

# Patchweise Integration getrimmter Flächen im Kontext der Isogeometrischen Analyse

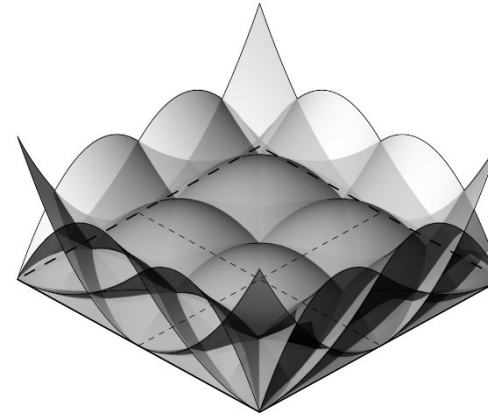
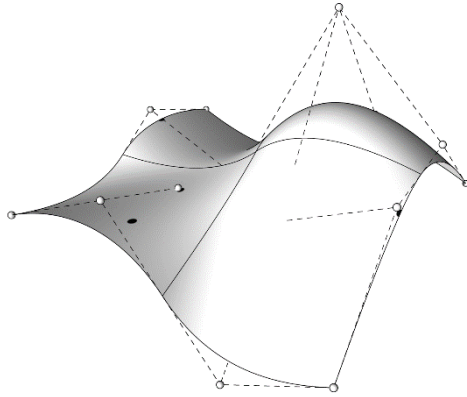
Michael Loibl<sup>1</sup>

Leonardo Leonetti<sup>2</sup>, Alessandro Reali<sup>3</sup> and Josef Kiendl<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universität der Bundeswehr München, <sup>2</sup>Università della Calabria,  
<sup>3</sup>Università di Pavia

28. September 2022

# Motivation

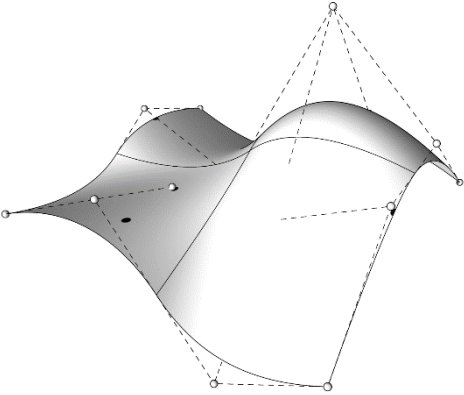


Abbildungen aus Breitenberger (2016)

## Isogeometrische Analyse (IGA)

- Integration von Design und Berechnung bzw. CAD und FEA
- Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) als Formfunktionen

# Motivation



Abbildungen aus Breitenberger (2016)

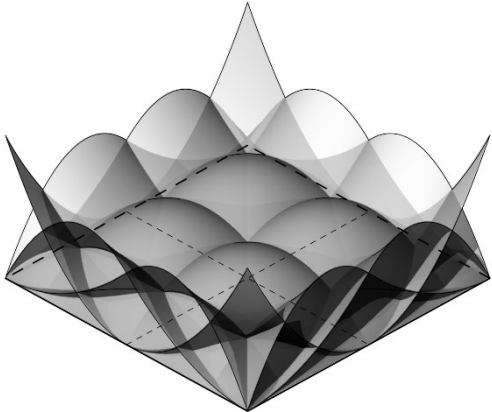
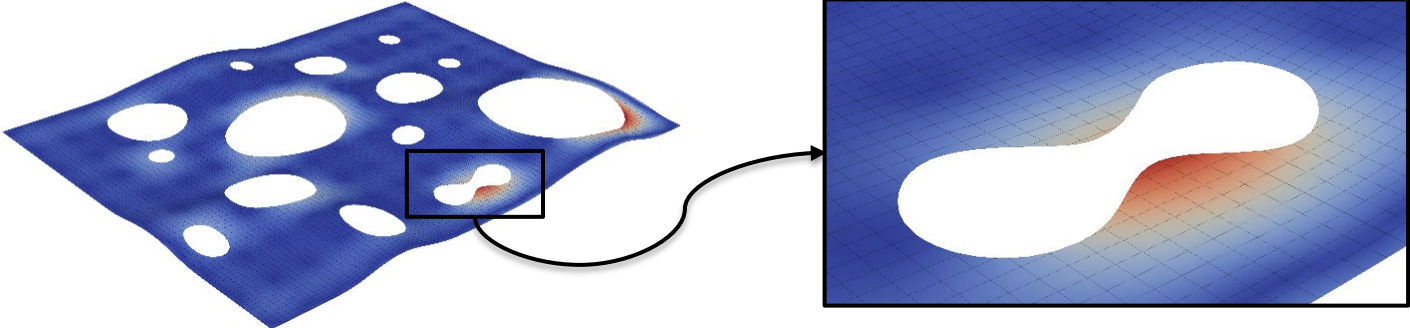
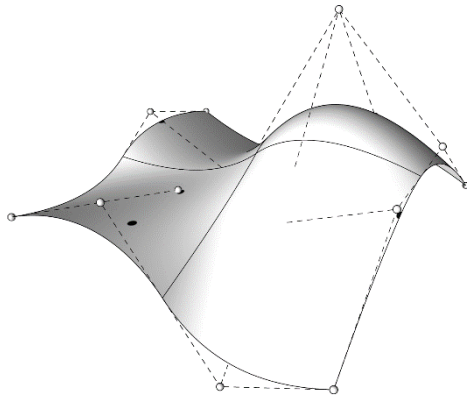


Foto aus 'Wikipedia'



# Motivation



Abbildungen aus Breitenberger (2016)

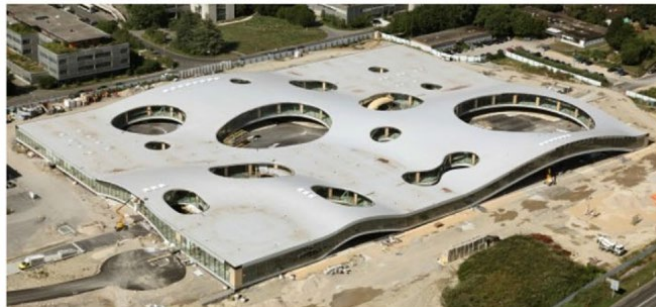
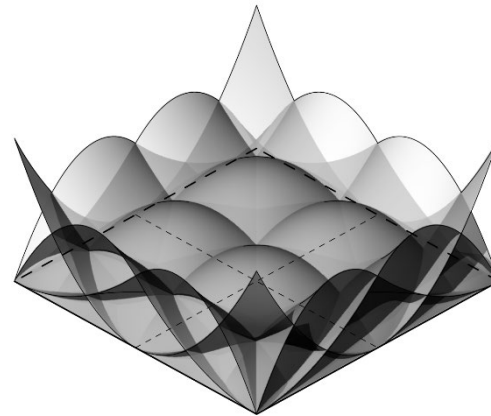
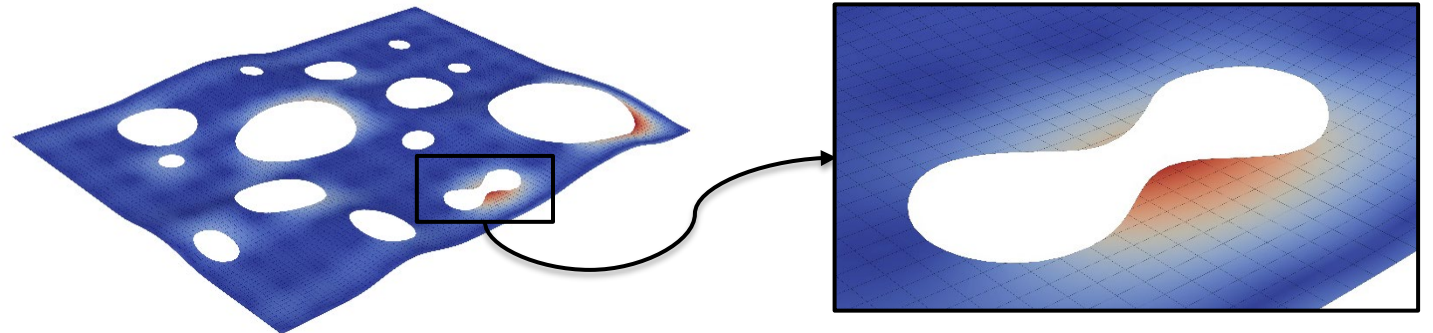


Foto aus 'Wikipedia'

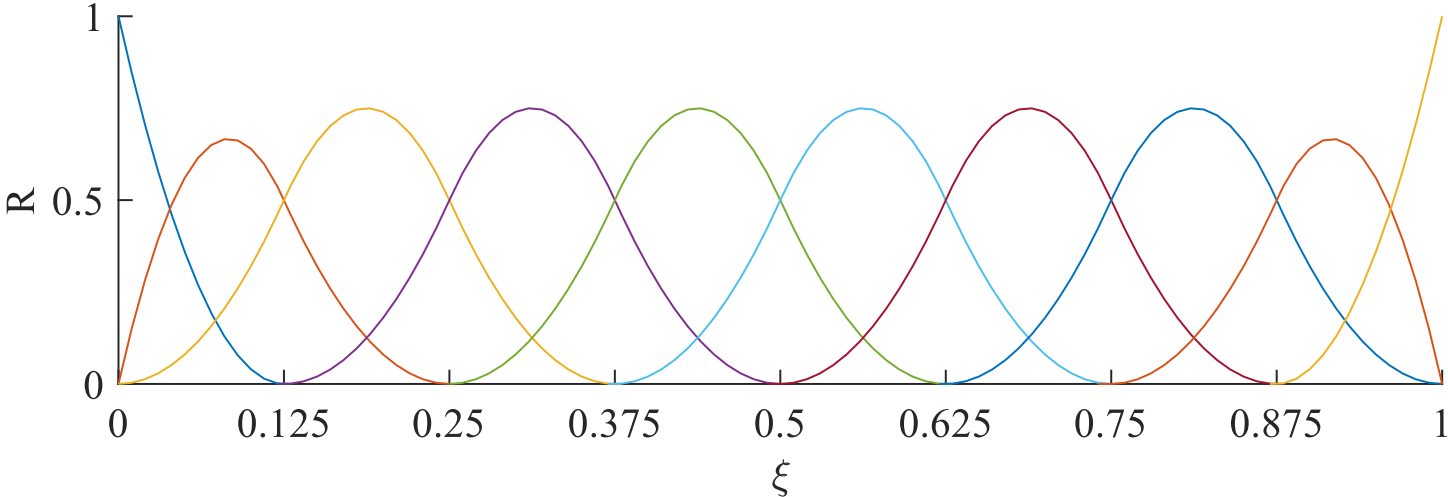


Effiziente numerische Integration beliebig getrimmter Strukturen im Rahmen der Isogeometrischen Analyse (IGA)!

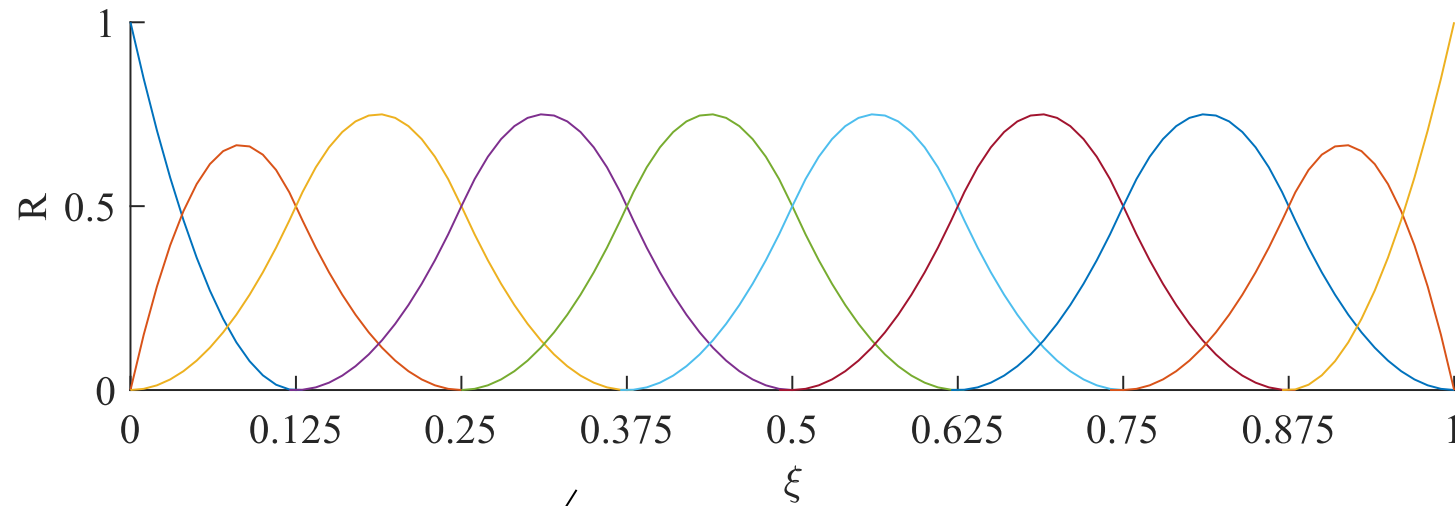
# Gliederung

1. Integration in der Isogeometrischen Analyse (IGA)
2. Patchweise Integration
3. Gauß Integration getrimmter Elemente
4. Neue Methode für patchweise Integration getrimmter Flächen
5. Numerische Ergebnisse
6. Zusammenfassung und Ausblick

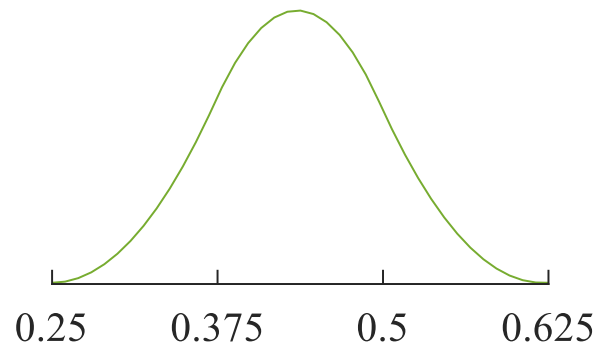
# Integration in der Isogeometrischen Analyse (IGA)



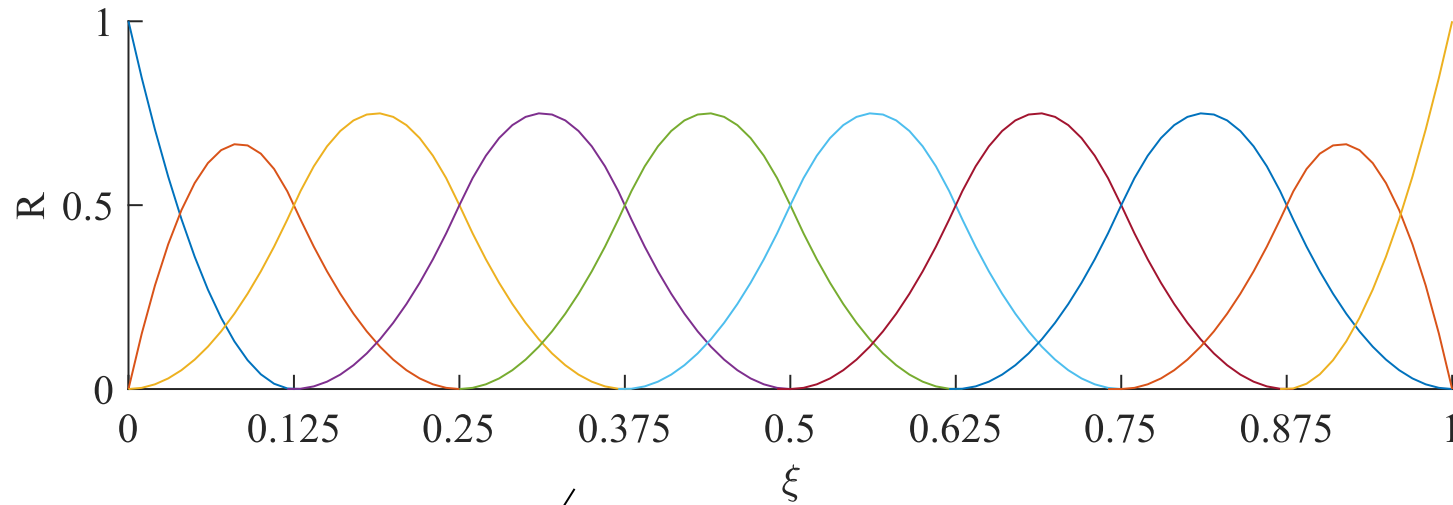
# Integration in der Isogeometrischen Analyse (IGA)



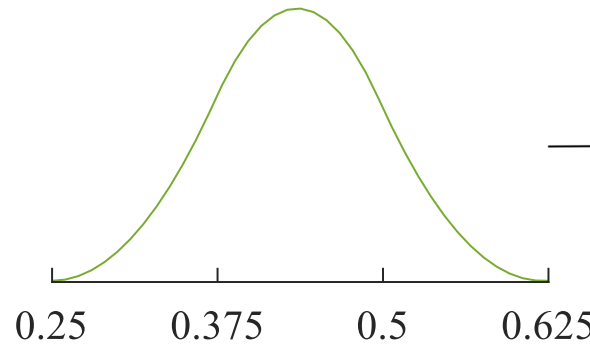
Einzelne Formfunktion



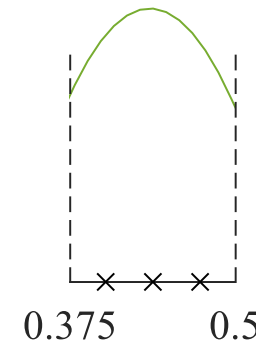
# Integration in der Isogeometrischen Analyse (IGA)



Einzelne Formfunktion

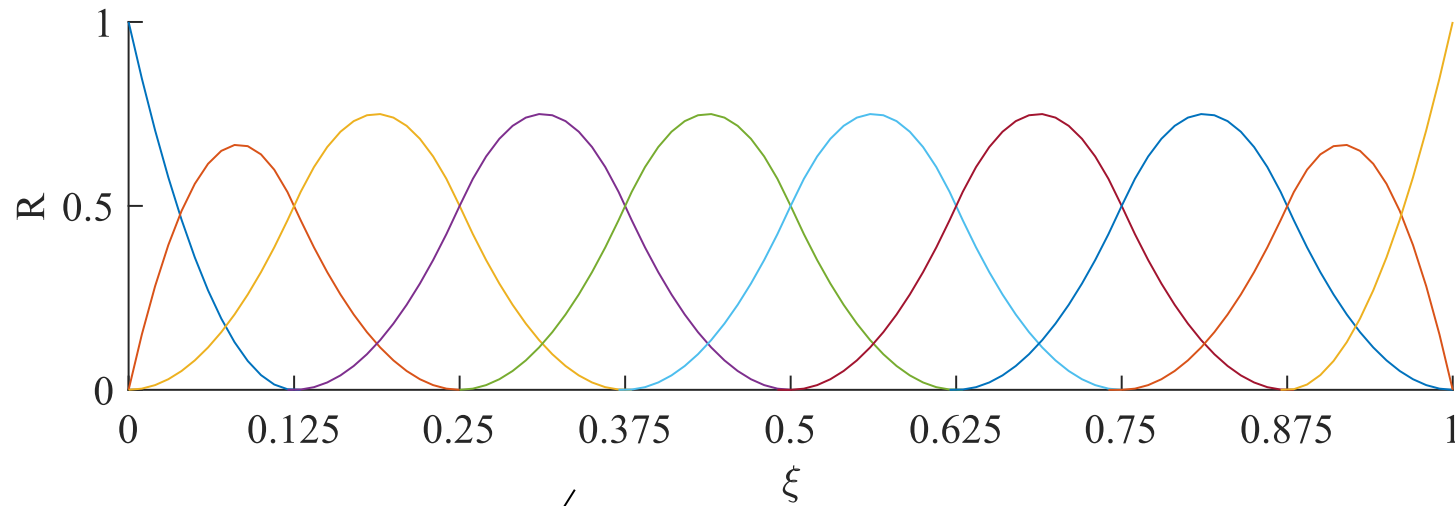


Elementweise Integration



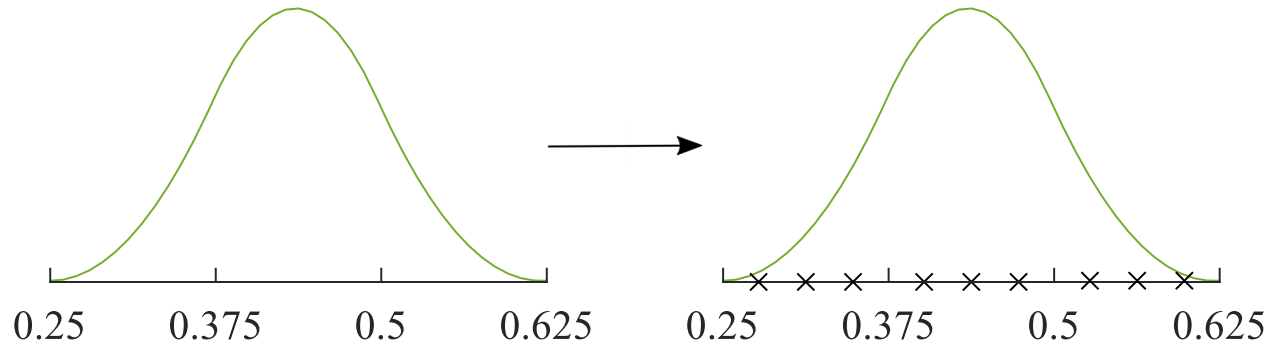


# Integration in der Isogeometrischen Analyse (IGA)



Einzelne Formfunktion

Elementweise Integration



# Patchweise Integration

- Patchweise Integrationsregeln reduzieren die Anzahl an Integrationspunkten durch Berücksichtigung der hohen Kontinuität der NURBS Formfunktionen
- Numerische Integration

$$\mathbb{Q} = \sum_{i=1}^{n_{quad}} w_i f(\xi_i) := \int_{\Omega} f(x) d\xi$$

- Optimale Integrationspunkte durch Optimierung der Positionen und Gewichte
- Integration von Steifigkeitsmatrizen

$$\int_{\Omega} \nabla R_i(\xi) \nabla R_j(\xi) d\Omega$$

2D-Plane Element

$$\int_{\Omega} \Delta R_i(\xi) \Delta R_j(\xi) d\Omega$$

Kirchhoff-Love Schalenelement

mit

$R$  ... Formfunktion

$\xi$  ... parametrische Koordinaten

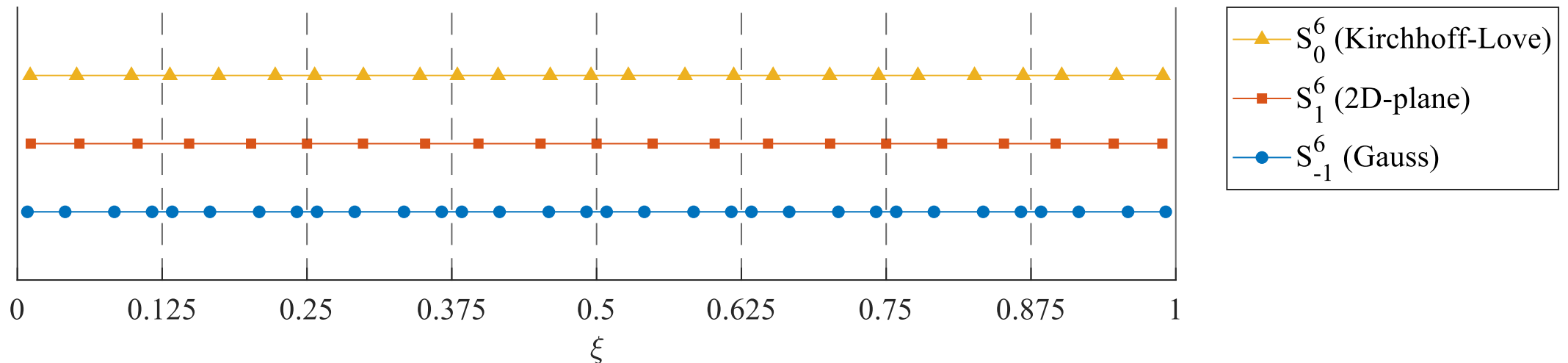
$\Omega$  ... Bereich der Struktur

# Patchweise Integration

- Patchweise Integrationsregeln basieren nicht auf elementweisem Denken
- Beispiel von patchweiser Integrationspunkte für ein 2D-Plane Element und ein Kirchhoff-Love Schalenelement:

$$p = 3$$

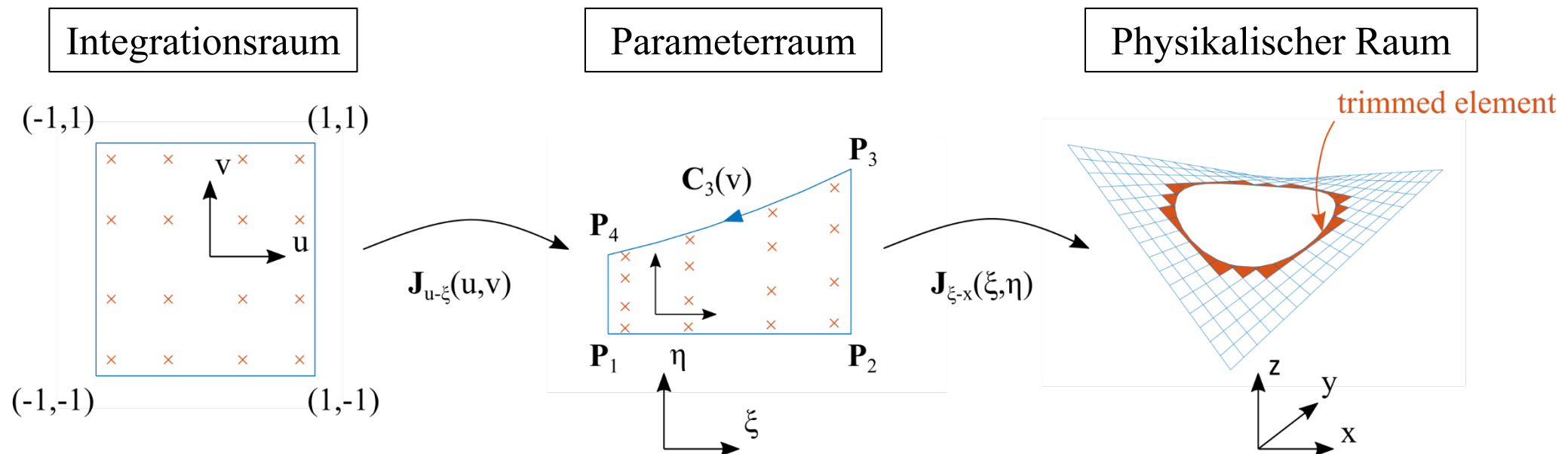
$$\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1, 1, 1, 1\}$$



# Gauß Integration getrimmter Elemente

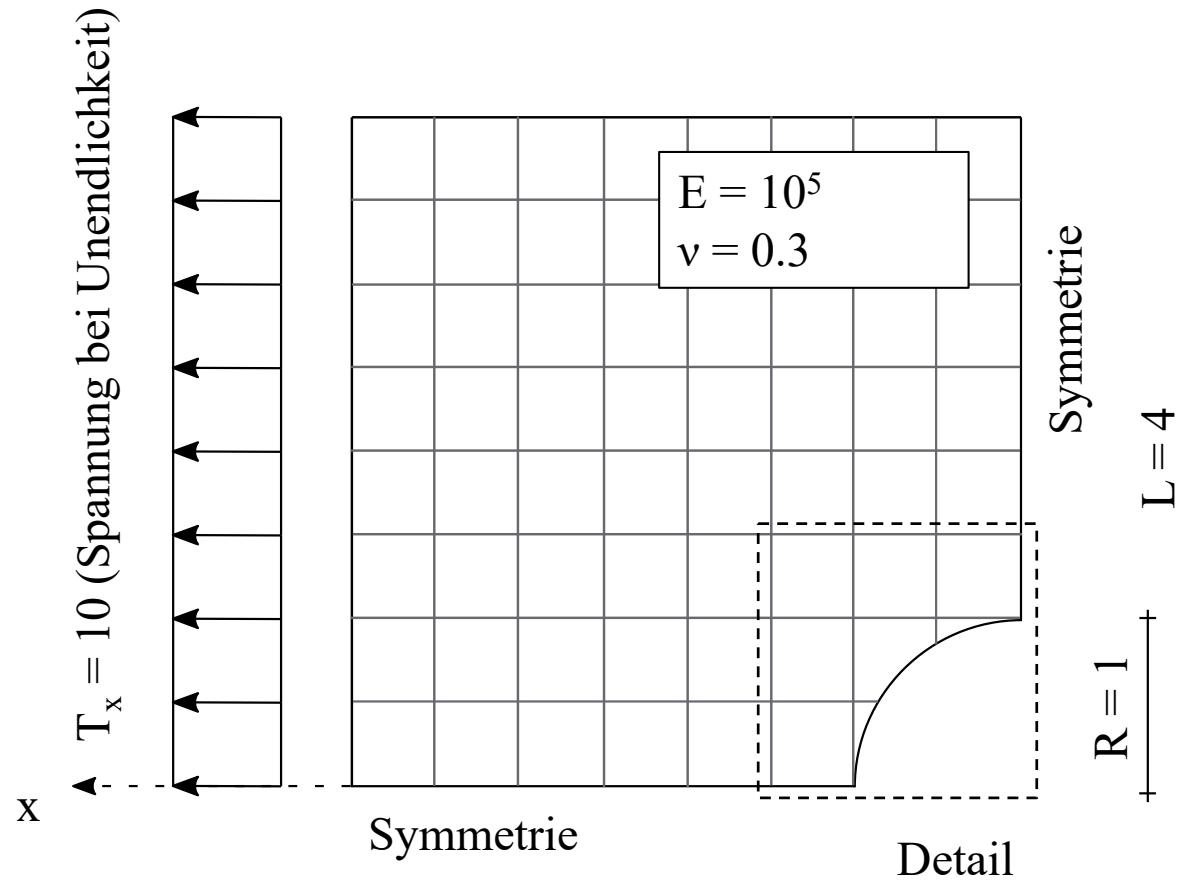
- Patchweise Integrationsregeln aufgrund ihrer Tensor-Produkt Struktur nicht anwendbar im Fall von Trimming
- Getrimmte Elemente integriert mit abgebildeten Gauß-Punkten

→ Ziel: Patchweise Integration auch für getrimmte Strukturen!



# Neue Methode für patchweise Integration getrimmter Flächen

Beispiel: Lochplatte

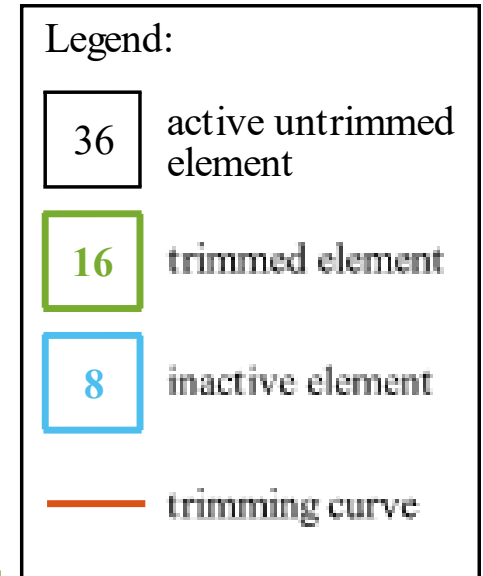


# Neue Methode für patchweise Integration getrimmter Flächen

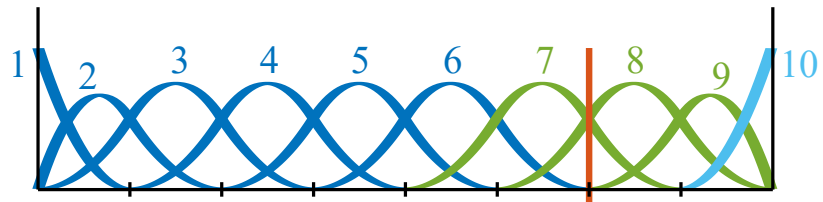
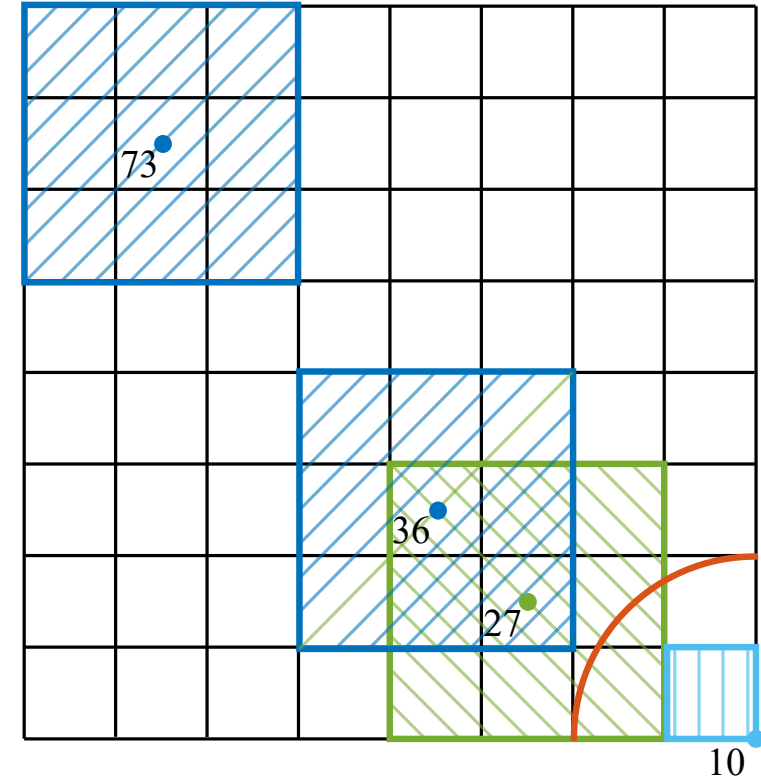
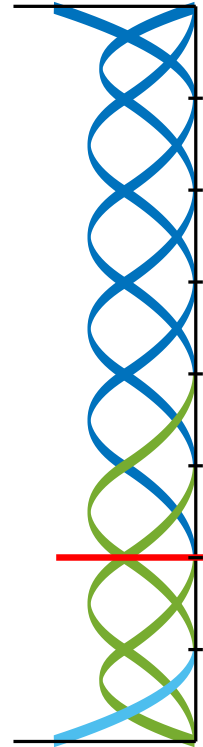
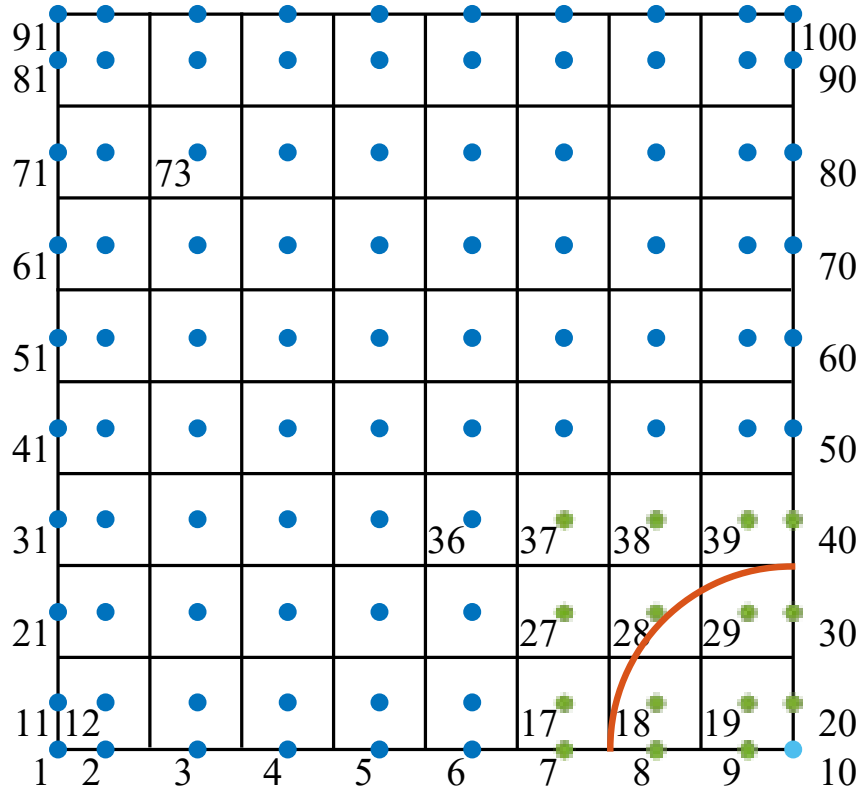
Elementunterscheidung im Fall von Trimming:

- Active-untrimmed
- Trimmed
- Inactive

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |



# Neue Methode für patchweise Integration getrimmter Flächen



# Neue Methode für patchweise Integration getrimmter Flächen

Elementunterscheidung im Fall von patchweiser Integration getrimmter Flächen:

- Inactive (**ia**) → keine Integration
- Trimmed (**t**) → abgebildete Gauß Integration
- Transition (**tra**) → gemischte Integration
- Patch-wise (**pw**) → patchweise Integration

|    |    |    |    |     |     |     |     |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| pw | pw | pw | pw | pw  | pw  | pw  | pw  |
| pw | pw | pw | pw | pw  | pw  | pw  | pw  |
| pw | pw | pw | pw | pw  | pw  | pw  | pw  |
| pw | pw | pw | pw | pw  | pw  | pw  | pw  |
| pw | pw | pw | pw | tra | tra | tra | tra |
| pw | pw | pw | pw | tra | tra | tra | tra |
| pw | pw | pw | pw | tra | tra | t   | t   |
| pw | pw | pw | pw | tra | tra | t   | ia  |



# Neue Methode für patchweise Integration getrimmter Flächen

Gemischte Integration von „Transition“-Elementen (tra):

- Patchweise Integration der ungetrimmten Formfunktionen
- Gauß Integration der getrimmten Formfunktionen
- Gauß Integration der kombinierten Einträge von getrimmten und ungetrimmten Formfunktionen

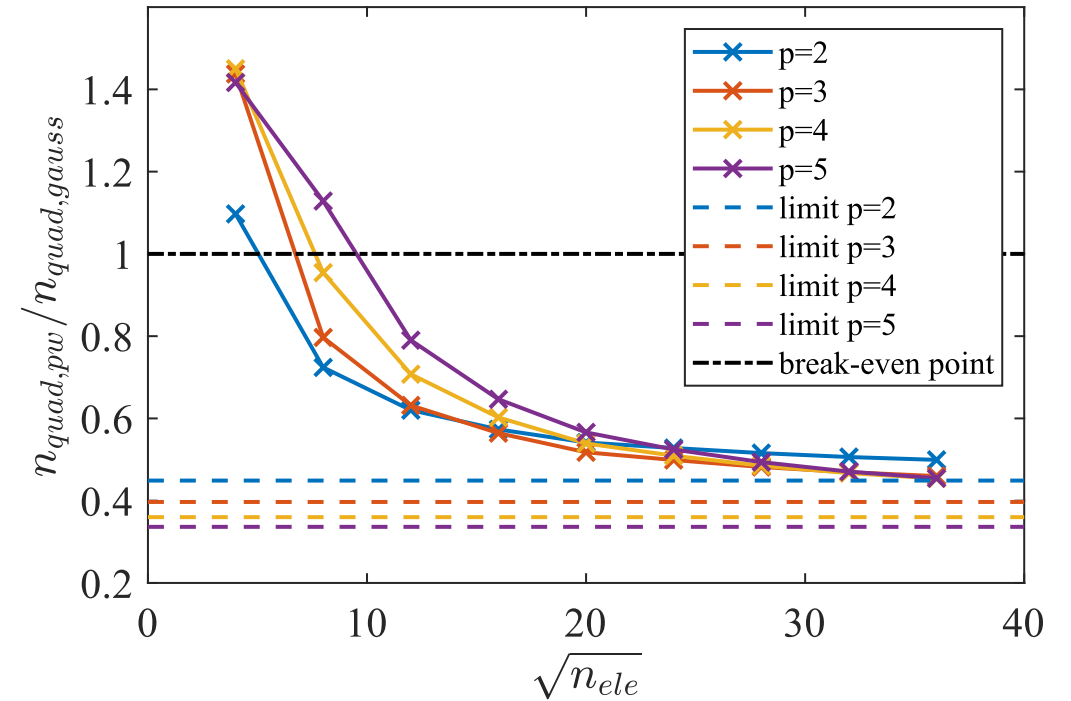
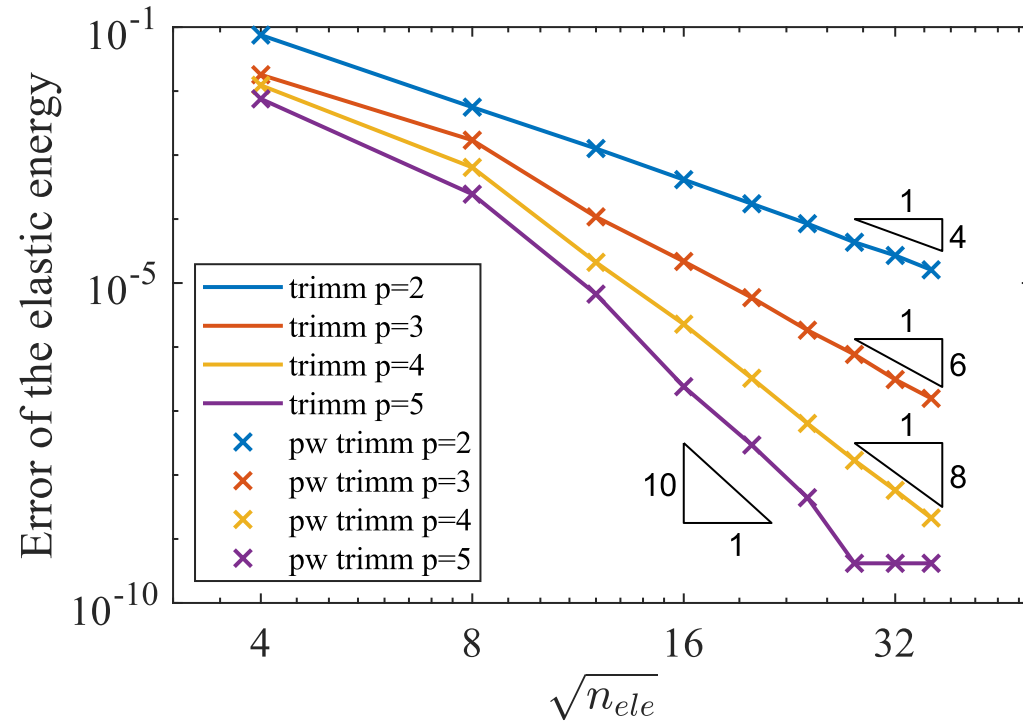
Ein kleines Beispiel mit:

- 4 Kontrollpunkte mit je einem Freiheitsgrad (4 Formfunktionen)
- Formfunktionen 2 und 3 sind getrimmt

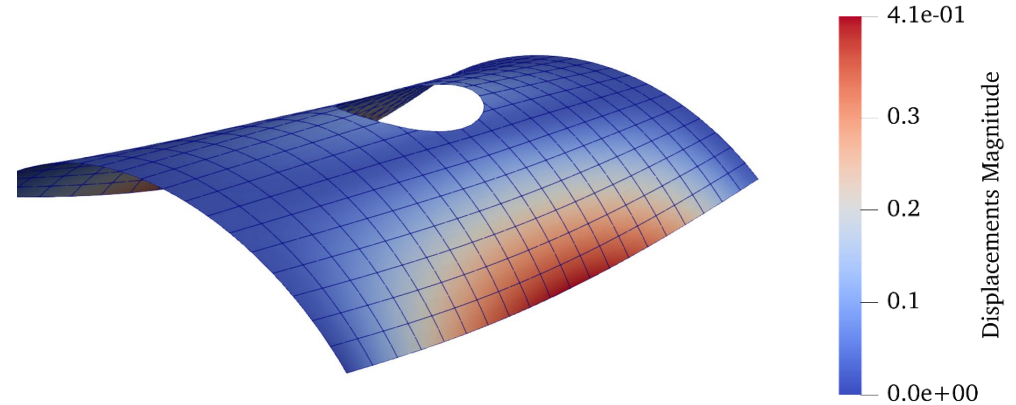
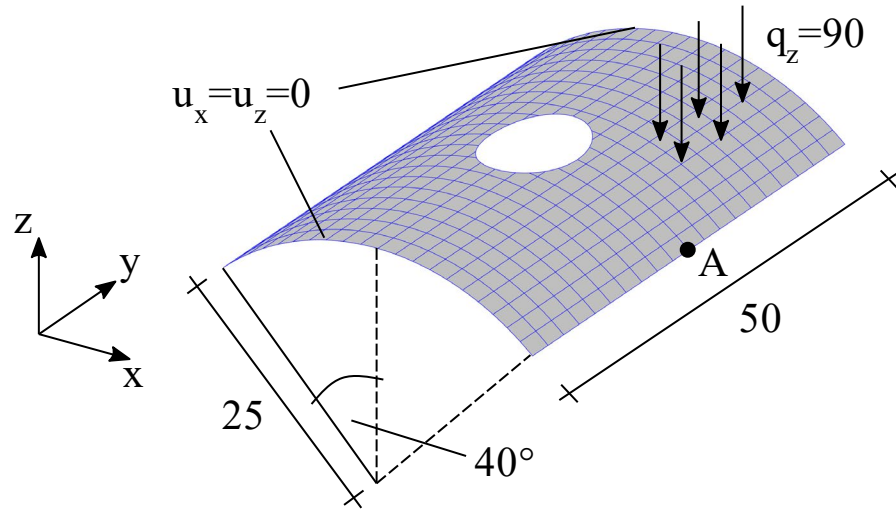
$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{pw} & 0 & 0 & K_{14}^{pw} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^{pw} & 0 & 0 & K_{44}^{pw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K_{12}^{gauss} & K_{13}^{gauss} & 0 \\ K_{21}^{gauss} & K_{22}^{gauss} & K_{23}^{gauss} & K_{24}^{gauss} \\ K_{31}^{gauss} & K_{32}^{gauss} & K_{33}^{gauss} & K_{34}^{gauss} \\ 0 & K_{42}^{gauss} & K_{43}^{gauss} & 0 \end{bmatrix}$$

# Numerische Ergebnisse: Lochplatte

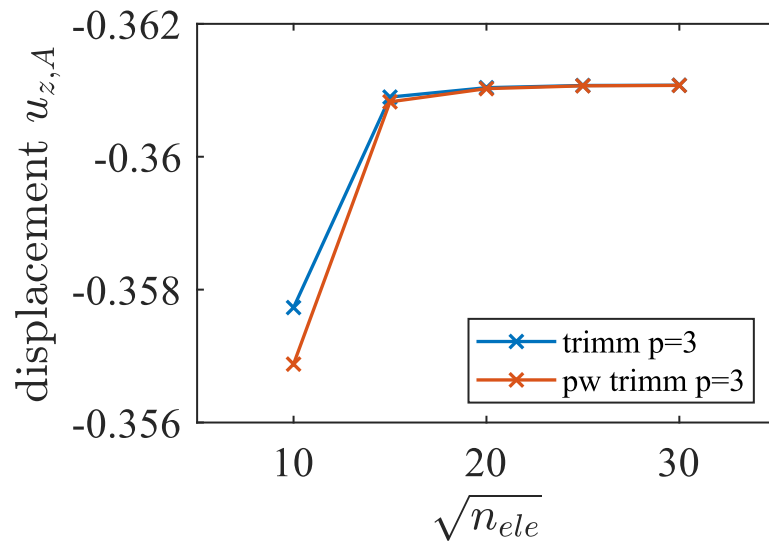
- Übereinstimmende Ergebnisse mit einer klassischen Trimmingmethode und der vorgestellten patchweisen Methode
- Eindeutige Reduktion der Anzahl der Integrationspunkte



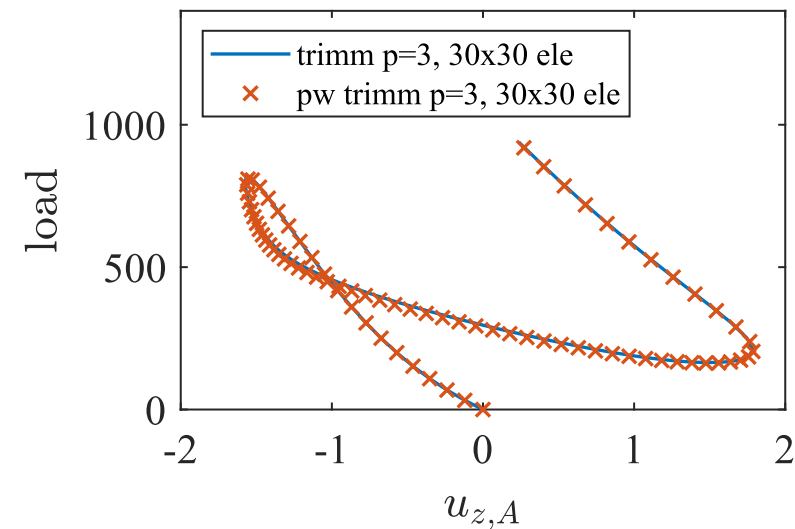
# Numerische Ergebnisse: Scordelis-Lo Roof mit elliptischem Loch



Lineare Berechnung



Nicht-lineare Berechnung

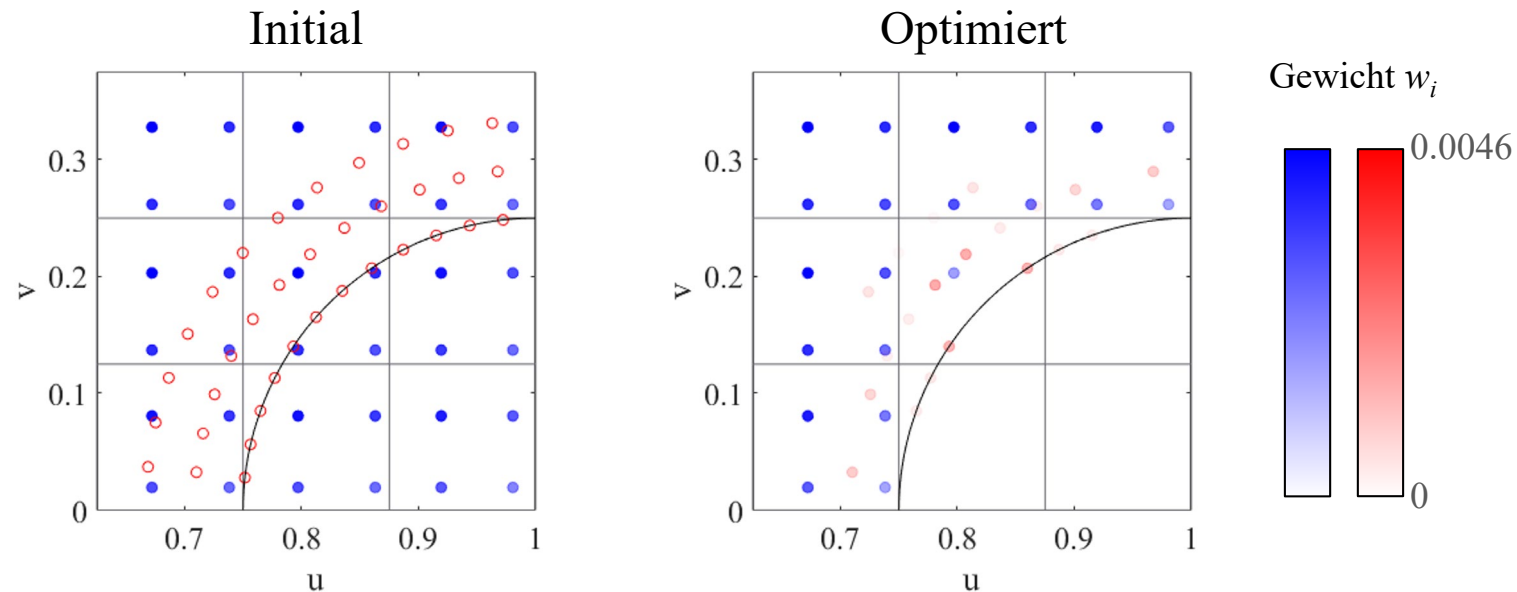


# Zusammenfassung

- Patchweise Integrationsregeln basieren auf einem Tensor-Produkt
- Tensor-Produkt Struktur nicht anwendbar im Fall von Trimming
- Vorgestellte Methode erweitert patchweise Regeln für getrimmte Flächen

# Ausblick

- Vergleich mit weiteren optimierten Integrationsregeln (Weighted Quadrature)
- Optimierte Integrationspunkte im Übergangsbereich



**Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!**

Kontakt: [michael.loibl@unibw.de](mailto:michael.loibl@unibw.de)

# Patch-wise Integration

- Optimal number of integration points for 2D-plane element and Kirchhoff-Love shell element

$$n_{quad,2Dplane} = \frac{\dim(\mathbb{S}_{r-1}^{2p})}{2} = \frac{(p+2)n_{ele} + p - 1}{2} = \mathcal{O}\left(\frac{p+2}{2}n_{ele}\right)$$
$$n_{quad,KL} = \frac{\dim(\mathbb{S}_{r-2}^{2p})}{2} = \frac{(p+3)n_{ele} + p - 2}{2} = \mathcal{O}\left(\frac{p+3}{2}n_{ele}\right)$$

# Patch-wise Integration

- Patch-wise quadrature rules reduce the number of integration points considering the high smoothness of NURBS basis functions
- Numerical integration

$$\mathbb{Q} = \sum_{i=1}^{n_{quad}} w_i f(\xi_i) := \int_{\Omega} f(x) d\xi$$

- Non-linear moment-fitting equations

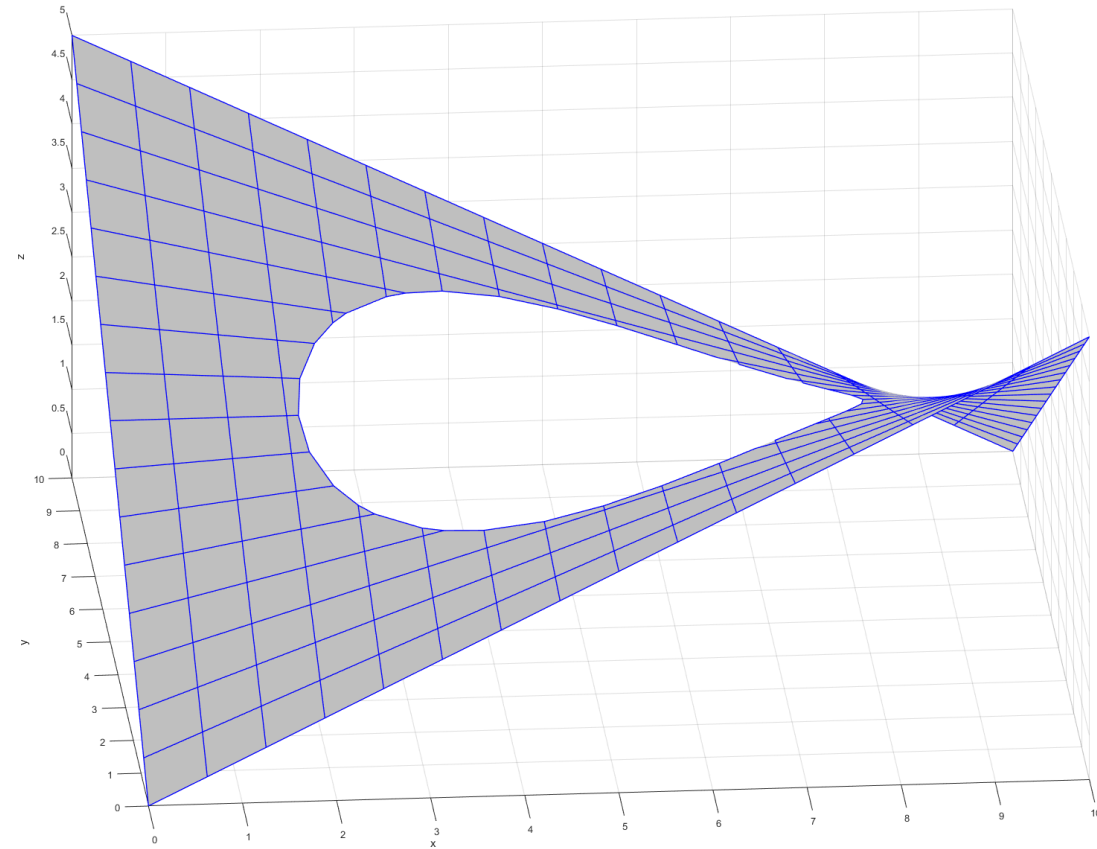
$$\int_{\Omega} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} f_1(\xi_1) & f_1(\xi_2) & \cdots & f_1(\xi_{n_{quad}}) \\ f_2(\xi_1) & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ f_m(\xi_1) & \cdots & & f_m(\xi_{n_{quad}}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n_{quad}} \end{pmatrix}$$

where

- $f$  ...  $m$  functions which should be integrated
- $\xi$  ... positions of  $n_{quad}$  integration points
- $w$  ... weights of  $n_{quad}$  integration points

- Optimal integration points by optimizing positions and weights

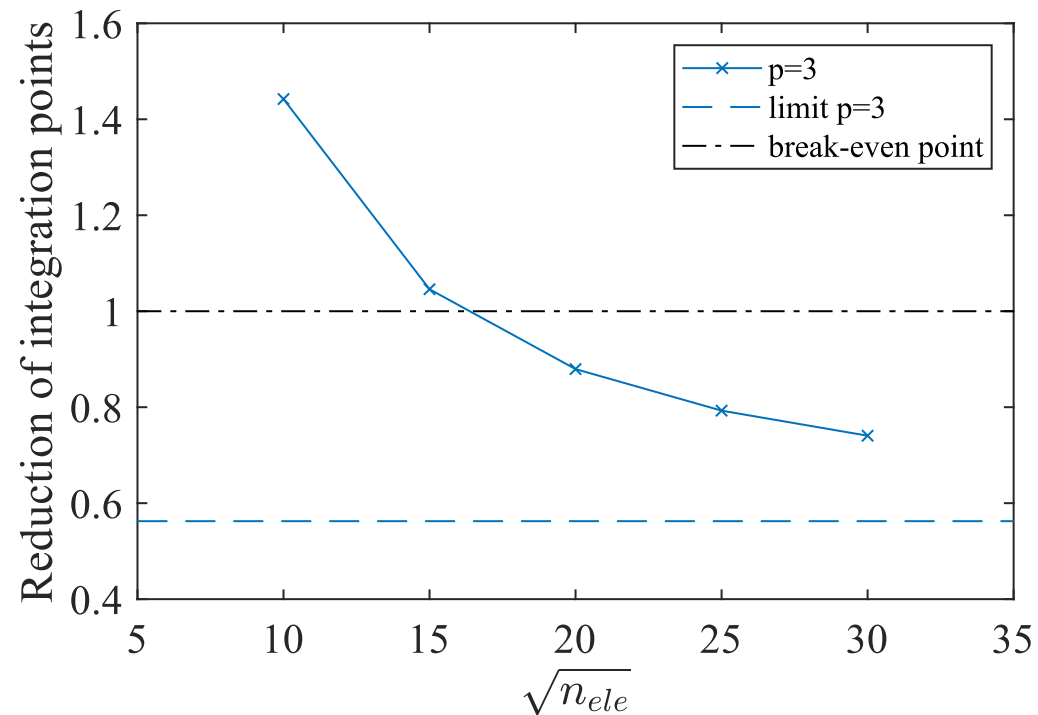
# Doubly curved shell with circular hole



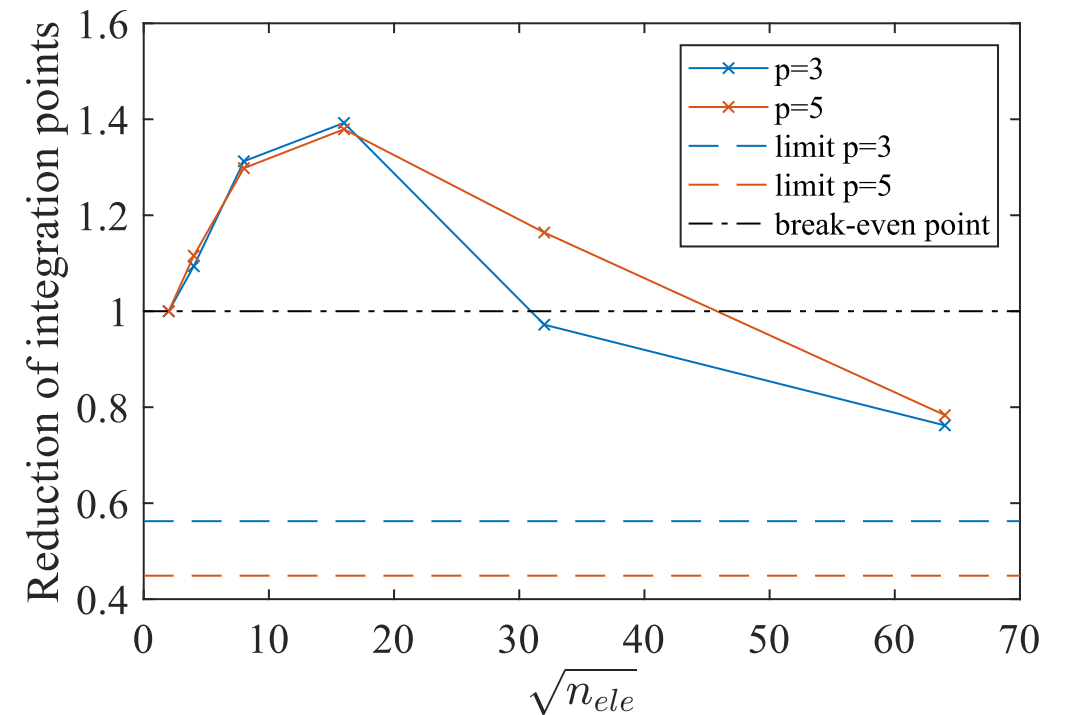


# Reduction of integration points

## Scordelis with elliptic hole



## Doubly curved shell with hole



# Non-linear Scordelis-Lo Roof

