



Körperschalleistungs-basierte Auslegung von Leichtbaustrukturen im Antriebsstrang

Christian Vogl

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

angenommenen Dissertation.

Gutachter/Gutachterin:

1. Prof. Dr.-Ing. Helmut Rapp
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Jaan-Willem Simon

Die Dissertation wurde am 06.06.2023 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 26.10.2023 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 22.11.2023 statt.

Abstrakt

Die folgende wissenschaftliche Arbeit befasst sich mit der aus dem Umstieg von Verbrennungsmaschinen zu elektrischen Antrieben resultierenden Problemstellung zur Minimierung hochfrequenter Störgeräusche im Elektrofahrzeug. Basierend auf Grundlagentheorien bereits existenter Optimierungsberechnungen wird eine neue Methode zur Auslegung von Integrationsbauteilen erarbeitet, die einen innovativen Lösungsvorschlag aufzeigt und maßgeblich zum Erhalt der Markenzufriedenheit und Produktqualität eines E-Autos beitragen soll. Dabei hat sich diese Aufbereitung zum Ziel gesetzt, den Prozess der Entwicklung von Integrationsbauteilen aus Sicht der Akustik zu optimieren, robuster zu gestalten und den iterativen Prozess der Konstruktion zu verkürzen. Zukünftig soll eine zielgerichtete automatisierte Designanpassung der Konstruktion unabhängig vom Wissen und der Erfahrung eines Konstrukteurs ermöglicht werden.

Das Fundament dieser Arbeit bildet eine umfassende Aufbereitung und Analyse führender, methodischer Grundlagen. Dafür werden bereits existierende Erkenntnisse der Körperschallakustik im Automobilbau wie die allgemeine Theorie zur Finite Element Methode und der simulationsgestützten Optimierung aufgezeigt und um eine neue Methode für die Auslegung von Integrationsbauteilen mittels Topologieoptimierung unter Einbezug der Körperschalleistung erweitert. Anhand eines akademischen Beispiels wird eine Methode zur leistungsbasierten Topologieoptimierung erarbeitet, die zur Bestimmung der Körperschalleistung für den Einsatz in kommerzieller Berechnungs-Software und damit als Randbedingung für die industriell anwendbare Topologieoptimierung abgeglichen wird. Für den Angleich des strukturdynamischen Verhaltens der Konstruktion an das Optimierungsergebnis wird die automatisierte Designanpassung durch Berechnung der Sensitivitäten des Modal Assurance Criteria vorgestellt.

Diese Methoden zur Auslegung von Integrationsbauteilen werden anhand von Motortragböcken einer bereits entwickelten E-Maschine in der Praxis aufgezeigt. Es folgt eine Topologieoptimierung der Motortragböcke unter Einhaltung der akustischen Randbedingungen sowie eine daraus abgeleitete Konstruktion mit einer automatisierten Anpassung des Designs an das strukturelle Verhalten der Optimierung unter zusätzlicher Beachtung der Betriebsfestigkeit. Die konstruierten Motortragböcke werden in einem Gussverfahren gefertigt und im Fahrzeug auf einem speziellen Akustik-Rollenprüfstand bewertet. Weitere Lösungsvariationen und mögliche Erweiterungsoptionen der neu erarbeiteten Methode geben einen Ausblick auf zukünftige Entwicklungen im Bereich der E-Mobilakustik.

Abstract

The following work deals with the problem of minimizing high-frequency noise in electric vehicles resulting from the switch from combustion engines to electric drives. Based on basic theories of already existing optimization methods, a new method for the design of integration components is developed, which shows an innovative solution proposal and should contribute significantly to the preservation of brand satisfaction and product quality of an electric car. In doing so, this preparation aims to optimize the process of developing integration components from an acoustic point of view, to make it more robust and to shorten the iterative process of design. In the future, it is intended to enable targeted automated design adaptation of the design independent of the knowledge and experience of a design engineer.

The foundation of this work is a comprehensive preparation and analysis of leading, methodological principles. For this purpose, existing knowledge of structure-borne noise acoustics in automotive design, such as the general theory of the finite element method and simulation-based optimization, is presented and extended by a new method for the design of integration components by means of topology optimization including structure-borne noise performance. Based on an academic example, a method for power-based topology optimization is elaborated, which is aligned to determine the structure-borne sound power for use in commercial computational software and thus as a boundary condition for industrially applicable topology optimization. For the alignment of the structural dynamic behavior of the design with the optimization result, the automated design adaptation by calculating the sensitivities of the modal assurance criterion is presented.

These methods for the design of integration components are demonstrated in practice using brackets of an already developed e-machine. This is followed by a topology optimization of the brackets in compliance with the acoustic boundary conditions and a design derived from this with an automated adaptation of the design to the structural behavior of the optimization with additional consideration of the operational stability. The designed brackets are manufactured in a casting process and evaluated in the vehicle on a special acoustic roller test bench. Further solution variations and possible extension options of the newly developed method provide an outlook on future developments in the field of e-mobile acoustics.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	3
1.2	Stand der Technik	4
1.3	Zielsetzung	5
1.4	Gliederung der Arbeit	6
2	Grundlagen	9
2.1	Grundlagen der FEM	9
2.1.1	Bewegungsgleichung	9
2.1.2	Tetraeder Element	16
2.1.3	Strukturdynamische Analysearten	19
2.2	Grundlagen der simulationsgestützten Optimierung	21
2.2.1	Optimierungsverfahren	21
2.2.2	Mathematische Grundlagen	22
2.2.3	Sensitivitätsanalyse	27
2.3	Grundlagen der Körperschallakustik	30
2.3.1	Leistungsbasierte Körperschallakustik im Automobilbau	31
2.3.2	Energetische Betrachtung von Systemen	32
2.3.3	Verschiebungsfelder zur Bestimmung der Leistung	32
2.3.4	Dämpfungsarten	34
2.3.5	Leistungsberechnung an einem Normalkraftstab	36
2.4	Grundlagen der automatisierten Designanpassung	38
2.4.1	Interpolation von Finite Element Daten	38
2.4.2	Modal Assurance Criterion	41
2.5	Sensitivität des Modal Assurance Criterion	44
2.5.1	Steifigkeitsmatrix-Sensitivität	44
2.5.2	Massenmatrix-Sensitivität	45
2.5.3	Eigenfrequenzsensitivität	45
2.5.4	Eigenvektorsensitivität	46
2.5.5	Modal Assurance Criterion Sensitivität	48

3	Schall-Leistungsbasierte Topologieoptimierung	53
3.1	Leistungsberechnung an einem Normalkraftstab	53
3.1.1	Diskretisierung des Normalkraftstabes	54
3.1.2	Körperschalleistung - Analytische Lösung	56
3.1.3	Körperschalleistung - Lösung mit Hilfe der FEM	59
3.2	Methode zur Optimierung der Körperschalleistung in <i>OptiStruct</i>	62
3.3	Körperschalleistungs-basierte Topologieoptimierung am Beispiel einer Platte	64
3.3.1	Aufbau FEM-Modell	64
3.3.2	Lastfälle zur Auslegung der Platte	65
3.3.3	Varianten zur Topologieoptimierung am Beispiel einer Platte	66
3.3.4	Zusammenfassung der drei Varianten	69
4	Automatisierte Designanpassung	71
4.1	Ablauf der automatisierten Designanpassung	72
4.2	Modal Assurance Criterion Bewertung	74
4.2.1	MAC-Bewertung einer Platte	74
4.2.2	Alternative Berechnung der MAC-Werte	78
4.3	Berechnung der Eigenfrequenzsensitivität	80
4.4	Berechnung der MAC-Sensitivität	82
4.4.1	Herkömmliche Variante der MAC-Bewertung	82
4.4.2	Alternative Variante der MAC-Bewertung	84
4.5	Abgleich der Eigenfrequenzen	85
4.6	Ergebnis der automatisierten Designanpassung	86
5	Anwendung in der Praxis	89
5.1	Modellaufbau einer elektrischen Antriebsmaschine	89
5.2	Leistungsbasierte Topologieoptimierung von Tragböcken	91
5.2.1	Aufbau einer E-Maschine zur Bestimmung der Körperschalleistung .	91
5.2.2	Definition des Designbereichs der Tragböcke	93
5.2.3	Randbedingungs- und Zieldefinition der Optimierung	94
5.2.4	Ergebnis der Optimierung	97
5.3	Automatisierte Designanpassung der Konstruktion	105
5.3.1	Aufbau der FE-Modelle	106
5.3.2	Initialer MAC-Abgleich zwischen Optimierungsergebnis und Erst- konstruktion	107
5.3.3	Eigenfrequenzanpassung	108
5.3.4	Optimierung der MAC-Werte	109
5.3.5	Angleichung der Eigenfrequenzen	111
5.3.6	Umsetzung der Optimierungsergebnisse in eine Konstruktion	114
5.4	Betriebsfestigkeitsbewertung der Tragböcke	114
5.5	Akustische Bewertung der final optimierten Tragböcke	115
5.6	Fertigung der optimierten Tragböcke	118
5.7	Akustische Vermessung der optimierten Tragböcke	122

5.8	Fazit des praxisnahen Beispiels	126
6	Zusammenfassung und Ausblick	127
6.1	Zusammenfassung	127
6.1.1	Topologieoptimierung Körperschalleistung	127
6.1.2	Automatisierte Designanpassung	129
6.2	Ausblick	131
	References	133

Kundenloyalität und Produktzufriedenheit sind ausschlaggebende Voraussetzungen für die Bindung eines Konsumenten an eine Automobilmарke. Entscheidet sich ein Kunde wiederholt für ein bestimmtes Produkt einer Marke und bevorzugt es gegenüber eines Konkurrenzproduktes, wird von Markenloyalität gesprochen.

Im Automobilbereich ist ein Aspekt der Kundenzufriedenheit der Fahrkomfort, zu dem das Geräuschverhalten eines Fahrzeuges gehört. Geräusche entstehen, wenn Strukturen durch Anregung in Schwingung versetzt werden. Diese Anregungen können zum Beispiel im Antrieb durch Stoßkräfte bei der Verbrennung oder im Fahrwerk durch das Überfahren unebener Straßen entstehen. Die Schwingungen werden über die Karosserie in den Innenraum des Fahrzeugs übertragen und durch Abstrahlung an Oberflächen für die Insassen hörbar. Das am Ohr ankommende Geräusch kann im Pegel und in seiner Charakteristik unterschiedlich vom Menschen wahrgenommen werden. Für das menschliche Ohr ist nur ein begrenzter Bereich an Lautstärke wahrnehmbar, welcher nach unten durch die Hörschwelle (niedriger Pegel) und nach oben durch die Schmerzgrenze (hoher Pegel) beschränkt ist.

Die Eigenschaft von Geräuschen wird durch verschiedene Assoziationen von jedem Menschen individuell als angenehm bis störend empfunden. Im Motorsportbereich werden beispielsweise laute Motorengeräusche mit leistungsstarken Fahrzeugen assoziiert - eine brummende Lüftung wird dagegen als ein störendes Geräusch empfunden. Durch den Umstieg von Verbrennungsmaschinen hin zu elektrischen Antrieben ändert sich auch die Charakteristik der Geräusche, die durch die Anregung im Antrieb entstehen. Bei konventionellen Antrieben werden hochfrequente Störgeräusche, wie beispielsweise die Anregung einer elektrischen Ölpumpe, durch das Motorengeräusch und auftretende Windgeräusche maskiert. Das menschliche Gehör ist bis zu einem gewissen Grad an diese Geräusche gewöhnt und empfindet diese als nicht störend. Durch den Einsatz von elektrischen Antrieben entfällt die Maskierung durch das Geräusch der Verbrennungsmaschine und es entstehen neue, bei niedrigen Geschwindigkeiten hochfrequente Störgeräusche, die unterhalb der verbleibenden Maskierung der Windgeräusche liegen. Je hochfrequenter ein Geräusch ist, desto wahrscheinlicher wird es durch den Menschen als unangenehm empfunden. Durch die Entwicklung neuer Antriebstechnologien rückt das Thema Akustik zur Sicherstellung der Kundenzufriedenheit und damit der Markenloyalität verstärkt in den

Fokus.

Der effektivste Weg die Akustik zu beeinflussen ist die Minimierung der Schwingungen an ihrem Ursprung. Bei Antrieben jeglicher Art können diese Anregungen beeinflusst, aber nicht gänzlich unterdrückt werden. Im weiteren Übertragungspfad zum Fahrerohr werden die Schwingungen über Integrationsbauteile (Motortragböcke bzw. Motortragarme und Aggregatelager) in die Karosserie übertragen. Als Hauptübertragungspfad des Körperschalls unterliegen die Integrationsbauteile neben Anforderungen an die Betriebsfestigkeit strengen akustischen Zielen. Diese akustischen Ziele unterteilen sich in drei Bereiche: Schwingungen mit einer niedrigen Frequenz bis ca. $10 - 20 \text{ Hz}$ werden als Vibrationen wahrgenommen, die als fühlbare Schwingungen z.B. durch den Autositz das Komfortgefühl der Insassen beeinflussen. Übersteigen die Schwingungen eine Frequenz von ca. 100 Hz sind sie als hörbare Geräusche für den Menschen wahrnehmbar. Der Bereich zwischen 10 Hz und 100 Hz ist sowohl spürbar, als auch hörbar und wird als Übergangsbereich bezeichnet. Zusammengefasst lassen sich die einzelnen Bereiche unterteilen in **V**ibration ($< 10 \text{ Hz}$), **H**arshness ($10 \text{ Hz} - 100 \text{ Hz}$) und **N**oise ($> 100 \text{ Hz}$). In Abbildung 1.1 sind die einzelnen akustischen Phänomene (**NVH**) mit ihrer jeweiligen Art der Wahrnehmung dargestellt.

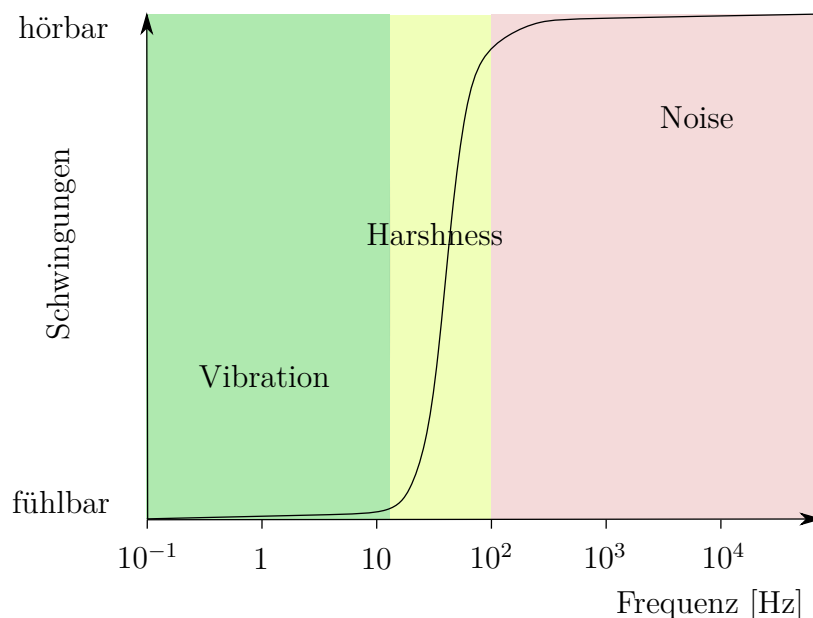


Abbildung 1.1: Aufteilung von akustischen Phänomenen nach Frequenzbereichen in Vibration, Harshness und Noise und die Art der menschlichen Wahrnehmung

1.1 Problemstellung

Konventionelle Antriebsmaschinen (Verbrennungsmaschinen) sind durch niederfrequente Anregungen geprägt. Wird der Motortragbock durch die Antriebsschwingungen in seiner Eigenfrequenz angeregt, kann dies zu einer akustischen Auffälligkeit für den Kunden führen. Ziel der akustischen Auslegung von Motortragböcken ist die erste Eigenfrequenz in einen Bereich zu legen, der durch Wind- und Fahrgeräusche maskiert wird und somit durch den Fahrgast nicht als auffällig wahrnehmbar ist. Die reine Verbrennungsanregung ist so tieffrequent, dass die Eigenfrequenz des Motortragbocks durch die Anforderungen an die Betriebsfestigkeit stets im Bereich der Maskierung liegen. Relevant wird die Eigenfrequenz des Motortragbocks für höherfrequente Anregungen durch elektrische Nebenaggregate, wie beispielsweise einer Ölpumpe.

Über die letzten Jahre hat sich die akustische Auslegung von Motortragböcken nach der ersten Eigenfrequenz bewährt und findet sich im aktuellen Auslegungsprozess wieder. Durch den Umstieg von Verbrennungsmaschinen auf elektrische Maschinen ist diese Auslegung nicht mehr ausreichend. Die niederfrequenten Anregungen der Verbrennungsmaschine werden durch hochfrequente Anregungen aus der elektrischen Maschine ersetzt. Eine Auslegung der Motortragböcke nach der herkömmlichen Methode würde eine Eigenfrequenz von $> 2000 \text{ Hz}$ zur Folge haben, was durch die Bauraum- und Gewichtsvorgaben nicht wirtschaftlich umsetzbar wäre. Eine überarbeitete, akustische Anforderung für Motortragböcke sieht bei elektrischen Maschinen vor, den übertragenen Körperschall möglichst gering zu halten, da es nicht möglich ist Eigenfrequenzen $< 2000 \text{ Hz}$ zu vermeiden. Aus der Versuchsmessung kommend, werden Beschleunigungspegel an den Schnittstellen zwischen Antrieb und Karosserie gemessen und als Indikator für die Körperschallakustik angenommen. Da die akustischen Ziele in der Simulation und in der Messung darzustellen sind, hat sich dieses Vorgehen in der Auslegung von Motortragböcken etabliert und stellt den aktuellen Stand der Technik dar. In der Praxis zeigt sich, dass die akustischen Auffälligkeiten mit dem Indikator des Beschleunigungspegels nicht vollumfänglich erklärt werden können. Für eine vollständige Erfassung der Körperschallakustik ist neben der physikalischen Größe der Beschleunigung (und damit Geschwindigkeit oder Verschiebung) auch die aufgebrachte Kraft und deren Phaseninformation relevant.

Um die akustischen Ziele im Entwicklungsprozess von Integrationsbauteilen zu erreichen, wird nach jetzigem Stand der Technik auf die Methode der Topologieoptimierung zurückgegriffen. Unter Einhaltung von definierten Randbedingungen ist das Ergebnis der Optimierung - je nach Anforderung - eine gewichtsoptimale Struktur, die als Designvorschlag für eine Konstruktion verstanden werden kann. In einer rechnerunterstützten Konstruktion (**Computer-Aided Design - CAD**) werden Integrationsbauteile umgesetzt und auf ihre Anforderungen hin überprüft. Je nach Wissen und Erfahrung des Konstrukteurs mit der Umsetzung von bionischen Strukturen aus der Optimierung weist die Konstruktion eine hohe oder geringe Übereinstimmung des strukturellen Verhaltens mit dem Optimierungsergebnis auf. Die Folge ist ein iterativer Prozess, bei dem durch stetiges Nachrechnen und Nachkonstruieren die Eigenschaften der Optimierung realisiert werden. Durch eine

Automatisierung dieses iterativen Prozesses der Nachkonstruktion und Nachberechnung bei der Umsetzung von bionischen Strukturen aus der Optimierung kann eine effiziente Realisierung der Optimierungseigenschaften ermöglicht werden, was zu Zeit- und Kosteneinsparungen führt.

1.2 Stand der Technik

Neben der klassischen Modellvorstellung der Schallausbreitung in Strukturen wurde 1976 die Betrachtung von Energieflüssen (Intensitäten) des Schalls in Strukturen eingeführt [Pav76]. In den nachfolgenden Jahren entwickelten sich durch [Pav87], [LL92] und [GP93] weitere Anwendungsmöglichkeiten und mit [McD91] und [PCL06] erste Methoden zur Messung der Strukturintensität. [Kuh10] verwendet die Berechnung der Energieflüsse für die gezielte Leitung des Körperschalls durch eine Struktur. Die erste Verwendung in der Fahrzeugentwicklung erfolgte in der Arbeit von [Sto16]. Die Strukturintensität beschreibt den Fluss der Energie durch eine Struktur. Mit den Arbeiten von [RL17] und [RL19] wird eine Optimierungsmethode für die Homogenisierung der Körperschallintensität anhand einer gedämpften Platte gezeigt.

Um den Energiefluss durch einen Querschnitt der Struktur zu bestimmen, wurde die Körperschalleistung eingeführt. Diese Entwicklung erfolgte nahezu parallel zur Intensität und wurde in der 3-teiligen Serie von [GW80b], [GW80c] und [GW80d] erstmalig beschrieben. Die ersten Anwendungen fand die Körperschalleistung an Balken durch analytische Berechnungen in [WB88], [WB92] und [LIJ96]. Die Methode wurde 2006 durch die Arbeit von [PH06b] und [PH06a] für gekoppelte Balken erweitert. Die Bestimmung der Körperschalleistung in komplexen Geometrien zeigte Wester und Mac in ihren Arbeiten [WM05a], [WM05c] und [WM05b].

Neben der analytischen Lösung wird in der Auslegung von Strukturen die Finite Element Methode benutzt, um beliebig komplexe Geometrien bewerten zu können ([MS00]). Die Verwendung in der Fahrzeugentwicklung ist seit [HGZL08] und [SLSD⁺10] bekannt. Intensiviert wurde die Verwendung der Körperschalleistung für die akustische Auslegung im Fahrzeug durch die Arbeiten von Ullmann mit [Ull16], [USBM17b], [USBM17a] und [US19] sowie [HMTC19].

Über die Verwendung der Körperschalleistung in der Topologieoptimierung ist wenig bekannt. Optimierungen auf Grundlage einzelner entkoppelter Strukturen finden sich in [CHP06], [CPPH06] und [XLXG12]. Für die Anwendung in der Fahrzeugentwicklung muss das gesamte System, welches aus einer Vielzahl von einzelnen Strukturen besteht, in einer Topologieoptimierung betrachtet werden. Die verwendete kommerzielle Software Optistruct bietet die Möglichkeit einer Analyse der übertragenen Körperschalleistung in einem Querschnitt eines Bauteils. Die zugrunde liegenden Veröffentlichungen für die Methode sind von [Ham90], [HS99] und [KLL04]. Eine Implementierung für die Benutzung in einer Topologieoptimierung ist nicht vorhanden.

1981/82 wurde das Modal Assurance Criterion von [All81] und [AB82] im Bereich der experimentellen und analytischen Strukturmechanik eingeführt. Diese Bewertung basiert auf

der Orthogonalitätsprüfung nach [Gra58]. Dabei werden die experimentellen Modalvektoren zusammen mit der Massenmatrix aus einer Finiten Element Berechnung verwendet, um die Orthogonalität der Modalvektoren zu bewerten. Über die Jahre sind eine Vielzahl von Abwandlungen des Modal Assurance Criteria entstanden [All03].

Wichtige Meilensteine für die zusätzliche Betrachtung von dynamischen Lastfällen sind das Modal Assurance Criterion with Frequency Scales (FMAC, [FE00] und [FE01]) und das Frequency Response Assurance Criterion (FRAC, [HL96]) sowie dessen Weiterentwicklungen [FD] und [NS02]. Die Ursprünge des Modal Assurance Criterion dienen dem Vergleich einer Messung mit einer Simulation und wird bis heute dafür verwendet (beispielsweise [KW22], [GDM21] oder [GRS⁺22]). Des Weiteren wird das Modal Assurance Criterion für die Detektion von Schwachstellen und Beschädigungen in Bauteilen verwendet ([Wes86] oder [HLLG20]). Ein Vergleich zweier Simulationen mittels des Modal Assurance Criteria ist nicht bekannt.

Um die Geometrie einer Nach-Konstruktion des Optimierungsergebnisses mit dem tatsächlichen Ergebnis der Topologieoptimierung vergleichen und durch eine Shape Optimierung anpassen zu können, muss die Sensitivität des Modal Assurance Criteria bestimmt werden. Eine Möglichkeit zur Berechnung der MAC-Sensitivität ist die indirekte Methode, in dem zuvor die Eigenvektorsensitivitäten bestimmt werden. Die Eigenvektorsensitivität wurde 1975 erstmals durch die Methode von [RC75] vorgestellt. In den Folgejahren entstanden neue Methoden zur effizienteren und genaueren Berechnung ([Nel76], [JGL89] und [LJ97]).

Erst im Jahr 2020 ist es [YP20] gelungen, die Eigenvektorsensitivität exakt zu bestimmen. Die Arbeit von [Wad22] zeigt einen Vergleich der genannten Methoden unter Beachtung der Rechenzeit und Genauigkeit. Alternativ zu der indirekten Methode wurde 2014 mit der Arbeit von [LHW14] eine Möglichkeit erarbeitet, die Sensitivität des Modal Assurance Criteria direkt bestimmen zu können. Die hier gezeigten Methoden wurden ausschließlich für den Abgleich einer Simulation mit einer Messung oder mit zwei Messungen untereinander erforscht. Eine Anwendung zum Abgleich zweier Simulationen ist nicht bekannt und wird in dieser Arbeit erstmalig für den Abgleich des dynamischen Verhaltens zwischen dem Ergebnis einer Topologieoptimierung und der daraus entstandenen Konstruktion dieses Designvorschlages verwendet.

1.3 Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den Prozess der Entwicklung von Integrationsbauteile aus Sicht der Akustik zu optimieren und robuster in der Auslegung zu gestalten. Durch die Topologieoptimierung können schon zu Beginn eines Entwicklungsprozesses erste Aussagen über die akustischen Eigenschaften der Bauteile und deren Gewicht in dem zur Verfügung stehenden Bauraum getroffen werden. Die akustischen Eigenschaften werden dabei durch die Körperschallleistung dargestellt. Der bisherige Indikator für das akustische Verhalten (Beschleunigungspegel im Fahrbetrieb) soll durch die neue Methode abgelöst werden. Die Körperschallleistung soll als Randbedingung für die Topologieoptimierung dienen und das

akustische Verhalten vollumfänglich beschreiben.

Um den iterativen Prozess der Konstruktion zu verkürzen, wird eine Methode erarbeitet, die es ermöglicht, eine zielgerichtete automatisierte Designanpassung umzusetzen - unabhängig vom Wissen und der Erfahrung eines Konstrukteurs. Als Bezugsgröße für die Übereinstimmung zwischen Konstruktion und Optimierung dient das Modal Assurance Criterion.

Die Anwendung der Methode in der Praxis wird am Beispiel der Motortragböcke einer bereits entwickelten E-Maschine gezeigt. Akustische Auffälligkeiten führten zum Einsatz eines Schwingungstilgers an einem der Motortragböcke. Neben den Kosten der Entwicklung und der Produktion des Tilgers ist ein zusätzliches Mehrgewicht die Folge, welches durch eine frühzeitige Auslegung unter Einbezug der Körperschalleistung vermeidbar gewesen wäre. Ziel in diesem Beispiel ist es, durch den aufgezeigten Prozess Motortragböcke zu entwickeln, die dem akustischen Verhalten der aktuellen Serientragböcke (inkl. Schwingungstilger) entsprechen, so dass das Gesamtgewicht durch den Entfall des Tilger und der Topologieoptimierung deutlich reduziert wird. Für den Betrieb im Fahrzeug müssen die Motortragböcke neben den akustischen Zielen auch die Anforderung der Betriebsfestigkeit einhalten. Die Wirksamkeit der aufgezeigten Methode wird anhand einer Messung am Rollenprüfstand im Fahrzeug durch die Messung der akustischen Wahrnehmung im Fahrzeuginnenraum aufgezeigt.

1.4 Gliederung der Arbeit

Nach einer kurzen Einführung folgt in Kapitel 2 ein Überblick über die Grundlagen, die für den entwickelten Prozess und den damit verbundenen Methoden notwendig sind. Der erste Teil der Grundlagen beschäftigt sich mit der Körperschallakustik im Automobilbau. Neben der allgemeinen Theorie zur Finite Element Methode und der simulationsgestützten Optimierung wird auf die Auslegung von Integrationsbauteilen mittels Topologieoptimierung unter Einbehaltung der Körperschalleistung als Randbedingung eingegangen. Der zweite Teil widmet sich der automatisierten Designanpassung durch Berechnung der Sensitivitäten des Modal Assurance Criteria. Eine zielgerichtete Geometrieangepassung gleicht das dynamische Verhalten der ersten Konstruktion an das des Optimierungsergebnisses an.

In Kapitel 3 wird eine Methode zur leistungs-basierten Topologieoptimierung im Kontext von Integrationsbauteilen anhand eines vereinfachten Beispiels vorgestellt. Die Nutzung einer analytischen Lösung des Problems ermöglicht einen Vergleich mit der erarbeiteten Methode zur Bestimmung der Körperschalleistung. Diese Methode dient als Voraussetzung für den Einsatz in kommerzieller FEM-Software und somit als Randbedingung für die Topologieoptimierung.

Für die automatisierte Designanpassung wird in Kapitel 4 auf die Sensitivitätsberechnung des Modal Assurance Criteria eingegangen. Anhand einer Platte als Beispiel erfolgt die herkömmliche Berechnung des Modal Assurance Criteria und seiner Sensitivität wie auch mit einer neuen, für die Berechnung mittels FEM ausgelegten, optimierten Variante.

Die erarbeiteten Methoden zur Auslegung von Integrationsbauteilen werden in Kapitel 5 anhand von Motortragböcken einer E-Maschine in der Praxis aufgezeigt. Im ersten Schritt erfolgt eine Topologieoptimierung der Motortragböcke unter Einhaltung der akustischen Randbedingungen. Im zweiten Schritt wird die daraus abgeleitete Konstruktion durch die automatisierte Designanpassung dem Ergebnis der Optimierung angeglichen. Nach Bewertung der Betriebsfestigkeit werden die Motortragböcke in einem Gussverfahren gefertigt und im Fahrzeug auf einem speziellen Akustik-Rollenprüfstand validiert.

Abschließend wird in Kapitel 6 eine Zusammenfassung zum Potential der neu erarbeiteten Methode zur Auslegung von Integrationsbauteilen gegeben. Dieser beinhaltet einen Ausblick über mögliche Erweiterungen der Methode.

Dieses Kapitel widmet sich den Grundlagen auf denen die vorliegende Dissertation aufbaut. Um das Strukturverhalten im Antriebsstrang simulativ darstellen zu können wird auf die **F**inite **E**lement **M**ethode (FEM) und ihre zugrundeliegende Bewegungsgleichung zurückgegriffen (Kapitel 2.1). Im Kapitel 2.2 *Grundlagen der Optimierungsverfahren* werden die theoretischen Hintergründe der jeweiligen Disziplin und numerischen Berechnungsmethode gezeigt, die für die Strukturauslegung unter Beachtung der *Körperschallakustik* (Kapitel 2.3) benötigt werden. Im Kapitel 2.4 *Grundlagen der automatisierten Designanpassung* wird die Theorie zur Bestimmung des Grades der modalen Übereinstimmung zweier Strukturen erklärt.

2.1 Grundlagen der FEM

Die FEM ist eine numerische Methode zur Lösung von Differentialgleichungen, die in vielen Ingenieur- und Wissenschaftsbereichen Anwendung findet. Sie ermöglicht die Modellierung und Analyse komplexer Strukturen oder Systeme, indem sie diese in kleinere, einfachere Teile unterteilt, die als Finite Elemente bezeichnet werden. Diese Teile werden mathematisch beschrieben, und die Bewegungsgleichungen, die das Verhalten des Systems beschreiben, werden auf jedes einzelne Element angewendet. Die nachfolgenden Kapitel basieren auf den wissenschaftlichen Arbeiten von [LC94],[Bat06] und [CMPW01].

2.1.1 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichungen sind mathematische Beschreibungen der physikalischen Prinzipien, die das Verhalten von Materialien und Strukturen bestimmen. Sie beschreiben, wie sich die Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung von Punkten oder Oberflächen im Raum mit der Zeit ändern. Beispiele für Bewegungsgleichungen sind die Navier-Stokes-Gleichungen in der Fluidmechanik oder die Elastizitätsgleichungen in der Festkörpermechanik. Die Elastizitätsgleichungen beschreiben die Bewegung von deformierbaren Körpern. Sie beinhalten das Hookeschen Gesetz, das die Beziehung zwischen Dehnung und Spannung beschreibt.

Die FEM löst die Bewegungsgleichungen, indem sie das betrachtete Gebiet in diskrete Bereiche unterteilt. Diese diskreten Elemente können beliebige Formen haben, z. B. Dreiecke, Quadrate oder Tetraeder. Für jedes Element wird eine Näherungslösung der Bewegungsgleichungen berechnet. Die Näherungslösungen für die einzelnen Elemente werden dann zu einer Gesamtlösung kombiniert, die das Verhalten des gesamten Systems beschreibt.

Gleichung der Elastostatik

Die Elementformulierung für die FEM basiert auf den Methoden der Spannungsberechnung, die auf [Hoo78], [You07] und [TG69] zurückzuführen ist. Ausgehend von einem thermischen Potential Ψ

$$\Psi = \left(\frac{1}{2\rho} \right) \mathbf{C} \otimes \boldsymbol{\epsilon} \otimes \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.1)$$

mit ρ als Materialdichte. \mathbf{C} beschreibt die Steifigkeit als ein Tensor 4. Ordnung mit 81 Tensor-Komponenten nach der voigtschen Notation. Zusammen mit $\boldsymbol{\epsilon}$ als Verzerrungstensor kann durch Differentiation des thermischen Potentials Ψ nach dem Verzerrungstensor der Spannungstensor beschrieben werden [LC94].

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) = \mathbf{C} \otimes \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.2)$$

ist bekannt als das Hookesche Gesetz (nach Robert Hook [Hoo78]). Alternative Schreibweisen sind:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.3)$$

oder

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.4)$$

mit $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Wird die Initial-Spannung $\boldsymbol{\sigma}_I$ berücksichtigt, erweitert sich Gleichung 2.3 zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\sigma}_I. \quad (2.5)$$

\mathbf{C} oder C_{ijkl} beschreibt den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen als Tensor 4. Ordnung. Mit

$$\sigma_{ij} = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right) = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.6)$$

und

$$\sigma_{kl} = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{kl}} \right) = C_{klij}\epsilon_{ij} \quad (2.7)$$

kann gezeigt werden, dass

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} = C_{klij} \quad (2.8)$$

ist. Durch diese Symmetriebeziehung können die 81 Koeffizienten von \mathbf{C} auf 21 Koeffizienten reduziert werden. \mathbf{C} beschreibt ein allgemeines anisotropisches Material

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Handelt es sich um ein isotropes Material, reduziert sich \mathbf{C} auf zwei unabhängige Koeffizienten:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Das Hookesche Gesetz für ein isotropes Material lautet nach [CMPW01] in Abhängigkeit des E-Moduls E und der Querkontraktion ν :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.11)$$

Zusammenhang von Verschiebungen und Dehnungen

Für die Formulierung der FEM gibt es eine Vielzahl von Ansätzen. Die auf Verschiebungen basierende Methode kann als eine Erweiterung der Verschiebungsmethode von Balken- und Fachwerkstrukturen angesehen werden [Bat06]. Jeder Körper, auf den Kräfte wirken, verformt sich. Diese Verformung kann durch ein Verschiebungsfeld beschrieben und mit den Dehnungen in Beziehung gesetzt werden. Dieser Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Dehnungen spielt eine entscheidende Rolle für die Elementformulierung. Abbildung 2.1 zeigt eine Struktur unter Verformung in x-Richtung (a) um Δu , in y-Richtung (b) um Δv und eine Schubverformung (c) um Δu und Δv . Der Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Dehnungen lässt sich beschreiben mit:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad \epsilon_y = \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad \text{und} \quad \gamma_{xy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta x}. \quad (2.12)$$

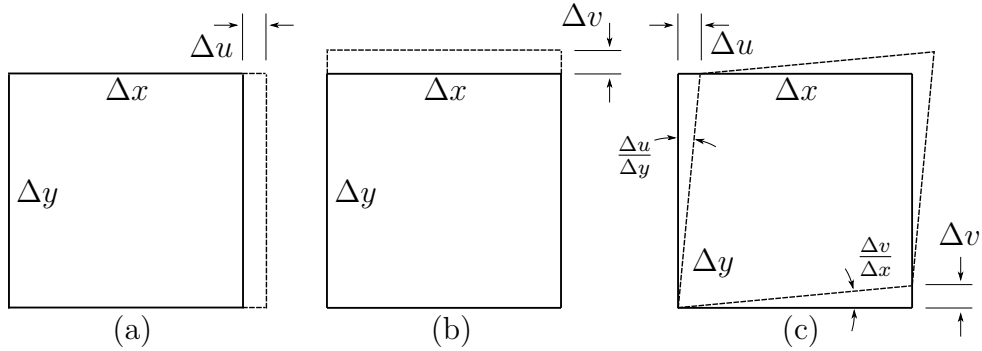


Abbildung 2.1: Struktur unter Verformung in x-Richtung (a), y-Richtung (b) und unter Schubverformung (c) [CMPW01]

Durch Annäherung von Δu und Δv gegen 0 und Einführung einer dritten Dimension z mit einer Verschiebung um Δw gilt für die dreidimensionale Verschiebungs-Dehnungs-Beziehung:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{und} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad . \quad (2.13)$$

In Matrix-Schreibweise lässt sich die dreidimensionalen Verschiebungs-Dehnungs-Beziehung ausdrücken durch

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad . \quad (2.14)$$

Der Differentialoperator \mathbf{L} , der die Beziehung zwischen den Dehnungen und Verschiebungen beschreibt, ist definiert als

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.15)$$

Prinzip der virtuellen Verschiebung

Das Prinzip der virtuellen Verschiebung (auch Prinzip der virtuellen Arbeit genannt) wird anhand der Struktur in Abbildung 2.2 gezeigt. Die Struktur wird an der Fläche S_u fest eingespannt und durch unterschiedliche Kräfte belastet. Kräfte, die auf das gesamte Vo-

lumen oder auf einzelne Volumenelemente wirken, werden Volumenkräfte F^B bezeichnet. Durch die Einspannung S_u und Kräfte auf die Oberfläche der Struktur S_b wird die Struktur mit den Flächenkräften F^{S_u} beziehungsweise F^{S_b} belastet. Wird die Fläche, auf die eine Kraft wirkt, infinitesimal klein, kann die Belastung als eine konzentrierte Kraft R^i auf einen einzelnen Punkt angesehen werden. Das dritte newtonsche Gesetz [NMM29]

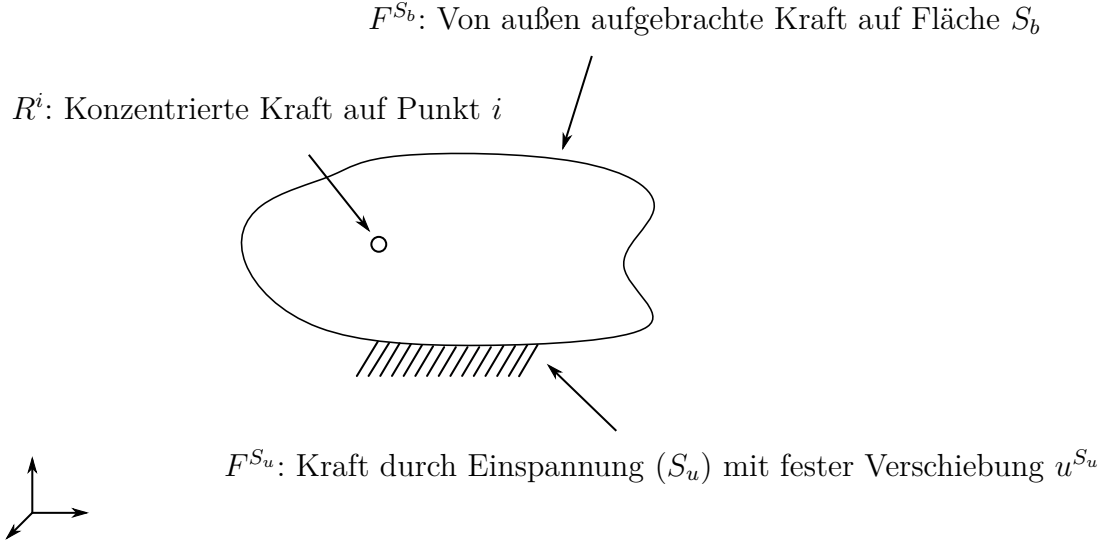


Abbildung 2.2: Struktur unter Belastung mit fester Einspannung

besagt, dass alle Kräfte immer paarweise auftreten und so jede auf einen Körper wirkende Kraft auch eine Reaktionskraft haben muss. Für das Beispiel aus Abbildung 2.2 bedeutet dies (ohne Berücksichtigung der konzentrierten Kräfte), dass die innere virtuelle Arbeit gleich der äußeren virtuellen Arbeit sein muss:

$$\underbrace{\int_V \{\delta \boldsymbol{\epsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV}_{\delta W_i} = \underbrace{\int_V \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}^B\} dV + \int_S \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}^S\} dS}_{\delta W_a} . \quad (2.16)$$

Gleichung 2.16 zeigt, dass die gesamte innere virtuelle Arbeit δW_i gleich der äußeren virtuellen Arbeit δW_a ist. Das Symbol δ wird verwendet, um virtuelle Verschiebungen oder die virtuelle Arbeit zu beschreiben. $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ ist die aus der Gleichung 2.14 bekannte Dehnungsmatrix und $\boldsymbol{\sigma}$ die im Körper auftretende Spannungsmatrix. Die virtuellen Verschiebungen werden durch $\delta \mathbf{u}$ beschrieben. Je nachdem welche Art von äußeren Kräfte auf den Körper einwirken kann Gleichung 2.16 erweitert werden. Unter Annahme von konzentrierten Kräften ergibt sich

$$\delta W_a = \int_V \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}^B\} dV + \int_S \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}^S\} dS + \sum_i \{\mathbf{u}\}^T \mathbf{R}_i . \quad (2.17)$$

Gleichungen der Finiten Element Methode

In der FEM wird das zu betrachtende Gebiet in einzelne kleine diskrete Elemente zerlegt, die für lineare Elemente miteinander verbunden sind. Das bedeutet, dass sie nicht nur an ihren Eckpunkten, sondern auch entlang ihrer Kanten oder Flächen miteinander verbunden sind. Um einen Zusammenhang zwischen den Knotenverschiebungen $\tilde{\mathbf{u}}$ der einzelnen Elemente mit den tatsächlichen Verschiebungen \mathbf{u} zu bestimmen, wird eine lokale Interpolationsmatrix \mathbf{H} eingeführt. \mathbf{H} wird in der Literatur auch als Ansatzfunktion bezeichnet:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{u}} . \quad (2.18)$$

Die Beziehung aus Gleichung 2.18 gilt auch für die Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\dot{\mathbf{u}} \approx \mathbf{H}^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{u}} \approx \mathbf{H}^T \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} . \quad (2.19)$$

Eingesetzt in Gleichung 2.14 ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.20)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \mathbf{LH}^T . \quad (2.21)$$

Für die Gleichgewichtsgleichung 2.16 und 2.17 ist die innere und äußere virtuelle Arbeit die Summe der virtuellen Arbeiten aller finiten Elemente m :

$$\begin{aligned} \sum_m \int_{V_m} \{\delta \boldsymbol{\epsilon}_m\}^T \{\boldsymbol{\sigma}_m\} dV_m &= \sum_m \int_{V_m} \{\delta \mathbf{u}_m\}^T \{\mathbf{f}_m^B\} dV_m \\ &+ \sum_m \int_{S_{m,n}} \{\delta \mathbf{u}_m\}^T \{\mathbf{f}_m^S\} dS_{m,n} + \sum_i \{\mathbf{u}\}^T \mathbf{R}_i . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dabei ist $m = 1, 2, \dots, k$ mit k als maximale Anzahl der Elemente und $S_{m,n}$ beschreibt die jeweilige Elementfläche, die Teil der Oberfläche des gesamten Körpers S ist. Für Elemente, die komplett von anderen Elementen umgeben sind, gibt es keine solche Fläche. Durch Einsetzen von Gleichung 2.5 und Gleichung 2.21 kann Gleichung 2.22 umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^T \left[\sum_m \int_{V_m} \mathbf{B}_m^T \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m dV_m \right] \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{u}}^T \left[\sum_m \int_{V_m} \mathbf{H}_m^T \mathbf{f}_m^B dV_m \right. \\ &+ \sum_m \int_{S_{m,n}} \mathbf{H}^{S_m T} \mathbf{f}^{S_m} dS_m \\ &\left. - \sum_m \int_{V_m} \mathbf{B}_m^T \boldsymbol{\sigma}_m^I dV_m + \mathbf{R}_c \right] . \end{aligned} \quad (2.23)$$

\mathbf{R}_c sind die auf einzelne Knotenpunkte konzentrierten Kräfte. Gleichung 2.23 zeigt die Bewegungsgleichung für den statischen Lastfall:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.24)$$

mit der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \sum_m \int_{V_m} \mathbf{B}_m^T \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m dV_m \quad (2.25)$$

und den Kräften

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_m \int_{V_m} \mathbf{H}_m^T \mathbf{f}_m^B dV_m \\ &+ \sum_m \int_{S_{m,n}} \mathbf{H}^{S_m T} \mathbf{f}^{S_m} dS_m \\ &- \sum_m \int_{V_m} \mathbf{B}_m^T \boldsymbol{\sigma}_m^I dV_m + \mathbf{R}_c \end{aligned} \quad (2.26)$$

bzw.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^B + \mathbf{F}^S - \mathbf{F}^I + \mathbf{R}^C . \quad (2.27)$$

\mathbf{F}^B sind die Volumenkräfte, \mathbf{F}^S die Flächenkräfte, \mathbf{F}^I die Initialkräfte und \mathbf{R}^C die Kräfte auf einzelne Knotenpunkte. Gleichung 2.26 geht davon aus, dass es sich um einen statischen Lastfall handelt, bei dem die Kraft sich über die Zeit nicht ändert. Um den Zustand eines sich zeitlich ändernden Lastfalls zu beschreiben, müssen die Kräfte durch ein dynamisches Problem dargestellt werden. Laut [Bat06] können unter Zuhilfenahme des d'Alembert's Prinzips die Trägheitskräfte als Teil der Volumenkraft darstellt werden

$$\mathbf{F}^B = \sum_m \int_{V_m} \mathbf{H}_m^T [\mathbf{f}_m^B - \rho_m \mathbf{H}_m \ddot{\mathbf{u}}] dV_m . \quad (2.28)$$

Damit erweitert sich Gleichung 2.24 zu

$$\left[\sum_m \int_{V_m} \rho_m \mathbf{H}_m^T \mathbf{H}_m dV_m \right] \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.29)$$

bzw.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} . \quad (2.30)$$

Gleichung 2.30 beschreibt das grundlegende Problem der FEM für den linear elastischen Fall und stellt die Bewegungsgleichung in der Strukturdynamik ohne Beachtung der Dämpfung dar. \mathbf{M} wird in der Literatur als Massenmatrix und \mathbf{K} als Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Durch Aufstellen der Massen- und Steifigkeitsmatrix für ein Element kann durch Aufsummieren die Bewegungsgleichung für die gesamte Struktur aufgebaut werden:

$$\mathbf{K}_m = \int_{V_m} \mathbf{B}_m^T \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m dV_m \quad (2.31)$$

und

$$\mathbf{M}_m = \int_{V_m} \rho_m \mathbf{H}_m^T \mathbf{H}_m dV_m . \quad (2.32)$$

Die Gesamt-Steifigkeits- und -Massenmatrix lässt sich durch Aufaddieren über alle Elemente ermitteln durch:

$$\mathbf{K}_{glob} = \sum_m \mathbf{K}_m \quad (2.33)$$

und

$$\mathbf{M}_{glob} = \sum_m \mathbf{M}_m . \quad (2.34)$$

2.1.2 Tetraeder Element

Die Definition isoparametrischer finiter Elemente erfordert die Formulierung einer Interpolationsmatrix, die die lokalen Koordinaten und Verschiebungen von Elementen im globalen Koordinatensystem beschreibt. In diesem Abschnitt wird neben einer Vielzahl von Elementvarianten speziell auf das lineare Tetraeder-Element eingegangen, da es später in der automatisierten Designanpassung Verwendung findet. Die Grundlage bilden Element-Formulierungen, die ähnlich denen in der Optimierungssoftware OptiStruct von Altair verwendet werden. Es ist üblich, dass die exakten Elementformulierungen kommerzieller Software nicht öffentlich verfügbar sind.

Steifigkeitsmatrix für Tetraeder-Elemente

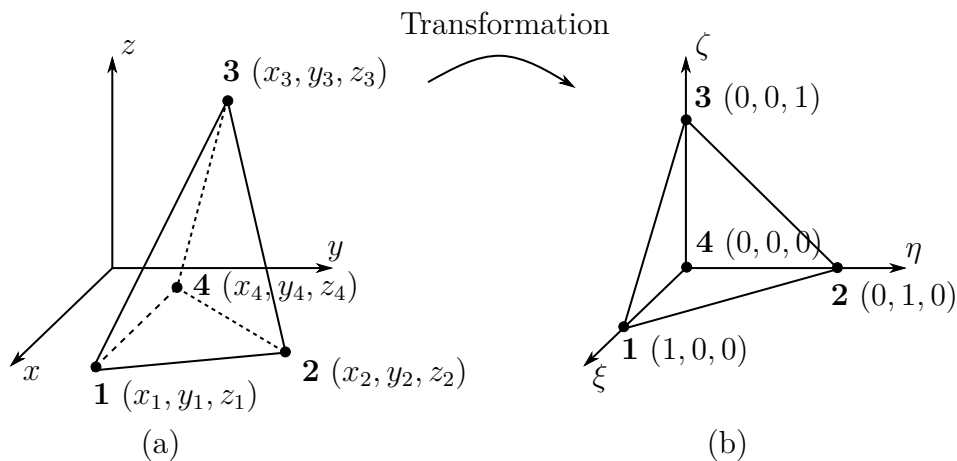


Abbildung 2.3: lineares Tetraeder-Element im globalen (a) und lokalen (b) Koordinatensystem

Die allgemeine Formulierung der Steifigkeitsmatrix für ein einzelnes Element ist durch Gleichung 2.31 definiert. Zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrix für lineare Tetraeder-Elemente muss entsprechend die \mathbf{B} -Matrix für Tetraeder bestimmt werden. Abbildung 2.3 zeigt ein allgemeines lineares Tetraeder-Element in einem globalen x, y, z Koordinatensystem (a) und in einem lokalen ξ, η, ζ -Koordinatensystem (b). Die Umrechnung von

lokalen Elementkoordinaten in globale Koordinaten kann beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} x &= x_4 + (x_1 - x_4)\xi + (x_2 - x_4)\eta + (x_3 - x_4)\zeta \\ y &= y_4 + (y_1 - y_4)\xi + (y_2 - y_4)\eta + (y_3 - y_4)\zeta \\ z &= z_4 + (z_1 - z_4)\xi + (z_2 - z_4)\eta + (z_3 - z_4)\zeta \end{aligned} \quad (2.35)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{Bmatrix} + \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \quad (2.36)$$

\mathbf{J} ist in der Literatur bekannt als Jacobi-Matrix [Kö06], benannt nach dem deutschen Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi, oder auch als Funktionalmatrix oder Ableitungsmatrix:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_1 - x_4 & x_2 - x_4 & x_3 - x_4 \\ y_1 - y_4 & y_2 - y_4 & y_3 - y_4 \\ z_1 - z_4 & z_2 - z_4 & z_3 - z_4 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Eine Zerlegung von \mathbf{J} in seine Bestandteile liefert:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Nach [CMPW01] ist \mathbf{B} definiert als

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix muss neben der \mathbf{B} -Matrix auch die \mathbf{C} -Matrix des Tetraeders bestimmt werden. In dieser Dissertation kommt ein rein isotropes Material zum Einsatz (Aluminium), wodurch für \mathbf{C} die Gleichung 2.11 verwendet werden kann:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.40)$$

Da \mathbf{C} für ein isotropes Material konstant über das gesamte Element ist, vereinfacht sich Gleichung 2.31 zu

$$\mathbf{K}_m = V_m \mathbf{B}_m^T \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m. \quad (2.41)$$

Das Volumen V_m eines Tetraeders kann mit Hilfe des Spatproduktes berechnet werden:

$$V_m = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{bmatrix} \right|. \quad (2.42)$$

Mit Gleichung 2.41 kann die Steifigkeitsmatrix für ein einzelnes Tetraeder-Element bestimmt werden. Zur Bestimmung der globalen Steifigkeitsmatrix für eine gesamte FE-Struktur müssen die einzelnen Steifigkeitsmatrizen der Elemente aufaddiert werden. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{glob} = \sum_m \mathbf{K}_m \quad (2.43)$$

ist stets eine *positiv-semidefinite* Matrix, die spärlich besetzt ist.

Massenmatrix für Tetraeder-Elemente

Die Massenmatrix beschreibt eine diskrete Darstellung einer kontinuierlichen Massenverteilung. Wie die Steifigkeitsmatrix wird die Massenmatrix elementweise in lokalen Koordinaten aufgestellt. Anschließend werden diese in das globale Koordinatensystem transformiert und in eine globale Massenmatrix zusammengefügt. Mit Gleichung 2.32 wird eine optimale Masseverteilung für die Finite Element Methode beschrieben. Diese Methode wird in der Literatur als *Consistent Mass Matrix* bezeichnet [CMPW01]. Da sich die Rechengrundlagen in dieser Dissertation an dem Vorgehen der kommerziellen Software OptiStruct von Altair ausrichten, wird hier das *Direct Mass Lumping* verwendet. Bei dieser Methode wird die Masse eines jeden Tetraeder-Elements gleichmäßig auf alle 4 Knoten verteilt. Für die Massenmatrix eines Tetraeder-Elements gilt daher

$$\mathbf{M}_m = \rho V_m \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Analog zur Steifigkeitsmatrix wird die globale Massenmatrix durch aufsummieren aller einzelnen Massenmatrizen gebildet:

$$\mathbf{M}_{glob} = \sum_m \mathbf{M}_m. \quad (2.45)$$

Ein Grund für die Verwendung der *Direct Mass Lumping* Methode ist eine nur in den Hauptdiagonalen besetzten Gesamtmassenmatrix, was sich in Rechenzeit- und Speichervorteilen zeigt. Dies gilt, solange das Modell eine gute Netzqualität aufweist. Für stark verzerrte Elemente kann diese Methode auch fehlerhafte und damit ungenaue Ergebnisse liefern.

2.1.3 Strukturdynamische Analysearten

Die aufgestellten Differentialgleichungssysteme können unterschiedliche dynamische Probleme beschreiben. Neben den klassischen linear statischen Problemen gibt es Lösungsansätze für den Wärmeübertrag (steady state und transient), Eigenmoden, lineares Beulen oder die direkte und modale Frequenzganganalyse. Für die Berechnung der Körperschallleistung in einem System muss eine modale Frequenzganganalyse gerechnet werden, die eine Berechnung der Eigenmoden einschließt.

Eigenschwingung ungedämpfter Systeme

Ein jedes System besitzt Eigenfrequenzen und Eigenformen. Wird ein System in seinen Eigenfrequenzen, sei es durch die Fahrbanerregung oder durch Schwingungen aus Verbrenner- oder E-Maschine, angeregt, hat es nicht nur einen negativen Einfluss auf den Schwingungskomfort für die Fahrzeuginsassen sondern kann auch zur Schädigung von Bauteilen führen. Die Bestimmung der Eigenmoden und Eigenvektoren (Modalanalyse) ist auch für die später folgende modale Frequenzganganalyse grundlegend, da die dynamische Antwort erzwungener Schwingungen durch die Eigenvektoren beschrieben werden. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen schwach gedämpfter Systeme kann die Dämpfung vernachlässigt werden. Die Bewegungsgleichung ohne Dämpfung lautet wie in Gleichung 2.30 gezeigt:

$$M\ddot{U} + KU = F . \quad (2.46)$$

Da es sich um die Eigenschwingung eines Systems handelt, ist es frei von äußeren Kräften, wodurch $F = 0$ ist:

$$M\ddot{U} + KU = 0 . \quad (2.47)$$

Mit dem Lösungsansatz:

$$U = \phi \sin(\omega t) \quad (2.48)$$

und für Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \omega \phi \cos(\omega t) \\ \ddot{U} &= -\omega^2 \phi \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

lautet die Bewegungsgleichung:

$$-\omega^2 \phi M \sin(\omega t) + \phi K \sin(\omega t) = 0 . \quad (2.50)$$

Gleichung 2.50 führt zu einem Eigenwertproblem mit dem die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt werden:

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 . \quad (2.51)$$

Die Eigenvektoren beschreiben die Schwingform eines Eigenmodes und können nach Belieben normiert werden. Drei geläufige Normierungen sind:

$$\begin{aligned}
 \phi_{ni} &= 1 && \text{(Ingenieurnormierung)} \\
 \phi_{nM}^T \mathbf{M} \phi_{nM} &= 1 && \text{(Massenmatrix orthonormal)} \\
 \phi_{nK}^T \mathbf{K} \phi_{nK} &= 1 && \text{(Steifigkeitsmatrix orthonormal)}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

In der Regel werden die Eigenvektoren in der FEM als \mathbf{M} -orthonormal angegeben. Die Berechnung der Eigenvektoren als \mathbf{M} -orthonormal normiert erfolgt mit

$$\phi_{nM} = \frac{\phi_n}{\sqrt{\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n}} \tag{2.53}$$

Frequency Response Analyse

Die strukturdynamischen Probleme in der Finite-Elemente-Methode werden durch eine Frequenzganganalyse, auch als **F**requency **R**esponse **F**unction (FRF) bekannt, dargestellt. Diese beschreibt die Verschiebungsantwort einer Struktur, die durch die Belastung mit einer langanhaltenden harmonischen Last konstanter Amplitude und Frequenz entsteht, typischerweise in Form einer sinus- oder cosinusförmigen Schwingung. Ein typischer Anwendungsbereich der FRF ist die NVH-Betrachtung von gesamten Fahrzeugen oder Subsystemen wie das Getriebe oder das Antriebsstrangsystem. Da es sich bei der FRF um eine lineare Analyseart handelt bleibt jede Nichtlinearität unberücksichtigt [SM08]. Die FRF lässt sich in zwei Unterarten aufteilen: die direkte und die modale Methode. Die direkte Methode löst die Bewegungsgleichung mithilfe der vollständigen Matrizen (Steifigkeits-, Dämpfungs- und Massenmatrix). Die grundlegende zu lösende Bewegungsgleichung lautet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \tag{2.54}$$

Der Verschiebungsvektor \mathbf{U} ist definiert nach

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{u}}e^{i\omega t} \tag{2.55}$$

mit $\hat{\mathbf{u}}$ als Amplitude der Verschiebung.

Die modale Methode der FRF erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird eine Modalanalyse durchgeführt, um die Eigenwerte und Eigenvektoren des gesamten Systems zu erhalten. Im zweiten Schritt wird ausgehend von einem Verschiebungsvektor \mathbf{U} , der durch die Eigenvektoren ϕ und einem modalen Beteiligungsfaktor \mathbf{b}_{mod} beschrieben ist, die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Eigenvektoren ϕ in modale Koordinaten überführt. Mit

$$\mathbf{U} = \phi \mathbf{b}_{mod} e^{i\omega t} \tag{2.56}$$

führt dies zu

$$-\omega^2 \phi^T \mathbf{M} \phi \mathbf{b}_{mod} e^{i\omega t} + i\omega \phi^T \mathbf{D} \phi \mathbf{b}_{mod} e^{i\omega t} + \phi^T \mathbf{K} \phi \mathbf{b}_{mod} e^{i\omega t} = \phi^T \mathbf{F} e^{i\omega t}. \quad (2.57)$$

Die modale Massenmatrix $\phi^T \mathbf{M} \phi$ fungiert als Einheitsmatrix, während die modale Steifigkeitsmatrix als Diagonalmatrix vorliegt. Die Wahl und Methode der Dämpfung (wie globale Dämpfung, Dämpfung durch Strukturelemente oder viskose Dämpfung) ermöglichen es, die Bewegungsgleichungen teilweise zu entkoppeln und so eine schnellere Lösung zu erzielen. Im Vergleich zur direkten Methode, bei der sämtliche Eigenmoden und somit die gesamte Bewegungsgleichung gelöst werden müssen, erlaubt die modale Frequenzganganalyse die Einbeziehung einer reduzierten Anzahl von Eigenmoden. Dies reduziert den Rechenaufwand für umfangreiche Modelle erheblich. Die Genauigkeit der Ergebnisse ist jedoch abhängig von der Anzahl der betrachteten Eigenmoden.

2.2 Grundlagen der simulationsgestützten Optimierung

Ziel eines jeden Ingenieurs in der Entwicklung ist es, ein optimales Resultat unter Einhaltung gegebener Randbedingungen zu finden. Neben langjähriger Erfahrung spielt durch den Einsatz der FEM die Strukturoptimierung eine entscheidende Rolle. Die Strukturoptimierung setzt das Vorliegen des zu lösenden Problems als ein mathematisch beschreibbares Modell voraus, welches entweder analytisch oder numerisch gelöst werden kann. In einer Zielfunktion definiert der Ingenieur das zu geforderte Ziel einer Optimierung und erreicht dieses unter Einhaltung der Randbedingungen durch die Suche des Maximums beziehungsweise Minimums dieser Funktion.

2.2.1 Optimierungsverfahren

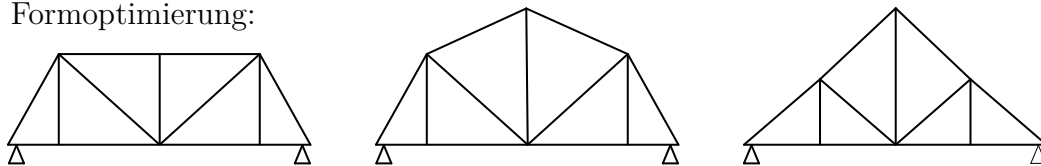
Ziel der Strukturoptimierung ist es, die Bauteileigenschaften von Strukturen hinsichtlich einer gegebenen Anforderung zu optimieren. Je nach Wahl der Anforderungen gibt es unterschiedliche Methoden, eine Optimierung zu erreichen. Nach [Sch13] kann zwischen drei Arten von Optimierungstypen unterschieden werden: Formoptimierung, Topologieoptimierung und Dimensionierung. Weitere mögliche Varianten wären die Art der Bauweise oder die Wahl der Materialeigenschaften. Abbildung 2.4 zeigt die drei Optimierungstypen nach [Sch13].

- Bei der Formoptimierung spielt die Form der Struktur eine Rolle. Um das gewünschte Verhalten der Struktur zu erhalten, wird die Außengeometrie angepasst.
- Für die Gestaltung von Strukturelemente wie Hohlräume oder Streben in der Geometrie bietet sich die Topologieoptimierung an. Hierbei wird die Lage und Anordnung von einzelnen Strukturelementen variiert.

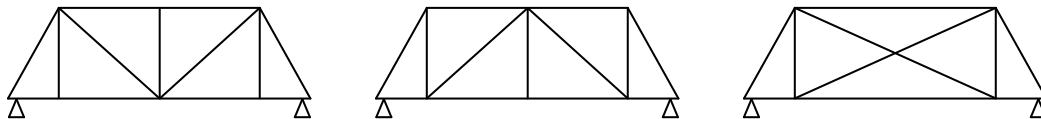
- Bei der Dimensionierung wird anhand der Dimension der Strukturelemente das Optimum gesucht. Unter Dimension der Strukturelemente wird zum Beispiel die Wandstärke, Dicke oder Höhe von Profilträger verstanden.

Ausgehend von einer Problemstellung, die als mathematisches Modell (FEM-Modell) vorliegt, wird die Formoptimierung durch ein Verschieben der Elementknoten einer Struktur realisiert. Als Entwurfsvariablen dienen daher die Koordinaten der Elementknoten, die die Oberfläche der Struktur beschreiben. Diese Art der Optimierung kommt bei der automatisierten Designanpassung zum Einsatz. Um aus einem zur Verfügung stehendem Bauraum die optimale Geometrie zu erhalten wird in der Entwicklung auf die Topologieoptimierung zurückgegriffen. Die Entwurfsvariable ist ein relativer, virtueller E-Modul für jedes Strukturelement, der im direkten Zusammenhang mit der Dichte des Materials steht. In der Topologieoptimierung wird jedem Element im Design-Bereich eine virtuelle Dichte zwischen 0 und 1 zugeordnet. Ein vollständig konvergiertes Ergebnis enthält in der Theorie nur Elemente, die entweder für das Lösen des Problems notwendig sind (Dichte = 1) oder keinen Beitrag zur Zielerreichung liefern (Dichte = 0).

Formoptimierung:



Topologieoptimierung:



Dimensionierung:

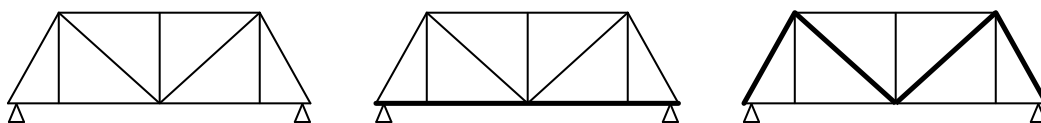


Abbildung 2.4: Arten von Optimierungstypen [Sch13]

2.2.2 Mathematische Grundlagen

Ziel einer Optimierung ist es, das Minimum einer Zielfunktion f zu finden, deren Abhängigkeit durch die Entwurfsvariablen \mathbf{x} und die Zustandsvariablen \mathbf{u} definiert ist:

$$\min f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) . \quad (2.58)$$

Die einzuhaltenden Randbedingungen für die Optimierung werden unterschieden nach Ungleichheitsrestriktionen $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$, Gleichheitsrestriktionen $h(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ oder explizite Restriktionen. Es ist üblich, die Zielfunktion so zu definieren, dass eine Minimierungsaufgabe zu lösen ist. Ein Maximierungsproblem kann mit

$$\max f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = - \min f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (2.59)$$

in ein Minimierungsproblem umformuliert werden. Gleiches gilt für die Randbedingungen, welche ausschließlich in folgender Formulierung vorliegen sollten:

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) &\leq 0 \quad i = 1, \dots, m && \text{Ungleichheitsrestriktion} \\ h_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) &= 0 \quad j = 1, \dots, p && \text{Gleichheitsrestriktion} \\ x_k^l &\leq x_k \leq x_k^u \quad k = 1, \dots, n && \text{explizite Restriktionen .} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dabei beschreibt m die Anzahl der Ungleichheitsrestriktionen, p die Anzahl der Gleichheitsrestriktionen und n die Anzahl der Designvariablen. Die Grenzen für die Designvariablen (explizite Restriktionen) werden unterschieden in obere (\mathbf{x}^u) und untere Grenzen (\mathbf{x}^l). Abbildung 2.5 zeigt ein einfaches Optimierungsproblem, dessen Ziel die Minimierung

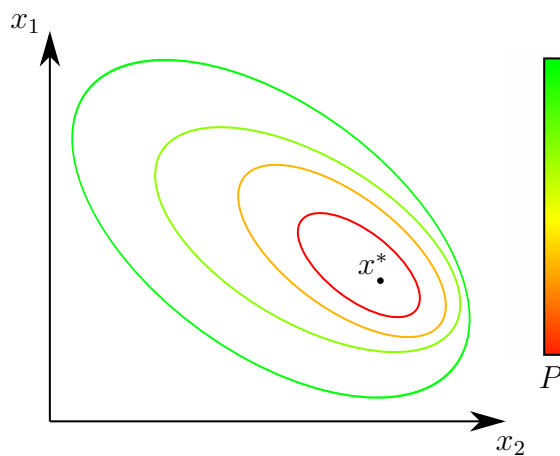


Abbildung 2.5: Einfaches Optimierungsproblem mit zwei Designvarianten

von P ist. Die Zielfunktion ist von den beiden Designvariablen x_1 und x_2 abhängig. Zur besseren Vorstellung können die Isolinien mit Höhenlinien einer Geländekarte verglichen werden. Das Minimum der Zielfunktion ist der niedrigste Punkt (Tal) und beschreibt das globale Minimum x^* . Wird das Minimum des Optimierungsproblems durch eine Restriktion von der Lösung ausgeschlossen, so ist diese Restriktion aktiv (Abbildung 2.6 (a)). Das globale Minimum liegt außerhalb des zulässigen Bereichs und ist für die Zielfunktion unter Beachtung der Restriktion keine Lösung. Liegt das globale Minimum im zulässigen Bereich der Restriktion, so ist die Ungleichheitsrestriktion nicht aktiv (Abbildung 2.6 (b)) und das globale Minimum stellt eine mögliche Lösung des Optimierungsproblem dar. Die

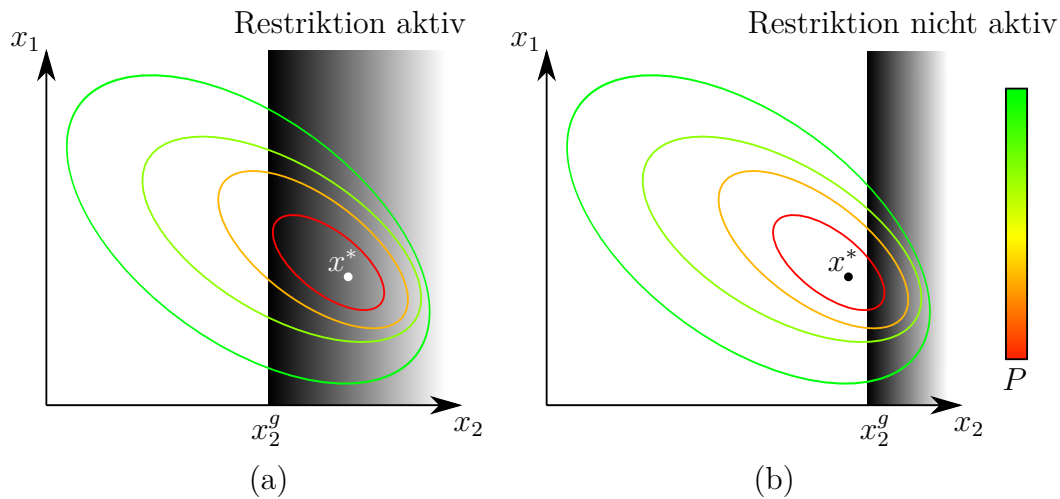


Abbildung 2.6: Aktive (a) und nicht aktive (b) Restriktion

Restriktion in Abbildung 2.6 ist definiert durch:

$$g_1(x_2) : x_2 \leq x_2^g . \quad (2.61)$$

Gleiches gilt für die Gleichheitsrestriktionen und expliziten Restriktionen.

Definition eines Optimums

Voraussetzung für eine Optimierung ist die Existenz eines Optimums und das Vorliegen der Zielfunktion als eine stetige und differenzierbare Funktion. Damit stellt das Optimum einen stationären Punkt dar, der durch ein zu null werden der Ableitung der Zielfunktion definiert ist. Um zu beweisen, dass es sich beim Optimum nicht um einen Terrassenpunkt handelt, ist eine zweite Bedingung (Hesse-Matrix) notwendig. Diese Annahme gilt für den Fall, dass es sich um ein unbeschränktes Optimierungsproblem handelt. Der Gradient der Zielfunktion ist definiert durch

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} . \quad (2.62)$$

Für die Hesse-Matrix gilt:

$$\mathbf{H}(x^*) = \nabla \nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Ist die Hesse-Matrix positiv-definit für die vorliegende Zielfunktion und sind damit alle Eigenwerte größer als null, so ist die Zielfunktion in alle Richtungen positiv gekrümmt und kann als hinreichende Bedingung für ein Optimum angesehen werden [Har14].

Globales und lokales Minimum

Bisher wurde davon ausgegangen, dass die Zielfunktion nur ein einzelnes Minimum besitzt, was damit automatisch auch das globale Minimum ist. Im Allgemeinen treten in Funktionen mehrere lokale Minimas auf, von denen nur eines das globale Minimum darstellt. Abbildung 2.7 zeigt ein einfaches Optimierungsproblem mit mehreren Minima. Ei-

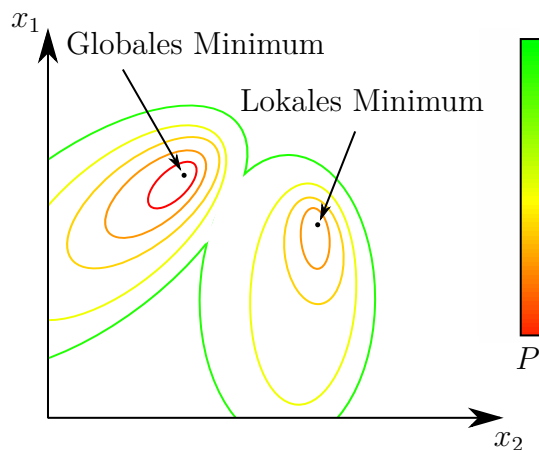


Abbildung 2.7: Optimierungsproblem mit mehreren Minima

ne Möglichkeit ein lokales Minimum von einem globalen Minimum zu unterscheiden ist die Beachtung der Konvexität von Funktionen. Diese Methode findet ihre vollständige Erklärung in [Sch13]. In der kommerziellen Software OptiStruct von Altair wird ein Algorithmus verwendet, der nicht näher beschrieben wird. Daher wird in diesem Kapitel nicht weiter auf die Methoden der Unterscheidung der Minima eingegangen. Bei der in der automatisierten Designanpassung verwendete Suchrichtungsmethode handelt es sich um eine lokale Methode, wodurch rein lokale Minima und nur durch Zufall ein globales Minimum gefunden werden kann. Abhängig vom Startpunkt der Optimierung wird ein lokales oder globales Minimum identifiziert - es liefert damit immer nur das nächstgelegene Optimum.

Numerische Optimierungsalgorithmen

Mit der Optimierung soll ein globales Minimum x^* unter Beachtung der Restriktionen gefunden werden (Abbildung 2.8). Ausgehend vom aktuellen Stand der Optimierung $x^{(i)}$ wird in einem iterativen Verfahren der nächste Schritt $x^{(i+1)}$ ermittelt. Die Schrittweite und -richtung zwischen $x^{(i+1)}$ und $x^{(i)}$ wird durch einen Optimierungsalgorithmus errechnet:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \Delta x^{(i+1)} . \quad (2.64)$$

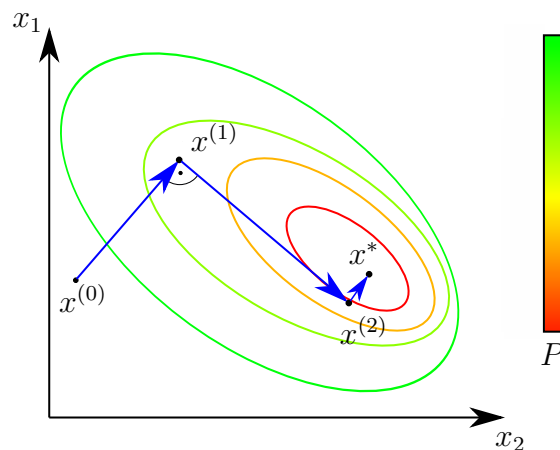


Abbildung 2.8: Optimierungsproblem mit mehreren Minimas

Methode des steilsten Abstiegs

Innerhalb der Mehrdimensionalen Optimierung ist die Methode des steilsten Abstiegs (deepest descent) ein Verfahren 1-ter Ordnung [Sch13]. Die Suchrichtung für das Optimum erfolgt entlang des steilsten Abstiegs, wie es der Name sagt. Um die Suchrichtung zu finden, wird der negative Gradient der Zielfunktion gebildet:

$$\mathbf{p}^{(i)} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(i)})}{\partial x_1^{(i)}} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(i)})}{\partial x_2^{(i)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(i)})}{\partial x_n^{(i)}} \end{pmatrix} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) . \quad (2.65)$$

i steht hierbei für die aktuelle Iteration der Optimierung. Der Optimierungsalgorithmus aus Gleichung 2.64 lautet:

$$\Delta \mathbf{x}^{(i+1)} = \alpha^{(i)} \mathbf{p}^{(i)} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \alpha^{(i)} \mathbf{p}^{(i)} . \quad (2.67)$$

Beginnend am Punkt $\mathbf{x}^{(i)}$ läuft die Suche in Richtung $\mathbf{p}^{(i)}$ ab, bis ein Minimum am Punkt $\mathbf{x}^{(i+1)}$ gefunden wird. An diesem Punkt gilt nach [Har14]

$$\mathbf{p}^{(i)T} f(\mathbf{x}^{(i+1)}) = 0 . \quad (2.68)$$

Die Suchrichtungen zweier aufeinanderfolgender Iterationen stehen damit immer senkrecht aufeinander. Abbildung 2.8 zeigt den Ablauf einer Optimierung nach dem Verfahren des steilsten Abstiegs. Die Schwachstelle dieser Methode zeigt sich bei schmalen Tälern, die zu einer Zick-Zack-Suchrichtung und damit zu unzähligen Iterationen führt [Sch13]. Weitere Details, Einschränkungen und Möglichkeiten der Methode des steilsten Abstiegs und auch andere Suchverfahren werden in [Sch13] und [Har14] aufgeführt. Im Rahmen dieser Dissertation wird in der automatisierten Designanpassung auf die einfache Variante der Methode des steilsten Abstiegs zurückgegriffen.

2.2.3 Sensitivitätsanalyse

Gradienten-basierte Optimierungsalgorithmen basieren - wie der Name sagt - auf den Gradienten der Zielfunktion $\frac{df(\mathbf{x})}{dx}$, wie auch den Gradienten der Restriktionen $\frac{dh(\mathbf{x})}{dx}$ und $\frac{dg(\mathbf{x})}{dx}$. Dieses Verfahren wird in der Literatur als Sensitivitätsanalyse bezeichnet - die Gradienten als Sensitivitäten. Diese geben an, welchen Einfluss Knotenverschieben in der Formoptimierung auf das Ziel beziehungsweise die Restriktionen hat. In der automatisierten Designanpassung werden Knoten anhand ihrer drei Freiheitsgrade (x-, y-, z-Richtung) so verschoben, dass eine optimale Struktur für das gegebene Problem erreicht wird. Die dargestellte Sensitivitätsanalyse basiert auf den Arbeiten von [Isr15] und [HG86].

In der numerischen Sensitivitätsanalyse werden die Gradienten mit Hilfe der finiten Differenzen Methode durch lösen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen bestimmt. Zur Auswertung ist eine vollständige Systemanalyse notwendig, was zu einer hohen Rechenzeit führt. Für kleine, lineare Probleme mit wenigen Optimierungsvariablen kann die numerische Sensitivitätsanalyse verwendet werden. Genauere Erklärung findet sich in [Isr15]. Handelt es sich um größere lineare oder nichtlineare Probleme, wird auf die analytische oder semianalytischen Sensitivitätsanalyse zurückgegriffen. Dabei wird der Gradient analytisch oder teilweise analytisch ermittelt. Die Gradienten bestehen aus der totalen Ableitung der Antwortfunktion $\mathbf{A}(x, \mathbf{u})$ nach den Designvariablen $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{n_D}]^T$ und sind abhängig von den Strukturverschiebungen $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{n_D}]^T$. Die Ableitung der Antwortfunktion nach den Optimierungsvariablen führt unter Berücksichtigung der Kettenregel zu:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} . \quad (2.69)$$

Die Ableitung $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$ der Verschiebungen \mathbf{u} nach der Designvariable \mathbf{x} können aufgrund ihrer Abhängigkeit zueinander nicht explizit berechnet werden. Nach [Isr15] gibt es zwei gängige Verfahren, um dieses Problem zu lösen: Die direkte Differentiation und das Ad-

jungiertenverfahren. Als Beispiel wird die diskrete lineare Strukturgleichung verwendet (siehe Gleichung 2.24):

$$S = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F} = 0 . \quad (2.70)$$

Handelt es sich um eine Formoptimierung, so ist die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und auch der Lastvektor \mathbf{F} abhängig von der Designvariable \mathbf{x} . Für die lineare Strukturgleichung in Abhängigkeit von der Designvariable gilt:

$$S = \mathbf{K}(x)\mathbf{u} - \mathbf{F}(x) = 0 . \quad (2.71)$$

Direkte Sensitivitätsanalyse

In der direkten Sensitivitätsanalyse wird auf Gleichung 2.69 zurückgegriffen. Dies führt für Gleichung 2.71 zu:

$$\frac{dS}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = 0 . \quad (2.72)$$

Für die Ableitung $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}$ gilt:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} . \quad (2.73)$$

Für die Ableitung $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}}$ gilt:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K} . \quad (2.74)$$

Gleichung 2.73 und 2.74 eingesetzt in Gleichung 2.72 ergibt:

$$\frac{dS}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = 0 . \quad (2.75)$$

Damit kann $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$ gelöst werden mit:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} \right) . \quad (2.76)$$

Durch das lineare Strukturverhalten gilt $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{x}}$ und $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}$. Ein Umstellen der Gleichung 2.76 zeigt eine Analogie zu der, aus der FEM bekannten, Strukturgleichung 2.71:

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} - \boldsymbol{\theta} = 0 . \quad (2.77)$$

Der ursprüngliche Lastvektor \mathbf{F} wird als Pseudolastvektor $\boldsymbol{\theta}$ bezeichnet:

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} . \quad (2.78)$$

Gleichung 2.76 eingesetzt in Gleichung 2.69 führt zu:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} \right) . \quad (2.79)$$

Zur Lösung des Gradienten der Systemantwort muss der Pseudolastvektor $\boldsymbol{\theta}$ berechnet werden. Der erste Teil des Vektors beschreibt den Gradienten des Lastvektors auf die Designvariable. In den meisten Fällen hat die Designvariable keinen Einfluss auf den Lastvektor, wodurch dieser Ausdruck vernachlässigt werden kann. Der zweite Teil des Vektors ist der Gradient der Steifigkeitsmatrix, der direkt gelöst werden kann. [Har14] stellt verschiedene Verfahren zur Lösung der Differentiation dar. Die Lösung des Pseudolastvektors muss für jede Designvariable einzeln durchgeführt werden, wodurch der Rechenaufwand mit der Anzahl der Designvariablen steigt. Die direkte Sensitivitätsanalyse ist somit nur für Optimierungen sinnvoll, die eine geringe Anzahl an Designvariablen aufweisen. Wenn die Anzahl der Randbedingungen oder die Anzahl der Systemantworten höher ist als die Anzahl der Designvariablen, kann es praktikabel sein, die direkte Sensitivitätsanalyse bei einer hohen Anzahl von Designvariablen zu verwenden. Nach dem Lösen des Pseudolastvektors muss dieser mit der inversen der Steifigkeitsmatrix multipliziert werden. Der Rechenaufwand für die Inverse der Steifigkeitsmatrix wird in der Literatur als sehr aufwändig angesehen und sollte bei großen Modellen vermieden werden.

Adjungierte Sensitivitätsanalyse

Bei der direkten Sensitivitätsanalyse wird nach Bestimmen des Pseudolastvektor $\boldsymbol{\theta}$ der Term $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1}$ gelöst. Dieser Term wird in der Literatur als $\boldsymbol{\lambda}$ bezeichnet. Erfolgt die Berechnung in umgekehrter Reihenfolge, so wird von der adjungierten Sensitivitätsanalyse gesprochen. Gleichung 2.79 lässt sich schreiben als

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{x}} = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta \mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1}}_{\boldsymbol{\lambda}} \underbrace{\left(\frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{x}} - \frac{\delta \mathbf{K}}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{u} \right)}_{\boldsymbol{\theta}} . \quad (2.80)$$

In der adjungierten Methode wird der Anteil $\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\theta}$ durch Verwendung der Lagrange-Methode bestimmt. Durch Hinzuaddieren von Nulltermen kann der Gradient der Antwortfunktion vereinfacht berechnen werden. Nullterme sind Terme, die selbst bei Änderung der Designvariable stets 0 ergeben. Nach [Har14] können diese Terme zu der ursprünglichen Gleichung der Antwortfunktion hinzuaddiert werden, ohne einen Einfluss auf diese zu haben. Selbiges gilt auch für die Gradienten der Antwortfunktion. Die Strukturgleichung aus 2.70 stellt solch einen Nullterm dar. Eine Multiplikation mit einem beliebigen Faktor $\boldsymbol{\lambda}$ hat keine Auswirkung auf das Ergebnis der Gleichung. Der Nullterm für Verwendung der Lagrange-Methode lautet:

$$\boldsymbol{\lambda} (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}) = 0 . \quad (2.81)$$

Wird dieser Term zur Antwortfunktion hinzuaddiert ergibt sich:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}) . \quad (2.82)$$

Für den Gradienten der Antwortfunktion gilt:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{x}} = \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta\mathbf{x}} + \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda} \left(\frac{\delta\mathbf{F}}{\delta\mathbf{x}} - \frac{\delta\mathbf{K}}{\delta\mathbf{x}} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \right). \quad (2.83)$$

Sortiert nach $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{x}} = \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta\mathbf{x}} + \left(\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta\mathbf{u}} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{K} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda} \left(\frac{\delta\mathbf{F}}{\delta\mathbf{x}} - \frac{\delta\mathbf{K}}{\delta\mathbf{x}} \mathbf{u} \right). \quad (2.84)$$

Ziel der adjungierten Methode ist es, $\boldsymbol{\lambda}$ so zu definieren, dass

$$\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta\mathbf{u}} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{K} = 0 \quad (2.85)$$

und damit $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$ aus der Gleichung gestrichen werden kann. Mit

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta\mathbf{u}} \quad (2.86)$$

gilt für den Gradienten der Antwortfunktion

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{x}} = \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta\mathbf{x}} + \mathbf{K}^{-1} \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta\mathbf{u}} \left(\frac{\delta\mathbf{F}}{\delta\mathbf{x}} - \frac{\delta\mathbf{K}}{\delta\mathbf{x}} \mathbf{u} \right). \quad (2.87)$$

Während bei der direkten Sensitivitätsanalyse der Pseudolastvektor für jede Designvariable bestimmt werden muss, bietet die adjungierte Methode die Möglichkeit, unabhängig von der Anzahl der Designvariablen den Gradienten der Antwortfunktion zu bestimmen. Es muss lediglich die adjungierte Variable $\boldsymbol{\lambda}$ für jede Antwortfunktion bestimmt werden. Die adjungierte Sensitivitätsanalyse eignet sich für Optimierungsprobleme, die mit einer Vielzahl von Designvariablen, aber einer geringen Anzahl an Antwortfunktionen oder Restriktionen definiert werden kann.

2.3 Grundlagen der Körperschallakustik

Durch die Einführung neuer Antriebs- und Mobilitätskonzepte wie Elektromobilität, Wasserstoffantrieb oder autonomes Fahren steigen die Anforderungen der Kunden an die Akustik im Innenraum von Automobilen. Neben den Abrollgeräuschen, die über das Fahrwerk und die Karosserie in den Fahrzeuginnenraum übertragen werden, haben die Anregungen der Verbrennungsmaschine oder der elektrischen Antriebseinheit Einfluss auf den Komfort eines Fahrzeugs. Während bei Sportfahrzeugen ein sportlicher Klang der Verbrennungsmaschine vom Kunden gewünscht wird, ändern sich durch die Verbreitung der Elektromobilität und damit einhergehend des autonomen Fahrens die Anforderungen eines Kunden an den Komfort. Ziel in der heutigen Entwicklung von Fahrzeugen ist es, akustische Auffälligkeiten zu vermeiden.

2.3.1 Leistungsbasierte Körperschallakustik im Automobilbau

Schwingende Strukturen strahlen ihre Energie an die umgebende Luft ab und werden von den Insassen eines Fahrzeugs als Luftschall wahrgenommen. Andererseits kann der Luftschall auch die Energie auf Strukturen übertragen. Diese Formen der Energieübertragung kann nicht nur von den Insassen als störend empfunden werden (Wahrnehmung des Luftschalls oder das Empfinden von Schwingungen durch Körperschall), sondern auch zu strukturellen Beschädigungen von Bauteilen führen. Virtuelle Methoden zur Lösung von Vibrations- und Schallproblemen werden seit den 1960er Jahren fortlaufend weiterentwickelt [HSN14]. Je nach Anwendungs- und Frequenzbereich haben sich unterschiedliche Methoden etabliert. Analysemethoden in der Schallwellenforschung werden typischerweise nicht anhand ihrer Frequenzen, sondern anhand der Anzahl von Schallwellen, die pro Dimension auftreten können, klassifiziert. Die Dimension entspricht dabei beispielsweise der Länge eines betrachteten Bauteils, über die die Schallwellen übertragen werden. Der Parameter k repräsentiert die Anzahl von Schallwellen, die entlang einer Dimension auftreten können. Eine komplette Schallwelle, die über eine gegebene Dimension auftritt, wird durch einen Faktor von $k = 2\pi$ beschrieben. Durch die Klassifizierung basierend auf der Anzahl der auftretenden Schallwellen pro Dimension wird eine differenzierte Betrachtung und Analyse von Schalleigenschaften in verschiedenen Dimensionen ermöglicht (Tabelle 2.1). Ein akustisches Phänomen, welches im unteren Frequenzband ($0 < k < \sim 20\pi$) auftritt, kann mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) oder der Methode der Boundary Elemente (BEM) dargestellt werden. Handelt es sich um ein Problem im hohen Frequenzband ($k > \sim 20\pi$) kommt die Methode der Statistical Energy Analysis (SEA) zum Einsatz. Im Übergangsbereich haben sich im Laufe der Jahre etliche Hybride Methoden entwickelt, um gezielt auf Problemstellungen eingehen zu können. Auch die immer weiter steigenden Rechenleistungen von Computern lassen den Grenzbereich von $k = 20\pi$ nur als Anhaltspunkt für die Berechnung mittels FEM oder BEM definieren. Untersuchungen von [Mar02] und darauf aufbauend [Mar08] haben gezeigt, dass die FEM in einem Bereich von $0 < k < \sim 80\pi$ mit einer Abweichung von 10 bis 15% angewendet werden kann, sofern die Elementgröße bei mindestens 6 Elementen pro Wellenlänge liegt. Die im

Frequenzbereich (FB)	Bereich	Methode	rechnerischer Aufwand
unterer FB	$0 < k < \sim 20\pi$	FEM und BEM	hoch
mittlerer FB	$\sim 10\pi < k < \sim 40\pi$	Hybrid FEM/SEA	mittel
oberer FB	$\sim 20\pi < k$	SEA	gering

Tabelle 2.1: Übersicht Frequenzbereiche, anzuwendende Methode und der rechnerische Aufwand [HSN14]

Automobilbau verwendeten Strukturen (Karosserien, Motor- oder Getriebegehäuse) sind im Verhältnis zu den auftretenden Wellenlängen klein und können durch einen passenden Diskretisierungsaufwand mit der FEM auch für höhere Frequenzen verwendet werden. Untersuchungen von [Med98], [Her12] oder [ESS⁺14] zeigen, dass die FEM zur Betrachtung von Strukturintensitäten in der Industrie Stand der Technik sind.

2.3.2 Energetische Betrachtung von Systemen

Die Wahrnehmung von Luftschallwellen beim Menschen ist nur innerhalb gewisser Grenzen und eines bestimmten Schalldrucks möglich. Je nach Alter liegt der hörbare Frequenzbereich zwischen 20 Hz und 20 kHz [Hen01]. Frequenzen, die unterhalb von 20 Hz liegen, werden Infraschall, Frequenzen die oberhalb von 20 kHz liegen Ultraschall genannt. Gleiches gilt für Vibrationen, die der Mensch spürbar als störend empfinden kann. Dieser Frequenzbereich liegt zwischen 1 bis 80 Hz. Trotz der Beschränkung auf den Frequenzbereich von hör- und fühlbaren Frequenzen handelt es sich beim Körperschall um ein umfangreiches Phänomen. Zum einen wird der Schall durch unterschiedliche Typen von Wellen übertragen, die sich wiederum je nach Medium unterscheiden, zum anderen werden Schallwellen durch eine Vielzahl von verschiedenen Medien übertragen, die auch untereinander eine Übertragung ermöglichen. Genauso Vielfältig ist auch die Methode zur Erfassung von Schall. Wird der Luftschall als Schalldruckpegel angegeben, wird für den Körperschall meist die Beschleunigung an Referenzpunkten als Indiz hergenommen. Zur genauen Bestimmung von Schall gibt es seit einigen Jahrzehnten die Bestrebung, vibroakustische Probleme mit Hilfe von Potentialen der energetischen Analyse zu bestimmen. Die energetische Betrachtung eines Systems wird durch die Bestimmung der Vektorgröße Intensität oder deren Flächenintegral, der Leistung, bestimmt. Sie sind Kennzahlen des Energieflusses in einem System. Durch die Betrachtung der Leistung werden sowohl die Kraft, als auch die Geschwindigkeit berücksichtigt, wie auch ihre Phaseninformation. Im Vergleich zur getrennten Bestimmung von Geschwindigkeiten und Kräften ermöglicht es die energetische Betrachtung die dynamische Wechselwirkung zwischen einzelnen Substrukturen vollständig zu beschreiben ([GW80a] und [FG07]). Ein weiterer Vorteil der energetischen Betrachtung ist die Einheit der Leistung unabhängig von der Art des zu übertragenden Mediums. So kann laut [GEP97] die Energieübertragung über Systemgrenzen hinweg bestimmt und nachvollzogen werden - selbst wenn es eine Interaktion zwischen Körperschall und Luftschall ist. Das Problem der energetischen Betrachtung ist die Durchführung von Messungen zur Bestimmung der Körperschalleistung. Diese werden aktuell in der Praxis auf eindimensionale Probleme reduziert, um einen Anhaltswert für die Größe und auch Richtung der Leistung oder Intensität zu bekommen [CMKH09].

2.3.3 Verschiebungsfelder zur Bestimmung der Leistung

Die Bestimmung der Leistung auf Basis von Verschiebungsfeldern beschränkt sich auf punktförmig diskrete Systeme, wie sie innerhalb dieser Dissertation vorliegen. Weitere Methoden finden sich in [May94], [Ros14] und [Mös15].

Bei Belastung eines linearen mechanischen Systems durch eine harmonische Kraft $f(t)$ stellt sich im stationären Zustand eine Systemantwort $u(t)$ ein. Unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung der Kraft φ_f gilt für die Anregung:

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t + \varphi_f) . \quad (2.88)$$

Als Systemantwort ergibt sich für die Verschiebung:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi_u) . \quad (2.89)$$

Für die Geschwindigkeit gilt:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{du(t)}{dt} = -\omega u_0 \sin(\omega t + \varphi_u) = \\ &= -v_0 \sin(\omega t + \varphi_u) = \\ &= v_0 \cos(\omega t + \varphi_v) . \end{aligned} \quad (2.90)$$

Das Produkt aus Kraft $f(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ beschreibt die Leistung $P(t)$:

$$P(t) = f(t)v(t) = f_0 v_0 \cos(\omega t + \varphi_f) \cos(\omega t + \varphi_v) . \quad (2.91)$$

Nach [Bos96] wird zur Bestimmung der momentanen Leistung $P(t)$ die Geschwindigkeit $v(t)$ aufgeteilt in einen zur Kraft gleichphasigen und einen um 90 Grad versetzten Anteil:

$$\cos(\omega t + \varphi_v) = \underbrace{\cos(\omega t + \varphi_f) \cos(\varphi_f - \varphi_v)}_{\text{in Phase}} + \underbrace{\sin(\omega t + \varphi_f) \sin(\varphi_f - \varphi_v)}_{\text{gegen Phase}} . \quad (2.92)$$

Für die momentane Leistung bedeutet dies:

$$P(t) = f(t)v(t) = f_0 v_0 \cos^2(\omega t + \varphi_f) \cos(\varphi_f - \varphi_v) + \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_f) \sin(\varphi_f - \varphi_v) . \quad (2.93)$$

$P(t)$ beschreibt die Leistung, die zu jedem Zeitpunkt t im System ist. Um die Energie zu bestimmen, die innerhalb einer Schwingdauer im System transportiert wird, wird die gemittelte Leistung \bar{P} mit

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt \quad (2.94)$$

definiert. Voraussetzung ist, dass das System mit einer konstanten Kreisfrequenz ω schwingt. Wird nun die Leistung P aus Gleichung 2.93 in Gleichung 2.94 eingesetzt, ergibt sich für die mittlere Leistung \bar{P} :

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} f_0 v_0 \left(\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_f) \cos(\varphi_f - \varphi_v) dt + \right. \\ &\quad \left. \int_0^T \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_f) \sin(\varphi_f - \varphi_v) dt \right) . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Ein Auflösen von Gleichung 2.95 zeigt, dass der zweite Teil der Gleichung gleich null ist und damit für die mittlere Leistung \bar{P} keine Rolle spielt. Zur Verdeutlichung wird hier auf Begriffe aus der Elektrotechnik zurückgegriffen. Der erste Teil der Gleichung wird als Wirkleistung bezeichnet [Mey13], während der zweite Teil als Blindleistung benannt wird [SSM75]. Für die Wirkleistung beziehungsweise aktiven Leistung gilt:

$$P_W = \frac{1}{T} f_0 v_0 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_f) \cos(\varphi_f - \varphi_v) dt \quad (2.96)$$

und damit

$$P_W = \frac{f_0 v_0}{2} \cos(\varphi_f - \varphi_v) . \quad (2.97)$$

Für die Blindleistung (reaktive Leistung) verschwindet im Mittel einer Schwingung der Term $\cos(\varphi_f - \varphi_v)$, wodurch gilt:

$$P_B = \frac{1}{T} f_0 v_0 \int_0^T \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_f) \sin(\varphi_f - \varphi_v) dt = 0 . \quad (2.98)$$

Bei der Ermittlung der durchschnittlichen Leistung hat die Blindleistung keinen Einfluss und setzt sich ausschließlich aus der aktiven Leistung zusammen. Folglich setzt sie sich aus dem Produkt der Kraft und der Geschwindigkeit und deren Phaseninformation zusammen zu:

$$P_m = P_W = \frac{f_0 v_0}{2} \cos(\varphi_f - \varphi_v) . \quad (2.99)$$

Liegen die Werte des mechanischen Schwingsystems in komplexer Form vor, so gilt für die mittlere Leistung:

$$P_m = \Re(\bar{P}) = \frac{1}{2} \Re(\bar{f}_o \bar{v}_0^*) = \frac{1}{2} \Re(\bar{f}_0^* \bar{v}_o) . \quad (2.100)$$

beziehungsweise für die reaktive Leistung:

$$P_B = \Im(\bar{P}) = \frac{1}{2} \Im(\bar{f}_o \bar{v}_0^*) = -\frac{1}{2} \Im(\bar{f}_0^* \bar{v}_o) . \quad (2.101)$$

Auf die Bestimmung der aktiven und reaktiven Leistung wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen - es wird davon ausgegangen, dass alle Werte in Amplitude und Phase vorliegen. Eine Herleitung und Beschreibung für die Bestimmung in der komplexen Form findet sich in [Ull16].

2.3.4 Dämpfungsarten

Schwingt eine Struktur, so kann auf mehreren Arten Energie dissipieren:

- innerhalb des Materials der Struktur
- an die umgebenden Strukturen, mit denen sie verbunden ist
- an das umgebende Medium

Über die Dämpfung von schwingenden Strukturen gibt es viele wissenschaftliche Arbeiten, unter anderem von [NJH91], [VB71] und [HSN16].

Materialdämpfung

Der Energieverlust im Material einer schwingenden Struktur ist abhängig von der Struktur der Moleküle und der Art und Weise, wie sich das Material verformt. Dieses Verhalten wird nach [CMKH09] durch einen komplexen Steifigkeits-Modul für stationäre harmonische Systeme definiert durch:

$$\bar{E} = E' + iE'' = E'(1 + i\frac{E''}{E'}) = E'(1 + i\eta) \quad (2.102)$$

mit

$$\eta = \frac{E''}{E'} \quad (2.103)$$

als sogenannten Verlustfaktor. E' wird als Speichermodul und E'' als Verlustmodul bezeichnet [HSN16]. Selbiges gilt für den Schubmodul G und den Kompressionsmodul B . Der Verlustfaktor η kann auch als Verhältnis der innerhalb einer Periodendauer dissipierten Energie zur elastisch wiedergewinnbaren Energie gesehen werden [CMKH09]:

$$\eta = \frac{W_{diss}}{2\pi W_{el}}. \quad (2.104)$$

Besteht die Struktur aus metallischen Werkstoffen wie Stahl oder Aluminium, lässt sich der Verlustfaktor η als ein frequenzunabhängiger Verlustfaktor beschreiben. Für viskoelastische Materialien ist es schwierig, eine genaue mathematische Modellierung zu definieren, da die dynamischen Eigenschaften frequenz- und temperatur-abhängig sind und von der Art der Verformung und der Amplitude der Belastung abhängen. Das Werkstoffverhalten wird durch eine Kombination verschiedener Modellvorstellungen dargestellt. Beispiele hierfür sind das Wiechert-Modell oder das Biot-Modell [Pet18]. In der Praxis werden Verlustfaktoren durch Messungen frequenzabhängig bestimmt und für die Simulationen verwendet.

Viskose Dämpfung

Das einfachste lineare Dämpfungsmodell ist die viskose Dämpfung. Die dabei entstehende Dämpfungskraft ist abhängig von der augenblicklichen Geschwindigkeit und auch von den Geschwindigkeiten in der Vergangenheit wie zum Beispiel bei Flüssigkeitsdämpfern. Mit zunehmender Frequenz steigt die Fläche der Hysterese und damit die durch die Dämpfung dissipierte Energie. In der Literatur gibt es eine Vielzahl von Modellen zur Beschreibung des Verlustfaktors für die viskose Dämpfung. Einfache Modelle wie das Maxwell-Modell oder das Voigt-Kelvin-Modell reichen zur vollständigen Beschreibung eines viskoelastischen Werkstoffes nicht aus. Durch die Kombination einfacher Modelle ist in den letzten Jahren eine Vielzahl komplexer Modelle zur Beschreibung viskoelastischer Werkstoffe ent-

standen [Alt12].

Fügestellendämpfung

Eine weitere Art der Dämpfung ist die Fügestellendämpfung. In der Übertragung von Schwingungen vom Antriebsstrang über die Karosserie bis zum Fahrerohr befindet sich eine Vielzahl von Verbindungsstellen. Die Fügestellen lassen sich unterteilen in feste Fügestellen (zum Beispiel Schraubverbindungen, Presspassverbindungen oder Schweißverbindungen) und sich bewegende Fügestellen (zum Beispiel Gleitführungen, Kugel- oder Rollenlager) [MG07]. Durch die Reibung zweier Strukturbauteile wird ein Teil der Energie auf makroskopischer und mikroskopischer Ebene dissipiert. Die Energieumwandlung auf beiden Ebenen kann mit unterschiedlichen Reibmodellen (nach Da Vinci, Amontons oder Coulomb) beschrieben und als lineare Methode in der FEM umgesetzt werden [Yu12].

2.3.5 Leistungsberechnung an einem Normalkraftstab

Als Referenz für eine spätere FEM-Analyse dient eine analytische Berechnung der Körperschalleistung nach [ULL16]. Abbildung 2.9 zeigt einen Normalkraftstab, der einseitig

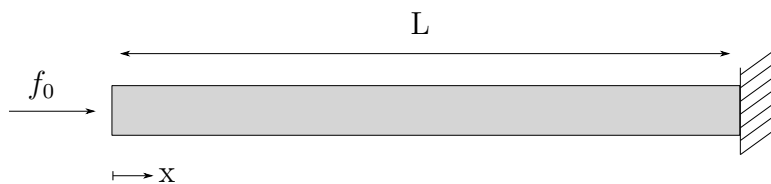


Abbildung 2.9: Normalkraftstab mit einseitiger Einspannung und Belastung f_0

eingespannt ist und am anderen Ende mit einer sinusförmig oszillierenden Kraft mit der Amplitude f_0 belastet wird. Durch die Querkontraktion kann es in Stäben zur Schallabstrahlung in das umgebende Medium kommen, weshalb die Wellen in einem Normalkraftstab als quasilongitudinal bezeichnet werden [CMKH09]. Um das Problem auf rein longitudinalen Wellen zu vereinfachen, wird eine Querkontraktion von Null angenommen. Für die longitudinale Wellenausbreitung in Stäben, deren kürzeste Diagonale in der Querschnittsfläche im Vergleich zur Wellenlänge klein ist, gilt laut [ULL16] für die Leistung p_L :

$$-\rho \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} + E \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = p_L(x, t) . \quad (2.105)$$

Die komplexe Amplitude der Longitudinalschwingung wird beschrieben durch die Dichte ρ und den Elastizitätsmodul E des Normalkraftstabes. t bezeichnet den Zeitpunkt und x den Ort der Verschiebung u . Um die Leistung zu bestimmen, muss eine Senke zur Dissipation der Energie definiert werden. Eine Dämpfung wird durch einen komplexen E-Modul (siehe Materialdämpfung Kapitel 2.3.4), eingeführt mit:

$$\hat{E} = E_0(1 + i\eta) . \quad (2.106)$$

2. Grundlagen

Das Zirkumflex $\hat{}$ beschreibt eine komplexe Variable. Der Herleitung von [Ull16] folgend, gilt für die mittlere Leistung eines Stabes:

$$P_m(x) = \frac{1}{2} S \omega \sqrt{\rho E_0} \left(|\hat{B}|^2 e^{-k_{0L} \eta x} - |\hat{A}|^2 e^{k_{0L} \eta x} - \eta |\hat{A}| |\hat{B}| \sin(k_{0L} x + \varphi_A - \varphi_B) \right) \quad (2.107)$$

mit

S	Querschnittsfläche des Stabes
ω	Kreisfrequenz einer harmonischen Schwingung
ρ	Materialdichte
E_0	Elastizitätsmodul
\hat{A}, \hat{B}	komplexe Variablen
k_{0L}	reelle Wellenzahl
η	Verlustfaktor der Materialdämpfung
φ_A, φ_B	Phasenwinkel von \hat{A} und \hat{B} .

Unter der Annahme eines Materials mit einer Materialdämpfung von null und damit $\eta = 0$ lässt sich Gleichung 2.107 vereinfachen zu:

$$P_m(x) = \frac{1}{2} S \omega \sqrt{\rho E_0} \left(|\hat{B}|^2 - |\hat{A}|^2 \right) . \quad (2.108)$$

\hat{A} und \hat{B} sind komplexe Variablen, die über Randbedingungen definiert werden. Für den in Abbildung 2.9 gezeigten Fall der Belastung eines Normalkraftstabes gilt durch die Einspannung für die Verschiebung am Punkt $x = L$:

$$\hat{u}(x = L, t) = 0 . \quad (2.109)$$

Folglich ist auch im Ausgangszustand ($t = 0$)

$$\hat{u}_0(x = L) = 0 . \quad (2.110)$$

Die zweite Randbedingung ergibt sich durch die Belastung f_0 . Für die Belastung $\hat{f}(t)$ gilt für den Normalkraftstab:

$$\hat{f}(t) = -ES \hat{\epsilon}(x = 0, t) . \quad (2.111)$$

Für den Ausgangszustand \hat{f}_0 gilt daher:

$$\hat{f}_0 = -ES \hat{\epsilon}_0(x = 0) = -ES \frac{d\hat{u}_0(x = 0)}{dx} . \quad (2.112)$$

Mit den Randbedingungen 2.111 und 2.112 können die komplexen Variablen \hat{A} und \hat{B} für den Normalkraftstab bestimmt werden:

$$\hat{A} = -\frac{i f_0 e^{i k_L L}}{2 \cos(k_L L) E S k_L} \quad (2.113)$$

und

$$\hat{B} = \frac{if_0 e^{-ik_L L}}{2 \cos(k_L L) E S k_L} \quad (2.114)$$

mit k_L als Wellenzahl der Longitudinalwelle.

\hat{A} und \hat{B} sind zeitlich und örtlich unabhängig, wodurch sie als konstant gelten. Zur Berechnung der Leistung im Normalkraftstab werden sie in Gleichung 2.107 eingesetzt.

2.4 Grundlagen der automatisierten Designanpassung

In der automatisierten Designanpassung werden zwei Modelle (Optimierungsmodell und Konstruktion, Abbildung 2.10) anhand ihrer Eigenmoden miteinander verglichen und ihrer strukturdynamische Übereinstimmung bewertet. Liegen die beiden FEM-Modelle mit koinzidenten Knotenpunkten vor, können die Knotenverschiebungen der einzelnen Eigenmoden direkt miteinander verglichen werden. In der Praxis liegen zwischen dem Optimierungsergebnis und dessen Konstruktion Designunterschiede, wodurch die Knotenpunkte nicht koinzident sind und die Knotenverschiebungen dementsprechend interpoliert werden müssen. Der Grad der Übereinstimmung der Eigenmoden wird mit Hilfe des **Modal Assurance Criterion (MAC)** berechnet. Mittels einer Sensitivitätsanalyse des MACs kann in einer Formoptimierung die Konstruktion so angepasst werden, dass sie im dynamischen Verhalten das Optimierungsergebnis darstellt.

2.4.1 Interpolation von Finite Element Daten

Zum Abgleich der Eigenvektoren zweier FEM-Modelle mit dem MAC-Wert müssen diese an identischen Knotenpunkten zur Verfügung stehen. Für kleine akademische Beispiele können die Knotenpunkte der beiden Modelle so gelegt werden, dass sie koinzident sind und damit direkt verglichen werden können. Abbildung 2.10 zeigt das FE-Modell eines Tragbocks für eine elektrische Antriebsmaschine. In (a) liegt das Optimierungsergebnis vor, welches als Designvorschlag für die spätere Konstruktion (b) gedient hat. Ein Modelllaufbau mit koinzidenten Knoten beider gesamten Geometrien ist nicht realisierbar. In der Praxis werden Bereiche genutzt, die eine identische Teilgeometrie aufweisen. Im konkreten Beispiel aus Abbildung 2.10 handelt es sich um die Bereiche, die nicht Teil der Topologieoptimierung waren, wie beispielsweise Anschraubpunkte und die Gummilagerschale. Diese Bereiche sind entscheidend für das dynamische Verhalten des Gesamtsystems.

Nearest Neighbour Interpolation

Ziel einer Interpolation ist es, die Werte, die zwischen den gegebenen diskreten Daten liegen, durch eine stetige Funktion zu berechnen. Das Verfahren *Nearest Neighbour* ist der einfachste Ansatz einer Interpolation. Während bei den anderen Verfahren die Zwischenwerte durch Gewichtungskriterien berechnet werden, wird bei dieser Methode der Zwischenwert durch den Wert des nächstgelegenen bekannten Knotenpunktes dargestellt.

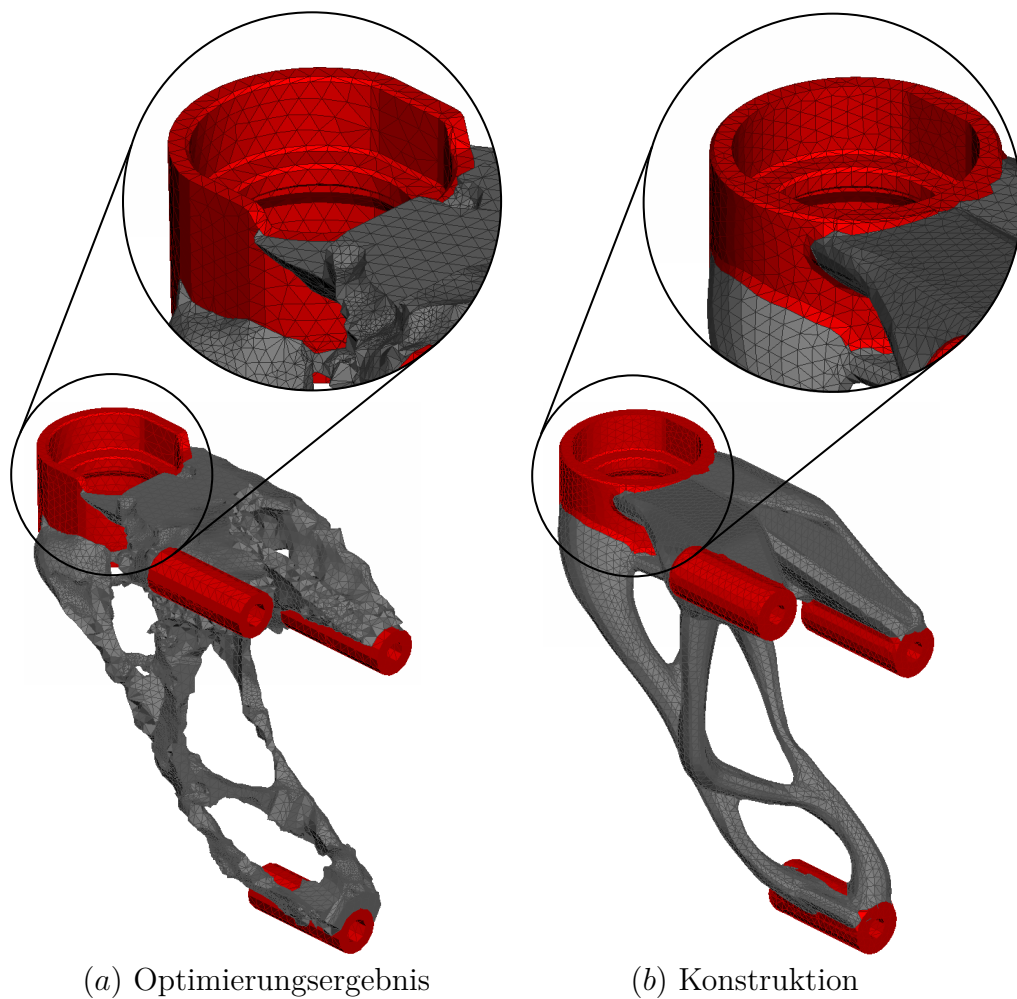


Abbildung 2.10: Vergleich des FE-Netzes des Optimierungsergebnisses und der Konstruktion

Als Beispiel für die Interpolation dient die Funktion:

$$z = -\cos(x) \sin(y) . \quad (2.115)$$

mit $x = 0 : 0,5 : 4$ und $y = x$ als Wertebereich. Abbildung 2.11 zeigt den dazugehörigen Plot. Durch die Interpolation sollen die Werte von z auf ein Netz mit dreifacher Feinheit abgebildet werden. Die Werte des nächstgelegenen bekannten Knotenpunktes werden für die umliegenden Knotenpunkte übernommen. Die durch die Interpolation berechneten Werte sind in Abbildung 2.12 zeigen das für das *nearest neighbour* Verfahren typische Stufenmuster. Der Vorteil dieser Methode liegt im geringen Rechenaufwand - zeigt aber, wie hier im Beispiel, eine Ungenauigkeit in den interpolierten Werten.

Referenzplot

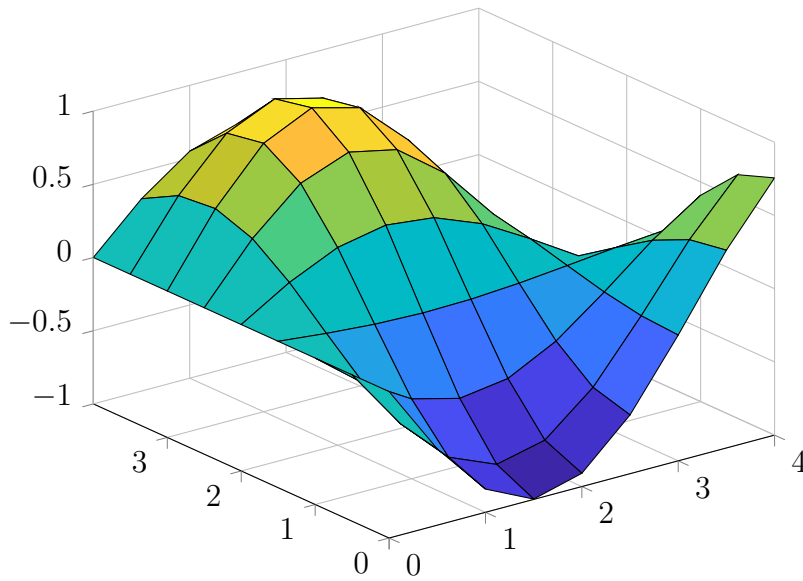


Abbildung 2.11: Plot mit Ausgangsdaten für Interpolation

Nearest-Neighbour Interpolation

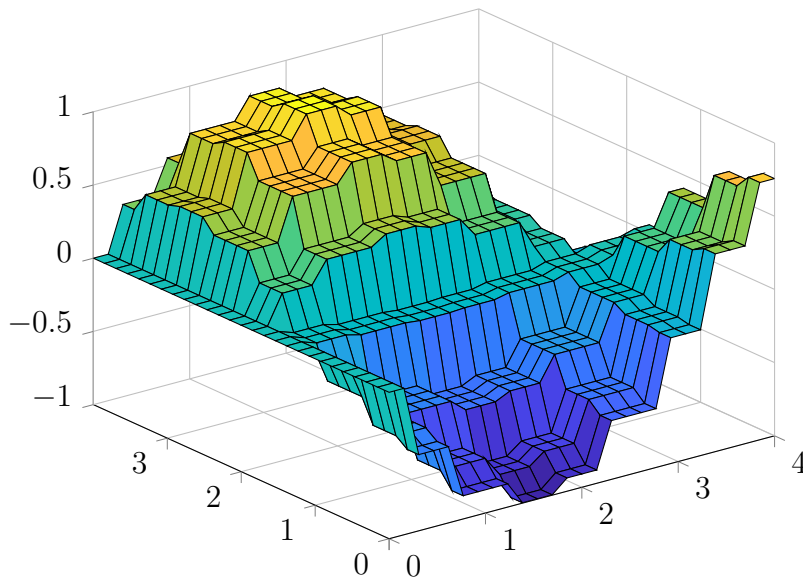


Abbildung 2.12: Interpolation nach dem *nearest neighbour* Verfahren

Linear Interpolation

Um die Genauigkeit der Interpolation zu erhöhen wurde die *lineare Interpolation* eingeführt [Dav75]. Dabei werden die bekannten Knotenpunkte durch Geraden miteinander verbunden und die Zwischenbereiche angenähert. Die *lineare Interpolation* ist eine der am häufigsten genutzten Methoden, da die Rechenzeit als gering angenommen werden kann - bei einer deutlichen Verbesserung der Genauigkeit der interpolierten Werte. Abbildung

2.13 zeigt die *lineare Interpolation* für das Beispiel.

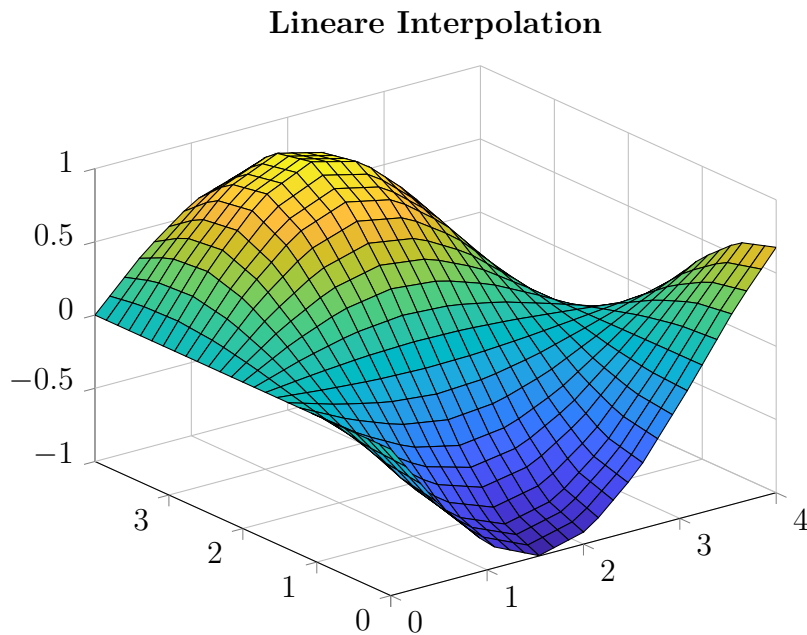


Abbildung 2.13: Interpolation nach dem *linearen* Verfahren

Spline Interpolation

Eine Erweiterung der *linearen Interpolation* ist die Interpolation durch *Splines*. Der Begriff *Spline* geht auf die Arbeiten von [Sch46] zurück. Statt einer linearen Verbindung zweier bekannter Knotenpunkten werden die Zwischenwerte durch Polynome approximiert (sogenannte Splines). Durch gesetzte Randbedingungen werden die Verbindungen zwischen den Polynomen definiert. Durch die Berechnung der Splines erhöht sich die Rechenzeit für die *Splines Interpolation* - von den drei gezeigten Methoden bildet diese das Ergebnis am besten ab. Die *Spline Interpolation* wird in Abbildung 2.14 für das Beispiel gezeigt.

2.4.2 Modal Assurance Criterion

Der **MAC**-Wert (**M**odal **A**ssurance **C**riterium) wurde 1981/82 mit den Arbeiten von [All81] und [AB82] im Bereich der experimentellen und analytischen Strukturdynamik eingeführt. Über die Jahre entstand eine Vielzahl von Variationen, die auf die unterschiedlichen Bedürfnisse der verschiedenen Anwendungsbereiche angepasst wurden. Eine Übersicht aller Varianten der MAC-Berechnungen und deren Alternativen und Erweiterungen ist in [All03] aufgeführt.

Der MAC-Wert ist ein statistischer Indikator, der angibt, in wie weit das dynamische Verhalten zweier unterschiedlicher Modelle übereinstimmen - dabei kann es sich um einen Abgleich von einer Messung mit einem Simulationsmodell, aber auch zweier Messungen handeln. Mit diesem einzigen Wert können aussagekräftige Schlüsse auf die Übereinstim-

Spline Interpolation

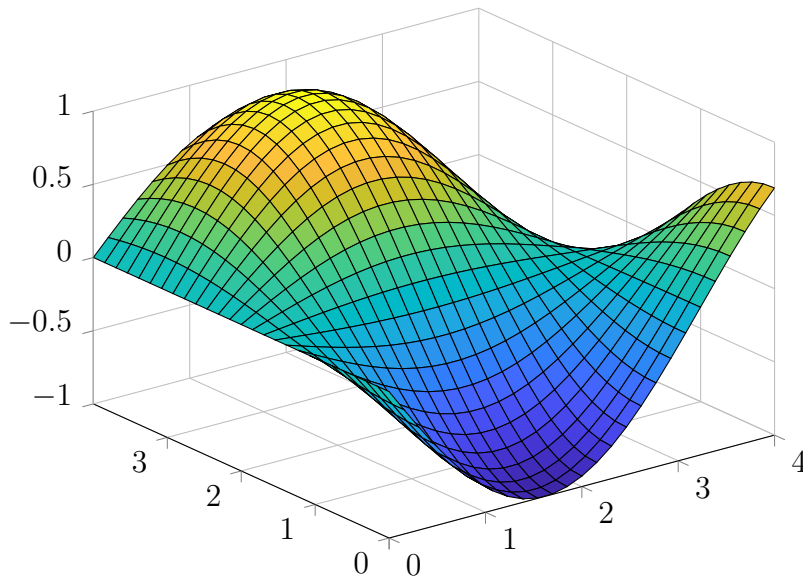


Abbildung 2.14: Interpolation nach dem *Spline*-Verfahren

mung des Strukturverhaltens gezogen werden, sofern er auf einer richtigen Anwendung basiert. Eine falsche Anwendung kann zu irreführenden Erkenntnissen führen.

Modale Vektororthogonalität

Der Ursprung des MAC-Wertes ergab sich aus der Notwendigkeit eines Qualitätsindikators für experimentelle Untersuchungen der Modalvektoren. Vorgänger des MAC-Wertes war die Bewertung der modalen Vektororthogonalität von experimentellen Modelle. In einer Messung werden die Modalvektoren bestimmt und mit Hilfe einer analytisch bestimmten Massen- oder Steifigkeitsmatrix auf ihre Orthogonalität überprüft. Die Matrizen müssen dabei die gleiche Dimension wie die Modalvektoren (Eigenformen) aufweisen:

$$\varphi_i \mathbf{M} \varphi_j = 0 \quad (2.116)$$

für den Fall, dass $i \neq j$. Ist $i = j$, bedeutet dies für die diagonalen Werte der Vektororthogonalität \mathbf{M}_d :

$$\varphi_i \mathbf{M} \varphi_i = \varphi_j \mathbf{M} \varphi_j = \mathbf{M}_d . \quad (2.117)$$

Wird von einer proportionalen Dämpfung ausgegangen, so sind alle Modalvektoren eines Systems orthogonal zu allen anderen Modalvektoren. Dies gilt, solange die Vektoren mit der zugehörigen Massen-, Dämpfungs- oder Steifigkeitsmatrix gewichtet werden (siehe Kapitel 2.1.3). In der Praxis wird meist die Massenmatrix, abgeleitet aus einem FEM-Modell, für die modale Vektororthogonalität verwendet. Voraussetzung für diese Variante ist, dass die diagonalen Terme der modalen Massenmatrix einen Wert von eins haben.

Modaler Skalierungsfaktor

Die Modalvektoren, die aus einer Messung zur Verfügung stehen unterscheiden sich von den simulativ berechneten Modalvektoren in der Größen- und auch Phaseninformation. Durch den modalen Skalierungsfaktor werden die Modalvektoren normalisiert, um diese für ein bestmögliches Ergebnis zu mitteln, zu differenzieren oder zu sortieren. Durch den modalen Skalierungsfaktor ist es möglich, Modalvektoren zu vergleichen, die auf unterschiedliche Weise bestimmt worden sind (experimentell oder simulativ). Ausgehend von einem Modalvektor φ_i , der als Referenz definiert ist, wird dieser mit einem Modalvektor φ_j verglichen. Für den modalen Skalierungsfaktor (M_{SF}) gilt:

$$M_{SFj} = \frac{\varphi_j^T \varphi_i}{\varphi_j^T \varphi_j} . \quad (2.118)$$

Selbiges gilt auch für den modalen Skalierungsfaktor mit dem Modalvektor φ_j als Referenz:

$$M_{SFi} = \frac{\varphi_i^T \varphi_j}{\varphi_i^T \varphi_i} . \quad (2.119)$$

Mit M_{SFj} wird die Skalierung mit der Referenz des Modalvektors φ_j bestimmt - mit M_{SFi} wird die Skalierung mit der Referenz des Modalvektors φ_i bestimmt. Zeigen die Modalvektoren φ_i und φ_j in dieselbe Richtung, weisen aber unterschiedliche Längen auf, so gilt für das Produkt aus den beiden modalen Skalierungsfaktor:

$$M_{MAC} = M_{SFj} M_{SFi} = 1 . \quad (2.120)$$

Für den Fall, dass die Modalvektoren i und j senkrecht aufeinander stehen, gilt:

$$M_{MAC} = M_{SFj} M_{SFi} = 0 . \quad (2.121)$$

Modal Assurance Criterion

Gleichungen 2.120 und 2.121 stellen die beiden Modalvektoren φ_i und φ_j gegenüber und bestimmen mit dem Wert zwischen null und eins ihre Übereinstimmung. Das Produkt daraus wird als MAC bezeichnet. Es ist definiert durch:

$$M_{MAC} = M_{SFj} M_{SFi} = \left(\frac{\varphi_j^T \varphi_i}{\varphi_j^T \varphi_j} \right) \left(\frac{\varphi_i^T \varphi_j}{\varphi_i^T \varphi_i} \right) = \frac{(\varphi_j^T \varphi_i)^2}{(\varphi_j^T \varphi_j) (\varphi_i^T \varphi_i)} . \quad (2.122)$$

Das MAC kann Werte zwischen null und eins annehmen. Stimmen die Modalvektoren überein, so hat das MAC einen Wert von eins. Stehen die Modalvektoren senkrecht aufeinander und haben keine Übereinstimmung, so liegt der Wert bei null.

2.5 Sensitivität des Modal Assurance Criterion

Die automatisierte Designanpassung folgt einem festgelegten Ablauf (eine detaillierte Beschreibung folgt in Kapitel 4.1). Die Geometrie wird entsprechend der jeweiligen Sensitivitäten einer Knotenverschiebung angepasst, welche sich zusammensetzen aus:

- Eigenfrequenzsensitivität
- Sensitivität des Modal Assurance Criteria

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzsensitivität wird die Sensitivität der Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix benötigt. Die Sensitivität des Modal Assurance Criteria kann auf zwei Arten bestimmt werden. Für die direkte Methode wird wie bei der Eigenfrequenzsensitivität die Steifigkeits- und Massenmatrix verwendet. In der indirekten Methode muss zusätzlich die Eigenvektorsensitivität bestimmt werden.

2.5.1 Steifigkeitsmatrix-Sensitivität

Die Steifigkeitsmatrix für ein lineares Tetraeder-Element wird allgemein durch Gleichung 2.31 berechnet mit:

$$\mathbf{K}_m = \int_{V_m} \mathbf{B}_m^T \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m dV_m . \quad (2.123)$$

Durch Addition der einzelnen Elementsteifigkeit wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix aufgestellt. Durch die Formoptimierung beschränkt sich die Designvariable auf die Lage der einzelnen Knotenpunkte der Tetraeder-Elemente. Diese können je nach Randbedingung maximal in die drei Raumrichtungen (x,y,z) verschoben werden. Für die Steifigkeitsmatrix der verwendeten Tetraeder-Elements gilt die Abhängigkeit von einer Designvariablen x :

$$\mathbf{K}_m(x) = V_m(x) \mathbf{B}_m^T(x) \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m(x) . \quad (2.124)$$

Für die Ableitung der Steifigkeitsmatrix nach einer Designvariable x gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_m(x)}{dx} = & \left(\frac{d\mathbf{B}_m^T(x)}{dx} \right)^T \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m(x) V_m(x) + \\ & \mathbf{B}_m(x)^T \mathbf{C}_m \frac{d\mathbf{B}_m^T(x)}{dx} V_m(x) + \\ & \mathbf{B}_m^T(x) \mathbf{C}_m \mathbf{B}_m(x) \frac{dV_m(x)}{dx} . \end{aligned} \quad (2.125)$$

Die Designvariable x hat einen Einfluss auf die \mathbf{B} -Matrix und das Volumen. Der Gradient des Volumens kann direkt bestimmt werden. Die \mathbf{B} -Matrix ist nach Gleichung 2.39 abhängig von der Jakobi-Matrix, deren Gradienten direkt bestimmt werden kann. Die Sensitivität im Bezug auf die Knotenverschiebung beschränkt sich auf den Knotenpunkt selbst, sowie auf alle anliegenden Knotenpunkte, die gemeinsame Elemente mit dem Knotenpunkt der Designvariable aufweisen. Zur Reduzierung der Rechenzeit muss für jede

Designvariable nicht der komplette Gradient der Steifigkeitsmatrix gebildet werden - eine reduzierte Matrix mit den betroffenen Knotenpunkten reicht aus. Alle anderen Einträge der gesamten Matrix der Sensitivität der Steifigkeitsmatrix haben einen Wert von 0.

2.5.2 Massenmatrix-Sensitivität

Die Massenmatrix für Tetraeder-Elemente wird mit der *Direct Mass Lumping* Methode nach Gleichung 2.44 und Gleichung 2.45 dargestellt. Für ein einzelnes Element gilt für die Abhängigkeit von der Designvariable x :

$$\mathbf{M}_m(x) = \rho V_m(x) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (2.126)$$

In diesem Fall ist nur das Volumen abhängig von der Designvariable. Das Verfahren zur Reduzierung der Rechenzeit gilt analog der Steifigkeitsmatrix-Sensitivitäten.

2.5.3 Eigenfrequenzsensitivität

Um den Einfluss einer Formänderung auf die Eigenfrequenz zu bestimmen, wird die Gleichung zur Bestimmung der Eigenfrequenzsensitivität benötigt. Nach Gleichung 2.51 ist das Eigenwertproblem in der FEM definiert durch:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (2.127)$$

mit

$$\omega_i^2 = \lambda_i. \quad (2.128)$$

Zur Bestimmung des Gradienten der Eigenfrequenz wird nur ein einzelner Eigenwert λ_i betrachtet. Die Ableitung für das Eigenwertproblem nach einer Designvariable x lautet:

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (2.129)$$

und in der ausgeschriebenen Form:

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \frac{d\lambda_i}{dx} \mathbf{M} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \boldsymbol{\phi}_i + (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \frac{d\boldsymbol{\phi}_i}{dx} = \mathbf{0}. \quad (2.130)$$

Durch eine Multiplikation der Gleichung mit $\boldsymbol{\phi}_i^T$ vereinfacht sich das Problem zu:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \frac{d\lambda_i}{dx} \mathbf{M} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \boldsymbol{\phi}_i + \underbrace{\boldsymbol{\phi}_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})}_{=\mathbf{0}} \frac{d\boldsymbol{\phi}_i}{dx} = \mathbf{0} \quad (2.131)$$

und weiter zu

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \frac{d\lambda_i}{dx} \mathbf{M} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} . \quad (2.132)$$

Ein Umstellen der Gleichung führt zu dem allgemeinen Ausdruck für die Eigenfrequenzsensitivität [LJ97]:

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \boldsymbol{\phi}_i}{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i} . \quad (2.133)$$

Die Eigenvektoren werden in der FEM so skaliert, dass sie \mathbf{M} orthonormal sind (siehe Tabelle 2.52). Mit

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = 1 \quad (2.134)$$

folgt für die Eigenfrequenzsensitivität:

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = \boldsymbol{\phi}_i^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \boldsymbol{\phi}_i . \quad (2.135)$$

2.5.4 Eigenvektorsensitivität

[RC75] hat 1975 eine erste Methode vorgestellt, Sensitivitäten der Eigenvektoren zu berechnen. In den Folgejahren kamen weitere Methoden wie die Nelson Methode ([Nel76]) oder modale Methoden von ([FK68] oder [JGL89]) hinzu. Eine effektive, für die Anwendung in der FEM optimierte Variante, zeigte [LJ97]. Im nachfolgenden Abschnitt wird auf die Methoden nach Rudisill/Chu sowie nach Lee/Jung eingegangen. Ausgangspunkt ist die Sensitivitätsgleichung für Eigenfrequenzen (2.135):

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = \boldsymbol{\phi}_i^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \boldsymbol{\phi}_i . \quad (2.136)$$

Die Eigenfrequenzsensitivität kann direkt berechnet werden, da alle Parameter bekannt sind. Aufgrund der Singularität der Matrix $\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}$ zur Bestimmung der Eigenvektoren kann die Sensitivität dieser nicht direkt gelöst werden.

Rudisill und Chu's Methode

1975 haben Carl S. Rudisill und Yee-Yeen Chu in ihrer Veröffentlichung [RC75] einen Weg aufgezeigt, trotz der Singularität der Matrix $\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}$ die Sensitivitäten der Eigenvektoren zu bestimmen. Ausgehend von der Bewegungsgleichung 2.127

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (2.137)$$

kann die Ableitung gebildet werden zu

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \frac{d\boldsymbol{\phi}_i}{dx} = - \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \boldsymbol{\phi}_i + \frac{d\lambda_i}{dx} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i \quad (2.138)$$

bzw.

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \frac{d\phi_i}{dx} - \frac{d\lambda_i}{dx} \mathbf{M} \phi_i = - \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \phi_i . \quad (2.139)$$

Als zweite Gleichung kommt die Orthogonalität der Eigenvektoren hinzu. Liegen die Eigenvektoren nach der Ingenieursnormierung vor (siehe Tabelle 2.52) so gilt:

$$\phi_i^T \phi_i = 1 . \quad (2.140)$$

Eine Ableitung nach der Designvariable x führt zu:

$$2\phi_i^T \frac{d\phi_i}{dx} = 0 \quad (2.141)$$

bzw.

$$\phi_i^T \frac{d\phi_i}{dx} = 0 . \quad (2.142)$$

Um die Sensitivität der Eigenfrequenz und Eigenvektoren zu bestimmen, werden die Gleichungen 2.139 und 2.142 in einer Matrix-Gleichung gelöst:

$$\begin{bmatrix} \phi_i^T & 0 \\ \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} & -\mathbf{M} \phi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\phi_i}{dx} \\ \frac{d\lambda_i}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ - \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \end{Bmatrix} \phi_i . \quad (2.143)$$

Die Sensitivitäten der Eigenfrequenz und der Eigenvektoren lassen sich berechnen mit:

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\phi_i}{dx} \\ \frac{d\lambda_i}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i^T & 0 \\ \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} & -\mathbf{M} \phi_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ - \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \end{Bmatrix} \phi_i . \quad (2.144)$$

Die Methode nach Rudisill und Chu ist nach [LJ97] eine einfache umzusetzende Methode, deren Nachteil eine hohe Rechenzeit für die Cholesky Zerlegung ist. Auch gilt diese Methode nur für Eigenwertprobleme mit einfachen Eigenwerten - handelt es sich um ein Eigenwertproblem mit multiplen Eigenvektoren, ist es nicht möglich eine Lösung zu finden.

Methode nach Lee und Jung

Vorlage für dieses Vorgehen ist die Methode nach Rudisill und Chu. Die erste Bedingung ist daher analog zu Gleichung 2.139:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \frac{d\phi_i}{dx} - \frac{d\lambda_i}{dx} \mathbf{M} \phi_i = - \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \phi_i . \quad (2.145)$$

Als zweite Bedingung wird die Massenmatrix-Orthonormalität herangezogen.:

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1 . \quad (2.146)$$

Abgeleitet nach der Designvariable ergibt sich:

$$2\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \frac{d\boldsymbol{\phi}_i}{dx} + \boldsymbol{\phi}_i^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i = 0 \quad (2.147)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \frac{d\boldsymbol{\phi}_i}{dx} + 0.5\boldsymbol{\phi}_i^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i = 0 . \quad (2.148)$$

Zusammengesetzt zu einer Gleichung gilt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} & -\mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i \\ -\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\phi_i}{dx} \\ \frac{d\lambda_i}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx}\right) \boldsymbol{\phi}_i \\ 0.5\boldsymbol{\phi}_i^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i \end{Bmatrix} . \quad (2.149)$$

Die Bestimmung der Sensitivität der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren erfolgt durch:

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\phi_i}{dx} \\ \frac{d\lambda_i}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} & -\mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i \\ -\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx}\right) \boldsymbol{\phi}_i \\ 0.5\boldsymbol{\phi}_i^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i \end{Bmatrix} . \quad (2.150)$$

Vorteil dieser Methode gegenüber der Methode nach Rudisill und Chu ist die Nutzung der Symmetrieeigenschaften der Massen- und Steifigkeitsmatrix. Ein Beweis der numerischen Stabilität wird in [LJ97] gezeigt.

2.5.5 Modal Assurance Criterion Sensitivität

In Kapitel 2.4.2 wurde die Berechnung des MAC-Wertes aufgezeigt. Diese vergleicht die Übereinstimmung der Eigenmoden und gibt sie anhand eines einzelnen Wertes wieder. Die Bestimmung der Sensitivität des MAC ist für die Formoptimierung essenziell und kann auf zwei unterschiedliche Weisen erfolgen. Bei der Bestimmung der Sensitivität wird zwischen zwei Methoden unterschieden: die indirekte Methode, die mit Hilfe der Bestimmung der Eigenvektorsensitivität gelöst werden kann und die direkte Methode, bei der die MAC-Sensitivität direkt gelöst wird.

Indirekte Methode

Ausgangsgleichung für die indirekte Methode der Sensitivitätsberechnung des MAC-Wertes ist Gleichung 2.122:

$$M_{MAC} = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i)^2}{(\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j) (\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i)} . \quad (2.151)$$

Zur Berechnung der Sensitivität wird Gleichung 2.151 nach der Designvariable x abgeleitet:

$$\frac{dM_{MAC}}{dx} = \frac{2(\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i) \boldsymbol{\varphi}_j^T}{(\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j) (\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i)} \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dx} - \frac{2(\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i)^2 \boldsymbol{\varphi}_i^T}{(\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j) (\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i)^2} \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dx} . \quad (2.152)$$

Der Term $\frac{d\varphi_i}{dx}$ kann, wie im Kapitel zuvor beschrieben, nach der Methode von Rudisill/Chu oder Lee/Jung bestimmt werden. Nachteil dieses Verfahren ist der Speicherbedarf und die benötigte Rechenzeit. Für die Eigenvektorsensitivitäten muss für jeden Eigenmode der Einfluss einer Designänderung für alle Eigenvektoren bestimmt werden. Bei einer Anzahl von n Eigenmoden mit m Eigenvektoren und z Designvariablen bedeutet dies eine vollbesetzte Matrix der Dimension $z \times m$, die für jeden Eigenmode aufgestellt werden muss. Für kleine Modelle ist die indirekte Methode ein einfaches und schnelles Verfahren um die Sensitivität des MAC-Wertes zu bestimmen. Bei großen Finite Element Modellen mit über 100.000 Knotenpunkten ist die Zeit zum Berechnen und Schreiben der Eigenvektorsensitivitäten ineffizient und für die Anwendung in der Praxis nicht zu empfehlen.

Direkte Methode

Der Grundgedanke der direkten Methode zur Bestimmung der Sensitivität des MAC nach Li, Hu und Wang [LHW14] basiert auf der Lösung nach der adjungierten Methode (Lagrange-Methode), wie sie in Kapitel 2.2.3 für die adjungierte Sensitivitätsanalyse verwendet wird. Durch Hinzufügen von Nulltermen wird die Gleichung so verändert, dass ein Lösen der Eigenvektorsensitivität nicht mehr nötig ist. Die erweiterte Lagrange Funktion setzt sich aus dem Term des MACs, des Eigenwertproblems und der Orthogonalitätsbeziehung zusammen. Für die zusätzlichen Terme gilt:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (2.153)$$

mit

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = 1 \quad (2.154)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i - 1 = 0 . \quad (2.155)$$

Die Lagrange-Gleichung für das MAC lautet:

$$\mathbf{L}_{MAC} = \mathbf{M}_{MAC} + \mathbf{v}^T ((\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_i) + \alpha (\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i - 1) . \quad (2.156)$$

\mathbf{v} und α sind Lagrange-Faktoren in Form eines Vektors bzw. eines skalaren Wertes, die so ausgelegt werden müssen, dass die Eigenvektorsensitivität nicht bestimmt werden muss.

Die Ableitung der Lagrange-Gleichung nach der Designvariable x ergibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{L}_{MAC}}{dx} = & \left(\frac{2(\varphi_j^T \varphi_i) \varphi_j^T}{(\varphi_j^T \varphi_j)(\varphi_i^T \varphi_i)} - \frac{2(\varphi_j^T \varphi_i)^2 \varphi_i^T}{(\varphi_j^T \varphi_j)(\varphi_i^T \varphi_i)^2} \right) \frac{d\varphi_i}{dx} + \\
 & \left(\frac{d\mathbf{v}}{dx} \right)^T (\mathbf{K}\phi_i - \lambda_i \mathbf{M}\phi_i) + \mathbf{v}^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} \phi_i - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \phi_i \right) + \\
 & \mathbf{v}^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \frac{d\phi_i}{dx} - \mathbf{v}^T \mathbf{M} \phi_i \frac{d\lambda_i}{dx} + \\
 & \alpha (\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i - 1) \frac{d\alpha}{dx} + \alpha \left(\phi_i^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \phi_i \right) + \\
 & \alpha \left(\left(\frac{d\phi_i}{dx} \right)^T \mathbf{M} \phi_i + \phi_i^T \mathbf{M} \frac{d\phi_i}{dx} \right). \tag{2.157}
 \end{aligned}$$

Durch das Eigenwertproblem und die Orthogonalitätsbeziehung kann die Gleichung weiter vereinfacht werden. Sortiert nach der Ableitung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{L}_{MAC}}{dx} = & \mathbf{v}^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} \phi_i - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \phi_i \right) + \alpha \left(\phi_i^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \phi_i \right) \\
 & \left[\left(\frac{2(\varphi_j^T \varphi_i) \varphi_j^T}{(\varphi_j^T \varphi_j)(\varphi_i^T \varphi_i)} - \frac{2(\varphi_j^T \varphi_i)^2 \varphi_i^T}{(\varphi_j^T \varphi_j)(\varphi_i^T \varphi_i)^2} \right) + \mathbf{v}^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) + 2\alpha \phi_i^T \mathbf{M} \right] \frac{d\varphi_i}{dx} - \\
 & \mathbf{v}^T \mathbf{M} \phi_i \frac{d\lambda_i}{dx}. \tag{2.158}
 \end{aligned}$$

Ziel der Methode ist es, die Berechnung der Eigenvektorsensitivitäten $\frac{d\varphi_i}{dx}$ und Eigenfrequenzsensitivitäten $\frac{d\lambda_i}{dx}$ zu vermeiden. Durch eine geeignete Wahl von \mathbf{v} und α soll daher gelten:

$$\left(\frac{2(\varphi_j^T \varphi_i) \varphi_j^T}{(\varphi_j^T \varphi_j)(\varphi_i^T \varphi_i)} - \frac{2(\varphi_j^T \varphi_i)^2 \varphi_i^T}{(\varphi_j^T \varphi_j)(\varphi_i^T \varphi_i)^2} \right) + \mathbf{v}^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) + 2\alpha \phi_i^T \mathbf{M} = 0 \tag{2.159}$$

und

$$\mathbf{v}^T \mathbf{M} \phi_i = 0. \tag{2.160}$$

Die Bedingungen aus Gleichung 2.159 und 2.160 können durch die richtige Wahl der Lagrange-Faktoren \mathbf{v} und α erfüllt werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} & -2\mathbf{M}\phi_i \\ -2\phi_i^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2(\varphi_j^T \varphi_i) \varphi_j^T}{(\varphi_j^T \varphi_j)(\varphi_i^T \varphi_i)} - \frac{2(\varphi_j^T \varphi_i)^2 \varphi_i^T}{(\varphi_j^T \varphi_j)(\varphi_i^T \varphi_i)^2} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \tag{2.161}$$

Für die Lagrange-Faktoren \mathbf{v} und α gilt daher:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} & -2\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i \\ -2\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{2(\boldsymbol{\phi}_j^T \boldsymbol{\phi}_i) \boldsymbol{\phi}_j^T}{(\boldsymbol{\phi}_j^T \boldsymbol{\phi}_j)(\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_i)} - \frac{2(\boldsymbol{\phi}_j^T \boldsymbol{\phi}_i)^2 \boldsymbol{\phi}_i^T}{(\boldsymbol{\phi}_j^T \boldsymbol{\phi}_j)(\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_i)^2} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (2.162)$$

Mit diesen beiden Bedingungen entfallen die Eigenvektor- und Eigenfrequenzsensitivitäten, wodurch sich die Gleichung zur Berechnung der Sensitivitäten des Modal Assurance Criterion vereinfacht zu:

$$\frac{\mathbf{L}_{MAC}}{dx} = \mathbf{v}^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i \right) + \alpha \left(\boldsymbol{\phi}_i^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i \right). \quad (2.163)$$

Der Vorteil dieses Verfahrens ist zum einen, dass die Lagrange-Faktoren nur für jede Eigenfrequenz i bestimmt werden und in Form eines Vektors vorliegen müssen. Die Matrix, die zur Berechnung der Lagrange-Faktoren invertiert wird, ist eine symmetrische, invertierbare Matrix. Gegenüber der indirekten Methode ist die direkte Methode in Bezug auf die Rechendauer und des Speicherbedarfes effizienter. [LHW14] zeigt in seiner Veröffentlichung anhand eines einfachen Dehnstabes, dass selbst bei einer geringen Anzahl von Designvariablen, die direkte Methode bei der Berechnung der Sensitivität für das MAC einen entscheidenden Vorteil in der Rechenzeit gegenüber der indirekten Methode hat. Je mehr Designvariablen berechnet werden müssen, desto deutlicher wird dieser Vorteil.

Schall-Leistungsbasierte Topologieoptimierung

Die Körperschalleistung beschreibt die Energie, die durch Schwingungen der Struktur durch ein System übertragen wird. Ziel einer optimalen akustischen Auslegung von Strukturen ist die Bestimmung und Reduzierung der Körperschalleistung, die durch ein System übertragen wird. In den nachfolgenden Kapiteln wird eine Methode gezeigt, mit deren Hilfe die Körperschalleistung mittels FEM bestimmt und anschließend in einer Optimierung als Randbedingung verwendet werden kann

3.1 Leistungsberechnung an einem Normalkraftstab

Eine analytische Berechnung der Körperschalleistung an einem Normalkraftstab wurde in Kapitel 2.3.5 vorgestellt. Für eine Anwendung an komplexeren Bauteilen wird nachfolgend eine Methode gezeigt, die in der FEM und damit für Topologieoptimierungen verwendet werden kann. Ausgehend vom Ort der Anregung kann die Körperschalleistung in jedem beliebigen Querschnitt eines Bauteils bestimmt werden. Für die Entwicklung innerhalb der Antriebseinheit ist die wichtigste Schnittstelle das Aggregatelager, welches den Antrieb mit der Karosserie verbindet und den direkten Übertragungspfad des Körperschalls darstellt. An dieser Schnittstelle soll durch eine FEM-Berechnung die übertragene Körperschalleistung berechnet und durch Optimierungen minimiert werden. Dies führt dazu, dass die Körperschalleistung nicht über eine Querschnittsfläche innerhalb eines Bauteils bestimmt werden muss, sondern konzentriert an einem Punkt (Mittelpunkt des Aggregatelagers) berechnet werden kann. Für den Normalkraftstab, dessen analytische Lösung aus Kapitel 2.3.5 bekannt ist, wird im Folgenden eine Methode zur Bestimmung der Körperschalleistung in der FEM aufgezeigt. Ausgangspunkt ist ein Normalkraftstab (Abbildung 3.1) mit der Länge L , der von einer sinusförmigen Kraft f_0 belastet wird. Die weiteren Eigenschaften sind in Tabelle 3.1 angegeben.

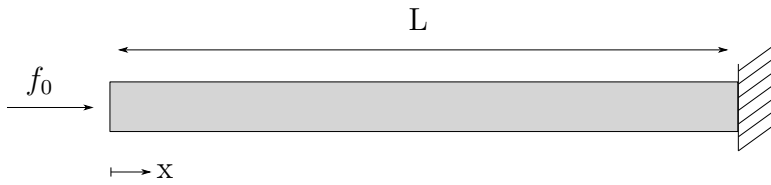


Abbildung 3.1: Normalkraftstab mit einseitiger Einspannung und Belastung f_0

Kennwert	Wert
Länge:	$L = 0.5 \text{ m}$
Querschnittsfläche:	$S = 9,6 * 10^{-5} \text{ m}^2$
Elastizitätsmodul:	$E = 2,11 * 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
Querkontraktionszahlen:	$\nu = 0$
Materialdichte:	$\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Strukturdämpfung:	$\eta = 0.01$

Tabelle 3.1: Kennwerte des Normalkraftstabes

Die Dämpfungseigenschaften des Materials sind essenziell, da in einem System, in dem keine Energie dissipiert wird, auch keine Körperschalleistung übertragen werden kann. Die analytische Lösung für die Körperschalleistung ist auf die Körperschallwellen in Längsrichtung (longitudinale Wellen) reduziert. Durch eine Querkontraktion von null wird die Abstrahlung von Schall in das umgebende Medium verhindert. Aus Kapitel 2.3.5 gilt für die analytische Lösung der Körperschalleistung:

$$P_m(x) = \frac{1}{2} S \omega \sqrt{\rho E_0} (|\bar{B}|^2 - |\bar{A}|^2) \quad (3.1)$$

mit den imaginären Integrationskonstanten

$$\bar{A} = -\frac{i f_0 e^{i k_L L}}{2 \cos(k_L L) E S k_L} \quad (3.2)$$

und

$$\bar{B} = \frac{i f_0 e^{-i k_L L}}{2 \cos(k_L L) E S k_L} \quad (3.3)$$

3.1.1 Diskretisierung des Normalkraftstabes

Randbedingung für die Leistungsberechnung

Das FEM-Modell des Normalkraftstabes wird aus linearen Tetraeder-Elementen aufgebaut. Ein erster Anhaltswert für die Kantenlänge zur Berechnung der Körperschalleistung ist die Anzahl der Elemente pro Wellenlänge. Da es sich bei dem Material um Stahl mit einer Schallgeschwindigkeit von $c_s \approx 5100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ [Kuc07] handelt, liegt eine Wellenlänge vor

von:

$$\lambda_s = \frac{c_S}{f} . \quad (3.4)$$

Bei einer maximalen Frequenz von 10 kHz beträgt die Wellenlänge maximal

$$\lambda_s = \frac{c_S}{f} = \frac{5100 \frac{m}{s}}{10 \text{ kHz}} = 0.51 \text{ m} . \quad (3.5)$$

Nach Veröffentlichungen von [Mar02] und [Mar08] sind für eine ausreichende Darstellung der Longitudinalwelle mindestens 6 - 10 Elemente pro Wellenlänge nötig. Für eine gültige Darstellung der Körperschallwellen müsste der Normalkraftstab mit einer Länge von $L = 0.5 \text{ m}$ in 10 Elemente mit einer Kantenlänge von 0.05 m diskretisiert werden. Die Anzahl an Elementen in Dickenrichtung ist zu vernachlässigen, da ohne Querkontraktion Wellen rein in longitudinaler Richtung vorhanden sind. Durch die Querschnittsfläche von $S = 9,6 * 10^{-5} \text{ m}^2$ haben die Tetraeder bei einem gleichmäßigen Netz ein Seitenverhältnis von 0.05 m zu $\approx 0.01 \text{ m}$ und stellen stark verzerrte Elemente dar. Ein Kriterium für die Netzqualität ist die Verzerrung der Tetraeder (Skewness). Das Optimum ist ein Tetraeder bestehend aus gleichseitigen Dreiecken. Je weiter die Form davon abweicht, desto schlechter wird die Skewness. Für die Vernetzung des Normalkraftstabes werden für die nachfolgenden Berechnungen eine Kantenlänge von $\sqrt{9,6 * 10^{-5}} \text{ m}$ in Stabesbreite und eine Kantenlänge von $\approx 0.01 \text{ m}$ verwendet. Abbildung 3.2 zeigt das Finite Element Modell des Normalkraftstabes. Mit dieser Vernetzung können Wellenlängen ab einer Länge

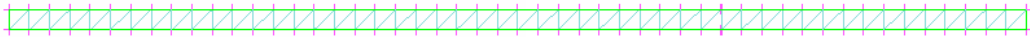


Abbildung 3.2: Finite Element Modell des Normalkraftstab

von 0.1 m ausreichend gut dargestellt werden ([Mar02] und [Mar08]). Nach Gleichung 3.4 sind für den Normalkraftstab theoretisch Frequenzen bis 51 kHz möglich.

Definition des Frequenzbereiches

Für den Abgleich des FEM-Modells mit dem analytischen Modell wird ein Frequenzbereich angenommen, der mindestens die erste Eigenfrequenz beinhaltet. Eine Eigenwertanalyse für den Normalkraftstab mit einer einseitigen Einspannung ergibt für die ersten fünf Eigenfrequenzen:

Eigenmode	Eigenfrequenz
1.	2585.99 Hz
2.	7755.56 Hz
3.	12917.64 Hz
4.	18067.52 Hz
5.	23198.85 Hz

Tabelle 3.2: Eigenfrequenzen des Normalkraftstabes (FEM Lösung)

Zusätzlich zu der Einspannung auf einer Seite durch Sperren aller drei Freiheitsgrade wurden im Modell alle Knotenpunkte in zwei Freiheitsgraden festgehalten, um die reinen Longitudinalwellen aus dem analytischen Modell darzustellen. Die in Tabelle 3.2 gezeigten Eigenmoden sind Moden in Längsrichtung des Stabes. Der Abgleich erfolgt im Frequenzbereich von

$$f = 0 \dots 10000 \text{ Hz} \tag{3.6}$$

Dabei wird eine sinusförmige Last in Längsrichtung mit einer Amplitude von

$$F_0 = 96 \text{ N} \tag{3.7}$$

angewendet.

3.1.2 Körperschalleistung - Analytische Lösung

Zur Ermittlung der Körperschalleistung erfolgt zunächst eine Abstimmung der analytisch bestimmten Eigenfrequenzen mit den berechneten Eigenfrequenzen aus der Finite-Elemente-Methode (FEM). Für den Normalkraftstab werden die Eigenfrequenzen bestimmt durch:

$$f_{e(n)} = \frac{2n - 1}{4L} \sqrt{\frac{E_0}{\rho}} \tag{3.8}$$

Für den verwendeten Normalkraftstab ergibt sich für die ersten fünf Eigenfrequenzen:

Eigenmode	Eigenfrequenz
1.	2586.67 Hz
2.	7757.00 Hz
3.	12928.34 Hz
4.	18099.67 Hz
5.	23271.01 Hz

Tabelle 3.3: Eigenfrequenzen des Normalkraftstabes (analytische Lösung)

Ein Vergleich der Eigenfrequenzen der analytischen Lösung mit denen der FEM-Lösung zeigt eine maximale Abweichung von 0.31% - was eine hohe Übereinstimmung der beiden Lösungen bedeutet:

Eigenmode	Analytik	FEM	Abweichung
1.	2586.67 Hz	2585.99 Hz	0.03 %
2.	7757.00 Hz	7755.56 Hz	0.02 %
3.	12928.34 Hz	12917.64 Hz	0.08 %
4.	18099.67 Hz	18067.52 Hz	0.18 %
5.	23271.01 Hz	23198.85 Hz	0.31 %

Tabelle 3.4: Vergleich der Eigenfrequenzen aus der analytischen und der FEM-Lösung

Die Körperschallleistung, die durch die Kraftanregung F im Normalkraftstab an der Stelle $x = 0$ übertragen wird, kann mit Hilfe von Gleichung 2.108 sowie den komplexen Konstanten aus Gleichung 2.113 und 2.114 aus Kapitel 2.3.1 bestimmt werden:

$$P_m(x) = \frac{1}{2} S \omega \sqrt{\rho E_0} (|\bar{B}|^2 - |\bar{A}|^2) \quad (3.9)$$

mit

$$\bar{A} = -\frac{i f_0 e^{i k_L L}}{2 \cos(k_l L) E S k_L} \quad (3.10)$$

und

$$\bar{B} = \frac{i f_0 e^{-i k_L L}}{2 \cos(k_l L) E S k_L} . \quad (3.11)$$

Das Ergebnis ist in Abbildung 3.3 für einen Frequenzbereich von 0 Hz bis 10 kHz dargestellt. Außerhalb der Eigenfrequenzen des Normalkraftstabes nimmt die Leistung niedrige Werte an ($< 10^{-2} \text{ W}$) - in den Resonanzen steigt die Leistung deutlich an und erreicht Werte bis $\approx 10^2 \text{ W}$. Die Erklärung für dieses Phänomen lässt sich anhand der allgemeinen Formel zur Berechnung der Körperschallleistung zeigen (2.99):

$$P_m = \frac{f_0 v_0}{2} \cos(\varphi_f - \varphi_v) . \quad (3.12)$$

Die Gleichung lässt sich in zwei Teile unterteilen: $\frac{f_0 v_0}{2}$ und $\cos(\varphi_f - \varphi_v)$. Während der erste Teil beliebige Werte annehmen kann, liegt der zweite Teil stets zwischen null und eins. Sind Kraft und Geschwindigkeit in Phase, so nimmt der zweite Teil den Wert eins an - sind sie gegenphasig wird der zweite Teil zu null. In Abbildung 3.4 ist der Verlauf der Phasendifferenz zwischen Kraft und Geschwindigkeit für den Frequenzbereich von 0 Hz bis 10 kHz für den gedämpften (blau) und den ungedämpften Fall (rot) dargestellt.

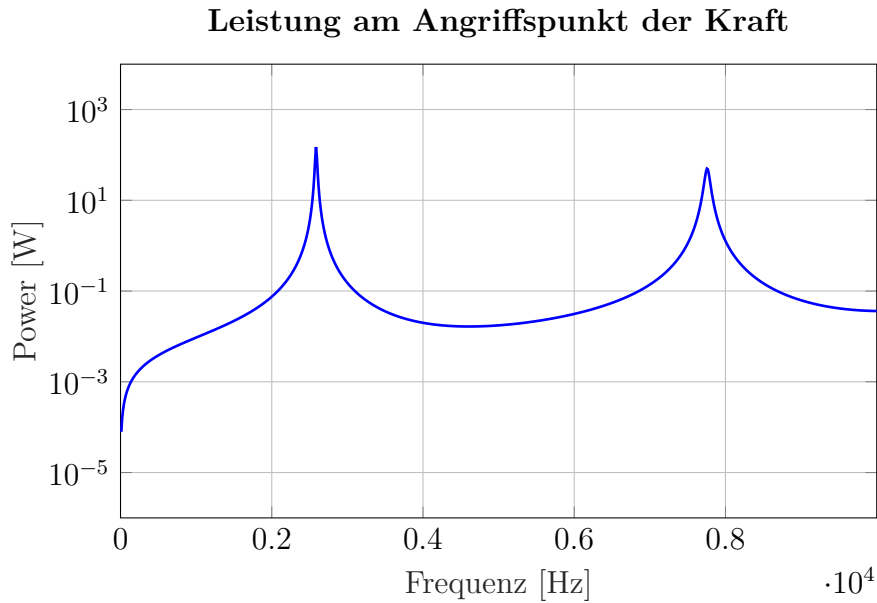


Abbildung 3.3: Übertragene Körperschalleistung am Angriffspunkt der Kraft

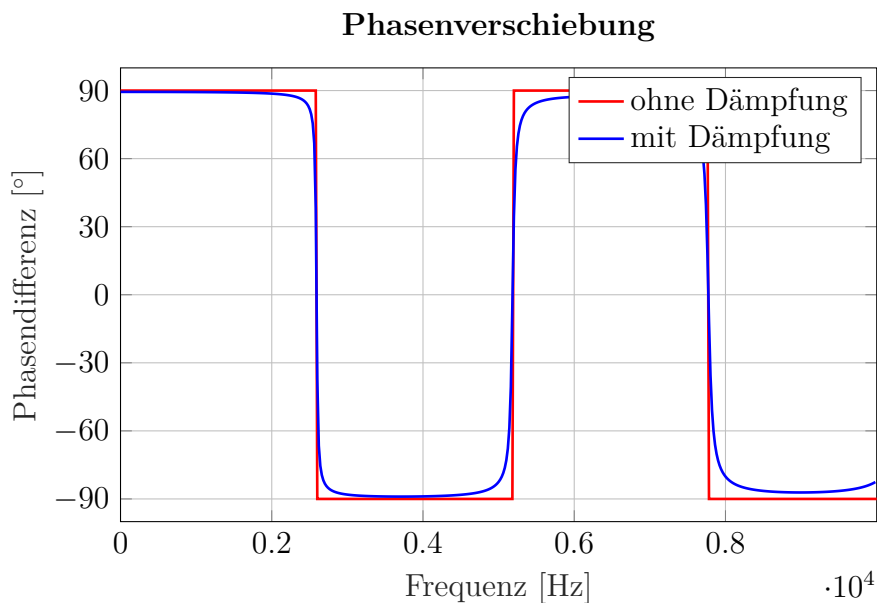


Abbildung 3.4: Phasenverschiebung für den Fall ohne Dämpfung (rot) und mit Dämpfung (blau)

Die Phasendifferenz zwischen Kraft und Geschwindigkeit liegt außerhalb der Resonanzen bei Werten näherungsweise von 90° . Der Cosinus der Phasendifferenz nimmt in diesen Bereichen einen Wert von nahezu null an, wodurch die Leistung auch gegen null geht. Gleiches gilt für den ersten Term aus Gleichung 3.12: In den Resonanzen haben Kraft und Geschwindigkeit ihre Maxima, während in den Zwischenbereichen die Werte gegen null gehen. Die Phasendifferenz hat im Frequenzbereich von 0 Hz bis 10 kHz insgesamt drei Vorzeichenwechsel: Zwei in den Eigenfrequenz von 2587 Hz und 7757 Hz

und eine dritte bei einer Frequenz von 5182 Hz. Ein Vorzeichenwechsel führt zu einem Nulldurchgang, wodurch der Term $\cos(\varphi_f - \varphi_v) = 1$ ist und ein Maximum darstellt. Für den Nulldurchgang außerhalb der Eigenfrequenz hat dieser wenig Einfluss auf die Körperschalleistung, da an dieser Stelle der erste Teil des Terms $\frac{f_0 v_0}{2}$ sein Minimum hat.

Liegt in einem System keine Dämpfung und damit keine Senke zur Dissipation von Leistung vor, so kann in das System keine Leistung eingebracht werden. In diesem Fall zeigt die Phasendifferenz zwischen Kraft und Geschwindigkeit eine unstetige Funktion über die Frequenz, die zwischen -90° und 90° springt. Mit $\cos(\varphi_f - \varphi_v) = 0$ führt es zu keiner Körperschalleistung im System. Für die analytische Lösung ergibt der ungedämpfte Fall ($\nu = 0$) für die komplexen Variablen \bar{A} und \bar{B} aus Gleichung 3.10 gleiche Werte, sodass in dem System keine Körperschalleistung vorhanden ist. Erst das Hinzufügen einer Dämpfung (wie sie in der Realität in vielen verschiedenen Formen auftritt) führt zu einem Versatz in der Phasendifferenz zwischen Kraft und Geschwindigkeit. In Abbildung 3.4 ist der Verlauf der Phasendifferenz zwischen Kraft und Geschwindigkeit für den ungedämpften (rot) und gedämpften Fall (blau) dargestellt. Die Werte der blauen Kurve nähern sich der roten Kurve (90° und -90°) - tangieren diese aber nie. Durch den Phasenversatz ist die Kurve im Phasenwechsel stetig und führt für $\cos(\varphi_f - \varphi_v)$ zu einem Maximum.

3.1.3 Körperschalleistung - Lösung mit Hilfe der FEM

Die Bestimmung der Körperschalleistung nach der analytischen Methode erfolgt über eine definierte Querschnittsfläche im System. Die Implementierung der Analyse von Körperschalleistung über eine Querschnittsfläche mittels FEM ist in kommerzieller Software bereits vorhanden. Eine Verwendung dieser Leistung in der Topologieoptimierung ist bisher allerdings nicht bekannt und wird in dieser Arbeit mit den zur Verfügung stehenden Möglichkeiten in kommerzieller Software für industrielle Anwendungen umgesetzt. In der Entwicklung von Antriebssystemen ist die Körperschalleistung von Interesse, die vom Antrieb auf die Karosserie übertragen wird. An dieser Schnittstelle sitzen Elastomerlager, die in der NVH als eine einzelne Feder dargestellt werden. Dieser Umstand führt zu einer Vereinfachung der Leistungsbestimmung, da die Leistung an einem konzentrierten Punkt bestimmt werden muss und nicht über die gesamte Querschnittsfläche der Bauteile.

Rigid Body Elemente zur Bestimmung der Leistung

Die Schnittstelle zwischen zwei Bauteilen wird in der NVH-Berechnung nicht als Vollmodell einer Schraube oder eines Lagers dargestellt, sondern durch **Rigid Body Elemente** (RBE) und Federn nachgebildet. Soll die Leistung, die über ein System auf ein anderes übertragen wird, bestimmt werden, so reicht es aus, die Kraft und Geschwindigkeit und deren Phaseninformation an diesem einen konzentrierten Punkt zu berechnen. Wird die Schnittstelle durch mehrere Verbindungen (Verschraubpunkte) definiert, so kann die Körperschalleistung an jedem Punkt bestimmt und aufaddiert werden. Für das Beispiel des Normalkraftstabes wird an dem zu untersuchenden Querschnitt ein RBE als eine Art Verschraubung eingefügt. RBEs lassen sich in zwei Arten unterteilen:

Rigid Body Element 2: Das RBE2 ist ein starres Element, bei dem der Masterknoten (Mittelknoten) die Verschiebung der anderen Knoten (Slaveknoten) vorgibt. Das heißt, die Knoten können keine relative Verschiebung oder Rotation zueinander erfahren. RBE2 führen zu einer künstlichen Versteifung des Systems.

Rigid Body Element 3: Bei einem RBE3 können sich die Knoten zueinander verschieben, wodurch die künstliche Versteifung des Systems verhindert wird. Eine Kräfteinleitung in den Masterknoten führt zu einer Verteilung auf die Slaveknoten.

Für den Vergleich der analytischen Lösung mit der Lösung mittels FEM wird der Normalkraftstab durch RBE2s zur Ermittlung der Körperschalleistung erweitert. Die Leistung wird an den Stellen $x = 0 \text{ m}$ und $x = 0.25 \text{ m}$ bestimmt. Für die Bestimmung am Kräfteinleitungspunkt wird ein RBE2 über die vier Eckknoten des Elementes gespannt mit dem Mittelknoten im Zentrum. An diesem Zentrumsknoten erfolgt die Kraftanregung. Abbildung 3.5 zeigt den RBE2 am Anfang des Stabes. Für die Bestimmung der Leistung in der Mitte des Normalkraftstabes muss dieser bei $x = 0.25 \text{ m}$ aufgetrennt und durch ein RBE2 wieder zusammengefügt werden (Abbildung 3.6). An beiden Punkten erfolgt die Auswertung der Kraft und der Geschwindigkeit am Masterknoten des jeweiligen RBE2s mit:

$$P_m = \frac{f_0 v_0}{2} \cos(\varphi_f - \varphi_v) . \quad (3.13)$$

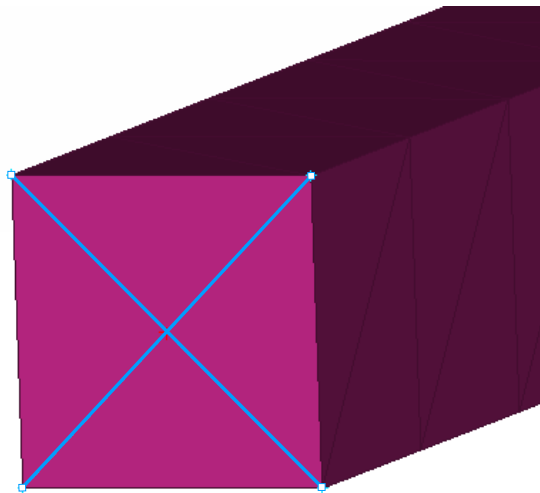


Abbildung 3.5: RBE2 bei $x = 0 \text{ m}$

Leistung an einer beliebigen Stelle des Stabes

Mit dieser Methode kann die Körperschalleistung in jedem beliebigen Punkt des Normalkraftstabes bestimmt werden. In Abbildung 3.7 ist die analytische Lösung und die Lösung nach der FE-Methode für die Leistung am Kräfteanregungspunkt dargestellt. Die

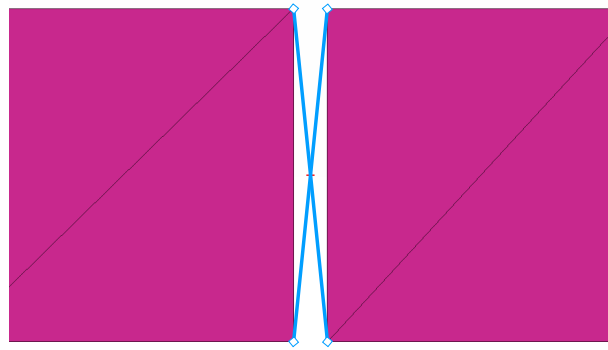


Abbildung 3.6: RBE2 bei $x = 0.25 \text{ m}$

Werte stimmen über das gesamte Frequenzband überein, weswegen die Lösung mittels FEM rot gestrichelt dargestellt ist - die analytische Lösung in blau. Durch das zweite

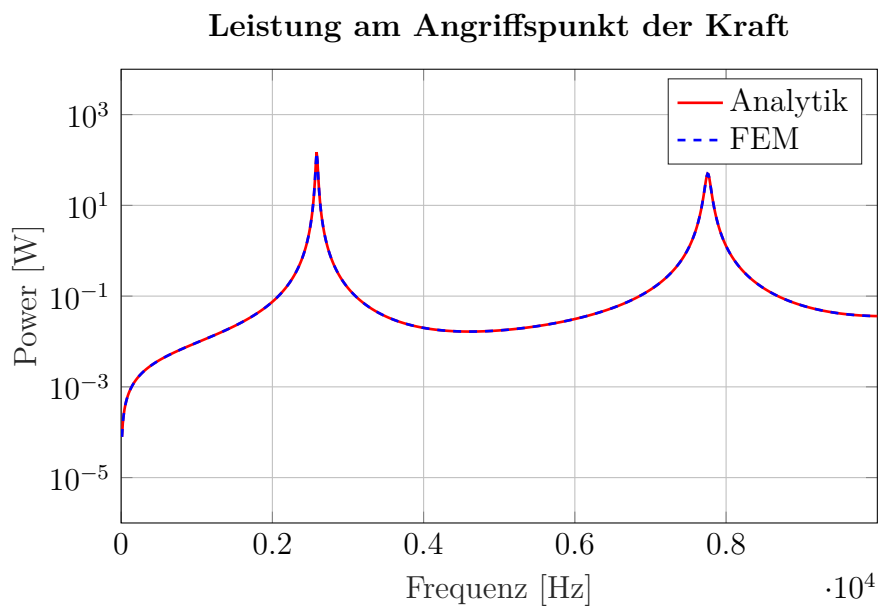


Abbildung 3.7: Abgleich Leistung der analytischen (rot) und der FEM-Lösung (blau gestrichelt)

RBE2-Element in der Mitte des Stabes kann die übertragene Körperschalleistung an diesem Punkt bestimmt werden. In Abbildung 3.8 ist die übertragene Leistung an den beiden Punkten $x = 0 \text{ m}$ (rot) und $x = 0.25 \text{ m}$ (schwarz) gezeigt. Am Punkt der Krafteinleitung ist die Leistung am höchsten und nimmt zur festen Einspannung am Ende des Stabes ab. Die Differenz der beiden Kurven ist die in der ersten Hälfte des Stabes durch die Strukturdämpfung dissipierte Leistung.

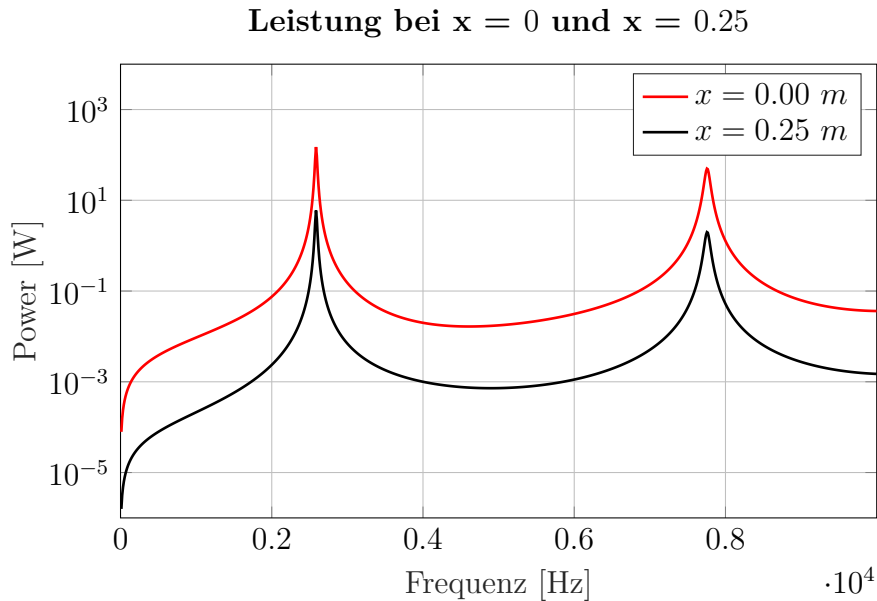


Abbildung 3.8: Übertragene Körperschalleistung bei $x = 0\text{ m}$ (rot) und $x = 0.25\text{ m}$ (schwarz)

3.2 Methode zur Optimierung der Körperschalleistung in *OptiStruct*

Für die Verwendung der gezeigten Methode in industriellen Beispielen wird eine Lösung zur Umsetzung in kommerzieller Software für FE-Optimierungen nötig. Anders als Programme wie beispielsweise *Matlab*, deren Stärke die individuelle Programmierung mathematischer Berechnungen ist, sind Programme wie *OptiStruct* von *Altair* darauf ausgelegt, lineare und nicht-lineare Analysen in verschiedenen Bereichen der FE-Berechnung durchzuführen. Die Möglichkeit einer individuellen Anpassung für spezielle Berechnungsmethoden ist nur in einem geringen Umfang gegeben, wodurch eine Lösung mittels der vorhandenen Tools erarbeitet werden muss.

OptiStruct bietet die Möglichkeit aus einer Vielzahl von vordefinierten Antwortfunktionen, die in einer Optimierung verwendet werden können, auswählen zu können. Eine Antwortfunktion zur Bestimmung der Körperschalleistung über einen Querschnitt gibt es bisher nicht, wodurch diese durch eine eigens erstellte Antwortfunktion erstellt werden muss. Durch die Vereinfachung der Leistungsbestimmung auf einen einzelnen Knotenpunkt (Kapitel 3.1.3) kann die Antwortfunktion mittels einer sogenannten Gleichungsantwortfunktion dargestellt werden. Die Gleichung zur Bestimmung der Körperschalleistung (3.13) setzt sich aus den Parametern Kraft, Geschwindigkeit und deren Phaseninformation zusammen. Für die Geschwindigkeit mit Phaseninformation gibt es die Möglichkeit einer Auswertung an Hand eines jeden beliebigen Knotenpunkts im Modell und damit auch in dem konzentrierten Knotenpunkt für die Körperschallbestimmung. Die Kraft mit Phaseninformation kann entweder in einem Knotenpunkt (Grid-Point-Force)

3. Schall-Leistungsbasierte Topologieoptimierung

oder einem Element (Element-Force) bestimmt werden. In der Praxis hat sich gezeigt, dass die Auswertung über ein Element eine robustere Methode darstellt, da durch die Ausrichtung des Elements eine eindeutige Richtungsbestimmung ermöglicht wird. Hierzu wird das Modell an der Stelle der Leistungsbestimmung aufgetrennt und durch eine RBE2 - Feder - RBE2 Kombination mit einer unendlichen Steifigkeit (rigid) der Feder wieder verbunden (Abbildung 3.9). Über die Feder als Element können in der Optimierung die Kraft und deren Phaseninformation bestimmt werden. Durch die eigens programmierte Antwortfunktion kann die Gleichung der Körperschalleistung nach 3.13 dargestellt werden. Ein Vergleich der beiden Varianten mit (rot gestrichelt) und ohne (schwarz) Feder zeigt eine Übereinstimmung von $>99.9\%$ (Abbildung 3.10).

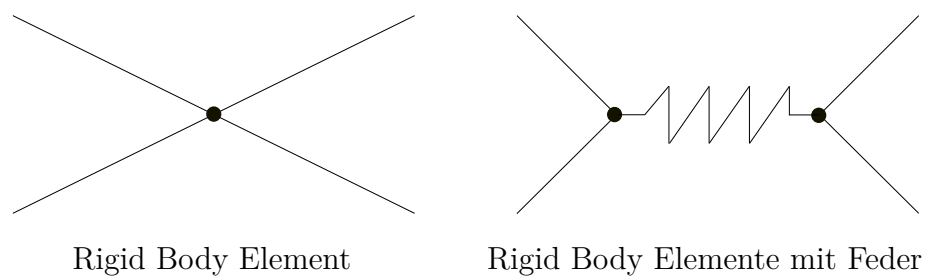


Abbildung 3.9: Vergleich der Modellierung über RBE und RBE mit CBUSH-Element

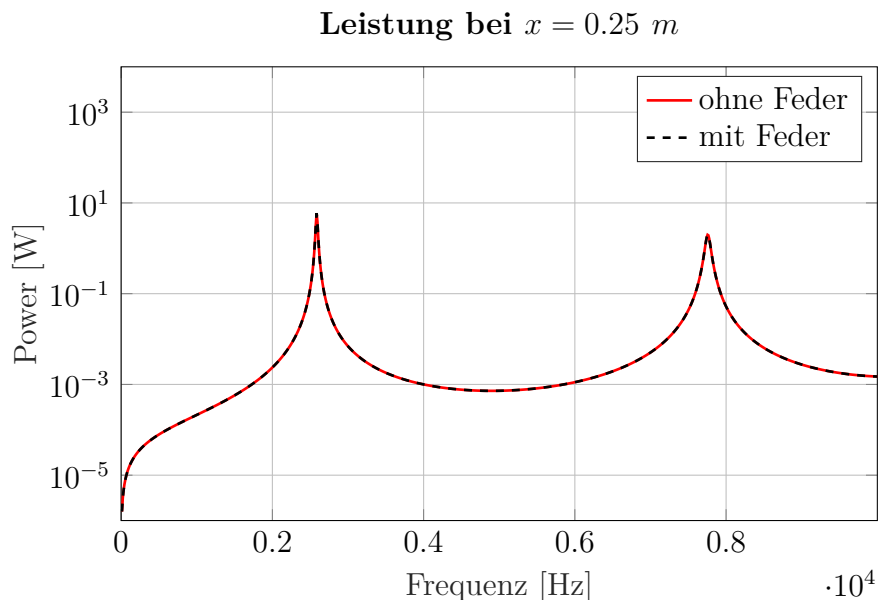


Abbildung 3.10: Abgleich der Körperschalleistung ohne Feder (rot) und mit Feder (schwarz gestrichelt) bei $x = 0.25 m$

3.3 Körperschalleistungs-basierte Topologieoptimierung am Beispiel einer Platte

Am Beispiel einer Platte wird die Methode der Körperschalleistungs-basierten Topologieoptimierung aufgezeigt. Abbildung 3.11 zeigt den Aufbau des zu lösenden Optimierungsproblems. Die rote Platte steht vereinfacht für die Karosserie, auf die die Körperschalleistung übertragen wird. Die Feder zwischen den beiden Platten stellt die Lagerung dar. Der zur Verfügung stehende Bauraum für einen Tragbock ist der blau eingefärbte Design-Bereich. Die rote Platte ist am linken Rand im oberen und unteren Bereich gelagert und die Anregung erfolgt am rechten unteren Eck der blauen Platte. Zwischen den beiden Platten ist nach der Methode aus Kapitel 3.2 die Auswertestelle für die übertragene Körperschalleistung implementiert. Ziel der Optimierung ist die Minimierung der Körperschalleistung, die an die Karosserie (roter Bereich) übertragen wird.

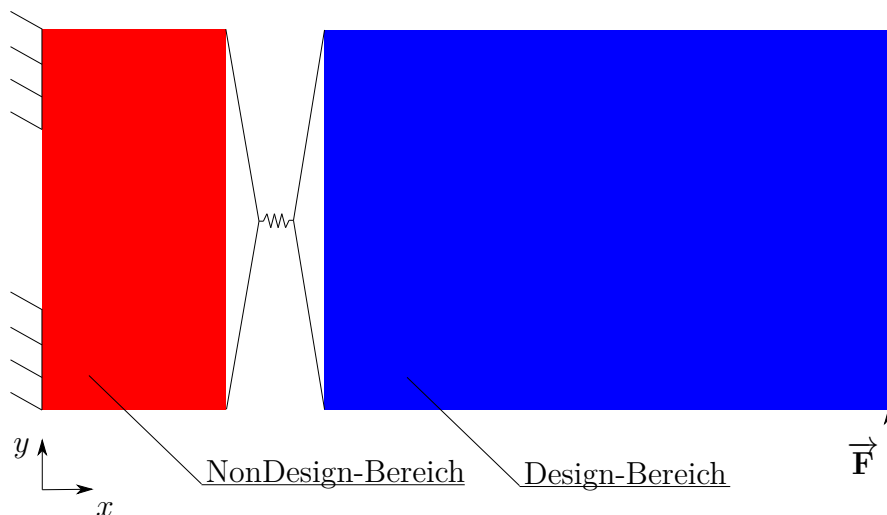


Abbildung 3.11: Schematischer Aufbau des Optimierungsbeispiels

3.3.1 Aufbau FEM-Modell

Der in Abbildung 3.11 skizzierte Aufbau wird mittels quadratischen Elementen (QUADs) in einem FEM-Modell aufgebaut. Die Kantenlänge eines QUADs beträgt 2 mm. Bei einer Länge von 48 mm und einer Breite von 100 mm für den NonDesign-Bereich führt dies zu einer Auflösung von 24 x 50 QUAD-Elementen (insgesamt 1200 Elemente). Der Design-Bereich hat eine Größe von 150 mm x 100 mm und besteht aus 75 x 50 Elementen (insgesamt 3750 Elemente). Die beiden Platten haben eine Dicke von 1 mm und bestehen aus Stahl mit den Materialeigenschaften aus Tabelle 3.5. Da es sich um ein 2D-Problem handelt, sind für alle Knotenpunkte die Freiheitsgrade in translatorischer x- und y- Richtung zulässig, sowie der dazugehörige rotatorische Freiheitsgrad. Alle weiteren Freiheitsgrade sind gesperrt. Für die Einspannung am linken Rand des NonDesign-Bereiches

Kenngröße	Wert
E-Modul	210 <i>GPa</i>
Querkontraktion	0,3
Dichte	7,85 $\frac{g}{cm^3}$

Tabelle 3.5: Materialkennwerte für Stahl

werden alle Freiheitsgrad gesperrt (gelbe Markierung in Abbildung 3.12). Die Verbindungsstelle zwischen Design- und NonDesign-Bereich ist mit einer RBE2-CBUSH-RBE2 Verbindung umgesetzt. An dieser Stelle kann die übertragene Körperschalleistung vom Design- in den NonDesign-Bereich konzentriert auf einen Punkt bestimmt werden (grüne Feder in Abbildung 3.12). Die Reduzierung auf einen Knotenpunkt durch RBE2 führt zu einer Versteifung des Systems.

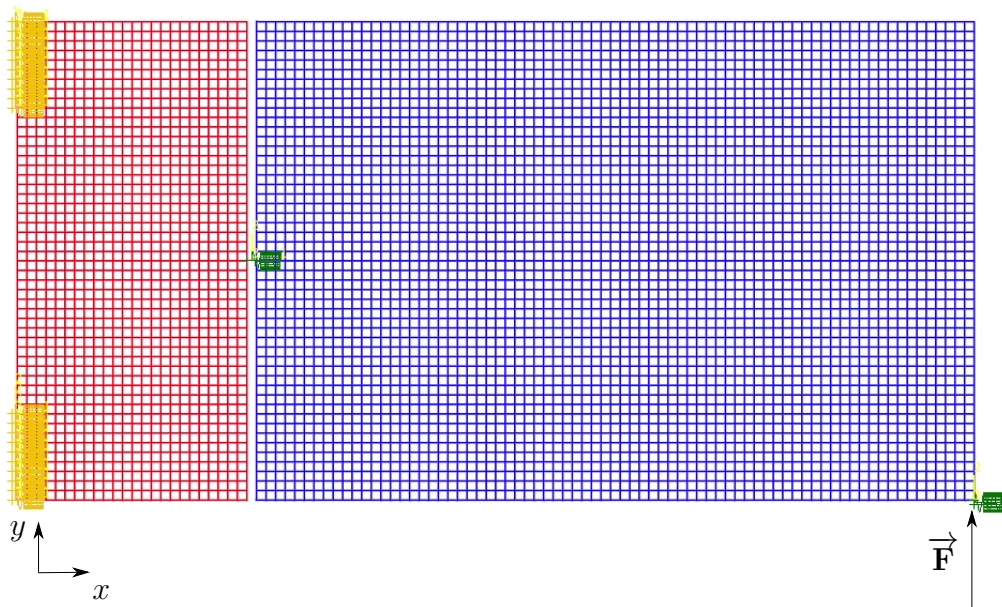


Abbildung 3.12: Aufbau des FEM-Modells mit NonDesign-Bereich (rot) und Design-Bereich (blau)

3.3.2 Lastfälle zur Auslegung der Platte

Ziel der Topologieoptimierung ist die Minimierung der übertragenen Körperschalleistung vom Design-Bereich in den NonDesign-Bereich. Eine reine Betrachtung dieses Lastfalls in der Topologieoptimierung hätte zur Folge, dass der komplette Design-Bereich verschwindet. Wenn kein Material vorhanden ist, kann auch keine Körperschalleistung übertragen werden. Um diesem Fall entgegenzuwirken, wird ein zusätzlicher statischer Lastfall eingeführt, der eine vordefinierte Steifigkeit der Platte fordert. Für die weitere Auslegung werden folgende zwei Lastfälle betrachtet:

Steifigkeit: statischer Lastfall Die Steifigkeit für die Platte wird bestimmt, in dem das gesamte Modell an den gelb markierten Knoten aus Abbildung 3.12 fest gelagert wird und am Kraftangriffspunkt mit einer statischen Kraft von 1 N in z-Richtung belastet wird. Die daraus folgende Verschiebung am Kraftangriffspunkt wird in Relation zur Kraft gesetzt und beschreibt die statische Steifigkeit der Platte

Körperschalleistung: dynamischer Lastfall In einem dynamischen Lastfall wird die übertragene Körperschalleistung vom Design- in den NonDesign-Bereich bestimmt. Die Lagerung ist identisch zum statischen Lastfall. Die Kraftanregung erfolgt mittels einer FRF am Kraftangriffspunkt durch eine sinusförmigen Anregung mit einer Amplitude von 1 N in einem Frequenzbereich von 0 bis 10000 Hz. Aufgrund der Rechenzeit wird eine modale FRF verwendet, die alle Eigenmoden (nach Lanczos) bis 20000 Hz berücksichtigt. Die modale Dämpfung wird auf einen konstanten Wert von 0.03 analog den Erfahrungswerten in der Akustiksimulation gesetzt.

3.3.3 Varianten zur Topologieoptimierung am Beispiel einer Platte

In einem ersten Vergleich wird eine Topologieoptimierung der Platte ohne Randbedingung der übertragenen Körperschalleistung (Referenzmodell) und mit (Variante A) durchgeführt. In beiden Fällen ist die Zielfunktion die Maximierung der Steifigkeit im statischen Lastfall unter Einbehaltung der Volumen-Randbedingung. Eine weitere Möglichkeit ist die Minimierung des Volumens als Zielfunktion mit der Körperschalleistung und der Steifigkeit als Randbedingung (Variante B).

Referenzmodell: Steifigkeits-Optimierung ohne Berücksichtigung der Körperschalleistung

Ziel dieser ersten Topologieoptimierung ist die Maximierung der Steifigkeit für den statischen Lastfall mit der Randbedingung, dass maximal 50 % des zur Verfügung stehenden Volumens genutzt werden darf. Mit der entstandenen Geometrie (Abbildung 3.14) wird in einer nachgelagerten Simulation die Körperschalleistung, die vom Design-Bereich in den NonDesign-Bereich übertragen wird, in einem dynamischen Lastfall bestimmt. Die übertragene Körperschalleistung ist in Abbildung 3.13 für einen Frequenzbereich von 0 - 10000 Hz dargestellt und hat ihr Maximum bei 2020 Hz mit 85.1 dB bzw. 0.32 W. Der maximale erreichte statische Steifigkeitswert wird normiert und beträgt als Referenz für die weiteren Optimierungen 1.00.

In den folgenden zwei Optimierungsvarianten wird die Art der Aufteilung von Zielfunktion und Randbedingung unterschieden. Da die Körperschalleistung über einen Frequenzbereich hinweg betrachtet werden soll und sich nicht als ein einzelner Wert für die Zielfunktion darstellen lässt, wird die Körperschalleistung in beiden Varianten als Randbedingung genutzt. In Variante A dient die Steifigkeit des Bauteils in einem statischen Lastfall als Zielfunktion und das genutzte Volumen als Randbedingung - in Variante B

wird das Volumen minimiert bei gleichzeitiger Einhaltung der vorgegebenen Steifigkeit und der übertragenen Körperschalleistung. Die maximal erlaubte übertragene Körperschalleistung beträgt in beiden Optimierungsvarianten 83.0 dB . Wird der Grenzwert zu niedrig angesetzt, so gibt es keine Lösung für das Problem - wird er zu hoch angesetzt, hat es unter Umständen nur einen geringen Einfluss auf die Akustik. Dies bedeutet eine Reduzierung von ca. 38 % im Vergleich zu der Referenz-Optimierung.

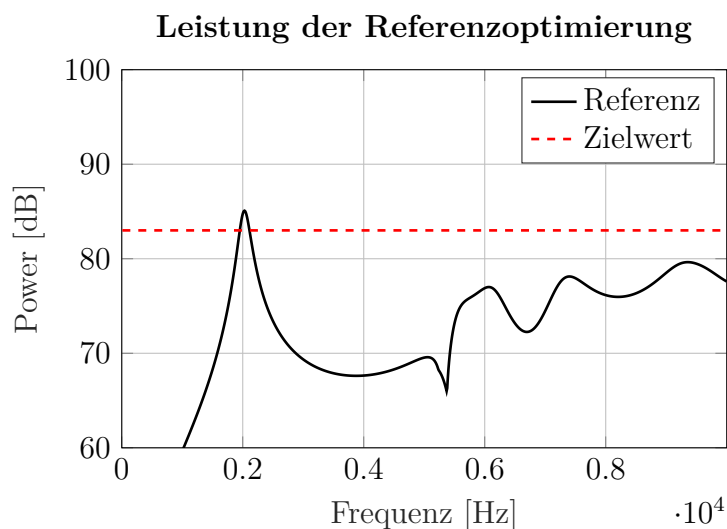


Abbildung 3.13: Übertragene Körperschalleistung der Referenz-Optimierung

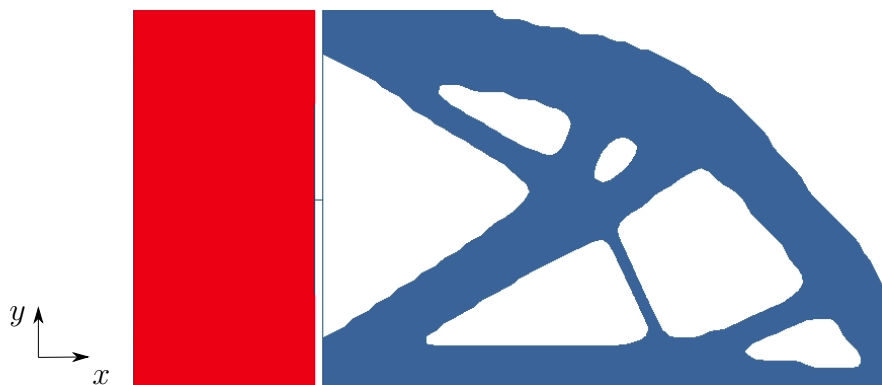


Abbildung 3.14: Designvorschlag aus Optimierungen für das Referenzmodell

Variante A: Maximierung der Steifigkeit mit Körperschalleistung und Volumen als Randbedingung

Für die Variante A wird die Steifigkeit in einem statischen Lastfall als Zielfunktion gesetzt. Die Randbedingungen, die eingehalten werden müssen, ist ein maximales Volumen von 50 % und der bereits erwähnte Grenzwert von 83 dB der übertragenen Körperschalleistung.

In der Topologieoptimierung werden die gegebenen Randbedingungen eingehalten und die Steifigkeit als Zielfunktion erreicht ihr Maximum bei einem Wert von 91.9 % der Referenzsteifigkeit. Die übertragene Körperschalleistung wird um 2.1 dB im Bereich um 2000 Hz auf die geforderten 83.0 dB gesenkt (Abbildung 3.16). Die resultierende Geometrie ist in Abbildung 3.16 abgebildet.

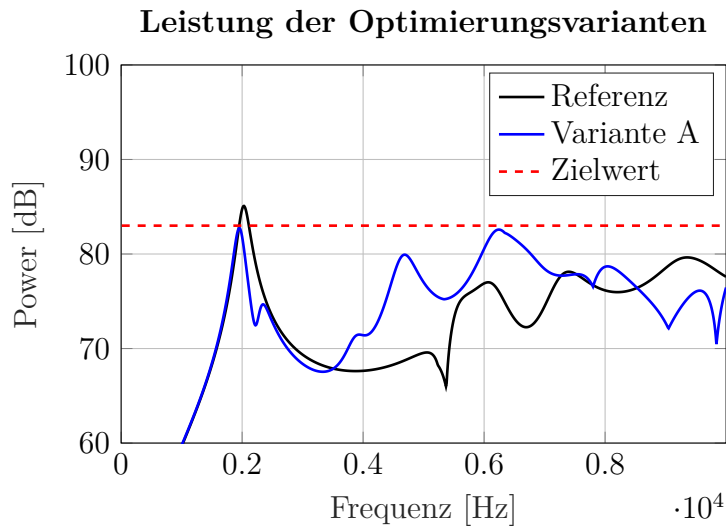


Abbildung 3.15: Vergleich der übertragenen Körperschalleistung zwischen der Referenz und Variante A

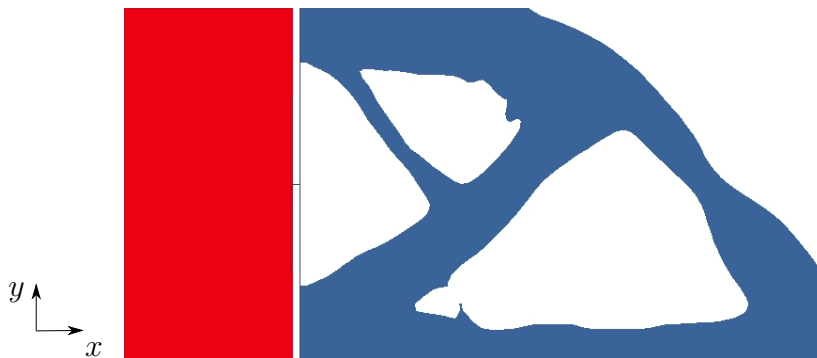


Abbildung 3.16: Designvorschlag aus Optimierungen für Variante A

Variante B: Minimierung des Volumens mit Körperschalleistung und Steifigkeit als Randbedingung

In der dritten Variante wird das Volumen als Zielfunktion minimiert und die Steifigkeit aus der Referenzberechnung als Randbedingung verwendet. Während die Randbedingung der Steifigkeit eingehalten werden kann, gibt es eine Verletzung der Körperschalleistung-Randbedingung. In diesem Fall kann der Zielwert von 83.0 dB nicht eingehalten werden.

Das Maximum liegt bei 1830 U/min mit 83.9 dB bzw. 0.25 W. Die Zielfunktion des verwendeten Volumens liegt mit 60.4 % über denen der Referenz und der Variante A.

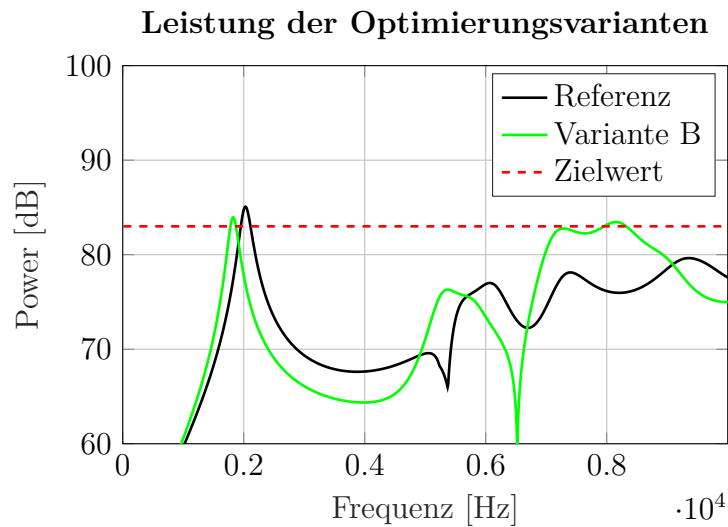


Abbildung 3.17: Vergleich der übertragenen Körperschalleistung zwischen der Referenz und Variante B

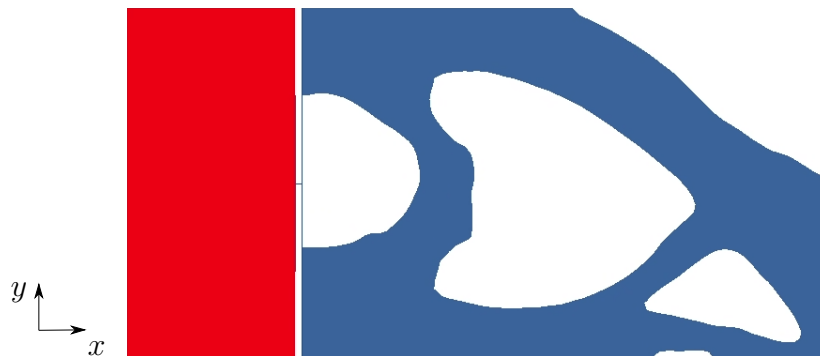


Abbildung 3.18: Designvorschlag aus Optimierungen für Variante B

3.3.4 Zusammenfassung der drei Varianten

Je nach Wahl der Zielfunktion und Randbedingung ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse. Liegt der Fokus der Optimierung auf dem Erreichen der Ziele von Gewicht und der Körperschalleistung und die Steifigkeit des Bauteils ist zweitrangig, so ergibt sich mit Variante A das optimale Bauteil. Muss hingegen die Steifigkeit und zusätzlich das Ziel der Körperschalleistung eingehalten werden, ist die zu bevorzugende Variante B das Optimum. Tabelle 3.6 zeigt zusammengefasst die jeweiligen erreichten Werte der jeweiligen Variante. Die Zielfunktion der Optimierung ist in blau markiert - die gesetzten Randbedingungen in rot. Abbildung 3.20 vergleicht die übertragene Körperschalleistung der drei Varianten.

Variante	Steifigkeit	Volumen	max. Leistung
Referenz	1.00	50.0 %	85.1 dB
Variante A	0.92	50.0 %	82.7 dB
Variante B	1.00	60.4 %	83.9 dB

Tabelle 3.6: Vergleich der Ergebnisse der Optimierungsvarianten mit der jeweiligen Zielfunktion in blau und den Randbedingungen in rot

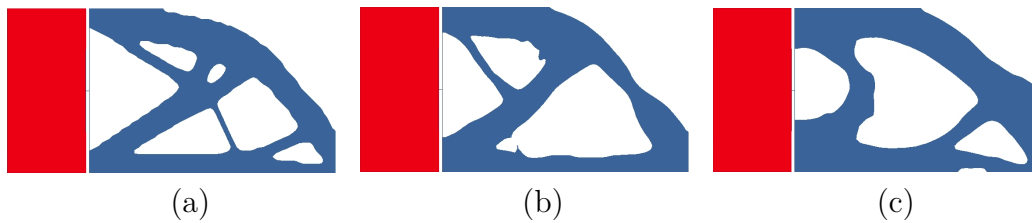


Abbildung 3.19: Designvorschlag aus Optimierungen für Referenz (a), Variante A (b) und Variante B (c)

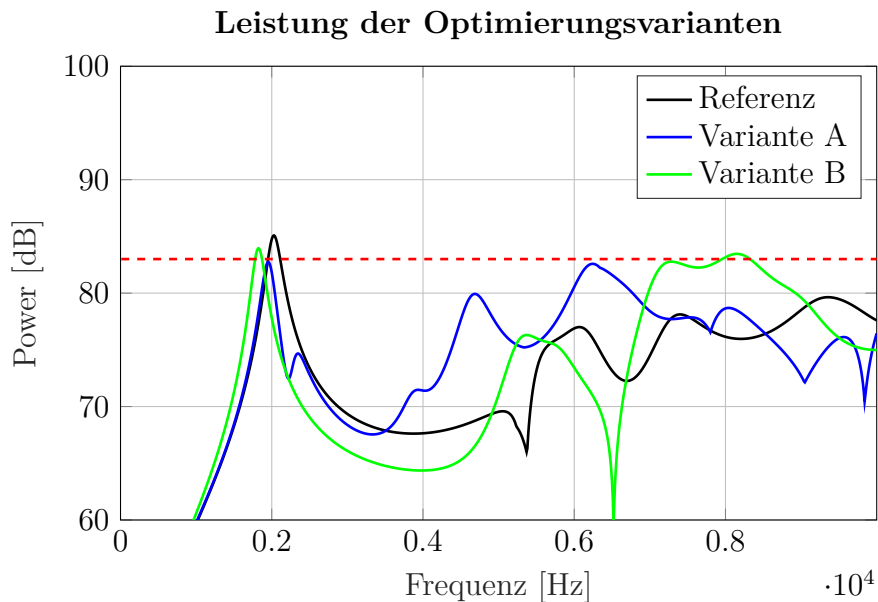


Abbildung 3.20: Körperschalleistung der drei Optimierungsvarianten für Referenz, Variante A und Variante B mit dem Zielwert der Körperschalleistung in rot

Automatisierte Designanpassung

Das Ergebnis einer Topologieoptimierung stellt keine funktionale CAD-Geometrie dar, sondern kann als eine Art Designvorschlag interpretiert werden. Die Realitätsnähe des Ergebnisses ist dabei abhängig von der Wahl der Randbedingungen (im speziellen der Fertigungsrandbedingungen). Mit dieser Hilfestellung wird die Struktur durch einen Konstrukteur in eine fertigungsgerechte CAD-Konstruktion überführt. Je nach Erfahrung des Konstrukteurs und dessen Fähigkeiten im Umgang mit der CAD-Software stimmt das Strukturverhalten der fertigen Konstruktion mit dem Designvorschlag in einem hohen oder weniger hohen Maß überein. Abbildung 4.1 zeigt den Vergleich eines Tragbocks als

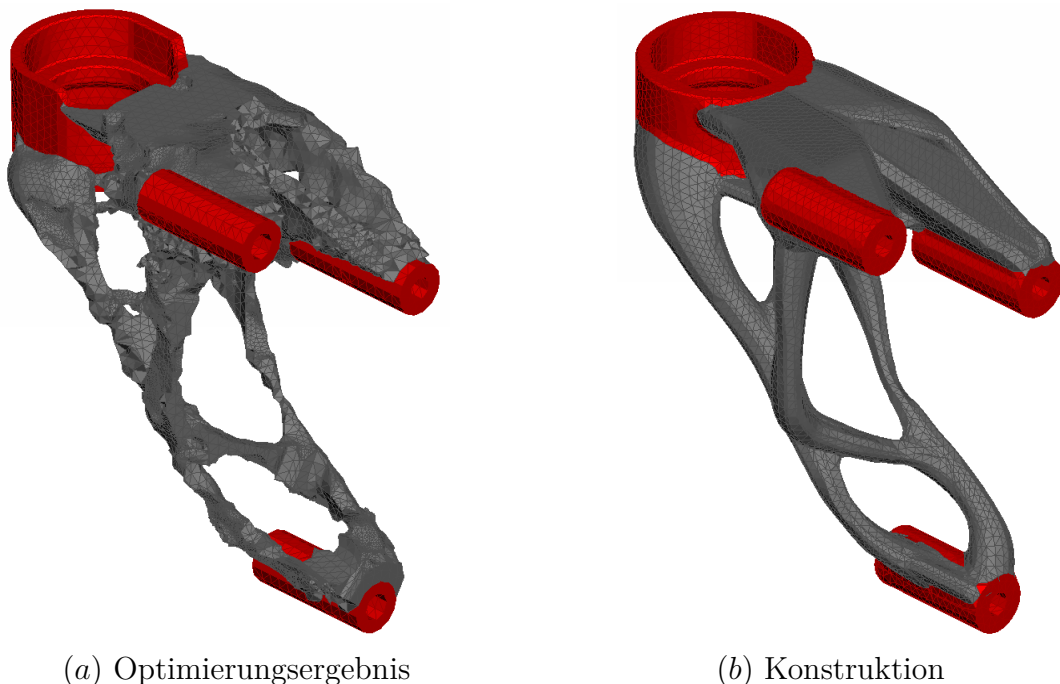


Abbildung 4.1: Vergleich des Optimierungsergebnisses mit dessen Interpretation in einer Konstruktion

Designvorschlag (Optimierungsergebnis, (a)) und der daraus abgeleiteten Konstruktion (b). Auf den ersten Blick wurde das Optimierungsergebnis aus geometrischer Sicht sehr

gut in der Konstruktion umgesetzt - ein späterer Vergleich aber zeigt, dass das dynamische Strukturverhalten der beiden Modelle deutlich voneinander abweicht. Um unabhängig von der Erfahrung und Fähigkeit des Konstrukteurs eine optimale Umsetzung in eine Konstruktion zu erhalten, wird in diesem Abschnitt eine Methode erarbeitet, die in einem ersten Schritt das Strukturverhalten der beiden Modelle vergleicht und in einem zweiten Schritt dieses Bewertungskriterium als eine Randbedingung für eine Designanpassung verwendet. Das Bewertungskriterium **Modal Assurance Criterion (MAC)** wurde in seinen Grundzügen bereits in Kapitel 2.4 vorgestellt. In diesem Kapitel wird diese Methode um eine neue Variante zur Berechnung des MAC-Wertes erweitert, welches die Vorteile der FEM nutzt um Ungenauigkeiten, die durch eine Messung entstehen, ausschließen zu können.

4.1 Ablauf der automatisierten Designanpassung

Die automatisierte Designanpassung folgt einem festen Ablaufprozess, um mit geringstem Rechenaufwand eine optimale Geometrie zu erhalten. Abbildung 4.2 zeigt den Ablauf der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten automatisierten Designanpassung als Ablaufdiagramm. Im ersten Schritt wird eine MAC-Bewertung durchgeführt, bei der das modale

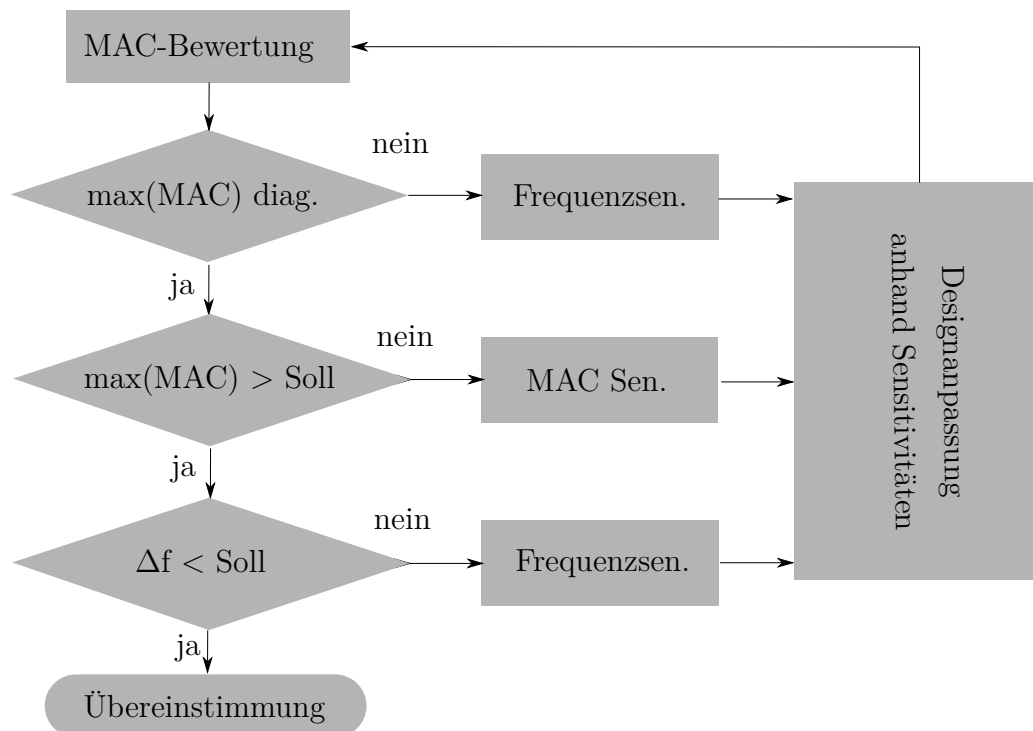


Abbildung 4.2: Ablaufplan der automatisierten Designanpassung

Verhalten des Optimierungsergebnisses mit dem der Konstruktion abgeglichen wird. Der MAC-Werte werden in Regel in einer Draufsicht eines 3D-Säulendiagramms dargestellt.

Auf den beiden Achsen sind die jeweiligen Eigenmoden aufgetragen. Die Höhe und damit die Farbe beschreibt den Grad der Übereinstimmung der Eigenmoden. Stimmt die Reihenfolge der Eigenmoden der beiden Modelle überein, so liegen die Maxima der MAC-Bewertung auf der Diagonalen des Plots. Ist das nicht der Fall, so wird über die Eigenfrequenzsensitivität (siehe Kapitel 2.5.3) die Geometrie dahingehend angepasst, dass die Reihenfolge übereinstimmt. Abbildung 5.22 zeigt in (a) einen Plot der MAC-Werte bei dem die Reihenfolge von Eigenmoden 4 und 5 in ihrer Frequenz nicht übereinstimmt. Durch eine automatisierte Designanpassung wird das Modell dahingehend geometrisch angepasst, dass die Eigenfrequenz von Eigenmode 5 unterhalb von der von Eigenmode 4 liegt (Abbildung 5.22(b)). Liegen nun alle Eigenfrequenzen in der richtigen Reihenfolge vor, so werden die einzelnen MAC-Werte angepasst. In der Praxis spricht man von einer

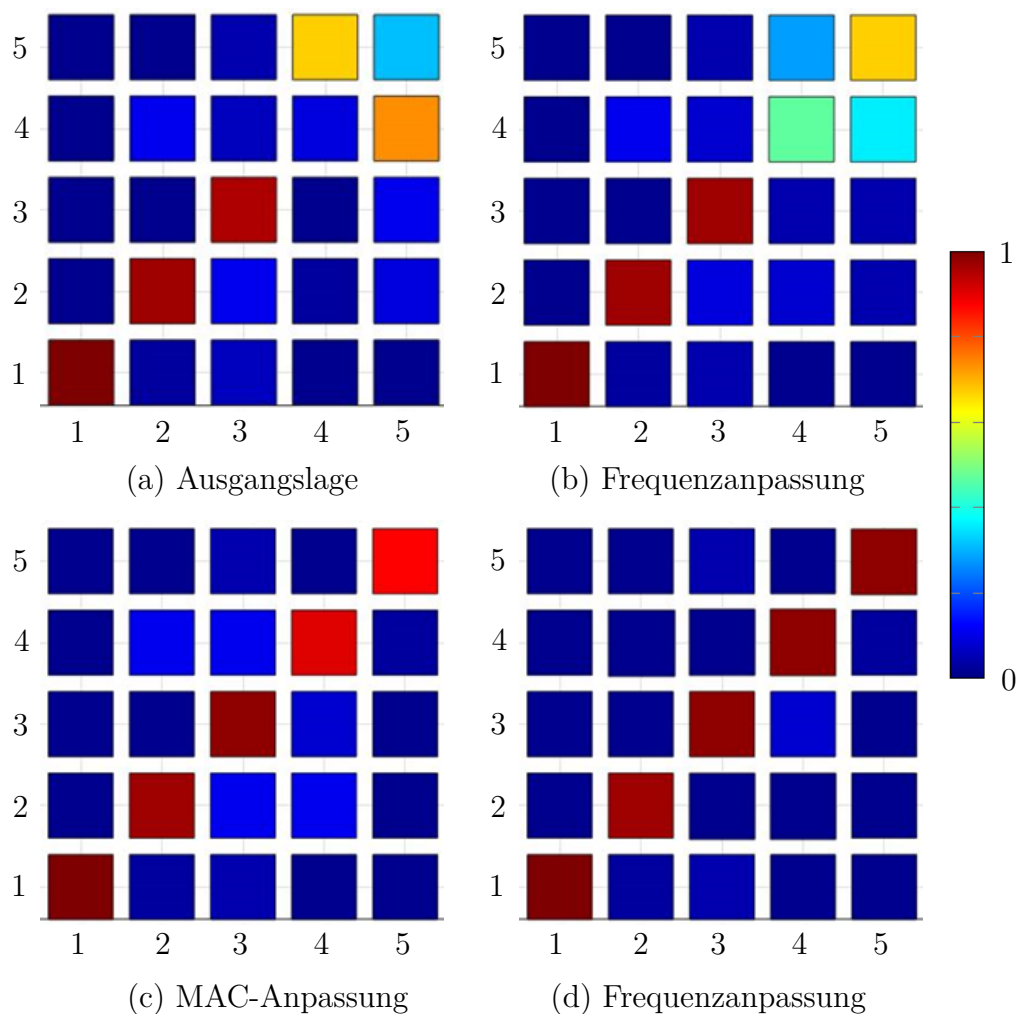


Abbildung 4.3: MAC-Plot für die Ausgangslage (a), nach der Frequenzanpassung (b), nach der MAC-Anpassung (a) und nach einer zusätzlichen Frequenzanpassung (b)

hohen Übereinstimmung, wenn der MAC-Wert bei ca. 0.7 – 0.8 liegt. Das entspricht einer Übereinstimmung von 70% bis 80% des modalen Verhaltens der beiden Modelle. Um diese Werte zu erreichen, wird die MAC-Sensitivität für den niedrigsten MAC-Wert auf

der Diagonalen berechnet. Die Geometrieanpassung erfolgt anhand der Sensitivitätswerte, bis alle MAC-Werte auf der Diagonalen den Zielwert erreicht haben. Abbildung 5.22 (c) zeigt den MAC-Plot mit den angepassten MAC-Werten im Vergleich zu Abbildung ?? (d). Im finalen Schritt werden die Eigenfrequenzen weiter angepasst, um das gesamte Strukturverhalten abzugleichen. Das Ergebnis der automatisierten Designanpassung ist eine Übereinstimmung der beiden Modelle von über 90% (Abbildung 5.22 (d)).

4.2 Modal Assurance Criterion Bewertung

Die automatisierte Designanpassung beginnt mit einem Abgleich der beiden Modelle durch eine MAC-Bewertung. Der weitere Ablauf wird im Folgenden anhand eines Beispiels einer rechteckigen Platte mit einer Kantenlänge von 100 x 40 mm gezeigt.

4.2.1 MAC-Bewertung einer Platte

Das Referenzmodell (Optimierungsergebnis) ist die genannte Platte mit einer Dicke von 2 mm. Das Vergleichsmodell (Konstruktionsmodell), dessen modale Eigenschaften auf das Referenzmodell angepasst werden sollen, ist eine Platte mit gleichen Abmessungen wie das Ausgangsmodell mit einer zusätzlichen Dickenerhöhung in der Mitte auf 3.5 mm. Aufgebaut sind die beiden Modelle mit linearen TETRA-Elementen (Tetraeder Elementen) mit einer durchschnittlichen Kantenlänge von 3 mm. In Abbildung 4.4 ist das FE-Modell der Referenzplatte dargestellt - in Abbildung 4.5 das Vergleichsmodell mit einer Dicke von 2 mm (orange) und der mittigen Erhöhung auf 3,5 mm (türkis). Die beiden FE-Modelle stimmen in ihrer Anzahl an Knotenpunkten und Elementen überein. Die beiden Platten bestehen aus Stahl mit den Materialkennwerten aus Tabelle 4.1. Zur Bestimmung der

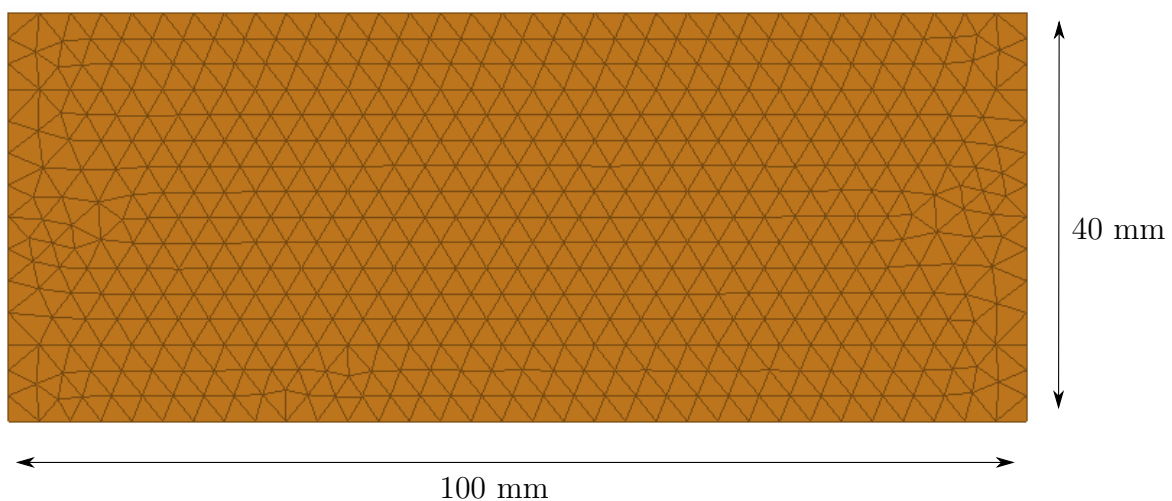


Abbildung 4.4: Finite Element Modell einer Platte

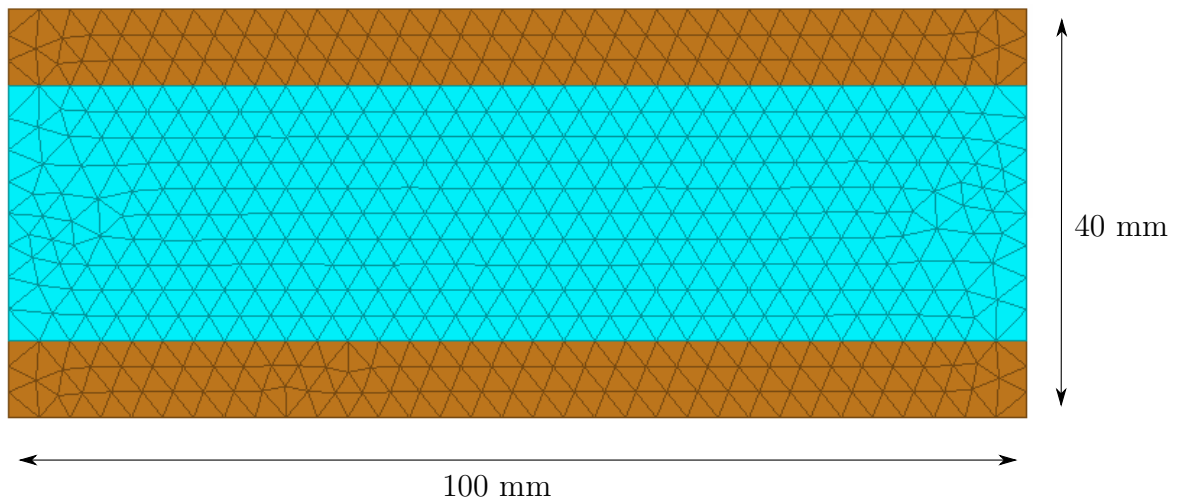


Abbildung 4.5: Finite Element Modell einer Platte mit Mittelstrebe

MAC-Werte werden die Eigenvektoren der jeweiligen Eigenmoden benötigt:

$$M_{MAC} = \frac{(\varphi_j^T \varphi_i)^2}{(\varphi_j^T \varphi_j) (\varphi_i^T \varphi_i)} . \quad (4.1)$$

Kenngröße	Wert
E-Modul	210 <i>GPa</i>
Querkontraktion	0,3
Dichte	7,85 $\frac{g}{cm^3}$

Tabelle 4.1: Materialkennwerte für Stahl

Durch eine Eigenwertanalyse werden die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren für die beiden Platten bestimmt. Randbedingung für diese Beispiel ist eine freie Aufhängung der Platte, was zu Starrkörpermoden führt. Die Anzahl der Starrkörpermoden entspricht dabei der Anzahl der Freiheitsgrade. Sie sind anhand ihrer niedrigen Eigenwerte im Vergleich zu den anderen Eigenmoden zu erkennen. Eine Relevanz der Starrkörpermoden für die Auslegung von Bauteilen ist nicht vorhanden und wird daher nicht weiter betrachtet. Die Nummerierung, startend bei dem ersten Eigenmode, bezieht sich auf den ersten freien Eigenmoden des Modells. Ein Vergleich der Eigenmoden in Abbildung 4.6 zeigt, dass Eigenmode 5 der Referenzplatte mit dem Eigenmode 6 der Vergleichsplatte übereinstimmt. Die dazugehörigen Eigenfrequenzen sind in Tabelle 4.2 zu finden.

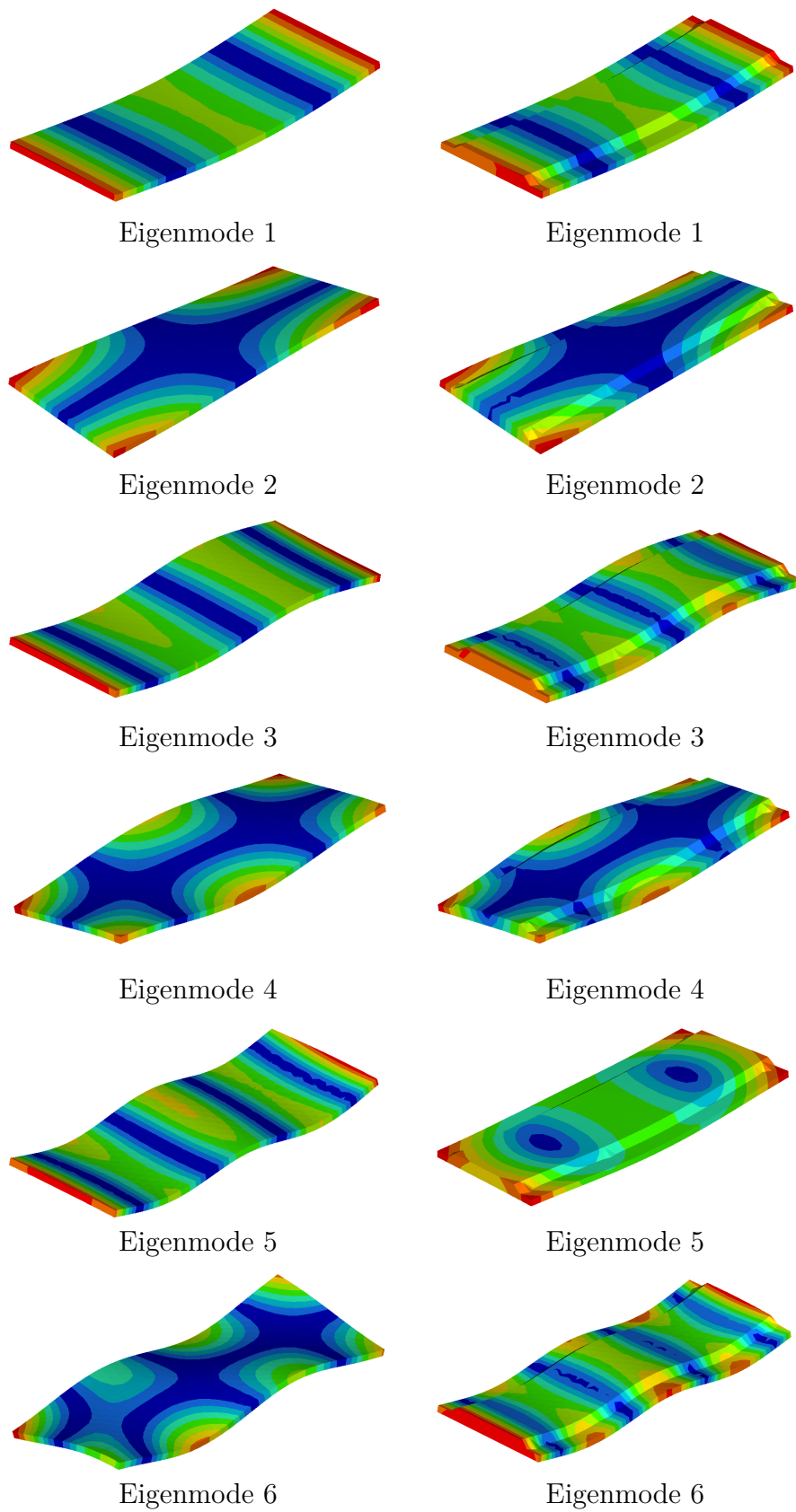


Abbildung 4.6: Eigenmoden 1-6 für die Referenzplatte (links) und der zu optimierenden Platte (rechts)

Eigenmode Nr.	Referenzmodell	Vergleichsmodell
1	1895,79Hz	2837,58Hz
2	3485,63Hz	5772,54Hz
3	5330,48Hz	8001,73Hz
4	7246,51Hz	11610,1Hz
5	10257,5Hz	14354,2Hz
6	11684,4Hz	15093,7Hz

Tabelle 4.2: Frequenzen der Eigenmoden 1 - 6

Es gibt zwei Arten eine MAC-Bewertung visuell darzustellen:

Numerisch Die Werte der MAC-Bewertung können in Form einer Tabelle mit den numerischen Werten dargestellt werden. Jede Zeile und jeder Spalte steht für einen Eigenmode des jeweiligen Modells. Den Eintrag in der jeweiligen Zelle gibt den Wert des MACs wieder (Tabelle 4.3).

Graphisch Wie bei der numerischen Darstellung kann das Modal Assurance Criterion auch graphisch durch einzelne Säulen oder Farben in Form eines Schachbretts abgebildet werden (Abbildung 4.7).

Eigenmode	1	2	3	4	5	6
1	0,999	0,000	0,000	0,000	0,009	0,000
2	0,000	0,995	0,000	0,000	0,000	0,005
3	0,000	0,000	0,976	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	0,890	0,000	0,000
5	0,009	0,000	0,000	0,121	0,009	0,000
6	0,000	0,005	0,000	0,000	0,940	0,012

Tabelle 4.3: Tabellarisch: MAC-Werte für zwei unterschiedliche Platten

Was der visuelle Vergleich der Eigenmoden in Abbildung 4.6 gezeigt hat, kann durch eine MAC-Bewertung in Abbildung 4.7 verdeutlicht werden. Die Reihenfolge der Eigenmoden der beiden Modelle stimmt nicht überein, da die Vergleichsplatte mit Eigenmode 5 einen zusätzlichen Eigenmode besitzt, der in der Referenzplatte nicht vorhanden ist. Damit entspricht Eigenmode 5 der Referenzplatte dem Eigenmode 6 der Vergleichsplatte. Dem Ablaufplan der automatisierten Designanpassung folgend wird in der ersten Iteration die Geometrie auf Grundlage der Eigenfrequenzsensitivität angepasst. Ziel dabei ist es, die Eigenfrequenz von Eigenmode 6 der Vergleichsplatte soweit zu senken, dass er unterhalb von Eigenmode 5 liegt.

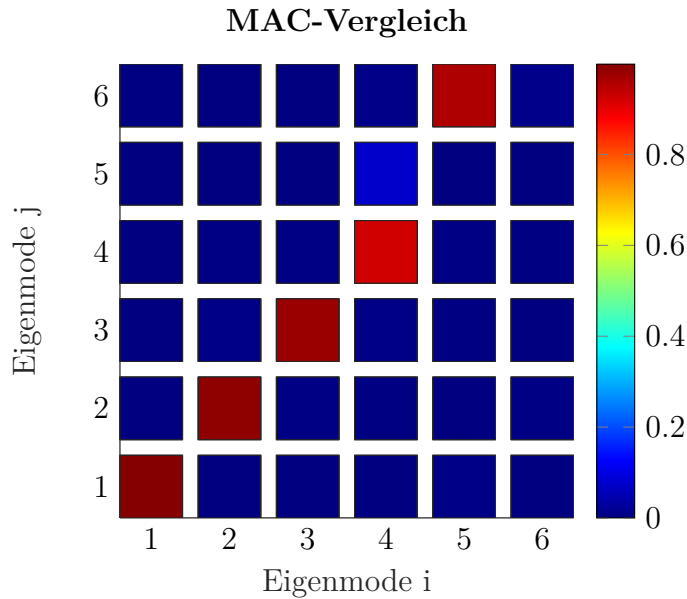


Abbildung 4.7: Graphisch: MAC-Werte für zwei unterschiedliche Platten

4.2.2 Alternative Berechnung der MAC-Werte

Bevor mit der automatisierten Designanpassung fortgefahren wird, wird im Folgenden eine alternative Berechnung des MACs vorgestellt. Das Ziel einer MAC-Bewertung ist es, in der Diagonalen des Plots beziehungsweise der Tabelle einen Wert von 1 und damit eine vollständige modale Übereinstimmung zu erhalten. Alle Nebendiagonalen sollten einen Wert von 0 haben. Damit sind die Eigenvektoren der beiden Modelle identisch und in der herkömmlichen Verwendung eine Bestätigung dafür, dass die Simulation mit den gemessenen Eigenvektoren übereinstimmt. Da es sich bei einer Messung nie um exakte (numerische) Werte der Eigenvektoren handelt, reicht die herkömmliche Variante der MAC-Bewertung aus. Werden hingegen zwei Simulationsergebnisse miteinander verglichen, zeigt sich die Ungenauigkeit in der MAC-Bewertung. Tabelle 4.4 zeigt die Werte einer MAC-Bewertung nach der herkömmlichen Methode für eine Simulation mit sich selbst (identische Eigenwerte und Eigenvektoren). Dabei fällt auf, dass in der Nebendiagonalen die Werte ungleich 0 sind und ein Aufaddieren der Werte einer jeden Zeile Werte größer 1 liefert, was numerisch nicht möglich sein sollte. Die Methode zur Berechnung der MAC-Bewertung basiert auf den Eigenvektoren aus Messungen, deren Werte nicht orthonormal zur Massenmatrix vorliegen. Durch den Vergleich zweier Simulationsmodelle liegt für beide Modelle die Massenmatrix vor und eine Orthonormalisierung mit der Massenmatrix ist für alle Eigenvektoren möglich. Ausgangsgleichung für die Berechnung der MAC-Werte ist Gleichung 2.122:

$$M_{MAC} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_j^T \varphi_i}{\varphi_j^T \varphi_j} \\ \frac{\varphi_i^T \varphi_j}{\varphi_i^T \varphi_i} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Eigenmode	1	2	3	4	5	6
1	1,000	0,000	0,000	0,000	0,012	0,000
2	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,009
3	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
5	0,012	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000
6	0,000	0,009	0,000	0,000	0,000	1,000

Tabelle 4.4: MAC-Bewertung einer Platte

Wird die Gleichung durch die beiden Massenmatrizen \mathbf{M}_i und \mathbf{M}_j für orthonormale Eigenvektoren erweitert, ergibt sich:

$$M_{MAC} = \begin{pmatrix} \varphi_j^T \mathbf{M}_j \varphi_i \\ \varphi_j^T \mathbf{M}_j \varphi_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i^T \mathbf{M}_i \varphi_j \\ \varphi_i^T \mathbf{M}_i \varphi_i \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Da in der FEM die Eigenvektoren orthonormal zur Massenmatrix angegeben werden folgt für die Nenner:

$$\varphi_j^T \mathbf{M}_j \varphi_j = 1 \quad (4.4)$$

und

$$\varphi_i^T \mathbf{M}_i \varphi_i = 1. \quad (4.5)$$

Für die MAC-Bewertung mit Einbezug der Massenmatrix gilt:

$$M_{MAC} = \left(\varphi_j^T \mathbf{M}_j \varphi_i \right) \left(\varphi_i^T \mathbf{M}_i \varphi_j \right). \quad (4.6)$$

Beim Abgleich der Platte mit sich selbst zeigt sich für die MAC-Bewertung nach Gleichung 4.6, dass alle Werte der Diagonalen genau 1 und alle Nebendiagonalen genau 0 sind (Tabelle 4.5). In Tabelle 4.6 sind die aufsummierten Werte für jede Spalte mit und ohne Einbezug

Eigenmode	1	2	3	4	5	6
1	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

Tabelle 4.5: MAC-Bewertung mit Massenmatrix-Methode

der Massenmatrix dargestellt. Wird die MAC-Bewertung nach der herkömmlichen Methode durchgeführt, ergeben sich Werte ≥ 1 - bei einer Gewichtung mit der Massenmatrix sind alle Werte exakt 1. Voraussetzung für den Abgleich mit der Massenmatrix-Methode

Eigenmode	1	2	3	4	5	6
ohne Massenmatrix	1,012	1,009	1,000	1,000	1,012	1,009
mit Massenmatrix	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabelle 4.6: Summe der MAC-Werte über alle Eigenmoden

ist die Dimension der Matrizen der zu vergleichenden Modelle. Sowohl die Anzahl der Eigenvektoren, als auch die Größe der Massenmatrizen müssen hier übereinstimmen und setzen eine Koinzidenz der Knotenpunkte beider Modelle voraus. Sind die Modelle aus unterschiedlichen FE-Netzen aufgebaut, ist eine direkte Berechnung der MAC-Bewertung mittels Massenmatrix nicht möglich.

4.3 Berechnung der Eigenfrequenzsensitivität

Im ersten Schritt der automatisierten Designanpassung wird die Reihenfolge der Eigenmoden zwischen Referenzmodell und Vergleichsmodell bewertet. Stimmt diese nicht überein, wird mit Hilfe der Eigenfrequenzsensitivität (siehe Kapitel 2.5.3) die Eigenfrequenz der jeweiligen Eigenmoden angepasst. Für das Beispiel der beiden Platten zeigt Abbildung 4.8 die erste MAC-Bewertung. Der 5. Eigenmode der Referenzplatte stimmt mit dem 6. Eigenmode der Vergleichsplatte überein. Um die Reihenfolge der Eigenmoden anzupassen,

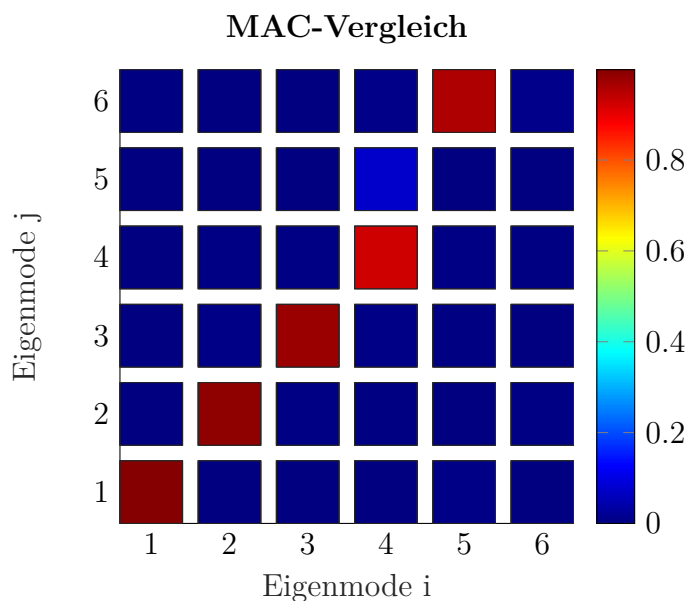


Abbildung 4.8: MAC-Bewertung der Ausgangssituation

muss durch eine Geometrieangepassung die Eigenfrequenz der 6. Eigenmode unterhalb der 5. Eigenmode verschoben werden. Nach Gleichung 2.135 kann die Eigenfrequenzsensitivität bestimmt werden durch:

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = \phi_i^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \phi_i \quad (4.7)$$

bzw. für den 6. Eigenmode:

$$\frac{d\lambda_6}{dx} = \phi_6^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda_6 \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \phi_6 . \quad (4.8)$$

Das Ergebnis ist die Sensitivität einer Knotenverschiebung in die jeweilige Raumrichtung

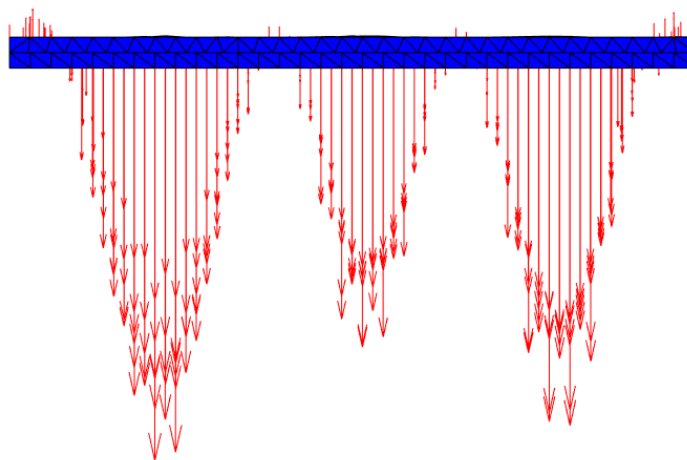


Abbildung 4.9: Sensitivitäten der 6. Eigenfrequenz einer Knotenverschiebung in Dickenrichtung (z-Richtung)

auf die Eigenfrequenz des 6. Eigenmodes. Je höher die Sensitivität, desto höher ist auch der Einfluss einer Verschiebung des Knotens auf die Eigenfrequenz. In Abbildung 4.9 sind die Sensitivitäten eine Knotenverschiebung in z-Richtung dargestellt. Für eine einfache Anwendung in dieser Arbeit wird bei der Geometrieangepassung anhand der Sensitivität auf erweiterte Optimierungsverfahren verzichtet. Die Anpassung erfolgt entsprechend der Sensitivitätswerte: Je höher der Sensitivitätswert ist, desto höher ist der Einfluss auf die Zielfunktion. Der Knotenpunkt mit der höchsten Sensitivität wird mit der größtmöglichen Verschiebung verschoben und alle anderen Knotenpunkte anteilmäßig entsprechend ihrer Sensitivität. Die maximal mögliche Verschiebung je Iteration muss beim Start der automatisierten Designanpassung angegeben werden. Es werden nur die Knotenpunkte an der Oberfläche der Geometrie angepasst. Knoten im Inneren werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Nach der Knotenverschiebung wird erneut eine MAC-Bewertung durchgeführt und entsprechend dem Ergebnis wird die Eigenfrequenz weiter angepasst, oder mit den tatsächlichen MAC-Werten fortgesetzt. Für das Beispiel sind 5 Iterationen notwendig, um die Reihenfolge der Eigenmoden zu sortieren. Abbildung 4.10 zeigt das Ausgangsmodell der Platte und die geometrische Anpassung nach der 5. Iteration. Mit jeder Iteration

ist die Eigenfrequenz des 6. Eigenmodes gesenkt worden - in der 5. Iteration war die Eigenfrequenz unterhalb der des 5. Eigenmodes (Abbildung 4.11). Durch die Verschiebung der Eigenfrequenz stimmt die Reihenfolge der Eigenmoden beider Modelle überein (siehe Abbildung 4.12). Auch in der MAC-Bewertung liegen nach der Designanpassung alle Maxima auf der Diagonalen (Abbildung 4.13).

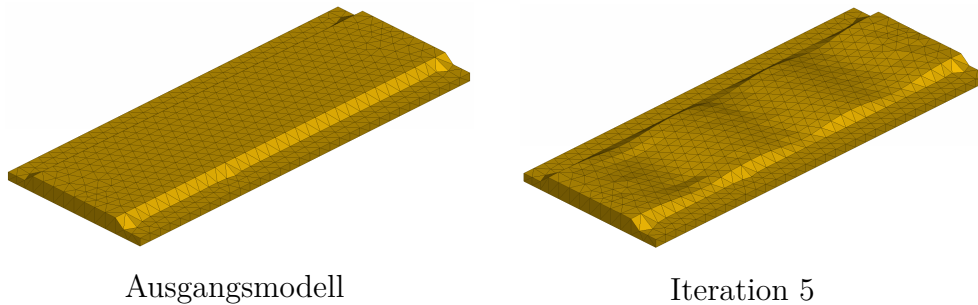


Abbildung 4.10: Geometrischer Vergleich des Ausgangszustandes und der 5. Iteration

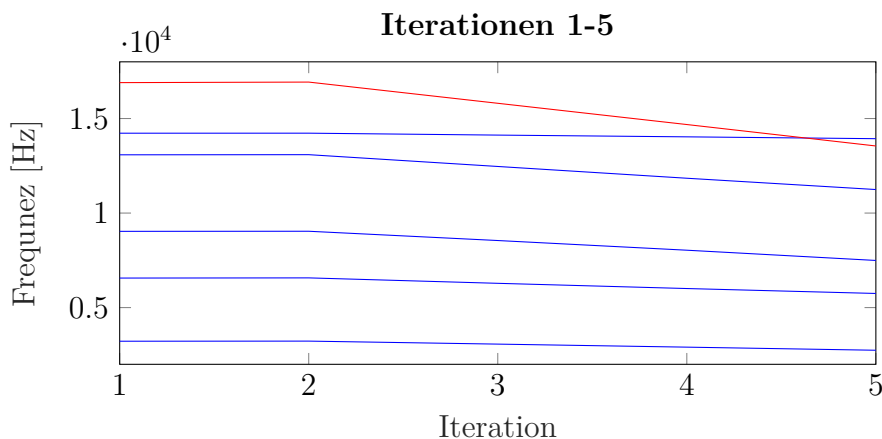


Abbildung 4.11: Iterative Eigenfrequenzanpassung für den 6. Eigenmode (rot)

4.4 Berechnung der MAC-Sensitivität

Im ersten Schritt der automatisierten Designanpassung wurden die Eigenfrequenzen der Eigenmoden in ihrer Reihenfolge angepasst. Eigenmoden 1-5 weisen bereits eine hohe Übereinstimmung im MAC-Wert überein - der 6. Eigenmode zeigt eine deutliche Abweichung auf und wird durch eine Geometrieangepassung mittels MAC-Sensitivität angepasst.

4.4.1 Herkömmliche Variante der MAC-Bewertung

Die Bewertung der Sensitivität des MAC-Wertes anhand der herkömmlichen Methode wurde bereits in Kapitel 2.5.5 gezeigt. Für die indirekte Methode zur Berechnung der

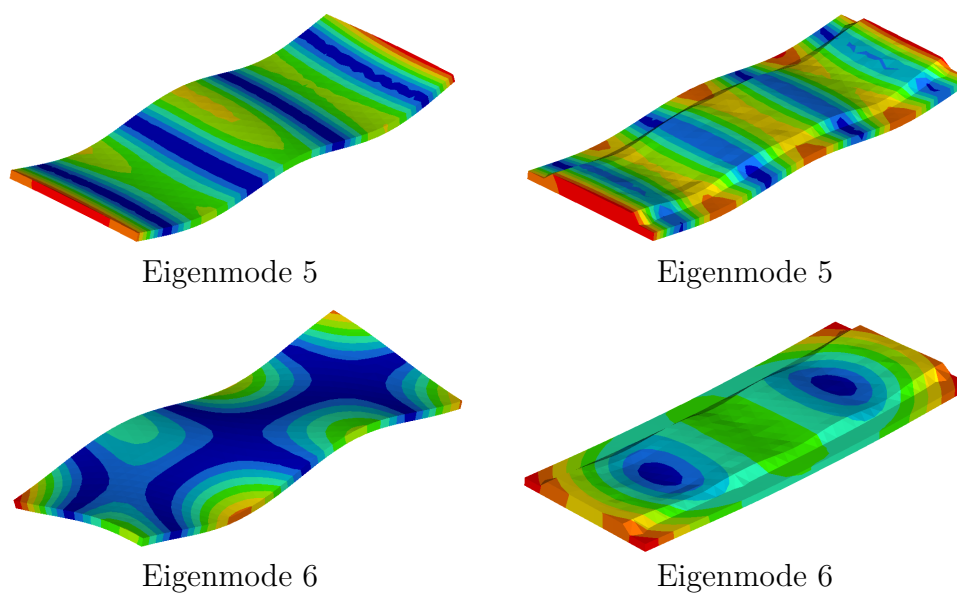


Abbildung 4.12: Eigenmode 5 und 6 des Ausgangszustandes und der 5. Iteration

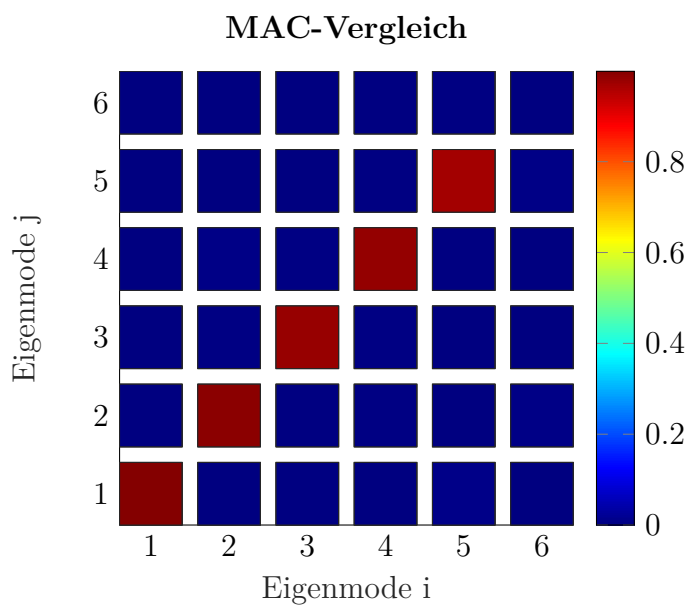


Abbildung 4.13: MAC-Bewertung nach Anpassung der Eigenfrequenzen

MAC-Sensitivität gilt nach 2.152:

$$\frac{dM_{MAC}}{dx} = \frac{2(\varphi_j^T \varphi_i) \varphi_j^T}{(\varphi_j^T \varphi_j) (\varphi_i^T \varphi_i)} \frac{d\varphi_i}{dx} - \frac{2(\varphi_j^T \varphi_i)^2 \varphi_i^T}{(\varphi_j^T \varphi_j) (\varphi_i^T \varphi_i)^2} \frac{d\varphi_i}{dx} \quad (4.9)$$

oder für die direkte Methode nach 2.163:

$$\frac{\mathbf{L}_{MAC}}{dx} = \mathbf{v}^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i - \lambda_i \frac{d\mathbf{M}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i \right) + \alpha \left(\boldsymbol{\phi}_i^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \boldsymbol{\phi}_i \right). \quad (4.10)$$

Da die Eigenmoden 1-5 für das Beispiel eine hohe Übereinstimmung aufweisen (> 80%),

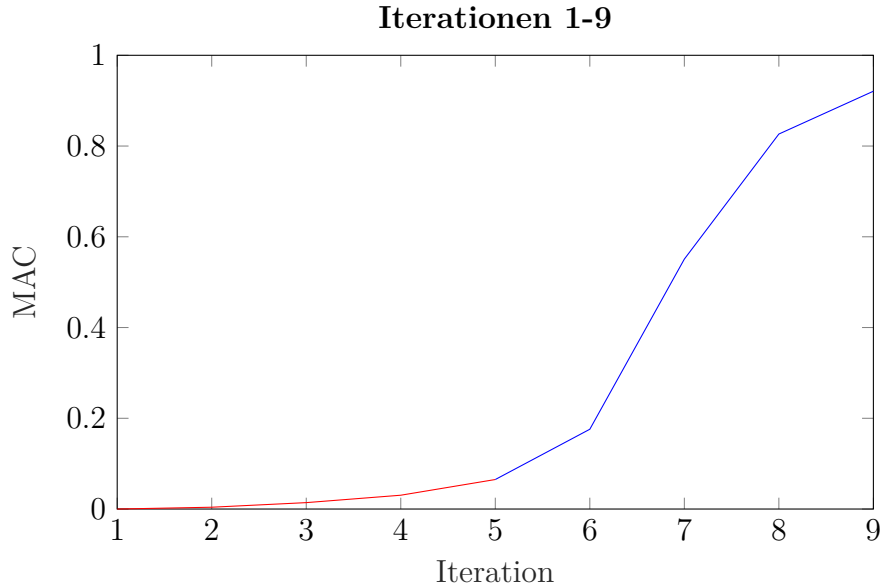


Abbildung 4.14: Iterative Anpassung des MAC-Wertes des 6. Eigenmodes

wird die MAC-Sensitivität für den 6. Eigenmode bestimmt. Darauf basierend erfolgt eine Geometrie-Anpassung wie bereits im Kapitel zuvor. In der Praxis gilt ein MAC-Wert zwischen Messung und Simulation von mindestens 0.7 als zwei übereinstimmende Eigenmoden. Für den simulativen MAC-Abgleich wurde für dieses Beispiel eine Übereinstimmung von mindestens 0.9 gefordert. Abbildung 4.14 zeigt den Grad der Übereinstimmung der beiden Modelle für den minimalen MAC-Wert der Diagonalen über die einzelnen Iterationen hinweg. In der ersten Iteration wurde bei einem MAC-Wert von 0.00 gestartet und bereits in der 9. Iteration eine Übereinstimmung von 0.92 erreicht. Das finale Ergebnis der geometrischen Anpassung des MAC-Wertes ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Wird die Startgeometrie mit der Geometrie der finalen MAC-Designanpassung verglichen (Abbildung 4.16), zeigt sich eine Differenz, die auf das modale Verhalten keine Auswirkungen hat (siehe MAC-Vergleich Abbildung (4.15)).

4.4.2 Alternative Variante der MAC-Bewertung

In Kapitel 4.2.2 wurde eine Alternative zur Berechnung der MAC-Bewertung für den Vergleich zweier Simulationsmodelle durch Einbezug der Massenmatrizen gezeigt. Die MAC-Werte berechnen sich nach Gleichung 4.6 zu:

$$\mathbf{M}_{MAC} = \left(\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M}_j \boldsymbol{\varphi}_i \right) \left(\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M}_i \boldsymbol{\varphi}_j \right). \quad (4.11)$$

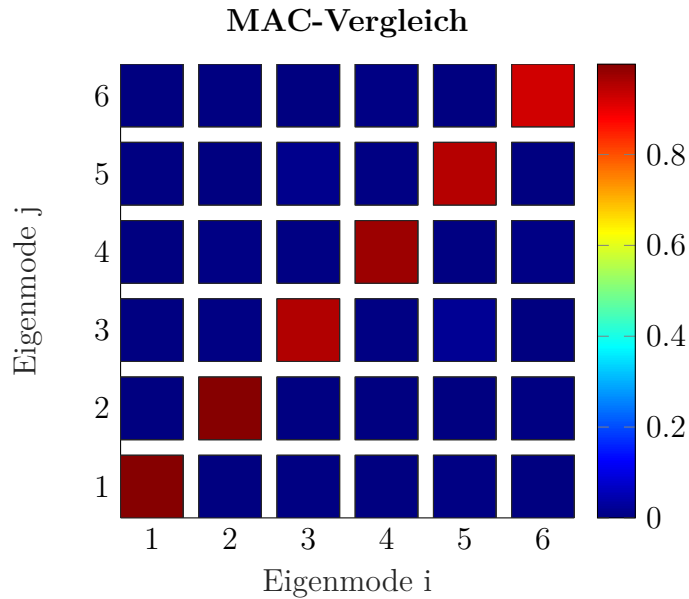


Abbildung 4.15: MAC-Bewertung nach der Anpassung der MAC-Werte

Die Werte φ_j und \mathbf{M}_j sind feste Größen und beschreiben das Verhalten des Referenzmodells. Wird die Gleichung 4.11 nach einer Designvariable x abgeleitet, so ist φ_i und \mathbf{M}_i abhängig von der Designvariable:

$$\frac{d\mathbf{M}_{MAC}}{dx} = \left(\varphi_j^T \mathbf{M}_j \frac{d\varphi_i}{dx} \right) (\varphi_j^T \mathbf{M}_j \varphi_i) + \left(\varphi_i^T \mathbf{M}_i \varphi_j \right) \left(\varphi_i^T \frac{d\mathbf{M}_i}{dx} \varphi_j + \varphi_i^T \mathbf{M}_i \frac{d\varphi_j}{dx} \right). \quad (4.12)$$

Wie schon in Kapitel 4.2.2 beschrieben, ist die Voraussetzung für die Verwendung der alternativen Variante der MAC-Bewertung, dass die Anzahl der Knoten und Knotennummerierung der beiden Vergleichsmodelle übereinstimmt. In der Praxis hat sich gezeigt, dass dies nie der Fall ist - beziehungsweise einen Mehraufwand bedeutet, der die Vorteile dieses Verfahrens nicht rechtfertigt. Es wäre denkbar, dieses Verfahren durch eine Modellreduktion nach Craig-Bampton oder einem ähnlichen Verfahren auf kongruente Knoten zu reduzieren. Durch die kongruenten Knotenpunkte kann die MAC-Bewertung mit der reduzierten Massenmatrix der beiden Modelle durchgeführt werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden die herkömmliche Variante der MAC-Bewertung betrachtet.

4.5 Abgleich der Eigenfrequenzen

Mit dem Anpassen der Mac-Werte stimmen die Eigenformen der beiden Modelle größtenteils überein. Um eine Überlagerung von Eigenfrequenzen durch andere Bauteile im gesamten System zu verhindern, ist eine Übereinstimmung der Eigenfrequenzen zwischen dem Ausgangsmodell und dem Referenzmodell notwendig. Im letzten Schritt gibt es die Möglichkeit weitere Iterationen der Geometrie-Anpassung durch die Eigenfrequenzsensitivität durchzuführen. Tabelle 4.7 zeigt den Vergleich der Eigenfrequenzen der ersten 6

Eigenmoden der beiden Modelle nach der zuvor durchgeführten Geometrieanpassung zur MAC-Bewertung. Das Vorgehen zur Eigenfrequenzanpassung wurde bereits in Kapitel 4.3

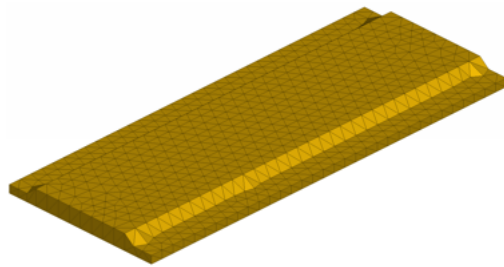
Eigenmode Nr.	Modell 1	Modell 2
1	1895,79Hz	1935,58Hz
2	3485,63Hz	3698,54Hz
3	5330,48Hz	5501,73Hz
4	7246,51Hz	7332,1Hz
5	10257,5Hz	10421,2Hz
6	11684,4Hz	12001,7Hz

Tabelle 4.7: Frequenzen der Eigenmoden 1 - 6

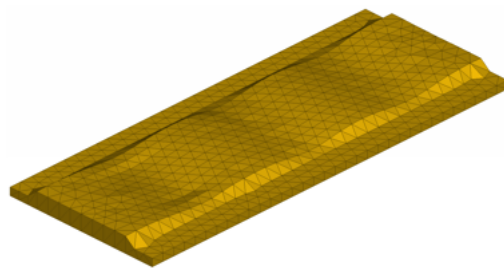
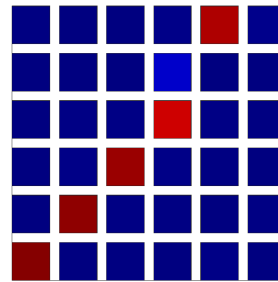
gezeigt und wird an dieser Stelle nicht weiter wiederholt.

4.6 Ergebnis der automatisierten Designanpassung

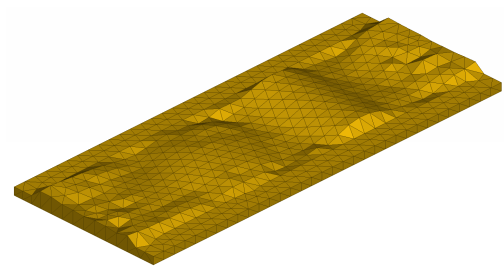
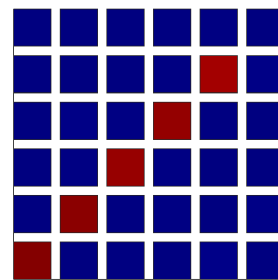
Für das Beispiel der Platte wurde der Ablauf der automatisierten Designanpassung aufgezeigt. Eine Zusammenfassung der einzelnen Schritte zeigt Abbildung 4.16. Die initiale MAC-Bewertung hat gezeigt, dass die Reihenfolge der Eigenmoden nicht übereinstimmt. Durch eine geometrische Anpassung analog der Eigenfrequenzsensitivität wurde die Reihenfolge zwischen dem 5. und 6. Eigenmode getauscht, wodurch die Maxima der MAC-Bewertung auf der Diagonalen liegen. Für eine Übereinstimmung des 6. Eigenmodes beider Modelle wird die Geometrie analog der MAC-Sensitivität angepasst, bis die Übereinstimmung aller Eigenmoden mindestens 0.9 beträgt. Eine optionale weitere Anpassung der Eigenfrequenzen der beiden Modelle wurde im letzten Abschnitt aufgezeigt. Der finale Vergleich der Referenzplatte mit dem geometrisch angepassten Optimierungsergebnisses ist anhand der Eigenmoden und deren Verformung in Abbildung 4.17 für die ersten 6 Eigenmoden dargestellt.



Referenzmodell



Frequenzanpassung



Optimierung MAC-Wert

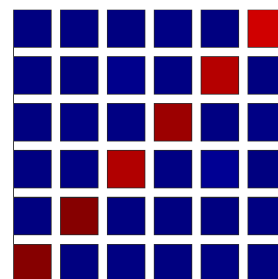


Abbildung 4.16: Vergleich der einzelnen Optimierungsschritte mit zugehöriger MAC-Bewertung

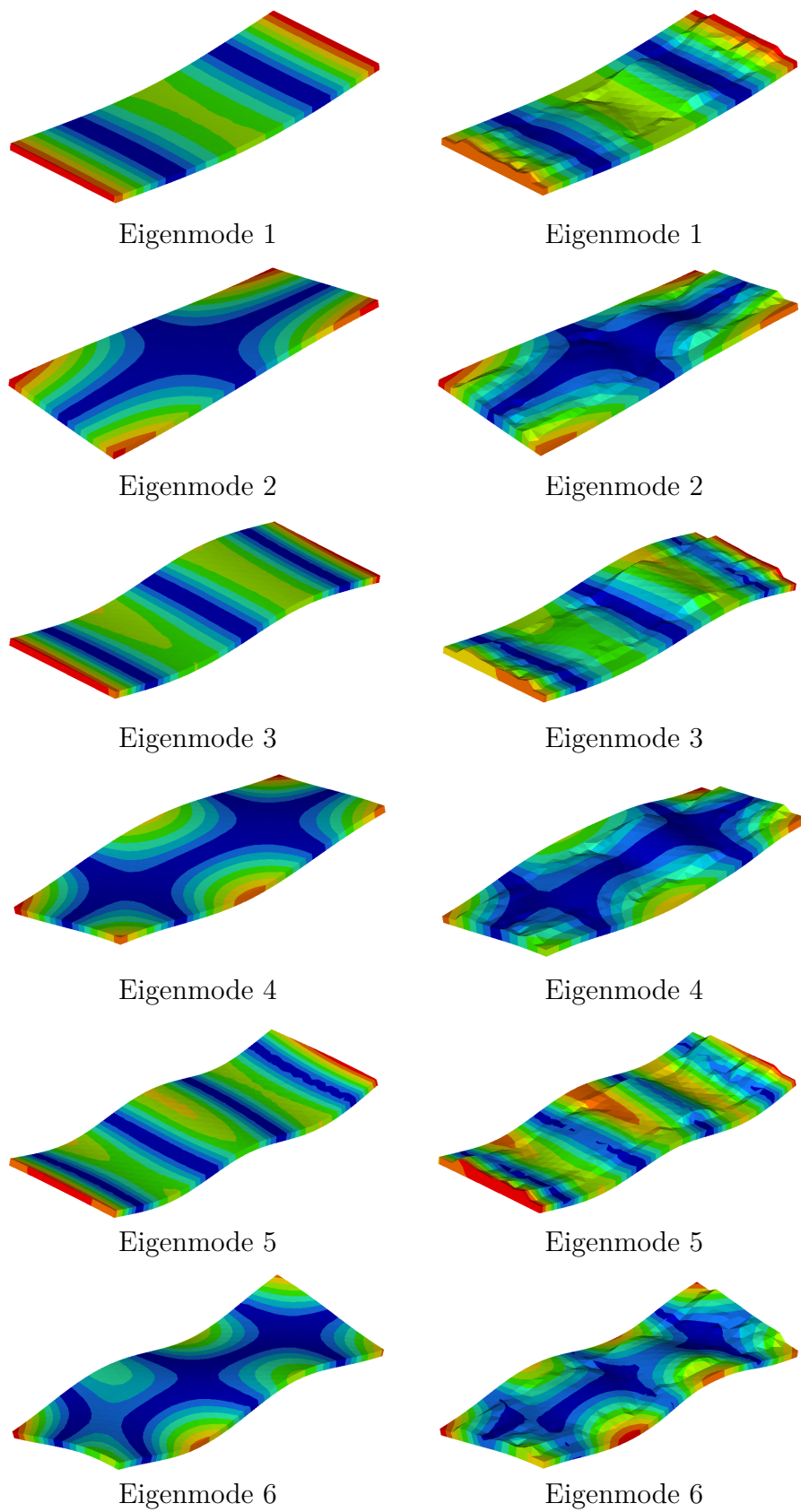


Abbildung 4.17: Vergleich der Eigenmoden nach der automatisierten Designanpassung

Anwendung in der Praxis

In Kapitel 3 und 4 wurden die leistungsbasierte Topologieoptimierung und die automatisierte Designanpassung anhand von einfachen Beispielen in Form eines Stabes oder einer Platte aufgezeigt. Die Methoden können auch für praxisnahe industrielle Anwendungen verwendet werden. Als Beispiel dient die Auslegung von Tragböcken einer elektrischen Antriebsmaschine (E-Maschine). Die Motortragböcke beinhalten die Aggregatelager und stellen die Verbindung zwischen der E-Maschine und der Karosserie dar. Ziel der Auslegung der Tragböcke ist es, die hochfrequenten Schwingungen aus der Antriebseinheit soweit wie möglich zu unterbinden und die damit einhergehende Schallabstrahlung im Innenraum des Fahrzeuges zu minimieren. Ein Kriterium für die Bewertung der Akustik ist die Messung des Schalldruckpegels am Fahrerohr. Für eine gezielte Bewertung des akustischen Übertragungsverhaltens einzelner Komponenten wird das akustische Hauptziel (Schalldruckpegel am Fahrerohr) auf einzelne Ziele der Komponenten aufgeteilt. Für die Motortragböcke wird in dieser Arbeit erstmalig die von ihnen übertragene Körperschalleistung bewertet und in einer Topologieoptimierung bei der Auslegung berücksichtigt. Das Ergebnis der Optimierung dient als Designvorschlag für eine Erstkonstruktion. Durch die automatisierte Designanpassung wird die Konstruktion an das Ergebnis der Optimierung angepasst. Nach der Bewertung der Betriebsfestigkeit werden die Tragböcke gefertigt und an einem Fahrzeug auf dem Rollenprüfstand zur Validierung der Methode akustisch vermessen.

5.1 Modellaufbau einer elektrischen Antriebsmaschine

Eine elektrifizierte Antriebseinheit besteht aus einer E-Maschine, dem Getriebe und den Tragböcken mit Elastomerlagern, welche die gesamte Einheit mit der Karosserie verbinden. Abbildung 5.1 zeigt ein FE-Modell der in dieser Arbeit verwendeten Antriebseinheit als FE-Modell. Das Innenleben ist in Abbildung 5.2 zu sehen. Die E-Maschine und das Getriebe ist mit allen für die Simulation relevanten Bauteilen aufgebaut: Rotor, Stator, Getriebezahnräder und Gehäuseteile. Gelagert ist die Antriebseinheit über zwei Tragböcke (linker und rechter Tragbock in Fahrtrichtung) und einem dritten Lagerpunkt, der direkt

am Getriebegehäuse angebracht ist. Der in Abbildung 5.2 in rot gefärbte Tragbock wird im Folgenden Getriebetragbock - der blau gefärbte Statortragbock genannt.

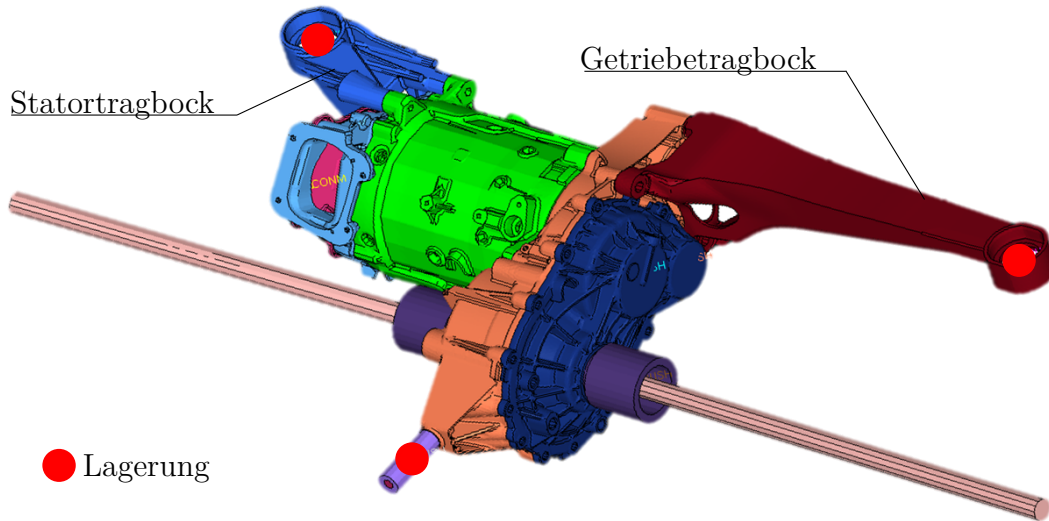


Abbildung 5.1: FEM-Modell der E-Maschine

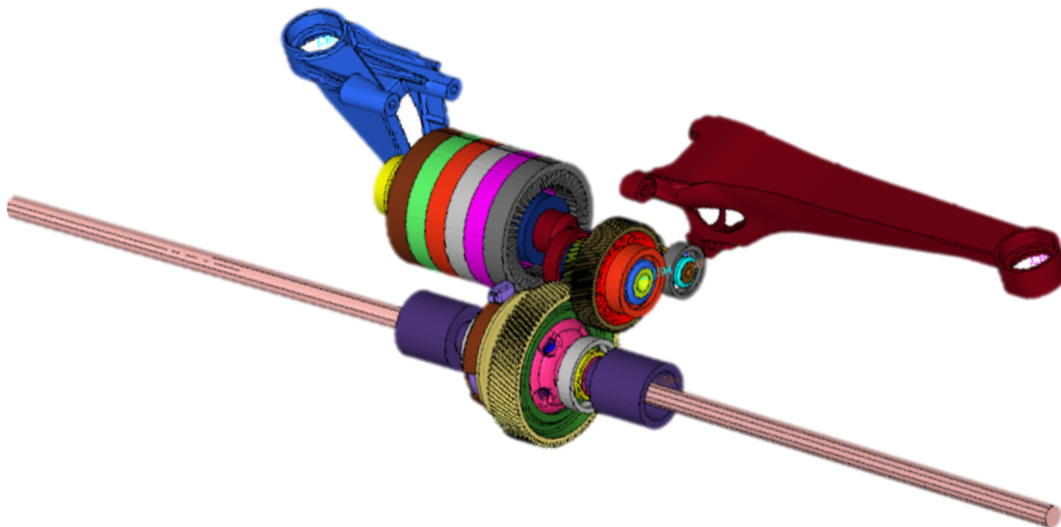


Abbildung 5.2: FEM-Modell des Innenleben

Anregung einer E-Maschine

Auf den Rotor einer E-Maschine wirkt ein Drehmoment, das durch gegenseitige Anziehungs- und Abstoßkräfte aufgrund von Magnetfeldern entsteht. Das Drehmoment ist dabei nicht konstant, sondern unterliegt einer periodischen Zu- oder Abnahme, welches durch die

wechselnden Kräfte entsteht. Diese Drehmoment-Welligkeit wird als Torque Ripple bezeichnet. Der Stator der E-Maschine ist unterteilt in sechs einzelne Blechpakete (siehe Abbildung 5.2), die jeweils einen Versatz von 15° zueinander haben. Durch vier kreuzförmig angeordnete Magnete im Rotor ergibt sich eine Anregung mit vier Impulsen für eine Umdrehung. Durch die sechs Blechpakete und die vier Magnete ergeben sich 24 Anregungen (je 15°) pro Umdrehung. Die Hauptordnung, die durch die Anregung der E-Maschine entsteht, wird erste Motorhauptordnung genannt. Für die Umrechnung von der Drehzahl (n) zur betrachteten Frequenz (f) ergibt sich durch die 24 Anregungen pro Umdrehung (n_{Mo}):

$$f = \frac{n}{n_{Mo}} . \quad (5.1)$$

Um die Methode der Körperschalleistungsoptimierung in der Praxis zu zeigen, werden die Untersuchungen auf die erste Motorhauptordnung fokussiert. In der Simulation wird diese Motorhauptordnung in einer Frequency Response Funktion (FRF) umgesetzt, wie sie in Kapitel 2.1.3 beschrieben ist. Die Anregung erfolgt in der Simulation durch eine periodische Kraft, die mit der entsprechenden Frequenz auf die einzelnen Rotorscheiben des Stators wirken. Die Schwingungen werden über das Getriebe an das Gehäuse und damit auf die Motortragböcke und die Karosserie übertragen. Durch eine Topologieoptimierung der Motortragböcke wird die übertragene Körperschalleistung in die Karosserie reduziert, was zu einer Minderung des Schalldruckpegel am Fahrerohr führt.

5.2 Leistungsbasierte Topologieoptimierung von Tragböcken

In der Automobilindustrie werden Antriebseinheiten entwickelt, die in einer Vielzahl unterschiedlicher Karosserie-Varianten zum Einsatz kommen. Je nach Karosserie-Variante unterscheiden sich die Lagerpunkte für die selbe Antriebseinheit aufgrund von geometrischen und funktionalen Randbedingungen. Die Folge ist eine Vielzahl von verschiedenen Motortragböcken, die den Einsatz einer Antriebseinheit in jedem Fahrzeug ermöglichen. Die Auslegung der Motortragböcke erfolgt Antriebs- und Karosserieform spezifisch unter dem Haupt Gesichtspunkt der Akustik.

5.2.1 Aufbau einer E-Maschine zur Bestimmung der Körperschalleistung

Die in dieser Arbeit verwendete E-Maschine liegt als FE-Modell vor und wird mit der entsprechenden Kraft aus den Torque Ripple in einer FRF-Simulation an den einzelnen Blechpaketen des Stators (Abbildung 5.3) beaufschlagt. Die Anschraubpunkte der Lagerpunkte an der Karosserie stellen die Abgrenzung des FEM-Modells dar, da als Vereinfachung des Modells die komplexe Geometrie der Karosserie nicht aufgebaut wird. Als Alternative werden die Anschraubpunkte über Federn mit den jeweiligen Steifigkeits-

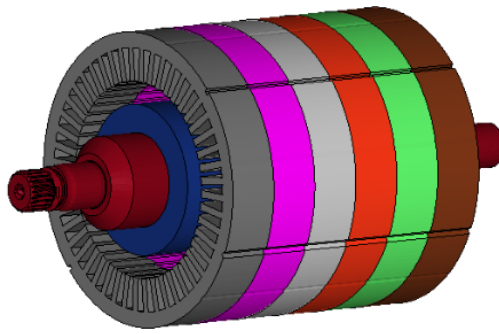


Abbildung 5.3: Rotor der E-Maschine bestehend aus 6 Rotorpaketen

kennlinien der Gummilager gegen eine starre Einspannung gelagert. Diese Methode wird verwendet, um Beschleunigungen, Geschwindigkeiten oder Verschiebungen aufgrund der frequenzabhängigen Anregung zu bewerten. Um die Körperschalleistung zu bestimmen, muss eine Senke im System vorhanden sein, in der Leistung dissipiert werden kann (vergleiche Kapitel 2.3.4). In der Regel dient die Karosserie als Leistungssenke und bestimmt die Körperschalleistung, welche über die Anschraubpunkte übertragen werden kann. In Tabelle 5.1 sind verschiedenen Varianten zum Aufbau der Lagerung für die E-Maschine und deren Einfluss auf die Körperschalleistung dargestellt. Unter Berücksichtigung der Gleichung zur Bestimmung der Körperschalleistung (Gleichung 2.99) lässt sich die Auswirkung der verschiedenen Varianten erklären:

$$P_m = P_W = \frac{f_0 v_0}{2} \cos(\varphi_f - \varphi_v) . \quad (5.2)$$

Variante (a) beschreibt eine feste Verbindung der Tragböcke mit der Umgebung. Hier wirkt zwar eine Kraft auf den Anschraubpunkt - die Geschwindigkeit beträgt durch die feste Einspannung jedoch null. Damit kann in diesem System keine Leistung übertragen werden. In Variante (b) ist genau das Gegenteil der Fall. Durch die freie Anbindung des Lagerpunktes ist die Kraft null und damit auch die Leistung. Die herkömmliche Methode zur Anbindung der Lagerpunkte wird in Variante (c) dargestellt. Diese Anbindung besitzt Werte für die Geschwindigkeit und Kraft, jedoch sind diese beiden Größen stets 90° phasenverdreht. Durch den Phasenversatz kann keine Leistung in der Feder dissipieren und sie hat einen Wert von null. Die einfachste Methode, die Leistung in den Lagerungspunkten zu bestimmen, ist in Variante (d) dargestellt. Eine Kombination aus Feder und Dämpfer ermöglichen die Bestimmung der Körperschalleistung.

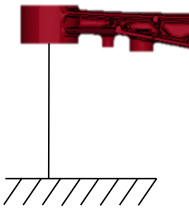
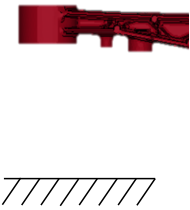
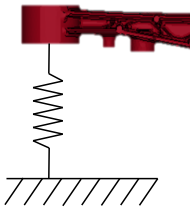
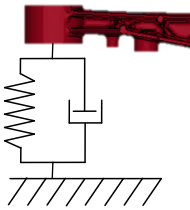
starr	frei	Feder	Feder-Dämpfer
			
$v_0 = 0$ $P_m = 0$	$F_0 = 0$ $P_m = 0$	$\cos(\varphi_f - \varphi_v) = 0$ $P_m = 0$	$P_m \neq 0$
(a)	(b)	(c)	(d)

Tabelle 5.1: Varianten einer Modellierung zur Bestimmung der Körperschallleistung

Um die Leistung korrekt zu bestimmen, müsste die frequenzabhängige Gesamtdämpfung der Karosserie abgebildet werden. Für eine erste Auslegung wird in dieser Arbeit ein konstanter Dämpfungsfaktor angenommen. Mit diesem Dämpfungsfaktor kann ein relativer Vergleich zwischen dem aktuellen Modell und der Optimierung erfolgen. Eine erste Bewertung der Referenztragböcke wird in einer Simulation mit Hilfe der Software *Opti-struct* durchgeführt. Für einen Motorhochlauf der E-Maschine zeigt Abbildung 5.4 die an die Dämpfer (und damit an die Karosserie) übertragene Leistung für den Lagerpunkt des Getriebe- und Statortragbocks. Der Vorteil von Leistungen ist es, dass sie aufsummiert werden können. Abbildung 5.5 zeigt die Summe der Leistungen, die von den aktuellen Serienbauteilen an die Karosserie übertragen wird.

5.2.2 Definition des Designbereichs der Tragböcke

Für eine Topologieoptimierung muss der maximale zur Verfügung stehende Bauraum bekannt sein. An der Hinterachse ist der Bauraum bestimmt durch die umgebenden Bauteile. Abbildung 5.6 zeigt den Bauraum, der für die beiden Tragböcke zur Verfügung steht. Dieser Bauraum lässt sich in zwei Bereiche unterteilen:

Design Space: Der Design Space beschreibt den Bereich des Bauraums, der durch die Topologieoptimierung verändert werden darf. In Abbildung 5.6 rot gefärbt.

Non-Design Space: Bereiche, die in der späteren Struktur vorgegeben sind, wie zum Beispiel Verschraubungen oder sonstige Anbindungen können im Non-Design Space für die Optimierung ausgeschlossen werden. In Abbildung 5.6 blau gefärbt.

Für die Optimierung können für den Designbereich Fertigungsanforderungen definiert werden. Da die Tragböcke in der Serie in einem Druckgusswerkzeug gefertigt werden, wird diese Annahme auch für die optimierten Tragböcke angenommen. Für den Getriebetragebock gilt eine einseitige Entformungsrichtung, deren Außenkontur durch den Bauraum beschrieben wird (Single-Draw). Der Statortragebock wird entlang einer Schnittebene in zwei Richtungen entformt (Split-Draw).

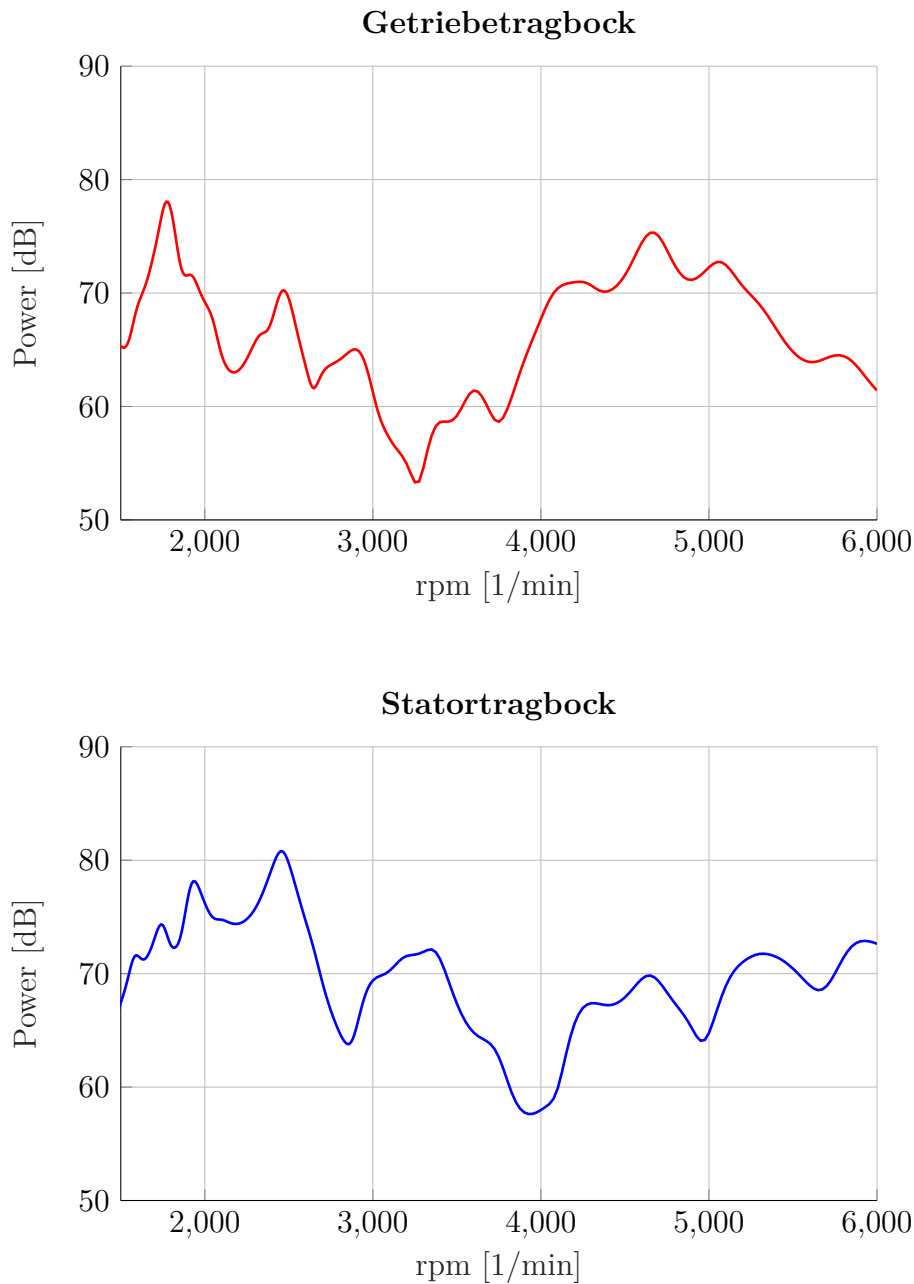


Abbildung 5.4: Übertragene Körperschallleistung an den Lagerpunkten des Getriebe- und Statortragebocks im Ausgangszustand

5.2.3 Randbedingungs- und Zieldefinition der Optimierung

Das Ziel der Optimierung ist die Reduzierung der an die Karosserie übertragenen Körperschallleistung. Neben den genannten Randbedingungen für die Fertigung, müssen weitere Randbedingungen definiert werden, um die Eigenschaften in Bezug auf Festigkeit und Steifigkeit der Serientrageböcke einzuhalten.

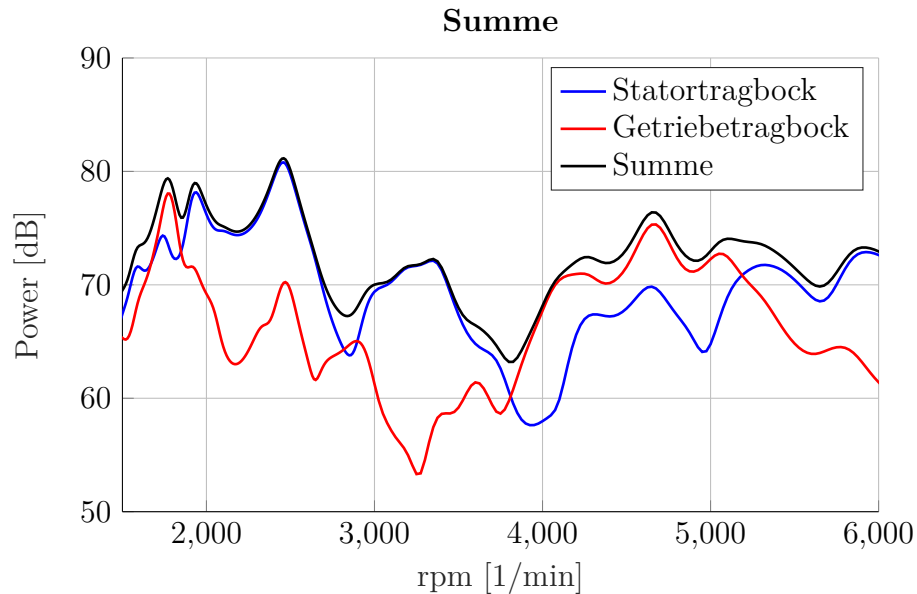


Abbildung 5.5: Summe der an die Karosserie übertragenen Körperschalleistung (schwarz) aus der Leistung der Lagerpunkte des Getriebe- (rot) und des Statortragbocks (blau)

Randbedingung

Fertigungsanforderungen: Die Fertigungsanforderungen in Bezug auf Teilung der Druckgusswerkzeuge wurden bereits erläutert. Des Weiteren gibt es eine minimale Wandstärke, die im Druckguss ermöglicht werden kann. Für die Optimierung wird die minimale Wandstärke aufgrund der FE-Elementgröße auf 6 mm gesetzt.

Festigkeit: OptiStruct bietet die Möglichkeit für die Topologieoptimierung eine maximale Spannung vorzugeben. Erfahrungsgemäß ist dies mit Vorsicht zu betrachten. Für diese Dissertation wurde die Festigkeitsbewertung im Nachgang anhand der Konstruktion durchgeführt und daher keine Festigkeits-Randbedingung in der Optimierung berücksichtigt.

Steifigkeit: Als Ersatz für die Festigkeitsbewertung wird in der Optimierung eine Steifigkeit der Bauteile vorgegeben. In diesem Fall ist die Steifigkeit der Serienbauteile bekannt und kann als Randbedingung verwendet werden. Dabei werden die Motortragböcke an den Verschraubungen zur E-Maschine hin festgehalten und an den Lagerpunkten mit einer Kraft in x-, y- und z-Richtung belastet. Die daraus folgende maximale Verschiebung am Kraftangriffspunkt wird als Randbedingung in der Optimierung als Steifigkeits-Randbedingung verwendet. Neben der Steifigkeit der einzelnen Tragböcke wird auch die maximale Durchbiegung der gesamten E-Maschine bei einer 1G Belastung in alle drei Raumrichtungen anhand des Serienstandes definiert und für die Optimierung als Randbedingung gesetzt.

Eigenfrequenz: Das aufgebaute Simulationsmodell ist vollständig bestimmt, wodurch

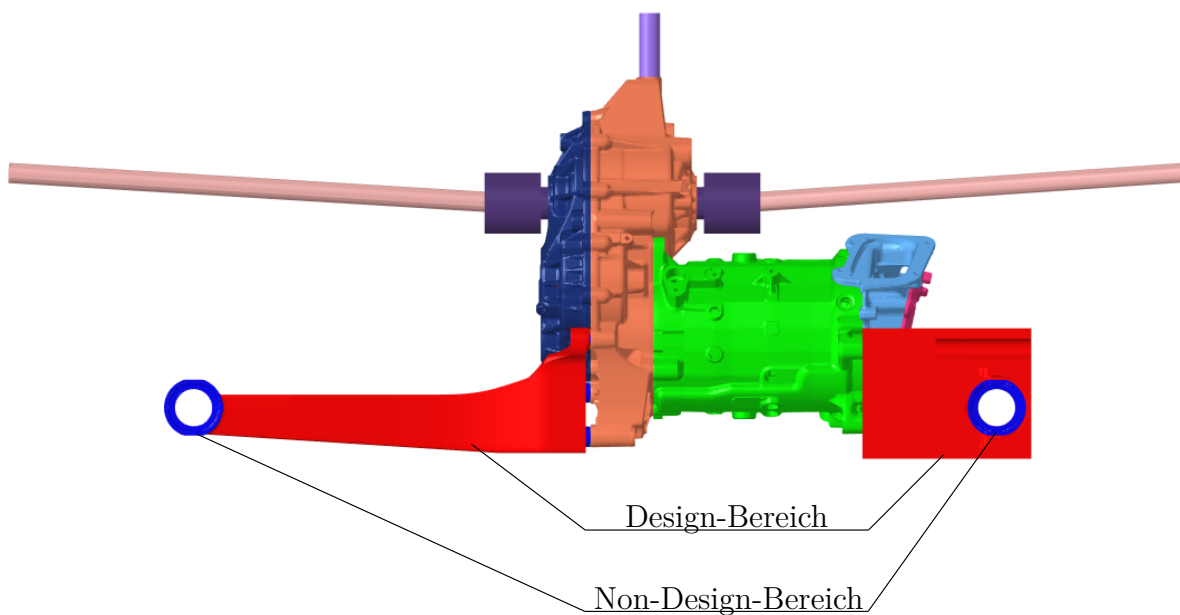


Abbildung 5.6: Design- (rot) und Non-Design-Bereich (blau) der Tragböcke

es keine Starrkörpermoden gibt. Der erste Eigenmode der E-Maschine mit den Serienträgern dient als Anhaltswert für die Optimierung der neuen Motorträger.

Körperschallleistung: Die an die Karosserie übertragene Körperschallleistung wird als Randbedingung für die Optimierung vorgegeben. Die Bewertung der Körperschallleistung der Serienträger wird als Anhaltswert für die Optimierung herangezogen. Liegen die Zielwerte in einem Bereich, der nicht erreichbar ist, so wird die Optimierung keine Lösung bringen. Mehrere Optimierungen haben gezeigt, dass die maximal erreichbare übertragene Körperschallleistung am Getriebeträger bei 75 dB und am Statorträger bei 77 dB liegt.

Zieldefinition

Während es eine Vielzahl von Randbedingungen in der Optimierung geben kann, beschränkt sich die Zielfunktion auf einen einzelnen Parameter. Durch eine Gewichtung ist es mittlerweile auch möglich, mehrere Parameter in der Zielfunktion zu berücksichtigen (wie beispielsweise die Minimierung der übertragenen Körperschallleistung bei einem vorgegebenen maximalen Gewicht). Im Laufe der Arbeit hat sich gezeigt, dass es insbesondere bei komplexen Lastfällen wie einer FRF zu besseren und genaueren Ergebnissen der Optimierung führt, wenn als Zielfunktion die Minimierung der Masse verwendet wird. Die übertragene Körperschallleistung wird als Randbedingung mit den oben genannten Werten verwendet.

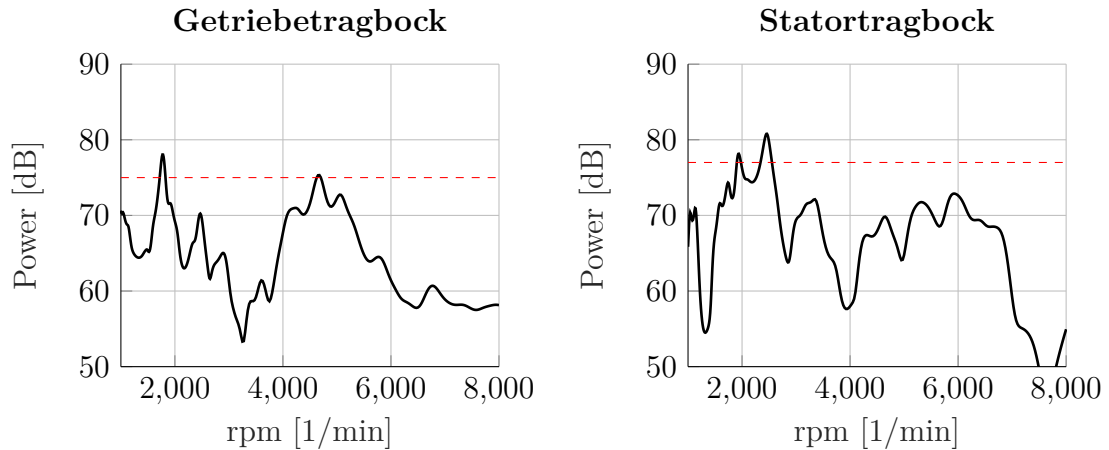


Abbildung 5.7: Zielwerte für die übertragenen Körperschalleistungen am Getriebe- (75 dB) und am Statortragebock (77 dB)

5.2.4 Ergebnis der Optimierung

In der Topologieoptimierung wird einem jeden Element im Designbereich eine virtuelle Dichte ρ_{el} zugeordnet. Sie dient als Designvariable für die Sensitivitätsberechnung und variiert in jeder Iteration zwischen 0 und 1. Voraussetzung für die in OptiStruct verwendete Dichtemethode ist die Annahme, dass die Steifigkeit des Materials linear von der Dichte abhängt. Ziel der Optimierung ist die Zuordnung der Materialdichte eines jeden Elements von entweder 0 oder 1:

- $\rho_{el} = 1$: Bereich, in dem Material notwendig ist
- $\rho_{el} = 0$: Bereich, in dem Material nicht benötigt wird
- $0 < \rho_{el} < 1$: Bereich eines fiktiven Materials mit mittlerer Dichte.

Eine optimale Lösung im vorhandenen Lösungsraum beinhaltet Grauzonen mit mittlerer Dichte. Diese Grauzonen können mit einem Materialmix mit unterschiedlichen Dichten in der Realität dargestellt werden - für ein einheitliches Material sind diese Feststellungen nicht aussagekräftig und führen zu ungenauen Ergebnissen. Um diese Zwischendichten zu verhindern, gibt es die in OptiStruct implementierte SIMP-Methode (Solid Isotropic Material with Penalization):

$$\mathbf{E}_{el_p} = \rho_{el}^p \mathbf{E}_{el} . \quad (5.3)$$

Mit dem Penalty-Faktor p wird die virtuelle Steifigkeit eines jeden Elements \mathbf{E}_{el} durch die virtuelle Dichte ρ_{el}^p berechnet. Der Penalty-Faktor hat stets einen Wert größer als 1. Je höher der Penalty-Faktor gewählt wird, desto größer ist der Einfluss der virtuellen Dichte auf die Steifigkeit. In Abbildung 5.8 ist die virtuelle Dichte für einen Penalty-Faktor von 1 (blau), 2 (rot) und 3 (grün) dargestellt. Die gezeigte Methode für die virtuelle Steifigkeit gilt ebenso für die Masse und virtuelle Masse der einzelnen Elemente im Designraum.

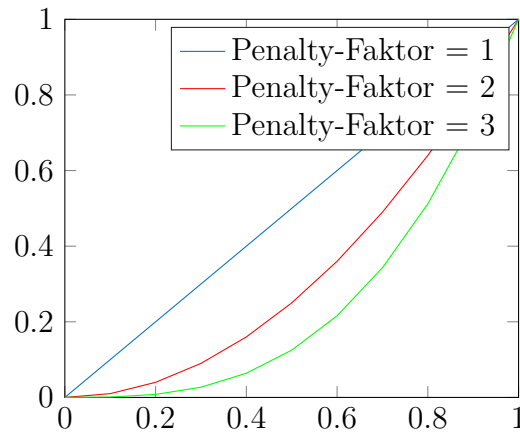


Abbildung 5.8: Einfluss des Penalty-Faktors auf die virtuelle Dichte und Steifigkeit

Dichteverteilung Optimierungsergebnis

Die Designvariable in der Topologieoptimierung ist die virtuelle Dichte der einzelnen Elemente. Ziel ist es, eine Verteilung der Dichte zu finden, mit der die Randbedingungen erfüllt wird und die Zielfunktion ihr Minimum erreicht. In einem iterativen Verfahren wird durch die Bewertung der Sensitivität einer Dichteänderung jedes Elements ein Optimum angenähert. Abbildung 5.9 zeigt die Verteilung der virtuellen Dichte für den Getriebetragebock für die 10. Iteration (hoher Anteil an Zwischendichten) und der finalen Iteration 67 (mit einem Anteil der Zwischendichten von unter 10%). Das Ergebnis der Optimierung

Iteration 10		Iteration 67	
Density	%	Density	%
0.0-0.1	12.5	0.0-0.1	28.4
0.1-0.2	5.8	0.1-0.2	2.2
0.2-0.3	4.7	0.2-0.3	0.9
0.3-0.4	5.5	0.3-0.4	0.6
0.4-0.5	6.3	0.4-0.5	0.6
0.5-0.6	7.9	0.5-0.6	0.6
0.6-0.7	8.9	0.6-0.7	0.6
0.7-0.8	10.5	0.7-0.8	0.7
0.8-0.9	27.8	0.8-0.9	1.0
0.9-1.0	10.0	0.9-1.0	64.3

Abbildung 5.9: Vergleich der Dichteverteilung für die 10. und 67. Iteration

für den Getriebe- und Statortragbock ist in der Abbildung 5.10 dargestellt. Blaue Bereiche haben eine virtuelle Dichte zwischen 0,0 – 0,49 - rote Bereiche einen Wert zwischen 0,5 – 1,0. Die geforderten Randbedingungen wurden mit einer maximalen Abweichung von 2,4% eingehalten (Abbildung 5.11 zeigt die Verletzungen in der letzten Iteration der

Optimierung) und das Minimum der Zielfunktion mit einem Gewicht von 1,34 kg für den Stator- und 2,26 kg für den Getriebetragebock erreicht (Vergleich Referenzgewicht: 1,50 kg (inklusive Tilgermasse) und 2,22 kg).

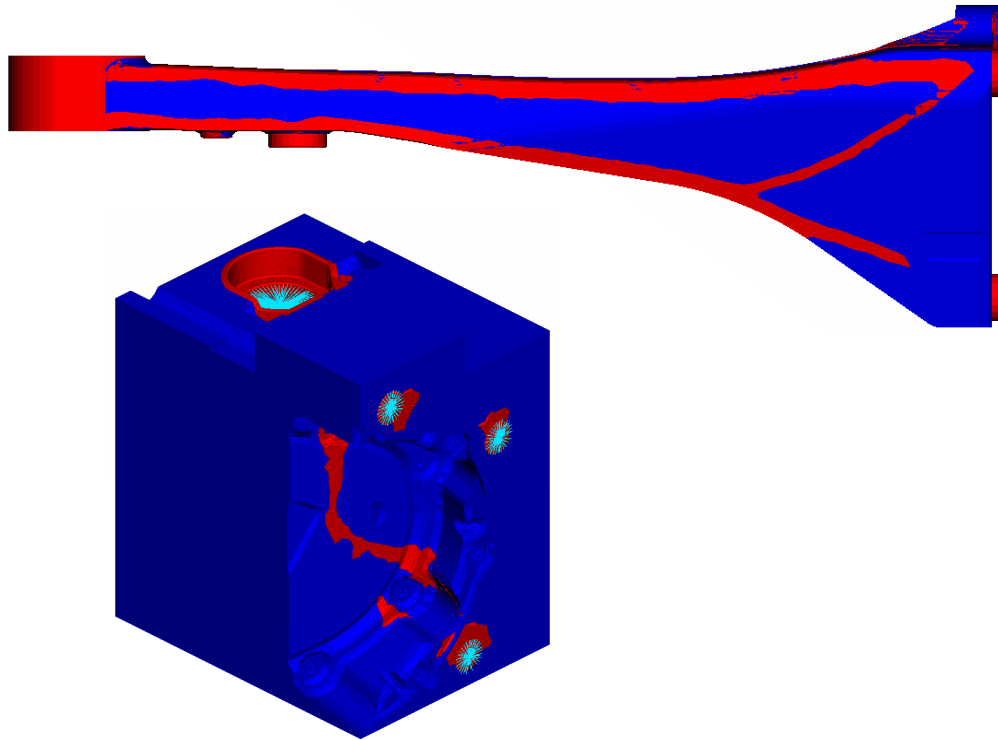


Abbildung 5.10: Ergebnis der Optimierung mit einer virtuellen Dichte $< 0,5$ (blau) und $\geq 0,5$ (rot)

MOST VIOLATED CONSTRAINTS TABLE

Type	Response Label	Subcase	Mode No.	Response Value	Constraint Bound	Viol. %
FREQ	drfreq	5	1	1.449E+01	> 1.485E+01	2.4 V

Abbildung 5.11: Auflistung der verletzen Randbedingungen der finalen Iteration der Optimierung

Rückführung des Optimierungsergebnisses

Das Optimierungsergebnis besteht aus allen Elementen, die aufgrund ihrer virtuellen Dichte unterschiedliche Steifigkeits- und Massenwerte aufweisen. In der Rückführung werden

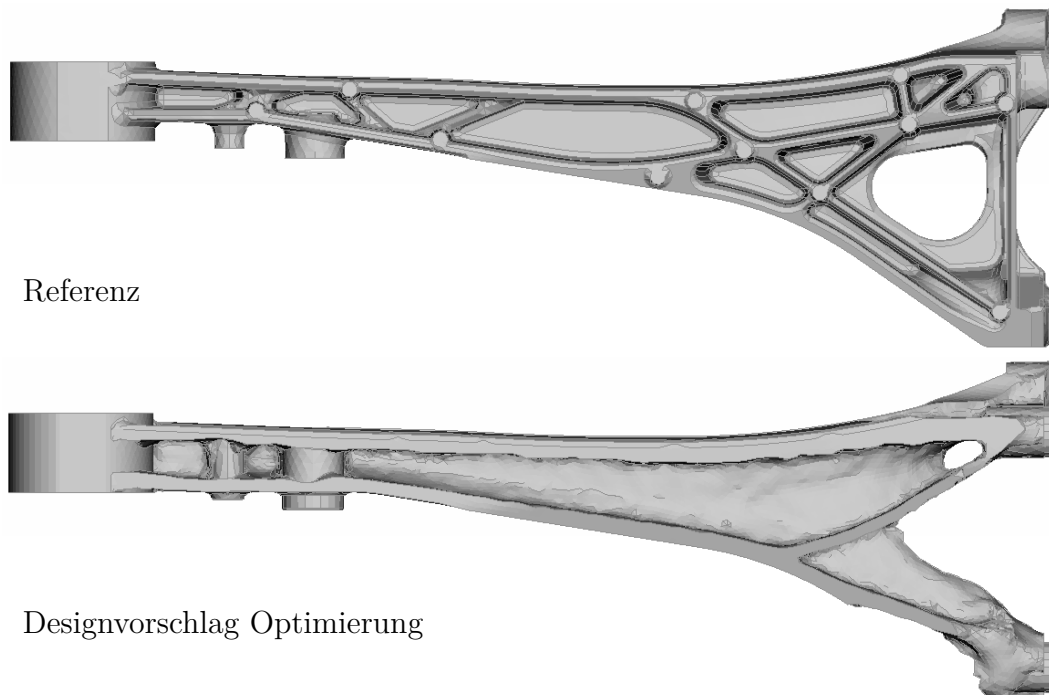


Abbildung 5.12: Vergleich der Rückführung der Optimierung mit der Referenz des Getriebeträgbock

die Elemente gelöscht, die einen definierten Dichtewert nicht überschreiten. Um scharfe Kanten und unebene Flächen aufgrund der Tetraeder zu vermeiden, werden die Grenzflächen zu den gelöschten Flächen mit einer ISO-Fläche geglättet. Das Ergebnis der Rückführung ist in Abbildung 5.12 und 5.13 für die beiden Tragböcke zu sehen. Bei beiden Modellen wurde eine Grenze von 0,5 für die Dichte definiert, ab der die Elemente erhalten bleiben, beziehungsweise gelöscht werden. Als Vergleich sind die Referenztragböcke dargestellt. Je besser die Optimierung konvergiert und der Anteil der Zwischendichten reduziert wurde, desto geringer ist die Abweichung der Rückführung vom Ergebnis der Optimierung. In Abbildung 5.14 ist die an die Karosserie übertragene Körperschalleistung für die Referenztragböcke (schwarz) und die Rückführung der Optimierung (pink) dargestellt. Die rote Linie stellt die geforderte Randbedingung für die Optimierung der übertragenen Körperschalleistung dar. Ein Aufsummieren der übertragenen Körperschalleistung an den Anschraubpunkten zeigt die Verbesserung der Optimierung bei gleichzeitiger Gewichtsreduktion.

Überarbeitung der Rückführung

Der Getriebeträgbock zeigt eine Geometrie, die unter Beachtung der Fertigungsrandbedingungen für ein Gussbauteil, in eine CAD-Geometrie überführt werden kann. Das Ergebnis der Rückführung des Statortragbocks hingegen ist in seiner Geometrie komplexer. Es weist Strukturen auf, die aufgrund ihrer dünnen Wandstärke und ihrer Komplexität nur bedingt in eine CAD-Geometrie umgesetzt werden können, obwohl die Fertigungsbedingungen an-

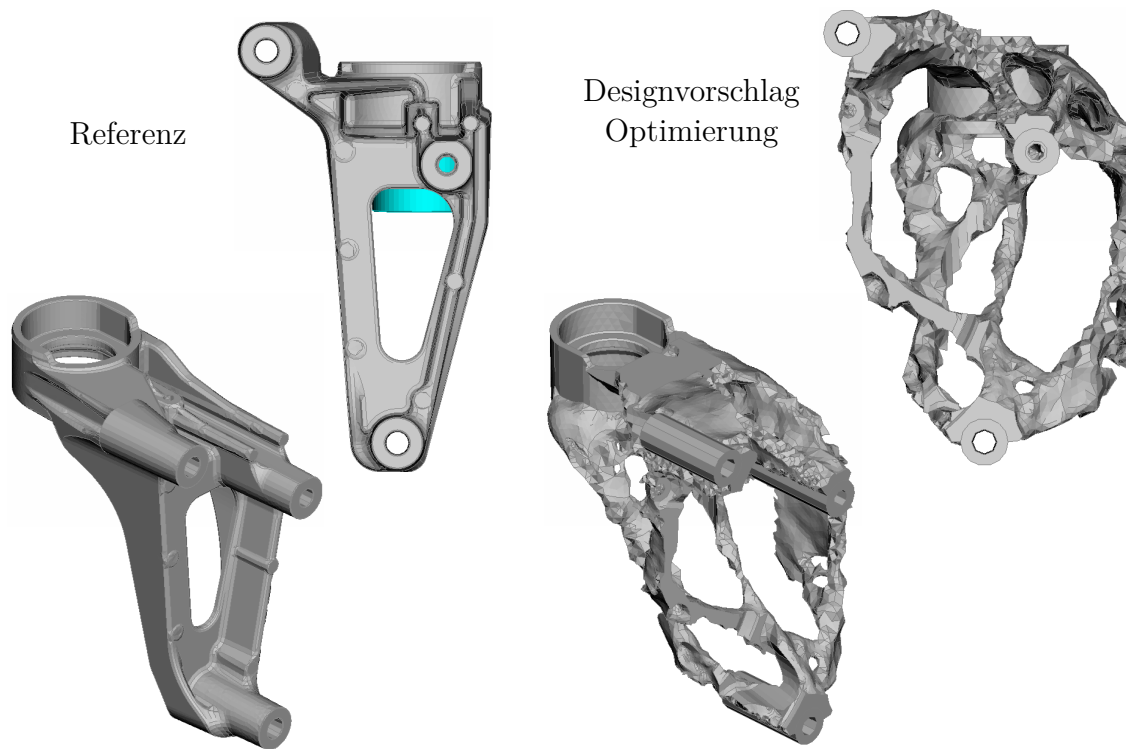


Abbildung 5.13: Vergleich der Rückführung der Optimierung mit der Referenz des Statortragbocks

hand Auszugsrichtung und minimaler Wandstärke in der Optimierung eingehalten worden sind. Ein Weglassen der nicht umsetzbaren Geometrie zeigt eine leichte Verschlechterung der Körperschalleistung im Bereich um ca. 2000 U/min und einer leichten Verletzung der gesetzten Randbedingung, was in der Gesamtbetrachtung als vernachlässigbar angesehen werden kann. Durch das Entfernen der besagten Struktur ergibt sich ein zusätzlicher Gewichtsvorteil von 290 g (Gesamtgewicht Statortragbock: $1,05 \text{ kg}$). Die Geometrie der ursprünglichen Geometrie und deren Beschnitt zeigt Abbildung 5.15.

Umsetzung des Optimierungsergebnisses in CAD-Konstruktion

Das Ergebnis der Optimierung dient als Designvorschlag für eine Konstruktion. Abbildung 5.17 zeigt die Erstkonstruktion des Getriebetragebocks (blau) im Vergleich zum Optimierungsergebnis (rot). Die Aufnahmen für den Verbau der E-Maschine im Fahrzeug (grüner Kreis) und eines Schwingungstilgers kann, anders als in der Optimierung angenommen, reduziert und durch eine leichtere X-Struktur ersetzt werden. Die Konstruktion hat eine Masse von $2,15 \text{ kg}$ im Vergleich zu $2,26 \text{ kg}$ des Optimierungsergebnisses. Im Vergleich zu dem Serientragbock beträgt die Gewichtsreduzierung $0,07 \text{ kg}$ (Serientragbock: $2,22 \text{ kg}$) bei einer Reduzierung der übertragenen Körperschalleistung von ca. 3dB (1900 U/min) (Abbildung 5.19).

Der erstellte Konstruktionsentwurf des Statortragbocks ist in Abbildung 5.18 veranschaulicht. Das Gewicht der CAD-Geometrie beträgt $1,186 \text{ kg}$ (Designvorschlag aus der Opti-

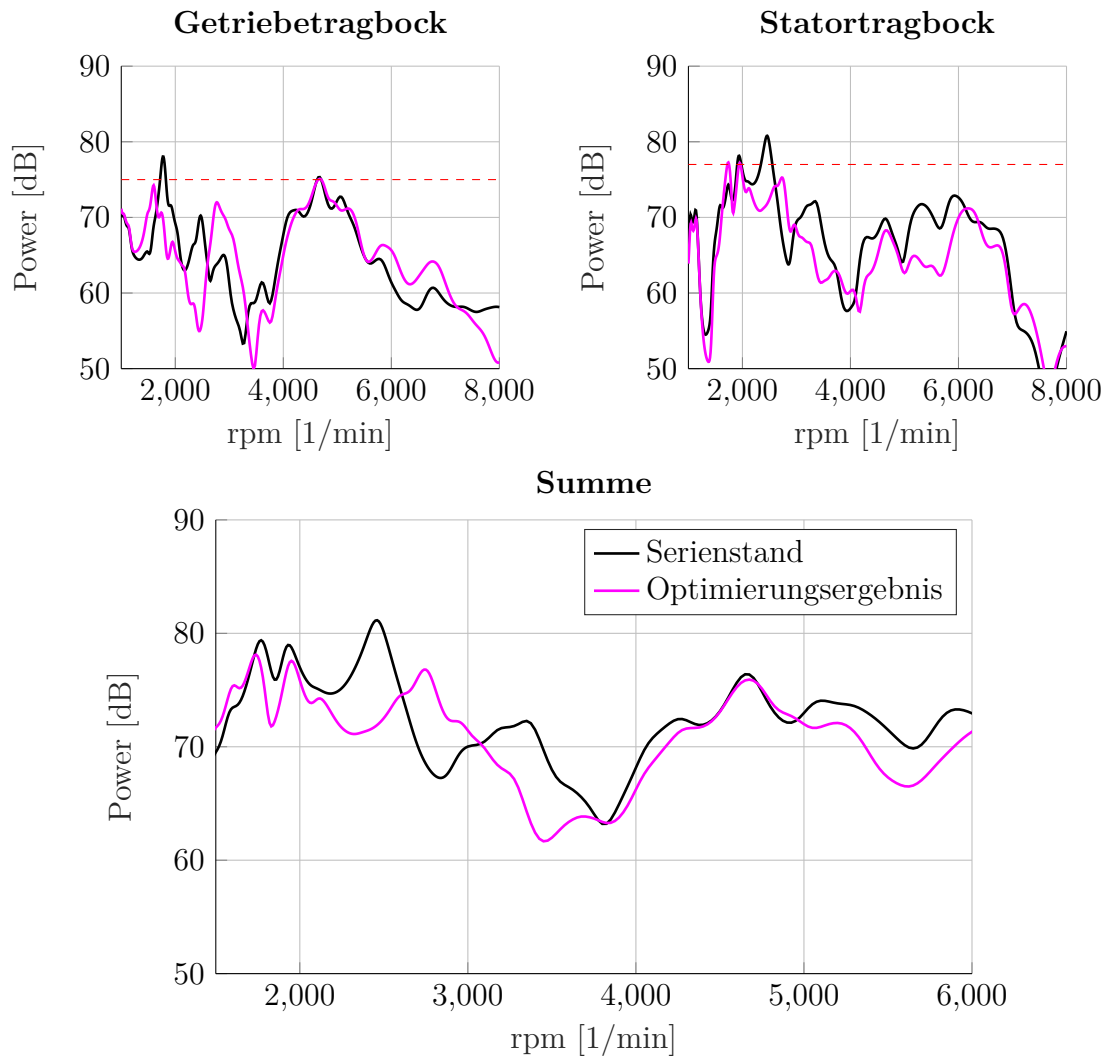


Abbildung 5.14: Körperschalleistung an den Lagerpunkten des Serienstandes (schwarz) und des Optimierungsergebnisses (pink) der Tragböcke

mierung: 1,052 kg), was zu einer Reduzierung der Gesamtmasse um 0,315 kg im Vergleich zum Serienstand führt (Serienstand: 1,501 kg, inklusive Tilgermasse). Das Mehrgewicht in der Konstruktion zeigt sich im Vergleich zum Optimierungsergebnis in der Bewertung der übertragenen Körperschalleistung wieder (Abbildung 5.19). Durch das Mehr an Masse und damit auch der Steifigkeit verschieben sich die Eigenfrequenzen des Tragbocks und führen zu einer Überlagerung mit anderen Eigenfrequenzen im Gesamtverbund. Diese Überlagerung führt zu einer Verschlechterung der übertragenen Körperschalleistung im Bereich 4200 - 4500 U/min (orange) um ca. 5dB im Vergleich zum aktuellen Serienstand (schwarz) und dem Designvorschlag aus der Optimierung (grün) (Abbildung 5.19). Die Methode der automatisierten Designanpassung wird genutzt, um gezielte Änderungsvorschläge an der Konstruktion zu erarbeiten.

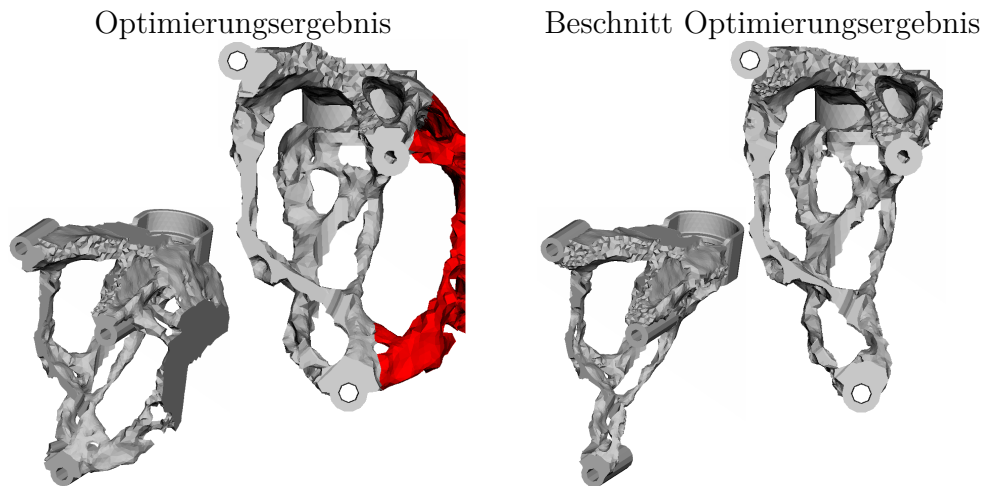


Abbildung 5.15: Überarbeitung des Optimierungsergebnisses für den Statortragbocks

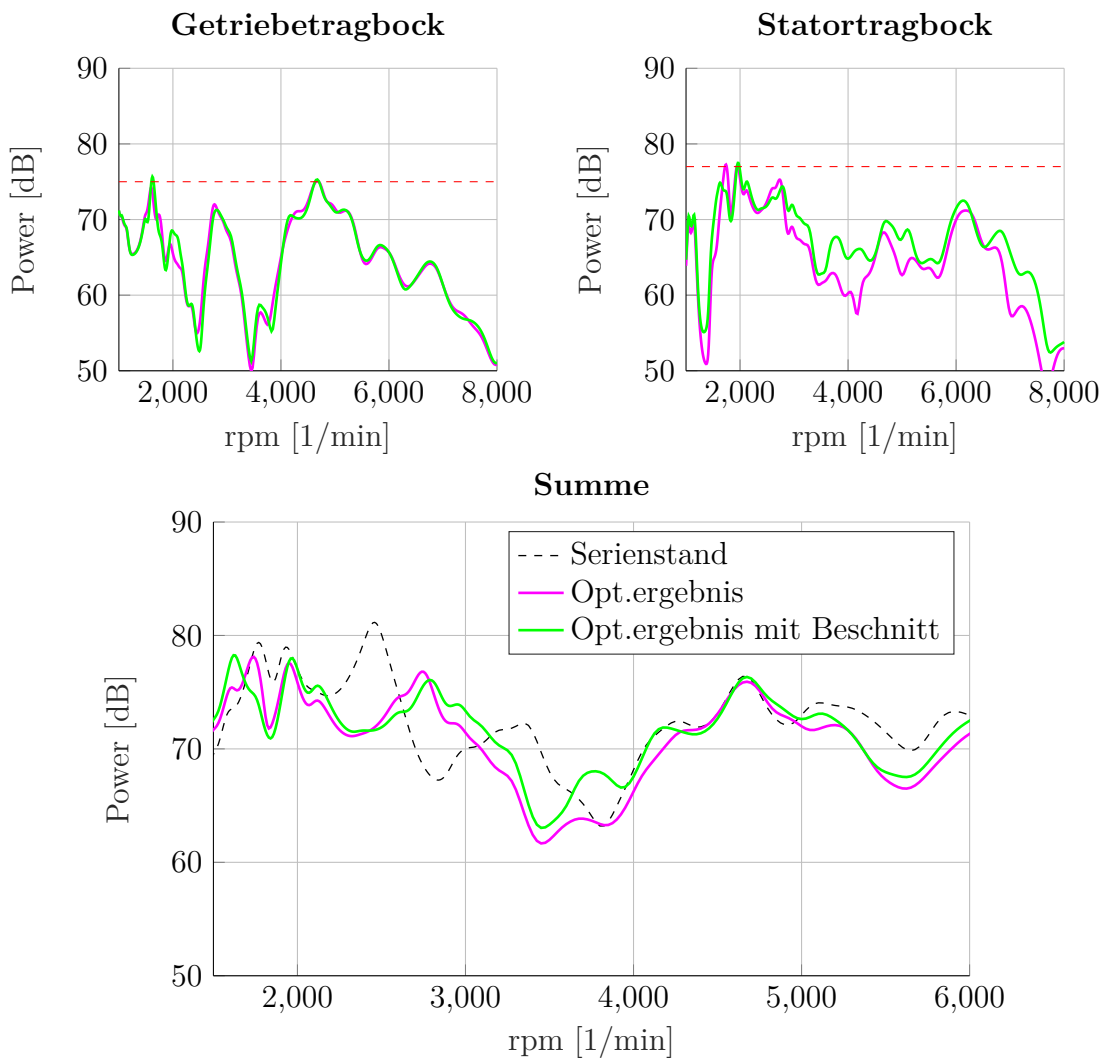


Abbildung 5.16: Vergleich des Optimierungsergebnis (pink) und dessen Beschnitt (grün)

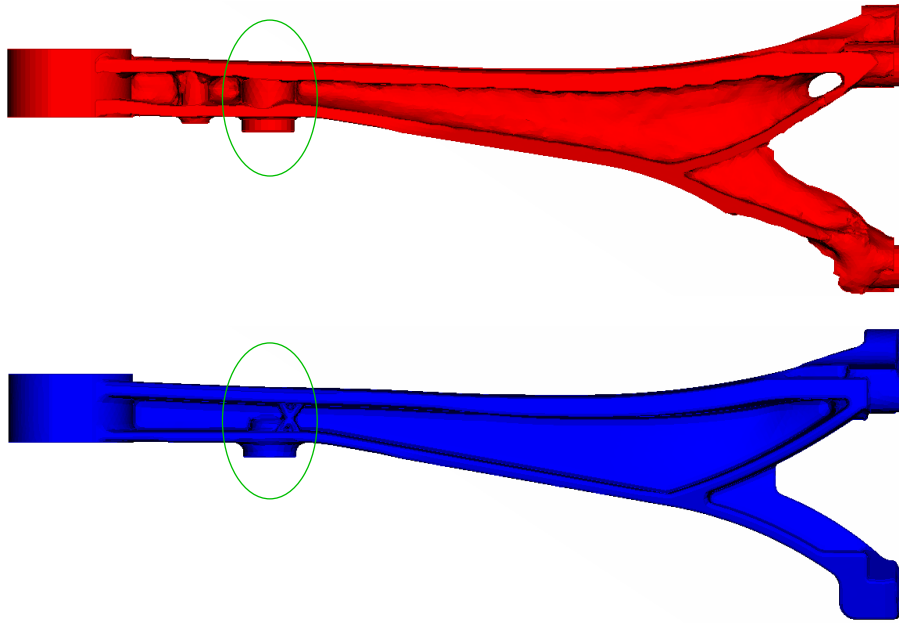


Abbildung 5.17: Vergleich des Optimierungsergebnisses (rot) und der Konstruktion (blau) des Getriebetragebocks

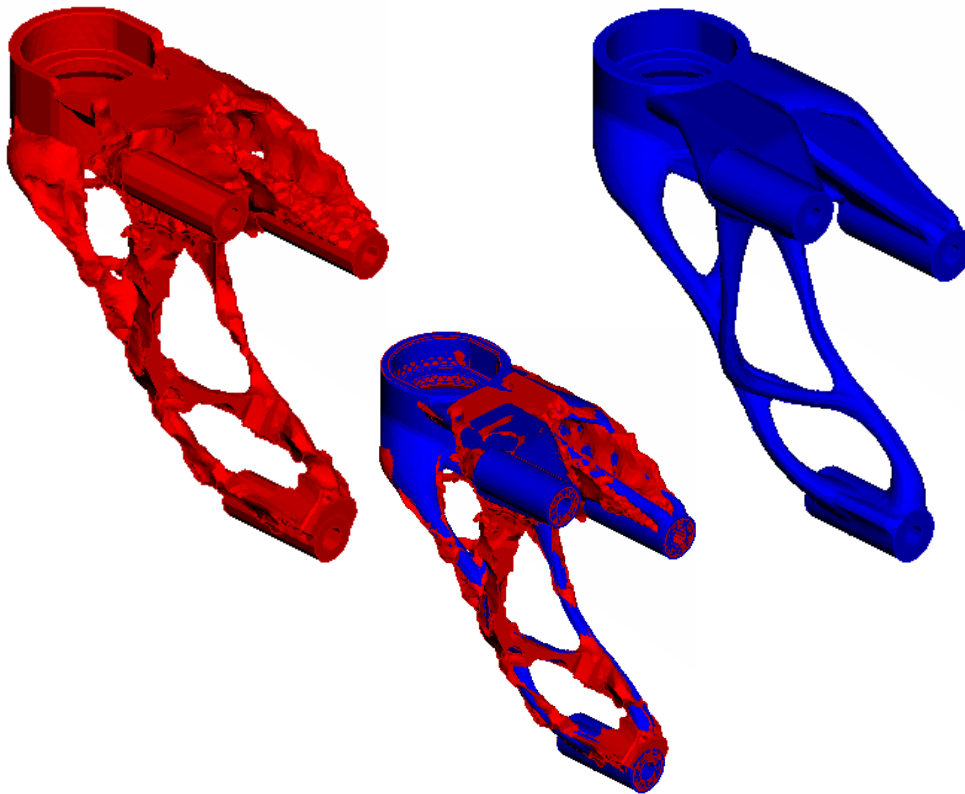


Abbildung 5.18: Vergleich des Optimierungsergebnisses (rot) und der Konstruktion (blau) des Statortragebocks

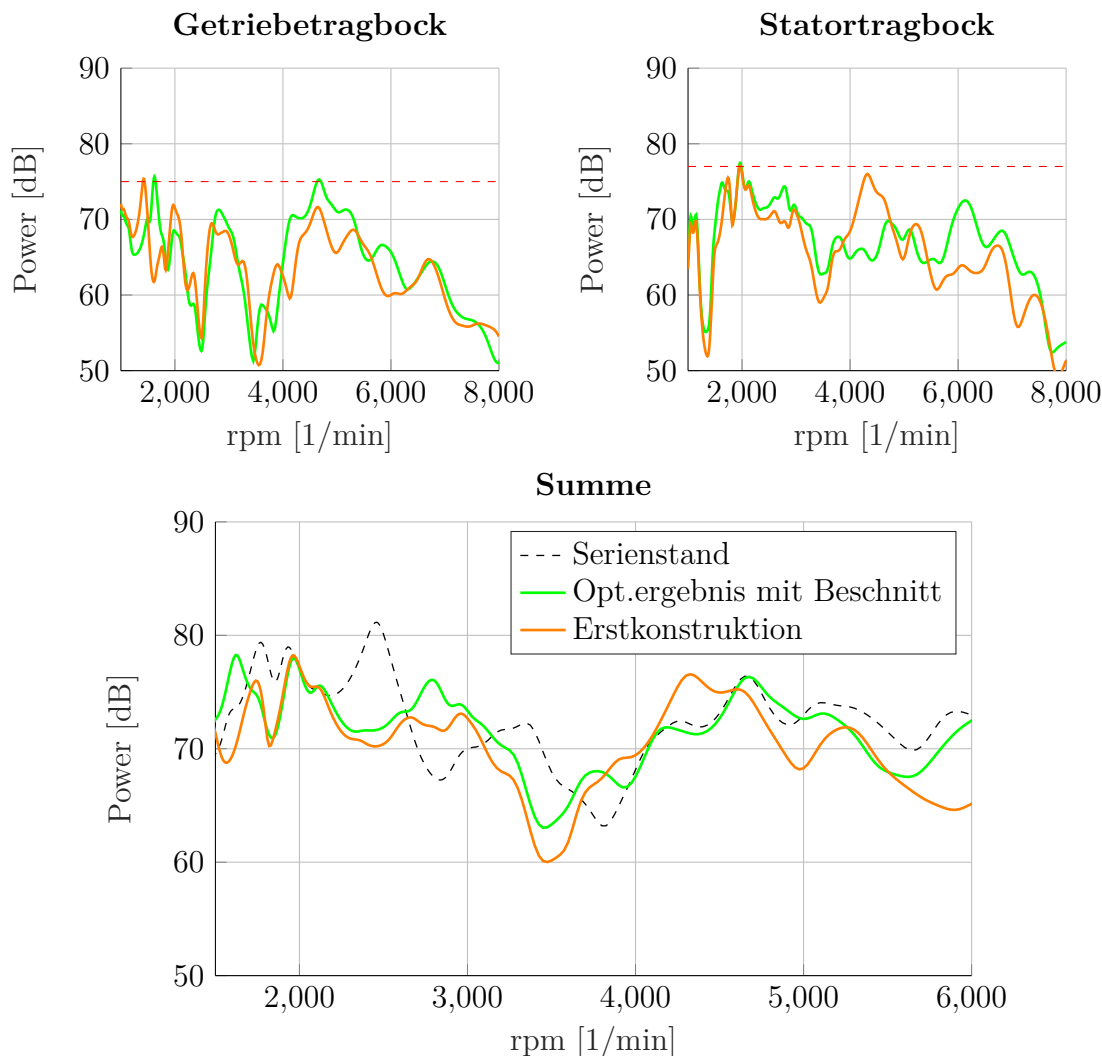


Abbildung 5.19: Vergleich des beschnittenen Optimierungsergebnisses (grün) und der Erstkonstruktion (orange)

5.3 Automatisierte Designanpassung der Konstruktion

Die Ergebnisse aus der Optimierung dienen als Designvorschlag und können nicht direkt als Konstruktion verwendet werden. Dies liegt an den Randbedingungen wie beispielsweise der Entformungsrichtung oder der minimalen und maximalen Wandstärke. Bei einer sensitiven Bewertung wie der Körperschalleistung können Unterschiede zwischen dem Designvorschlag aus der Optimierung und der tatsächlichen CAD-Konstruktion zu Abweichungen führen, wie sie in Abbildung 5.19 dargestellt sind. Dies geschieht, obwohl sich die Geometrien der beiden Modelle nur wenig unterscheiden (siehe Vergleich in Abbildung 5.18). Eine Anpassung der Geometrie ist nötig, die nicht durch Erfahrung und Trial and Error erfolgen soll, sondern durch eine zielgerichtete Anpassung der Geometrie. Mit Hilfe der MAC-Bewertung kann der Grad der Übereinstimmung zwischen dem Opti-

mierungsergebnis und der Erstkonstruktion des Statortragbocks bestimmt werden. Durch eine Shape-Optimierung soll die Geometrie so angepasst werden, dass die Eigenmoden in Frequenz und Eigenform der beiden Modelle übereinstimmen.

5.3.1 Aufbau der FE-Modelle

Für die Bestimmung der übertragenen Körperschalleistung ist ein Gesamtmodell der Hinterachse notwendig, wie auch die Anregung aus der E-Maschine. Ziel dieser Optimierung ist es, das Verhalten der Konstruktion an das Ergebnis der Optimierung anzupassen. Ein Abgleich der gesamten Hinterachse wäre an dieser Stelle möglich, würde aber die Rechenzeit unnötig verlängern. Aus diesem Grund wird das Modell allein auf den Statortragbock reduziert und eine Eigenfrequenzanalyse durchgeführt. Stimmen die Eigenfrequenzen und Eigenformen der beiden Modelle überein, dann kann davon ausgegangen werden, dass auch die übertragene Körperschalleistung in den Gesamtmodellen übereinstimmt. Das FE-Modell des Statortragbocks unterteilt sich in zwei Bereiche:

- Non-Design Bereich: Bereich, der durch den Verbau im Fahrzeug vorgeschrieben ist (rote Bereich in Abbildung 5.20)
- Design Bereich: Bereich, der zur freien Gestaltung zur Verfügung steht (blauer Bereich in Abbildung 5.20)

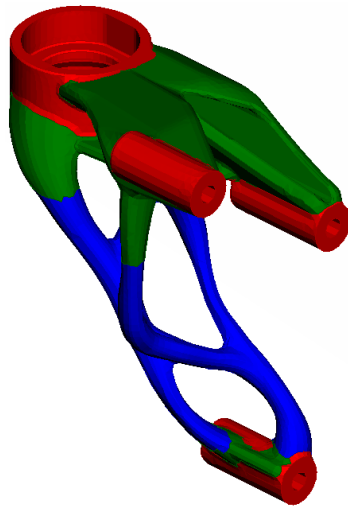


Abbildung 5.20: Unterteilung des Tragbocks in Knotenpunkte zur MAC-Auswertung (rot) und zur Designanpassung (blau). Der grüne Übergangsbereich wird nicht berücksichtigt.

Die Genauigkeit der MAC-Werte verbessert sich, wie in Kapitel 2.4 erläutert, mit einer höheren Anzahl von Auswertepunkten. Aufgrund von Unterschieden in der Geometrie im mittleren Bereich des Tragbocks und der Unzweckmäßigkeit einer Extrapolation der Eigenvektoren, erfolgt ein Vergleich zwischen den geometrisch ähnlichen Bereichen (Non-Design Bereich). Diese Bereiche umfassen sowohl die direkte Verbindung zur E-Maschine

als auch zur Karosserie. Alle Knoten, die innerhalb dieses Bereiches liegen, werden in einem Knoten-Set zusammengefasst. Ein zweites Knoten-Set beschreibt den Designbereich, der in der automatisierten Designanpassung verändert werden darf. Abbildung 5.20 zeigt den Statortragbock mit den definierten Knoten-Sets. Der blaue Bereich zeigt die Knoten für die Optimierung und der rote Bereich die Knoten zum MAC Abgleich. Um das Rechenproblem so klein wie möglich zu halten werden Bereiche, die eine hohe geometrische Übereinstimmung mit dem Optimierungsergebnis aufweisen, dem Non-Design-Bereich zugeordnet (grüner Bereich).

5.3.2 Initialer MAC-Abgleich zwischen Optimierungsergebnis und Erstkonstruktion

Startpunkt der Optimierung ist der erste Konstruktionsentwurf des Statortragbocks, dessen Schwingungsverhalten an das des Optimierungsergebnisses angepasst werden soll. Ein erster MAC-Vergleich ist in Abbildung 5.21 dargestellt. Die dazugehörigen Eigenfrequenzen zeigt Tabelle 5.2. Der kritische Frequenzbereich, der in diesem Fall betrachtet wird,

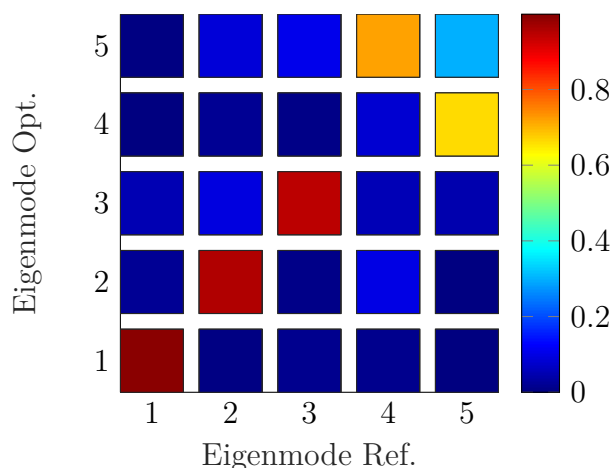


Abbildung 5.21: Summe der an die Karosserie übertragenen Körperschalleistung

Eigenmode Nr.	Referenz	Erstkonstruktion
1	481,47 Hz	639,65 Hz
2	782,02 Hz	1112,70 Hz
3	1246,40 Hz	1511,47 Hz
4	1781,21 Hz	2093,44 Hz
5	2027,73 Hz	2141,46 Hz

Tabelle 5.2: Frequenzen der Eigenmoden 1 - 5

beläuft sich bis auf circa 2000 Hz (ca. 5000 U/min). Der Optimierungsraum beschränkt

sich damit auf die ersten fünf Eigenmoden. Die ersten drei Eigenmoden stimmen in ihrer Eigenform gut überein (MAC-Wert $> 0,9$), aber liegen in der Eigenfrequenz über den Referenzfrequenzen. Die Eigenmoden vier und fünf stimmen in ihrer Schwingform zu 60% bei umgekehrter Reihenfolge überein. Im ersten Schritt der Optimierung wird die Geometrie angepasst, so dass die Eigenfrequenz des 5. Eigenmodes unterhalb der des 4. Eigenmodes liegt.

5.3.3 Eigenfrequenzanpassung

Analog dem Ablaufdiagramm (Abbildung 5.22) aus Kapitel 4, werden im ersten Schritt die Eigenmoden durch Anpassen der Eigenfrequenz geordnet. Um die Eigenfrequenz des 5. Eigenmodes zu senken, wird die Eigenfrequenzsensitivität berechnet und die Geometrie entsprechend der Sensitivität angepasst. Abbildung 5.23 zeigt die Sensitivität einer

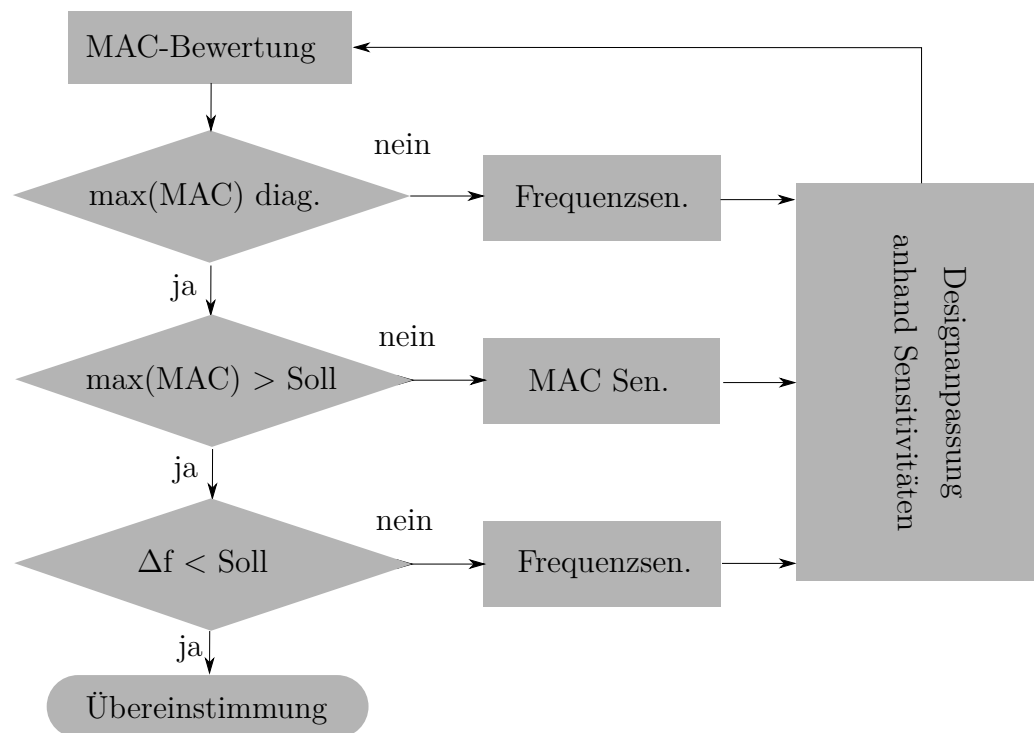


Abbildung 5.22: Ablaufplan der automatisierten Designanpassung

Knotenverschiebung in y-Richtung. In den blauen Bereichen führt eine Verschiebung der Knotenpunkte in y-Richtung zu einer Erhöhung der Eigenfrequenz. Rote Bereiche (in Abbildung 5.23 nicht zu sehen) führen bei einer Knotenverschiebung in y-Richtung zu einer Verringerung der Eigenfrequenz. Mit der Vorgabe einer maximalen Verschiebung von 0,2 mm für den Bereich mit der höchsten Sensitivität werden alle Knoten anteilmäßig verschoben. In Tabelle 5.3 ist das Ergebnis der 1. Iteration dargestellt. Die Eigenfrequenz des 5. Eigenmodes ist um 10,33 Hz gesunken. Nach sieben Iterationen wurde die Geometrie so angepasst, dass die Eigenfrequenz des 5. Eigenmodes unterhalb der des 4. Eigenmo-

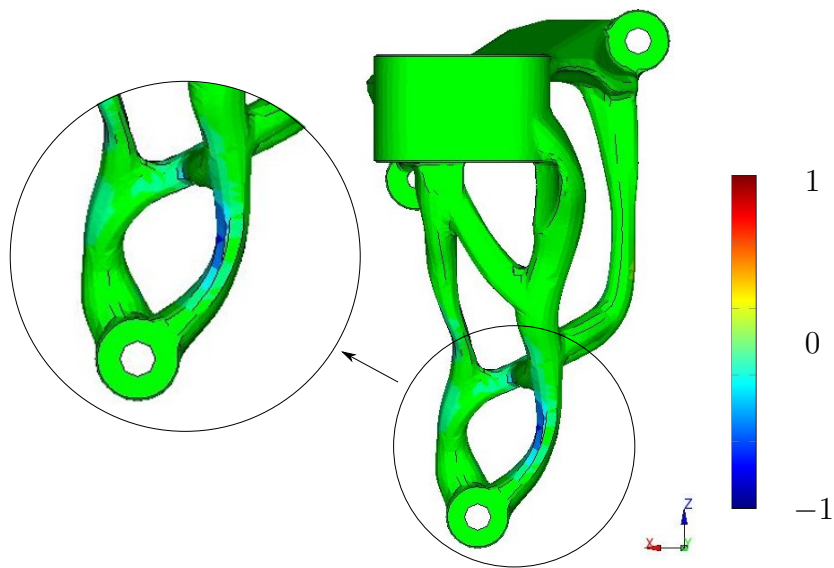


Abbildung 5.23: Eigenfrequenzsensitivität in Abhängigkeit einer Knotenverschiebung in x-Richtung

des liegt. Damit entspricht die Reihenfolge der ersten fünf Eigenmoden der Reihenfolge des Referenzmodells. In Tabelle 5.4 sind die Eigenfrequenzen der ersten fünf Eigenmoden zwischen Referenz, Iteration 0 und Iteration 7 gegenübergestellt. Die Farben blau und rot stellen die Eigenmoden mit der gleichen Eigenform dar. Die Eigenfrequenz des 4. Eigenmodes hat sich durch die Optimierung kaum verändert ($\Delta = 2,41 Hz$) - der 5. Eigenmode hat sich um $76,27 Hz$ gesenkt. Der MAC Plot für die 7. Iteration gegenüber der Referenz ist in Abbildung 5.24 dargestellt.

Eigenmode Nr.	Iteration 0	Iteration 1	Δ
1	639,65 Hz	634,60 Hz	-5,05 Hz
2	1112,70 Hz	1107,81 Hz	-4,89 Hz
3	1511,47 Hz	1507,29 Hz	-4,18 Hz
4	2093,44 Hz	2092,68 Hz	-0,76 Hz
5	2141,46 Hz	2131,13 Hz	-10,33 Hz

Tabelle 5.3: Frequenzen der Eigenmoden 1 - 5 nach der 1. Iteration

5.3.4 Optimierung der MAC-Werte

Sind alle Eigenmoden in der richtigen Reihenfolge, werden die einzelnen MAC-Werte der Diagonalen maximiert. In der Praxis gelten MAC-Werte kleiner 0,7 als übereinstimmende Eigenmoden, wenn es sich um einen Vergleich von einer experimentellen Messung mit

Eigenmode Nr.	Referenz	Iteration 0	Iteration 7
1	481,47 Hz	639,65 Hz	580,72 Hz
2	782,02 Hz	1112,70 Hz	1062,24 Hz
3	1246,40 Hz	1511,47 Hz	1481,23 Hz
4	1781,21 Hz	2093,44 Hz	2065,19 Hz
5	2027,73 Hz	2141,46 Hz	2091,03 Hz

Tabelle 5.4: Frequenzen der Eigenmoden 1 - 5 der 0. und 7. Iteration

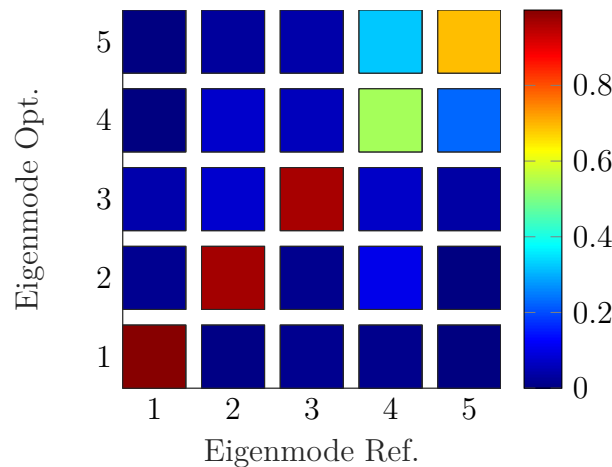


Abbildung 5.24: MAC-Werte nach der 7. Iteration der Designanpassung

einer Simulation handelt. In diesem Beispiel werden zwei Simulationen miteinander verglichen, wodurch ein höherer MAC-Wert erreicht werden kann. Das Ziel der Optimierung wird dadurch auf einen MAC-Wert von 0,8 angehoben. In jeder Iteration wird die Sensitivität einer Knotenverschiebung auf den MAC-Wert berechnet und mit einer maximalen Verschiebung von 0,2mm für den Bereich mit der höchsten Sensitivität verschoben. Alle anderen Knoten werden anteilmäßig ihrer Sensitivität bewegt. Mit der 10. Iteration ist das Ziel eines minimalen MAC-Wertes von 0,8 erreicht. Abbildung 5.25 zeigt den MAC-Plot der 10. Iteration mit Werten größer 0,8 auf den Diagonalen. Mit dem Erreichen des Ziels von 0,8 erfolgt im nächsten Schritt die Anpassung der Eigenfrequenzen. Für eine Bewertung des gesetzten Grenzwertes von 0,8 wurden in einem Test weitere Iterationen berechnet. Der in Abbildung 5.26 dargestellte Verlauf der minimalen MAC-Werte in der Diagonalen über die Iterationen zeigt, dass mit steigender Iterationszahl die Kurve immer mehr abflacht und ein Erreichen des maximalen Wertes von 1,0 ohne einer Anpassung der Eigenfrequenz nur schwer möglich ist. Iterationen 1-7 (rote Kurve) zeigen die Optimierung der Reihenfolge der Eigenmoden - Iterationen 8-15 die Optimierung der minimalen Mac-Werte. Ein Zielwert von 0,8 hat sich in mehreren Versuchen als eine geeignete Größe für die automatisierte Designanpassung in Betracht der Rechenzeit und Übereinstimmung erwiesen. In den 10 Iterationen bis zum Erreichen des gesetzten Zielwertes ist der minimale

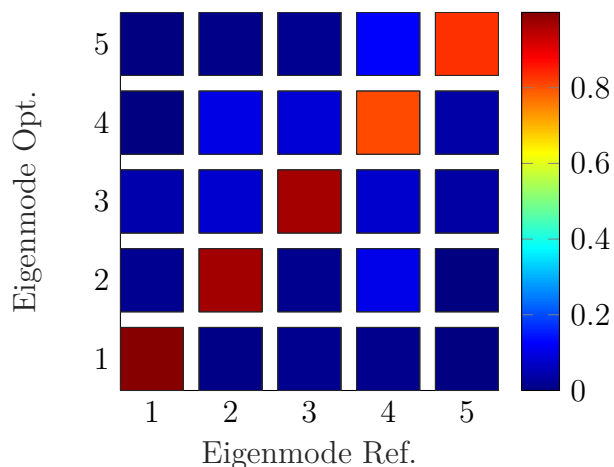


Abbildung 5.25: MAC-Werte nach der 10. Iteration der Designanpassung

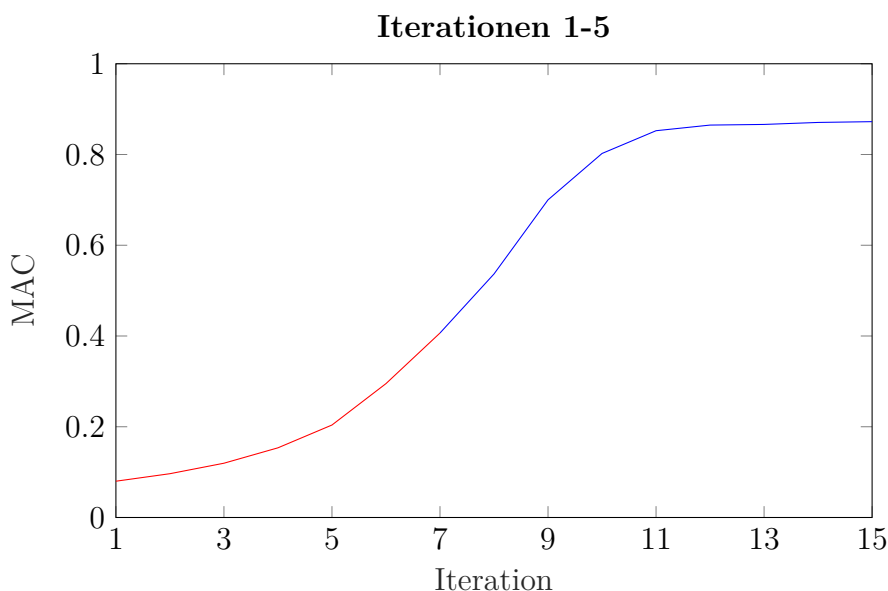


Abbildung 5.26: Verlauf des minimalen MAC-Wertes der Diagonalen der jeweiligen Iteration

MAC-Wert der Diagonalen von 0,08 auf einen Wert von 0,80 gestiegen. Die Geometrieänderung beschränkt sich auf den mittleren Teil des Tragbocks. Der Durchmesser der einzelnen Strukturen wurde deutlich geschwächt (Abbildung 5.27).

5.3.5 Angleichung der Eigenfrequenzen

Nach der 10. Iteration stimmen die MAC-Werte zu 80% überein. Wie in Tabelle 5.5 zu sehen ist, unterscheiden sich die Eigenfrequenzen im Vergleich zur Referenz weiterhin um bis zu 300 Hz. Im letzten Schritt der automatisierten Designanpassung werden, wie schon im ersten Schritt, die Eigenfrequenzen weiter angepasst. Durch die reine Verschiebung der Oberflächenknoten war es nötig, das FE-Netz im Inneren des Tragbocks nachzubese-

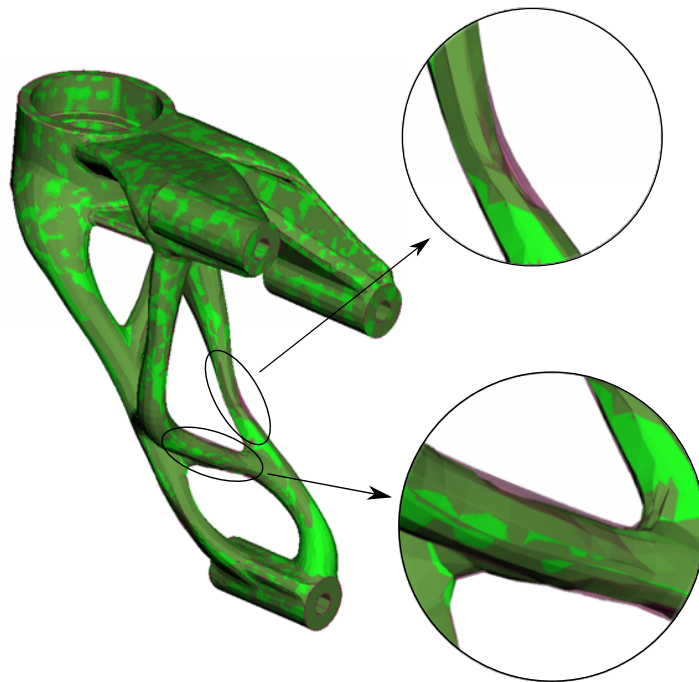


Abbildung 5.27: Vergleich der Geometrie der Iteration 0 (lila) und der Iteration 10 (grün)

Eigenmode Nr.	Referenz	Iteration 10
1	481,47 Hz	574,86 Hz
2	782,02 Hz	1052,91 Hz
3	1246,40 Hz	1475,99 Hz
4	1781,21 Hz	2083,97 Hz
5	2027,73 Hz	2050,90 Hz

Tabelle 5.5: Frequenzen der Eigenmoden 1 - 5

sern, um eine ausreichende Netz-Qualität für die Simulation zu erhalten. In Abbildung 5.28 ist die Entwicklung der Geometrie bei jeder Neuvernetzung dargestellt. In der letzten Iteration liegt die kleinste Materialstärke bei unter 4 mm und wäre in dieser Form nicht in einem Gussverfahren umsetzbar gewesen. Aus diesem Grund wurde die Optimierung mit der 2. Eigenfrequenzanpassung abgebrochen.

Die Auswertung der über den Statortragbock an die Karosserie übertragenen Körperschalleistung zeigt, dass durch die Optimierung das Ergebnis dem der ursprünglichen Optimierung (schwarz gestrichelte Kurve) mit jeder Iteration angenähert wird (Abbildung 5.29). Die grüne Kurve entspricht der Geometrie am Ende der Eigenfrequenzanpassung 2 und die Kurve in cyan der Geometrie am Ende der Eigenfrequenzanpassung 3. Da in der letzten Iterationsschleife die Materialstärke von 4 mm unterschritten wird, wird für die finale Konstruktion die Geometrie aus Eigenfrequenzanpassung 2 gewählt.

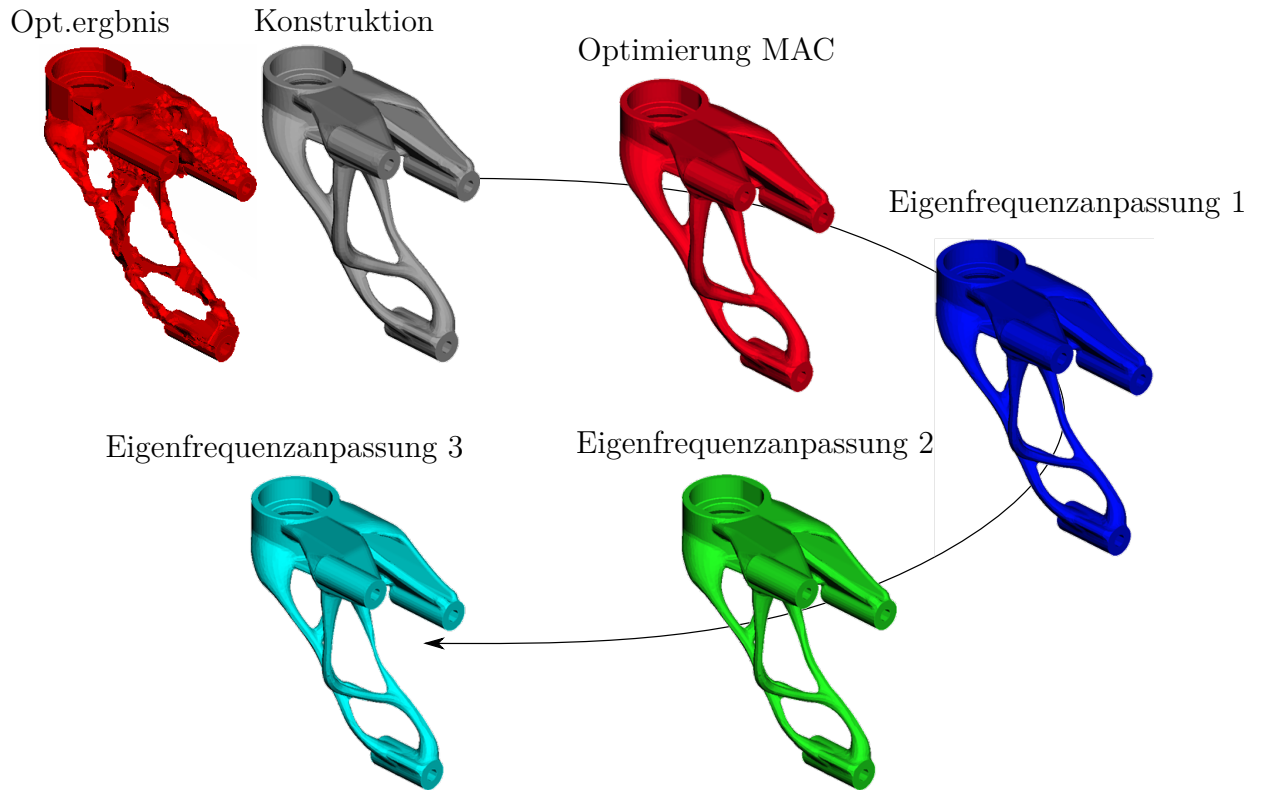


Abbildung 5.28: Ablauf der Eigenfrequenzanpassung in den Schritten der jeweiligen Neuvernetzung

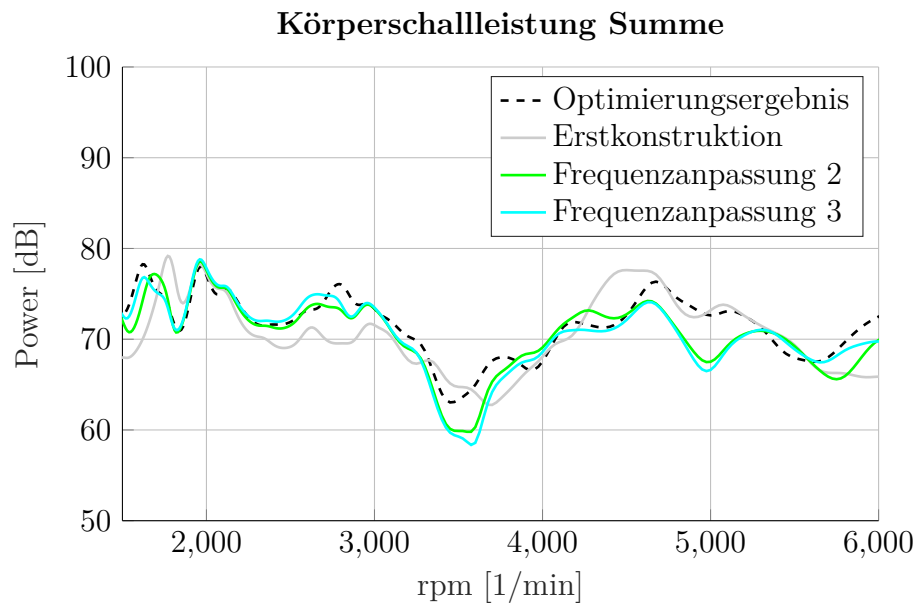


Abbildung 5.29: Körperschalleistung des Statortragbocks des Optimierungsergebnisses (schwarz, gestrichelt) der Erstkonstruktion (grau), der Frequenzanpassung 2 (grün) und der Frequenzanpassung 3 (cyan)

5.3.6 Umsetzung der Optimierungsergebnisse in eine Konstruktion

Das Ergebnis aus der automatisierten Designanpassung kann als ein Designvorschlag wie in der Topologieoptimierung verstanden werden. Anhand dieses Designvorschlages kann die Konstruktion zielgerichtet angepasst werden, um das dynamische Verhalten des Optimierungsergebnisses darzustellen. Abbildung 5.30 zeigt den geometrischen Vergleich des Optimierungsergebnisses (grün) und der Konstruktion (blau). Die minimalen Änderun-

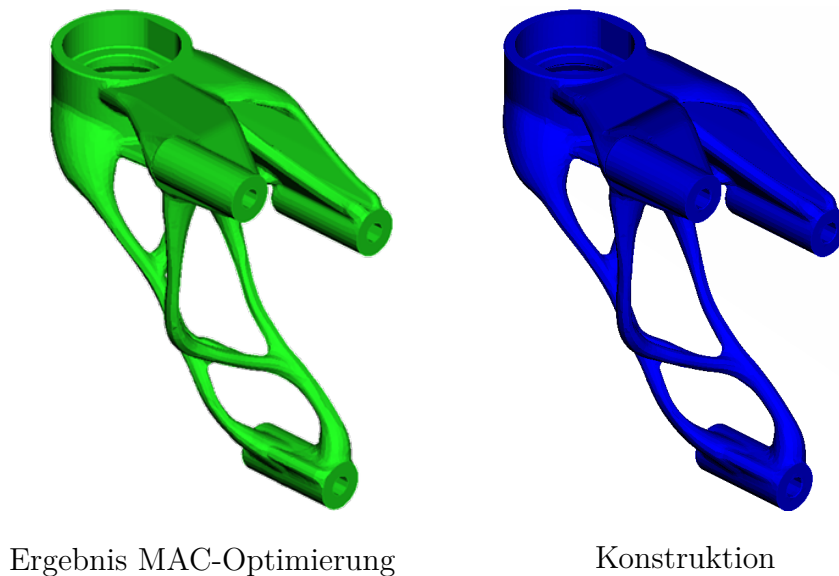


Abbildung 5.30: geometrischer Vergleich des Ergebnisses der MAC-Optimierung (grün) und der finalen Konstruktion (blau)

gen in der Geometrie führen zu einer geringen Abweichung in der Körperschalleistung zwischen dem MAC-Optimierungsergebnis (grün) und der Konstruktion (blau) (Abbildung 5.31). Das Optimierungsergebnis ist mit einer schwarz-gestrichelten Linie dargestellt. Im Drehzahlbereich bis ca. 3000 U/min zeigt die finale Konstruktion eine hohe Übereinstimmung mit dem Optimierungsergebnis. Ab diesem Bereich gibt es geringfügige Abweichungen, die im Vergleich zum Serienstand der Tragböcke keine Verschlechterung aufweist.

5.4 Betriebsfestigkeitsbewertung der Tragböcke

Für den Verbau im Fahrzeug muss neben einer akustischen Bewertung die Betriebsfestigkeit geprüft werden. In Absicherungsprozess wird die gesamte elektrifizierte Einheit mit den Tragböcken in Schocklastenfällen auf ihre Bruchfestigkeit bewertet. Die Schocklastfälle in den jeweiligen Raumrichtungen sind aus den dominanten Crash-Lastfällen abgeleitet, die ein Tragbock ohne Schaden zu nehmen überstehen muss. Das Ergebnis

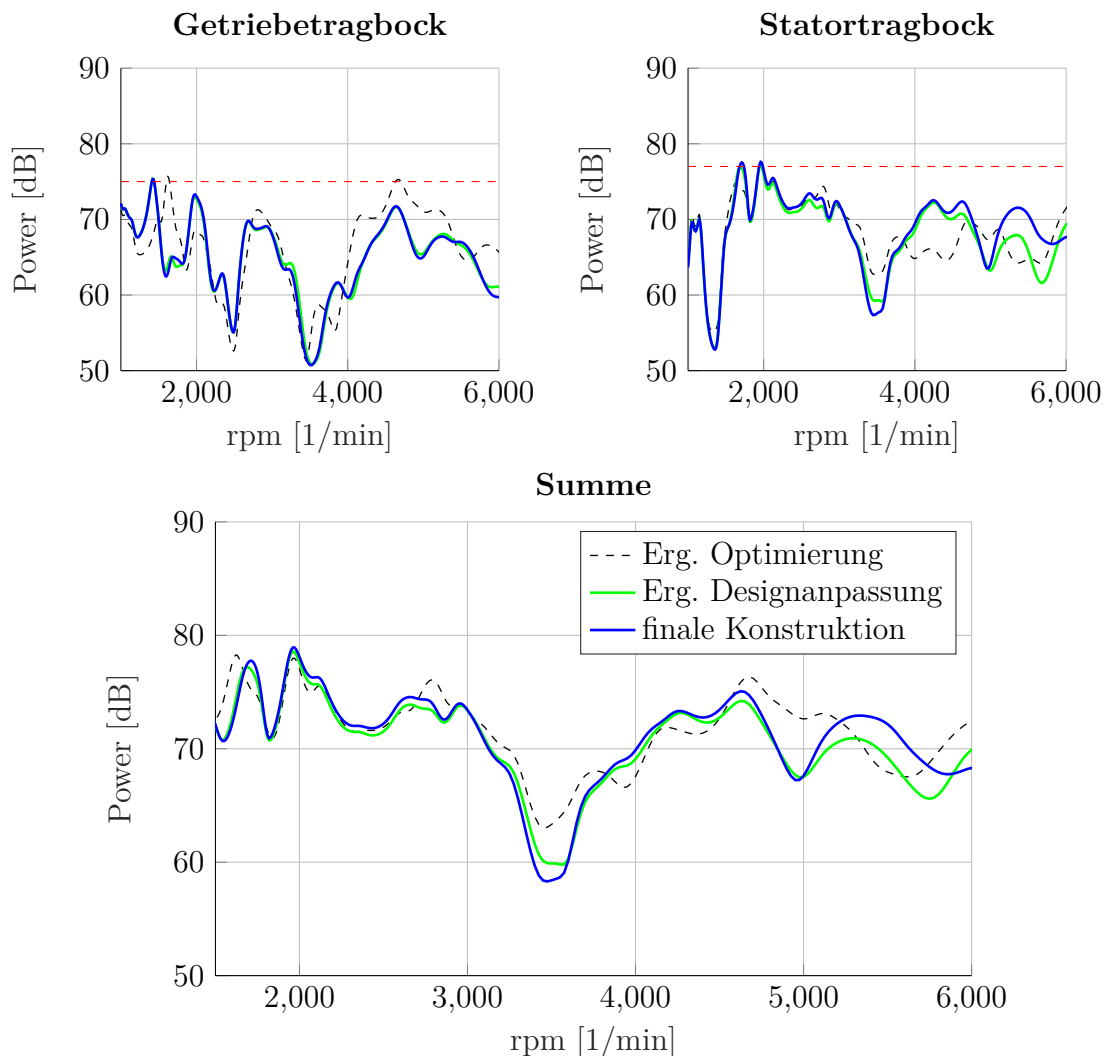


Abbildung 5.31: Übertragene Körperschalleistung der MAC-Optimierung (grün), der finalen Konstruktion (blau) und des ursprünglichen Optimierungsergebnisses (schwarz)

dieser Bewertung ist die Sicherheit gegen Bruch, die bei Prototypen einen Wert > 1 erreichen muss. Für die optimierten Tragböcke aus AlSi9Mg T6 ergeben sich die in Tabelle 5.6 dargestellten Sicherheiten gegen Bruch. Mit dieser Absicherung liegt der Nachweis für eine Fahrzeugmessung am Prüfstand für die beiden Tragböcke vor und es bedarf keiner weiteren Anpassung der Geometrie.

5.5 Akustische Bewertung der final optimierten Tragböcke

Mit der Bewertung der Betriebsfestigkeit sind alle Nachweise für eine Akustikmessung auf dem Rollenprüfstand im Fahrzeug erbracht. Durch die Optimierung der Tragböcke wurde das Gewicht um 73 g für den Getriebe- und 458 g für den Statortragebock (inklusive Entfall

Getriebetragebock			Statortragebock		
Schock x	Schock y	Schock z	Schock x	Schock y	Schock z
> 1.5	> 1.5	> 1.5	1.38	> 1.5	1.04

Tabelle 5.6: Bewertung Betriebsfestigkeit - Sicherheit gegen Bruch

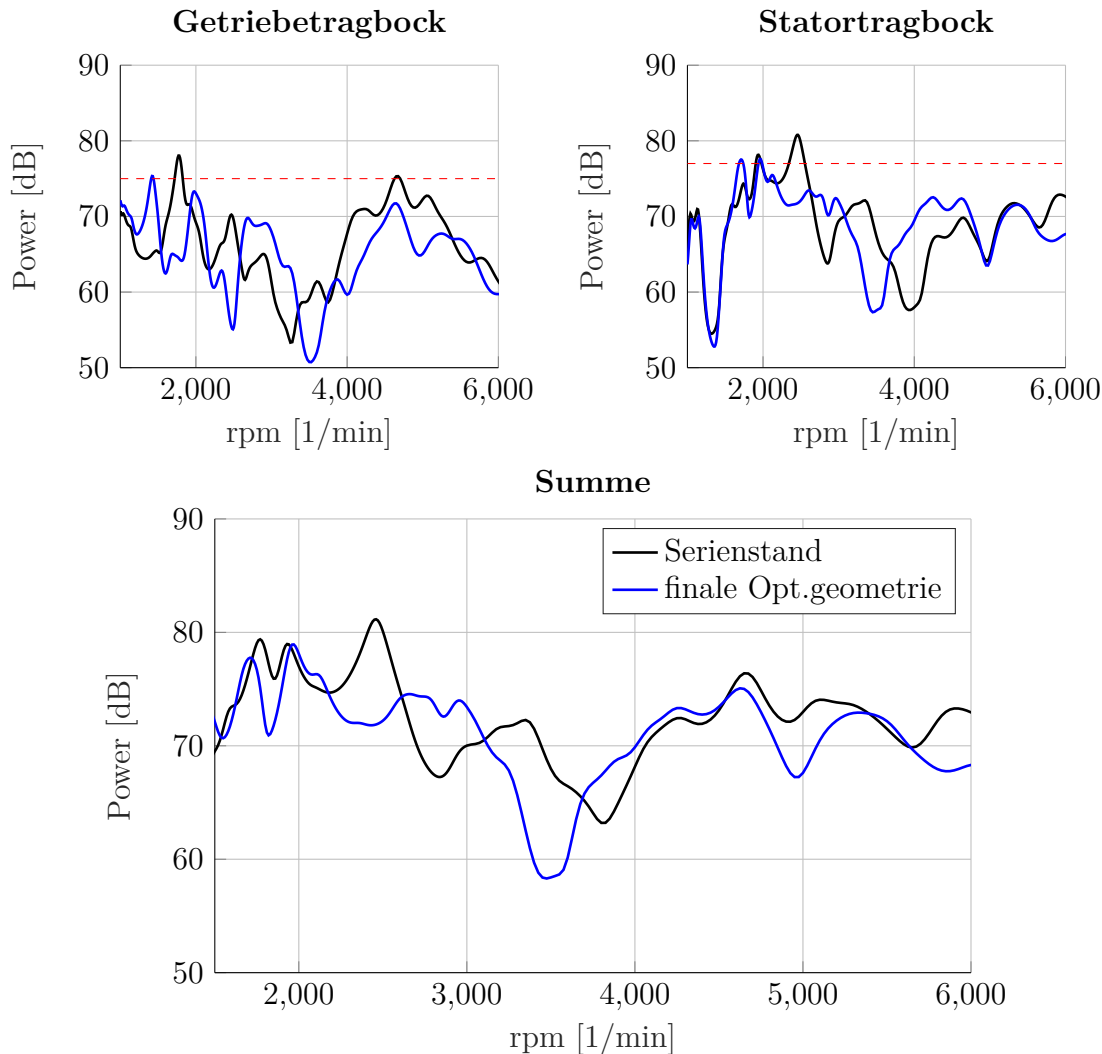


Abbildung 5.32: Vergleich der Körperschalleistung an den Lagerpunkten Der Serientrageböcke (schwarz) und der finalen Konstruktion des Optimierungsergebnisses (blau)

Tilger) gegenüber den Referenztrageböcken reduziert. Die finale Bewertung der übertragenen Körperschalleistung zeigt, dass es möglich ist, neben der Gewichtsreduktion auch die Tilgermasse im Statortragebock entfallen zu lassen ohne einen negativen Einfluss auf die akustischen Eigenschaften zu bewirken. Abbildung 5.32 zeigt die übertragene Körperschalleistung an die Karosserie für den Getriebe- und Statortragebock im Vergleich zu der Konstruktion aus der Optimierung (blau) und der Referenz (schwarz). Am Getriebetragebock liegt die Körperschalleistung über das ganze Drehzahlband unterhalb des

Zielwertes von 75 dB bei einer gleichzeitigen Gewichtsreduktion von 73 g. Aufgrund akustischer Probleme ist der Referenz-Statortragbock mit einer Tilgermasse versehen worden, was zu einem Mehrgewicht von 500 g geführt hat. Durch die Topologieoptimierung und der daraus resultierenden Geometrie wurde die übertragene Körperschalleistung auf den Zielwert von 77 dB reduziert (Referenz: 81 dB) bei gleichzeitigem Verzicht auf den Tilger. Ein Blick auf die Summe der Körperschalleistung über die Tragböcke zeigt, dass in den kritischen Drehzahlbereichen bei 1800 U/min und 5000 U/min die Optimierung keine Verschlechterung gegenüber der Referenz gebracht hat. Das lokale Maximum der Summe bei 2200 U/min wurde durch den Statortragbock von 82 dB auf 73 dB (2250 U/min) reduziert. Ein geometrischer Vergleich der Referenz mit den Optimierung ist in

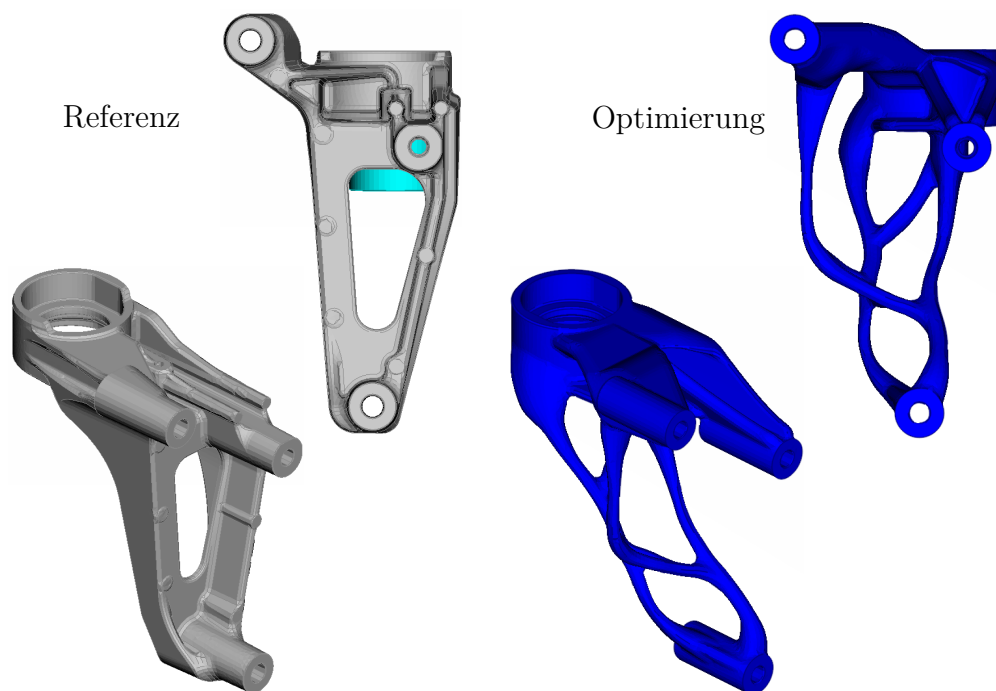


Abbildung 5.33: Vergleich der finalen Geometrie der Optimierung mit der Referenz des Statortragbocks

Abbildung 5.33 und 5.34 dargestellt. Bei der Geometrie des Getriebetragebocks zeigt sich, dass die Anzahl der Strukturstreben reduziert wurde. Der daraus folgende Steifigkeitsverlust der Struktur wurde durch eine Erhöhung der Wanddicken im Gurt (Außenflächen des Tragebocks) und in der verbliebenen Strebe entgegen gewirkt (Konstruktion aus dem Optimierungsergebnis ist nahezu gewichtsneutral). Die Struktur des Statortragbocks hat sich grundlegend geändert und kann nicht mehr mit der Referenz verglichen werden. Der massive obere Teil an den oberen beiden Verschraubungen zum E-Maschinen-Gehäuse trägt maßgeblich zur Steifigkeit bei. Der untere Anschraubpunkt ist durch die dünnen Streben (Durchmesser ca. 6mm) nahezu von den oberen Punkten entkoppelt und spielt in den dynamischen Schwingformen eine entscheidende Rolle.

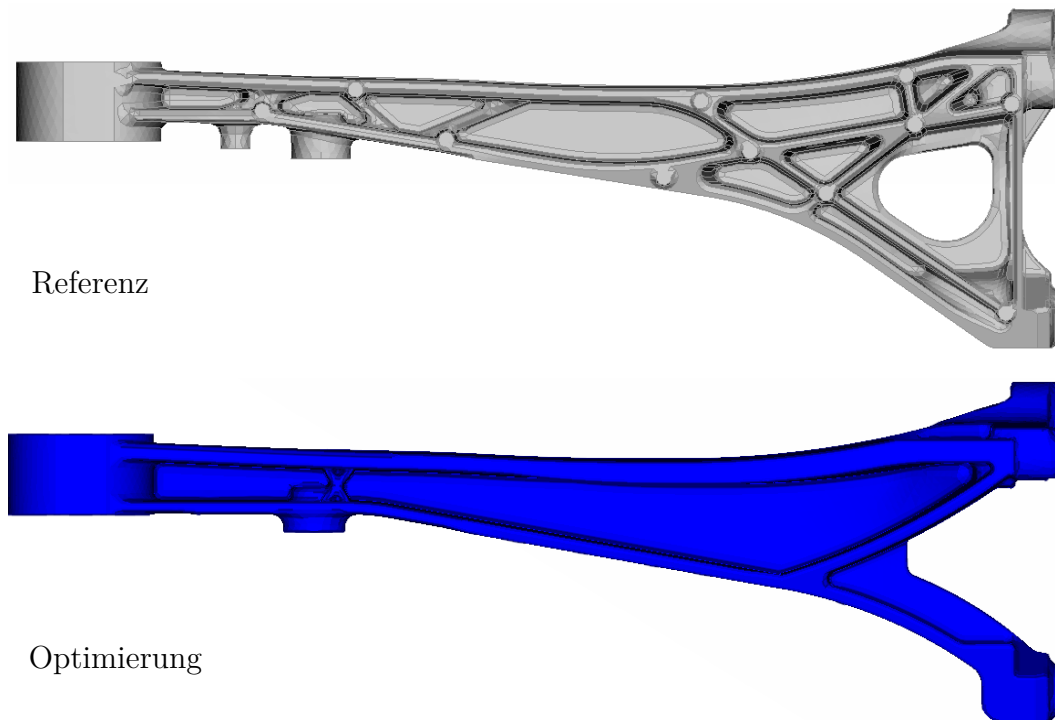
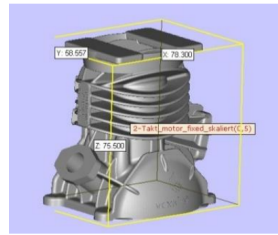


Abbildung 5.34: Vergleich der finalen Geometrie der Optimierung mit der Referenz des Getriebetragebocks

5.6 Fertigung der optimierten Tragböcke

Die Motortragböcke in der Serienfertigung werden in einem Gussverfahren produziert. Um den Einfluss der Fertigungsart der optimierten Tragböcke auf das akustische Verhalten so gering wie möglich zu halten, wurde sich gegen ein additives Druckverfahren und für ein spezielles Feingussverfahren für Prototypen und Kleinserien entschieden. In dem Feingussverfahren nach Abbildung 5.35 wird aus dem gelieferten CAD-Modell (Schritt 1) in einem additiven Druckverfahren die Geometrie der Motortragböcke aus Polymethylmethacrylat (PMMA) als Positiv-Formen hergestellt (Schritt 2). Dieses Modell wird mit einer Wachsschicht überzogen um die raue Oberfläche, die durch das Drucken entstanden ist zu glätten. Die Zu- und Abflüsse für den Guss werden aus Wachs modelliert und an das PMMA-Modell angeklebt (Schritt 3). Die Negativ-Form für den späteren Guss wird durch einen Überzug aus mehreren Schichten Keramik hergestellt (Schritt 4). Das PMMA und das Wachs lassen sich durch Ausbrennen aus der Form entfernen und es bleibt eine Negativ-Form des Modells aus Keramik zurück (Schritt 5), die nur für einen Gussvorgang verwendet werden kann (Lost-Foam Verfahren). Im anschließenden Guss wird die Rohgeometrie gegossen (Schritt 6), aus der Form gelöst und durch mechanische Nachbehandlung auf das vorgegebene Maß an den Punkten der Verschraubung angebracht (Schritt 7). Das in der Serienproduktion der Tragböcke verwendete Gussmaterial stand in der gewählten Prototypenfertigung nicht zur Verfügung. Es wurde sich für ein vergleichbares Material Aluminium AlSi9Mg T6 entschieden. Durch Erkalten der Schmelze in der Form kommt

1: CAD-Modell



2: Modell aus PMMA



3: Anguss aus Wachs



4: Überzug aus Keramik



5: Ausbrennen PMMA



6: Giesen der Modelle



7: Nachbearbeitung



Abbildung 5.35: Ablauf des Fertigungsverfahrens der Motortragböcke im Feingussverfahren für Kleinserien und Prototypen [Vox15]

es durch Schrumpfen zu einer Volumenänderung. Diese Volumenänderung führt zu einem Verzug des Bauteils, was bei länglichen Bauteilen zu Ungenauigkeiten in den Toleranzen führen kann. Für den Getriebetragebock wurde daher eine Toleranzmessung durchgeführt (Abbildung 5.36). Diese entspricht den geforderten Vorgaben der Bauteiltoleranzen nach DIN EN ISO 1101. Die fertigen Motortragböcke sind in Abbildung 5.37 und 5.38 dargestellt.

5. Anwendung in der Praxis

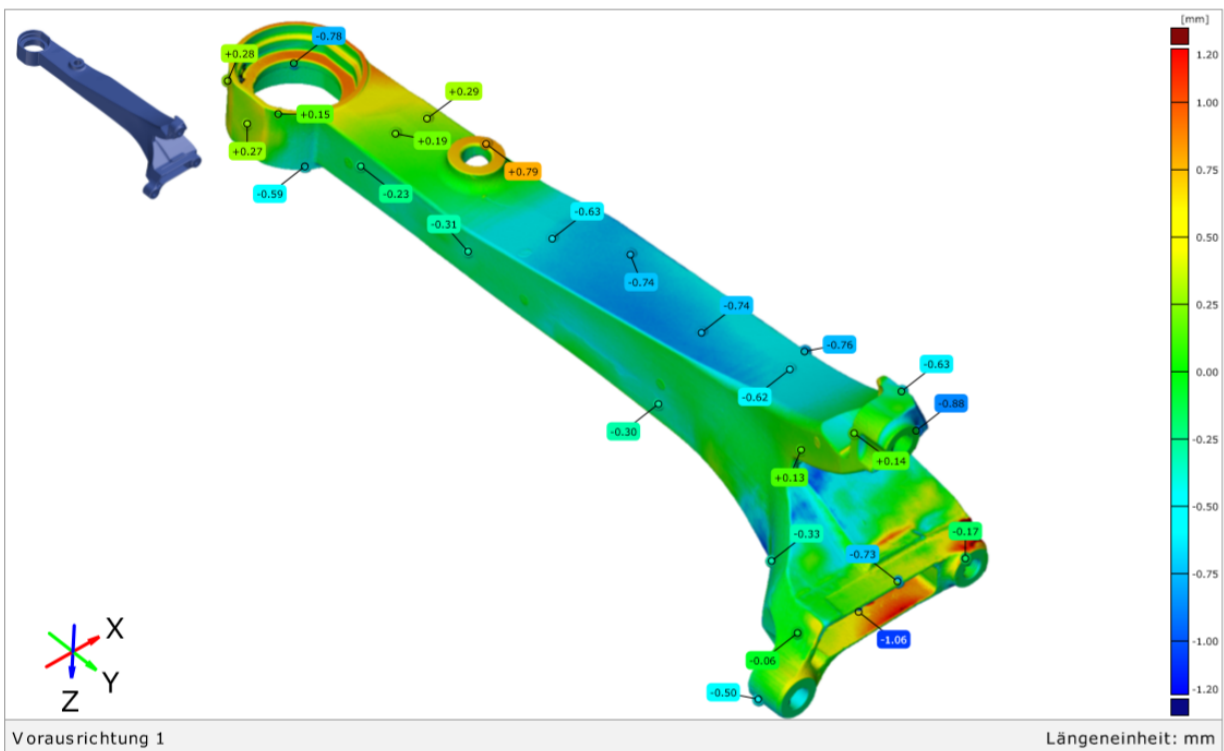
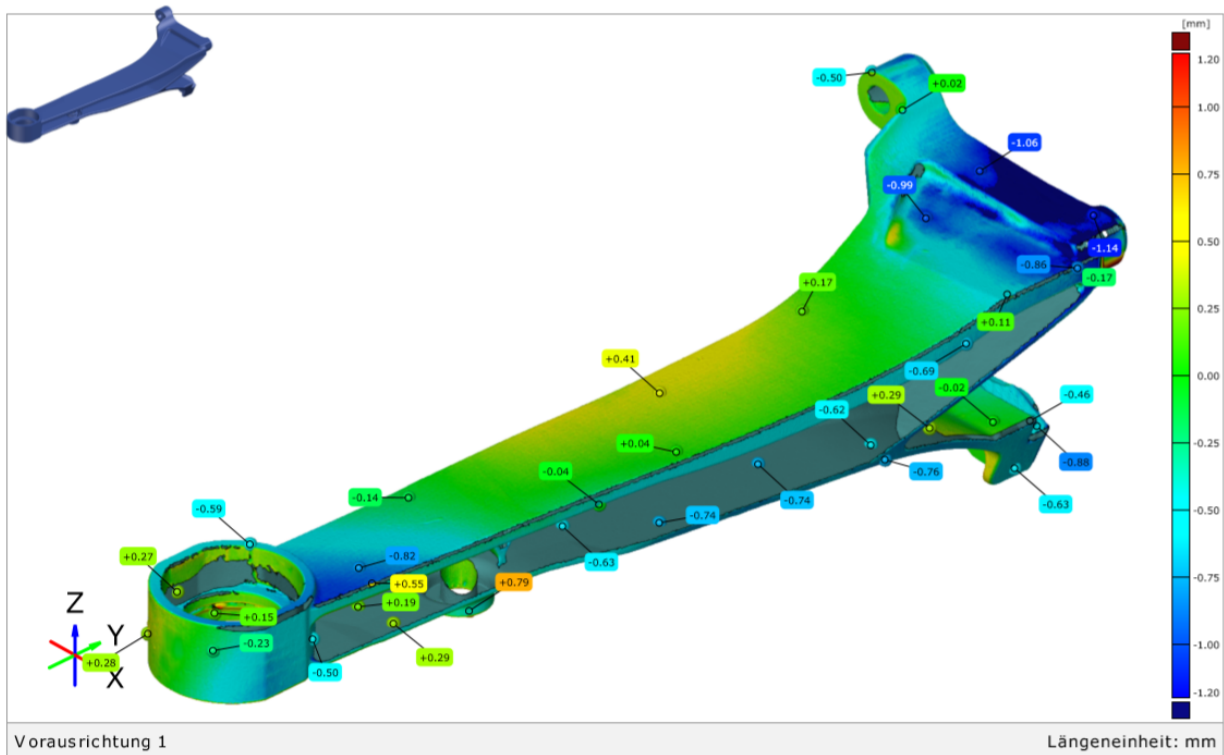


Abbildung 5.36: Geometrische Vermessung des Getriebeträgbocks

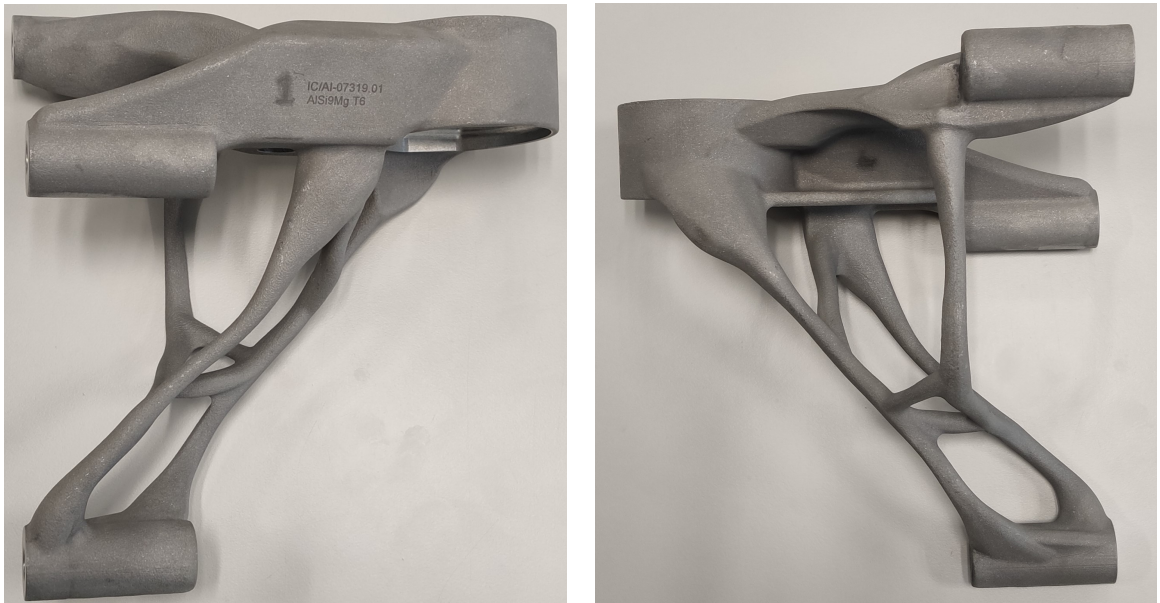


Abbildung 5.37: Im Feingussverfahren hergestellter Statortragbock



Abbildung 5.38: Im Feingussverfahren hergestellter Getriebetragebock

5.7 Akustische Vermessung der optimierten Tragböcke

Die Arbeiten von [Ull16] zeigen, dass die Genauigkeit aktueller Messgeräte für die Bestimmung der Körperschallleistung nicht ausreicht. Das primäre Ziel einer jeden akustischen Bewertung im Automobilbau ist es, einen höchstmöglichen Komfort für den Kunden beziehungsweise für die Passagiere im Fahrzeug zu gewährleisten. Die Vergleichsmessung zur Validierung der Simulationsergebnisse findet in einem Fahrzeug auf dem Rollenprüfstand statt (Abbildung 5.39). Als Messgröße für den Einfluss der optimierten Tragböcke



Abbildung 5.39: Getriebetragebock im Messfahrzeug auf dem Rollenprüfstand (Statortragebock aufgrund Verkapselung nicht sichtbar)

an den Akustikkomfort wird der Schalldruckpegel im Fahrzeuginnenraum herangezogen. Die Messung findet auf Höhe des linken und rechten Ohres auf dem Fahrersitz für einen Motorhochlauf der E-Maschine unter Vollast statt. Als Referenz für den gemessenen Schalldruckpegel wird der Mittelwert zwischen der Messung am linken und rechten Ohr verwendet. Abbildung 5.40 zeigt die Messung am linken und rechten Ohr (hellblau) und den Mittelwert der beiden Messungen (blau) für die Messung der Referenztragböcke und für die optimierten Tragböcke (rote Farbtöne). Abhängig von der Frequenz nimmt das menschliche Gehör Geräusche mit unterschiedlicher Lautstärke wahr. Um diesen Einfluss zu berücksichtigen wird eine Frequenzbewertung verwendet. Die Frequenzbewertung ist

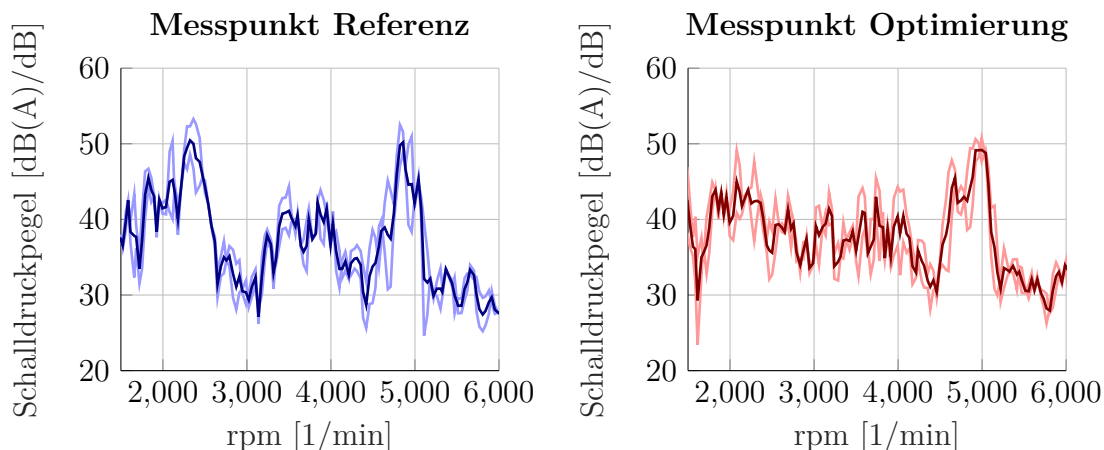


Abbildung 5.40: Mittellung zwischen den Messpunkten am linken und rechten Fahrerohr für die Referenz (links) und der Optimierung (rechts)

ein frequenzabhängiger Abzug beziehungsweise Zuschlag vom ermittelten Schalldruckpegel. Dieser wird bewerteter Schalldruckpegel genannt, welcher als dB(X) oder mit dBX angegeben wird. X steht dabei für den im jeweiligen Fall konkret eingesetzten Bewertungsfilter. In praktischen Anwendungen üblich ist die A-Bewertung, welche für eine konstant wahrgenommene Lautstärke bei circa 40 phon ausgelegt ist. Die weiteren Bewertungen (B,C,D und G) werden für höhere Lautstärkepegel verwendet. Der relative Schalldruckpegel nach DIN 45635 für die A-Bewertung ist in Abbildung 5.41 dargestellt und berechnet sich nach:

$$A(f) = 20 \log(R_A(f)) - 20 \log(R_A(1000Hz)) \quad (5.4)$$

mit

$$R_A(f) = \frac{12200^2 * f^4}{(f^2 + 20,6^2) * (f^2 + 12200^2) * \sqrt{f^2 + 107,7^2} * \sqrt{f^2 + 737,9^2}} \cdot \quad (5.5)$$

Der in dieser Messung betrachtete Drehzahlbereich von 1500 U/min bis ca. 6000 U/min (beziehungsweise Frequenzbereich von 600 Hz - 2400 Hz) befindet sich nach Abbildung 5.41 in einem Bereich, der einen geringen Einfluss durch die A-Bewertung erfährt. Der Vergleich der tatsächlichen Messung (dunkelblau beziehungsweise dunkelrot) und der A-Bewertung (blau beziehungsweise rot) ist in Abbildung 5.42 für den gemittelten Schalldruckpegel dargestellt. Die ermittelte Körperschalleistung in der Simulation wird als Referenz für den Schalldruckpegel am Fahrerohr unter der Annahme verwendet, dass die Übertragung des Körperschalls über die Karosserie und den Luftschall konstant über dem Frequenzbereich liegt. Je nach Geschwindigkeit des Fahrzeugs werden die Störgeräusche des E-Antriebs durch Nebengeräusche wie zum Beispiel Windgeräusche überlagert. Der Bereich der niedrigen Maskierung geht bis circa 3000 U/min der E-Maschine und ist der Fokus für die Betrachtung der übertragenen Körperschalleistung. Je nach Karosserievariante schwankt der Grenzwert der niedrigen Maskierung um circa 250 U/min. Ein direkter Vergleich zwischen den Messungen erfolgt für den Drehzahlbereich bis 3250 U/min, um

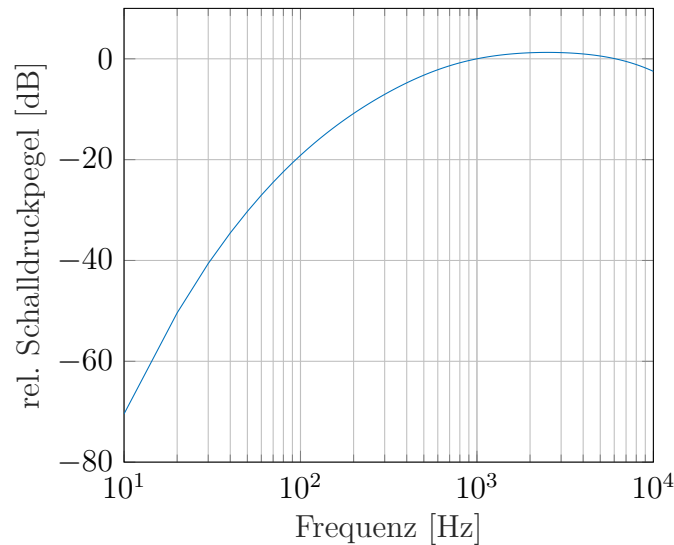


Abbildung 5.41: relativer Schalldruckpegel für eine A-Bewertung

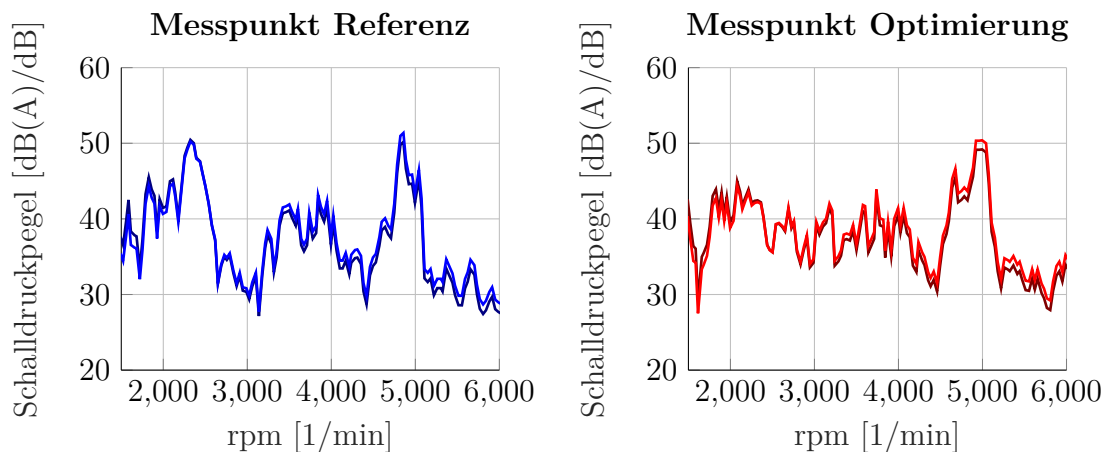


Abbildung 5.42: Vergleich des tatsächlichen Schalldruckpegels (dunkel) mit seiner A-Bewertung (hell)

den gesamten Bereich der niedrigen Maskierung abdecken zu können. Der Bereich bis 6000 U/min wird als Kontrollbereich sowohl gemessen, als auch simuliert um mögliche Tendenzen vergleichen zu können. In Abbildung 5.43 ist der Bereich niedriger Maskierung gelb markiert. Dieser Bereich zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen der Messung und der Simulation für die Referenztragböcke (jeweils blau) wie für die optimierten Tragböcke (jeweils rot). Das durch die Optimierung reduzierte Maximum bei circa 2400 U/min (-10 dB Körperschalleistung) zeigt auch in der Messung eine Reduzierung des Schalldruckpegels um circa 10 dB(A). Für den Bereich der niedrigen Maskierung liegt der Schalldruckpegel durchgehend unter dem Wert von 45 dB und entspricht in etwa der Lautstärke in einem ruhigen Wohnzimmer. Für den Passagier ist die E-Maschine nicht mehr als ein Störgeräusch wahrnehmbar. Der Kontrollbereich ab 3250 U/min zeigt im Bereich zwischen 4500 U/min und 5500 U/min eine Überhöhung, die auch in der Simulation bemerkbar ist. In

der Simulation liegt diese Überhöhung in einem niedrigeren Drehzahlband (4000 - 5000 U/min).

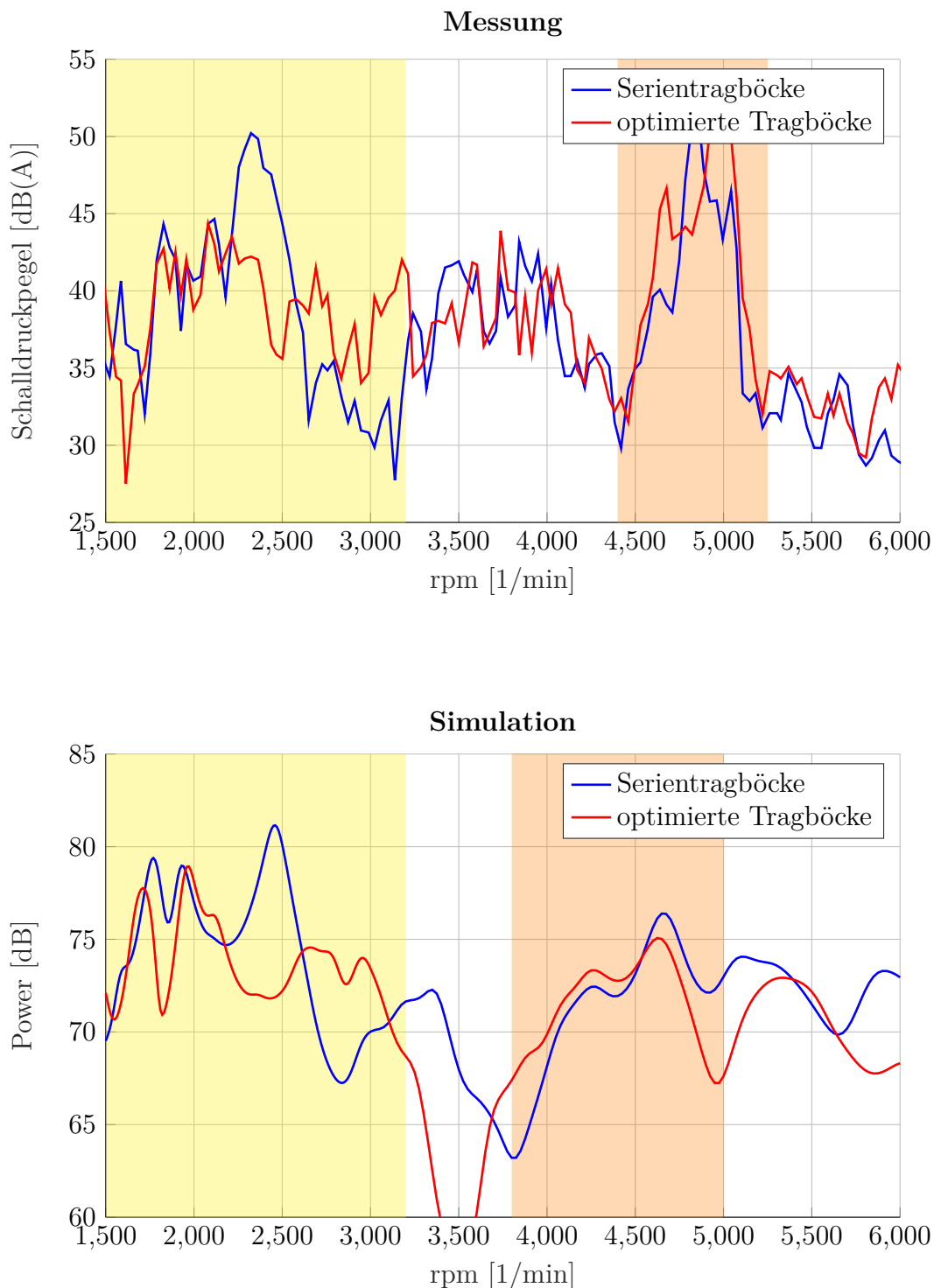


Abbildung 5.43: Vergleich der simulierten Körperschalleistung mit dem gemessenen Schalldruckpegel für die Serientragböcke (blau) und die optimierten Tragböcke (rot)

5.8 Fazit des praxisnahen Beispiels

Die Optimierung der Motortragböcke im Fahrzeugantriebssystem fokussierte sich darauf, die übertragene Körperschalleistung von der E-Maschine zur Karosserie zu reduzieren. Durch die Anwendung der Topologieoptimierung konnte das Gesamtgewicht der Motortragböcke um 31 g auf 3.19 kg verringert werden. Die Integration der Körperschalleistung als Randbedingung in die Optimierung ermöglichte den Verzicht auf den Schwingungstilger und führte zu einer zusätzlichen Gewichtsreduktion von 0.5 kg.

Die simulative Analyse zeigte eine Verringerung des übertragenen Körperschalls um circa 8 dB im unteren Drehzahlbereich als direktes Ergebnis der Optimierung der Motortragböcke. Der erhaltene Designvorschlag aus der Topologieoptimierung mussten für die Fertigung in eine CAD-Konstruktion überführt werden, welche wiederum Abweichungen in den dynamischen Struktureigenschaften durch Berücksichtigung der Fertigungsrandbedingungen aufwies. Die automatisierte Designanpassung der CAD-Konstruktion verbesserte die Übereinstimmung der Eigenmoden zwischen Konstruktion und Optimierungsergebnis von 10 % auf über 80 %, sodass das dynamische Verhalten der Optimierung nun in der Konstruktion abgebildet wurde.

Schließlich zeigte eine akustische Messung des Schalldruckpegels am Fahrerohr auf einem Rollenprüfstand eine Reduzierung im kritischen Drehzahlbereich um 8 dB. Diese Ergebnisse korrelieren mit der verringerten übertragenen Körperschalleistung von der E-Maschine zur Fahrzeugkarosserie.

Dieses Fazit zeigt, wie die Optimierung der Motortragböcke nicht nur zu einer Gewichtsreduktion führte, sondern auch die Übertragung von Körperschall signifikant reduzierte, was positive Auswirkungen auf das akustische Verhalten des Fahrzeugs hatte.

6

Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Ziel der Arbeit war die Erarbeitung einer Methode zur Topologieoptimierung von Leichtbaustrukturen unter Betrachtung der übertragenen Körperschalleistung. Die Rückführung der Optimierungsergebnisse in eine fertigungsgerechte Konstruktion wurde mittels einer neuen Methode durch eine automatisierte Designanpassung vereinfacht. An einem realen Beispiel von Tragböcken einer E-Maschine wurden die beiden Methoden durchgeführt und in einer Messung an einem Rollenprüfstand im Fahrzeug verifiziert. Das Ergebnis der Optimierung:

- Reduktion der Masse um 31 g für beiden Tragböcke in Summe
- Verzicht auf den Schwingungstilger mit einer Masse von 500 g
- Verbesserung in der Akustik im unteren Drehzahlbereich (bis 3000 U/min)

6.1.1 Topologieoptimierung Körperschalleistung

Im aktuellen Auslegungsprozess von Integrationsbauteilen im Antriebsstrang werden als Parameter für den Körperschall die Beschleunigungspegel an den Verschraubungspunkten zur Karosserie verwendet. Als Anregung dienen die durch die E-Maschine und das Getriebe angeregten Schwingungen, die über das Gehäuse und die Motortragböcke an die Karosserie übertragen werden. Die Beschleunigungspegel werden als Referenz für den Körperschall verwendet, obwohl sie diesen nicht umfassend abbilden können, da der Einfluss der Kraftkomponente nicht berücksichtigt wird. Durch die Bestimmung der Körperschalleistung werden die relevanten Parameter Weg (Beschleunigung) und Kraft sowie deren Phasenverschiebung zueinander berücksichtigt:

$$P_m = P_W = \frac{f_0 v_0}{2} \cos(\varphi_f - \varphi_v) . \quad (6.1)$$

In der Entwicklung von Antrieben werden zum einen die Anregungskräfte so niedrig wie möglich gehalten. Zum anderen muss auch die Übertragung der noch vorhandenen Anre-

gung soweit möglich reduziert werden. Die Motortragböcke, als integraler Bestandteil von Antriebssystemen in Fahrzeugkarosserien, unterliegen einer speziellen Analyse hinsichtlich ihres akustischen Übertragungsverhaltens und werden dementsprechend ausgelegt. Im fortgeschrittenen Entwicklungsstadium werden bei akustischen Unregelmäßigkeiten Schwingungstilger eingebaut, um die Akustik zu verbessern, jedoch erhöht sich dadurch auch das Gesamtgewicht des Fahrzeugs. Die Methodik der Topologieoptimierung unter Berücksichtigung der Körperschalleistung als Randbedingung wird an den Motortragböcken einer bereits in Serienproduktion befindlichen E-Maschine angewendet. Die beiden Motortragböcke haben ein Gesamtgewicht von 3.22 kg (2.22 kg Getriebetragebock und 1.00 kg Statortragebock). Der Statortragebock hat aufgrund akustische Auffälligkeiten einen Schwingungstilger mit einer Masse von 0.5 kg . Durch die Auslegung der Trageböcke

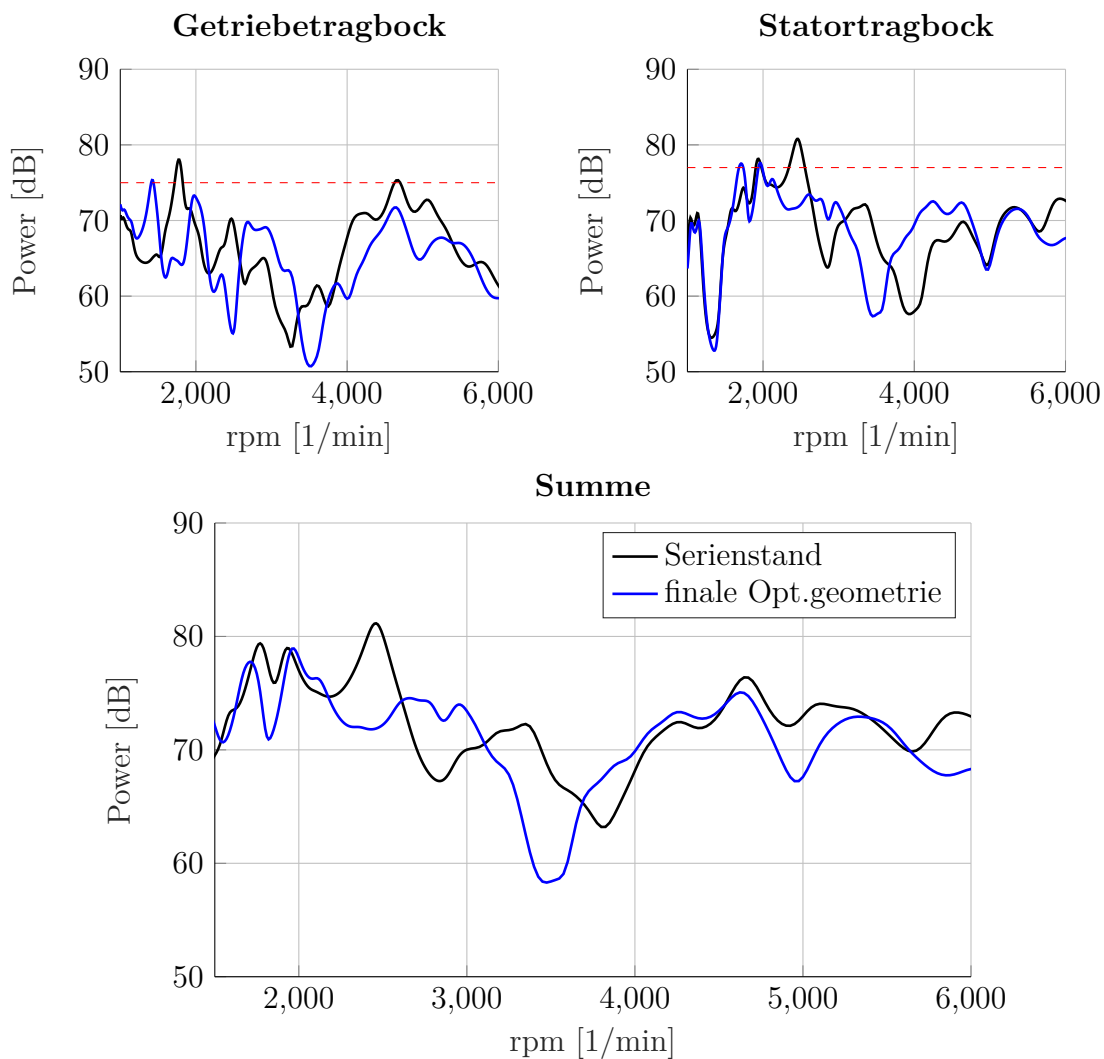


Abbildung 6.1: An die Karosserie übertragene Körperschalleistung für die aktuellen Serientrageböcke (schwarz) und die optimierten Trageböcke (blau)

mit Hilfe der Topologieoptimierung kann das Gesamtgewicht der Trageböcke um 31 g auf 3.19 kg gesenkt werden. Durch eine akustische Randbedingung in Form der Körper-

schalleistung kann nach der Optimierung auf den Schwingungstilger verzichtet werden, wodurch weitere 0.5 kg eingespart werden können. In Abbildung 6.1 ist der Vergleich der übertragenen Körperschalleistung an der Karosserie für Serientragböcke (schwarz) und die optimierten Tragböcke (blau) dargestellt. Im unteren Drehzahlbereich konnte der Leistungspegel deutlich reduziert werden (circa 8 dB). Im weiteren Verlauf zeigt sich ein ähnliches Verhalten, wie bei den Serientragböcken. Das Selbige konnte in der Messung auf dem Prüfstand im Gesamtfahrzeug gezeigt werden. Als Bewertungskriterium gilt der Schalldruckpegel am Fahrerohr (Abbildung 6.2). Wie in der Simulation zeigt sich auch in der Messung in den unteren Drehzahlen bis circa 3000 u/min eine akustische Verbesserung und in höheren Drehzahlen ein vergleichbares Verhalten.

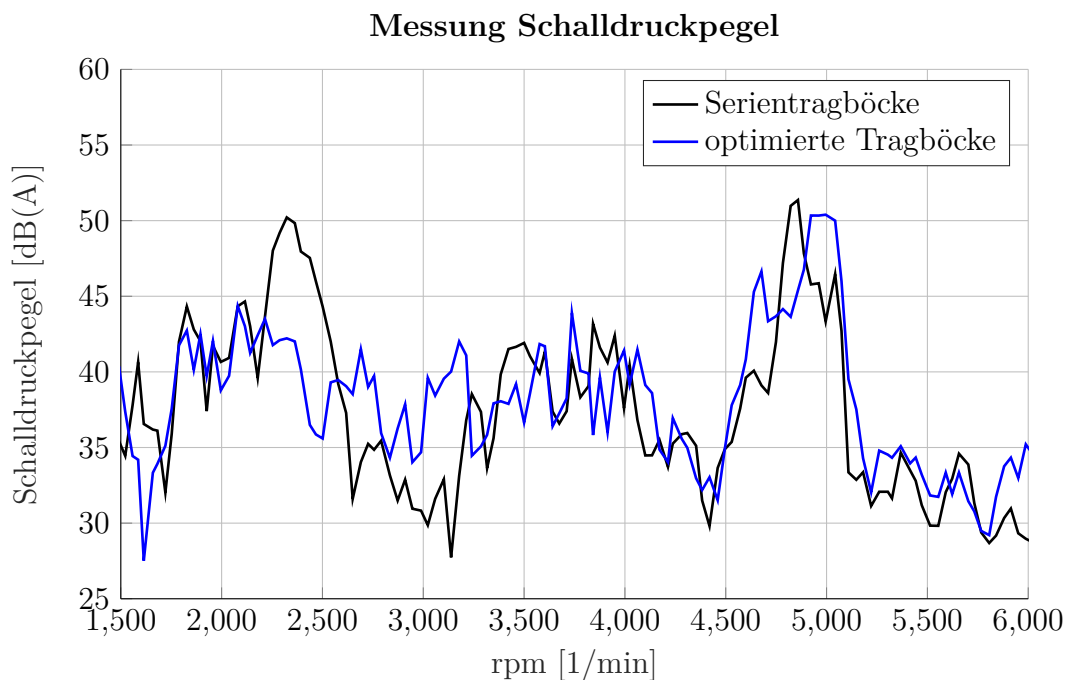


Abbildung 6.2: Vergleich des mittleren Schalldruckpegels am Fahrerohr für die Serientragböcke (schwarz) und die optimierten Tragböcke (blau)

6.1.2 Automatisierte Designanpassung

In der Topologieoptimierung hat sich gezeigt, dass das reine Optimierungsergebnis nur mit Erfahrung eines Konstrukteurs in eine fertigungsgerechte Konstruktion umgesetzt werden kann, die mit dem Verhalten des Optimierungsergebnisses übereinstimmt. Die gezeigte automatisierte Designanpassung gleicht das Verhalten der Konstruktion dem der Optimierung durch eine Shape Optimierung an. Als Vergleichsparameter dient das Modal Assurance Criterion, welches die Eigenmoden der beiden Modelle miteinander vergleicht und die Übereinstimmung der einzelnen Eigenmoden darstellt. Mit Hilfe der MAC-Sensitivität wird iterativ die Güte des MAC verbessert, bis der vorgegebene Zielwert erreicht wird. Abbildung 6.3 zeigt den MAC-Plot für den Vergleich des Optimierungsergebnisses mit der

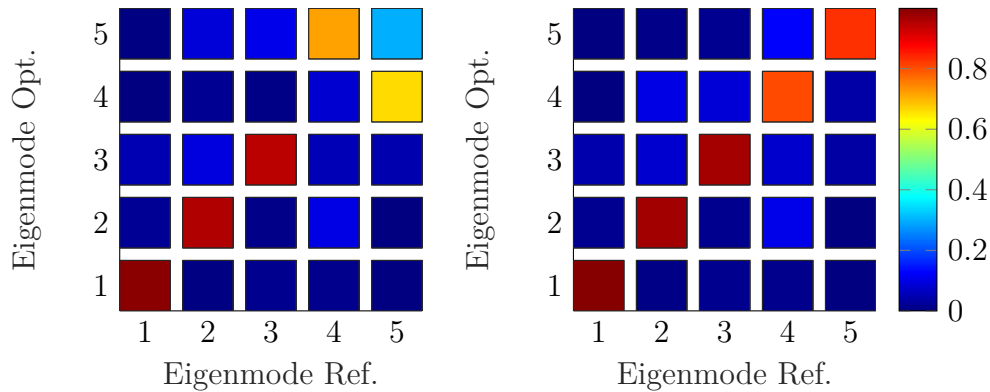


Abbildung 6.3: Vergleich der MAC-Bewertung vor (links) und nach (rechts) der automatisierten Designanpassung

ersten Konstruktion und den Vergleich des Optimierungsergebnisses mit der finalen Iteration der automatisierten Designanpassung. Die Übereinstimmung der Eigenmoden steigt von circa 10 % auf über 80 %. In Abbildung 6.4 ist die übertragene Körperschalleistung für das Optimierungsergebnis, die Basis-Konstruktion und das Ergebnis der automatisierten Designanpassung dargestellt. Die noch vorhandenen Abweichungen sind auf die Fertigungsrandbedingungen zurückzuführen, da manche Strukturen aus der Optimierung in einem Gießprozess nicht umgesetzt werden können.

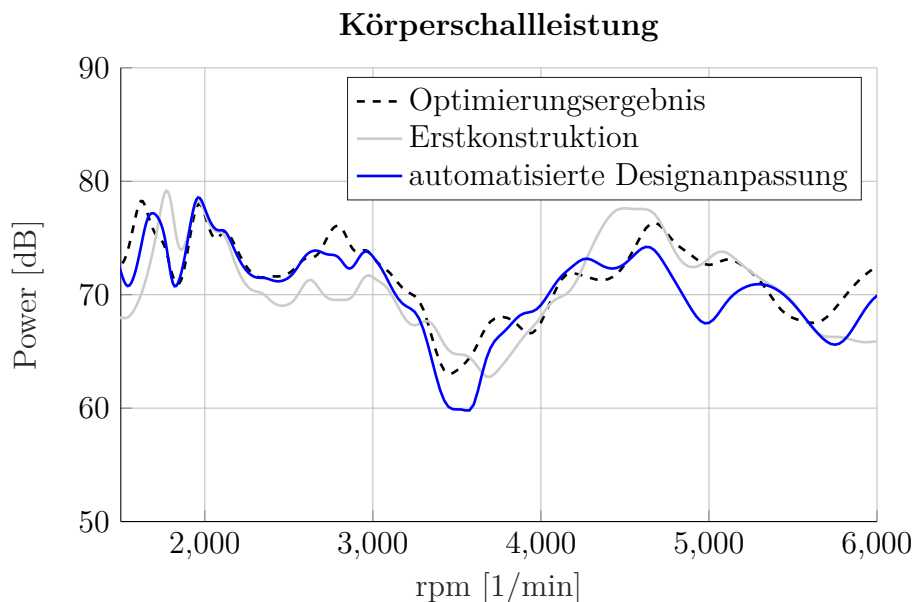


Abbildung 6.4: Körperschalleistung des Statortragbocks des Optimierungsergebnisses (schwarz, gestrichelt) der Erstkonstruktion (grau) und das Ergebnis der Designanpassung (blau)

6.2 Ausblick

Der Bereich der Akustik erfährt in der Entwicklung neuer Automobile einer wachsenden Bedeutung. Schon in der Konzeptauslegung werden erste akustische Bewertungen und damit Konzeptentscheidungen anhand von topologischen Optimierungen durchgeführt. Dies erfordert eine weitreichende Aussagefähigkeit zum erwartenden Verhalten der Körperschallakustik. Die Körperschalleistung bildet die Körperschallakustik vollumfänglich ab und bietet eine bessere Aussagefähigkeit als die bisher verwendeten Beschleunigungspegel. Diese haben sich bereits im Automobilbau etabliert und können sowohl in der Simulation wie auch in der Messung abgebildet werden. Für einen kommerziellen Einsatz der Körperschalleistung in der Entwicklung des Antriebsstrangs muss diese Methode noch weiter erforscht werden. Die Körperschalleistung ist abhängig von der Dämpfung, die im System vorhanden ist. Je genauer diese Dämpfung abgebildet wird, desto genauer kann der absolute Wert der Körperschalleistung abgebildet werden. Da in dieser Arbeit ein relativer Vergleich zwischen zwei Systemen durchgeführt wurde, war es ausreichend die Dämpfung als eine globale, modale Dämpfung für das System einzusetzen und die Karosserie als konstante Dämpfung für beide Systeme darzustellen. Um absolute Aussagen über die Körperschalleistung geben zu können, muss die Dämpfung detaillierter aufgeteilt werden in den Bereich der Materialdämpfung und der Fügestellendämpfung. Auch die gesamte Karosserie muss im Modell dargestellt und mit all ihren Dämpfungen abgebildet werden. Mit der aktuellen Modellierungsmethodik sind absolute Aussagen über die Körperschalleistung nicht zuverlässig. Neben dem simulativen Teil ist es aktuell nach den Arbeiten von [Ull16] nicht möglich, die Körperschalleistung in Messungen zu bestimmen. Die Auflösung aktueller Messgeräte ist nicht ausreichend um aussagefähige Messungen durchführen zu können. Solange die Körperschalleistung sowohl simulativ als auch messtechnisch nicht vollumfänglich nachgewiesen werden kann ist es schwer, Aussagen über mögliche akustische Ziele festzulegen und diese im Entwicklungsprozess einzuhalten.

Die automatisierte Designanpassung mittels MAC-Sensitivität kann für jedes beliebige Bauteil verwendet werden: sei es zur Anpassung einer Konstruktion für ein Optimierungsmodell wie auch zur Anpassung eines FE-Modells bei einer vorhandenen Messung. Eine Implementierung in einer kommerziellen Software bietet die Möglichkeit einer deutlichen Rechenreduzierung, da vorhandene, optimierte Verfahren zur Bestimmung von Steifigkeits- und Massenmatrix genutzt werden können. Auch die Kombination der MAC-Sensitivitäten mit anderen Sensitivitäten kann auf diese Weise realisiert werden. Eine weitere Möglichkeit wäre eine automatisierte Designanpassung in einer kommerziellen Software mittels Shape-Optimierung, die als zusätzlicher Schritt nach der Optimierung und Konstruktion angeboten werden kann.

Literaturverzeichnis

- [AB82] R. J. Allemang and D. L. Brown. A correlation coefficient for modal vector analysis. *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference*, 1982.
- [All81] R.J. Allemang. *Investigation of Some Multiple Input/Output Frequency Response Function Experimental Modal Analysis Techniques*. University Microfilms, 1981.
- [All03] R. J. Allemang. The modal assurance criterion - twenty years of use and abuse. *Sound and vibration*, 37:14–23, 2003.
- [Alt12] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik - Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer Verlag, 2012.
- [Bat06] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 2006.
- [Bos96] G. Bosse. *Grundlagen der Elektrotechnik III: Wechselstromlehre, Vierpol- und Leitungstheorie*. VDI-Verlag, 1996.
- [CHP06] S. Cho, S.-H. Ha, and C. Park. Topological shape optimization of power flow problems at high frequencies using level set approach. *International Journal of Solids and Structures*, 43:172–192, 2006.
- [CMKH09] L. Cremer, M. Möser, W. Kropp, and M. Heckl. *Körperschall: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [CMPW01] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4th Edition*. Wiley, 2001.
- [CPPH06] S. Cho, C. Park, Y.-H. Park, and S.-Y. Hong. Topology design optimization of structures at high frequencies using power flow analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 298:206–220, 11 2006.
- [Dav75] P.J. Davis. *Interpolation and Approximation*. Dover Publications, 1975.
- [ESS⁺14] J. Ebert, T. Stoewer, C. Schaal, J. Bös, and T. Melz. Efficient simulation of the active vibratory energy flow of structures in a given frequency band. *ISMA 2014 – International Conference on Noise and Vibration Engineering*, 2014.

- [FD] A. Fregolent and W. D'Ambrogio. Evaluation of different strategies in the parametric identification of dynamic models. *ASME 1997 Design Engineering Technical Conferences*.
- [FE00] D. Fotsch and D. Ewins. Application of mac in the frequency domain. 08 2000.
- [FE01] D. Fotsch and D. Ewins. Further applications of the fmac. 01 2001.
- [FG07] F.J. Fahy and P. Gardonio. *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*. Elsevier Science, 2007.
- [FK68] R. L. Fox and M. P. Kapoor. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, 6(12):2426–2429, 1968.
- [GDM21] Szymon Greś, Michael Döhler, and Laurent Mevel. Uncertainty quantification of the modal assurance criterion in operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 152, 2021.
- [GEP97] P. Gardonio, S.J. Elliott, and R.J. Pinnington. Active isolation of structural vibration on a multiple-degree-of-freedom system, part i: The dynamics of the system. *Journal of Sound and Vibration*, 207(1):61 – 93, 1997.
- [GP93] L. Gavrić and G. Pavić. A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):29–43, 1993.
- [Gra58] S. I. Gravitz. An analytical procedure for orthogonalization of experimentally measured modes. *Journal of the Aerospace Sciences*, 25(11):721–722, 1958.
- [GRS⁺22] Szymon Greś, Riccardo E. M. Riva, Cem Yeniceli Süleyman, Palle Andersen, and Marcin Łuczak. Uncertainty quantification of modal parameter estimates obtained from subspace identification: An experimental validation on a laboratory test of a large-scale wind turbine blade. *Engineering Structures*, 2022.
- [GW80a] H. Goyder and R.G.S. White. Vibrational power flow from machines into built-up structures, part i: Introduction and approximate analyses of beam and plate-like foundations. *Journal of Sound and Vibration*, 68:59–75, 1980.
- [GW80b] H.G.D. Goyder and R.G. White. Vibrational power flow from machines into built-up structures, part i: Introduction and approximate analyses of beam and plate-like foundations. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1):59–75, 1980.
- [GW80c] H.G.D. Goyder and R.G. White. Vibrational power flow from machines into built-up structures, part ii: Wave propagation and power flow in beam-stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1):77–96, 1980.

- [GW80d] H.G.D. Goyder and R.G. White. Vibrational power flow from machines into built-up structures, part iii: Power flow through isolation systems. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1):97–117, 1980.
- [Ham90] S. Hambric. Power flow and mechanical intensity calculations in structural finite element analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 112, 10 1990.
- [Har14] L. Harzheim. *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. Europa-Lehrmittel, 2014.
- [Hen01] H. Henle. *Das Tonstudio-Handbuch: praktische Einführung in die professionelle Aufnahmetechnik*. Carstensen, 2001.
- [Her12] T. Hering. *Strukturintensitätsanalyse als Werkzeug der Maschinenakustik*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2012.
- [HG86] R.T. Haftka and R.V. Grandhi. Structural shape optimization — a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57:91 – 106, 1986.
- [HGZL08] X. Han, Y.-J. Guo, Y.-E. Zhao, and Z.-Q. Lin. The application of power-based transfer path analysis to passenger car structure-borne noise. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 222(11):2011–2023, 2008.
- [HL96] W. Heylen and S. Lammens. Frac: a consistent way of comparing frequency response functions. 1996.
- [HLLG20] Minshui Huang, Xifan Li, Yongzhi Lei, and Jianfeng Gu. Structural damage identification based on modal frequency strain energy assurance criterion and flexibility using enhanced moth-flame optimization. *Structures*, 28:1119–1136, 2020.
- [HMTC19] Timo Hartmann, Satoshi Morita, Gregor Tanner, and David J. Chappell. High-frequency structure- and air-borne sound transmission for a tractor model using dynamical energy analysis. *Wave Motion*, 87, 02 2019.
- [Hoo78] R. Hooke. *Lectures de Potentia Restitutiva, Or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies*. John Martyn, 1678.
- [HS99] S. Hambric and R. Szwer. Predictions of structural intensity fields using solid finite elements. *Noise Control Engineering Journal*, 47:209, 1999.
- [HSN14] S.A. Hambric, S.H. Sung, and D.J. Nefske. *Engineering Vibroacoustic Analysis: Methods and Applications*. Wiley, 2014.
- [HSN16] S.A. Hambric, S.H. Sung, and D.J. Nefske. *Engineering Vibroacoustic Analysis: Methods and Applications*. Wiley, 2016.

- [Isr15] U. Israel. *Optimierung in der Fluid-Struktur-Interaktion*. Dissertation, Technische Universität München, 2015.
- [JGL89] J. Juang, P. Ghaemmaghami, and K. B. Lim. Eigenvalue and eigenvector derivatives of a nondefective matrix. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 12(4):480–486, 1989.
- [Kö06] K. Königsberger. *Analysis 2, Band 2*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [KLL04] M.S. Khun, H.P. Lee, and S.P. Lim. Structural intensity in plates with multiple discrete and distributed spring–dashpot systems. *Journal of Sound and Vibration*, 276(3):627–648, 2004.
- [Kuc07] H. Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Carl Hanser Verlag, 2007.
- [Kuh10] S. Kuhl. *Gezielte Leitung von Körperschall unter Zuhilfenahme der Strukturintensitätsrechnung*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2010.
- [KW22] Norbert Kepczak and Błażej Witkowski. Modal assurance criterion as an iron cast and hybrid machine tool’s body comparison tool. *Journal of Manufacturing Processes*, 79:881–886, 2022.
- [LC94] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1994.
- [LHW14] L. Li, Y. Hu, and X Wang. Direct way of computing the variability of modal assurance criteria. *Mechanics Research Communications*, 55:53 – 58, 2014.
- [LIJ96] Y. Lase, M.N. Ichchou, and L. Jezequel. Energy flow analysis of bars and beams: Theoretical formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):281–305, 1996.
- [LJ97] I. Lee and G. Jung. An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities - part i. distinct natural frequencies. *Computers and Structures - COMPUT STRUCT*, 62:429–435, 1997.
- [LL92] J. Linjama and T. Lahti. Estimation of bending wave intensity in beams using the frequency response technique. *Journal of Sound and Vibration*, 153(1):21–36, 1992.
- [Mar02] S. Marburg. Six boundary elements per wavelength: Is that enough? *Journal of Computational Acoustics*, 10(01):25–51, 2002.
- [Mar08] S. Marburg. Discretization requirements: How many elements per wavelength are necessary? *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*, pages 309 – 332, 2008.

- [May94] W. Maysenhölder. *Körperschallenergie: Grundlagen zur Berechnung von Energiedichten und Intensitäten*. S. Hirzel, 1994.
- [McD91] T. E. McDevitt. *Development and evaluation of laser Doppler techniques for measurements of flexural and longitudinal structural intensity*. The Pennsylvania State University, 1991.
- [Med98] P. Medut. *Strukturintensitätsanalyse in der Maschinenakustik*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 1998.
- [Mey13] E. Meyer. *Schwingungslehre*. Vieweg+Teubner Verlag, 2013.
- [MG07] M.H. Mayer and L. Gaul. Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2):724–734, 2007.
- [Mös15] M. Möser. *Technische Akustik*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [MS00] B.R. Mace and P.J. Shorter. Energy flow models from finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 233(3):369–389, 2000.
- [Nel76] R. B. Nelson. Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA Journal*, 14(9):1201–1205, 1976.
- [NJH91] A.D. Nashif, D.I.G. Jones, and J.P. Henderson. *Vibration Damping*. Wiley, 1991.
- [NMM29] I. Newton, A. Motte, and J. Machin. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. B. Motte, 1729.
- [NS02] Nefske and S. Sung. Correlation of a course-mesh finite element model using structural system identification and a frequency response assurance criterion. 2002.
- [Pav76] G. Pavić. Measurement of structure borne wave intensity, part i: Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2):221–230, 1976.
- [Pav87] G. Pavić. Structural surface intensity: An alternative approach in vibration analysis and diagnosis. *Journal of Sound and Vibration*, 115(3):405–422, 1987.
- [PCL06] J. Pascal, X. Carniel, and J. Li. Characterisation of a dissipative assembly using structural intensity measurements and energy conservation equation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(6):1300–1311, 2006.
- [Pet18] H. Petersen, C. und Werkle. *Dynamik der Baukonstruktionen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2018.

- [PH06a] Y. Park and S. Hong. Vibrational energy flow analysis of corrected flexural waves in timoshenko beam - part ii: Application to coupled timoshenko beams. *Shock and Vibration*, 13:167–196, 2006.
- [PH06b] Y. Park and S. Hong. Vibrational energy flow analysis of corrected flexural waves in timoshenko beam – part i: Theory of an energetic model. *Shock and Vibration*, 13:137–165, 2006.
- [RC75] C. S. Rudisill and Y. Chu. Numerical methods for evaluating the derivatives of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, 13(6):834–837, 1975.
- [RL17] Sebastian Rothe and Sabine C. Langer. An approach to use the structural intensity for acoustical topology optimization. 2017.
- [RL19] Sebastian Rothe and Sabine C. Langer. Optimization of structure-borne sound propagation using structural intensity. *PAMM*, 19, 2019.
- [Ros14] T. Rossing. *Springer Handbook of Acoustics*. Springer, 2014.
- [Sch46] I. J. Schoenberg. *Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions*. Birkhäuser Boston, 1946.
- [Sch13] A. Schumacher. *Optimierung mechanischer Strukturen: Grundlagen und industrielle Anwendungen*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [SLSD⁺10] M. Souza Lenzi, G. Stigliano, S. Donders, B. Pluymers, and W. Desmet. New insights of an energy flow visualization into vehicle design. 09 2010.
- [SM08] U. Stelzmann and G. Müller. *FEM für Praktiker: Strukturodynamik: Basiswissen und Arbeitsbeispiele zu FEM-Anwendungen der Strukturodynamik - Lösungen mit dem FE-Programm ANSYS 9/10*. Expert-Verlag, 2008.
- [SSM75] T.J. Schultz, P.W. Smith, and C.I. Malme. Measurement of acoustic intensity in reactive sound field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57(6):1263–1268, 1975.
- [Sto16] T. Stoewer. *Berechnung der Strukturintensität von Fahrzeugstrukturen*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2016.
- [TG69] S. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1969.
- [Ull16] R. Ullmann. *Leistungsbasierte Vibroakustik für Fahrwerkskomponenten*. Masterthesis, Technische Universität München, 2016.
- [US19] R. Ullmann and S. Sicklinger. A two-dimensional structural-acoustic radiation benchmark. 07 2019.

- [USBM17a] R. Ullmann, S. Sicklinger, M. Buchschmid, and G Müller. Netzwerkorientierter leistungsbasierter ansatz für fahrzeugvibroakustik. 03 2017.
- [USBM17b] R. Ullmann, S. Sicklinger, M. Buchschmid, and G Müller. Power-based approach for assessment of structure-borne sound in mechanical networks of vehicle structures. *Procedia Engineering*, 199:1386–1391, 2017.
- [VB71] I.L. Veř and L.L. Beranek. *Noise and Vibration Control*. McGraw-Hill, 1971.
- [Vox15] Voxeljet. *Whitepaper: Hochpräzise Modelle für den Feinguss*. voxeljet AG, 2015.
- [Wad22] S. Wadhokar. *Method for Optimal placing of damp masses in the Drivetrain Development Process*. Masterthesis, RWTH Aachen, 2022.
- [WB88] J. C. Wohlever and R. J. Bernhard. Vibrational power flow analysis of rods and beams. 1988.
- [WB92] J. C. Wohlever and R. J. Bernhard. Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153:1–19, 1992.
- [Wes86] Walter M. West. Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test specimen. 1986.
- [WM05a] E.C.N. Wester and B.R. Mace. Wave component analysis of energy flow in complex structures – part i: a deterministic model. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1):209–227, 2005.
- [WM05b] E.C.N. Wester and B.R. Mace. Wave component analysis of energy flow in complex structures – part iii: two coupled plates. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1):251–265, 2005.
- [WM05c] E.C.N. Wester and B.R. Mace. Wave component analysis of energy flow in complex structures–part ii: ensemble statistics. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1):229–250, 2005.
- [XLXG12] X. Xue, G. Li, Y. Xiong, and J. Gong. Power flow analysis based dynamic topology optimization of vibrational structures. *The 3rd International Conference on Engeneering Optimization (ENGOPT 2012) (30/06/12 - 04/07/12)*, July 2012.
- [You07] T. Young. *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. J. Johnson, 1807.
- [YP20] Q. Yang and X. Peng. An exact method for calculating the eigenvector sensitivities. *Applied Sciences*, 10:2577, 04 2020.

- [Yu12] T. Yu. *Modellierung der Energiedissipation in Fügstellen im Frequenzbereich auf Basis von Ienarisierungsverfahren*. phdthesis, Karlsruher Institut für Technologie, 2012.