorien und Zielfunktionen zur einmaligen Bestimmung des Gradienten. Für die Schrittweitenbestimmung wurde auch hier auf eine Armijo-Suche zurückgegriffen, da dies bei den Testrechnungen die besseren und schnelleren Resultate lieferte, als bei der iterationsabhängigen Schrittweitenwahl aus [Ermoliev et al., 1995].

In den Abbildungen 7.13 und 7.14 sind die Trajektorien und die Steuerungen der Startlösung und des Optimierungsergebnisses dargestellt. Die Optimierung liefert hier eine starke Verbesserung der



Aufbaubeschleunigung, auch wenn dadurch die absolute Auslenkung etwas größer ist als zuvor. Der Zielfunktionswert verbessert sich von 8.356 auf 3.484. In Abbildung 7.15 ist die Schwingungsverbesserung des Aufbaus im Frequenzraum dargestellt. Über das gesamte Spektrum wird eine deutliche Reduzierung der Aufbaubeschleunigungen sichtbar.

Die berechnete Steuerung ist, wie zu erwarten, sehr weich, da dies bereits bei den kontinuierlichen Modellen eine Komfortverbesserung erzielt hat. Der Algorithmus benötigte 33 Iterationen bis ein Abbruchkriterium erfüllt war. In diesem Beispiel lief die Schrittweite der Armijo-Suche gegen 0 und somit auch der Fortschritt der Zielfunktionsverbesserung. Die Entwicklung der Zielfunktion im Laufe der Iterationen ist in Abbildung 7.16 dargestellt.

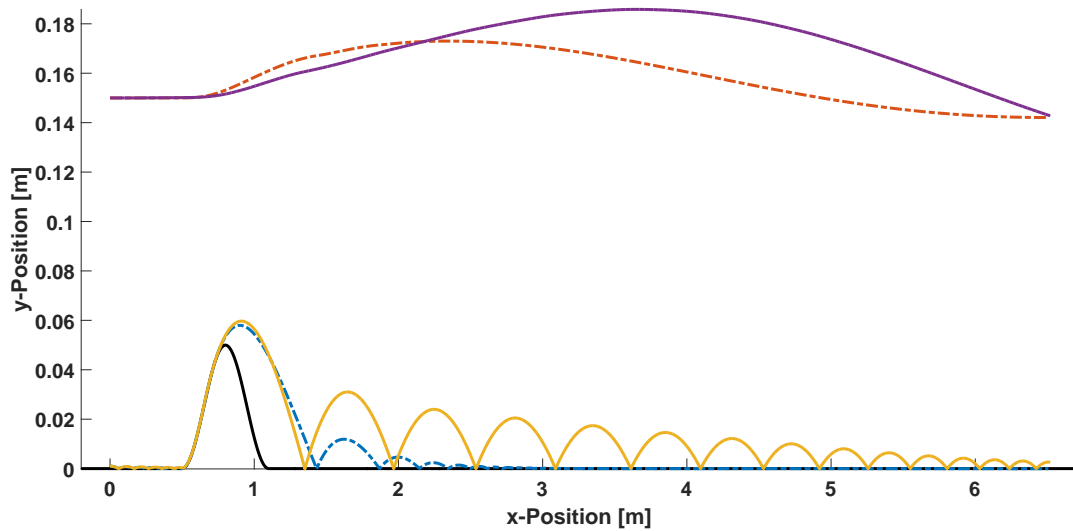


Abbildung 7.13: Vergleich der optimierten Trajektorie (gestrichelt) mit Ungesteuerten (durchgezogen)

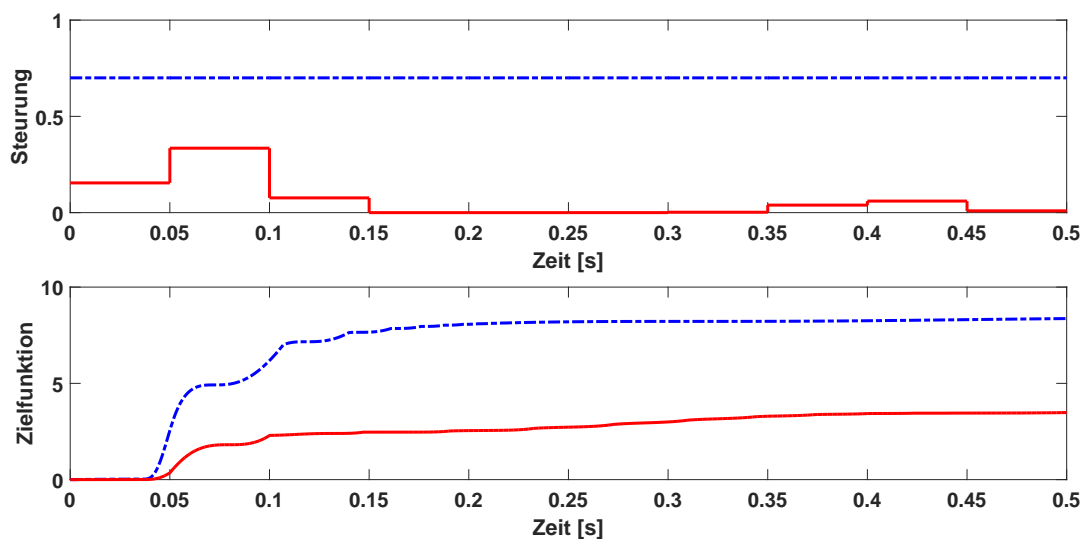


Abbildung 7.14: Steuerung und Zielfunktionsentwicklung der Ausgangssteuerung (gestrichelt) und der Steklov-Approximation (durchgezogen)

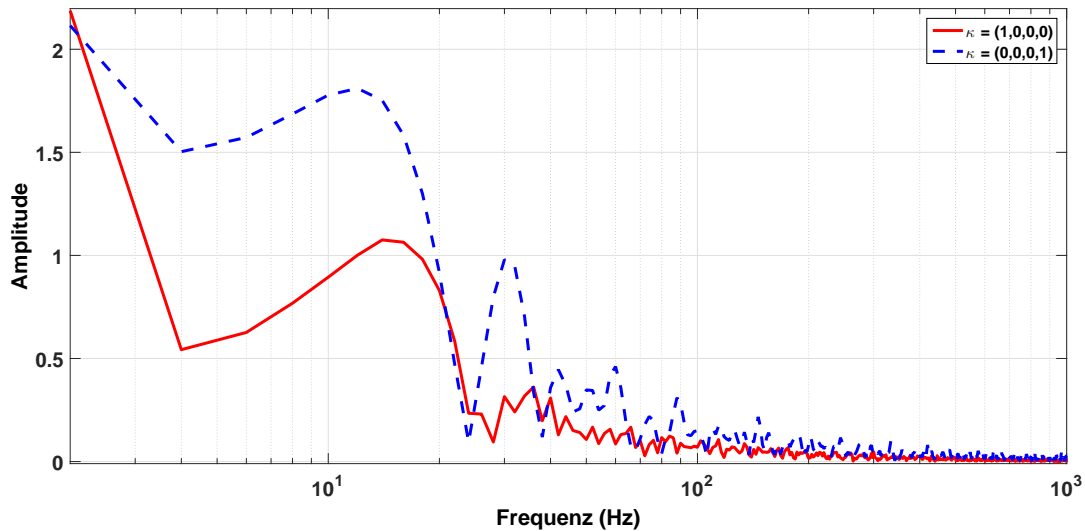


Abbildung 7.15: Vergleich des Frequenzgangs des Aufbaus der ungesteuerten (gestrichelt) und optimierten Schwellenüberfahrt (durchgezogen)

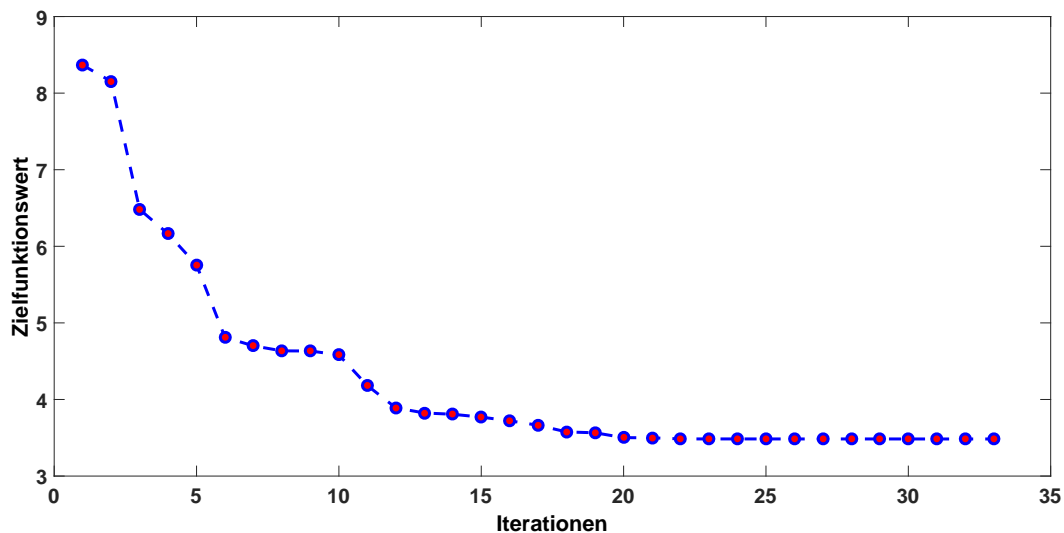


Abbildung 7.16: Entwicklung des Zielfunktionswertes dargestellt über den Iterationen

### Erweitertes Zielfunktional

Ein zweites Beispiel soll abschließend für eine Stufenüberfahrt  $\mathcal{T}(-0.05)$  die Minimierung der Radbeschleunigung mit Hilfe der in Kapitel 7.6.2 vorgestellten Zustandsglättung demonstrieren. Dabei wird die impulsive Dynamik berechnet und zur Auswertung der Zielfunktion die Geschwindigkeit geglättet, deren Ableitung bestimmt, quadriert und aufintegriert. Die Zielfunktion besitzt demnach folgende Gestalt:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} z_w(t, x_0, u)^2 dt \approx \int_{t_0}^{t_f} \left( \int_{t-\theta/2}^{t+\theta/2} z_w(\sigma, x_0, u) \frac{d}{dt} \psi_\theta(t - \sigma) d\sigma \right)^2 dt.$$

In den Abbildungen 7.17 und 7.18 sind die Zustandstrajektorie der Stufenüberfahrt und die berechnete Steuerung mit zugehöriger Zielfunktion dargestellt. Im Gegensatz zur Komfortoptimierung wird

hier in der entscheidenden Phase der Überfahrt der Dämpfer hart gestellt, wie es auch bei den kontinuierlichen Modellen zu beobachten war. Die Steuerung zielt auf die Unterdrückung des Hüpfens des Rades ab. Da die Radbeschleunigung am Ende sehr gering ist und der Reifen dauerhaften Kontakt zur Fahrbahn hat, weicht hier die Steuerung nicht bzw. lediglich minimal vom Ausgangszustand 0.5 ab. In Abbildung 7.19 wird der Frequenzgang des Reifens der optimierten Steuerung mit der konstanten Ausgangssteuerung verglichen. Die Verbesserung wird dadurch ebenfalls deutlich dargestellt.

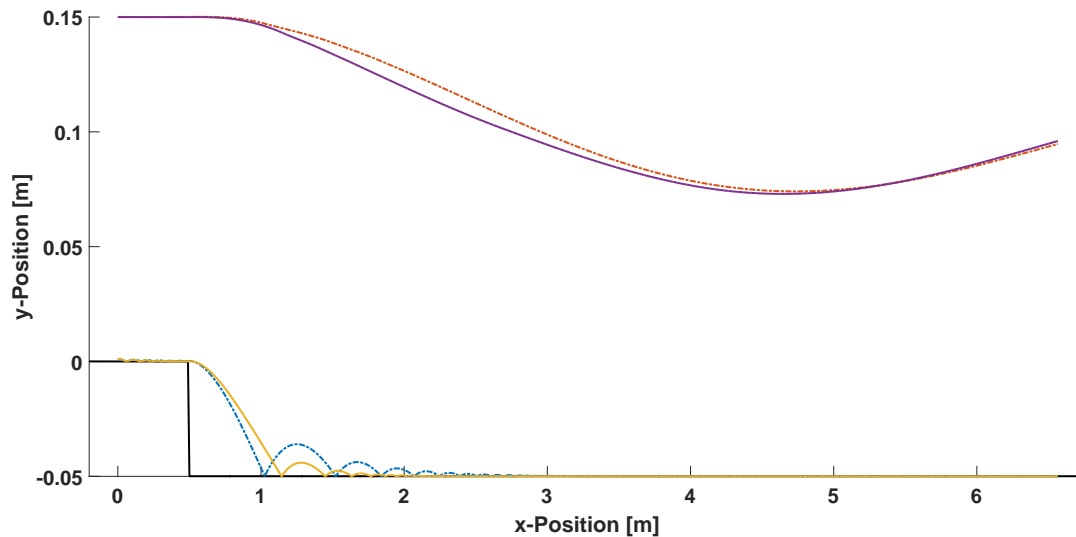


Abbildung 7.17: Optimierte Trajektorie mit Radbeschleunigung als Zielfunktion

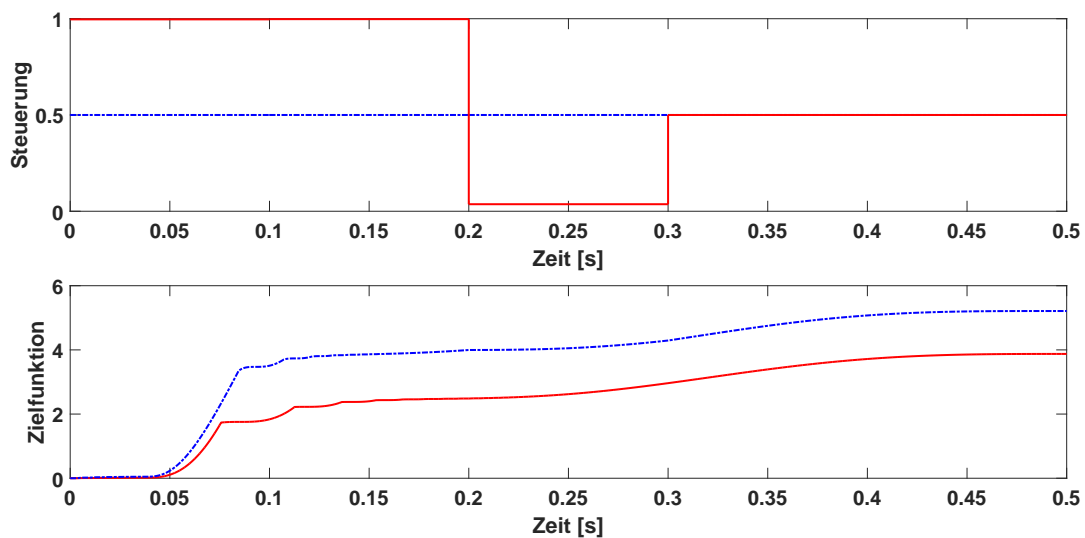


Abbildung 7.18: Steuerung und Zielfunktionsentwicklung der Ausgangssteuerung (gestrichelt) und der Steklov-Approximation (durchgezogen) mit Radbeschleunigung als Zielfunktion

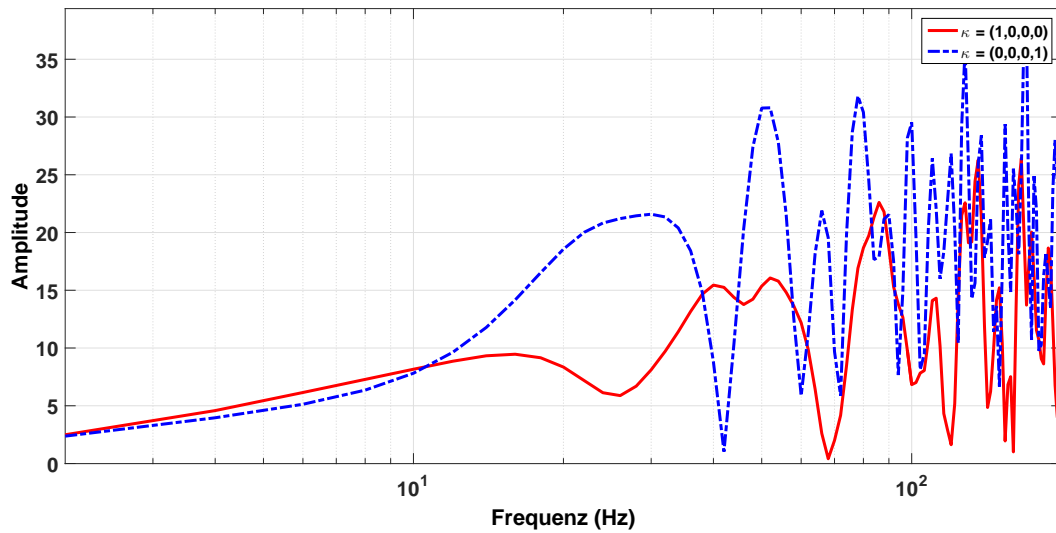


Abbildung 7.19: Vergleich des Frequenzgangs des Reifens der ungesteuerten (gestrichelt) und optimierten Schwellenüberfahrt

Mit den in diesem Kapitel vorgestellten Methoden ist es möglich alle Fälle der kontinuierlichen Dynamik auch auf den impulsiven Fall zu übertragen, da eine Integration des im kontinuierlichen Fall zusätzlich betrachtete Bestrafung des Federwegs als unproblematisch betrachtet werden kann. Es können damit nun auch gewichtete Zielfunktionen untersucht werden, worauf im Rahmen dieser Arbeit jedoch verzichtet wird.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

### Zusammenfassung

Die Ziele dieser Arbeit sind es einerseits die Anwendbarkeit optimaler Steuerungstheorien in Kombination mit echtzeitfähigen Sensitivitätsupdates in der vertikalen Fahrzeugdynamik zu verifizieren und andererseits eine Methodik zur Integration impulsiver Systeme zu entwickeln.

Das erste Ziel wurde aus mathematischer Sicht insofern erfüllt, da eine theoretische Betrachtung der relevanten Teilaspekte durchgeführt wurde. Die Berechnung der optimalen Steuerungen für allgemeine Straßenprofile war bereits bekannt, jedoch wurde mit Hilfe der Definition parametrisierter singulärer Fahrbahnereignisse ein Rahmen geschaffen, der die Möglichkeit einer echtzeitfähigen Implementierung eröffnet. Die Berechnung der benötigten Sensitivitäten für die Steuerungsupdates und eine Untersuchung der notwendigen Parameterdiskretisierung wurde unternommen und darauf aufbauend der Algorithmus zum Online-Update vorgestellt. Zusätzlich wurde auch die Frage der Ereigniserkennung behandelt und eine Möglichkeit einer Klassifizierung mittels eines Kleinste-Quadrate-Optimierungsproblems samt einer vorgeschalteten mehrklassigen Support-Vektor-Maschine eingeführt. Außerdem wurde die prinzipielle Echtzeitfähigkeit mit Hilfe von Zeitmessungen der Simulation verifiziert.

Die Integration impulsiver Systeme in die vertikale Fahrzeugdynamik wurde mit einer Riemann-Stieltjes-Integralformulierung durchgeführt, Quadraturformeln dafür vorgestellt und in Form von expliziten Einschrittverfahren erweitert. Darüber hinaus wurden die benötigten Stoßgesetze über ein unterlagertes Optimierungsproblem mittels verallgemeinerten Restitutionskoeffizienten gelöst und in das Gesamtsystem integriert. Es wurden Sensitivitäten bzgl. der Steuerungen nachgewiesen, deren Resultate mit bekannten Ergebnissen aus der Theorie hybrider Systeme in Verbindung gebracht werden können. Basierend auf diesen Informationen wurden Algorithmen zur Optimierung des Systems vorgestellt, wobei der Blick auf Gradientenverfahren limitiert wurde. Für die Berechnung der benötigten Gradienten wurden zwei Verfahren vorgestellt. Das Ergebnis: Die Approximation mittels Glättungskernen besitzt in diesem Zusammenhang zwar die größere Komplexität, jedoch auch den theoretisch fundierteren Hintergrund. Beide Verfahren konnten für die betrachtete Problemklasse herangezogen werden und lieferten eine deutliche Verbesserung des Zielfunktionswerts, sowie ein konvergentes Verhalten.

## Ausblick

Aufbauend auf die hier vorgestellten Techniken und Verfahren können diverse weitere Forschungsgebiete eingeschlagen werden, die wiederum interessante Projekte liefern.

So kann eine Implementierung des vorgestellten Erkennungsalgorithmus an einem realen Versuchsträger durchgeführt werden. Sicherlich bietet es sich in diesem Zusammenhang an, an dem Erkennungsalgorithmus zu arbeiten und mit Hilfe realer Straßendaten die Modellklassen der singulären Straßenereignisse zu vergrößern und weiter zu entwickeln. Anschließend wäre ein Aufbau eines aktiven oder semi-aktiven Fahrzeugs eine Möglichkeit die tatsächliche Echtzeitfähigkeit und den Komfort- bzw. Handlinggewinn mittels realer Versuche zu verifizieren. Auch die bisherige Aufteilung in eine Closed-Loop-Open-Loop-Regelung bietet noch die Möglichkeit eine Kopplung mit Hilfe einer Vorsteuerung zu untersuchen. Diese Arbeiten weisen ein besonders großes interdisziplinäres Potential zwischen angewandter Mathematik und Regelungstechnik auf. Um eine Realisierung des Algorithmus zu ermöglichen, müssen außerdem auch noch weitere äußere Einflüsse betrachtet werden. So spielt der zum Zeitpunkt der Überfahrt des singulären Ereignisses vorherrschende Zustand des Fahrzeugs ebenfalls eine Rolle. Wobei hiermit ein globaler Zustand gemeint ist, der auch das zukünftige Streckenprofil bzgl. Kurvenfahrten, Bremsmanövern oder Ähnliches beinhaltet.

Darüber hinaus kann im Bereich der impulsiven Systeme einerseits an der Modellierung der Systeme, sowie an einer Erweiterung auf räumlich ausgedehnte Körper gearbeitet werden. Dabei kann in der Fahrzeugdynamik beispielsweise das Aufsetzen des Chassis auf den Boden oder die Modellierung der Reifen in ihrer realen Geometrie untersucht werden. Bei dem entworfenen Berechnungskonzept lassen sich auch leicht andere Algorithmen zur Bestimmung des Post-Impact-Zustands eingearbeiten. Besonders bei der Optimierung sind lediglich erste Schritte zur Untersuchung der Systeme getan. So kann neben einer Verbesserung des Optimierungsalgorithmus auch an eine Betrachtung der Sensitivitäten bzgl. Eingangsparametern gedacht werden. Anstelle des bisher betrachteten Gradientenverfahrens ließen sich auch andere Methoden untersuchen, wie z.B. Quasi-Newton-Verfahren mit BFGS-Update. Da eine echtzeitfähige Berechnung der Steuerung hier noch deutlich weiter entfernt ist, als es bei den kontinuierlichen Modellen der Fall ist, würde eine Sensitivitätsuntersuchung der Steuerung bzgl. der vorausliegenden Straße Potentiale zur tatsächlichen Realisierung ermöglichen und die beiden Forschungsthemen zusammenführen. Es könnte demnach für besonders gravierende Hindernisse auf die impulsive Dynamik zurückgegriffen und im Falle einer verhältnismäßig kleinen Unebenheit könnten die klassischen Modelle verwendet werden.

Auch Überlegungen bzgl. der adaptiven Wahl des Integrationsalgorithmus für Probleme dieser Art erscheinen interessant. So wird detektiert, ob sich das System im kontinuierlichen oder impulsiven Zustand befindet und zwischen beiden Varianten je nach Notwendigkeit umgeschaltet. Man denke an ein Fahrzeug, das über eine ebene Straße fährt. Dort bietet das kontinuierliche Modell alle erforderlichen Details für die Simulation. Bei der Überfahrt über eine hohe Schwelle kann es jedoch notwendig sein, einen Teil der Trajektorie mit dem impulsiven System zu simulieren, bevor sich der Fahrzustand wieder stabilisiert hat.

Eine Betrachtung anderer Anwendungsfälle, als es in dieser Arbeit getan wurde, bei denen ebenfalls eine Formulierung mit Hilfe von Riemann-Stieltjes-Systemen möglich ist, wäre wünschenswert, da sich damit die Anwendbarkeit und Robustheit der Algorithmen weiter überprüfen ließe. Ideen hierzu wären beispielsweise die Simulation und Interaktion von Billardkugeln untereinander und mit Banden, sowie komplexere Kontaktmodelle zwischen räumlich ausgedehnten Körpern.





# Literaturverzeichnis

- [Abadie, 2000] Abadie, M. (2000). Dynamic simulation of rigid bodies: Modelling of frictional contact. In Brogliato, B., Herausgeber, *Impacts in Mechanical Systems: Analysis and Modelling*, Seite 61–144. Springer Berlin Heidelberg.
- [Ahmed und Svaricek, 2013a] Ahmed, M. und Svaricek, F. (2013a). Preview Control of Semi-active Suspension Based on a Half-car Model Using Fast Fourier Transform. In *10th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD) 2013*, Seite 1–6, Hammamet.
- [Ahmed und Svaricek, 2013b] Ahmed, M. und Svaricek, F. (2013b). Preview Control of Vehicle Semi-active Suspension Using Model Predictive Control Based on Fast Fourier Transform. In *6. Fachtagung Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren - AUTOREG 2013*, Seite 35–50, Baden-Baden, Deutschland.
- [Ahmed und Svaricek, 2014] Ahmed, M. und Svaricek, F. (2014). Preview Optimal Control of Vehicle Semi-active Suspension Based on Partitioning of Chassis Acceleration and Tire Load Spectra. Seite 1669–1674.
- [Alt, 2002] Alt, W. (2002). *Nichtlineare Optimierung - Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Vieweg+Teubner Verlag.
- [Anitescu und Potra, 1997] Anitescu, M. und Potra, F. A. (1997). Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems. *Nonlinear Dynamics*, (93):1–21.
- [Anitescu und Potra, 2002] Anitescu, M. und Potra, F. A. (2002). A time-stepping method for stiff multibody dynamics with contact and friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(7):753–784.
- [Anitescu et al., 1999] Anitescu, M., Potra, F. A. und Stewart, D. E. (1999). Time-stepping for three-dimensional rigid body dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3):183 – 197.
- [Attia et al., 2009] Attia, S. A., Azhmyakov, V. und Raisch, J. (2009). On an Optimization Problem for a Class of Impulsive Hybrid Systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 20(2):215–231.
- [Aubin et al., 2002] Aubin, J. P., Lygeros, J., Quincampoix, M., Sastry, S. und Seube, N. (2002). Impulse differential inclusions: A viability approach to hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1):2–20.
- [Aubouet, 2010] Aubouet, S. (2010). *Modélisation et commande de suspensions semi-actives SOBEN*. PhD thesis, Université de Grenoble.

- [Aulbach, 2004] Aulbach, B. (2004). *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*. Springer Spektrum, 2. Auflage.
- [Auslander und Tolimieri, 1979] Auslander, L. und Tolimieri, R. (1979). Is computing with the finite fourier transform pure or applied mathematics? *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1(6):847–898.
- [Azhmyakov et al., 2008] Azhmyakov, V., Boltyanski, V. G. und Poznyak, A. (2008). First order optimization techniques for impulsive hybrid dynamical systems. In *2008 International Workshop on Variable Structure Systems*, Seite 173–178.
- [Baier et al., 2012] Baier, R., Din, Q. und Donchev, T. (2012). Higher order Runge–Kutta methods for impulsive differential systems. *Applied Mathematics and Computation*, 218(24):11790–11798.
- [Barton-Zeipert, 2014] Barton-Zeipert, S. (2014). *Fahrbahnprofilerfassung für ein aktives Fahrwerk*. PhD thesis, Universität Hamburg.
- [Bender, 1968] Bender, E. K. (1968). Optimum Linear Preview Control With Application to Vehicle Suspension. *Journal of Basic Engineering*, 90(2):213.
- [Betts, 2010] Betts, J. T. (2010). *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Non-linear Programming*. Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Betts und Huffman, 1992] Betts, J. T. und Huffman, W. P. (1992). Application of sparse nonlinear programming to trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15(1):198–206.
- [Betts und Huffman, 1999] Betts, J. T. und Huffman, W. P. (1999). Exploiting sparsity in the direct transcription method for optimal control. *Computational Optimization and Applications*, 14(2):179–201.
- [Bowling et al., 2009] Bowling, A., Flickinger, D. und Harmeyer, S. (2009). Energetically consistent simulation of simultaneous impacts and contacts in multibody systems with friction. *Multibody System Dynamics*, 22(1):27–45.
- [Brach, 1989] Brach, R. M. (1989). Rigid body collisions. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):133–138.
- [Brach, 1998] Brach, R. M. (1998). Formulation of rigid body impact problems using generalized coefficients. *International journal of engineering science*, 36(1):61–71.
- [Braess, 2013] Braess, D. (2013). *Finite Elemente*, volume 5. Springer Berlin Heidelberg.
- [Branicky, 1998] Branicky, M. (1998). A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1):31–45.
- [Bressan, 1987] Bressan, A. (1987). On differential systems with impulsive controls. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 78:227–235.
- [Briggs und Henson, 1995] Briggs, W. und Henson, V. (1995). *The DFT: An Owners' Manual for the Discrete Fourier Transform*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [Brogliato, 1999] Brogliato, B. (1999). *Nonsmooth Mechanics: Models, Dynamics and Control*. Communications and Control Engineering. Springer London.
- [Büskens und Gerdts, 2001] Büskens, C. und Gerdts, M. (2001). Real-time optimization of dae systems. In Grötschel, M., Krumke, S. und Rambau, J., Herausgeber, *Online Optimization of Large Scale Systems*, Seite 117–128. Springer Berlin Heidelberg.
- [Burger und Gerdts, 2016] Burger, M. und Gerdts, M. (2016). A survey on numerical methods for the simulation of initial value problems with DAEs. In Ilchmann, A. und Reis, T., Herausgeber, *Surveys in Differential-Algebraic Equations IV*. Springer International Publishing.
- [Büskens und Maurer, 2000] Büskens, C. und Maurer, H. (2000). SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control. *Journal of computational and applied mathematics*, 120:85–108.
- [Büskens und Maurer, 2001] Büskens, C. und Maurer, H. (2001). Sensitivity analysis and real-time optimization of parametric nonlinear programming problems. In Grötschel, M., Krumke, S. und Rambau, J., Herausgeber, *Online Optimization of Large Scale Systems*, Seite 3–16. Springer Berlin Heidelberg.
- [Butz und von Stryk, 2002] Butz, T. und von Stryk, O. (2002). Modelling and simulation of electro- and magnetorheological fluid dampers. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 82(1):3–20.
- [Carfagno, 2008] Carfagno, F. (2008). Simulation von mechanischen Mehrkrpersystemen mit Kontakten. Diplomarbeit, Universität Hamburg.
- [Carothers, 2000] Carothers, N. L. (2000). *Real Analysis*. Cambridge University Press.
- [Chatterjee, 1997] Chatterjee, A. (1997). *Rigid body collisions: some general considerations, new collision laws, and some experimental data*. PhD thesis, Cornell University.
- [Chen und Mangasarian, 1995] Chen, C. und Mangasarian, O. L. (1995). Smoothing methods for convex inequalities and linear complementarity problems. *Mathematical Programming*, 71(1):51–69.
- [Cho et al., 2005] Cho, B., Ryu, G. und Song, S. J. (2005). Control Strategy of an active suspension for a half car model with preview information. *International Journal of Automotive Technology*, 6(3):243–249.
- [Clarke, 2013] Clarke, F. (2013). *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London.
- [Collatz, 2013] Collatz, L. (2013). *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg.
- [Cottle et al., 2009] Cottle, R. W., Pang, J. S. und Stone, R. E. (2009). *The Linear Complementarity Problem*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Craig, 1989] Craig, J. J. (1989). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2. Auflage.

- [Cristianini und Shawe-Taylor, 2000] Cristianini, N. und Shawe-Taylor, J. (2000). *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods*. Cambridge University Press.
- [Das und Sharma, 1972] Das, P. und Sharma, R. (1972). Existence and stability of measure differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 22(1):145–158.
- [Dickerson et al., 1965] Dickerson, W., Mason, J. und Smith, D. (1965). A variational method for optimal staging. *AIAA Journal*, 3(11):2007–2012.
- [DIN, 2013] DIN (2013). *Stoßenfahrzeuge - Fahrzeugdynamik und Fahrverhalten - Begriffe (ISO 8855:2013-11)*.
- [Dobrowolski, 2010] Dobrowolski, M. (2010). *Angewandte Funktionalanalysis: Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg.
- [Dudenredaktion, 2006] Dudenredaktion, D. (2006). *Duden - Die deutsche Rechtschreibung. Bd. 1*. Dudenverlag, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus, Mannheim, 24. völlig neu bearb. u. erw. Auflage.
- [Ehrgott und Masri, 1992] Ehrgott, R. und Masri, S. (1992). Modeling the oscillatory dynamic behaviour of electrorheological materials in shear. *Smart Materials and Structures*, 1(4):275–285.
- [Elbeheiry et al., 1996] Elbeheiry, E. M., Karnopp, D. C., Elaraby, M. E. und Abdelraaouf, A. M. (1996). Suboptimal Control Design of Active and Passive Suspensions Based on a Full Car Model. *Vehicle System Dynamics*, 26(3):197–222.
- [ElMadany und Abduljabbar, 1999] ElMadany, M. M. und Abduljabbar, Z. S. (1999). Linear Quadratic Gaussian Control of a Quarter-Car Suspension. *Vehicle System Dynamics*, 32(6):479–497.
- [Ermoliev et al., 1995] Ermoliev, Y. M., Norkin, V. I. und Wets, R. J.-B. (1995). The Minimization of Semicontinuous Functions: Mollifier Subgradients. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(1):149–167.
- [Esmailzadeh und Fahimi, 1997] Esmailzadeh, E. und Fahimi, F. (1997). Optimal adaptive active suspensions for a full car model. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 27(2):89–107.
- [Feehery, 1998] Feehery, W. F. (1998). *Dynamic Optimization with Path Constraints*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [Fetecau et al., 2003] Fetecau, R. C., Marsden, J. E., Ortiz, M. und West, M. (2003). Nonsmooth Lagrangian Mechanics and Variational Collision Integrators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2(3):381–416.
- [Fiacco, 1983] Fiacco, A. V. (1983). *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*. Mathematics in science and engineering. Academic Press.
- [Fichera, 1970] Fichera, G. (1970). Unilateral constraints in elasticity. In *Congrès International des Mathématiciens*, Nizza.

- [Fichtenholz, 1974] Fichtenholz, G. M. (1974). *Differential- und Integralrechnung III*. Hochschulbücher für Mathematik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 7. Auflage.
- [Fick, 2010] Fick, A. (2010). Modellierung und Analyse impulsiver Systeme mittels des Riemann-Stieltjes-Integrals. Diplomarbeit, Universität Bayreuth.
- [Foag, 1990] Foag, W. (1990). *Regelungstechnische Konzeption einer aktiven PKW-Federung mit preview*. VDI-Verlag.
- [Foag und Grübel, 1987] Foag, W. und Grübel, G. (1987). Multi-criteria control design for preview vehicle-suspension systems. In *10th IFAC World Congress*, Seite 190–196, München.
- [Folland, 1984] Folland, G. B. (1984). *Real analysis: modern techniques and their applications*. Pure and applied mathematics. Wiley.
- [Fritsch und Carlso, 1980] Fritsch, F. N. und Carlso, R. E. (1980). Monotone Piecewise Cubic Interpolation. *Journal on Numerical Analysis*, 17(2):238–246.
- [Galán et al., 1999] Galán, S., Feehery, W. F. und Barton, P. I. (1999). Parametric sensitivity functions for hybrid discrete/continuous systems. *Applied Numerical Mathematics*, 31(1):17–47.
- [Gallrein und Bäcker, 2007] Gallrein, A. und Bäcker, M. (2007). CDTire: a tire model for comfort and durability applications. *Vehicle System Dynamics*, 45(S1):69–77.
- [Gavin et al., 1996] Gavin, H. P., Hanson, R. D. und Filisko, F. E. (1996). Electrorheological Dampers, Part II: Testing and Modeling. *Journal of Applied Mechanics*, 63(3):676.
- [Geering und Roduner, 1999] Geering, H. P. und Roduner, C. A. (1999). Entwurf robuster Regler mit der  $H_\infty$ -Methode. *Bulletin SVE/VSE*, 3(August).
- [Geiger und Kanzow, 1999] Geiger, C. und Kanzow, C. (1999). *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag GmbH.
- [Geiger und Kanzow, 2013] Geiger, C. und Kanzow, C. (2013). *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg.
- [Gerds, 2003] Gerds, M. (2003). Optimal control and real-time optimization of mechanical multi-body systems. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 83(10):705–719.
- [Gerds, 2012] Gerds, M. (2012). *Optimal Control of ODEs and DAEs*. De Gruyter Textbook. De Gruyter.
- [Gerds, 2013] Gerds, M. (2013). Optimal Control and Parameter Identification with Differential-Algebraic Equations of Index 1. Technical report, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Institut für Mathematik und Rechneranwendung.
- [Gerds und Lempio, 2011] Gerds, M. und Lempio, F. (2011). *Mathematische Optimierungsverfahren des Operations Research*. De Gruyter Studium. De Gruyter.
- [Gertz und Wright, 2003] Gertz, E. M. und Wright, S. J. (2003). Object-oriented software for quadratic programming. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(1):58–81.

- [Getz und Martin, 1980] Getz, W. und Martin, D. (1980). Optimal control systems with state variable jump discontinuities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 31(2):195–205.
- [Gleichweit et al., 2013] Gleichweit, M., Wagner, P. und Funke, J. (2013). Fahrwerkregelung mit semiaktiven elektrorheologischen Dämpfern. *Virtual Vehicle Magazine*, 15(3):8–11.
- [Glocker, 2004] Glocker, C. (2004). Newton’s and Poisson’s Impact Law for the Non-Convex Case of Reentrant Corners. *Complementarity, Duality and Symmetry in Nonlinear Mechanics*, 6:101–125.
- [Gopala Rao und Narayanan, 2009] Gopala Rao, L. und Narayanan, S. (2009). Sky-hook control of nonlinear quarter car model traversing rough road matching performance of LQR control. *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5):515–529.
- [Gordon und Sharp, 1998] Gordon, T. und Sharp, R. (1998). On improving the performance of automotive semi-active suspension systems through road preview. *Journal of Sound and Vibration*, 217:163–182.
- [Grote und Feldhusen, 2014] Grote, K. und Feldhusen, J. (2014). *Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Grüne und Pannek, 2011] Grüne, L. und Pannek, J. (2011). *Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms*. Communications and Control Engineering. Springer London.
- [Guglielmino et al., 2008] Guglielmino, E., Sireteanu, T., Stammers, C., Ghita, G. und Giuclea, M. (2008). *Semi-active Suspension Control: Improved Vehicle Ride and Road Friendliness*. Springer-Verlag London.
- [Guo et al., 2006] Guo, S., Yang, S. und Pan, C. (2006). Dynamic Modeling of Magnetorheological Damper Behaviors. *Journal of Intelligent Material Systems and structures*, 17(1):3–14.
- [Gupal, 1977] Gupal, a. M. (1977). A method for the minimization of almost-differentiable functions. *Cybernetics*, 13(1):115–117.
- [Gysen et al., 2010] Gysen, B. L. J., Paulides, J. J. H., Janssen, J. L. G. und Lomonova, E. A. (2010). Improved Vehicle Dynamics. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 59(3):1156–1163.
- [Hac, 1992] Hac, A. (1992). Optimal linear preview control of active vehicle suspension. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 1(21):167–195.
- [Hac und Youn, 1992] Hac, A. und Youn, I. (1992). Optimal semi-active suspension with preview based on a quarter car model. *Journal of Vibration and Acoustics*, 114:84–92.
- [Halsey, 1992] Halsey, T. C. (1992). Electrorheological fluids. *Science*, 258(5083):761–766.
- [Hämmerlin und Hoffmann, 1994] Hämmerlin, G. und Hoffmann, K. (1994). *Numerische Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Han, 1977] Han, S. P. (1977). A globally convergent method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 22(3):297–309.
- [Hanke-Bourgeois, 2009] Hanke-Bourgeois, M. (2009). *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Vieweg+Teubner, 3. Auflage.

- [Heymann et al., 2002] Heymann, M., Meyer, G. und Resmerita, S. (2002). Analysis of Zeno behaviors in hybrid systems. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 3:2379–2384.
- [Hoppe et al., 1999] Hoppe, R. H. W., Mazurkevitch, G., Rettig, U. und von Stryk, O. (1999). Modeling, Simulation, and Control of Electrorheological Fluid Devices. *Preprint SFB-438-9917, TU München – Uni Augsburg*.
- [Hrovat, 1997] Hrovat, D. (1997). Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications. *Automatica*, 1098(97).
- [Hsu und Lin, 2002] Hsu, C. und Lin, C. (2002). A comparison of methods for multiclass support vector machines. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(2):415–425.
- [Huisman, 1994] Huisman, R. (1994). *A Controller and Observer for Active Suspensions with Preview*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
- [Huisman et al., 1993] Huisman, R., Veldpauw, F., Voets, H. und Kok, J. (1993). An Optimal Continuous Time Control Strategy for Active Suspensions with Preview. *Vehicle System Dynamics*, 22(1):43–55.
- [Ikhouane und Rodellar, 2007] Ikhouane, F. und Rodellar, J. (2007). *Systems with Hysteresis: Analysis, Identification and Control Using the Bouc-Wen Model*. Wiley.
- [International Organization for Standardization, 1995] International Organization for Standardization (1995). *ISO 8608 Mechanical vibration – Road surface profiles – Reporting measured data*.
- [International Organization for Standardization, 1997] International Organization for Standardization (1997). *ISO 2631-1*.
- [Iwasaki und Skelton, 1994] Iwasaki, T. und Skelton, R. (1994). All controllers for the general  $H_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30(8):1307 – 1317.
- [Jittorntrum, 1984] Jittorntrum, K. (1984). *Solution point differentiability without strict complementarity in nonlinear programming*, Seite 127–138. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Jolly et al., 1999a] Jolly, M. R., Bender, J. W. und David, C. J. (1999a). Properties and Applications of Commercial Magnetorheological Fluid. *Journal of Intelligent Material Systems and structures*, 10:5–13.
- [Jolly et al., 1999b] Jolly, M. R., Carlson, J. D. und Muñoz, B. C. (1999b). A model of the behaviour of magnetorheological materials. *Smart Materials and Structures*, 5(5):607–614.
- [Jones, 2005] Jones, W. D. (2005). Easy ride: Bose Corp. uses speaker technology to give cars adaptive suspension. *IEEE Spectrum*, 42:12–14.
- [Kahaner et al., 1989] Kahaner, D., Moler, C., Nash, S. und Forsythe, G. (1989). *Numerical methods and software*. Prentice-Hall series in computational mathematics. Prentice Hall.
- [Kang et al., 2008] Kang, W., Ross, M. und Gong, Q. (2008). Pseudospectral Optimal Control and Its Convergence Theorems. In Astolfi, A. und Marconi, L., Herausgeber, *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*, Seite 109–126. Springer Berlin Heidelberg.

- [Karnopp, 1968] Karnopp, D. (1968). Continuum model study of preview effects in actively suspended long trains. *Journal of the Franklin Institute*, 285(4):251–260.
- [Karnopp et al., 1974] Karnopp, D., Crosby, M. J. und Harwood, R. A. (1974). Vibration Control Using Semi-Active Force Generators. *Journal of Engineering for Industry*, 96(2):619.
- [Kikuchi und Oden, 1988] Kikuchi, N. und Oden, J. T. (1988). *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104).
- [Kimmerle und Moritz, 2014] Kimmerle, S.-J. und Moritz, R. (2014). Optimal Control of an Elastic Tyre-Damper System with Road Contact. *Pamm*, 14(1):875–876.
- [Kraft, 1988] Kraft, D. (1988). *A Software Package for Sequential Quadratic Programming*. Wiss. Berichtswesen d. DFVLR, Köln.
- [Kunze und Marques, 2000] Kunze, M. und Marques, M. D. P. M. (2000). *Impacts in Mechanical Systems: Analysis and Modelling*, Kapitel An Introduction to Moreau’s Sweeping Process, Seite 1–60. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [La Torre und Rocca, 2004] La Torre, D. und Rocca, M. (2004). Mean value theorem for continuous vector functions by smooth approximations. *Applied Mathematics Letters*, 17(7):791–794.
- [Landry et al., 2013] Landry, C., Skutella, M. und Welz, W. (2013). Task assignment , sequencing and path-planning in robotic welding cells. In *18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, Seite 252–257.
- [Liang und Chiang, 2008] Liang, C.-C. und Chiang, C.-F. (2008). Modeling of a seated human body exposed to vertical vibrations in various automotive postures. *Industrial health*, 46(2):125–37.
- [Louam et al., 1988] Louam, N., Wilson, D. A. und Sharp, R. S. (1988). Optimal Control of a Vehicle Suspension Incorporating the Time Delay between Front and Rear Wheel Inputs. *Vehicle System Dynamics*, 17(6):317–336.
- [Lunze, 2002] Lunze, J. (2002). *Modelling, analysis, and design of hybrid systems*, Kapitel Dynamic Simulation of Rigid Bodies: Modelling of Frictional Contact, Seite 3–14. Springer Berlin Heidelberg.
- [Lunze, 2010] Lunze, J. (2010). *Regelungstechnik 1*, volume 23. Springer Berlin Heidelberg.
- [Lygeros et al., 2003] Lygeros, J., Johansson, K., Simic, S. und Sastry, S. (2003). Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1):2–17.
- [Mahdavi-Amiri und Yousefpour, 2011] Mahdavi-Amiri, N. und Yousefpour, R. (2011). An Effective Optimization Algorithm For Locally Nonconvex Lipschitz Functions Based On Mollifier Subgradients. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 37(1):171–198.
- [Marzbanrad et al., 2002] Marzbanrad, J., Ahmadi, G., Hojjat, Y. und Zohoor, H. (2002). Optimal Active Control of Vehicle Suspension System Including Time Delay and Preview for Rough Roads. *Journal of Vibration and Control*, 8(7):967–991.



- [McClamroch und Gavin, 1995] McClamroch, N. H. und Gavin, H. P. (1995). Electrorheological dampers and semi-active structural control. In *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, Seite 3528–3533, New Orleans. IEEE.
- [Michael und Gerdts, 2015] Michael, J. und Gerdts, M. (2015). Pro-active optimal control for semi-active vehicle suspension based on sensitivity updates. *Vehicle System Dynamics*, 53(12):1721–1741.
- [Mitschke und Wallentowitz, 2004] Mitschke, M. und Wallentowitz, H. (2004). *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. VDI-Buch. Springer.
- [Moler, 2004] Moler, C. (2004). *Numerical Computing with Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Moreau, 1985] Moreau, J. J. (1985). Unilateral Problems in Structural Analysis. In Piero, G. und Maceri, F., Herausgeber, *Proceedings of the Second Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis*, Seite 173–221. Springer Wien.
- [Moreau, 1988] Moreau, J. J. (1988). Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In Moreau, J. J. und Panagiotopoulos, P., Herausgeber, *Nonsmooth mechanics and applications*, Seite 1–82.
- [Morselli und Zanasi, 2008] Morselli, R. und Zanasi, R. (2008). Control of port hamiltonian systems by dissipative devices and its application to improve the semi-active suspension behaviour. *Mechatronics*, 18(7):364 – 369.
- [Natanson, 1981] Natanson, I. (1981). *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Mathematische Lehrbücher und Monographien. Akademie-Verlag.
- [Nocedal und Wright, 1999] Nocedal, J. und Wright, S. J. J. (1999). *Numerical optimization*, volume 43.
- [Otter et al., 2003] Otter, M., Elmqvist, H. und Mattsson, S. E. (2003). The New Modelica MultiBody Library. *Proceedings of the 3rd International Modelica Conference*, Seite 311–330.
- [Papageorgiou und Poggio, 2000] Papageorgiou, C. und Poggio, T. (2000). Trainable system for object detection. *International Journal of Computer Vision*, 38(1):15–33.
- [Parison, 2010] Parison, J. (2010). The Bose Ride <sup>TM</sup> System. Technical report.
- [Pfeiffer, 2008] Pfeiffer, A. (2008). *Numerische Sensitivitätsanalyse unstetiger multidisziplinärer Modelle mit Anwendungen in der gradientenbasierten Optimierung*. PhD thesis, Martin-Luther Universität Halle-Wittenberg.
- [Pfeiffer, 2010] Pfeiffer, F. (2010). *Mechanical System Dynamics*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer.
- [Pfeiffer und Glocker, 2008] Pfeiffer, F. und Glocker, C. (2008). *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Wiley Series in Nonlinear Science. Wiley.
- [Powell, 1978] Powell, M. J. D. (1978). A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. *Numerical analysis, Lecture Notes in Mathematics*, 630:144–157.

- [Rajamani, 2006] Rajamani, R. (2006). *Vehicle Dynamics and Control*. Mechanical engineering series. Springer Science.
- [Randelovic, 2000] Randelovic, B. (2000). Numerical solution of impulsive differential equations. *Facta universitatis - series: Mathematics and Informatics*, 15:101–111.
- [Rettig, 2003] Rettig, U. (2003). *Optimale und robust-optimale Steuerungen: Grundlagen, numerische Berechnung und Anwendung bei der semi-aktiven Kfz-Schwingungsdämpfung*. Fortschritt-Berichte VDI: Reihe 8, Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik. VDI-Verlag.
- [Rettig und von Stryk, 2005] Rettig, U. und von Stryk, O. (2005). Optimal and robust damping control for semi-active vehicle suspension. *Proc. 5th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, Eindhoven, The Netherlands*.
- [Rossi und Lucente, 2004] Rossi, C. und Lucente, G. (2004).  $H_\infty$  Control of Automotive Semi-Active Suspensions. In *Proceedings of the 1st IFAC Symposium on Advances in Automotive Control (AAC)*, Nummer figure 1, Salerno, Italy.
- [Rozenvasser, 1967] Rozenvasser, E. N. (1967). General sensitivity equations of discontinuous systems. *Avtomatika i Telemekhanika*, (3):52–56.
- [Rulka und Eichberger, 2002] Rulka, W. und Eichberger, A. (2002). Prozesssichere Modellreduzierung: Der Schlüssel zur Echtzeit und effizienten MKS-Simulation in der Fahrzeugdynamik.
- [Ruzicka, 2000] Ruzicka, M. (2000). *Electrorheological Fluids: Modelling and Mathematical Theory*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.
- [Sammier et al., 2003] Sammier, D., Sename, O. und Dugard, L. (2003). Skyhook and  $H_\infty$  Control of Semi-active Suspensions : Some Practical Aspects. *Vehicle System Dynamics*, 39(4):279–308.
- [Sanfelice et al., 2013] Sanfelice, R., Copp, D. und Nãñez, P. (2013). A Toolbox for Simulation of Hybrid Systems in Matlab/Simulink. Seite 101–106.
- [Sapiński und Filuś, 2003] Sapiński, B. und Filuś, J. (2003). Analysis of parametric models of MR linear damper. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 41(2):215–240.
- [Savaresi, 2005] Savaresi, S. M. (2005). Acceleration-Driven-Damper (ADD): An Optimal Control Algorithm For Comfort-Oriented Semiactive Suspensions. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 127(2):218 – 229.
- [Savaresi et al., 2010] Savaresi, S. M., Poussot-Vassal, C. und Spelta, C. (2010). *Semi-active suspension control design for vehicles*.
- [Schiehlen, 2012] Schiehlen, W. (2012). *Multibody Systems Handbook*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Schindler, 2009] Schindler, A. (2009). *Neue Konzeption und erstmalige Realisierung eines Preview-fahrwerks*. PhD thesis, Universität Karlsruhe.
- [Schmaedeke, 1965] Schmaedeke, W. W. (1965). Optimal control theory for nonlinear vector differential equations containing measures. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 3(2):231–280.

- [Schölkopf et al., 2000] Schölkopf, B., Smola, A. J., Williamson, R. C. und Bartlett, P. L. (2000). New Support Vector Algorithms. *Neural Computation*, 12(5):1207–1245.
- [Scholz, 1989] Scholz, C. (1989). *Personalmanagement - informationsorientierte und verhaltenstheoretische Grundlagen*. Vahlen-Verlag.
- [Schramm, 1989] Schramm, H. (1989). *Eine Kombination von Bundle- und Trust-Region-Verfahren zur Lösung nichtdifferenzierbarer Optimierungsprobleme*. Bayreuther mathematische Schriften. Universität Bayreuth.
- [Sell und You, 2002] Sell, G. R. und You, Y. (2002). *Dynamics of Evolutionary Equations*. Nummer 143 in Applied Mathematical Sciences. Springer.
- [Seong et al., 2006] Seong, M. S., Choi, S. B. und Sung, K. G. (2006). Control Strategies for Vehicle Suspension System Featuring Magnetorheological (MR) Damper. *Vibration Analysis and Control - New Trends and Development*, Seite 97–114.
- [Shabana, 2005] Shabana, A. A. (2005). *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, 3. Auflage.
- [Sharp und Crolla, 1987] Sharp, R. S. und Crolla, D. a. (1987). Road Vehicle Suspension System Design - a review. *Vehicle System Dynamics*, 16(3):167–192.
- [Sharp und Peng, 2011] Sharp, R. S. und Peng, H. (2011). Vehicle dynamics applications of optimal control theory. *Vehicle System Dynamics*, 49(7):1073–1111.
- [Showalter, 1977] Showalter, R. (1977). *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*. Electronic library of mathematics. Pitman.
- [Signorini, 1959] Signorini, A. (1959). Questioni di elasticità non linearizzata e semi-linearizzata. *Rend di Matem. e delle sue Appi.*, XVIII.
- [Simeon, 2013] Simeon, B. (2013). *Computational Flexible Multibody Dynamics: A Differential-Algebraic Approach*. Differential-Algebraic Equations Forum. Springer Berlin Heidelberg.
- [Simeon et al., 1994] Simeon, B., Grupp, F., Führer, C. und Rentrop, P. (1994). A nonlinear truck model and its treatment as a multibody system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50:523–532.
- [Simon, 2001] Simon, D. (2001). *An Investigation of the Effectiveness of Skyhook Suspensions for Controlling Roll Dynamics of Sport Utility Vehicles Using Magneto-Rheological Dampers*. PhD thesis, University of Virginia.
- [Spencer et al., 1997] Spencer, B. F. J., Dyke, S. J., Sain, M. K. und Carlson, J. D. (1997). Phenomenological Model for Magnetorheological Dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(3):230–238.
- [Stanway et al., 1987] Stanway, R., Sproston, J. L. und Stevens, N. G. (1987). Non-linear modelling of an electro-rheological vibration damper. *Journal of Electrostatics*, 20(2):167–184.
- [Stewart, 2000] Stewart, D. (2000). Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM review*, 42(1):3–39.

- [Stewart und Anitescu, 2010] Stewart, D. E. und Anitescu, M. (2010). Optimal control of systems with discontinuous differential equations. *Numerische Mathematik*, 114(4):653–695.
- [Stewart und Trinkle, 1996] Stewart, D. E. und Trinkle, J. C. (1996). An Implicit Time-stepping Scheme for Rigid Body Dynamics with Inelastic Collisions and Coulomb Friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(February):2673–2691.
- [Stronge, 1990] Stronge, W. J. (1990). Rigid body collisions with friction. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 431(1881):169–181.
- [Stronge, 1991] Stronge, W. J. (1991). Unraveling Paradoxical Theories for Rigid Body Collisions. *Journal of Applied Mechanics*, 58(4):1049.
- [Tomizuka, 1975] Tomizuka, M. (1975). Optimal continuous finite preview problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(3):362–365.
- [Tomizuka, 1976] Tomizuka, M. (1976). Optimum Linear Preview Control With Application to Vehicle Suspension - Revisited. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 98(3):309–315.
- [Tortorella, 1990] Tortorella, M. (1990). Closed Newton-cotes quadrature rules for Stieltjes integrals and numerical convolution of life distributions. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(4):732–748.
- [Tröltzsch, 2010] Tröltzsch, F. (2010). *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen: Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Vieweg Studium. Vieweg+Teubner Verlag.
- [Tseng und Hedrick, 1994] Tseng, H. und Hedrick, J. (1994). Semi-Active Control Laws - Optimal and Sub-Optimal. *Vehicle System Dynamics*, 23(1):545–569.
- [Ulbrich und Ulbrich, 2012] Ulbrich, S. und Ulbrich, M. (2012). *Nichtlineare Optimierung*. Birkhäuser.
- [van der Aa et al., 1997] van der Aa, M. A. H., Muijderman, J. H. E. A. und Veldpaus, F. (1997). Constrained Optimal Control of Semi-Active Suspension Systems with Preview.
- [Vires Simulationstechnologie GmbH, 2015] Vires Simulationstechnologie GmbH (2015). OpenCRG - User Manual (<http://www.opencrg.org>).
- [Weist et al., 2013] Weist, U., Missel, J., Cytrynski, S., Mehren, D., Schwarz, T. und Kern, S. (2013). Fahrkomfort der Extraklasse. *ATZextra*, 18(5):124–128.
- [William und Ii, 1983] William, P. und Ii, C. (1983). Generalized rigid-body dynamics system simulation and the application to the behavior of suspended agricultural tractors.
- [Witters und Swevers, 2010] Witters, M. und Swevers, J. (2010). A case study towards the application of NMPC to a continuously variable semi-active suspension. Seite 479–494.
- [Woernle, 2011] Woernle, C. (2011). *Mehrkörpersysteme: Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Yang, 2001] Yang, G. (2001). *Large-Scale Magnetorheological Fluid Damper for Vibration*. PhD thesis, University of Notre Dame.

- [Yoshimura et al., 2005] Yoshimura, T., Nakai, K. und Tamaoki, G. (2005). Multi-body dynamics modelling of seated human body under exposure to whole-body vibration. *Industrial health*, 43(3):441–447.
- [Zheng et al., 2006] Zheng, H., Lee, E. und Ames, A. (2006). Beyond Zeno: Get on with it! *Hybrid Systems: Computation and Control*, Seite 568–582.