

Finite Stabelemente für mehrteilige nachgiebige
Verbundquerschnitte zur Berechnung von
Brettrippenschalen

Thomas Gollwitzer

ZUSAMMENFASSUNG

Die Brettrampenbauweise bietet Bauherrn, Ingenieuren und Architekten die Möglichkeit, leistungsfähige, ökonomische und ästhetische gekrümmte Flächentragwerke zu realisieren. Bei den Brettrampenschalen werden auf der Baustelle mehrere Brettlagen durch Holzschrauben oder Nägel zu einem in Längsrichtung nachgiebigen Verbundquerschnitt zusammengefügt. Es entsteht ein gekrümmtes Gitternetz. Trotz ihrer Vorzüge sind Brettrampenschalen vergleichsweise gering verbreitet. Grund ist der Mangel an geeigneten Berechnungsverfahren für derartig komplexe statische Systeme aus nachgiebigen Verbundquerschnitten. Bisherige Lösungsmethoden basieren lediglich auf Spezialfällen oder stellen Näherungen dar. Eine leistungsfähige, anwenderfreundliche und zuverlässige Berechnungsmethode würde ihre häufigere Realisierung fördern. Hierzu wird in dieser Arbeit ein auf der Finite-Elemente-Methode (FEM) basierendes Rechenmodell entwickelt.

Es werden zwei Finite Stabelemente für nahezu beliebige, mehrteilige, nachgiebige Verbundquerschnitte mit räumlicher Tragwirkung nach Theorie II. Ordnung aufgestellt. Dazu werden Steifigkeitsmatrizen hergeleitet und in ein konventionelles FEM-Programmsystem eingebaut. Auf Grundlage der Verformungen der Berechnungsknoten werden Gleichungen zur Verfügung gestellt, die Aussagen über die Schnitt- und Verformungsgrößenverläufe zwischen den Berechnungsknoten über die Stablänge liefern. Daraus können in bekannter Weise nach der Stabtheorie die Normalspannungen ermittelt werden. Für die Ermittlung der Schubspannungen von nachgiebigen Verbundquerschnitten werden Angaben gemacht. Aus der Verteilung der Schubspannungen im Querschnitt lässt sich die Lage des Schubmittelpunkts ermitteln. Es zeigt sich, dass die Lage des Schubmittelpunkts bei nachgiebigen Verbundquerschnitten keine feste Querschnittsgröße ist und er über die Stablänge variiert. Bei nachgiebigen Verbundquerschnitten kann Querkzug in der Fuge auftreten. Hierfür werden Gleichungen hergeleitet.

Die Verbundelemente werden an analytischen Lösungen validiert. Die Genauigkeiten der Ergebnisse sind von der Fugensteifigkeit im Verhältnis zu den Steifigkeiten der Teilquerschnitte und von der Elementlänge abhängig. Es werden Anwendungsgrenzen empfohlen, um Ungenauigkeiten in den Ergebnissen zu vermeiden. Im Vergleich zu anderen Verfahren, wie der Schubanalogie, sind größere Elementlängen möglich. Die Steifigkeitsverhältnisse von baupraktischen Verbundquerschnitten des Holzbaus lassen Elementlängen im Meterbereich zu.

Werden nachgiebige Verbundquerschnitte tordiert, findet die Lastabtragung nicht nur durch die Eigentragwirkung der Teilquerschnitte statt, sondern auch durch ihr Zusammenwirken als Verbundquerschnitt. Es werden Gleichungen für die Torsionssteifigkeiten und für die Abschätzung der Schubspannungen aus Torsion aufgestellt.

Als ein mögliches Anwendungsfeld wird mit einem der beiden Verbundelemente eine Brettrampenschale berechnet. Es wird auf die spezifischen Probleme der Bauart, wie die Einflüsse der Zwangskrümmung der Zwangskrümmung und der daraus entstehenden Spannungen, eingegangen. Es werden Vorschläge zur möglichen Modellierung von Brettrampenschalen mit dem Verbundelement gemacht. An einem konkreten Beispieltragwerk wird das Vorgehen demonstriert und die Berechnungsergebnisse werden ausgewertet.

Die Elemente sind materialunabhängig und eignen sich z. B. auch zur Berechnung von Holz-Beton-Verbunddecken (auch als Durchlaufsystem) und können Schwinden und Kriechen in den Teilquerschnitten direkt berücksichtigen. Die Abstände der Verbindungsmittel können optimal abgestuft werden, was bei den derzeit üblichen Berechnungsmethoden nicht möglich ist [Rug04].

ABSTRACT

The so called board rib technology offers owners, engineers and architects the opportunity to realise efficient, economic and aesthetical curved structural systems. For producing a board rib shell, several layers of wooden boards are joined together by screws or nails. The result is a composite cross-section, which is flexible in longitudinal direction. The board ribs form a curved grid. Board rib shells are relatively under-utilized in spite of their advantages. The reason for this is the lack of a suitable computation method for these complex structural systems made of flexible composite cross-sections. The solution methods used so far are restricted to just special cases or they represent only approximations. With an efficient, user-friendly and reliable computation method, such structures will be realised more frequently than at present. For this, a computation method based on the finite element method (FEM) is developed.

Two finite beam elements are created for almost any multilayered flexible composite cross-sections with spatial structural behaviour at geometrical nonlinear theory of 2nd order. For this, stiffness matrices are derived and implemented in a commercial FEM program. The functions of internal forces and deformations are determined on the basis of the displacements of the computation nodes. Out of this, the normal stresses can be calculated in a common way. Formulations for the determination of the shear stresses of the flexible composite cross-sections are given. The shear centre of a flexible composite cross-section can be calculated by the distribution of the shear stresses. It will be shown that the position of the shear centre is no characteristic of the cross-section and varies in the longitudinal direction of the beam. Transverse tensile stresses can occur in the joints of the flexible composite cross-sections. For this, equations are derived.

The composite elements are verified and validated with the help of analytical solutions. The accuracies of the results depend on the ratio of the joint stiffness to the stiffnesses of the sub-sections and on the element length. Applicability and limitations of derived method are given in order to avoid inexact solutions. In comparison to other methods, for example the shear analogy method, longer elements are possible. The stiffness ratios of practical composite cross-sections in timber engineering allow element lengths in the range of meters.

The torsional structural behaviour is characterised by the structural behaviour of the sub-sections and of the joints. Equations are given for the torsional stiffnesses and for torsional shear stresses.

A board rib shell is calculated as an example of a possible application. Specific problems of the construction method are mentioned, such as the influences of imposed deformations and resulting stresses. Recommendations are presented for the modelling of board rib constructions. The procedure is demonstrated by an example and the results of the calculations are evaluated.

The elements are also capable, for example, to calculate wood-concrete-composite floors including the effects of creep and shrinkage in sub-sections.

DANKSAGUNG

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent bei Prof. Norbert Gebbeken am Institut für Mechanik und Statik an der Universität der Bundeswehr München im Zeitraum April 2002 bis Dezember 2006.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr.-Ing. habil Norbert Gebbeken, der mir den zeitlichen Freiraum und die Wahlfreiheit für das vorliegende praxisnahe Thema gab. Auch die Möglichkeit meine Aufgaben in der Lehre weitgehend frei zu gestalten, habe ich sehr geschätzt. Den Mitarbeitern am Institut für Mechanik und Statik danke ich für die konstruktive und kollegiale Unterstützung.

Auch ein Dank gilt meinem Förderer und alten Chef beim Internationalen Entwicklungszentrum für Holzkonstruktionen (IEZ) Natterer Prof. Julius Natterer, der sich sofort bereit erklärte, das Korreferat zu übernehmen. Sein Sinn für das Innovative und Unkonventionelle sollte weiter verbreitet sein.

Prof. Dr.-Ing. Geralt Siebert danke ich für Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses und für die reibungslose Durchführung des Promotionsverfahrens.

Erwähnen möchte ich auch Prof. Dr.-Ing. Wolfram Kudla, den damaligen Leiter der Geotechnikabteilung (Geoalpha) des Ingenieurbüros Seidl & Partner in Regensburg, von dem ich als junger Ingenieur, direkt nach dem Studium, viel gelernt habe.

Danken möchte ich nicht zuletzt meine Eltern, die mir nicht nur den Besuch des Gymnasiums in Neustadt a.d. Waldnaab ermöglichten, sondern die mich auch bei meinem Bauingenieur-Studium an der Technische Universität München unterstützten, das letztlich die Promotion erst ermöglichte.

München, im August 2007

Thomas Gollwitzer

Tag der Einreichung	15.12.2006
Tag der mündlichen Prüfung	25.06.2007

Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. Geralt Siebert
---------------	-------------------------------------

Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil Norbert Gebbeken Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Julius Natterer, EPFL Lausanne
-------------------	---

Mit der Promotion erlangte akademische Grad:	Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
--	--

INHALT

1 EINFÜHRUNG

1.1	MOTIVATION UND ZIELE	1-1
1.2	VERBUNDBAU	1-3
1.2.1	<i>Allgemeines</i>	1-3
1.2.2	<i>Starrer Verbund</i>	1-3
1.2.3	<i>Nachgiebiger Verbund</i>	1-3
1.3	BERECHNUNG VON NACHGIEBIGEM VERBUND	1-5
1.3.1	<i>Erste Ansätze</i>	1-5
1.3.2	<i>γ-Verfahren</i>	1-6
1.3.3	<i>Analytische Lösungen aus Differentialgleichungen</i>	1-7
1.3.4	<i>Numerische Verfahren</i>	1-8
1.3.5	<i>Schubanalogie nach Kreuzinger</i>	1-10
1.3.6	<i>Ansätze aus dem Stahl-Beton-Verbundbau</i>	1-12
1.3.7	<i>Fazit</i>	1-14
1.4	HOLZ ALS BAUSTOFF	1-15
1.5	BRETRIPPENBAUWEISE	1-15
1.5.1	<i>Allgemeines</i>	1-15
1.5.2	<i>Konstruktionsprinzip</i>	1-16
1.5.3	<i>Konstruktion und Tragwirkung</i>	1-16
1.5.4	<i>Formfindung und Geometrieentwicklung</i>	1-19

2 ANALYTISCHE LÖSUNG DES ZWEITEILIGEN VERBUNDQUERSCHNITTS MIT UNABHÄNGIGEN LÄNGSVERSCHIEBUNGEN

2.1.	ALLGEMEINES	2-1
2.2.	QUERSCHNITT	2-2
2.3.	GRUNDLEGENDE BEZIEHUNGEN	2-2
2.4.	DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	2-4
2.5.	LÖSUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	2-6
2.6.	LÄNGSVERSCHIEBUNGEN	2-7
2.7.	TEILNORMALKRÄFTE.....	2-8
2.8.	SCHUBFLUSS IN DER FUGE.....	2-9
2.9.	TEILMOMENTE UND TEILQUERKRÄFTE	2-9
2.10.	GESAMTSCHNITTGRÖßEN	2-9
2.11.	RANDBEDINGUNGEN	2-10
2.12.	BEISPIEL	2-10

3 RÄUMLICHE FINITE STABELEMENTE FÜR MEHRTEILIGE NACHGIEBIGE VERBUNDQUERSCHNITTE

3.1	FINITE-ELEMENTE-METHODE	3-1
3.2	MODELL	3-2
3.2.1	<i>Annahmen.....</i>	3-2
3.2.2	<i>Bezugssysteme</i>	3-3
3.2.3	<i>Schnitt-, Verformungs- und Lastgrößen</i>	3-4
3.2.4	<i>Steifigkeiten</i>	3-5

3.3	UMSETZUNG IN FINITE ELEMENTE	3-6
3.4	STEIFIGKEITSBEZIEHUNG.....	3-8
3.4.1	<i>Ebene Tragwirkung</i>	3-8
3.4.2	<i>Räumliche Tragwirkung</i>	3-15
3.5	ELEMENTLASTEN.....	3-22
3.6	TRANSFORMATIONSBEZIEHUNGEN IM RAUM.....	3-24
3.7	NACHLAUFRECHNUNG MIT ERMITTLUNG DER ZUSTANDSGRÖßEN.....	3-29
3.7.1	<i>Verformungsverläufe</i>	3-29
3.7.2	<i>Schubfluss in der Fuge</i>	3-30
3.7.3	<i>Knotenschnittgrößen</i>	3-30
3.7.4	<i>Schnittgrößenverläufe</i>	3-31
3.7.5	<i>Polynomgrade</i>	3-34
3.7.6	<i>Beispiel</i>	3-35
3.8	SCHUBSPANNUNGEN AUS QUERKRAFT	3-41
3.9	LAGE DES SCHUBMITTELPUNKTS	3-43
3.10	QUERZUG IN DER FUGE	3-45
4	VERIFIZIERUNG DER FINITEN VERBUNDELEMENTE	
4.1	MEHRTEILIGE QUERSCHNITTE BEI BIEGEBEANSPRUCHUNG	4-1
4.2	STABILITÄT	4-4
4.2.1	<i>Vorbemerkungen</i>	4-4
4.2.2	<i>Verifikation am Beispiel</i>	4-5
4.2.3	<i>Allgemeine Aussagen zur Stabilität</i>	4-8
4.3	THEORIE II. ORDNUNG	4-12
4.4	ANWENDUNGSGRENZEN	4-17
5	TORSION IM HOLZBAU	
5.1.	ALLGEMEINES	5-1
5.2.	TORSIONS-EIGENANTEIL VON RECHTECKQUERSCHNITTEN	5-1
5.2.1.	<i>Vorbemerkungen</i>	5-1
5.2.2.	<i>Homogenes, isotropes Werkstoffgesetz</i>	5-2
5.2.3.	<i>Inhomogenes, anisotropes Werkstoffgesetz</i>	5-4
5.2.4.	<i>Fazit</i>	5-7
5.3.	TORSION BEI NACHGIEBIGEN VERBUNDQUERSCHNITTEN	5-8
5.3.1.	<i>Grundsätzliches</i>	5-8
5.3.2.	<i>Einreihige Verbindung</i>	5-8
5.3.3.	<i>Zweireihige Verbindung</i>	5-9
5.3.3.1.	<i>Allgemeines</i>	5-9
5.3.3.2.	<i>Zweiteiliger Querschnitt</i>	5-10
5.3.3.3.	<i>Mehrteiliger Querschnitt</i>	5-11
5.3.3.4.	<i>Regelmäßiger mehrteiliger Querschnitt</i>	5-15

6 BERECHNUNG EINER BRETRIPPENSCHALE

6.1	VORBEMERKUNGEN	6-1
6.2	GEKRÜMMTE STÄBE.....	6-2
6.3	EINFLUSS DER ZWANGSKRÜMMUNG BEIM EINBAU.....	6-6
6.3.1.	<i>Initialspannungen</i>	6-6
6.3.2.	<i>Spannungsrelaxation</i>	6-8
6.4	MODELLIERUNG DER RIPPEN.....	6-9
6.5	MODELLIERUNG DER SCHALUNG	6-13
6.6	MODELLIERUNG DER RIPPENKNOTEN.....	6-14
6.7	BEISPIELTRAGWERK	6-15
6.8	LASTFALLANNAHMEN	6-19
6.9	ERGEBNISSE	6-21
6.9.1.	<i>Verformungen und Schnittgrößen</i>	6-21
6.9.2.	<i>Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit</i>	6-23

ANHANG

- A AUSDRUCK ANALYTISCHE LÖSUNG MIT MAPLE (KAPITEL 2)
- B SOFISTIK ERGEBNISSE BRETRIPPENSCHALE (KAPITEL 6)

SCHLUSSBEMERKUNGEN UND AUSBLICK

LITERATUR

KAPITEL 1

EINFÜHRUNG

1.1 MOTIVATION UND ZIELE

In den letzten Jahren sind gerade im Holzbau eine Vielzahl von Konstruktionen in einer neuen, innovativen Bauweise, der Brettrippensbauweise entstanden. Als markante Beispiele hierfür sind das „Expo-Dach“ (Abb. 1-1) in Hannover oder verschiedene Kuppelschalen, wie das in der Abb. 1-2 dargestellte „Haus des Handwerks“ zu nennen.

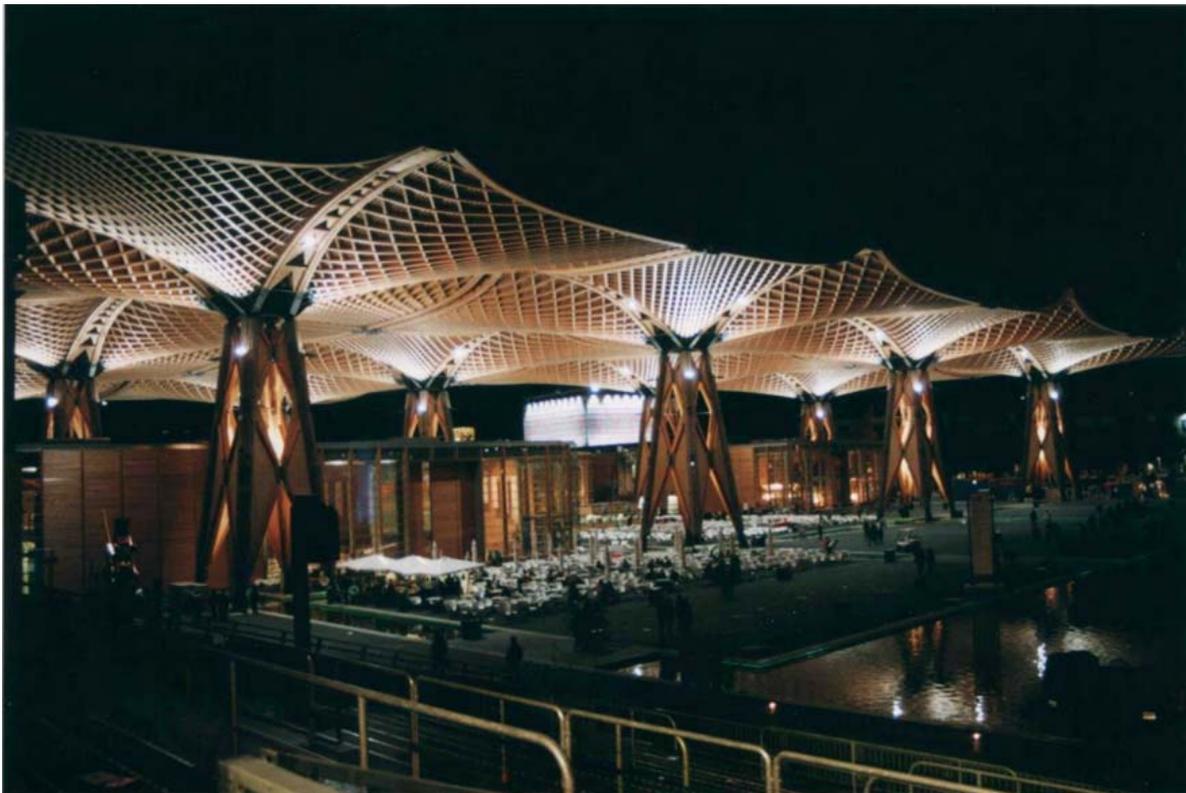


Abb. 1-1: „Expo-Dach“ Hannover, vier Brettrippenschalen in freier Form bilden einen Schirm (Planung/Foto IEZ Natterer)

Bei den Brettrippenschalen werden auf der Baustelle mehrere Brettlagen netzartig aufeinander gelegt und durch Holzschrauben oder Nägel verbunden. Es entstehen Verbundquerschnitte, deren Teilquerschnitte nicht wie beim verleimten Brettschichtholz starr, sondern nachgiebig miteinander verbunden sind.

Bei meiner Tätigkeit als Tragwerksplaner beim Internationalen Entwicklungszentrum für Holzkonstruktionen (IEZ) Natterer stellte sich heraus, dass für solch komplexe statische Systeme aus nachgiebigem Verbund kein befriedigendes Berechnungsverfahren zur Verfügung steht. Das Ziel dieser Arbeit ist deshalb, ein einfach zu handhabendes und trotzdem genaues Verfahren zu entwickeln, das die Berechnung von beliebigen Stabtragwerken aus nachgiebigen Verbundquerschnitten ermöglicht. Da die Materialkennwerte der einzelnen Werkstoffe und die

Eigenschaften der Verbindung in der Regel bekannt sind, lässt sich das Tragverhalten der Systeme rechnerisch erfassen. Das Verfahren soll sich für alle denkbaren Stabtragwerke mit nachgiebigen Verbundquerschnitten eignen und sich nicht allein auf nachgiebigen Holz-Holz-Verbund beschränken. Weitere Anwendungsfelder sind Holz-Beton-Verbund, Stahl-Beton-Verbund, die Sandwichbauweise oder Verbundglas.

Das neue Verfahren soll eine hohe Anwenderfreundlichkeit aufweisen. Dies soll erreicht werden, indem das Verfahren auf eine gewohnte und weit verbreitete Berechnungsumgebung aufbaut. Hierfür bietet sich die in der Praxis etablierte Finite-Elemente-Methode (FEM) an, die dem Tragwerksplaner eine leichte Zugänglichkeit ermöglicht. In der vorliegenden Arbeit werden Finite Elemente hergeleitet, die in ein konventionelles FEM-Programm eingebaut werden. Die Rechenarbeit wird weitestgehend von der Software übernommen. Bei der derzeit am häufigsten angewandten Berechnungsmethode, dem γ -Verfahren, sind viele gesonderte Berechnungsschritte erforderlich, die meist aufwendig von Hand durchgeführt werden. Damit soll einem praktisch tätigen Ingenieur künftig die Möglichkeit eröffnet werden, Konstruktionen jeder Art aus nachgiebigen Verbundquerschnitten leichter berechnen zu können.

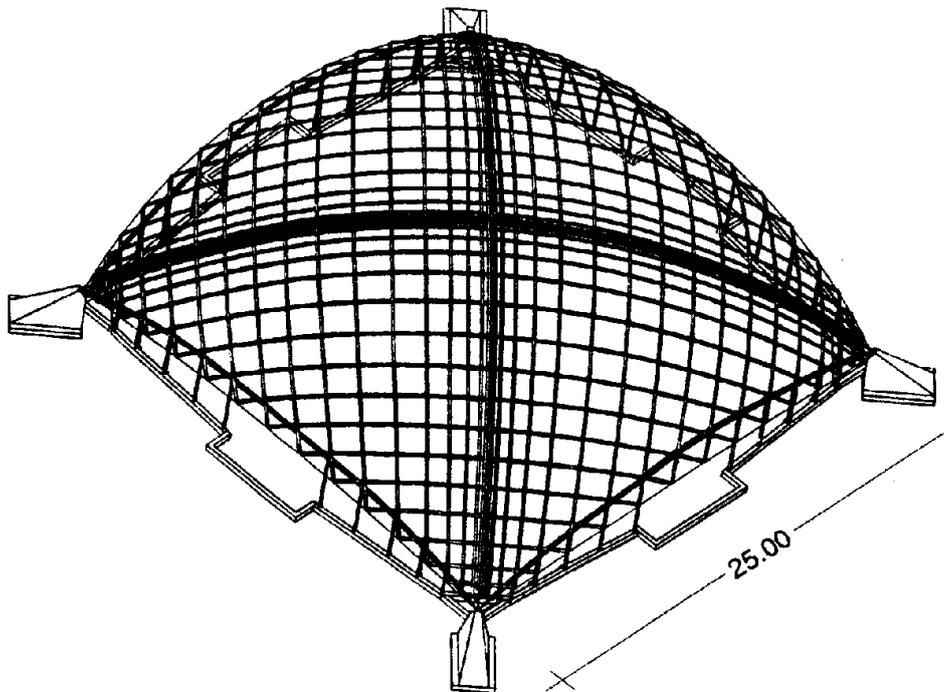


Abb. 1-2: „Haus des Handwerks“, Ober-Ramstadt (Planung IEZ Natterer)

Im Ingenieurholzbau besteht bei Tragwerksplanern eine Hemmschwelle vor dem Entwurf von nachgiebigen Verbundkonstruktionen. Die Gründe liegen im komplexen Berechnungsaufwand. Das Tragverhalten von nachgiebigen Verbundkonstruktionen ist kompliziert zu berechnen und erfordert vom Tragwerksplaner große Erfahrung. Dies ist insbesondere deswegen bedauerlich, da nachgiebiger Holz-Holz-Verbund sehr einfach und damit preiswert herzustellen ist. Es ist leichter, einen Querschnitt auf der Baustelle durch Holzschrauben oder Nägel zu verbinden, als Bretter - unter Einhaltung von Leimbedingungen - aufwendig zu verkleben. Die dafür notwendige Lizenz besitzen nur wenige Holzbaubetriebe. Es fallen lediglich im Planungsbüro höhere Bearbeitungszeiten an, die aber meistens nicht vom Bauherrn honoriert werden. Ein geringerer Arbeitsaufwand der planenden Entscheidungsträger würde sicher eine häufigere Realisierung von Brettrippenschalen und ähnlich innovativen Tragwerken fördern. Die vorliegende Arbeit soll einen

Beitrag dazu leisten, diesen Nachteil durch die Entwicklung eines leicht zu handhabenden, transparenten und zuverlässigen Berechnungsverfahrens zu beseitigen.

Zur Zeit ist es gängige Praxis von Holzbaufirmen, Brettschichtholz per Katalog von weit her zu bestellen und nur als „Einbaufirma“ zu fungieren. Aufwendige Beschaffungs- und Transportvorgänge sind die Folge. Dies ist insbesondere dann unwirtschaftlich, wenn Holz in unmittelbarer Nähe verfügbar ist. Auch im Sinne eines nachhaltigen und ökologisch bewussten Bauens ist diese Entwicklung fatal. Darüber hinaus werden immer mehr baubiologische Bedenken von Bauwerksnutzern gegenüber der Verwendung von Leim geäußert.

1.2 VERBUNDBAU

1.2.1 ALLGEMEINES

Im Ingenieurwesen und speziell im Bauwesen gewinnt der Verbundbau eine immer größere Bedeutung. Man spricht von Verbundbau, wenn mehrere Querschnitte aus gleichen oder unterschiedlichen Materialien zu einem Querschnitt zusammengefügt werden. Die Verbindung kann aus mechanischer Sicht in drei Kategorien unterteilt werden: Starrer Verbund, nachgiebiger Verbund oder loser Verbund. Bei losem Verbund wird keinerlei Schubübertragung zwischen den Querschnitten aktiviert. Die Berechnungsmöglichkeiten für starre und nachgiebige Verbundquerschnitte unterscheiden sich grundsätzlich.

1.2.2 STARRER VERBUND

Bei den meisten Verbundquerschnitten, wie z. B. bei verleimtem Brettschichtholz oder bei Stahlbeton, wird starrer Verbund zwischen den Teilquerschnitten angenommen. Es tritt kein Schlupf zwischen den Teilquerschnitten auf. Die Kräfte in den Verbundfugen verursachen keinen Schlupf in der Fuge. Im Modell ist die dortige Federsteifigkeit der Verbundfuge unendlich groß. Nach Einführung ideeller Querschnittsgrößen besteht keinerlei Unterschied zur Berechnung von homogenen Querschnitten. Die auf die einzelnen Querschnittsteile entfallenden Teilschnittgrößen, sowie die Beanspruchung der Verbindung folgen auf der Grundlage von Querschnittswerten direkt aus den Schnittgrößen des Gesamtquerschnitts [Schu86]. Starrer Verbund kann einfach analytisch nach den bekannten klassischen Biegetheorien berechnet werden. Dies sind für eindimensionale Stabtragwerke die Theorien nach Bernoulli oder Timoshenko [Ram96]. Bernoulli vernachlässigt Verformungen aus Querkraft, während Timoshenko diese in seiner Theorie berücksichtigt. Das Analogon dazu bei zweidimensionalen Plattentragwerken sind die bekannten Theorien nach Kirchhoff (ohne Berücksichtigung der Querkraftverformung) und Reissner/Mindlin (mit Berücksichtigung der Querkraftverformung) [Ram95].

1.2.3 NACHGIEBIGER VERBUND

Bei nachgiebigen Verbundquerschnitten treten unter Last aufgrund der Nachgiebigkeit der Verbundmittel oder infolge schubweicher Zwischenschichten gegenseitige Verschiebungen der einzelnen Teilquerschnitte auf. Die Relativverschiebungen erzeugen Sprünge im verformten Gesamtquerschnitt. Die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnitts ist somit hier nicht mehr gültig. Die Berechnung von nachgiebigen Verbundquerschnitten ist dadurch wesentlich

schwieriger. Die auf die einzelnen Teilquerschnitte entfallenden Teilschnittgrößen, sowie die Beanspruchung der Verbundfuge, können nicht mehr rein aus den Steifigkeits- und Geometrieparametern des Querschnitts errechnet werden. Analog zum Tragverhalten einer Scheibe hat auch die Längsausdehnung des statischen Systems mit den Einflussgrößen Stützweite, Auflagerbedingungen und Form und Art der Belastung eine Bedeutung auf die Verteilung der Spannungen im Gesamtquerschnitt. Ursache ist die hochgradige innere statische Unbestimmtheit einer nachgiebigen Verbundkonstruktion.

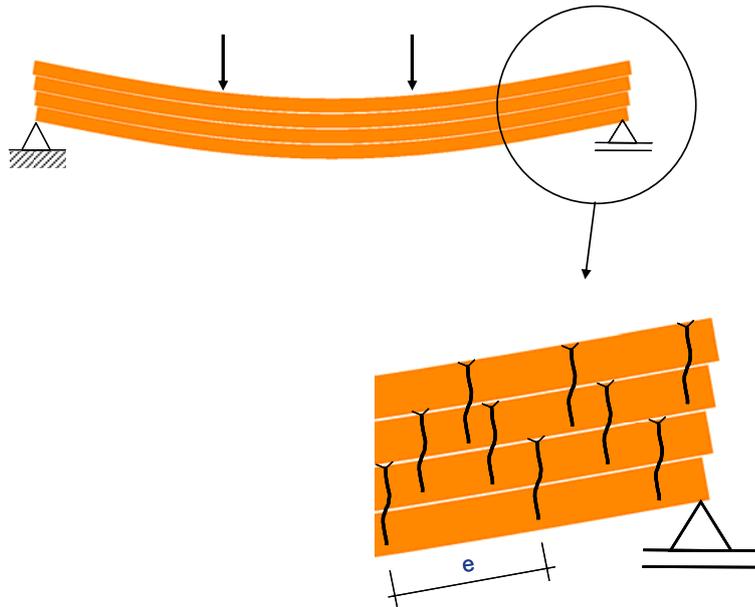


Abb. 1-3: Nachgiebiger Verbund, Teilquerschnitte sind in Längsrichtung nachgiebig gekoppelt

Die Nachgiebigkeit der Fuge kann am Beispiel eines vernagelten Brettschichtträgers gut illustriert werden (Abb. 1-3). Die Beanspruchung in der Verbindung erzeugt unterschiedliche Längsverschiebungen der Teilquerschnitte. Sie werden bei Querkraftbeanspruchung durch den Schubfluss T in Längsrichtung in der Verbundfuge verursacht.

Im Ingenieurholzbau werden die Teilstäbe durch mechanische Verbindungsmittel wie Holzschrauben, Nägel oder Bolzen miteinander verbunden. Die Abstände e der Verbindungsmittel sind in der Regel gering, so dass näherungsweise von einer kontinuierlichen Verbindung ausgegangen wird. Aus der Nachgiebigkeit eines Verbindungsmittels C auf Abscheren und aus den Abständen e der Verbindungsmittel (Abb. 1-3) lässt sich eine flächig wirkende, auf die Fuge „verschmierte“ Steifigkeit des Längsverschiebungsvermögens der Fuge errechnen. Sie wird als Fugensteifigkeit c bezeichnet. Je höher die Fugensteifigkeit c ist, desto geringer ist die Längsverschiebungsdifferenz δ der angrenzenden Teilquerschnitte bei einwirkendem Schubfluss T in der Fuge. Für die Fugensteifigkeit c gilt:

$$c = \frac{C}{e} = \frac{T}{\delta} \quad (\text{Gl. 1-1})$$

Es wird von einer starren Kopplung der Teilstäbe quer zur Fuge ausgegangen. Nach Kneidl [Kne91] und Hoeft [Hoe94] ist der Einfluss dieses Effekts für die meisten baupraktischen Fälle vernachlässigbar. Zum einen ist die Steifigkeit der Verbindungsmittel auf Herausziehen relativ hoch im Vergleich zur Steifigkeit auf Abscheren. Zum anderen sind die Querzug/druckkräfte im Vergleich zum Schubfluss erheblich geringer. Ein Öffnen der Fuge würde die statische Höhe des

Querschnitts vergrößern und liegt somit auf der sicheren Seite. Das Schließen der Fuge wird geometrisch durch die auftretende Querpressung begrenzt. Querkzugkräfte können aber ein Ausziehversagen der Verbindungsmittel verursachen. Dies ist zu vermeiden und nachzuweisen.

Im Bereich des Bauwesens gibt es weitere Beispiele für nachgiebigen Verbund, wie z. B. Sandwichelemente oder Verbundglas. Im Bereich des Dach- und Fassadenbaus haben Sandwichelemente eine breite Anwendung gefunden. Wie der Name schon sagt, wird ein ebenes Flächenelement als Sandwich aufgebaut. Eine Dämmplatte wird beidseitig mit dünnen Blechen eingehüllt. Die Biegemomente werden durch ein Normalkräftepaar in den Blechen abgetragen. Die Querkkräfte werden über die schubnachgiebige Dämmplatte übertragen.

Glas wird in den letzten Jahren in der Architektur immer populärer. Es wird nicht mehr nur als transparentes Füllelement, sondern gleichzeitig als Tragelement verwendet. Eine Hauptrolle spielt dabei das Verbundsicherheitsglas. Es besteht aus mindestens zwei Glasscheiben mit dazwischen liegenden Polyvinylbutyral (PVB-Folien). Das PVB überträgt die Schubkräfte nachgiebig zwischen den Glasplatten.

Die Verbindung besteht dort aus schubweichen Zwischenschichten. Die Dehn- und Biegesteifigkeiten der Zwischenschichten können in der Regel vernachlässigt [Sta74] werden. Die Nachgiebigkeit einer schubweichen Zwischenschicht mit dem Schubmodul G kann in eine äquivalente Fugensteifigkeit c umgerechnet werden. Es gilt für die Schubspannung τ bzw. für den Schubfluss T in einer schubweichen Schicht mit der Dicke h , bei der sich ein Schubwinkel γ und eine Relativverschiebung δ einstellt:

$$\tau = G\gamma = G \frac{\delta}{h} \quad (\text{Gl. 1-2})$$

$$T = G \frac{\delta}{h} b \quad (\text{Gl. 1-3})$$

Führt man einen Koeffizientenvergleich der beiden Gleichungen (Gl. 1-2) und (Gl. 1-3) durch, so errechnet sich die Fugensteifigkeit c einer schubweichen Schicht zu:

$$c = \frac{Gb}{h} \quad (\text{Gl. 1-4})$$

1.3 BERECHNUNG VON NACHGIEBIGEM VERBUND

1.3.1 ERSTE ANSÄTZE

Ein umfassender Überblick über die Entwicklung und die Berechnung von nachgiebigem Verbund ist in Natterer [Nat87] zu finden. Im Folgenden werden daher nur die wichtigsten Erkenntnisse beleuchtet und lediglich auf die heute noch bedeutsamen Verfahren eingegangen.

Als erster veröffentlichte der Schweizer Stüssi 1943 [Stü43] ein Verfahren zur Berechnung von Trägern aus nachgiebigem Verbund. Er führte einen Wirkungsgrad α der Biegesteifigkeit eines Verbundquerschnitts im Verhältnis zum entsprechenden starren Querschnitt ein. Der Wirkungsgrad oder Abminderungsfaktor bezieht sich auf die gesamte Biegesteifigkeit. Dieses Näherungsverfahren liefert für zweiteilige und symmetrische dreiteilige Einfeldträger unter Gleichlast nahezu exakte Ergebnisse [Dub88]. Ein ähnliches Vorgehen wie Stüssi wählte Möhler [Möh56], woraus das heute

noch bedeutsame γ -Verfahren (Kapitel 1.3.2) hervorgeht. Doch während Stüssi die Biegesteifigkeit des Gesamtquerschnitts abmindert, bezieht Möhler seinen Abminderungsfaktor nur auf die Steiner-Anteile der Biegesteifigkeit.

1.3.2 γ -VERFAHREN

Von grundlegender Bedeutung für nachgiebigen Verbund, im Besonderen für nachgiebigen Verbund im Ingenieurholzbau, ist das so genannte γ -Verfahren. Es geht auf die Erkenntnisse von Möhler [Möh56] zurück. Zunächst beschränkte es sich auf maximal drei Teilquerschnitte. Es basiert auf der analytischen Lösung von gekoppelten Differentialgleichungen. Die Lösung ist einer gewissen Einschränkung unterworfen. Sie liefert nur dann exakte Ergebnisse, wenn sich ein rein sinusförmiger Momentenverlauf einstellen kann. Mit dieser Voraussetzung kann ein über die Trägerlänge konstanter Abminderungsfaktor γ für die Steiner-Anteile der Biegesteifigkeit berechnet werden, was folglich eine ebenfalls konstante effektive Gesamtbiegesteifigkeit EI_{eff} über die Trägerlänge bedeutet. Nur bei einer konstanten Gesamtbiegesteifigkeit besteht eine lineare Beziehung zwischen der Krümmung κ und dem Moment M und lautet:

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI_{\text{eff}}} \quad (\text{Gl. 1-5})$$

Dies ist eine Voraussetzung für die technische Biegelehre, mit der die Spannungs- und Verformungsverläufe in bekannter Art berechnet werden können.

Schelling [Sche82] erweiterte das γ -Verfahren für eine beliebige Anzahl von Teilquerschnitten, die auch zu einem unsymmetrischen Gesamtquerschnitt verbunden werden können. Es basiert auf den Ergebnissen seiner Dissertation [Sche86]. Für das γ -Verfahren vereinfacht er die dortige komplizierte Lösung, indem er die Reihenentwicklung nach dem ersten Reihenglied abbricht. Sie stellt somit eine Näherung dar. Dennoch kann dieses Verfahren für die in der Baupraxis häufig vorkommenden Probleme „Einfeldträger unter Gleichstreckenlast“ und „druckbeanspruchte Pendelstütze“ eingesetzt werden. Es liefert hierfür hinreichend genaue Ergebnisse. Die Ergebnisse von Möhler und Schelling wurden 1969 [Kne91] in die deutsche Ingenieurholzbau-Norm DIN 1052 offiziell aufgenommen. Sie sind heute immer noch das gebräuchlichste Berechnungsverfahren für nachgiebigen Verbund und finden sich auch in der aktuellen Fassung der DIN 1052 [DIN04] wieder.

Derzeit werden nachgiebige Verbundquerschnitte meist mit dem so genannten γ -Verfahren berechnet, auch wenn die statischen Systeme vom Einfeldträger oder vom Pendelstab erheblich abweichen. Es würde auch für andere Systeme nur dann exakte Lösungen liefern, wenn sich ein sinusförmiger Momentenverlauf einstellen kann. Nur dann kann der sensible Haupteingangsparameter der Berechnung, der Abstand L der Nulldurchgänge des sinusförmigen Moments, bestimmt werden.

Für Systeme mit anderen Eigenschaften, wie z. B. Durchlaufträger mit Einzellasten, Trägerroste oder sogar Rippenschalen, ist das γ -Verfahren nur eine grobe Näherung oder sogar unbrauchbar. Trotzdem wird es gerne zur Berechnung herangezogen, da es sich nur um den angesprochenen Abminderungsfaktor γ von der Berechnung eines monolithischen Querschnitts nach der "klassischen" Bernoulli-Balkentheorie unterscheidet.

1.3.3 ANALYTISCHE LÖSUNGEN AUS DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Schuler [Schu86] leitete für zweiteilige Querschnitte ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der Zustands- und Verformungsgrößen her. Es ist Basis für die analytische Lösung im Kapitel 2.

Auf der Grundlage der Ergebnisse von Möhler stellte Schelling [Sche68] für eine beliebige Anzahl von Teilquerschnitten ein System von Differentialgleichungen der Verformungsverläufe (Durchbiegung und Fugenverschiebungen) auf. Er löst das Gleichungssystem, indem er einen Lösungsansatz aus Fourierreihen wählt. Das Vorgehen ist zwar grundsätzlich möglich, aber es führt für Trägerquerschnitte, die aus mehr als zwei Einzelquerschnitten bestehen, zu verwickelten Ausdrücken, die wegen der Vielzahl freier Parameter nicht mehr systematisch auswertbar sind [Sche68]. Aufbauend auf das Differentialgleichungssystem von Schelling entwickelte Papsch [Pap76] eine allgemein gültige Stabtheorie. Sie beinhaltet eine allgemeine Stabilitätsgleichung, aus der die Teilprobleme Knicken, Biegedrillknicken, Kippen und Instabilität infolge Torsionsmomente hervorgehen. Er löst das Gleichungssystem ebenfalls durch einen Fourierreihenansatz.

Hoeft [Hoe94] erweitert in seiner umfangreichen Arbeit die Theorie auch auf mehrfach geschlossene Querschnitte nach Theorie I. und II. Ordnung. Um das System der Differentialgleichungen lösen zu können, untersucht er drei verschiedene Ansatzfunktionsarten, von denen er eine als geeignet auswählt. Er gibt für Druckstäbe, Zugstäbe und normalkraftlose Stäbe Funktionen an, die aus hyperbolischen- und trigonometrischen Termen bestehen. Aus diesen Grundfunktionen lassen sich durch einfache Beziehungen alle Zustandsgrößen ableiten. Die Auswertung seiner Theorie erfordert die Einhaltung strenger Konventionen an die Verhältnisse der Parameter. Die Lösung mündet in Übertragungsmatrizen, mit denen einzelne Stäbe oder Stäbe, die in einer Reihe zu Stabgruppen verbunden sind, berechnet werden können. Verzweigte statische Systeme sind so nicht berechenbar. Das Verfahren sieht in diesem Fall vor, aus den Übertragungsmatrizen der Einzelstäbe (oder einer Stabgruppe) Steifigkeitsmatrizen für die Finite-Elemente-Methode herzuleiten. Bei der dabei notwendigen Matrizeninversion können allerdings numerische Schwierigkeiten auftreten, die nur durch eine Begrenzung der Elementlängen vermieden werden können. Explizit werden für den zweiteiligen Verbundquerschnitt Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen angegeben. Das Verfahren stellt keine allgemeingültige geschlossene Gleichung für die Berechnung der kritischen Knicklast zur Verfügung. Für konkrete Zahlenbeispiele kann die Knicklast aber durch eine iterative Annäherung eingegrenzt werden.

Zusammenfassend kann zu den analytischen Lösungsmöglichkeiten gesagt werden, dass für Querschnitte aus nachgiebigem Verbund gekoppelte Differentialgleichungen auf der Grundlage der Verschiebungsverläufe aufgestellt werden können. Sie setzen die Durchbiegung und die Längsverschiebungen der Einzelstäbe miteinander in Beziehung.

Nur für spezielle Rand-, Querschnitts- und Systembedingungen sind einfache Lösungen der Differentialgleichung bekannt (Kapitel 1.3.2). Bei allgemeinen Randbedingungen und Systemen ist nur für den zweiteiligen Querschnitt eine einfache Lösung möglich. Sie wird im Kapitel 2 vorgestellt und dient unter anderem als Referenzlösung für die Verifizierung der neu entwickelten Finiten Elemente.

Bei mehrteiligen Querschnitten hingegen wird die Lösung kompliziert und lang. Sie werden umso schwieriger bis unmöglich, je allgemeiner die Randbedingungen gewählt werden.

Deshalb hat sich bislang kein allgemeingültiges und auf der rein analytischen Lösung basierendes Berechnungsverfahren entwickelt.

1.3.4 NUMERISCHE VERFAHREN

Speziell für die Berechnung von Holzrippendecken wurde in den USA das Finite-Elemente-Programm FEAFLO [Tho77] entwickelt. Das Programm erzeugt automatisch aus den Geometrie- und Steifigkeitsdaten der Holzrippenplatte ein statisches Modell aus rechtwinklig sich kreuzenden, ebenen Stäben. Längs- und Querfugen im System werden durch kurze Stäbe mit reduziertem Elastizitätsmodul berücksichtigt. Die Kopplung der sich kreuzenden Rippen erfolgt nur durch den gemeinsamen Durchbiegungsfreiheitsgrad am Kreuzungspunkt. Die Stäbe werden durch ein ebenes Finites Stabelement für mehrteilige, nachgiebige Verbundquerschnitte generiert. Biegung um die Nebenachse und Torsion werden nicht berücksichtigt. Die Elemente beruhen auf einem linearen Verschiebungsansatz der Längsverschiebungen $u(x)$ und einem kubischen Verschiebungsansatz für die Durchbiegung $w(x)$. Das Modell kann keine Effekte aus Theorie II. Ordnung berücksichtigen, was aber für die Abbildung eines Plattentragwerkes auch nicht von Bedeutung ist.

Schuler [Schu86] stellt ein Verfahren auf der Grundlage von Übertragungsmatrizen für Durchlaufträger mit nachgiebigem Verbund vor. Er beschränkt sich auf zweiteilige Querschnitte nach Theorie I. Ordnung.

Kneidl [Kne91] entwickelte ein Fortran-Programm, das aus dem Differentialgleichungssystem für mehrteilige, nachgiebige Schichtbalken Übertragungsmatrizen durch numerische Integration herleitet. Durch eine schrittweise Laststeigerung kann der Einfluss des nichtlinearen Materialverhaltens berücksichtigt werden. Es ist für Berechnungen nach Theorie II. Ordnung erweiterbar. Wie bei Hoeft [Hoe94] treten bei großen Übertragungslängen numerische Instabilitäten auf, die auf den exponentiellen Lösungsansatz der Differentialgleichungen zurückzuführen sind.

Schickerhof [Schi94] stellt ein Rechenmodell für flächige, geschichtete Holzstrukturen in Analogie zu Faser-Kunststoff-Verbundkonstruktionen vor. Er stellt auf Grundlage der Kontinuumsmechanik eine Beziehungsmatrix zwischen den Schnittgrößen und den Verformungsgrößen in einer Teilplatte, sowie eine Koppelmatrix zwischen den Schnittgrößen und Verformungsgrößen zweier verbundener Teilplatten auf. Daraus kann eine Gesamtmatrix für den Querschnitt aufgestellt werden. Die Beziehungen gelten kontinuierlich für jeden Punkt im Querschnitt. Ähnlich wie Schelling [Sche68] und Pasch [Pap76] werden zur Diskretisierung des Rechenmodells trigonometrische Fourier-Reihenfunktionen für die Belastung, die Verformungen und die Schnittgrößen angesetzt.

Die Verfahren nach Kneidl [Kne91] und Schickerhof [Schi94] sind aufwendig und nur mit einer, dem Praktiker schwer zugänglichen, Spezialsoftware möglich.

Kneidl [Kne95] stellt ein Fachwerkmodell für beliebig mehrteilige, ebene Stäbe mit nachgiebigem Verbund vor. Das Modell kann mit konventionellen Stabwerksprogrammen generiert und berechnet werden. Die Teilquerschnitte werden durch dehnstarre Pendelstäbe in Querrichtung miteinander gekoppelt. Die Nachgiebigkeit der Fuge in Längsrichtung wird durch dehnweiche Diagonalen abgebildet. Für den Ansatz der Dehnsteifigkeit EA wird eine Gleichung zur Verfügung gestellt. Die Querkräfte der Teilquerschnitte und der Schubflüsse in den Fugen können nicht direkt aus den zur Verfügung gestellten Ergebnissen des Stabwerkprogramms abgelesen werden, sondern sind durch eine eigene Nachlaufrechnung zu ermitteln. Der Schubfluss ist nur indirekt über die Kräfte in den Diagonalen bestimmbar. Es ergibt sich ein sägezahnförmiger Normalkraftverlauf in den Teilquerschnitten und eine treppenförmiger Schubflussverlauf in der Fuge. Der Diskretisierungsaufwand ist sehr hoch. Es wird ein Abstand der Fachwerkknoten von $0,5a$ bis $2a$ empfohlen (a = Abstand der Schwerpunkte der Teilquerschnitte), um den Winkel der Diagonalen nicht zu flach werden zu lassen.

Das Modell Hartmann [Har00] basiert auf dem Modell Kneidl. Er verwendet ebenfalls für sein Berechnungsmodell ein praxisübliches Berechnungsprogramm. Er bildet die Exzentrizität des

Schwerpunkts der Teilquerschnitt zur Verbundfuge durch ein kombiniertes Modell aus Federn und Fachwerk ab. Die eigentliche Fuge wird durch in Längsrichtung wirkende, nichtlineare Einzelfedern in Höhe der Fuge simuliert. Die Federn werden über diagonale Fachwerkstäbe an die beiden angrenzenden Teilquerschnitte angeschlossen. Das Fachwerk simuliert die Exzentrizität der Fuge zu den Schwerpunktslagen der Teilquerschnitte. Der Schubfluss kann direkt aus den Federkräften abgelesen werden. Der Kern des Modells ist das Abbilden des physikalisch nichtlinearen Verhaltens der mechanischen Verbindungen durch nichtlineare Federn. In der Literatur sind für die typischen Verbundarten Versuchsergebnisse der Kraft-Verformungs-Linien bekannt. Daraus lässt sich aber kein allgemeines, einheitliches Entwicklungsgesetz für den mechanischen Verbund ableiten. Jedes Verbundmittel und jede Konstruktion hat eine individuelle Kraft-Verformungs-Linie, die abhängig ist von der verwendeten Kombination aus Verbindungsmitteln und den beteiligten Bauteilen, deren Festigkeiten und den geometrischen Verhältnissen und Strukturen. In der der DIN 1052 [DIN04] werden nur für Teilbereiche der Kraft-Verformungs-Linie verbindliche Angaben gemacht. Dies gilt insbesondere für den linearen Verlauf im Bereich von 0 % bis 40 % der Bruchlast [Pir05]. Noch nicht definiert ist eine Abschätzung der Grenzverformung im Bruchzustand. Das Fehlen einer solchen Angabe macht eine gesicherte, rechnerische Ausnutzung der Verbindung im plastischen Bereich schwierig. Hartmann wählt für sein Modell eine vereinfachte, trilineare Kraft-Verformungs-Linie, deren Knickpunkte individuell eingegeben werden können. Er stellte fest, dass bei Einfeldträgern unter Gleichlast eine Einsparung von Verbindungsmitteln von bis zu 50 % gegenüber einer linearen Berechnung möglich ist. Dies wird durch eine Erweiterung des Abstands der Verbindungsmittel in Trägermitte erreicht. Dem gegenüber steht eine geringfügig größere Beanspruchung der Teilquerschnitte. Der nichtlineare Effekt kann nur punktuell durch Einzelfedern abgebildet werden. Die Beanspruchung der Fugen ist sehr unterschiedlich über die Trägerlänge verteilt. Um ein realitätsnahes Durchlaufen der Kraft-Verformungs-Linie an möglichst vielen Querschnittsstellen gewährleisten zu können, ist das Tragwerk mit möglichst vielen Federn zu modellieren. Da es sich hier, ähnlich wie bei Kneidl, um ein Fachwerkmodell handelt, ist der Diskretisierungsaufwand, besonders bei geringen Schwerpunktsabständen a , ebenfalls sehr hoch.

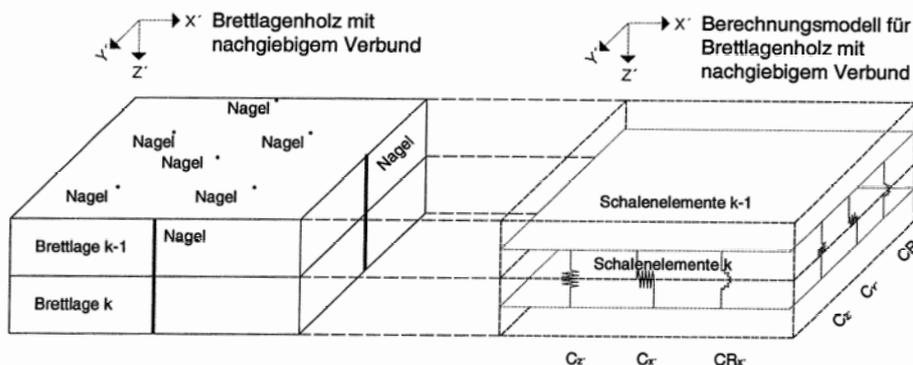


Abb. 1-7: Berechnungsmodell mit Federelementen für nachgiebigen Verbund nach Jakobs [Jak05]

Jakobs [Jak05] untersuchte die Plattentragwirkung von Brettlagenholz. Neben Querschnitten mit starr verbundenen Brettlagen betrachtete er auch Querschnitte, deren Brettlagen nachgiebig miteinander verbunden werden. Er stellt hierfür ein Berechnungsmodell vor, das die Brettlagen durch orthogonale Scheibenelemente abbildet, die durch Einzelfedern im engen Raster miteinander gekoppelt werden (Abb. 1-7). Die Federn sind parallel zur Plattenebene nachgiebig mit festzulegenden Wegfedersteifigkeiten c_x und c_y . Ein „Fließen“ der Federn kann abgebildet werden. Die Durchbiegungen in z -Richtung und die Verkrümmungen um die x - und y - Achse der Brettlagen werden starr miteinander gekoppelt. Dies geschieht indem die Steifigkeiten der Einzelfedern c_z in

Plattenquerrichtung (z-Richtung) und der Drehfedern C_{R_x} und C_{R_y} mit unendlich großen Werten belegt werden. Das Modell wird dem hier vorgestellten Finiten Verbundelementen gegenüber gestellt.

FEM-Programme wie z. B. Sofistik bieten Schalenelemente an, die einen aus verschiedenen Schichten aufgebauten Querschnitt modellieren können (Layermodell). Allerdings basiert das Berechnungsmodell auf der Voraussetzung des Ebenbleibens des Gesamtquerschnitts [Sof00]. Bei nachgiebigem Verbund treten Sprünge im verformten Querschnitt zwischen den Teilquerschnitten auf, die durch die unterschiedlichen Längsverschiebungen der Teilquerschnitte verursacht werden. Dies ist von entscheidender Bedeutung für das Tragverhalten. Das Layermodell kann daher nicht auf Querschnitte mit nachgiebigem Verbund angewandt werden.

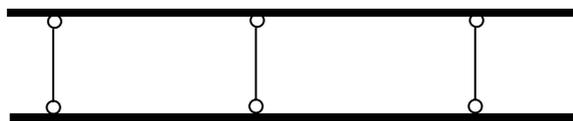
1.3.5 SCHUBANALOGIE NACH KREUZINGER

Seit einigen Jahren steht mit der Schubanalogie nach Kreuzinger [Kre02] ein neues Verfahren zur Verfügung. Es eignet sich sowohl für Stabtragwerke als auch für Plattentragwerke. Das Verfahren kann mit Statikprogrammen durchgeführt werden, die mit Elementen nach der Theorie von Timoshenko (bei Stabtragwerken) oder nach der Theorie von Reissner/Mindlin (bei Flächentragwerken) unter Berücksichtigung der Verformungen aus Querkraft arbeiten.

Die „klassische“ Schubanalogie wurde zunächst für die Berechnung von Biegesystemen entwickelt. Sie wird hier für Stabtragwerke näher erläutert.

Bei der Schubanalogie wird der Verbundquerschnitt in zwei Ersatzstäbe überführt, die durch Pendelstäbe o. ä. in Querrichtung starr gekoppelt werden (Abb. 1-8). Das Verfahren basiert auf der Annahme von gleichen Biegelinien der Ersatzstäbe. Dies ist durch eine hinreichende Anzahl von Querkopplungen sicherzustellen.

Stab A (Teilstäbe)



$$\Sigma EI_{\text{Teilstäbe}} \quad \Sigma GA_{\text{Teilstäbe}} \quad \Sigma EA_{\text{ges}}$$

$$\Sigma EI_{\text{Steiner}} \quad \Sigma GA_{\text{Verbund}} \quad EA = 0$$

Stab B (Verbundfugen)

Abb. 1-8: „klassische“ Schubanalogie nach Kreuzinger, Ersatzmodell (gem. [Kre02])

Den Ersatzstäben werden definierte Steifigkeiten zugewiesen. Der Ersatzstab A vereint die Eigensteifigkeiten der Einzelquerschnitte auf sich (Biegesteifigkeit, Dehnsteifigkeit und bei Berücksichtigung der Schubnachgiebigkeit der Teilquerschnitte die Schubsteifigkeit). Der Ersatzstab B bildet die Verbundwirkung ab. Seine Biegesteifigkeit EI errechnet sich aus den Steiner-Anteilen. Die Dehnsteifigkeit EA des Trägers B ist 0. Das Hauptmerkmal des Ersatzstabes B ist seine in der Regel geringe Schubsteifigkeit, die die Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel abbildet.

Die Ergebnisse der Berechnung mit dem Stabwerksprogramm liefern die Schnittgrößen der beiden Ersatzstäbe. Über eine Rücktransformation der Schnittgrößen kann in einer Nachlaufrechnung die Spannungsverteilung im realen System ermittelt werden. Die Schnittgrößen des Stabes A führen auf den Eigenanteil der Spannungen. Mit den Schnittgrößen des Stabes B werden die Spannungen aus

dem Zusammenwirken der Teilquerschnitte bestimmt. Die Addition beider Anteile liefert die resultierende Spannungsverteilung im Gesamtquerschnitt.

Bei zweiteiligen Querschnitten und bei symmetrisch dreiteiligen Querschnitten stimmen die Differentialgleichungen der Schubanalgie mit denen der analytischen Theorie überein. Der Schubanalgie liegt die Annahme zu Grunde, dass die Schwerpunkte der Teilquerschnitte im verformten Zustand auf einer Geraden liegen. Ein zweiteiliger Querschnitt kann diese Forderung immer einhalten. Ebenso ein Querschnitt aus mehreren Teilquerschnitten, dessen Fugensteifigkeiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Die Verhältnisgleichung ist in Scholz [Scho04-2] zu finden. Die Gleichung besagt tendenziell, dass die Steifigkeiten von außen liegenden Fugen größer sein müssen, als die von innen liegenden Fugen. Je weiter ein Querschnitt von dieser Regel abweicht, desto ungenauer wird die Lösung der Schubanalgie. Darunter fallen z. B. unsymmetrische Querschnitte mit Randquerschnitten, die relativ weich angeschlossen sind. Bereits Schelling [Sche68] machte von dieser Regel Gebrauch, um eine vereinfachte Lösung seiner Theorie anzugeben.

Die Ergebnisse der Schubanalgie für den maximalen Schubfluss in der Fuge können bei ungünstigen Verhältnissen beachtlich überschätzt werden [Scho04-2]. Die Überschätzung kann im Grenzfall bei Querschnitten mit vielen weichen Fugen bis zu 50 % betragen. Bei vier- und fünfteiligen Querschnitten mit gleichartigen Fugen und gleichen Teilquerschnitten ist eine maximale Überbewertung des maximalen Schubflusses in der Fuge von 20 % möglich.

Für Querschnitte aus mehreren Schichten mit fast symmetrischem Aufbau und ungefähr gleichmäßigen Verbundsteifigkeiten in den einzelnen Fugen, stellt die Schubanalgie eine Näherungslösung dar [Kre02]. Eine genaue Verifizierung der Schubanalgie mit Angaben über deren Genauigkeit für verschiedene Systemgeometrien und Steifigkeitsverhältnisse findet man bei Scholz [Scho04-2].

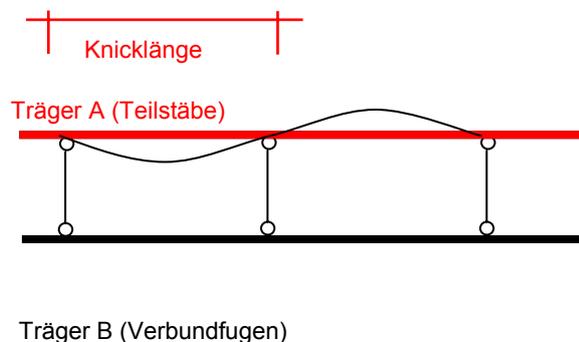


Abb. 1-9: „klassische“ Schubanalgie nach Kreuzinger (gem. [Kre02]), rechnerisches Einzelstabversagen bei Berechnungen am verformten System

Das Ersatzmodell mit den Stäben A und B hat bei stabilitätsgefährdeten Systemen, wie z. B. bei Rippenschalenkonstruktionen, Nachteile. Stabilitätsnachweise und Berechnungen nach Theorie II. Ordnung, die für eine sichere Berechnung notwendig sind, können nicht oder nur schwer durchgeführt werden. Infolge $EA = 0$ im Stab B trägt der Stab A die gesamte Normalkraft. Stab A ist aber nur die Biegesteifigkeit der Einzelquerschnitte zugeordnet. Schon bei geringer Drucknormalkraft tritt dort rechnerisch Einzelstabversagen auf (Abb. 1-9). Nur durch viele Koppelknoten der beiden Ersatzstäbe kann dieses Problem teilweise kompensiert werden. Eine sehr feine Elementeinteilung und damit ein sehr hoher Rechenaufwand sind die Folge.

Als Alternative erweitert Scholz [Scho04-2] das Rechenmodell der Schubanalgie durch einen zusätzlichen Ersatzstab C (Abb. 1-10). Damit werden Stabilitätsberechnungen und Berechnungen

nach Theorie II. Ordnung möglich. Die erweiterte Schubanalogie ist im informativen Anhang D der DIN 1052 [DIN04] beschrieben.

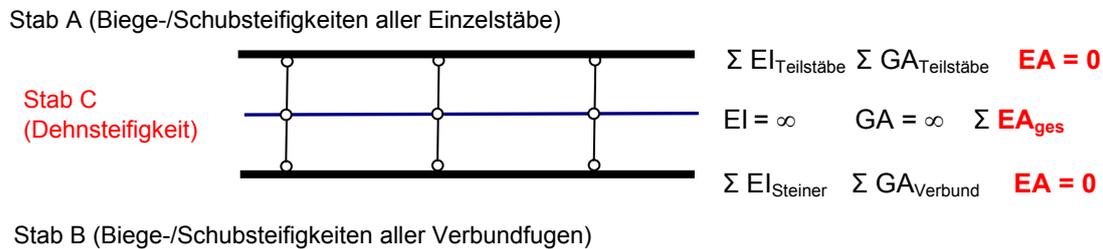


Abb. 1-10: Erweiterte Schubanalogie (gem. [Scho04-2],) Ersatzmodell mit Ersatzstab C

Es wird ein weiterer Ersatzstab C mit unendlicher Biegesteifigkeit und unendlicher Schubsteifigkeit eingeführt. Ihm werden jetzt die gesamten Dehnsteifigkeiten EA zugewiesen und er zieht somit die gesamte Normalkraft an sich. Er ist ebenfalls über Pendelstäbe mit den Ersatzstäben A und B gekoppelt und wird als Fachwerkstab zwischen den Koppelpunkten modelliert.

Für Knickuntersuchungen bzw. Berechnungen nach Theorie II. Ordnung muss das Ersatzmodell theoretisch in viele kurze Teilsysteme unterteilt werden. Nur so kann sich die polygonale Fachwerkstabskette des Ersatzstabes C gut an die reale Knickbiegeline bzw. Biegelinie annähern. Es ist daher eine feine Diskretisierung notwendig, um eine hinreichende Zuverlässigkeit der Ergebnisse bei Berechnungen nach Theorie II. Ordnung und bei Stabilitätsuntersuchungen zu erzielen. Grenzwertbetrachtungen bei der Berechnung von Knicklasten geben Anhaltspunkte über die notwendige Anzahl der Unterteilungen [Scho04-2]. Die Knicklänge, der Abstand der Wendepunkte der Knickbiegeline, ist die Bezugsgröße. Um die Knicklast, im Vergleich zur analytischen Lösung, um nicht mehr als 5 % zu überschätzen, ist das System in mindestens vier Teilsysteme zu unterteilen. Bei einer Unterteilung in nur zwei Teilsysteme kann der Fehler bei ungünstigen Steifigkeitsverhältnissen bis zu 21,6 % betragen. Die Fehler liegen stets auf der unsicheren Seite. Angaben über eine sinnvolle Unterteilung bei Spannungsproblemen nach Theorie II. Ordnung werden nicht gemacht.

1.3.6 ANSÄTZE AUS DEM STAHL-BETON-VERBUNDBAU

Im Unterschied zum Holz-Holz-Verbund, bei dem ein mehrteiliger Aufbau möglich ist, besteht ein Stahl-Beton-Verbundquerschnitt in der Regel nur aus einem Beton- und einem Stahl-Teilquerschnitt. Die veröffentlichten Modelle, die eine Nachgiebigkeit des Verbundes berücksichtigen, basieren daher alle auf der Annahme eines zweiteiligen Querschnitts. Allerdings lassen sich hieraus wichtige Impulse für ein Berechnungsmodell für mehrteilige Querschnitte gewinnen.

Der meist zitierte Beitrag wurde von Newmark et al. [New51] veröffentlicht. Sie betrachteten den Stahl- und den Betonquerschnitt jeweils als Balken ohne Berücksichtigung der Schubverformung (nach Bernoulli). Sie sind auf Grundlage eines linearen Materialgesetzes nachgiebig miteinander verbunden. Das Modell basiert auf der Lösung einer Differentialgleichung.

Eine geschlossene, analytische Lösung für einen zweiteiligen Verbundquerschnitt nach Theorie 1. Ordnung und nach Theorie 2. Ordnung entwickelte Girhammar [Gir93]. Es werden

Querstreckenlasten und eine über die Stablänge konstante Normalkraft berücksichtigt. Darüber hinaus gibt er für die vier Eulerfälle genäherte Lösungen für die kritischen Biegeknicklasten an.

Arizumi [Ari81] entwickelte ein ebenes, Finites Element für einen zweiteiligen Querschnitt mit insgesamt 12 Freiheitsgraden. Dies sind im Einzelnen (jeweils an den beiden Stabenden) die Durchbiegung w , die Verdrehung w' und für jeden der beiden Teilquerschnitte die Längsverschiebung u und die Längsdehnung u' . Für die Durchbiegung $w(x)$ und auch für die Längsverschiebung $u(x)$ werden die kubischen Hermite-Polynome als Lösungsansätze verwendet. Es werden Material-Nichtlinearitäten berücksichtigt. Den gleichen Ansatz verfolgte Oven [Ove97]. Allerdings berücksichtigt er zusätzlich die Effekte aus großen Verformungen.

Für einachsige gespannte Stahl-Beton-Verbunddecken entwickelte Daniels [Dan93] ein Finites Element mit insgesamt zehn Freiheitsgraden. Die Freiheitsgrade beschreiben an den beiden Elementenden die Durchbiegung, die Verdrehung, am Teilquerschnitt 1 die Längsverschiebung und die Relativverschiebung der Fuge. Zusätzlich werden zwei interne Freiheitsgrade in der Mitte des Elements angesetzt (am Teilquerschnitt 1 die Längsverschiebung und die Relativverschiebung der Fuge).

Dall'Asta und Zona [Dal02/Dal04-1/Dal04-2] untersuchen mehrere Elementansätze, um das nichtlineare Materialverhalten von zweiteiligen Stahl-Beton-Verbundträgern befriedigend abbilden zu können. Ihre Modelle können auf Biegung belastete Systeme nach Theorie I. Ordnung abbilden. Die Fugensteifigkeit von Stahl-Beton-Verbund ist stark von der Auslastung der Verbindung abhängig und variiert während der Laststeigerung von einem sehr steifen Verhalten bis nahezu Null kurz vor dem Versagen der Verbindungsmittel. Das Ziel der Arbeiten ist, ein Element zu entwickeln, das zuverlässige Ergebnisse unabhängig vom Grad der Fugensteifigkeit liefert. Dall'Asta und Zona untersuchten unter anderem Elemente mit den Polynomansätzen für die Durchbiegung $w(x)$ und für die beiden Längsverschiebungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$. Diese sind von

- 3. Ordnung für $w(x)$ und von 1. Ordnung für $u_1(x)$ und $u_2(x)$ (8 Freiheitsgrade),
- 3. Ordnung für $w(x)$ und von 2. Ordnung für $u_1(x)$ und $u_2(x)$ (10 Freiheitsgrade),
- 5. Ordnung für $w(x)$ und von 4. Ordnung für $u_1(x)$ und $u_2(x)$ (16 Freiheitsgrade).

Dall'Asta und Zona stellen fest, dass ihr 8-Freiheitsgrad-Element nur bei relativ geringer Fugensteifigkeit eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung erzielt. Bei höherer Fugensteifigkeit allerdings treten Sprünge und Knicke (Locking-Effekte) beim Relativverschiebungsverlauf in der Fuge und auch beim Krümmungsverlauf auf.

Das Tragverhalten von nachgiebigem Verbund ist hauptsächlich vom Verformungsverhalten der Fuge geprägt. Es wird durch die Relativverschiebung $\delta(x)$ der angrenzenden Teilquerschnitte in der Fuge beschrieben. Sie errechnet sich aus der 1. Ableitung der Durchbiegung $w'(x)$ und aus der Differenz der Längsverschiebungen $u_2(x)$ und $u_1(x)$.

$$\delta(x) = u_2(x) - u_1(x) + w'(x) \cdot a \quad (\text{Gl. 1-6})$$

Durchbiegung und Längsverschiebungen unterscheiden sich in (Gl. 1-6) um einen Ableitungsgrad. Eine gleichberechtigte Erfassung von Durchbiegung und Längsverschiebungen wird nur dadurch gewährleistet, dass der Polynomansatz der Durchbiegung genau um einen Grad höher angesetzt wird als die Längsverschiebungen. Das 8-Freiheitsgrad-Element weist mit dem Ansatz 3. Ordnung für $w(x)$ und 1. Ordnung für $u_1(x)$ und $u_2(x)$ gerade diese Eigenschaft nicht auf. Dies ist die Ursache für die dort auftretenden Locking-Effekte. Anders verhalten sich das 10-Freiheitsgrad-Element und das 16-Freiheitsgrad-Element. Dort unterscheiden sich die beiden Ansätze genau um einen Grad, was einen einheitlichen Polynomgrad der Anteile in (Gl. 1-6) bedeutet.

Einen anderen mathematischen Ansatz wählt Cas [Cas04]. Er stellt ein System aus Gleichgewichts-Gleichungen, Kinematik-Gleichungen und Gleichungen der Randbedingungen für einen zweiteiligen, nachgiebigen Verbundquerschnitt auf. Es werden große Verformungen berücksichtigt und das Gleichgewicht am verformten System (Theorie II. Ordnung) berechnet. Die Dehnungen der beiden Teilquerschnitte ε_1 und ε_2 und der Verkrümmung κ werden durch Lagrange-Polynome von frei wählbarer Ordnung angenähert. Das Gleichungssystem hat insgesamt $12+2N_\varepsilon+N_\kappa$ Gleichungen. $2N_\varepsilon$ bzw. N_κ ist die Anzahl der Stützstellen der Dehnungs- bzw. Krümmungsfunktion. Das Verfahren liefert eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Es unterscheidet sich von der "konventionellen" FEM durch den erweiterten Gleichungsansatz und ist nur auf den zweiteiligen Querschnitt beschränkt. Ein Einbinden in vorhandene FEM-Programme ist somit schwer möglich bis unmöglich. Es kann daher nur separat in einem eigenständigen Software-Programm umgesetzt werden.

Eine exakte Lösung des auf einachsige Biegung belasteten zweiteiligen nachgiebigen Verbundquerschnitts stellen Faella et al. [Fae03] vor. Ihre Herleitungen basieren auf der Berechnung von Verformungen an Stabanfang und Stabende aufgrund von Einheitskräften und Momenten an Stabanfang und Stabende. Die Verformungen werden mit dem Arbeitssatz unter Annahme des analytisch exakten Verformungsverlaufs nach Girhammar [Gir93] errechnet. Es ergibt sich eine Flexibilitätsmatrix, die die Kräfte/Momente mit den Verformungen/Verdrehungen an Stabanfang und Stabende in Beziehung setzt. Durch Invertieren der Flexibilitätsmatrix ergibt sich die Steifigkeitsmatrix, deren komplexe Elemente teilweise nur durch Diagramme dargestellt werden können. Dieser Lösungsweg ist nicht erweiterbar auf einen drei- oder mehrteiligen Querschnitt. Darüber hinaus ist die Lösung kompliziert und daher für die praktische Anwendung nicht geeignet.

Die folgenden beiden Beiträge behandeln nur das Verformungsverhalten von zweiteiligen Stahl-Beton-Verbundträgern. Wang [Wan98] untersucht die maximale Durchbiegung vom Einfeldträger und verifiziert seine Versuche mit der analytischen Lösung nach Girhammar [Gir93] und der FE-Lösung nach [Por94]. Nie [Nie03] gibt für Durchlaufträger mit Steifigkeitssprüngen analytische Gleichungen für die maximale Durchbiegung und die Verdrehungen an den Auflagern an.

1.3.7 FAZIT

Für ebene statische Systeme mit zweiteiligen Verbundquerschnitten steht eine Vielzahl von Lösungsverfahren zur Verfügung. Mehrteilige Querschnitte als Einfeldträger unter Gleichlast und druckbeanspruchte Pendelstäbe können mit dem γ -Verfahren mit ausreichender Ergebnisgenauigkeit berechnet werden. Um komplexere räumliche, statische Systeme aus mehrteiligen, nachgiebigen Verbundquerschnitten unter beliebigen Lasten nach Theorie II. Ordnung berechnen zu können, steht die erweiterte Schubanalogie zu Verfügung. Ihre Ergebnisse weisen Ungenauigkeiten für bestimmte Querschnitte auf. Das Ersatzmodell erfordert, insbesondere bei Berechnungen am verformten System (Theorie II. Ordnung und Stabilität), eine feine Diskretisierung. Ein weiterer Nachteil des Verfahrens sind der hohe Rechen- und Modellierungsaufwand. Er resultiert aus der notwendigen Überführung des Verbundquerschnitts in das Ersatzmodell und der zugehörigen Rücktransformation [Schw06]. Eine Modellierung von Detailpunkten, wie die Knoten von Brettrippenschalen, ist schwierig.

Der Praxis steht daher nur eingeschränkt ein breit einsetzbares, einfach zu verwendendes und zuverlässiges Berechnungsverfahren für die Berechnung von beliebigen räumlichen Stabtragwerken mit nachgiebigen Verbundquerschnitten nach Theorie II. Ordnung zur Verfügung. Diese Lücke soll mit dieser Forschungsarbeit geschlossen werden.

1.4 HOLZ ALS BAUSTOFF

Holz wurde schon sehr früh aufgrund seiner Eigenschaften als Werkstoff und Baustoff entdeckt. Der natürliche, nachwachsende Rohstoff ist fast überall verfügbar und leicht zu bearbeiten.

Seine enorme Tragfähigkeit im Verhältnis zu seinem Eigengewicht wird nur durch Hightech-Materialien wie Kohlefasern übertroffen. Leichte Bearbeitbarkeit mit einfachen Werkzeugen erlauben auch kleinen, wenig spezialisierten Unternehmen das Konstruieren mit Holz.

Weitere Vorteile sind eine oft unterschätzte hohe Feuerwiderstandsdauer, insbesondere von gedungenen Querschnitten, sowie eine weitgehende Resistenz gegen chemische Einwirkungen. Der Baustoff Holz vereint Tragfunktion mit gleichzeitiger raumabschliessender Funktion. Holz wird von vielen als ästhetisch empfunden und erzeugt ein angenehmes Raumklima. Es reguliert auf natürliche Weise die Luftfeuchtigkeit des Raums. Die Wärmeabgabe eines Menschen durch Wärmestrahlung wird durch die umgebenden Körper bestimmt. Holz besitzt ein geringes Absorptionsvermögen von Wärmestrahlung und entzieht daher dem Menschen weitaus weniger Wärme als z. B. Beton.

Die sehr positive Energie- und Umweltbilanz des natürlichen Werkstoffes Holz wird in der heutigen Zeit ein immer größeres Argument gegenüber anderen Werkstoffen wie Beton oder Stahl.

Holz hat als gewachsener Baustoff eine natürliche Beschränkung in seiner geometrischen Abmessung. So sind mit natürlichen Holzquerschnitten nur Tragwerke mit begrenzten Stützweiten und Lasten möglich. Durch ein geschicktes Verbinden von natürlichen Querschnitten zu Verbundquerschnitten können erheblich leistungsfähigere Tragwerke entstehen. Dies wurde schon frühzeitig erkannt, was historische Holzkonstruktionen aus zusammengesetzten Querschnitten für Biegeträger und Stützen belegen [Stad97].

Allerdings sind die organischen, inhomogenen und anisotropen Werkstoffstoffeigenschaften zu beachten und erfordern dementsprechende Fachkenntnisse. Der große Streubereich der Werte der mechanischen Eigenschaften kann durch eine geschickte Wahl des statischen Systems genutzt werden. Darunter fallen hochgradig statisch unbestimmte Tragwerke, die ein großes Lastumlagerungspotential besitzen. Entzieht sich ein Holzbauteil mit geringen Festigkeitseigenschaften seiner Last, so stehen andere Lastabtragungswege zur Verfügung.

Holz ist aber empfindlich gegen Feuchtigkeit und biologischen Befall. Diesen Nachteilen kann jedoch bei der Herstellung und unter Beachtung des konstruktiven Holzschutzes entgegengewirkt werden. Wird Feuchtigkeit dauerhaft und zuverlässig von Holztragwerken fern gehalten, so währt die Lebensdauer über Jahrhunderte. Den Nachweis liefern immer noch im Gebrauch befindliche, alte und überdachte Holzbrücken in der Schweiz.

Somit ist Holz aufgrund seiner zahlreichen positiven Eigenschaften mehr denn je ein vielseitiger, moderner Baustoff.

1.5 BRETRIPPENBAUWEISE

1.5.1 ALLGEMEINES

Schalen in Brettruppenbauweise (Brettrippenschalen) eröffnen dem Planer die Möglichkeit, die positiven Eigenschaften von Holz mit den Vorteilen von Schalentragwerken zu vereinen. Die Brettruppenbauweise wurde von Prof. Julius Natterer entwickelt und bietet vielfältige Gestaltungsmöglichkeiten. Nach ersten Erfahrungen mit verschraubten Holzrippen Ende der 60er

Jahre wurde die Brettrippenbauweise hauptsächlich in den letzten 20 Jahren zu einer interessanten Alternative im Hallenbau. Sie begeistert sowohl Fachleute als auch Laien durch ihre Leichtigkeit, Formvielfalt und einfache Ausführung. Einen umfassenden Überblick über die Bauweise und eine Beschreibung von realisierten Projekten findet man bei Natterer [Nat00].

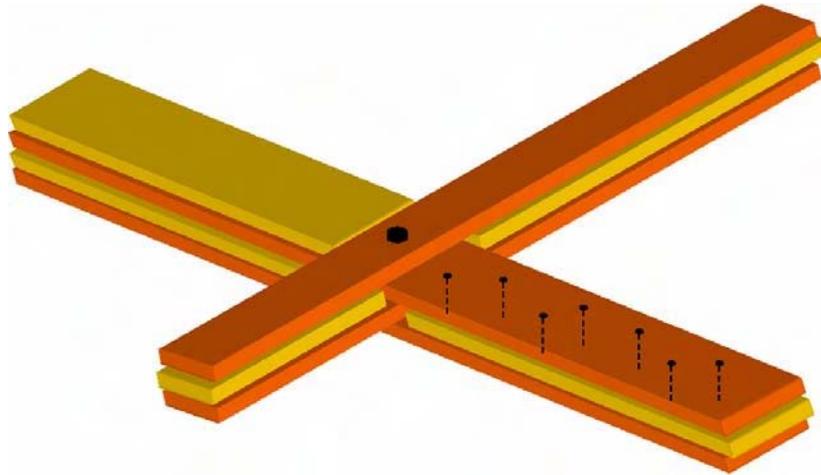


Abb. 1-11: Brettrippenbauweise, Detail

1.5.2 KONSTRUKTIONSPRINZIP

Die Konstruktion ist ein netzartiges Stabtragwerk aus sich kreuzenden Holzrippen. Die Holzrippen bestehen aus mehreren miteinander verbundenen Brettlagen, die wechselseitig „verwoben“ werden. Es entsteht so eine gekrümmte Gitternetzstruktur.

An den Kreuzungsknoten ist nur jedes zweite Brett durchlaufend. Da nur jeweils jede zwei Brettlage durchgehend ist, entstehen Zwischenräume, die durch kurze Füllbretter aufgefüllt werden (Abb. 1-11).

Zur Verbindung der Brettlagen scheidet eine starre Leimverbindung meist aus, da auf den Baustellen die für das Leimen erforderlichen klimatischen Voraussetzungen meist nicht zu gewährleisten sind. So werden mechanisch nachgiebige Verbindungsmittel bevorzugt. Allerdings muss im Vergleich zu einem verleimten Querschnitt eine zum Teil nicht unerhebliche Abminderung der Biegesteifigkeit in Kauf genommen werden.

Die Brettlagen im Rippenbereich werden mit Holzschrauben oder Nägel verbunden. Die Verbindung in den Kreuzungspunkten erfolgt durch Passbolzen.

Das Gitternetz lagert umlaufend auf steifen Randgliedern und wird durch eine Schalung ausgesteift.

1.5.3 KONSTRUKTION UND TRAGWIRKUNG

Eine Brettrippe besteht zumeist aus vier bis sechs Brettlagen, die miteinander verbunden werden. Zu beachten ist, dass der Steifigkeitsgewinn einer Brettrippe mit zunehmender Anzahl von Brettlagen überproportional abnimmt. Folglich lässt sich die Rippensteifigkeit durch eine Erhöhung der Anzahl der Brettlagen nur bedingt beeinflussen. Die Brettdicken werden in der Regel von 20 mm bis zu 45 mm gewählt. Sie sind abhängig vom minimalen Krümmungsradius der Rippen. Durch die Zwangskrümmung der Bretter beim Einbau entstehen Biegespannungen, die die mögliche Brettdicke begrenzen [Pir05]. In der Regel werden Radien zwischen dem 500- bis 1000-fachen der Brettdicken gewählt. Die Brettbreite variiert von 80 mm bis zu 160 mm.

Die Füllbretter dienen in erster Linie zur Schubkraftübertragung zwischen den durchlaufenden Brettern. Ihr Beitrag zur Erhöhung der Steifigkeit des Querschnitts beschränkt sich auf die Eigenanteile ihrer Biege- und Torsionssteifigkeiten. Ihr Beitrag zur Normkraftabtragung, verbunden mit einer Erhöhung der Dehnsteifigkeit und einer Berücksichtigung der Steineranteile ist vernachlässigbar. Aufgrund der freien Verschieblichkeit der Enden in Längsrichtung, ihren kurzen Längen und der baupraktisch geringen Fugensteifigkeit gegenüber der Dehnsteifigkeit entstehen in den Füllbrettern nur geringe Normalkräfte.

Brettrippenschalen sind hochgradig statisch unbestimmt. Maßgebend für die Bemessung der Rippen ist der geschwächte Querschnitt im Bereich der Knotenpunkte.

In Bereichen höherer Lasten wird das Gitternetz verdichtet. Dadurch wird auch der Kraftverlauf optisch nachvollziehbar. Die Randglieder sind verhältnismäßig steif auszubilden. Hierfür eignen sich beispielsweise Träger aus Stahl oder Brettschichtholz. Die Lagerung der Brettrippenschale erfolgt punktuell oder linear. Rippen, die auf punktuelle Lager treffen, weisen Lastkonzentrationen auf. In Auflagerbereichen kann ebenfalls eine Verdichtung der Rippenstruktur erforderlich werden. Ein oder zwei diagonal angeordnete Brettlagen werden zur Aussteifung montiert. Diese Brettlagen sind zugleich Dachschalung und können geschlossen oder auf Lücke verlegt werden.

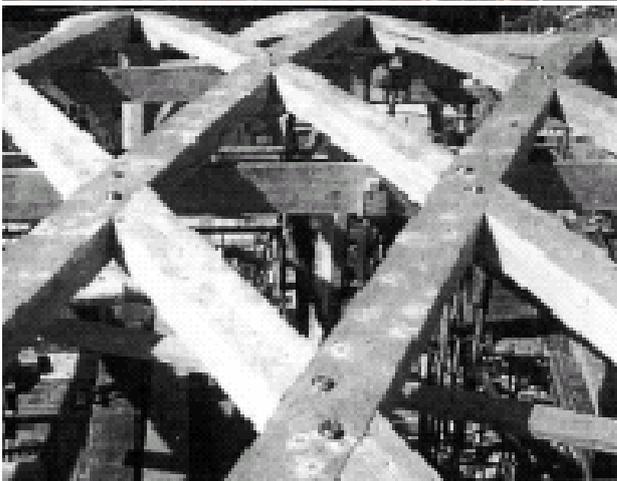


Abb. 1-12: Brettrippenbauweise, auf einem Gerüst werden Bretter der Rippen wechselseitig verlegt (Foto: BCN)

Maßgebend ist in der Regel eine Lastkombination aus ständigen Lasten und einer einseitigen Belastung aus Schnee, die dann mit dem halben Wert anzusetzen ist. Das Lastbild für Wind für gekrümmte Dachformen ist in erster Linie geprägt von abhebenden Windkräften, die meist in der Überlagerung mit der ständigen Last und der Schneelast entlastend wirkt.

Aufgrund der filigranen und damit weichen Form und der durch Druckkräfte geprägten Lastabtragung ist eine Berechnung am verformten System nach Theorie II. Ordnung zwingend erforderlich.

Auf Grund des natürlich gewachsenen Charakters weist Holz eine Streuung der Werte seiner mechanischen Eigenschaften auf. Bretter mit geringer Festigkeit besitzen in der Regel auch einen geringeren Elastizitätsmodul. Durch die Anordnung der Rippen in zwei Richtungen entsteht eine Gitternetzstruktur. Diese ist hochgradig statisch unbestimmt. Die Brettrippenschalen besitzen zusätzlich zu der Anisotropie des Baumaterials Holz eine große konstruktive Anisotropie.

Sowohl innerhalb der einzelnen Rippen als auch in den Kreuzungspunkten weisen die Verbindungen große Nachgiebigkeiten auf. Das Tragwerk besitzt daher sehr hohe Lastumlagerungspotentiale innerhalb der Brettlagen sowie zwischen benachbarten Rippen. Ähnlich wie bei verleimtem Brettschichtholz werden dadurch die Auswirkungen der Streuung der Festigkeiten und der Steifigkeit vermindert. Das Tragverhalten kann als „sozial“ bezeichnet werden. Sollte ein Brett mit geringer Festigkeit seine Tragfähigkeit erreichen, so übernehmen die benachbarten Bretter und Rippen seine Last. Ein progressiver Kollaps wird somit verhindert.

Für die Montage der Brettrippenschalen hat sich die Verwendung eines Lehrgerüsts durchgesetzt (Abb. 1-12). Bei der Herstellung wird zunächst die Lage der Rippen auf dem Leererüst eingemessen und die erste Brettlage auf dem Leererüst positionsgetreu befestigt. Danach werden die restlichen Brettlagen wechselseitig verlegt und mit Verbindungsmitteln in einem Abstand von 15 bis 20 cm miteinander verschraubt oder vernagelt [Nat00].

Bei der Montage der ersten Brettrippenschale, dem Polydôme auf dem Campus der ETH Lausanne, wurde der Gitterrost zunächst flach auf dem Boden aufgelegt und anschließend durch Hochziehen an aufgestellten Rahmen in Form gebracht und an den Auflagerpunkten verankert. Dann erfolgte die Verschraubung der Brettlagen [Hoe92].



Abb. 1-13: Kuppelschale in Brettrippenschalebauweise, Innenansicht am Beispiel des Polydôme, Lausanne (Foto: BCN)

1.5.4 FORMFINDUNG UND GEOMETRIEENTWICKLUNG

Ein Schalentragsystem entfaltet seine optimale Tragwirkung im Membranspannungszustand [Nat00]. Das bedeutet, dass in der Schale ausschließlich Normalspannungen in Ring- und in Meridianrichtung auftreten. Biegespannungen existieren in diesem Fall nicht. Dieser Zustand wird bei einem Tragsystem mit einer vorgegebenen geometrischen Form nur für ein bestimmtes Lastbild erreicht. Bei Stäben entspricht diese ideale geometrische Form der Stützlinie. Für Schalen erhält man die Membranform für ein bestimmtes Lastbild durch das Aufspannen eines Seilnetzes oder einer Seifenhaut zwischen den als starr angenommenen Randgliedern. Somit kann bei einer biegesteifen Schale nur eine einzige geometrische Form ein bestimmtes Lastbild optimal abtragen. In Realität wirken auf ein Bauwerk jedoch mehrere unterschiedliche Lastbilder ein. Daher kann die Festlegung auf eine bestimmte Geometrie immer nur einen Kompromiss bedeuten.

Wesentliche Voraussetzung bei der Herstellung der Rippen ist, dass die einzelnen Bretter nicht um die starke Achse gebogen werden können. Nur Biegung um die schwache Achse sowie Verdrillung um die Längsachse sind möglich. Das erfordert zwingend, dass die Rippenachsen jeweils auf den geodätischen Linien, also auf den kürzesten Verbindungslinien zwischen zwei Punkten auf der Schalenoberfläche, liegen. Die Kurvennormale stimmt in jedem Punkt mit der Flächennormale überein. Die Ermittlung der Achslage für Brettrippen und Randglieder erfolgt bei einfachen Geometrien mittels CAD-Programmen. Bei freien Geometrien muss die Achslage aufwendig mathematisch mit numerischen Methoden ermittelt werden.

Die derzeit gebauten Brettrippenschalen können anhand ihrer Geometrie in die folgenden drei Gruppen eingeteilt werden.

- **Kuppelschalen:** Die Rippen liegen auf den größtmöglichen Kreisen (Größtkreisen) einer Kugeloberfläche. Die Biegung der Bretter erfolgt nur über die schwache Achse. Ein bekanntes Beispiel für eine Kuppelschale ist der Polydôme in Lausanne in der Schweiz.
- **Tonnenschalen:** Die Rippenachsen liegen auf einer Helix. Die Bretter werden um ihre schwache Achse gebogen sowie um ihre Längsachse verdrillt.
- **Freie Membranformen und Translationsflächen:** Die geometrischen Linien der Rippenachsen werden mathematisch ermittelt. Herausragendes Beispiel für ein derartiges Schalentragsystem ist das EXPO-Dach in Hannover.

Die Brettrippbauweise kann den Schalenbau wiederbeleben. Holzbretter sind durch ihre leichte Krümmungsfähigkeit prädestiniert für den Schalenbau. Unter Einhaltung bestimmter Mindestradien erlaubt die Bauweise fast beliebige freie Formen, was architektonisch neue Gestaltungsmöglichkeiten eröffnet. Es entstehen so spektakuläre Holzbauwerke, deren innere Raumwirkung jeden Besucher fasziniert (Abb. 1-13).

Die Herstellung ist im Vergleich zu Stahlbeton- oder Stahlschalen einfacher und damit kostengünstiger. Durch das geringe Eigengewicht sind leichte Flächentragsysteme möglich, die im Vergleich zu Stahlbetonschalen kleinere Fundamente erfordern.

Durch die Verwendung des nachwachsenden, natürlichen Rohstoffs Holz fördert die Brettrippbauweise das nachhaltige Bauen. Sie verwendet nur unbehandeltes Holz, das fast überall in unmittelbarer Umgebung direkt verfügbar ist. Aufwendige Veredelungsprozesse und lange Transportwege entfallen somit.

Der Vorteil liegt unter anderem darin, dass auch kleine Zimmereibetriebe ohne Spezialkenntnisse und Spezialmaschinen Brettrippenschalen preisgünstig herstellen können. Ein Dach in Brettrippbauweise kostet nicht mehr als in konventioneller Holzbauweise, ist aber optisch wesentlich ansprechender.

Der entscheidende Nachteil der Brettrippenbauweise gegenüber konventionellen Holzkonstruktionen ist derzeit der hohe Planungs- und Berechnungsaufwand. Die Herausforderung besteht im Wesentlichen in der Berechnung des nachgiebigen Verbundquerschnitts.

KAPITEL 2

ANALYTISCHE LÖSUNG DES ZWEITEILIGEN VERBUND- QUERSCHNITTS MIT UNABHÄNGIGEN LÄNGSVERSCHIEBUNGEN

2.1. ALLGEMEINES

Beliebig mehrteilige Verbundquerschnitte können exakt analytisch in geschlossener Form nicht gelöst werden. Geschlossene Lösungen sind nur für spezielle Querschnittsaufbauten unter speziellen Randbedingungen bekannt (siehe Kapitel 1).

Für allgemeine Randbedingungen ist eine überschaubare analytische Lösung nur für den zweiteiligen, nachgiebigen Verbundquerschnitt möglich. Sie wird im Folgenden vorgestellt, um die grundlegenden analytischen Beziehungen bei nachgiebigem Verbund aufzuzeigen.

Die Lösung dient unter anderem als Referenzlösung für die vorgestellten Finiten Elemente (Kapitel 3.7.6). Die Herleitung basiert auf der Theorie nach Schuler [Schu86] im Rahmen der Differentialgleichungsmethode. Seine Differentialgleichungen gründen auf der Beschreibung des Durchbiegungsverlaufs $w(x)$ und der Relativverschiebung $\delta(x)$ in der Fuge. In der Theorie nach Schuler sind die Längsverschiebungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ voneinander abhängig. Diese Einschränkung wird in der folgenden Erweiterung der Theorie aufgehoben. Es werden unabhängige Längsverschiebungsverläufe $u_1(x)$ und $u_2(x)$ eingeführt. Damit sind auch voneinander unabhängige Normalkräfte $N_1(x)$ und $N_2(x)$ möglich. Eine direkte Vergleichbarkeit mit den Finiten Elementen ist damit gegeben.

Die analytische Lösung besteht aus der lastunabhängigen, homogenen Lösung und der lastabhängigen, partikularen Lösung. Exemplarisch wird hier nur auf die partikuläre Lösung der Gleichstreckenlast eingegangen. Partikulären Lösungen für andere Lasten finden sich in Natterer [Nat87].

Folgende Voraussetzungen und Annahmen werden getroffen:

- Einfach symmetrischer Querschnitt um die xz -Ebene (Abb. 2-1)
- Ebener Belastungs-, Verformungs- und Spannungszustand in der xz -Ebene
- Schubverformung innerhalb der Teilquerschnitte werden vernachlässigt (Bernoulli)
- lineare Materialgesetze
- linear elastische Fugensteifigkeit c in Längsrichtung
- starre Kopplung der Durchbiegung in Querrichtung und der Verdrehung der Teilquerschnitte
- der geometrische Schwerpunkt SP_{ges} des Gesamtquerschnitts ist Bezugsgröße für die Gesamt-Zustandsgrößen (Abb. 2-2)
- Theorie kleiner Verformungen

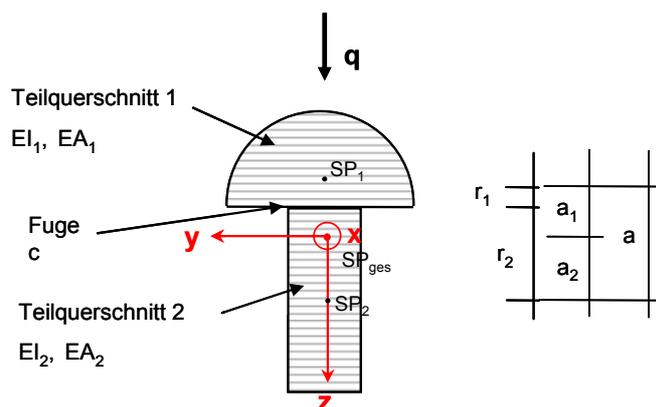


Abb. 2-1: Geometrie, zweiteiliger ebener nachgiebiger Verbundquerschnitt

2.2. QUERSCHNITT

Der zweiteilige Verbundquerschnitt besteht aus den Teilquerschnitten 1 und 2 mit den Biegesteifigkeiten EI_1 und EI_2 und den Dehnsteifigkeiten EA_1 und EA_2 (Abb. 2-1). Ihre Teilschwerpunkte SP_1 und SP_2 haben die Abstände a_1 und a_2 vom geometrischen Gesamtschwerpunkt S_{ges} bzw. die Abstände r_1 und r_2 von der Fuge. Die beiden Teilquerschnitte sind in Längsrichtung nachgiebig mit der Fugensteifigkeit c miteinander gekoppelt.

Der Gesamtabstand a der Teilschwerpunkte ergibt sich aus

$$a = a_1 + a_2 = r_1 + r_2 \quad (\text{Gl. 2-0})$$

2.3. GRUNDLEGENDE BEZIEHUNGEN

Es gelten folgende grundlegende Beziehungen für die Teilquerschnitte 1 und 2

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \varepsilon_1(x)EA_1 = u_1'(x)EA_1 \\ N_2(x) &= \varepsilon_2(x)EA_2 = u_2'(x)EA_2 \\ M_1(x) &= -w''(x)EI_1 \\ M_2(x) &= -w''(x)EI_2 \\ Q_1(x) &= -w'''(x)EI_1 \\ Q_2(x) &= -w'''(x)EI_2 \end{aligned} \quad (\text{Gl. 2-1})$$

Mit Abb. 2-2 folgt aus dem Momenten-Gleichgewicht am Teilquerschnitt 1 um den Teilschwerpunkt SP_1 am Stabende

$$-Q_1 dx + dM_1 + Tr_1 = 0 \quad (\text{Gl. 2-2a})$$

Entsprechendes gilt für den Teilquerschnitt 2

$$-Q_2 dx + dM_2 + Tr_2 = 0 \quad (\text{Gl. 2-2b})$$

Daraus ergibt sich für die Teilquerkräfte

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= M_1'(x) + T(x)r_1 \\ Q_2(x) &= M_2'(x) + T(x)r_2 \end{aligned} \quad (\text{Gl. 2-3})$$

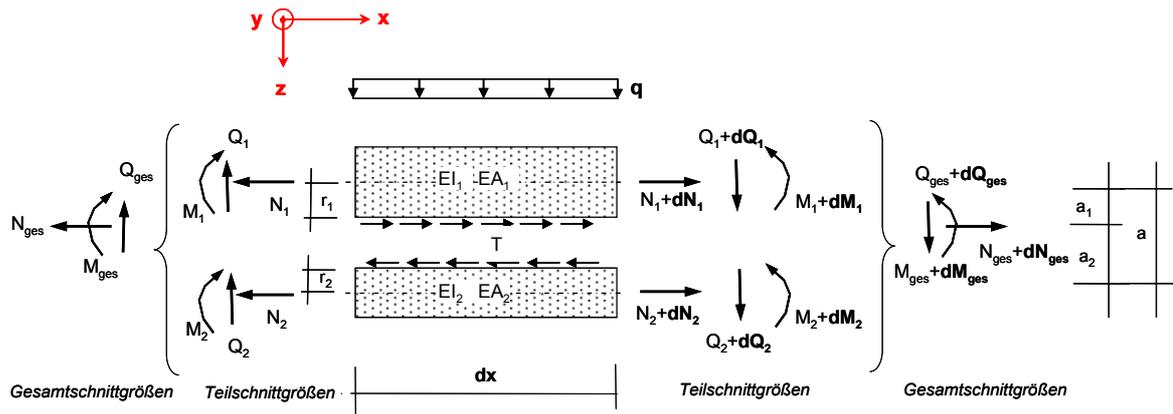


Abb. 2-2: Schnittkräfte am differentiellen, zweiteiligen Verbundquerschnitt

Für das Gleichgewicht der horizontalen Kräfte gilt am Gesamtquerschnitt

$$-N_1 + N_1 + dN_1 - N_2 + N_2 + dN_2 = 0 \tag{Gl. 2-4a}$$

oder vereinfacht

$$dN_1 + dN_2 = 0 \tag{Gl. 2-4b/c}$$

$$N_1'(x) + N_2'(x) = 0$$

und für die Gesamtschnittgrößen um den geometrischen Schwerpunkt

$$\begin{aligned} M_{ges}(x) &= M_1(x) + M_2(x) - N_1(x) a_1 + N_2(x) a_2 \\ Q_{ges}(x) &= M'_{ges}(x) \\ Q_{ges}(x) &= Q_1(x) + Q_2(x) \\ N_{ges}(x) &= N_1(x) + N_2(x) \\ M'''_{ges}(x) &= -q \\ Q'_{ges}(x) &= -q \end{aligned} \tag{Gl. 2-5}$$

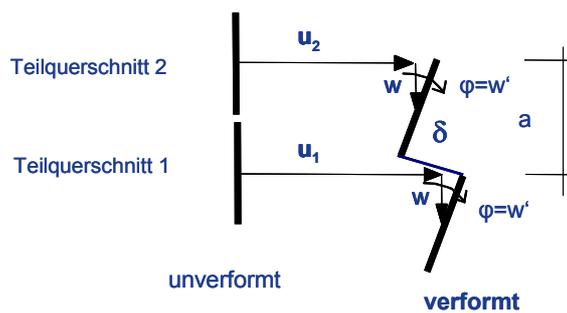


Abb. 2-3: Verformungsverhalten des zweiteiligen Verbundquerschnitts

Nachdem die Schubverformung in den Teilquerschnitten vernachlässigt wird (Theorie nach Bernoulli) gilt (Abb. 2-3)

$$\varphi(x) = w'(x) \tag{Gl. 2-6}$$

Die Relativverschiebung $\delta(x)$ in der Fuge setzt sich nach Abb. 2-3 zusammen aus

$$\delta(x) = u_2(x) - u_1(x) + w'(x) \cdot a \quad (\text{Gl. 2-7})$$

Der Schubfluss $T(x)$ in der Fuge ist das Produkt aus der Fugensteifigkeit c und der Relativverschiebung $\delta(x)$

$$T(x) = c \delta(x) \quad (\text{Gl. 2-8})$$

Aus der Gleichgewichtsbetrachtung der Horizontalkräfte nach Abb. 2-2 folgt

$$\begin{aligned} dN_1(x) &= -T(x)dx \\ dN_2(x) &= +T(x)dx \\ N_1'(x) &= -T(x) \\ N_2'(x) &= +T(x) \end{aligned} \quad (\text{Gl. 2-9})$$

Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$B_{st} = \frac{EA_1 EA_2}{EA_1 + EA_2} a^2 \quad \text{Steineranteil} \quad (\text{Gl. 2-10})$$

$$EI_0 = EI_1 + EI_2 \quad \text{Eigen-Biegesteifigkeit} \quad (\text{Gl. 2-11})$$

$$EI_\infty = EI_0 + B_{st} \quad \text{Gesamtbiegesteifigkeit, starr} \quad (\text{Gl. 2-12})$$

$$\alpha^2 = \frac{B_{st}}{EI_\infty} \quad \text{Steiner-Zahl} \quad (\text{Gl. 2-13})$$

$$\omega^2 = c \frac{EA_1 + EA_2}{EA_1 EA_2} \quad (\text{Gl. 2-14})$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\omega^2}{1 - \alpha^2}} = \sqrt{c \left(\frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} + \frac{a^2}{EI_1 + EI_2} \right)} \quad \text{relative Fugensteifigkeit} \quad (\text{Gl. 2-15})$$

Die relative Fugensteifigkeit Ω repräsentiert die relative Nachgiebigkeit der Fuge im Verhältnis zu den Steifigkeiten der Teilquerschnitte. Sie hat die Einheit [1/m] und dient als Hauptcharakteristikum einer Fuge.

Zusammen mit der Länge l einer Fuge ergibt sich die einheitenfreie Fugenkennzahl

$$\varepsilon_F = l \Omega \quad \text{Fugenkennzahl} \quad (\text{Gl. 2-16})$$

2.4. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wird (Gl. 2-7) einmal abgeleitet und setzt man dann für $u_1'(x)$ und $u_2'(x)$ die Gleichungen (Gl. 2-1) ein, so ergibt sich

$$\delta'(x) = \frac{N_2(x)}{EA_2} - \frac{N_1(x)}{EA_1} + w''(x) \cdot a. \quad (\text{Gl. 2-17})$$

Leitet man (Gl. 2-17) noch einmal ab, so können die Normalkräfte mit (Gl. 2-4c) zusammengefasst werden zu

$$\delta''(x) = \frac{N'_2(x)}{EA_2} + \frac{N'_2(x)}{EA_1} + w'''(x) \cdot a. \quad (\text{Gl. 2-18})$$

Es ergibt sich somit für $N'_2(x)$

$$N'_2(x) = (\delta''(x) - w'''(x) \cdot a) \frac{EA_1 EA_2}{EA_1 + EA_2} \quad (\text{Gl. 2-19a})$$

oder mit (Gl. 2-4c)

$$N'_1(x) = -(\delta''(x) - w'''(x) \cdot a) \frac{EA_1 EA_2}{EA_1 + EA_2}. \quad (\text{Gl. 2-19b})$$

Setzt man in (Gl. 2-5e) die zweifache Ableitung von (Gl. 2-5a) mit (Gl. 2-1), (Gl. 2-19) und (Gl. 2-0) ein, so erhält man

$$-EI_1 w''''(x) - EI_2 w''''(x) + (\delta'''(x) - w''''(x) \cdot a) \frac{EA_1 EA_2}{EA_1 + EA_2} a = -q \quad (\text{Gl. 2-20})$$

Vereinfacht man (Gl. 2-20) mit (Gl. 2-10), (Gl. 2-12) und (Gl. 2-13), so erhält man die I. Differentialgleichung

$$I. \quad w''''(x) - \frac{\alpha^2}{a} \delta'''(x) = \frac{q}{EI_\infty} \quad (\text{Gl. 2-21})$$

Die II. Differentialgleichung erhält man, indem man in (Gl. 2-9d), (Gl. 2-8) und (Gl. 2-19a) einsetzt

$$(\delta''(x) - w'''(x) \cdot a) \frac{EA_1 EA_2}{EA_1 + EA_2} = c \delta(x) \quad (\text{Gl. 2-22})$$

Umgeformt und mit (Gl. 2-14) vereinfacht ergibt sich die II. Differentialgleichung zu

$$II. \quad \delta''(x) - \omega^2 \delta'(x) = a w'''(x). \quad (\text{Gl. 2-23})$$

Es ergibt sich somit mit (Gl. 2-21) und (Gl. 2-23) das gekoppelte inhomogene Differentialgleichungssystem:

$$I. \quad w''''(x) - \frac{\alpha^2}{a} \delta'''(x) = \frac{q}{EI_\infty} \quad (\text{Gl. 2-24})$$

$$II. \quad \delta''(x) - \omega^2 \delta'(x) = a w'''(x)$$

Die beiden Differentialgleichungen (Gl. 2-24) werden in zwei entkoppelte Differentialgleichungen umgeformt.

$$I. \quad \delta'''(x) - \Omega^2 \delta'(x) = -\frac{qca}{EI_0} \quad (\text{Gl. 2-25})$$

$$II. \quad w^{VI}(x) - \Omega^2 w''''(x) = -\frac{q\Omega^2}{EI_\infty} + \frac{q''}{EI_0}$$

2.5. LÖSUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Die Lösung für $w(x)$ und $\delta(x)$ setzt sich aus einem lastunabhängigen, homogenen Lösungsanteil und einem lastabhängigen, partikularen Lösungsanteil für die Gleichstreckenlast zusammen.

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta_H(x) + \delta_P(x) \\ w(x) &= w_H(x) + w_P(x)\end{aligned}\tag{Gl. 2-26}$$

Homogene Lösung

Mit den exponentiellen Ansätzen für die homogenen Lösungen

$$\begin{aligned}\delta_H(x) &= Ce^{\lambda x} \\ w_H(x) &= De^{\lambda x}\end{aligned}\tag{Gl. 2-27}$$

ergeben sich die charakteristischen Gleichungen aus (Gl. 2-25) zu

$$\begin{aligned}I. \quad \lambda^3 - \Omega^2 \lambda^1 &= 0 \\ II. \quad \lambda^6 - \Omega^2 \lambda^4 &= 0\end{aligned}\tag{Gl. 2-28}$$

und damit die homogenen Lösungen zu

$$\begin{aligned}\delta_H(x) &= C_1 \sinh \Omega x + C_2 \cosh \Omega x + C_3 \\ w_H(x) &= D_1 \sinh \Omega x + D_2 \cosh \Omega x + D_3 x^3 + D_4 x^2 + D_5 x + D_6\end{aligned}\tag{Gl. 2-29}$$

Durch Einsetzen von $\delta_H(x)$ und $w_H(x)$ (Gl. 2-29) in die gekoppelte Differentialgleichung (Gl. 2-24a) wird ein Zusammenhang zwischen den Integrationskonstanten C_{1-3} und D_{1-6} hergestellt.

$$C_1 (\Omega^2 - \omega^2) \sinh \Omega x + C_2 (\Omega^2 - \omega^2) \cosh \Omega x - C_3 \omega^2 = a (D_1 \Omega^3 \cosh x + D_2 \Omega^3 \sinh \Omega x + 6D_3)\tag{Gl. 2-30}$$

Für diesen Schritt wird vorausgesetzt, dass die noch zu bestimmende partikuläre Lösung auch das Differentialgleichungssystem (Gl. 2-24) erfüllt.

Aus einem Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned}C_1 (\Omega^2 - \omega^2) &= D_2 a \Omega^3 \\ C_2 (\Omega^2 - \omega^2) &= D_1 a \Omega^3 \\ -C_3 \omega^2 &= 6D_3\end{aligned}\tag{Gl. 2-31}$$

oder vereinfacht

$$\begin{aligned}C_1 &= D_2 \frac{\Omega^3 a}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{\Omega a}{\alpha^2} \\ C_2 &= D_1 \frac{a \Omega^3}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{\Omega a}{\alpha^2} \\ C_3 &= -D_3 \frac{6}{\omega^2}\end{aligned}\tag{Gl. 2-32}$$

Eingesetzt in (Gl. 2-29) ergibt sich für die homogene Lösung

$$\delta_H(x) = D_2 \frac{a\Omega}{\alpha_B^2} \sinh \Omega x + D_1 \frac{a\Omega}{\alpha_B^2} \cosh \Omega x - D_3 \frac{6a}{\omega^2} \quad (\text{Gl. 2-33})$$

$$w_H(x) = D_1 \sinh \Omega x + D_2 \cosh \Omega x + D_3 x^3 + D_4 x^2 + D_5 x + D_6$$

Partikuläre Lösung für Gleichstreckenlast

Die partikulären Lösungen für $w_p(x)$ und $\delta_p(x)$ müssen sowohl die gekoppelten Differentialgleichungen (Gl. 2-24) als auch die entkoppelten Differentialgleichungen (Gl. 2-25) erfüllen. Es sind daher Ansatzfunktionen zu wählen, deren Glieder auch beim Einsetzen in die homogene Gleichung (Gl. 2-24b) nicht wegfallen.

Es werden für die Gleichstreckenlast q die folgenden Polynomansätze gewählt

$$\delta_p(x) = B_1 x^2 + B_2 x + B_3$$

$$w_p(x) = B_4 x^5 + B_5 x^4 + B_6 x^3$$

Durch Einsetzen der Lösungsansätze in die entkoppelten Differentialgleichungen (Gl. 2-25) und in die gekoppelte Differentialgleichung (Gl. 2-24b), sowie anschließendem Koeffizientenvergleich erhält man schließlich die Partikularlösungen für die Gleichstreckenlast. Diese lauten:

$$\delta_p(x) = -\frac{qax}{\omega^2 EI_\infty} \quad (\text{Gl. 2-34})$$

$$w_p(x) = \frac{qx^4}{24EI_\infty}$$

Für andere Lasten findet man die zugehörigen partikulären Lösungen in [Schu86] oder [Nat87].

Gesamtlösung

Schließlich ergeben sich mit (Gl. 2-26), (Gl. 2-33), (Gl. 2-34) die Verformungszustände bei Gleichstreckenlast zu

$$\delta(x) = D_2 \frac{a\Omega}{\alpha^2} \sinh \Omega x + D_1 \frac{a\Omega}{\alpha^2} \cosh \Omega x - D_3 \frac{6a}{\omega^2} - \frac{qax}{\omega^2 EI_\infty} \quad (\text{Gl. 2-35})$$

$$w(x) = D_1 \sinh \Omega x + D_2 \cosh \Omega x + D_3 x^3 + D_4 x^2 + D_5 x + D_6 + \frac{qx^4}{24EI_\infty}$$

2.6. LÄNGSVERSCHIEBUNGEN

Mit (Gl. 2-1) und (Gl. 2-4c) ergibt sich

$$u_1''(x)EA_1 + u_2''(x)EA_2 = 0 \quad (\text{Gl. 2-36})$$

Integriert man (Gl. 2-36), so folgt

$$u_1'(x)EA_1 + u_2'(x)EA_2 + D_7 = 0 \quad (\text{Gl. 2-37})$$

Eine weitere Integration führt zu

$$u_1(x)EA_1 + u_2(x)EA_2 + D_7x + D_8 = 0 \quad (\text{Gl. 2-38})$$

Aus (Gl. 2-7) folgt

$$u_2(x) = \delta(x) + u_1(x) - w'(x)a. \quad (\text{Gl. 2-39})$$

Setzt man (Gl. 2-39) in (Gl. 2-38) ein, so ergibt sich

$$u_1(x) = \frac{w'(x)aEA_2 - \delta(x)EA_2 - D_7x - D_8}{EA_1 + EA_2}. \quad (\text{Gl. 2-40a})$$

Daraus folgt mit (Gl. 2-38)

$$u_2(x) = \frac{-w'(x)aEA_1 - \delta(x)EA_1 - D_7x - D_8}{EA_1 + EA_2} \quad (\text{Gl. 2-40b})$$

Setzt man (Gl. 2-35) in (Gl. 2-40) ein, so ergeben sich die absoluten Längsverschiebungen zu

$$u_1(x) = \frac{EA_2a}{EA_1 + EA_2} \left[-D_1 \frac{\omega^2}{\alpha^2 \Omega} \cosh \Omega x - D_2 \frac{\omega^2}{\alpha^2 \Omega} \sinh \Omega x + D_3 \left(3x^2 + \frac{6}{\omega^2} \right) + D_4 2x + D_5 - D_7 \frac{x}{EA_2 a} - D_8 \frac{1}{EA_2 a} + \frac{qx^3}{6EI_\infty} + \frac{qx}{\omega^2 EI_\infty} \right] \quad (\text{Gl. 2-41a})$$

$$u_2(x) = \frac{EA_1a}{EA_1 + EA_2} \left[D_1 \frac{\omega^2}{\alpha^2 \Omega} \cosh \Omega x + D_2 \frac{\omega^2}{\alpha^2 \Omega} \sinh \Omega x - D_3 \left(3x^2 + \frac{6}{\omega^2} \right) - D_4 2x + D_5 - D_7 \frac{x}{EA_1 a} - D_8 \frac{1}{EA_1 a} - \frac{qx^3}{6EI_\infty} - \frac{qx}{\omega^2 EI_\infty} \right] \quad (\text{Gl. 2-41b})$$

2.7. TEILNORMALKRÄFTE

Mit (Gl. 2-1a/b) und (Gl. 2-41) ergeben sich die Normalkräfte zu

$$N_1(x) = \frac{EA_1EA_2a}{EA_1 + EA_2} \left[-D_1 \frac{\omega^2}{\alpha^2} \sinh \Omega x - D_2 \frac{\omega^2}{\alpha^2} \cosh \Omega x + D_3 6x + D_4 2 - D_7 \frac{1}{EA_2 a} + \frac{qx^2}{2EI_\infty} + \frac{q}{\omega^2 EI_\infty} \right] \quad (\text{Gl. 2-42a})$$

$$N_2(x) = \frac{EA_1EA_2a}{EA_1 + EA_2} \left[D_1 \frac{\omega^2}{\alpha^2} \sinh \Omega x + D_2 \frac{\omega^2}{\alpha^2} \cosh \Omega x - D_3 6x - D_4 2 - D_7 \frac{1}{EA_1 a} - \frac{qx^2}{2EI_\infty} - \frac{q}{\omega^2 EI_\infty} \right] \quad (\text{Gl. 2-42b})$$

oder umgeformt und vereinfacht mit (Gl. 2-14) und (Gl. 2-11) zu

$$N_1(x) = -D_1 \frac{ca}{\alpha^2} \sinh \Omega x - D_2 \frac{ca}{\alpha^2} \cosh \Omega x + D_3 \frac{6ca}{\omega^2} x + D_4 \frac{2ca}{\omega^2} - D_7 \frac{c}{\omega^2 EA_2} + q \frac{ca}{2\omega^2 EI_\infty} x^2 + q \frac{ca}{\omega^4 EI_\infty} \quad (\text{Gl. 2-43a})$$

$$N_2(x) = D_1 \frac{ca}{\alpha^2} \sinh \Omega x + D_2 \frac{ca}{\alpha^2} \cosh \Omega x - D_3 \frac{6ca}{\omega^2} x - D_4 \frac{2ca}{\omega^2} - D_7 \frac{c}{\omega^2 EA_1} - q \frac{ca}{2\omega^2 EI_\infty} x^2 - q \frac{ca}{\omega^4 EI_\infty} \quad (\text{Gl. 2-43b})$$

2.8. SCHUBFLUSS IN DER FUGE

Aus (Gl. 2-9a) mit (Gl. 2-43a) oder aus (Gl. 2-9b) mit (Gl. 2-43b) ergibt sich der Schubfluss in der Fuge zu

$$T(x) = D_1 \frac{ca\Omega}{\alpha^2} \cosh \Omega x + D_2 \frac{ca\Omega}{\alpha^2} \sinh \Omega x - D_3 \frac{6ac}{\omega^2} - \frac{qacx}{\omega^2 EI_\infty} \quad (\text{Gl. 2-44})$$

Eine Kontrollberechnung mit (Gl. 2-8) und (Gl. 2-35a) führt zum gleichen Ergebnis für $T(x)$.

2.9. TEILMOMENTE UND TEILQUERKRÄFTE

Aus (Gl. 2-1) mit (Gl. 2-35b) folgt für die Teilmomente

$$M_1(x) = -EI_1 \left(D_1 \Omega^2 \sinh \Omega x + D_2 \Omega^2 \cos \Omega x + 6D_3 x + 2D_4 + \frac{qx^2}{2EI_\infty} \right) \quad (\text{Gl. 2-45})$$

$$M_2(x) = -EI_2 \left(D_1 \Omega^2 \sinh \Omega x + D_2 \Omega^2 \cos \Omega x + 6D_3 x + 2D_4 + \frac{qx^2}{2EI_\infty} \right)$$

Aus (Gl. 2-3) mit (Gl. 2-45) und (Gl. 2-44) folgt für die Teilquerkräfte

$$Q_1(x) = D_1 \left(-EI_1 \Omega^2 + \frac{car_1}{\alpha^2} \right) \Omega \cosh \Omega x + D_2 \left(-EI_1 \Omega^2 + \frac{car_1}{\alpha^2} \right) \Omega \sinh \Omega x - 6D_3 \left(EI_1 + \frac{car_1}{\omega^2} \right) - \frac{qx}{EI_\infty} \left(EI_1 + \frac{car_1}{\omega^2} \right) \quad (\text{Gl. 2-46a})$$

$$Q_2(x) = D_1 \left(-EI_2 \Omega^2 + \frac{car_2}{\alpha^2} \right) \Omega \cosh \Omega x + D_2 \left(-EI_2 \Omega^2 + \frac{car_2}{\alpha^2} \right) \Omega \sinh \Omega x - 6D_3 \left(EI_2 + \frac{car_2}{\omega^2} \right) - \frac{qx}{EI_\infty} \left(EI_2 + \frac{car_2}{\omega^2} \right) \quad (\text{Gl. 2-46b})$$

2.10. GESAMTSCHNITTGRÖßEN

Setzt man in (Gl. 2-5a) die Teilschnittgrößen (Gl. 2-45) und (Gl. 2-43) ein, so ergibt sich das Gesamtmoment um SP_{ges} zu

$$M_{ges}(x) = -D_3 6x EI_\infty - D_4 2EI_\infty + D_7 \left(\frac{ca_1}{\omega^2 EA_2} - \frac{ca_2}{\omega^2 EA_1} \right) - \frac{qx^2}{2} - \frac{q\alpha^2}{\omega^2} \quad (\text{Gl. 2-47})$$

Setzt man in (Gl. 2-5b) die Gleichung (Gl. 2-47) ein, so ergibt sich

$$Q_{ges}(x) = -D_3 6EI_\infty - qx \quad (\text{Gl. 2-48})$$

Das Ergebnis kann kontrolliert werden, indem die Gleichung (Gl. 2-5c) in die Gleichungen (Gl. 2-46) einsetzt. Das Ergebnis ist identisch.

Die Gesamtnormalkraft ergibt sich mit (Gl. 2-5d) und (Gl. 2-43) zu

$$N_{ges}(x) = -D_7 \quad (\text{Gl. 2-49})$$

2.11. RANDBEDINGUNGEN

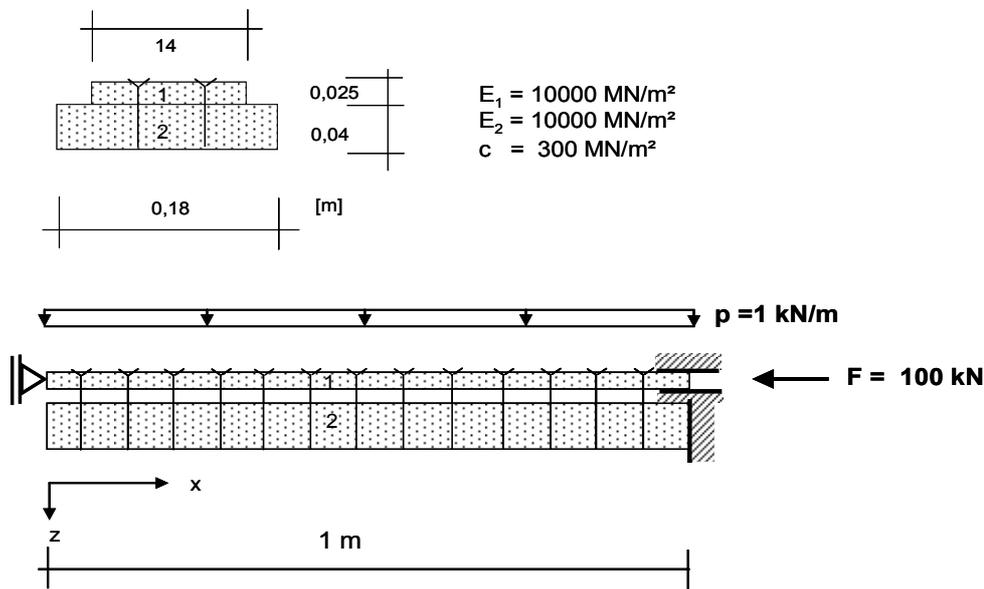
Entsprechend der Anzahl der Integrationskonstanten D_1 - D_8 müssen zur Anpassung der allgemeinen Lösung an die konkreten Lagerungsbedingungen 8 Randbedingungen formuliert werden.

Wie auch in [Sta74] gezeigt, können sämtliche Randbedingungen über die Verformungsgrößen $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w(x)$ bzw. über die Schnittgrößen $N_{ges}(x)$, $Q_{ges}(x)$, $M_{ges}(x)$, $N_1(x)$, $N_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$, $T(x)$ beschrieben werden. Es ist darauf zu achten, dass voneinander unabhängige Randbedingungen aufgestellt werden, da andernfalls keine eindeutige Lösung ermittelt werden kann. So sind z.B. die Teilmomente M_1 und M_2 durch w miteinander gekoppelt (Gl. 2-1) und damit voneinander abhängig. Ein anderes Beispiel für gekoppelte Größen ergibt sich aus (Gl. 2-5a). Die Randbedingung $M_{1/2}(x)=0$, $N_1(x)=0$ und $M_{ges}(x)=0$ ergibt automatisch die Aussage $N_2(x)=0$. $N_2(x)=0$ ist somit eine abhängige Randbedingung und ergibt keine neue Aussage.

Für spezielle Lagerungsarten sind Angaben über die dazugehörigen Randbedingungen in [Schu86/Sta74] zu finden.

2.12. BEISPIEL

Um die Lösung und das praktische Vorgehen anschaulich darzustellen, wird die Theorie an folgendem Beispiel vorgestellt. Die Berechnung und die Herleitung der Zustandgrößen (Gl. 2-26) - (Gl.2-49) wird mit dem Mathematik-Programm Maple durchgeführt. Die Ausdrücke finden sich im Anhang A.



Randbedingungen:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| I) $Q_{ges}(x=0) = 0$ | V) $w(x=1) = 0$ |
| II) $M_1(x=0) = 0$ | VI) $w'(x=1) = 0$ |
| III) $u_1(x=0) = 0$ | VII) $N_1(x=1) = -0,1$ |
| IV) $N_2(x=0) = 0$ | VIII) $u_2(x=1) = 0$ |

Abb. 2-4: Beispiel Differentialgleichungsmethode

Das in Abb. 2-4 dargestellte Beispiel besitzt folgende Geometrieparameter:

$$EA_1 = 35MN$$

$$EA_2 = 72MN$$

$$EI_1 = 0,00182MNm^2$$

$$EI_2 = 0,00960MNm^2$$

$$a_1 = 0,02187m$$

$$a_2 = 0,01142m$$

Mit (Gl. 2-10) bis (Gl. 2-16) folgt

$$B_{St} = 0,02488 \text{ MNm}^2$$

$$EI_1 + EI_2 = 0,01142 \text{ MNm}^2$$

$$EI_\infty = 0,03630 \text{ MNm}^2$$

$$\alpha = 0,827 \text{ [-]}$$

$$\omega = 3,569 \text{ m}^{-1}$$

$$\Omega = 6,362 \text{ m}^{-1}$$

$$\varepsilon_F = 6,362 \text{ [-]}$$

Das Beispiel besitzt die Randbedingungen I) bis VIII), die in die nachfolgend aufgeführten Gleichungen eingehen:

$$I) \quad Q_{ges}(x=0) = 0 \quad \text{aus (Gl. 2-48)}$$

$$II) \quad M_1(x=0) = 0 \quad \text{aus (Gl. 2-45a)}$$

$$III) \quad u_1(x=0) = 0 \quad \text{aus (Gl. 2-41a)}$$

$$IV) \quad N_2(x=0) = 0 \quad \text{aus (Gl. 2-43b)}$$

$$V) \quad w(x=1) = 0 \quad \text{aus (Gl. 2-35)}$$

$$VI) \quad w'(x=1) = 0 \quad \text{aus (Gl. 2-35)}$$

$$VII) \quad N_1(x=1) = -0,1 \quad \text{aus (Gl. 2-43a)}$$

$$VIII) \quad u_2(x=1) = 0 \quad \text{aus (Gl. 2-41b)}$$

Damit ergibt sich ein Gleichungssystem zu

$$\begin{array}{l}
 I) \\
 II) \\
 III) \\
 IV) \\
 V) \\
 VI) \\
 VII) \\
 VIII)
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 -0,6 \cdot 10^{-8} & 0 & -0,2178 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0,0738 & 0 & -0,0036 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,0639 & 0 & 0,0103 & 0 & 0,0219 & 0 & 0 & -0,0093 \\
 0 & 14,2271 & 0 & -1,5308 & 0 & 0 & -0,6728 & 0 \\
 289,7772 & 289,7789 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1843,649 & 1843,638 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -4122,692 & -4122,718 & 4,5925 & 1,5308 & 0 & 0 & -0,3271 & 0 \\
 8,9999 & 8,9998 & -0,0369 & -0,0212 & -0,0106 & 0 & -0,0093 & -0,0093
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 D_1 \\
 D_2 \\
 D_3 \\
 D_4 \\
 D_5 \\
 D_6 \\
 D_7 \\
 D_8
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -1,66 \cdot 10^{-3} \\
 1,14 \cdot 10^{-3} \\
 4,59 \cdot 10^{-3} \\
 1,21 \cdot 10^{-3} \\
 7,18 \cdot 10^{-5}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -0,1 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= -0,00079 \\
 D_2 &= +0,00081 \\
 D_3 &= +0,00000 \\
 D_4 &= -0,01636 \\
 D_5 &= -0,00326 \\
 D_6 &= +0,01353 \\
 D_7 &= +0,05183 \\
 D_8 &= +0,00221
 \end{aligned}$$

Die Lösung in (Gl. 2-35b) eingesetzt ergibt für die Biegelinie $w(x)$

$$w(x) = -0,00079 \sinh(6,36x) + 0,00081 \cosh(6,36x) - 0,01636x^2 - 0,00325x + 0,01353 + 0,00115x^4$$

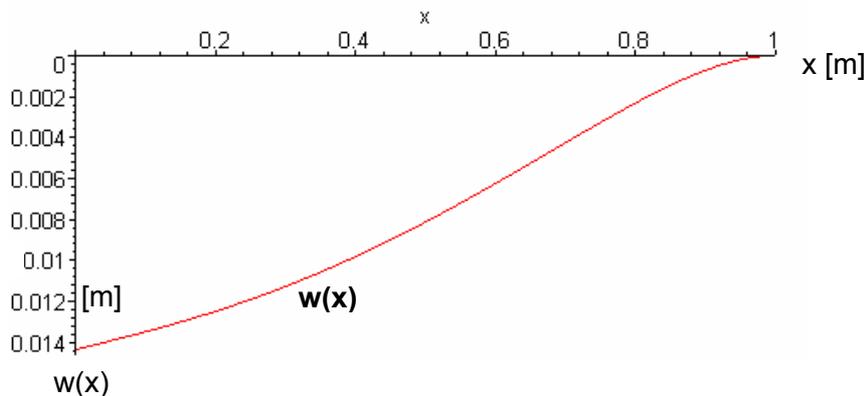


Abb. 2-5: Durchbiegung $w(x)$

und in (Gl. 2-41) für die Längsverschiebungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$

$$u_1(x) = 5,05 \cdot 10^{-5} \cosh(6,36x) - 5,05 \cdot 10^{-5} \sinh(6,36x) - 5,05 \cdot 10^{-5} - 0,00115x + 0,00010x^3$$

$$u_2(x) = -2,46 \cdot 10^{-5} \cosh(6,36x) - 2,51 \cdot 10^{-5} \sinh(6,36x) + 5,53 \cdot 10^{-4} - 0,00160x + 0,00005x^3$$

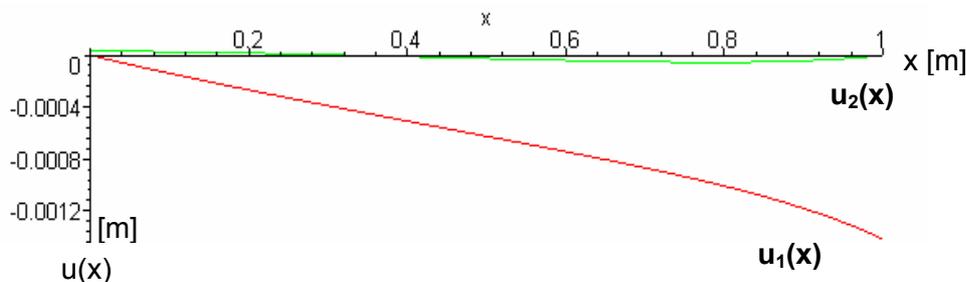


Abb. 2-6: Längsverschiebungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$

Es ergibt sich für die Normalkräfte mit (Gl. 2-43) und (Gl. 2-49)

$$N_1(x) = 0,01126 \sinh(6,36x) - 0,01150 \cosh(6,36x) + 0,04034 + 0,01054x^2$$

$$N_2(x) = -0,01126 \sinh(6,36x) + 0,01150 \cosh(6,36x) - 0,01150 - 0,01054x^2$$

$$N_{ges}(x) = -0,0518$$

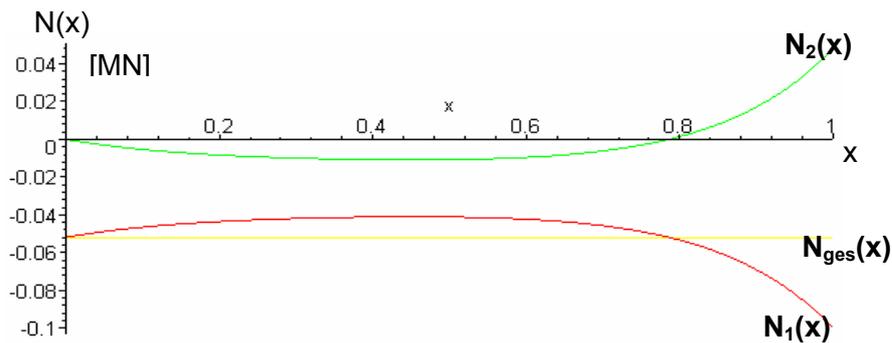


Abb. 2-7: Normalkräfte $N_1(x)$, $N_2(x)$ und $N_{ges}(x)$

und mit (Gl. 2-44) für den Schubfluss

$$T(x) = -0,07160 \cosh(6,36x) + 0,07315 \sinh(6,36x) - 0,02108x$$

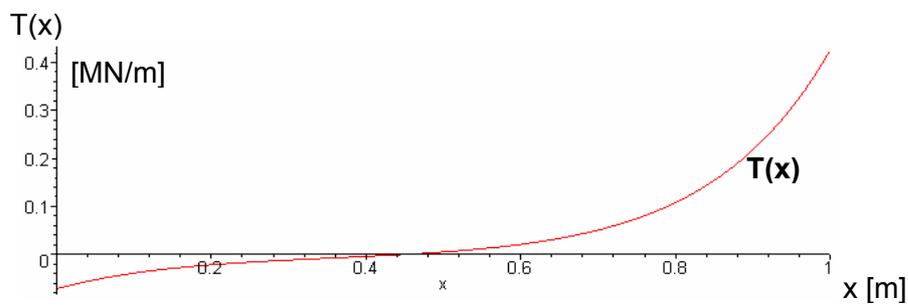


Abb. 2-8: Schubfluss $T(x)$ in der Fuge

und für die Teilmomente nach (Gl. 2-45) und das Gesamtmoment nach (Gl. 2-47)

$$M_1(x) = 5,83 \cdot 10^{-5} \sinh(6,36x) - 5,96 \cdot 10^{-5} \cosh(6,36x) + 5,96 \cdot 10^{-5} - 2,51 \cdot 10^{-5} x^2$$

$$M_2(x) = 30,74 \cdot 10^{-5} \sinh(6,36x) - 30,14 \cdot 10^{-5} \cosh(6,36x) + 31,40 \cdot 10^{-5} - 13,22 \cdot 10^{-5} x^2$$

$$M_{ges}(x) = 0,00113 - 0,00050x^2$$

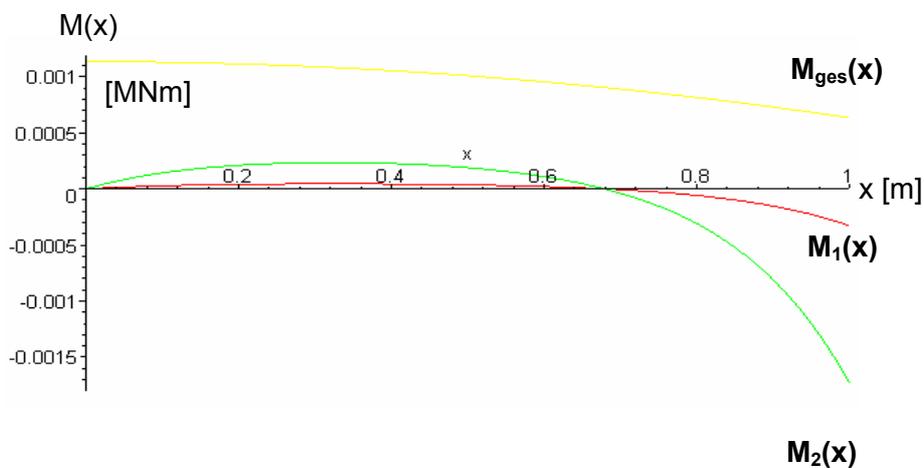
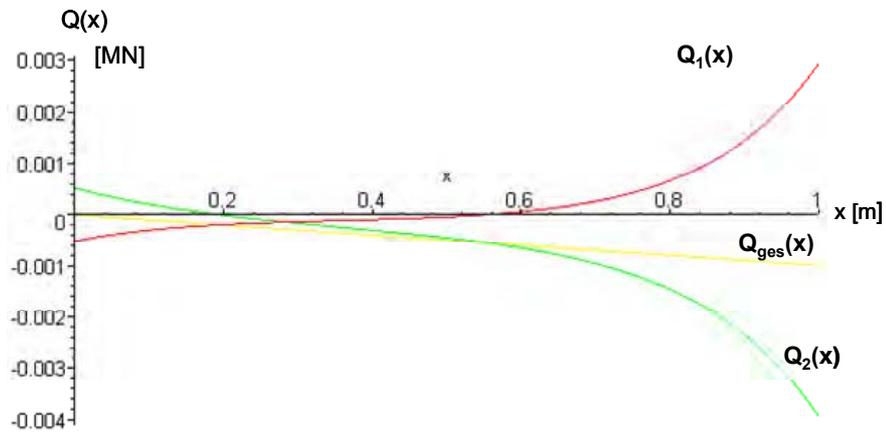


Abb. 2-9: Biegemomente $M_1(x)$, $M_2(x)$ und $M_{ges}(x)$

Setzt man die Lösung in (Gl. 2-46) und (Gl. 2-48) ein, so erhält man für die Teilquerkräfte und die Gesamtquerkraft



$$Q_1(x) = +0,00053 \sinh(6,36x) - 0,00052 \cosh(6,36x) - 0,00031x$$

$$Q_2(x) = -0,00052 \sinh(6,36x) + 0,00053 \cosh(6,36x) - 0,00069x$$

$$Q_{ges}(x) = -0,00010x$$

Abb. 2-10: Querkräfte $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ und $Q_{ges}(x)$

KAPITEL 3

RÄUMLICHE FINITE STABELEMEN TE FÜR MEHRTEILIGE NACHGIEBIGE VERBUNDQUERSCHNITTE

3.1 FINITE-ELEMENTE-METHODE

Für beliebige statische Systeme aus mehrteiligen nachgiebigen Verbundquerschnitten sind geschlossene, analytische Lösungen nicht bekannt (Kapitel 1). Als Alternative zu einer analytischen Lösung bieten sich numerische Lösungsverfahren an. Im Ingenieurwesen hat sich die Finite-Elemente-Methode (FEM) als flexibles und leistungsfähiges Werkzeug für Probleme der Strukturmechanik durchgesetzt. Mit ihrer Hilfe können Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen von einzelnen Bauteilen oder kompletten Tragwerken berechnet werden. Der Name „finite element method“ wurde erstmals 1960 verwendet. Ihre Begründer waren neben anderen R. Clough, O. Zienkiewicz und J. Argyris [Har02]. Die Grundidee der FEM existiert allerdings schon viel länger.

Die FEM ist ein computerorientiertes, numerisches Berechnungsverfahren und kommt bei zahlreichen physikalischen Problemstellungen zum Einsatz [Thi96]. Neben der Strukturmechanik sind weitere Anwendungsgebiete der FEM: Strömungsmechanik, Wärmeleitung, Magnetismus, Akustik. Die FEM wurde von Ingenieuren aufgestellt. Während anfangs noch empirisch gearbeitet wurde, folgte später auch die mathematische Herleitung der FEM. Ihre Vorteile sind eine sehr hohe Anschaulichkeit, gute Anpassungsmöglichkeiten an Tragwerksform, Materialeigenschaften, Belastungs- und Auflagerbedingungen sowie eine leichte Algorithmierung. Ihr Einsatz spart Planungszeit und ermöglicht die Konstruktion vorher nicht berechenbarer Tragwerke.

Hinter der FEM steht die Grundidee, das mechanische Modell (statische System) in hinreichend viele kleine, geometrisch einfache Elemente endlicher Größe (Finite Elemente) zu unterteilen. Die Elemente werden an Berechnungsknoten miteinander gekoppelt. Diese Zerlegung des mechanischen Modells nennt man Diskretisierung. Das Verhalten der einzelnen Finiten Elemente wird durch geeignete, dem realen Verhalten möglichst nahe kommende Approximationsfunktionen beschrieben. Die reale Belastung wird durch äquivalente Einzellasten in den Berechnungsknoten ersetzt. Die Finiten Elemente werden unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen, der kinematischen Verträglichkeit und dem Hooke'schen Gesetz zu einem Gesamtsystem zusammengefügt. Mathematische Grundlage der FEM ist unter anderem die Energiemethode. Aus mechanischer Sicht basiert die FEM auf dem Verschiebungsgrößenverfahren. Eine ausführliche Darstellung der FEM, die auch für Leser ohne vertiefte mathematische Kenntnisse geeignet ist, findet sich in [Har02].

Es wurde bereits für eine Vielzahl von Finiten Elementen entwickelt, wie z. B. für monolithische Stäbe, Scheiben, Platten, Schalen oder auch für Kontinua. Für Stäbe aus mehrteiligen nachgiebigen Verbundquerschnitten mit räumlicher Tragwirkung ist kein Finites Element bekannt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die FEM mit zwei neuen Finiten Elementen für räumliche, mehrteilige nachgiebige Verbundstäbe ergänzt. Sie werden im Folgenden als Verbundelemente bezeichnet.

Ein Grundgedanke für die Entwicklung dieser Elemente ist die Implementierung der Elemente in konventionelle FEM-Programme. Bewusst wird auf die Entwicklung eines gesonderten Berechnungsprogramms verzichtet. Stattdessen sollen vorhandene und dem Anwender vertraute Programmsysteme verwendet werden, die um zusätzliche leistungsstarke Verbundelemente erweitert werden. Dadurch soll eine hohe Akzeptanz und Anwenderfreundlichkeit gewährleistet werden. Das Programmsystem Sofistik hat sich hierfür als geeignet herausgestellt. Es ist ein in der Baupraxis weit verbreitetes Programm, dem Autor bekannt, und bietet die Möglichkeit, eigene Finite Elemente zu implementieren. Sofistik stellt hierfür den Eingabesatz FLEX zur Verfügung, mit dem die Eingabe von zusätzlichen Steifigkeitsmatrizen im globalen Koordinatensystem möglich ist.

3.2 MODELL

3.2.1 ANNAHMEN

Es werden folgende Voraussetzungen getroffen:

- Die Länge des Tragwerks dominiert gegenüber den Höhen und Breiten des Querschnitts.
- Innerhalb der Teilquerschnitte gilt die Balkentheorie nach Bernoulli, d.h. die Verformungen aufgrund von Querkraften innerhalb der Teilquerschnitte werden vernachlässigt. Das bedeutet, dass die Teilquerschnitte im deformierten Zustand eben und normal zur Stabachse bleiben. Nach der Bernoulli-Hypothese gilt:

$$\begin{aligned}w'_z(x) &= \varphi_y(x) \\v'_y(x) &= \varphi_z(x)\end{aligned}\tag{Gl. 3-1}$$

- Es gelten physikalisch lineare Materialgesetze für die Teilquerschnitte und für die Längsfugensteifigkeit c .
- Es gilt die Theorie kleiner Verformungen.
- Die Teilstäbe sind gerade und ihr Querschnitt ist konstant über die Stablänge.
- Der Gesamtquerschnitt ist ein mindestens einfach symmetrischer Gesamtquerschnitt (Abb. 3-1), d. h. die z -Achse und y -Achse sind Hauptachsen des Querschnitts [Kin02].
- Geschlossene Querschnittsformen sind nicht vorgesehen.
- Die Material- und Steifigkeitsparameter jedes Teilquerschnitts und für jede Fuge können sich voneinander unterscheiden. Sie werden über die Stablänge als konstant angenommen.
- Es gilt die Torsionstheorie nach St. Venant: Es wird von einem annähernd konstanten Torsionsmoment M_T über die Stablänge und von unbehinderter Verwölbung ausgegangen. Effekte aus Wölbkrafttorsion spielen somit keine Rolle.

- Der Gesamtquerschnitt wird in seiner Ebene als formtreu angenommen, d. h. neben der Formtreue innerhalb der Teilquerschnitte wird von einer starren Kopplung der Querverformungen und der Verdrehungen der Teilquerschnitte ausgegangen.
- Die Längsverschiebungen der verbundenen Teilquerschnitte sind nachgiebig miteinander gekoppelt. Dadurch sind im verformten Zustand in Höhe der Fugen Sprünge im Gesamtquerschnitt zu beobachten. Der Grund hierfür sind Relativverschiebungen der Teilquerschnitte in Längsrichtung.

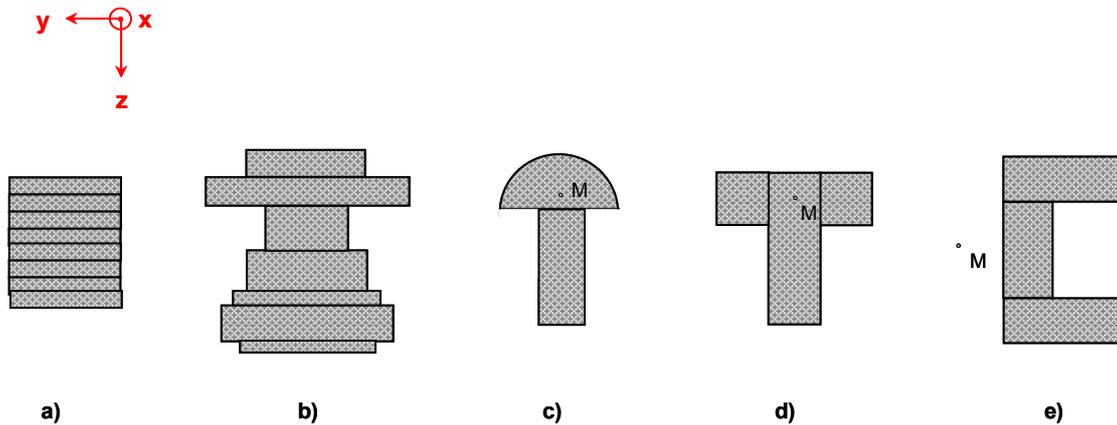


Abb. 3-1: Mögliche Verbundquerschnitte

3.2.2 BEZUGSSYSTEME

Für die Verbundelemente werden lokale Bezugsachsen definiert (Abb. 3-2). In jedem Teilquerschnitt i wird ein Koordinatensystem festgelegt. Die x -Achse x_i ist deckungsgleich mit dem geometrischen Teilschwerpunkt S_i . Senkrecht darauf steht die y - z -Querschnittsebene. Die Richtungen der y -Achsen und z -Achsen der Teilquerschnitte sind gleichgerichtet. Ein weiterer Bezugspunkt des Querschnitts ist der Schubmittelpunkt M des Gesamtquerschnitts. Seine Lage kann im Bezug zu einem beliebigen Punkt des Querschnitts beschrieben werden. Empfehlenswert ist die Lage von M im Koordinatensystem eines Teilstabes i mit den Koordinaten y_{Mi} und z_{Mi} zu beschreiben. Auf die Ermittlung von M wird im gesonderten Kapitel 3.9 eingegangen.

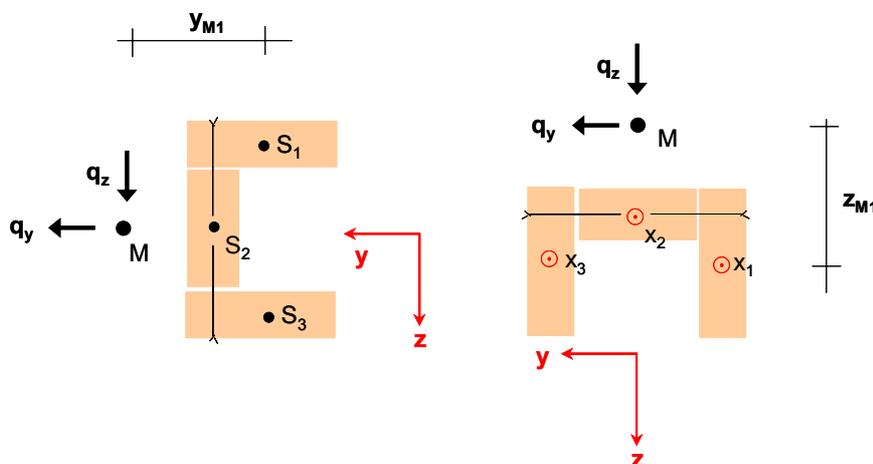


Abb. 3-2: Bezugsachsen des Verbundquerschnitts und Angriffspunkte der Querlasten

Um die Dehnung, Biegung und Torsion zu entkoppeln, ist zwingend erforderlich [Kin02]

- die Dehnungen der Teilquerschnitte i auf ihre Teilschwerachsen S_i ,
- die Biegung auf die Richtung der Hauptachsen y und z ,
- die Torsion und die Gesamtquerkräfte auf den Schubmittelpunkt M

zu beziehen.

Würde man ein beliebiges Bezugssystem zulassen, wären Dehnung, Biegung und Torsion miteinander gekoppelt [Ram96].

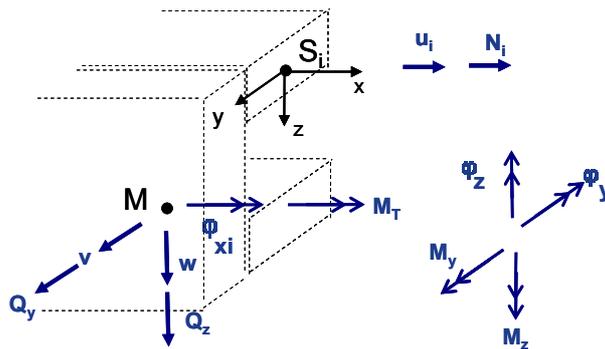


Abb. 3-3: Schnittgrößen am positiven Schnittufer und Definition der Verformungsgrößen

3.2.3 SCHNITT-, VERFORMUNGS- UND LASTGRÖßEN

Konkret bedeutet das für die Schnittgrößen am positiven Schnittufer (Abb. 3-3):

- die Teilnormalkraft N_i bezieht sich auf und in Richtung der x_i -Achse des Teilquerschnitts i .
- die Biegemomente M_y und M_z drehen um die z - und y -Achse im Uhrzeigersinn.
- das Torsionsmoment M_T und die Gesamtquerkräfte Q_y und Q_z wirken im Schubmittelpunkt M und zeigen in die jeweilige Achsrichtung.

Für die Verschiebungsgrößen bedeutet dies:

- Die Längsverschiebung u_i in jedem Teilquerschnitt i bezieht sich auf und in Richtung der x -Achse des Teilquerschnitts i .
- Die Verdrehung ϕ_y dreht um die y -Achse *entgegen dem Uhrzeigersinn (per Definition)*. Die Verdrehung ϕ_z dreht im Uhrzeigersinn um die z -Achse.
- Die Verdrehung ϕ_x und die Querverschiebungen v_y und w_z sind Verformungsgrößen des Schubmittelpunkts M und sind positiv in Richtung der zugehörigen Achsen definiert.

Die Richtung der Lastgrößen und ihrer Angriffspunkte ist den entsprechenden Schnittgrößen analog anzusetzen. Längslasten n_{xi} in x -Richtung sind gezielt in einen Teilquerschnitt i in den Teilschwerpunkt S_i einzuleiten. Gegebenenfalls sind die Längslasten auf die Teilquerschnitte im Verhältnis ihrer Dehnsteifigkeiten aufzuteilen.

Linienbiegemomente m_y bzw. m_z drehen um die y -Achse bzw. um die z -Achse. Ein Linientorsionsmoment m_t dreht um die x -Achse des Schubmittelpunkts M . Querstreckenlasten q_y und q_z sind im Schubmittelpunkt M in den Querschnitt einzuleiten. Nur dadurch wird ein ungewolltes, zusätzliches Torsionsmoment durch die Querlasten vermieden.

Lasten, die nicht in S_i oder in M angreifen bzw. Momentlasten, deren Wirkungsrichtung nicht mit den Richtungen der Hauptachsen übereinstimmen, sind ggf. zu transformieren. Erst dann können die Lasten in oben angegebener Weise in den Querschnitt eingeleitet werden.

Der Verbundstab mit seinen Schnitt-, Verformungs- und Lastgrößen kann beliebig in einem globalen, räumlichen Koordinatensystem liegen.

3.2.4 STEIFIGKEITEN

In das Modell gehen zunächst die Eigensteifigkeiten der Teilquerschnitte ein. Das sind für jeden Teilquerschnitt i die Dehnsteifigkeit EA_i , die Biegesteifigkeit um die y -Achse EI_{y_i} (Hauptbiegung), die Biegesteifigkeit um die z -Achse EI_{z_i} (Nebenbiegung) und die Torsionssteifigkeit GI_{T_i} . Nach den Voraussetzungen gilt in den Teilquerschnitten die Stabtheorie nach Bernoulli. Die Schubsteifigkeiten gehen daher nicht in das Modell ein.

Die Fuge zwischen den Teilquerschnitten i und $i+1$ wird mit $i/i+1$ bezeichnet. Ihre Nachgiebigkeit ist abhängig von der Fugensteifigkeit $c_{i/i+1}$. Darüber hinaus wird die Fuge charakterisiert durch die Abstände $a_{z_{i/i+1}}$ bzw. $a_{y_{i/i+1}}$ der Schwerpunkte von i und $i+1$ in z -Richtung bzw. in y -Richtung. Genauer gesagt, sind $a_{z_{i/i+1}}$ bzw. $a_{y_{i/i+1}}$ die Koordinaten des Schwerpunkts von $i+1$ im Koordinatensystem des Teilquerschnitts i . Die Abstände $a_{z_{i/i+1}}$ und $a_{y_{i/i+1}}$ können somit auch negative Werte annehmen.

Mechanische Verbindungsmittel im Ingenieurholzbau verbinden die Querschnitte punktuell. In der Literatur [Hol91] oder in der DIN 1052 [DIN04] werden Angaben über die Federsteifigkeit C [kN/m] auf Abscheren eines einzelnen, mechanischen Verbindungsmittels gemacht. Aus dem gewählten effektiven Abstand e der Verbindungsmittel in Längsrichtung lässt sich nach (Gl. 1-1) eine über die Stablänge gleichmäßig verteilte Fugensteifigkeit c [(kN/m)/m] errechnen. Für die Fugensteifigkeiten c einer schubweichen Zwischenschicht gilt (Gl. 1-4).

Werden die Teilstäbe pro Fuge durch zwei oder mehrere Verbindungsmittelreihen verbunden, so besitzt der Gesamtquerschnitt neben den Eigentorsionssteifigkeiten GI_{T_i} der Teilstäbe eine Verbundtorsionssteifigkeit $GI_{T_{\text{Verbund}}}$ aus der Verbundwirkung. Werden die Fugen nur mit einer Verbindungsmittelreihe ausgeführt, so hat der Verbund keinen Einfluss auf die Torsionssteifigkeit. Darauf wird gesondert im Kapitel 5 näher eingegangen.

Es wird von einer starren Querkopplung der Teilstäbe ausgegangen. Als Folge stellen sich gemeinsame Querverschiebungen w_z bzw. w_y und Verdrehungen φ_x , φ_y , φ_z der Teilquerschnitte ein.

Die Relativverschiebung $\delta_{i/i+1}(x)$ in der Fuge zwischen den Teilquerschnitten i und $i+1$ errechnet sich bei räumlicher Tragwirkung in der xz -Ebene nach Abb. 3-4 aus

$$\delta_{i/i+1}(x) = u_{i+1}(x) - u_i(x) + w'_z(x) \cdot a_{z_{i+1/i}} + v'_y(x) \cdot a_{y_{i+1/i}} \quad (\text{Gl. 3-2})$$

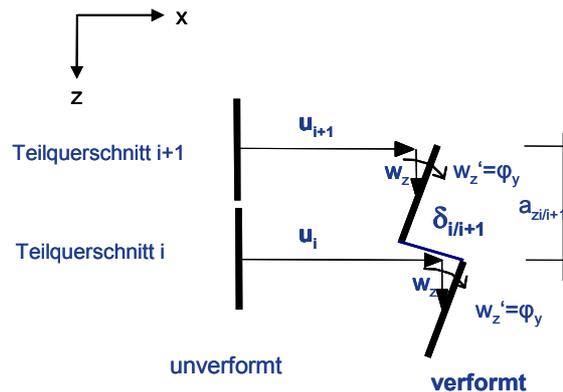


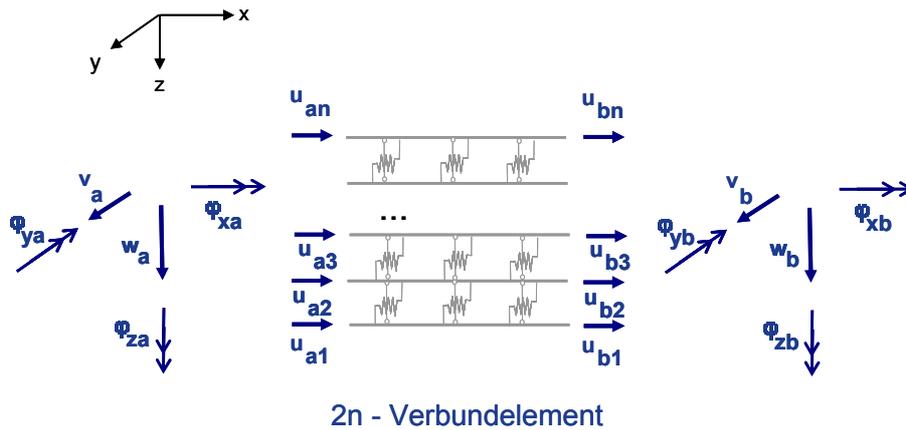
Abb 3-4: Verformungsverhalten der Fuge in der xz-Ebene

3.3 UMSETZUNG IN FINITE ELEMENTE

Auf Grundlage des beschriebenen statischen Modells wurden zwei räumliche Finite Elemente entwickelt: ein Element mit $2n+10$ Freiheitsgraden ($2n$ -Verbundelement) (Abb. 3-5) bzw. ein Element mit $3n+10$ Freiheitsgraden ($3n$ -Verbundelement) (Abb. 3-6). n ist die Anzahl der Teilstäbe.

Beide Verbundelemente besitzen am Elementanfang (Knoten a) und am Elementende (Knoten b) zunächst jeweils fünf Freiheitsgrade. Das sind Freiheitsgrade der Querverschiebungen w_{za} , v_{ya} , w_{zb} , v_{yb} und Freiheitsgrade für die Verdrehungen φ_{xa} , φ_{ya} , φ_{za} , φ_{xb} , φ_{yb} , φ_{zb} . Bis hier unterscheiden sich die Verbundelemente nicht von einem Finiten Stabelement für monolithische Querschnitte nach Bernoulli. Der Unterschied liegt in der individuellen Beschreibung der Längsverschiebungen, individuell für jeden der n Teilquerschnitte. Am $2n$ -Verbundelement wird an jedem Teilquerschnitt i am Anfang a bzw. am Ende b ein Längsverschiebungsfreiheitsgrad u_{ai} bzw. u_{bi} definiert.

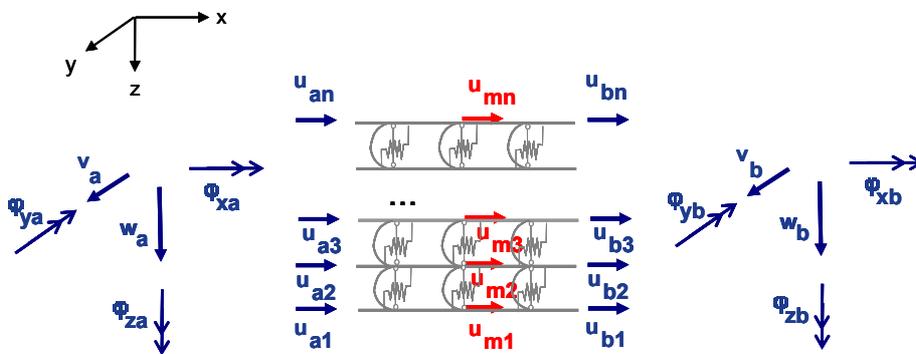
Am $3n$ -Verbundelement wird zusätzlich in der Mitte eines jeden Teilquerschnitts i ein numerischer Mittelknoten m_i mit einem Längsverschiebungsfreiheitsgrad u_{mi} eingeführt. Durch diese zusätzliche Stützstelle wird der Verlauf der Längsverschiebung besser beschrieben.



2n - Verbundelement

Abb 3-5: 2n-Verbundelement, Freiheitsgrade nur am Rand

An den Freiheitsgraden treten die korrespondierenden Schnittgrößen Q_{za} , Q_{ya} , M_{Ta} , M_{ya} , M_{za} , N_{ia} am Elementanfang a und Q_{zb} , Q_{yb} , M_{Tb} , M_{yb} , M_{zb} , N_{ib} am Elementende b auf.



3n - Verbundelement

Abb. 3-6: 3n-Verbundelement, Freiheitsgrade am Elementrand und in Elementmitte

Der Kern eines jeden Finiten Elements ist die Steifigkeitsmatrix K , welche die Schnittgrößen p_L der Knoten mit den Verformungsgrößen v_L der Knoten in Beziehung setzt. Die Größen sind lokale Größen im lokalen Koordinatensystem des Elements und werden daher zur Unterscheidung mit globalen Größen im globalen Koordinatensystem mit dem Index L versehen. Teil der Beziehung ist der Lastvektor p_0 der Elementlasten. Er hat ebenfalls lokalen Charakter. Dies sind Lasten, die innerhalb des Elements angreifen. Es gilt:

$$\vec{p}_L^{-3n} = K^{3n} \vec{v}_L^{-3n} + \vec{p}_0^{-3n} \tag{Gl. 3-4}$$

Der Vektor der Knotenschnittgrößen p_L des 2n-Verbundelements bzw. des 3n-Verbundelements lautet:

$$\vec{p}_L^{-2n} = [Q_{za} \quad M_{ya} \quad Q_{zb} \quad M_{yb} \mid Q_{ya} \quad M_{za} \quad Q_{yb} \quad M_{zb} \mid M_{xa} \quad M_{xb} \mid N_{a1} \quad N_{b1} \quad \dots \quad N_{an} \quad N_{bn}]^T$$

$$\vec{p}_L^{-3n} = [Q_{za} \quad M_{ya} \quad Q_{zb} \quad M_{yb} \mid Q_{ya} \quad M_{za} \quad Q_{yb} \quad M_{zb} \mid M_{xa} \quad M_{xb} \mid N_{a1} \quad N_{m1} \quad N_{b1} \quad \dots \quad N_{an} \quad N_{mn} \quad N_{bn}]^T \tag{Gl. 3-5a}$$

Der Vektor der Verformungsgrößen v_L des 2n-Verbundelements bzw. des 3n-Verbundelements lautet:

$$\begin{aligned} \bar{v}_L^{-2n} &= \left[w_{za} \quad \varphi_{ya} \quad w_{zb} \quad \varphi_{yb} \mid v_{ya} \quad \varphi_{za} \quad v_{yb} \quad \varphi_{zb} \mid \varphi_{xa} \quad \varphi_{xb} \mid u_{a1} \quad u_{b1} \quad \dots \quad u_{an} \quad u_{bn} \right]^T \\ \bar{v}_L^{-3n} &= \left[w_{za} \quad \varphi_{ya} \quad w_{zb} \quad \varphi_{yb} \mid v_{ya} \quad \varphi_{za} \quad v_{yb} \quad \varphi_{zb} \mid \varphi_{xa} \quad \varphi_{xb} \mid u_{a1} \quad u_{m1} \quad u_{b1} \quad \dots \quad u_{an} \quad u_{mn} \quad u_{bn} \right]^T \end{aligned} \tag{Gl. 3-5b}$$

Der Elementlastvektor des 2n-Verbundelements bzw. des 3n-Verbundelements lautet:

$$\begin{aligned} \bar{p}_0^{-2n} &= \left[Q_{za}^0 \quad M_{ya}^0 \quad Q_{zb}^0 \quad M_{yb}^0 \mid Q_{ya}^0 \quad M_{za}^0 \quad Q_{yb}^0 \quad M_{zb}^0 \mid M_{xa}^0 \quad M_{xb}^0 \mid N_{a1}^0 \quad N_{b1}^0 \quad \dots \quad N_{an}^0 \quad N_{bn}^0 \right]^T \\ \bar{p}_0^{-3n} &= \left[Q_{za}^0 \quad M_{ya}^0 \quad Q_{zb}^0 \quad M_{yb}^0 \mid Q_{ya}^0 \quad M_{za}^0 \quad Q_{yb}^0 \quad M_{zb}^0 \mid M_{xa}^0 \quad M_{xb}^0 \mid N_{a1}^0 \quad N_{m1}^0 \quad N_{b1}^0 \quad \dots \quad N_{an}^0 \quad N_{mn}^0 \quad N_{bn}^0 \right]^T \end{aligned} \tag{Gl. 3-5c}$$

3.4 STEIFIGKEITSBEZIEHUNG

Es wird zunächst die Steifigkeitsmatrix für die ebene Tragwirkung vorgestellt. Anschließend wird auf die räumliche Steifigkeitsmatrix eingegangen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Steifigkeitsmatrix eines Finiten Elements herzuleiten. Meist verwendet man Methoden, die auf unbekanntem Verschiebungsgrößen basieren. Grundlage hierfür ist das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, das aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotenzials hervorgeht [Krä97].

Jedes Finite Element besitzt potenzielle Energie oder kurz ein Potenzial Π . Es setzt sich zusammen aus dem inneren Potenzial Π_{in} und dem äußeren Potenzial Π_a :

$$\Pi = \Pi_{in} + \Pi_a \tag{Gl. 3-6}$$

3.4.1 EBENE TRAGWIRKUNG

Die Mehrzahl der statischen Systeme in der Baupraxis sind ebene Systeme mit mindestens einfach symmetrischen Querschnitten, die nur in ihrer Ebene belastet werden. Daher wird zunächst auf die ebene Tragwirkung eingegangen und ihre Steifigkeitsmatrix hergeleitet. Als Ebene wird hierfür die xz-Ebene gewählt.

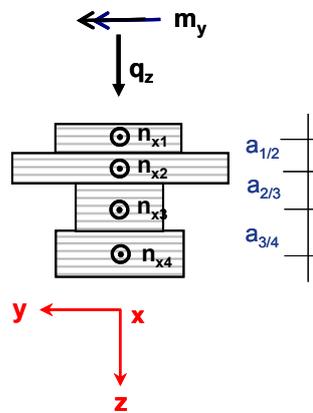


Abb. 3-7: ebenes System, Querschnitt und Belastung in der xz-Ebene

Das Tragwerk wird nur in seiner Ebene mit q_z , m_y und n_{xi} belastet (Abb. 3-7). Es treten dadurch nur die Verformungsgrößen u_i , w_z und φ_y und die korrespondierenden Schnittgrößen N_i , Q_z , M_y auf. Der Schubmittelpunkt M liegt bei symmetrischen Querschnitten in der Systemebene, sodass keine Torsionsmomente auftreten.

Äußeres Potenzial

Die Knotenschnittgrößen an den Freiheitsgraden bilden nach dem Schnittprinzip eine Gleichgewichtsgruppe, die als äußere Belastung des Finiten Elements angesehen wird. Es ergibt sich daraus für das $2n$ -Verbundelement das äußere Potenzial Π_a

$$\Pi_a^{2n} = -\sum_{i=1}^n N_{ia} u_{ia} - Q_{za} w_a - M_{ya} \varphi_{ya} - \sum_{i=1}^n N_{ib} u_{ib} - Q_{zb} w_b - M_{yb} \varphi_{yb} \quad (\text{Gl. 3-7a})$$

und für das $3n$ -Verbundelement

$$\Pi_a^{3n} = \Pi_a^{2n} - \sum_{i=1}^n N_{im} u_{im} \quad (\text{Gl. 3-7b})$$

Inneres Potenzial

Als Reaktion auf die äußeren Lasten werden im Inneren des Elements Verformungen hervorgerufen. Sie besitzen ein inneres Potenzial Π_{in} . Für einen n -teiligen nachgiebigen Verbundquerschnitt setzt sich dieses zusammen aus den inneren Potenzialen der n Teilstäbe [Thi96] mit

$$\Pi_{in} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{x=0}^l (EA_i u_i'(x)^2 + EI_{zi} w_z''(x)^2) dx + \quad (\text{Gl. 3-8a})$$

und dem inneren Potenzial der Fugen mit (Gl. 3-3)

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{x=0}^l c_{i/i+1} (u_{i+1}(x) - u_i(x) + w_z'(x) a_{i/i+1})^2 dx \quad (\text{Gl. 3-8b})$$

Bei Berechnung nach Theorie II. Ordnung am verformten System ist noch folgendes inneres Potenzial zu addieren [Thi96]:

$$\Pi_{in}^{II.O} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l N_{ges} w_z'(x)^2 dx \quad (\text{Gl. 3-8c})$$

N_{ges} ist die Normalkraft im Gesamtstab (Summe der Normalkräfte N_i der Teilstäbe i). Die Normalkraft N_{ges} ist vorab abzuschätzen oder nach Theorie I. Ordnung zu berechnen. Aufgrund des einheitlichen $w_z'(x)$ -Verlaufs im Gesamtquerschnitt ist für die Berechnung des Potentials (Gl. 3-8c) nur die Summe der Normalkräfte im Gesamtquerschnitt N_{ges} von Bedeutung. Für N_{ges} wird näherungsweise die mittlere Normalkraft im Stab angesetzt (Gl. 3-90).

Verschiebungsansätze

Eine Steifigkeitsmatrix ist nur dann exakt, wenn man die exakten Verschiebungsverläufe in die Potenzialgleichungen (Gl. 3-6) bis (Gl. 3-8) einsetzt [Har02]. Bei Problemen der technischen Mechanik werden in der Regel die homogenen Lösungen der zugehörigen Differenzial-

gleichungen verwendet. Diese stehen für Systeme aus mehrteiligen nachgiebigen Verbundquerschnitten nicht zur Verfügung (Kapitel 1). Daher sind geeignete Ansatzfunktionen im Sinne der FEM für die unbekanntes Verschiebungsverläufe $u_i(x)$ und $w_z(x)$ zu wählen.

Neben dem Bestreben der exakten Lösung möglichst nahe zu kommen, sollen geeignete Verschiebungsansätze mathematisch leicht zu handhaben sein. Insbesondere müssen die Ansätze stetig differenzierbar sein. Grundsätzlich können trigonometrische oder andere Ansätze gewählt werden. Es haben sich aber hierfür in der FEM Polynom-Ansätze bewährt [Har02]. Diese werden auch für die Verbundelemente verwendet.

$$f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n \quad (\text{Gl. 3-10})$$

Der Grad n des Polynomansatzes einer Verschiebung ist abhängig von der Anzahl der die Verschiebung beschreibenden Freiheitsgrade. Ein Polynom n -ten Grades hat $n+1$ unbekannte Koeffizienten $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$. Damit sind $n+1$ Freiheitsgrade notwendig, um das Polynom eindeutig zu beschreiben [Har02].

Nach dem Prinzip vom „Minimum der potenziellen Energie“ stellt sich unter allen kinematisch zulässigen Verformungen diejenige ein, die den kleinsten Wert der potenziellen Energie liefert [Krä97]. Je genauer die Verschiebungsansätze mit der tatsächlichen Verschiebungsfigur übereinstimmen, desto näher befindet man sich am realen Minimum der potenziellen Energie des Systems.

Dieses Minimum findet man, indem man das Gesamtpotenzial Π implizit mit den gewählten Verformungsansätzen variiert und zu null setzt. Es gilt:

$$\partial \Pi = 0 \quad (\text{Gl. 3-11})$$

Ansatz für die Querverschiebung $w_z(x)$

Die Querverschiebung $w_z(x)$ wird durch die vier Freiheitsgrade $w_{za}, \varphi_{ya}, w_{zb}$ und φ_{yb} beschrieben. Vier Freiheitsgrade erfordern einen Polynomansatz 3. Grades (kubisch). Er lautet:

$$w_z(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 \quad (\text{Gl. 3-12})$$

Die Freiheitsgrade sind die Randbedingungen des Polynomansatzes (Gl. 3-12). Damit lassen sich die unbekanntes Koeffizienten ermitteln und es ergibt sich

$$w_z(x) = \left(1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) w_{za} + l \left(\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) \varphi_{ya} \\ + \left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) w_{zb} + l \left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) \varphi_{yb} \quad (\text{Gl. 3-13})$$

Die Gleichung setzt sich zusammen aus den von den vier Freiheitsgraden abhängigen Einheitsverformungen, den so genannten Hermite-Polynomen.

Die Hermite-Polynome werden in der FEM auch als genäherte Einheitsverformungen für quergebettete und gevoutete Stäbe verwendet. Darüber hinaus haben sie sich auch bei der Berechnung von Stäben nach Theorie II. Ordnung etabliert [Har02]. Sie stellen in allen genannten Fällen eine hinreichende Näherung dar, wenn man bestimmte Anwendungsgrenzen beachtet. Für Berechnungen nach Theorie II. Ordnung wird z. B. bei einer Drucknormalkraft N , einer Biegesteifigkeit EI_y und der Elementlänge l die Grenze mit

$$\varepsilon_s = l \sqrt{\frac{N}{EI_y}} \leq 2,5 \quad \text{Stabkennzahl Theorie II. Ordnung} \quad (\text{Gl. 3-14})$$

angegeben [Ram96]. Die Grenze kann immer eingehalten werden, in dem das Tragwerk mit hinreichend kleinen Elementen der Länge l diskretisiert wird. In ähnlicher Weise werden für die Verbundelemente Anwendungsgrenzen im Kapitel 4.4 ermittelt.

Ansatz für die Längsverschiebungen $u_i(x)$ für das $2n$ -Verbundelement

Die neuen Elemente sollen in konventionelle FEM-Programme implementiert werden. Die Programmstruktur basiert auf der Verwendung von Finiten Stabelementen mit Freiheitsgraden nur an den Rändern (Randknoten). Diese werden als Serendipity-Elemente bezeichnet [Har02]. Im Sinne einer leichten Implementierbarkeit erscheint es daher sinnvoll, zunächst ein Element zu entwickeln, das nur Freiheitsgrade an den Rändern besitzt. Dies wird mit dem $2n$ -Verbundelement verwirklicht. Ein Lagrange'scher Polynomansatz ist immer um einen Grad niedriger als die Anzahl der Freiheitsgrade [Har02]. Damit ist die Ansatzfunktion ein Polynom 1. Grades (linear) mit zwei Integrationskonstanten.

$$u(x) = C_4 + C_5 x \quad (\text{Gl. 3-15})$$

Polynomansätze höherer Ordnung würden zusätzliche Stützstellen (Freiheitsgrade) erfordern.

Damit ergeben sich die Einheitsverformungen abhängig von den Freiheitsgraden u_{ai} und u_{bi} aus (Gl. 3-15) mit:

$$u_i(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_{ai} + \left(\frac{x}{l}\right) u_{bi} \quad (\text{Gl. 3-16})$$

Ansatz für die Längsverschiebung $u_i(x)$ für das $3n$ -Verbundelement

Das Tragverhalten von Tragwerken aus nachgiebigen Verbundquerschnitten ist hauptsächlich vom Verformungsverhalten der Fugen geprägt. Es wird beschrieben durch die Relativverschiebung $\delta(x)$ (Gl. 3-2). Sie errechnet sich aus der 1. Ableitung der Querverschiebung $w_z(x)$ und aus der Differenz der Längsverschiebungen $u_{i+1}(x)$ und $u_i(x)$.

Querverschiebung und Längsverschiebung unterscheiden sich in (Gl. 3-2) um einen Ableitungsgrad. Damit die Relativverschiebung $\delta(x)$ durch einen einheitlichen Polynomansatz beschrieben wird, ist der Grad des Polynoms für die Querverschiebung genau um eine Stufe höher zu wählen als für die Längsverschiebung. Der Lösungsraum der Relativverschiebung $\delta(x)$ wird damit nicht künstlich eingeschränkt [Dal04-1]. Das bedeutet, dass bei einem Polynomansatz 3. Grades für $w_z(x)$ (Gl. 3-13) für $u_{i+1}(x)$ und $u_i(x)$ ein Polynomansatz 2. Grades zu wählen ist. Ebenso denkbar wären höhere Ansätze wie z. B. Polynome 4. Grades für $w_z(x)$ und 3. Grades für $u_{i+1}(x)$ und $u_i(x)$. Diese würden die Einführung von zusätzlichen Freiheitsgraden erfordern, was das Element unnötig komplizieren würde.

Geringere Ansätze sind ungeeignet. Ein Polynomansatz 2. Grades wäre ein nicht-konformer Ansatz für $w_z(x)$ [Har02], d. h. er würde einen linearen Verdrehungsverlauf $\varphi_y(x)$ ($=w_z'(x)$) bedeuten, der zu Knicken der Verdrehung an den Elementübergängen führt. Knicke im Verdrehungsverlauf würden unrealistische Fließgelenke darstellen.

Der Polynomansatz 2. Grades für $u(x)$ lautet:

$$u(x) = C_4 + C_5 x + C_6 x^2 \quad (\text{Gl. 3-17})$$

Für die Bestimmung der drei Integrationskonstanten ist die Angabe von drei Randbedingungen (Freiheitsgraden) notwendig. Neben den beiden Freiheitsgraden u_{ai} und u_{bi} ist ein zusätzlicher Freiheitsgrad notwendig. Hierfür wird ein innerer Freiheitsgrad in Elementmitte u_{mi} eingeführt. In der Literatur wird ein Element mit inneren Freiheitsgraden als Lagrange-Element bezeichnet [Har02].

Der Ansatz für die Längsverschiebung $u_i(x)$ wird aus den Lagrange'schen Interpolationspolynomen hergeleitet [Har02]:

$$u_i(x) = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} u_{ai} + \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} u_{mi} + \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} u_{bi} \quad (\text{Gl. 3-18})$$

Setzt man die Koordinaten der Freiheitsgrade mit

$$x_1 = 0 \text{ für } u_{ai}$$

$$x_2 = \frac{l}{2} \text{ für } u_{mi} \text{ und}$$

$$x_3 = l \text{ für } u_{bi}$$

so ergeben sich die quadratischen Einheitsverformungen für die Längsverschiebungen. Der Ansatz ist abhängig von den Freiheitsgraden u_{ai} , u_{mi} und u_{bi} :

$$u_i(x) = \frac{2\left(\frac{l}{2} - x\right)(l - x)}{l^2} u_{ai} + \frac{4x(l - x)}{l^2} u_{mi} - \frac{2x\left(\frac{l}{2} - x\right)}{l^2} u_{bi} \quad (\text{Gl. 3-19})$$

Einsetzen der Ansätze in das Potenzial

Die gewählten Ansatzfunktionen (Gl. 3-13), (Gl. 3-16) bzw. (Gl. 3-19) für die entsprechenden Elemente werden in die Potenzialgleichungen (Gl. 3-6) bis (Gl. 3-9) eingesetzt und nach jedem Freiheitsgrad variiert (Gl. 3-11). Jede Variation ergibt eine Zeile der gesuchten Steifigkeitsmatrix K , die sich aus mehreren Anteilen zusammensetzt. Diese sind die Steifigkeitsmatrizen der n Teilstäbe K_{Si} und der Steifigkeitsmatrizen der $n-1$ verbindenden Fugen $K_{Vi/i+1}$. Letztere stellen den Innovationskern der vorgestellten Lösung dar. Aus dem Potenzial nach Theorie II. Ordnung (Gl. 3-9) ergibt sich die geometrische Steifigkeitsmatrix K_{II} . Es gilt:

$$K = \sum_{i=1}^n K_{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} K_{Vi/i+1} + K_{II} \quad (\text{Gl. 3-20})$$

2n-Verbundelement

Die Steifigkeitsmatrix K_{Si} eines Teilstabes i beim 2n-Verbundelement lautet:

$$\begin{bmatrix} Q_{za}^{Si} \\ M_{ya}^{Si} \\ Q_{zb}^{Si} \\ M_{yb}^{Si} \\ \hline N_{ai}^{Si} \\ N_{bi}^{Si} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 \frac{EI_i}{l^3} & 6 \frac{EI_i}{l^2} & -12 \frac{EI_i}{l^3} & 6 \frac{EI_i}{l^2} & 0 & 0 \\ 6 \frac{EI_i}{l^2} & 4 \frac{EI_i}{l} & -6 \frac{EI_i}{l^2} & 2 \frac{EI_i}{l} & 0 & 0 \\ -12 \frac{EI_i}{l^3} & -6 \frac{EI_i}{l^2} & 12 \frac{EI_i}{l^3} & -6 \frac{EI_i}{l^2} & 0 & 0 \\ 6 \frac{EI_i}{l^2} & 2 \frac{EI_i}{l} & -6 \frac{EI_i}{l^2} & 4 \frac{EI_i}{l} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_i}{l} & -\frac{EA_i}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_i}{l} & \frac{EA_i}{l} \end{bmatrix}}_{K_{Si}} \begin{bmatrix} w_{za} \\ \varphi_{ya} \\ w_{zb} \\ \varphi_{yb} \\ \hline u_{ai} \\ u_{bi} \end{bmatrix} \quad (Gl. 3-21)$$

Die Steifigkeitsmatrix einer Fuge $K_{Vi/i+1}$ ist abhängig von der Fugensteifigkeit c und dem Achsabstand a_z der Schwerpunkte der angrenzenden Teilstäbe i und $i+1$.

$$\begin{bmatrix} Q_{za}^{Vi/i+1} \\ M_{ya}^{Vi/i+1} \\ Q_{zb}^{Vi/i+1} \\ M_{yb}^{Vi/i+1} \\ \hline N_{ai}^{Vi/i+1} \\ N_{bi}^{Vi/i+1} \\ N_{ai+1}^{Vi/i+1} \\ N_{bi+1}^{Vi/i+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{6 ca_z^2}{5 l} & \frac{1}{10} ca_z^2 & -\frac{6 ca_z^2}{5 l} & \frac{1}{10} ca_z^2 & \frac{1}{2} ca_z & \frac{1}{2} ca_z & -\frac{1}{2} ca_z & -\frac{1}{2} ca_z \\ \frac{1}{10} ca_z^2 & \frac{2}{15} lca_z^2 & -\frac{1}{10} ca_z^2 & -\frac{1}{30} lca_z^2 & -\frac{1}{12} lca_z & \frac{1}{12} lca_z & \frac{1}{12} lca_z & -\frac{1}{12} lca_z \\ -\frac{6 ca_z^2}{5 l} & -\frac{1}{10} ca_z^2 & \frac{6 ca_z^2}{5 l} & -\frac{1}{10} ca_z^2 & -\frac{1}{2} ca_z & -\frac{1}{2} ca_z & \frac{1}{2} ca_z & \frac{1}{2} ca_z \\ \frac{1}{10} ca_z^2 & -\frac{1}{30} lca_z^2 & -\frac{1}{10} ca_z^2 & \frac{2}{15} lca_z^2 & \frac{1}{12} lca_z & -\frac{1}{12} lca_z & -\frac{1}{12} lca_z & \frac{1}{12} lca_z \\ \hline \frac{1}{2} ca & -\frac{1}{12} lca_z & -\frac{1}{2} ca_z & \frac{1}{12} lca_z & \frac{1}{3} lc & \frac{1}{6} lc & -\frac{1}{3} lc & -\frac{1}{6} lc \\ \frac{1}{2} ca_z & \frac{1}{12} lca_z & -\frac{1}{2} ca_z & -\frac{1}{12} lca_z & \frac{1}{6} lc & \frac{1}{3} lc & -\frac{1}{6} lc & -\frac{1}{3} lc \\ -\frac{1}{2} ca_z & \frac{1}{12} lca_z & \frac{1}{2} ca_z & -\frac{1}{12} lca_z & -\frac{1}{3} lc & -\frac{1}{6} lc & \frac{1}{3} lc & \frac{1}{6} lc \\ -\frac{1}{2} ca_z & -\frac{1}{12} lca_z & \frac{1}{2} ca_z & \frac{1}{12} lca_z & -\frac{1}{6} lc & -\frac{1}{3} lc & \frac{1}{6} lc & \frac{1}{3} lc \end{bmatrix}}_{K_{Vi/i+1}} \begin{bmatrix} w_{za} \\ \varphi_{ya} \\ w_{yb} \\ \varphi_{yb} \\ \hline u_{ai} \\ u_{bi} \\ u_{ai+1} \\ u_{bi+1} \end{bmatrix}$$

(Gl. 3-22)

3n-Verbundelement

Für das 3n-Verbundelement ergibt sich die Steifigkeitsmatrix K_{Si} eines Teilstabes i:

$$\begin{bmatrix} Q_{za} \\ M_{ya} \\ Q_{zb} \\ M_{yb} \\ \hline N_{ai} \\ N_{mi} \\ N_{bi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 \frac{EI_i}{l^3} & 6 \frac{EI_i}{l^2} & -12 \frac{EI_i}{l^3} & 6 \frac{EI_i}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 6 \frac{EI_i}{l^2} & 4 \frac{EI_i}{l} & -6 \frac{EI_i}{l^2} & 2 \frac{EI_i}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -12 \frac{EI_i}{l^3} & -6 \frac{EI_i}{l^2} & 12 \frac{EI_i}{l^3} & -6 \frac{EI_i}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 6 \frac{EI_i}{l^2} & 2 \frac{EI_i}{l} & -6 \frac{EI_i}{l^2} & 4 \frac{EI_i}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7 EA_i}{3 l} & -\frac{8 EA_i}{3 l} & \frac{1 EA_i}{3 l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8 EA_i}{3 l} & \frac{16 EA_i}{3 l} & -\frac{8 EA_i}{3 l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 EA_i}{3 l} & -\frac{8 EA_i}{3 l} & \frac{7 EA_i}{3 l} \end{bmatrix}}_{K_{Vi}} \begin{bmatrix} w_{ya} \\ \varphi_{za} \\ w_{zb} \\ \varphi_{yb} \\ \hline u_{ai} \\ u_{mi} \\ u_{bi} \end{bmatrix} \quad (Gl. 3-23)$$

Die Steifigkeitsmatrix einer Fuge $K_{Vi/i+1}$ beim 3n-Verbundelement lautet:

$$\begin{bmatrix} Q_{za}^{Vi/i+1} \\ M_{ya}^{Vi/i+1} \\ Q_{zb}^{Vi/i+1} \\ M_{yb}^{Vi/i+1} \\ \hline N_{ai}^{Vi/i+1} \\ N_{mi}^{Vi/i+1} \\ N_{bi}^{Vi/i+1} \\ N_{ai+1}^{Vi/i+1} \\ N_{mi+1}^{Vi/i+1} \\ N_{bi+1}^{Vi/i+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{6 ca_z^2}{5 l} & \frac{1 ca_z^2}{10} & -\frac{6 ca_z^2}{5 l} & \frac{1 ca_z^2}{10} & \frac{1 ca_z}{10} & \frac{4 ca_z}{5} & \frac{1 ca_z}{10} & -\frac{1 ca_z}{10} & -\frac{4 ca_z}{5} & -\frac{1 ca_z}{10} \\ \frac{1 ca_z^2}{10} & \frac{2 lca_z^2}{15} & -\frac{1 ca_z^2}{10} & -\frac{1 lca_z^2}{30} & -\frac{7 lca_z}{60} & \frac{1 lca_z}{15} & \frac{1 lca_z}{20} & \frac{7 lca_z}{60} & -\frac{1 lca_z}{15} & -\frac{1 lca_z}{20} \\ -\frac{6 ca_z^2}{5 l} & -\frac{1 ca_z^2}{10} & \frac{6 ca_z^2}{5 l} & -\frac{1 ca_z^2}{10} & -\frac{1 ca_z}{10} & -\frac{4 ca_z}{5} & -\frac{1 ca_z}{10} & \frac{1 ca}{10} & \frac{4 ca_z}{5} & \frac{1 ca_z}{10} \\ \frac{1 ca_z^2}{10} & -\frac{1 lca_z^2}{30} & -\frac{1 ca_z^2}{10} & \frac{2 lca_z^2}{15} & \frac{1 ca_z}{20} & \frac{1 lca_z}{15} & -\frac{7 lca_z}{60} & -\frac{1 lca_z}{20} & -\frac{1 lca_z}{15} & \frac{7 ca_z}{60} \\ \hline \frac{1 ca_z}{10} & -\frac{7 lca_z}{60} & -\frac{1 ca_z}{10} & \frac{1 lca_z}{20} & \frac{2 lc}{15} & \frac{1 lc}{15} & -\frac{1 lc}{30} & \frac{2 lc}{15} & -\frac{1 lc}{15} & \frac{1 lc}{30} \\ \frac{4 ca_z}{5} & \frac{1 lca_z}{15} & -\frac{4 ca_z}{5} & \frac{1 lca_z}{15} & \frac{1 lc}{15} & \frac{8 lc}{15} & \frac{1 lc}{15} & -\frac{1 lc}{15} & -\frac{8 lc}{15} & -\frac{1 lc}{15} \\ \frac{1 ca_z}{10} & \frac{1 lca_z}{20} & -\frac{1 ca_z}{10} & -\frac{7 lca_z}{60} & -\frac{1 lc}{30} & \frac{1 lc}{15} & \frac{2 lc}{15} & \frac{1 lc}{30} & -\frac{1 lc}{15} & -\frac{2 lc}{15} \\ -\frac{1 ca_z}{10} & \frac{7 lca_z}{60} & \frac{1 ca_z}{10} & -\frac{1 lca_z}{20} & -\frac{2 lc}{15} & -\frac{1 lc}{15} & \frac{1 lc}{30} & \frac{2 lc}{15} & \frac{1 lc}{15} & -\frac{1 lc}{30} \\ -\frac{4 ca_z}{5} & -\frac{1 lca_z}{15} & \frac{4 ca_z}{5} & -\frac{1 lca_z}{15} & -\frac{1 lc}{15} & -\frac{8 lc}{15} & -\frac{1 lc}{15} & \frac{1 lc}{15} & \frac{8 lc}{15} & \frac{1 lc}{15} \\ -\frac{1 ca_z}{10} & -\frac{1 lca_z}{20} & \frac{1 ca_z}{10} & \frac{7 ca_z}{60} & \frac{1 lc}{30} & -\frac{1 lc}{15} & -\frac{2 lc}{15} & -\frac{1 lc}{30} & \frac{1 lc}{15} & \frac{2 lc}{15} \end{bmatrix}}_{K_{Vi/i+1}} \begin{bmatrix} w_{ya} \\ \varphi_{za} \\ w_{zb} \\ \varphi_{yb} \\ \hline u_{ai} \\ u_{mi} \\ u_{bi} \\ u_{ai+1} \\ u_{mi+1} \\ u_{ai+1} \end{bmatrix} \quad (Gl. 3-24)$$

Theorie II. Ordnung

Bei Berechnungen nach Theorie II. Ordnung ergänzt die geometrische Steifigkeitsmatrix K_{II} (Gl. 3-25) die Steifigkeitsmatrix K . Das Potenzial nach Theorie II. Ordnung (Gl. 3-9) ist nur von der Querverschiebung $w_z(x)$ abhängig. Der Ansatz für $w_z(x)$ wird sowohl für das 2n- als auch das 3n-Verbundelement verwendet. Somit ergibt sich für beide Elemente die folgende geometrische Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} Q_{za}^{II} \\ M_{ya}^{II} \\ Q_{zb}^{II} \\ M_{yb}^{II} \end{bmatrix} = N_{ges} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}}_{K_{II}} \begin{bmatrix} w_{za} \\ \varphi_{ya} \\ w_{zb} \\ \varphi_{yb} \end{bmatrix} \tag{Gl. 3-25}$$

In die geometrische Steifigkeitsmatrix (Gl. 3-25) geht die Gesamtnormalkraft N_{ges} als konstanter Wert ein. Die Gesamtnormalkraft N_{ges} ist die Summe der Teilnormalkräfte. Sie ist konstant über die Stablänge. Dies gilt nicht bei Elementlasten, die in Längsrichtung wirken. In diesem Fall wird näherungsweise der gemittelte Wert von N_{ges} über die Stablänge verwendet.

Die Gesamtnormalkraft ist vorab durch eine vorausgehende Berechnung nach Theorie I. Ordnung zu ermitteln oder kann bei einfachen Systemen abgeschätzt werden. Im weiteren Verlauf ist iterativ vorzugehen. So wird N_{ges} des vorausgegangenen Iterationsschritts in den nachfolgenden eingesetzt. Konvergiert N_{ges} gegen einen Wert, so kann die Iteration abgebrochen werden.

3.4.2 RÄUMLICHE TRAGWIRKUNG

Bei räumlicher Tragwirkung treten neben den Schnittgrößen N_i , M_y , und Q_z und den Verformungsgrößen u_i , φ_y , und w_z zusätzlich die Schnittgrößen Q_y , M_z , M_T und die Verformungsgrößen v_y , φ_z und φ_x auf.

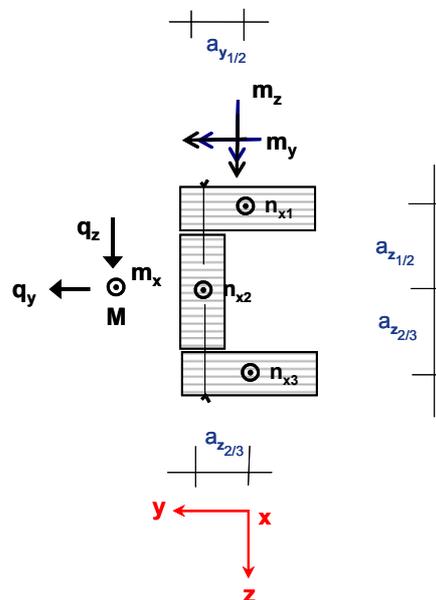


Abb. 3-8: Räumliches System und Belastung, einfach symmetrischer Querschnitt

Äußeres Potenzial

Die Knotenschnittgrößen erzeugen an den Freiheitsgraden das äußere Potenzial Π_a . Für das 2n-Verbundelement ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \Pi_a^{2n} = & -\sum_{i=1}^n N_{ia} u_{ia} - Q_{ya} v_{ya} - Q_{za} w_{za} - M_{Ta} \varphi_{xa} - M_{ya} \varphi_{ya} - M_{za} \varphi_{za} \\ & -\sum_{i=1}^n N_{ib} u_{ib} - Q_{yb} v_{yb} - Q_{zb} w_{zb} - M_{Tb} \varphi_{xb} - M_{yb} \varphi_{yb} - M_{zb} \varphi_{zb} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3-26a})$$

und für das 3n-Verbundelement:

$$\Pi_a^{3n} = \Pi_a^{2n} - \sum_{i=1}^n N_{im} u_{im} \quad (\text{Gl. 3-26b})$$

Inneres Potenzial

Für einen räumlichen, n-teiligen nachgiebigen Verbundquerschnitt setzt sich zusammen aus dem innere Potenzial der n Teilquerschnitte

$$\Pi_{in} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{x=0}^l (EA_i u_i'(x)^2 + EI_{yi} v_y''(x)^2 + EI_{zi} w_z''(x)^2) dx + \quad (\text{Gl. 3-27a})$$

und dem inneren Potenzial der Fugen

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{x=0}^l c_{i/i+1} \left(u_{i+1}(x) - u_i(x) + v_y'(x) a_{y/i+1} + w_z'(x) a_{z/i+1} \right)^2 dx \quad (\text{Gl. 3-27b})$$

und dem inneren Potenzial der Torsionstragwirkung

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{x=0}^l GI_{Ti} \varphi_x'(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l GI_{T_{Verbund}} \varphi_x'(x)^2 dx \quad (\text{Gl. 3-27c})$$

Nach Theorie II. Ordnung ergibt sich das Zusatzpotenzial [Kin02] zu:

$$\Pi^{II,0} = \int_{x=0}^l \left[\frac{1}{2} N_{ges} v_y'(x)^2 + \frac{1}{2} N_{ges} w_z'(x)^2 + q_y y_{qM} \varphi_x(x) + q_z z_{qM} \varphi_x(x) + \sum_{i=1}^n \left[N_i \varphi_x(x)' (z_{Mi} v_y(x)' - y_{Mi} w_z(x)') + \frac{1}{2} K_i \varphi_x(x)'^2 - M_{yi} \varphi_x(x) v_y(x)'' - M_{zi} \varphi_x(x) w_z(x)'' \right] \right] dx \quad (\text{G. 3-27d})$$

y_{qM} und z_{qM} sind die Koordinaten des Angriffspunkts der Querlasten q_y und q_z im y-z-Koordinatensystem des Schubmittelpunkts M. Mit z_{mi} und y_{mi} wird die Lage des Schubmittelpunkts M im jeweiligen Teilquerschnitt-Koordinatensystem angegeben.

M_{yi} und M_{zi} sind die Teilmomente des Teilquerschnitts i. N_i ist die Normalkraft im Teilstab i und greift im Teilschwerpunkt S_i an. N_{ges} ist die Summe der Teilnormalkräfte N_i . Die Verformungsgrößen w_z , v_y und φ_x sind bezogen auf den Schubmittelpunkt M.

Dabei gilt

$$K_i = \int_{A_i} \sigma_{xi} r_i^2 dA_i \quad (\text{Gl. 3-30})$$

mit

$$r_i^2 = (y - y_{Mi})^2 + (z - z_{Mi})^2 \quad (\text{Gl. 3-31})$$

und

$$\sigma_{xi} = \frac{N_i}{A_i} - \frac{M_{zi}}{I_{zi}} y + \frac{M_{yi}}{I_{yi}} z. \quad (\text{Gl. 3-32})$$

Dabei sind y und z die Koordinaten im Koordinatensystem des jeweiligen Teilquerschnitts i . A_i , I_{zi} und I_{yi} sind die Querschnittswerte des Teilquerschnitts i .

Führt man die folgende Substitution durch

$$\begin{aligned} i_i^2 &= \frac{I_{yi} + I_{zi}}{A_i} + y_{Mi}^2 + z_{Mi}^2 \\ r_{yi} &= \frac{1}{I_{zi}} \int y(y^2 + z^2) dA_i - 2y_{Mi} \\ r_{zi} &= \frac{1}{I_{yi}} \int z(y^2 + z^2) dA_i - 2z_{Mi} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3-33})$$

so ergibt sich

$$K_i = N_i i_i^2 - M_{zi} r_{yi} + M_{yi} r_{zi} \quad (\text{Gl. 3-34})$$

Setzt man (Gl. 3-34) mit (Gl. 3-33) in die Potenzialgleichung nach Theorie II. Ordnung (Gl. 3-27d) ein, so ergibt sich

$$\Pi^{II,O} = \int_{x=0}^l \left[\frac{1}{2} N_{ges} v_y'^2 + \frac{1}{2} N_{ges} w_z'^2 + q_y y_{qM} \varphi_x + q_z z_{qM} \varphi_x + \sum_{i=1}^n \left[N_i \varphi_x' \left(z_{Mi} v_y' - y_{Mi} w_z' + \frac{i_i^2}{2} \varphi_x' \right) + M_{yi} \left(-\varphi_x v_y'' + \frac{r_{zi}}{2} \varphi_x'^2 \right) + M_{zi} \left(-\varphi_x w_z'' - \frac{r_{yi}}{2} \varphi_x'^2 \right) \right] \right] dx \quad (\text{Gl. 3-35})$$

Ansatzfunktionen

Für die Querverschiebung $v_y(x)$ wird der analoge Ansatz wie für $w_z(x)$ (Gl. 3-13) verwendet.

$$\begin{aligned} w_z(x) &= \left(1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) w_{za} + l \left(\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) \varphi_{ya} \\ &\quad + \left(3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) w_{zb} + l \left(- \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) \varphi_{yb} \\ v_y(x) &= \left(1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) v_{ya} + l \left(\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) \varphi_{za} \\ &\quad + \left(3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) v_{yb} + l \left(- \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) \varphi_{zb} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3-36})$$

Die Ansätze für die Längsverschiebungen sind unverändert gegenüber der ebenen Tragwirkung (Gl. 3-16) (Gl. 3-19).

Die Torsionstragwirkung ist bei den gewählten Bezugssystemen entkoppelt von den restlichen Tragwirkungen. Nach der Theorie nach St. Verant ist die Verdrehung $\varphi_x(x)$ ein Polynom 1. Grades [Ram96]. Die Verdrehung φ_x kann somit mit zwei Freiheitsgraden φ_{xa} und φ_{xb} in exakter Weise beschrieben werden mit

$$\varphi_x(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \varphi_{xa} + \left(\frac{x}{l}\right) \varphi_{xb} \tag{Gl. 3-37}$$

Einsetzen der Ansätze in das Potenzial

Die gewählten Ansatzfunktionen (Gl. 3-36), (Gl. 3-37) und (Gl. 3-16) für das 2n-Verbundelement und (Gl. 3-36), (Gl. 3-37) und (Gl. 3-19) für das 3n-Verbundelement werden in die Potenzialgleichungen (Gl. 3-27), (Gl. 3-28) und (Gl. 3-35) eingesetzt. Durch Variation (Gl. 3-11) ergeben sich die folgenden Steifigkeitsmatrizen der n Teilstäbe K_{Si} bzw. der n-1 verbindenden Fugen $K_{Vi/i+1}$, die Steifigkeitsmatrix für Torsion K_T und geometrische Steifigkeitsmatrix K_{II} nach Theorie II. Ordnung

$$K = \sum_{i=1}^n K_{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} K_{Vi/i+1} + K_T + K_{II}$$

2n-Verbundelement

Die Steifigkeitsmatrix eines Teilstabes i lautet:

$\begin{bmatrix} Q_{za}^{Si} \\ M_{ya}^{Si} \\ Q_{zb}^{Si} \\ M_{yb}^{Si} \\ \hline Q_{ya}^{Si} \\ M_{za}^{Si} \\ Q_{yb}^{Si} \\ M_{zb}^{Si} \\ \hline N_{ai}^{Si} \\ N_{bi}^{Si} \end{bmatrix}$	=	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$</td> <td style="padding: 5px;">$6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$</td> <td style="padding: 5px;">$-12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$</td> <td style="padding: 5px;">$6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">$4 \frac{EI_{yi}}{l}$</td> <td style="padding: 5px;">$-6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$</td> <td style="padding: 5px;">$2 \frac{EI_{yi}}{l}$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">$12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$</td> <td style="padding: 5px;">$-6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">$4 \frac{EI_{yi}}{l}$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$-12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$4 \frac{EI_{zi}}{l}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$-6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$2 \frac{EI_{zi}}{l}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;"><i>symm.</i></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$-6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$4 \frac{EI_{zi}}{l}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$\frac{EA_i}{l}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$-\frac{EA_i}{l}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$\frac{EA_i}{l}$</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$\frac{EA_i}{l}$</td> </tr> </table>	$12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$	$6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$	$-12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$	$6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$	0	0	0	0	0	0		$4 \frac{EI_{yi}}{l}$	$-6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$	$2 \frac{EI_{yi}}{l}$	0	0	0	0	0	0			$12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$	$-6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$	0	0	0	0	0	0				$4 \frac{EI_{yi}}{l}$	0	0	0	0	0	0					$12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$	$6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$	$-12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$	$6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$	0	0					$4 \frac{EI_{zi}}{l}$	$-6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$	$2 \frac{EI_{zi}}{l}$	0	0	0			<i>symm.</i>		$12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$	$-6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$	0	0	0	0						$4 \frac{EI_{zi}}{l}$	0	0	$\frac{EA_i}{l}$	$-\frac{EA_i}{l}$									$\frac{EA_i}{l}$	$\frac{EA_i}{l}$	$\begin{bmatrix} w_{za} \\ \varphi_{ya} \\ w_{zb} \\ \varphi_{yb} \\ \hline v_{ya} \\ \varphi_{za} \\ v_{yb} \\ \varphi_{yb} \\ \hline u_{ai} \\ u_{bi} \end{bmatrix}$
	$12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$	$6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$	$-12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$	$6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$	0	0	0	0	0	0																																																																																			
		$4 \frac{EI_{yi}}{l}$	$-6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$	$2 \frac{EI_{yi}}{l}$	0	0	0	0	0	0																																																																																			
			$12 \frac{EI_{yi}}{l^3}$	$-6 \frac{EI_{yi}}{l^2}$	0	0	0	0	0	0																																																																																			
				$4 \frac{EI_{yi}}{l}$	0	0	0	0	0	0																																																																																			
					$12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$	$6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$	$-12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$	$6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$	0	0																																																																																			
					$4 \frac{EI_{zi}}{l}$	$-6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$	$2 \frac{EI_{zi}}{l}$	0	0	0																																																																																			
			<i>symm.</i>		$12 \frac{EI_{zi}}{l^3}$	$-6 \frac{EI_{zi}}{l^2}$	0	0	0	0																																																																																			
						$4 \frac{EI_{zi}}{l}$	0	0	$\frac{EA_i}{l}$	$-\frac{EA_i}{l}$																																																																																			
									$\frac{EA_i}{l}$	$\frac{EA_i}{l}$																																																																																			

$\underbrace{\hspace{15em}}_{K_{Si}}$

(Gl. 3-38)

Die Steifigkeitsmatrix für die Fuge zwischen Teilstab i und Teilstab i+1 lautet:

$$\begin{bmatrix} Q_{za}^{Vi/i+1} \\ M_{ya}^{Vi/i+1} \\ Q_{zb}^{Vi/i+1} \\ M_{yb}^{Vi/i+1} \\ \hline Q_{ya}^{Vi/i+1} \\ M_{za}^{Vi/i+1} \\ Q_{yb}^{Vi/i+1} \\ M_{zb}^{Vi/i+1} \\ \hline N_{ai}^{Vi/i+1} \\ N_{bi}^{Vi/i+1} \\ N_{ai+1}^{Vi/i+1} \\ N_{bi+1}^{Vi/i+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{6ca_z^2}{5l} & \frac{1}{10}ca_z^2 & -\frac{6ca_z^2}{5l} & \frac{1}{10}ca_z^2 & \frac{6ca_za_y}{5l} & \frac{1}{10}ca_za_y & -\frac{6ca_za_y}{5l} & \frac{1}{10}ca_za_y & \frac{1}{2}ca_z & \frac{1}{2}ca_z & -\frac{1}{2}ca_z & -\frac{1}{2}ca_z \\ & \frac{2}{15}lca_z^2 & -\frac{1}{10}ca_z^2 & -\frac{1}{30}lca_z^2 & \frac{1}{10}ca_za_y & \frac{2}{15}lca_za_y & -\frac{1}{10}ca_za_y & -\frac{1}{30}lca_za_y & -\frac{1}{12}lca_z & \frac{1}{12}lca_z & \frac{1}{12}lca_z & -\frac{1}{12}lca_z \\ & & \frac{6ca_z^2}{5l} & -\frac{1}{10}ca_z^2 & -\frac{6ca_za_y}{5l} & -\frac{1}{10}ca_za_y & \frac{6ca_za_y}{5l} & -\frac{1}{10}ca_za_y & -\frac{1}{2}ca_z & -\frac{1}{2}ca_z & \frac{1}{2}ca_z & \frac{1}{2}ca_z \\ & & & \frac{2}{15}lca_z^2 & \frac{1}{10}ca_za_y & -\frac{1}{30}lca_za_y & -\frac{1}{10}ca_za_y & \frac{2}{15}lca_za_y & \frac{1}{12}lca_z & -\frac{1}{12}lca_z & -\frac{1}{12}lca_z & \frac{1}{12}lca_z \\ \hline & & & & \frac{6ca_y^2}{5l} & \frac{1}{10}ca_y^2 & -\frac{6ca_y^2}{5l} & \frac{1}{10}ca_y^2 & \frac{1}{2}ca_y & \frac{1}{2}ca_y & -\frac{1}{2}ca_y & -\frac{1}{2}ca_y \\ & & & & & \frac{2}{15}lca_y^2 & -\frac{1}{10}ca_y^2 & -\frac{1}{30}lca_y^2 & -\frac{1}{12}lca_y & \frac{1}{12}lca_y & \frac{1}{12}lca_y & -\frac{1}{12}lca_y \\ & & & & & & \frac{6ca_y^2}{5l} & -\frac{1}{10}ca_y^2 & -\frac{1}{2}ca_y & -\frac{1}{2}ca_y & \frac{1}{2}ca_y & \frac{1}{2}ca_y \\ & & & & & & & \frac{2}{15}lca_y^2 & \frac{1}{12}lca_y & -\frac{1}{12}lca_y & -\frac{1}{12}lca_y & \frac{1}{12}lca_y \\ \hline & & & & & & & & \frac{1}{3}lc & \frac{1}{6}lc & -\frac{1}{3}lc & -\frac{1}{6}lc \\ & & & & & & & & & \frac{1}{3}lc & -\frac{1}{6}lc & -\frac{1}{3}lc \\ & & & & & & & & & & \frac{1}{3}lc & \frac{1}{6}lc \\ & & & & & & & & & & & \frac{1}{3}lc \end{bmatrix}}_{K_{Vi/i+1}} \begin{bmatrix} w_{za} \\ \varphi_{ya} \\ w_{zb} \\ \varphi_{yb} \\ \hline v_{ya} \\ \varphi_{za} \\ v_{yb} \\ \varphi_{zb} \\ \hline u_{ai} \\ u_{bi} \\ u_{ai+1} \\ u_{bi+1} \end{bmatrix}$$

(Gl. 3-39)

3n-Verbundelement

Die Steifigkeitsmatrix eines Teilstabes i lautet:

$$\begin{bmatrix} Q_{za}^{Si} \\ M_{ya}^{Si} \\ Q_{zb}^{Si} \\ M_{yb}^{Si} \\ \hline Q_{ya}^{Si} \\ M_{za}^{Si} \\ Q_{yb}^{Si} \\ M_{zb}^{Si} \\ \hline N_{ai}^{Si} \\ N_{mi}^{Si} \\ N_{bi}^{Si} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI_{yi}}{l^3} & \frac{6EI_{yi}}{l^2} & -\frac{12EI_{yi}}{l^3} & \frac{6EI_{yi}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{4EI_{yi}}{l} & -\frac{6EI_{yi}}{l^2} & \frac{2EI_{yi}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{12EI_{yi}}{l^3} & -\frac{6EI_{yi}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4EI_{yi}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \frac{12EI_{zi}}{l^3} & \frac{6EI_{zi}}{l^2} & -\frac{12EI_{zi}}{l^3} & \frac{6EI_{zi}}{l^2} & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_{zi}}{l} & -\frac{6EI_{zi}}{l^2} & \frac{2EI_{zi}}{l} & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{12EI_{zi}}{l^3} & -\frac{6EI_{zi}}{l^2} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{4EI_{zi}}{l} & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & \frac{7EA_i}{3l} & -\frac{8EA_i}{3l} & \frac{EA_i}{3l} \\ & & & & & & & & & \frac{16EA_i}{3l} & -\frac{8EA_i}{3l} \\ & & & & & & & & & & \frac{7EA_i}{3l} \end{bmatrix}}_{K_{Si}} \begin{bmatrix} w_{za} \\ \varphi_{ya} \\ w_{zb} \\ \varphi_{yb} \\ \hline v_{ya} \\ \varphi_{za} \\ v_{yb} \\ \varphi_{zb} \\ \hline u_{ai} \\ u_{mi} \\ u_{bi} \end{bmatrix}$$

(Gl. 3-40)

Die Steifigkeitsmatrix für die Fuge zwischen Teilstab i und Teilstab i+1 lautet:

$$\begin{bmatrix}
 Q_{za}^{Vi/i+1} \\
 M_{ya}^{Vi/i+1} \\
 Q_{zb}^{Vi/i+1} \\
 M_{yb}^{Vi/i+1} \\
 Q_{za}^{Vi/i+1} \\
 M_{ya}^{Vi/i+1} \\
 Q_{zb}^{Vi/i+1} \\
 M_{yb}^{Vi/i+1} \\
 N_{ai}^{Vi/i+1} \\
 N_{mi}^{Vi/i+1} \\
 N_{hi}^{Vi/i+1} \\
 N_{ai+1}^{Vi/i+1} \\
 N_{mi+1}^{Vi/i+1} \\
 N_{hi+1}^{Vi/i+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \underbrace{\begin{bmatrix}
 \frac{6ca_z^2}{5l} & \frac{1}{10}ca_z^2 & \frac{6ca_z^2}{5l} & \frac{1}{10}ca_z^2 & \frac{6ca_z a_y}{5l} & \frac{1}{10}ca_z a_y & -\frac{6ca_z a_y}{5l} & \frac{1}{10}ca_z a_y & \frac{1}{10}ca_z & \frac{4}{5}ca_z & \frac{1}{10}ca_z & -\frac{1}{10}ca_z & \frac{4}{5}ca_z & -\frac{1}{10}ca_z \\
 & \frac{2}{15}lca_z^2 & -\frac{1}{10}ca_z^2 & -\frac{1}{30}lca_z^2 & \frac{1}{10}ca_z a_y & \frac{2}{15}lca_z a_y & -\frac{1}{10}ca_z a_y & -\frac{1}{30}lca_z a_y & -\frac{7}{60}lca_z & \frac{1}{15}lca_z & \frac{1}{20}lca_z & \frac{7}{60}lca_z & -\frac{1}{15}lca_z & -\frac{1}{20}lca_z \\
 & & \frac{6ca_z^2}{5l} & -\frac{1}{10}ca_z^2 & \frac{6ca_z a_y}{5l} & -\frac{1}{10}ca_z a_y & \frac{6ca_z a_y}{5l} & -\frac{1}{10}ca_z a_y & -\frac{1}{10}ca_z & \frac{4}{5}ca_z & -\frac{1}{10}ca_z & \frac{1}{10}ca_z & \frac{4}{5}ca_z & -\frac{1}{10}ca_z \\
 & & & \frac{2}{15}lca_z^2 & \frac{1}{10}ca_z a_y & -\frac{1}{30}lca_z a_y & -\frac{1}{10}ca_z a_y & \frac{2}{15}lca_z a_y & \frac{7}{60}lca_z & \frac{1}{15}lca_z & -\frac{1}{20}lca_z & -\frac{7}{60}lca_z & -\frac{1}{15}lca_z & \frac{1}{20}lca_z \\
 & & & & \frac{6ca_y^2}{5l} & \frac{1}{10}ca_y^2 & -\frac{6ca_y^2}{5l} & \frac{1}{10}ca_y^2 & \frac{1}{10}ca_y & \frac{4}{5}ca_y & \frac{1}{10}ca_y & -\frac{1}{10}ca_y & \frac{4}{5}ca_y & -\frac{1}{10}ca_y \\
 & & & & & \frac{2}{15}lca_y^2 & -\frac{1}{10}ca_y^2 & -\frac{1}{30}lca_y^2 & -\frac{7}{60}lca_y & \frac{1}{15}lca_y & \frac{1}{20}lca_y & \frac{7}{60}lca_y & -\frac{1}{15}lca_y & -\frac{1}{20}lca_y \\
 & & & & & & \frac{6ca_y^2}{5l} & -\frac{1}{10}ca_y^2 & -\frac{1}{10}ca_y & -\frac{4}{5}ca_y & -\frac{1}{10}ca_y & \frac{1}{10}ca_y & \frac{4}{5}ca_y & \frac{1}{10}ca_y \\
 & & & & & & & \frac{2}{15}lca_y^2 & \frac{7}{60}lca_y & \frac{1}{15}lca_y & -\frac{1}{20}lca_y & -\frac{7}{60}lca_y & -\frac{1}{15}lca_y & \frac{1}{20}lca_y \\
 & & & & & & & & \frac{2}{15}lc & \frac{1}{15}lc & -\frac{1}{30}lc & \frac{2}{15}lc & -\frac{1}{15}lc & \frac{1}{30}lc \\
 & & & & & & & & & \frac{8}{15}lc & \frac{1}{15}lc & -\frac{1}{15}lc & -\frac{8}{15}lc & -\frac{1}{15}lc \\
 & & & & & & & & & & \frac{2}{15}lc & \frac{1}{30}lc & \frac{1}{15}lc & -\frac{2}{15}lc \\
 & & & & & & & & & & & \frac{2}{15}lc & \frac{1}{15}lc & -\frac{1}{15}lc \\
 & & & & & & & & & & & & \frac{8}{15}lc & \frac{1}{15}lc \\
 & & & & & & & & & & & & & \frac{2}{15}lc
 \end{bmatrix}}_{K_{Vi/i+1}}
 \begin{bmatrix}
 w_{za} \\
 \varphi_{ya} \\
 w_{zb} \\
 \varphi_{yb} \\
 v_{za} \\
 \varphi_{za} \\
 v_{zb} \\
 \varphi_{zb} \\
 u_{ai} \\
 u_{mi} \\
 u_{hi} \\
 u_{ai+1} \\
 u_{mi+1} \\
 u_{hi+1}
 \end{bmatrix}
 \quad (Gl. 3-41)$$

Torsion

Die Torsionstragwirkung ist für das 2n- und das 3n-Verbundelement gleich. Die Steifigkeitsbeziehung lautet:

$$\begin{bmatrix}
 M_{Ta} \\
 M_{Tb}
 \end{bmatrix}
 =
 \underbrace{\begin{bmatrix}
 \frac{\sum_{i=1}^n GI_{T_i} + GI_{T_{Verbund}}}{l} & \frac{\sum_{i=1}^n GI_{T_i} + GI_{T_{Verbund}}}{l} \\
 \text{symm.} & \frac{\sum_{i=1}^n GI_{T_i} + GI_{T_{Verbund}}}{l}
 \end{bmatrix}}_{K_T}
 \begin{bmatrix}
 \varphi_{xa} \\
 \varphi_{xb}
 \end{bmatrix}
 \quad (Gl. 3-42)$$

Theorie II. Ordnung

Bei Berechnungen nach Theorie II. Ordnung ist die geometrische Steifigkeitsmatrix K_{II} zu berücksichtigen. Diese setzt sich aus mehreren Teilmatrizen zusammen. Dies sind:

- K_{II}^N (abhängig von den Normalkräften)
- K_{II}^M (abhängig von den Biegemomenten)
- K_{II}^q (abhängig von Querlasten q_z und q_y , die exzentrisch zum Schubmittelpunkt M angreifen)

Es gilt:

$$K_{II} = K_{II}^N + K_{II}^M + K_{II}^q \quad (Gl. 3-43a)$$

Die geometrische Matrix K_{II} ergibt sich aus der Potenzialgleichung (Gl. 3-35), in die Verformungsverläufe $w_z(x)$, $v_y(x)$ und $\varphi_x(x)$ eingehen. (Gl. 3-35) ist unabhängig von den Längsverschiebungen $u_i(x)$. K_{II} gilt somit für das 2n- und das 3n-Verbundelement.

Es ergibt sich für K_{II}^N :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 Q_{za} \\
 M_{ya} \\
 Q_{zb} \\
 M_{yb} \\
 \hline
 Q_{ya} \\
 M_{za} \\
 Q_{yb} \\
 M_{zb} \\
 M_{Ta} \\
 M_{Tb}
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \frac{6N_{ges}}{5l} & \frac{N_{ges}}{10} \\
 & \frac{2N_{ges}l}{15} \\
 & -\frac{N_{ges}}{10} \\
 & -\frac{N_{ges}l}{30} \\
 & \frac{6N_{ges}}{5l} \\
 & -\frac{N_{ges}}{10} \\
 & \frac{2N_{ges}l}{15}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{cc}
 \frac{N_{ges}}{10} & -\frac{N_{ges}l}{30} \\
 -\frac{N_{ges}}{10} & -\frac{N_{ges}l}{30} \\
 \frac{6N_{ges}}{5l} & -\frac{N_{ges}}{10} \\
 \frac{2N_{ges}l}{15} & -\frac{N_{ges}l}{30} \\
 & \frac{6N_{ges}}{5l} \\
 & -\frac{N_{ges}}{10} \\
 & \frac{2N_{ges}l}{15}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \frac{6N_{ges}}{5l} & \frac{N_{ges}}{10} & -\frac{6N_{ges}}{5} & \frac{N_{ges}}{10} \\
 & \frac{2N_{ges}l}{15} & -\frac{N_{ges}}{10} & -\frac{N_{ges}l}{30} \\
 & & \frac{6N_{ges}}{5l} & -\frac{N_{ges}}{10} \\
 & & & \frac{2N_{ges}l}{15}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{cc}
 -\sum_{i=1}^n \frac{N_i y_{mi}}{l} & \sum_{i=1}^n \frac{N_i y_{mi}}{l} \\
 0 & 0 \\
 \sum_{i=1}^n \frac{N_i y_{mi}}{l} & -\sum_{i=1}^n \frac{N_i y_{mi}}{l} \\
 0 & 0 \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n \frac{N_i z_{mi}}{l} & -\sum_{i=1}^n \frac{N_i z_{mi}}{l} \\
 0 & 0 \\
 -\sum_{i=1}^n \frac{N_i z_{mi}}{l} & \sum_{i=1}^n \frac{N_i z_{mi}}{l} \\
 0 & 0 \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n \frac{N_i i^2}{l} & -\sum_{i=1}^n \frac{N_i i^2}{l} \\
 0 & \sum_{i=1}^n \frac{N_i i^2}{l}
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 w_{za} \\
 \varphi_{ya} \\
 w_{zb} \\
 \varphi_{yb} \\
 \hline
 v_{ya} \\
 \varphi_{za} \\
 v_{yb} \\
 \varphi_{zb} \\
 \hline
 \varphi_{xa} \\
 \varphi_{xb}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (Gl. 3-43b)$$

Es ergibt sich für K_{II}^M :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 Q_{za} \\
 M_{ya} \\
 Q_{zb} \\
 M_{yb} \\
 \hline
 Q_{ya} \\
 M_{za} \\
 Q_{yb} \\
 M_{zb} \\
 M_{Ta} \\
 M_{Tb}
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{cc}
 \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi}}{l} & -\sum_{i=1}^n \frac{M_{zi}}{l} \\
 \sum_{i=1}^n M_{zi} & 0 \\
 -\sum_{i=1}^n \frac{M_{zi}}{l} & \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi}}{l} \\
 0 & -\sum_{i=1}^n M_{zi} \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n \frac{M_{yi}}{l} & -\sum_{i=1}^n \frac{M_{yi}}{l} \\
 \sum_{i=1}^n M_{yi} & 0 \\
 \sum_{i=1}^n \frac{M_{yi}}{l} & \sum_{i=1}^n \frac{M_{yi}}{l} \\
 0 & -\sum_{i=1}^n M_{yi} \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n \frac{M_{yi} r_{zi} - M_{zi} r_{yi}}{l} & -\sum_{i=1}^n \frac{M_{yi} r_{zi} - M_{zi} r_{yi}}{l} \\
 & \sum_{i=1}^n \frac{M_{yi} r_{zi} - M_{zi} r_{yi}}{l}
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 w_{za} \\
 \varphi_{ya} \\
 w_{zb} \\
 \varphi_{yb} \\
 \hline
 v_{ya} \\
 \varphi_{za} \\
 v_{yb} \\
 \varphi_{zb} \\
 \hline
 \varphi_{xa} \\
 \varphi_{xb}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (Gl. 3-43c)$$

Es ergibt sich für K_{II}^q :

$$\begin{bmatrix} M_{Ta} \\ M_{Tb} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{l(q_y y_p + q_{yz} z_p)}{3} & \frac{l(q_y y_p + q_{yz} z_p)}{6} \\ \text{symm.} & \frac{l(q_y y_p + q_{yz} z_p)}{3} \end{bmatrix}}_{K_{II}^q} \begin{bmatrix} \varphi_{xa} \\ \varphi_{xb} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-43d})$$

Die einzusetzenden Schnittgrößen N_i , N_{ges} , M_{zi} , und M_{yi} in (Gl. 3-43b-d) sind näherungsweise die über die Stablänge gemittelten Schnittgrößen (Gl. 3-88) – (Gl. 3-90) eines vorausgegangenen Berechnungsschritts (z. B. Theorie I. Ordnung). Weitere Berechnungsiterationen sind notwendig, wenn keine hinreichende Konvergenz der Schnittgrößen erreicht wird.

3.5 ELEMENTLASTEN

Äußere Lasten können in das System in der FEM nur an den Knoten eingeleitet werden. Greifen Lasten innerhalb der Elemente an, so genannte Elementlasten, sind diese in äquivalente Knotenlasten umzurechnen. Diese gehen dann an den Berechnungsknoten in das Gleichgewicht mit ein. Die äquivalenten Knotenlasten werden zum Lastvektor p_0 zusammengefasst und sind Teil der Elemente und gehen in die Knotenschnittgrößen (Gl. 3-4) mit ein (Kapitel 3.7.3).

Äquivalente Knotenlasten im Sinne der FEM bedeuten, dass das Potenzial der äquivalenten Knotenlasten Π^{AK} gleich dem Potenzial der Elementlast Π^{EL} sein muss [Har02].

$$\Pi^{AK} = \Pi^{EL} \quad (\text{Gl. 3-44})$$

Das Potenzial möglicher Elementlasten lautet:

$$\begin{aligned} \Pi^{EL} = \sum_{i=1}^n & \left(\underbrace{\int_0^l n_{xi}(x) \cdot u_i(x) dx}_{\text{Längssteckenlast auf den Teilquerschnitt } i} + \underbrace{\int_0^l \alpha_T T_m EA_i \cdot u_i'(x) dx}_{\text{über Querschnitt gleichmäßige Temperaturerhöhung}} + \underbrace{F_x u_i}_{\text{Einzelkraft}} \right) + \\ & \underbrace{\int_0^l q_z(x) \cdot w_z(x) dx}_{\text{Quersteckenlast}} + \underbrace{\int_0^l q_y(x) \cdot v_y(x) dx}_{\text{Quersteckenlast}} + \underbrace{\int_0^l m_y(x) w_z'(x) dx}_{\text{Linienbiegemoment}} + \underbrace{\int_0^l m_z(x) v_y'(x) dx}_{\text{Linienbiegemoment}} + \underbrace{\int_0^l m_x(x) \varphi_x(x) dx}_{\text{Linientorsion}} \\ & + \underbrace{F_y v_y + F_z w_z}_{\text{Einzelkräfte}} + \underbrace{M_x \varphi_x + M_z w_z' + M_y v_y'}_{\text{Einzelmomente}} + \underbrace{\int_0^l \alpha_T \frac{\Delta T_y}{h} EI_y \cdot w_z''(x) dx}_{\text{ungleichmäßige Temperatur im Querschnitt}} + \underbrace{\int_0^l \alpha_T \frac{\Delta T_z}{h} EI_z \cdot v_y''(x) dx}_{\text{ungleichmäßige Temperatur im Querschnitt}} \quad (\text{Gl. 3-45}) \end{aligned}$$

Um konsistente Knotenkräfte und -momente zu erhalten, sind für die Verformungsgrößen die gleichen elementspezifischen Ansatzfunktionen anzusetzen wie für das innere Potenzial [Har02]. Die Ansatzfunktionen sind für das 2n-Verbundelement die Gleichungen (Gl. 3-36), (Gl. 3-37) und (Gl. 3-16) und für das 3n-Verbundelement die Gleichungen (Gl. 3-36), (Gl. 3-37) und (Gl. 3-19). Eine andere Möglichkeit ist das Aufteilen der Lasten auf die Knoten nach dem Hebelgesetz. Dies stellt aber in der Regel eine inkonsistente Approximation dar und führt zu systematischen Fehlern [Wun04].

An jedem Freiheitsgrad der Elemente sind äquivalente Knotenkräfte und -momente möglich. Sie erzeugen dort ein Potenzial von

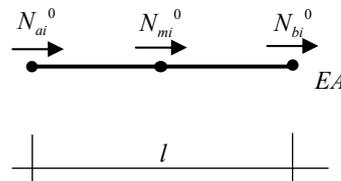
$$\Pi^{AK} = \sum_{i=1}^n N_{ia}^0 u_{ia} + Q_{za}^0 w_a + M_{ya}^0 \varphi_{ya} + Q_{zb}^0 w_b + M_{yb}^0 \varphi_{yb} + \sum_{i=1}^n N_{ib}^0 u_{ib} + \left(\sum_{i=1}^n N_{im}^0 u_{im} \right) \tag{Gl. 3-46}$$

Setzt man (Gl. 3-45) und (Gl. 3-46) in (Gl. 3-44) ein und führt einen Koeffizientenvergleich durch, so ergeben sich an den Knoten die äquivalenten Knotenkräfte bzw. -momente.

Die gewählten Ansatzfunktionen für $w_z(x)$, $v_y(x)$ und $\varphi_x(x)$ unterscheiden sich nicht von monolithischen Stabelementen nach Bernoulli bzw. St.Vernant. Es ergeben sich somit die gleichen äquivalenten Knotenlasten für die Quer- und Momentlasten. Diese können der Literatur entnommen werden, z. B. [Wun04].

Gleiches gilt beim 2n-Verbundelement für die Lasten in Stablängsrichtung wie $n_x(x)$, F_x oder T_m . Diese sind einem Teilquerschnitt i zuzuweisen. Gegebenenfalls sind die Lasten entsprechend der Dehnsteifigkeiten auf die Teilquerschnitte aufzuteilen. Die äquivalenten Knotennormalkräfte N_{ai}^0 und N_{bi}^0 wirken an den Knoten u_{ia} und u_{ib} .

Element-Längslasten, die auf das 3n-Verbundelement einwirken, können nicht aus der Literatur entnommen werden. Die zugehörigen äquivalenten Knotenlasten basieren, im Gegensatz zu einem linearen Ansatz bei Stabelementen nach Bernoulli, auf einem quadratischen Längsverschiebungsansatz $u_i(x)$ (Gl. 3-19). Sie werden daher in der Tabelle (Tab. 3-1) angegeben. Diese sind ebenfalls einem Teilquerschnitt i zuzuweisen und wirken an den Knoten u_{ia} , u_{im} und u_{ib} und erzeugen dort die äquivalenten Knotennormalkräfte N_{ai}^0 , N_{mi}^0 , und N_{bi}^0 .



	N_{ai}^0	N_{mi}^0	N_{bi}^0
	$N_x(-1+2\alpha)(-1+\alpha)$	$-N_x\alpha(-1+\alpha)$	$N_x\alpha(-1+2\alpha)$
	$\frac{n_i l}{6}$	$\frac{(n_i + n_r) l}{3}$	$\frac{n_r l}{6}$
	$-\epsilon_T EA_i$	0	$+\epsilon_T EA_i$

Tab. 3-1: 3n-Verbundelement, äquivalente Knotenkräfte für Elementlasten in Längsrichtung

3.6 TRANSFORMATIONSBEZIEHUNGEN IM RAUM

Ein Tragwerk wird in der Regel aus mehreren Stäben aufgebaut, die beliebig im Raum liegen können. Bei der Überführung des Tragwerks in ein statisches Modell diskretisiert man jeden Stab durch ein oder mehrere Finite Elemente. Jeder Stab ist durch ein lokales Koordinatensystem definiert, das in der Regel nicht deckungsgleich mit dem globalen Koordinatensystem des Gesamttragwerks ist. Um das Gleichgewicht am Gesamtsystem aufstellen zu können, ist es notwendig, die Vektoren der Zustandsgrößen von einem lokalen Koordinatensystem eines Stabes in ein einheitliches, globales Koordinatensystem des Tragwerks zu transformieren und umgekehrt.

Im globalen Koordinatensystem X - Y - Z ist ein Stab mit seinem Anfangsknoten a und Endknoten b in seiner Lage gegeben [Wun04]. Die lokale x -Achse des Koordinatensystems des Stabstabes zeigt zwingend vom Knoten a nach Knoten b (Abb. 3-9). Die Lage der lokalen y -Achse ist in der Regel die Hauptbiegeachse und wird durch einen Verdrehwinkel γ um die lokale Stabachse (x -Achse) angegeben. In der Ausgangslage ($\gamma = 0$) liegt die lokale y -Achse in der globalen X - Y -Ebene.

In der Literatur [Wun04] und in vielen Stabwerksprogrammen, wie Sofistik, wird die Lage der lokalen y -Achse auch durch einen zusätzlichen Bezugsknoten H im globalen Koordinatensystem mit den Koordinaten X_H , Y_H , Z_H angegeben. Dabei bildet H mit den Anfangsknoten a und dem Endknoten b eine Ebene, in der die lokale y -Achse zu liegen kommt (ohne Abbildung).

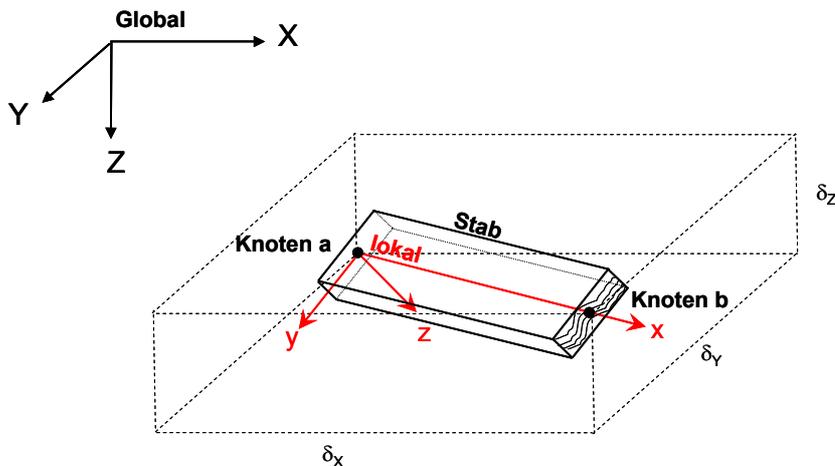


Abb. 3-9: Geometriedefinition im räumlichen Koordinatensystem

Die Koordinaten des Knotens a sind X_a , Y_a , Z_a und des Knotens b X_b , Y_b , Z_b . Aus den Knotenkoordinaten errechnet sich die Stablänge l :

$$l = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2 + (Z_b - Z_a)^2} \quad (\text{Gl. 3-47})$$

Für die Differenz der zugehörigen Einzel-Koordinaten wird eingeführt (Abb. 3-9):

$$\begin{aligned} \delta_x &= X_b - X_a \\ \delta_y &= Y_b - Y_a \\ \delta_z &= Z_b - Z_a \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3-48})$$

Die Vektoren der Zustandgrößen eines Stabknotens im lokalen Koordinatensystem sind:

Schnittgrößen	Verformungsgrößen	Lastvektor
$p_L = \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-49})$	$v_L = \begin{bmatrix} u \\ v_y \\ w_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-50})$	$p_0 = \begin{bmatrix} N^0 \\ Q_y^0 \\ Q_z^0 \\ M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_z^0 \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-51})$

Die Vektoren der Zustandgrößen eines Knotens im globalen Koordinatensystem sind:

Globaler Kraftvektor	Verformungsvektor	Lastvektor
$P_G = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-52})$	$V_G = \begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ W_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-53})$	$P_{G0} = \begin{bmatrix} F_x^0 \\ F_y^0 \\ F_z^0 \\ M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_z^0 \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-54})$

Ein Vektor im globalen X-Y-Z-Koordinatensystem kann in drei Schritten in ein lokales x-y-z-Koordinatensystem überführt werden. Die folgenden drei Drehungen erfolgen im Uhrzeigersinn um die angegebenen Achsen und deren Richtung ist analog der „Rechten-Hand-Regel“ [Mey90].

1. Schritt

Drehung des X-Y-Z-Koordinatensystems um die Z-Achse mit dem Winkel α , der sich errechnet aus (Abb. 3-10):

$$\alpha = \arctan \frac{\delta_y}{\delta_x} \tag{Gl. 3-55}$$

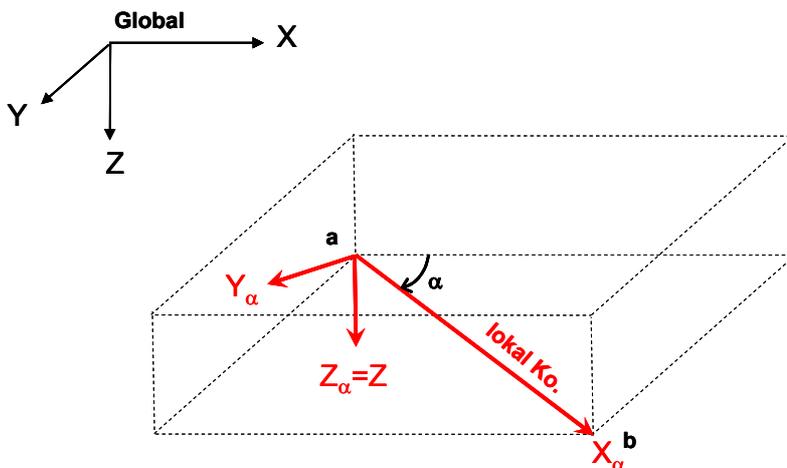


Abb. 3-10: 1. Schritt der Transformation: Drehung um die globale Z-Achse

Die Achsen des gedrehten Koordinatensystems sind X_α , Y_α bzw. $Z_\alpha = Z$.

Es gilt dabei:

$$\begin{bmatrix} u_{X\alpha} \\ v_{Y\alpha} \\ w_{Z\alpha} \\ \varphi_{X\alpha} \\ \varphi_{Y\alpha} \\ \varphi_{Z\alpha} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Transformationsmatrix } T_\alpha} \begin{bmatrix} U_X \\ V_Y \\ W_Z \\ \phi_X \\ \phi_Y \\ \phi_Z \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-56})$$

2. Schritt

Drehung des X_α - Y_α - Z -Koordinatensystems um die Y_α -Achse (Abb. 3-11) mit dem Winkel β , der sich errechnet aus:

$$\beta = -\arctan \frac{\delta_Z}{\sqrt{\delta_X^2 + \delta_Y^2}} \quad (\text{Gl. 3-57})$$

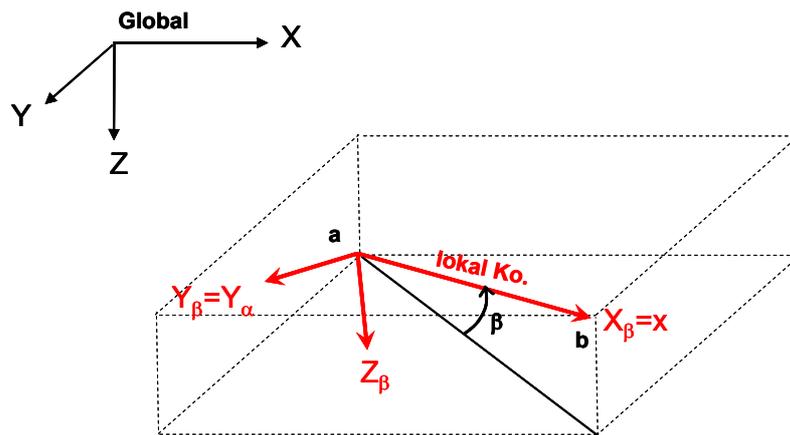


Abb. 3-11: 2. Schritt der Transformation: Drehung um die Y_α -Achse

Die Achsen des gedrehten Koordinatensystems sind $X_\beta = x$, $Y_\beta = Y_\alpha$ bzw. Z_β .

Es gilt somit:

$$\begin{bmatrix} u_{X\beta} \\ v_{Y\beta} \\ w_{Z\beta} \\ \varphi_{X\beta} \\ \varphi_{Y\beta} \\ \varphi_{Z\beta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}}_{\text{Transformationsmatrix } T_\beta} \begin{bmatrix} u_{X\alpha} \\ v_{Y\alpha} \\ w_{Z\alpha} \\ \varphi_{X\alpha} \\ \varphi_{Y\alpha} \\ \varphi_{Z\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-58})$$

3. Schritt

Drehung des x - Y_β - Z_β -Koordinatensystems um die (lokale) x -Achse mit dem Winkel γ (Abb. 3-12).

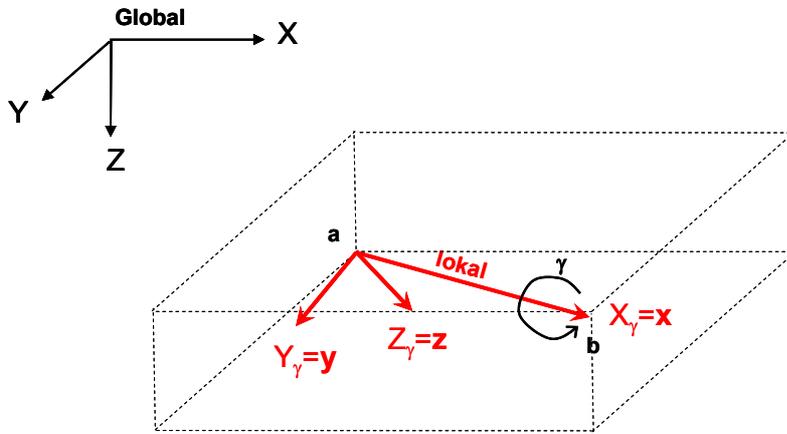


Abb. 3-12: 3. Schritt der Transformation: Drehung um die (lokale) x-Achse

Die Achsen des letztmalig gedrehten Koordinatensystems sind $X_\gamma = X_\beta = x$, $Y_\gamma = y$ bzw. $Z_\gamma = z$.

Für die Transformation des Verschiebungsvektors gilt:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ v_y \\ w_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}}_{\text{Transformationsmatrix } T_\gamma} \begin{bmatrix} u_{x\beta} \\ v_{y\beta} \\ w_{z\beta} \\ \varphi_{x\beta} \\ \varphi_{y\beta} \\ \varphi_{z\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 3-59})$$

Wird ein Zustandvektor v_G im globalen Koordinatensystem in der dargestellten Reihenfolge der Verdrehungen α, β, γ in ein lokales Koordinatensystem überführt, so besteht die Beziehung, dargestellt am Beispiel der Transformation des Verformungsvektors

$$v_L = T_\gamma T_\beta T_\alpha v_G \quad (\text{Gl. 3-60})$$

Mit der resultierenden Gesamttransformationsmatrix T

$$T = T_\gamma T_\beta T_\alpha \quad (\text{Gl. 3-61})$$

lautet die Transformationsbeziehung eines Vektors vom globalen ins lokale Koordinatensystem:

$$v_L = T v_G \quad (\text{Gl. 3-62a})$$

und

$$p_L = T p_G \quad (\text{Gl. 3-62b})$$

Die Transformationsmatrix T ist orthogonal. Damit gilt:

$$T^{-1} = T^T \quad (\text{Gl. 3-63})$$

Für die Rücktransformation eines Zustandvektors vom lokalen ins globale Koordinatensystem ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} v_G &= T^T v_L \\ p_G &= T^T p_L \\ p_{G0} &= T^T p_0 \end{aligned} \tag{Gl. 3-64}$$

Es ergibt sich für die resultierende Transformationsmatrix:

$$T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & 0 \\ & T_u & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & T_u & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right] \tag{Gl. 3-65}$$

mit der Untermatrix T_u :

$$T_u = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \\ \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha & \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \cos \beta \\ \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \cos \beta \end{bmatrix} \tag{Gl. 3-66}$$

In den Steifigkeitsmatrizen der Teilstäbe K_{Si} , der Theorie II. Ordnung K_{II} und der Torsion K_T sind die Freiheitsgrade der Teilstäbe entkoppelt voneinander. Die Transformation der Steifigkeitsmatrizen K_{Si} , K_{II} und K_T vom lokalen in das globale Koordinatensystem kann daher mit der bekannten Transformationsbeziehung erfolgen [Wun04/Thi96]:

$$K_G = T^T K T \tag{Gl. 3-67}$$

Die Transformation der Steifigkeitsmatrix der Fuge $K_{Vi/i+1}$ ist aufwändiger. Grundlage des Vorgehens ist die Steifigkeitsmatrix $K_{Vi/i+1}^{total}$. Sie beruht auf einem Potential Π der Fuge, die von zunächst individuellen Verformungen $u(x)$, $v_y(x)$ und $w_z(x)$ der Teilstäbe i und $i+1$ ausgeht.

$$\Pi = \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \int_{x=0}^l c_{i/i+1} \left(u_{i+1}(x) - u_i(x) + v_{y_i}'(x)r_{y_i} + v_{y_{i+1}}'(x)r_{y_{i+1}} + w_{z_i}'(x)r_{z_i} + w_{z_{i+1}}'(x)r_{z_{i+1}} \right)^2 dx \tag{Gl. 3-68}$$

r_i bzw. r_{i+1} sind die Abstände der Schwerpunkte der Teilstäbe i bzw. $i+1$ von der Fuge (Abb. 2-1).

Variiert man (Gl. 3-68) nach den Freiheitsgraden (Gl. 3-11), so ergibt sich $K_{Vi/i+1}^{total}$ zu

$$K_{Vi/i+1}^{total} = \frac{\partial \Pi}{\partial (u_{ai}, v_{yai}, w_{zai}, \varphi_{xai}, \varphi_{yai}, \varphi_{zai}, \dots)} \tag{Gl. 3-69}$$

Die lokale Steifigkeitsmatrix $K_{Vi/i+1}^{total}$ kann analog zu (Gl. 3-67) ins globale Koordinatensystem transformiert werden. Es gilt:

$$K_{Vi/i+1G}^{total} = T^T K_{Vi/i+1}^{total} T \tag{Gl. 3-70}$$

Erst nach der Transformation sind die Freiheitsgrade der Verdrehungen ϕ der Teilstäbe i und $i+1$ am Knoten a und b im globalen Koordinatensystem zu koppeln.

$$\begin{aligned}
 \phi_{Xai} &= \phi_{Xai+1} & \phi_{Xbi} &= \phi_{Xbi+1} \\
 \phi_{Yai} &= \phi_{Yai+1} & \phi_{Ybi} &= \phi_{Ybi+1} \\
 \phi_{Zai} &= \phi_{Zai+1} & \phi_{Zbi} &= \phi_{Zbi+1}
 \end{aligned} \tag{Gl. 3-71}$$

Die Kopplung der Querverschiebungen der Teilstäbe i und i+1 am Knoten a und b erfolgt durch die implizite Bedingung [Sof03] mit (Gl. 3-48):

$$\frac{U_{X_{ai+1}} - U_{X_{ai}}}{\delta_x} = \frac{U_{Y_{ai+1}} - U_{Y_{ai}}}{\delta_y} = \frac{U_{Z_{ai+1}} - U_{Z_{ai}}}{\delta_z} \quad \frac{U_{X_{bi+1}} - U_{X_{bi}}}{\delta_x} = \frac{U_{Y_{bi+1}} - U_{Y_{bi}}}{\delta_y} = \frac{U_{Z_{bi+1}} - U_{Z_{bi}}}{\delta_z} \tag{Gl. 3-72}$$

U sind die Freiheitsgrade der Verschiebungen im globalen Koordinatensystem.

3.7 NACHLAUFRECHNUNG MIT ERMITTLUNG DER ZUSTANDSGRÖßEN

Die Grundlage für die Bemessung der Bauteile sind die Schnittkraft- und Verformungsverläufe über die Stablänge. Aus dem Gesamtgleichgewicht am statischen System ergeben sich die Verformungen der Knoten V_G im globalen Koordinatensystem. Diese können mit (Gl. 3-62a) in die lokalen Koordinatensysteme der Elemente zu lokalen Verformungsgrößen v_L transformiert werden. Mit (Gl. 3-4) ergeben sich daraus die Knotenschnittgrößen p_L der Elemente. Die lokalen Verformungsgrößen v_L der Knoten bzw. die Knotenschnittgrößen p_L bilden die Basis für die Funktionen sämtlicher Zustandsgrößen über die Elementlänge (Zustandslinien).

Für die Bemessung im Speziellen sind die Schnittgrößen der Teilquerschnitte (Teilschnittgrößen) von Interesse. Aus ihnen lassen sich in bekannter Weise nach der Stabtheorie die Spannungen ermitteln. Der Schubfluss $T(x)$ in der Fuge sind entscheidend für die Dimensionierung der Verbindung.

Die Verformungsverläufe bilden die Grundlage für eine Beurteilung der Gebrauchstauglichkeit des Tragwerks.

3.7.1 VERFORMUNGSVERLÄUFE

Die lokalen Knotenverformungen v_L sind die Randbedingungen der Funktionen der Verformungsgrößen über die Stablänge x (Verformungsverläufe). Sie lauten am Stabanfang w_{za} , φ_{ya} , v_{ya} , φ_{za} , u_{ia} , sowie in der Stabmitte u_{im} (nur beim 3n-Verbundelement) und am Stabende w_{zb} , φ_{yb} , v_{yb} , φ_{zb} , u_{ib} . Die Verformungsverläufe ergeben sich durch Einsetzen der lokalen Knotenverformungen v_L in die elementspezifischen Ansatzfunktionen (Gl. 3-36), (Gl. 3-37), (Gl. 3-16) für das 2n-Verbundelement und (Gl. 3-36), (Gl. 3-37), (Gl. 3-19) für das 3n-Verbundelement. Es ergibt sich für die Querverschiebungen $w_z(x)$ und $v_y(x)$

$$\begin{aligned}
 w_z(x) &= \left(1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) w_{za} + l \left(\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \varphi_{ya} + \left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) w_{zb} + l \left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \varphi_{yb} \\
 v_y(x) &= \left(1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) w_{ya} + l \left(\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \varphi_{za} + \left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) v_{yb} + l \left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \varphi_{zb}
 \end{aligned} \tag{Gl. 3-73a/b}$$

die Verdrillung $\varphi_x(x)$

$$\varphi_x(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \varphi_{xa} + \left(\frac{x}{l}\right) \varphi_{xb} \quad (\text{Gl. 3-73c})$$

und für das 2n-Verbundelement die Längsverschiebungen $u_i(x)$ eines jeden Teilstabes i mit

$$u_i(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_{ai} + \left(\frac{x}{l}\right) u_{bi} \quad (\text{Gl. 3-73d})$$

und für das 3n-Verbundelement die Längsverschiebungen $u_i(x)$ eines jeden Teilstabes i mit

$$u_i(x) = \left(1 - 3\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right) u_{ai} + \left(4\frac{x}{l} - 4\frac{x^2}{l^2}\right) u_{mi} + \left(-\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right) u_{bi} \quad (\text{Gl. 3-73e})$$

Mit (Gl. 3-3) kann daraus die Relativverschiebung $\delta_{i/i+1}(x)$ der Fuge $i/i+1$ ermittelt werden.

Für das 2n-Verbundelement ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \delta_{i/i+1}(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) (u_{ai+1} - u_{ai}) + \left(\frac{x}{l}\right) (u_{bi+1} - u_{bi}) \\ &+ \left(-6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}\right) w_{za} a_{zi/i+1} + \left(1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) \varphi_{ya} a_{zi/i+1} + \left(6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3}\right) w_{zb} a_{zi/i+1} + \left(-2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) \varphi_{yb} a_{zi/i+1} \\ &+ \left(-6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}\right) v_{ya} a_{yi/i+1} + \left(1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) \varphi_{za} a_{yi/i+1} + \left(6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3}\right) v_{yb} a_{yi/i+1} + \left(-2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) \varphi_{zb} a_{yi/i+1} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3-73f})$$

Für das 3n-Verbundelement ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta_{i/i+1}(x) &= \left(1 - 3\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right) (u_{ai+1} - u_{ai}) + \left(4\frac{x}{l} - 4\frac{x^2}{l^2}\right) (u_{mi+1} - u_{mi}) + \left(-\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right) (u_{bi+1} - u_{bi}) \\ &+ \left(-6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}\right) w_{za} a_{zi/i+1} + \left(1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) \varphi_{ya} a_{zi/i+1} + \left(6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3}\right) w_{zb} a_{zi/i+1} + \left(-2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) \varphi_{yb} a_{zi/i+1} \\ &+ \left(-6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}\right) v_{ya} a_{yi/i+1} + \left(1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) \varphi_{za} a_{yi/i+1} + \left(6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3}\right) v_{yb} a_{yi/i+1} + \left(-2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right) \varphi_{zb} a_{yi/i+1} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3-73g})$$

3.7.2 SCHUBFLUSS IN DER FUGE

Damit ergibt sich mit (Gl. 3-73f) bzw. (Gl. 3-73g) der Schubfluss in der Fuge $i/i+1$ zu

$$T_{i/i+1}(x) = c_{i/i+1} \cdot \delta_{i/i+1}(x) \quad (\text{Gl. 3-74})$$

3.7.3 KNOTENSCHNITTGRÖßEN

Mit (Gl. 3-4) ergeben sich die Knotenschnittgrößen p_L aus dem Produkt der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Elements K mit den Knotenverformungen v_L . Die Elementlasten p_0 sind zu den Knotenschnittgrößen zu addieren. Elementlasten p_0 sind Bestandteil eines Elements und gehen daher in die Berechnung der Knotenschnittgrößen mit ein.

Im Gegensatz zu den Elementlasten sind Knotenlasten keinem Element zugehörig und gehen daher nicht in die Schnittgrößen ein.

Die Knotenschnittgrößen des Gesamtelements setzen sich aus den Knotenschnittgrößen der Teilstäbe, der Verbundfugen, dem Anteil aus Theorie II. Ordnung und den Elementlasten zusammen. Es ergibt sich somit für die Knotenbiegemomente

$$\begin{aligned}
 M_{ya} &= \sum_{i=1}^n M_{ya}^{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} M_{ya}^{Vi/i+1} + M_{ya}^H + M_{ya}^0 \\
 M_{yb} &= - \left(\sum_{i=1}^n M_{yb}^{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} M_{yb}^{Vi/i+1} + M_{yb}^H + M_{yb}^0 \right) \\
 M_{za} &= \sum_{i=1}^n M_{za}^{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} M_{za}^{Vi/i+1} + M_{za}^H + M_{za}^0 \\
 M_{zb} &= - \left(\sum_{i=1}^n M_{zb}^{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} M_{zb}^{Vi/i+1} + M_{zb}^H + M_{zb}^0 \right) \\
 M_{Ta} &= - (M_{Ta} + M_{Ta}^H + M_{Ta}^0) \\
 M_{Tb} &= M_{Tb} + M_{Tb}^H + M_{Tb}^0
 \end{aligned} \tag{Gl. 3-75a-f}$$

und für die Knotenquerkräfte

$$\begin{aligned}
 Q_{za} &= - \left(\sum_{i=1}^n Q_{za}^{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} Q_{za}^{Vi/i+1} + Q_{za}^H + Q_{za}^0 \right) \\
 Q_{zb} &= \sum_{i=1}^n Q_{zb}^{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} Q_{zb}^{Vi/i+1} + Q_{zb}^H + Q_{zb}^0 \\
 Q_{ya} &= - \left(\sum_{i=1}^n Q_{ya}^{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} Q_{ya}^{Vi/i+1} + Q_{ya}^H + Q_{ya}^0 \right) \\
 Q_{yb} &= \sum_{i=1}^n M_{yb}^{Si} + \sum_{i=1}^{n-1} Q_{yb}^{Vi/i+1} + Q_{yb}^H + Q_{yb}^0
 \end{aligned} \tag{Gl. 3-76a-d}$$

Die Knotennormalkräfte sind

$$\begin{aligned}
 N_{ai} &= - \left(N_{ai}^{Si} + N_{ai}^{Vi/i-1} + N_{ai}^{Vi/i+1} + N_{ai}^0 \right) \\
 N_{bi} &= N_{bi}^{Si} + N_{bi}^{Vi/i-1} + N_{bi}^{Vi/i+1} + N_{bi}^0
 \end{aligned} \tag{Gl. 3-77a-b}$$

Die negativen Vorzeichen ergeben sich aus der Vorzeichendefinition der FEM, die gegenläufig zur klassischen Vorzeichendefinition der Stabtheorie für die Anfangsnormalkräfte, die Anfangsquerkräfte, die Endbiegemomente und das Anfangstorsionsmoment ist.

Am Innenknoten m_i des $3n$ -Verbundelements greifen nur Normalkräfte eines Elementes an. Dies sind die Normalkraft $N_{m_i}^{Si}$ des Stabes i , die Normalkräfte $N_{m_i}^{Vi/i-1}$ und $N_{m_i}^{Vi/i+1}$ der angrenzenden Fugen $i/i-1$ und $i/i+1$ und einer evtl. einwirkenden Elementnormalkraft $N_{m_i}^0$. Diese bilden ein Gleichgewicht. Für die Knotennormalkraft N_{m_i} ergibt sich somit der Wert null.

3.7.4 SCHNITTGRÖßENVERLÄUFE

Der Verlauf sämtlicher Schnittgrößen zwischen den Knoten basiert neben dem Verlauf der Gesamtquerkraft $Q_{ges}(x)$ im Wesentlichen auf den Schubflussverläufen $T_{v/i+1}(x)$ (Gl. 3-74) der Fugen. Sie sind für das Tragverhalten von nachgiebigen Verbundquerschnitten die wichtigsten

Größen. Ihre realitätsnahe Abbildung ist von entscheidender Bedeutung für die Qualität der Ergebnisse.

Geht man von einer konstanten Steckenlast $q_z(x)$ bzw. $q_y(x)$ aus, so ist die Gesamtquerkraft $Q_{zges}(x)$ bzw. $Q_{yges}(x)$ eine lineare Funktion (Gl. 2-5f) zwischen den zugehörigen Knotenschnittgrößen (Gl. 3-76) und lautet:

$$Q_{zges}(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) Q_{za} + \left(\frac{x}{l}\right) Q_{zb} \quad \text{bzw.}$$

$$Q_{yges}(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) Q_{ya} + \left(\frac{x}{l}\right) Q_{yb} \quad (\text{Gl. 3-79})$$

Die Gesamtquerkraft ist die Summe der Eigenquerkräfte Q^E der Teilquerschnitte und der Querkräfte aus der Verbundwirkung Q^V

$$Q_{zges}(x) = Q_z^E(x) + Q_z^V(x) \quad \text{bzw.}$$

$$Q_{yges}(x) = Q_y^E(x) + Q_y^V(x) \quad (\text{Gl. 3-80})$$

mit

$$Q_z^E(x) = \sum_{i=1}^n Q_{zi}(x) \quad \text{und} \quad Q_z^V(x) = \sum_{i=1}^n R_{zi}(x) \quad \text{mit} \quad R_{zi}(x) = \left(\frac{T_{i/i+1}(x) + T_{i/i-1}(x)}{2}\right) h_i \quad \text{bzw.}$$

$$Q_y^E(x) = \sum_{i=1}^n Q_{yi}(x) \quad \text{und} \quad Q_y^V(x) = \sum_{i=1}^n R_{yi}(x) \quad \text{mit} \quad R_{yi}(x) = \left(\frac{T_{i/i+1}(x) + T_{i/i-1}(x)}{2}\right) b_i \quad (\text{Gl. 3-81})$$

Somit ergibt sich für den gesamten Eigenanteil

$$Q_z^E(x) = Q_{zges}(x) - Q_z^V(x) \quad \text{bzw.}$$

$$Q_y^E(x) = Q_{yges}(x) - Q_y^V(x) \quad (\text{Gl. 3-82})$$

der sich auf die Teilquerschnitte im Verhältnis ihrer Biegesteifigkeiten aufteilt mit

$$Q_{zi}^E(x) = Q_z^E(x) \frac{EI_{yi}}{\sum_{i=1}^n EI_{yi}} \quad \text{bzw.}$$

$$Q_{yi}^E(x) = Q_y^E(x) \frac{EI_{zi}}{\sum_{i=1}^n EI_{zi}} \quad (\text{Gl. 3-83})$$

Aus (Gl. 3-83) mit (Gl. 3-82) und (Gl. 3-81) ergibt sich somit für die Teilquerkraft im Teilquerschnitt i

$$Q_{zi}^E(x) = \frac{EI_{yi}}{\sum_{i=1}^n EI_{yi}} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) Q_{za} + \left(\frac{x}{l}\right) Q_{zb} - Q_z^V(x) \right] \quad \text{bzw.}$$

$$Q_{yi}^E(x) = \frac{EI_{zi}}{\sum_{i=1}^n EI_{zi}} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) Q_{ya} + \left(\frac{x}{l}\right) Q_{yb} - Q_y^V(x) \right] \quad (\text{Gl. 3-84})$$

Die Biegemomente der Teilstäbe am Elementanfang und am Elementende können aus den Biegemomenten der Knoten (Gl. 3-75) errechnet werden. Die Knotenbiegemomente werden im Verhältnis der Biegesteifigkeiten auf die Teilstäbe verteilt. Es gilt

$$M_{yai} = M_{ya} \frac{EI_{yi}}{\sum_{i=1}^n EI_{yi}} \quad \text{bzw.}$$

$$M_{zai} = M_{za} \frac{EI_{zi}}{\sum_{i=1}^n EI_{zi}} \quad (\text{Gl. 3-85})$$

und

$$M_{ybi} = M_{yb} \frac{EI_{yi}}{\sum_{i=1}^n EI_{yi}} \quad \text{bzw.}$$

$$M_{zbi} = M_{zb} \frac{EI_{zi}}{\sum_{i=1}^n EI_{zi}} \quad (\text{Gl. 3-86})$$

Integriert man die Eigenquerkräfte (Gl. 3-84), so ergeben sich die Momentenverläufe. Integrationskonstanten sind die Anfangsmomente M_{yai} bzw. M_{zai} :

$$M_{yi}(x) = \int Q_{zi}^E(x) dx + M_{yai} \quad \text{bzw.}$$

$$M_{zi}(x) = \int Q_{yi}^E(x) dx + M_{zai} \quad (\text{Gl. 3-87})$$

Damit ergibt sich aus (Gl. 3-87) mit (Gl. 3-85) und (Gl. 3-84)

$$M_{yi}(x) = \frac{EI_{yi}}{\sum_{i=1}^n EI_{yi}} \left[M_{ya} + \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) Q_{za} + \left(\frac{x^2}{2l} \right) Q_{zb} - \int Q_y^V(x) dx \right]$$

$$M_{zi}(x) = \frac{EI_{zi}}{\sum_{i=1}^n EI_{zi}} \left[M_{za} + \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) Q_{ya} + \left(\frac{x^2}{2l} \right) Q_{yb} - \int Q_z^V(x) dx \right] \quad (\text{Gl. 3-88})$$

Die Schubflüsse, die auf einen Teilstab einwirken, verändern deren Normalkraft. Die Normalkräfte eines Teilstabes i errechnen sich nach (Gl. 2-9) aus

$$N_i(x) = N_{ai} + \int T_{i/i-1}(x) dx - \int T_{i/i+1}(x) dx \quad (\text{Gl. 3-89})$$

Integrationskonstante ist die Anfangsnormalkraft N_{ai} (Gl. 3-77).

Die Gesamtnormalkraft $N_{\text{ges}}(x)$ ist die Summe der Teilnormalkräfte $N_i(x)$. Sie geht in die Berechnungen nach Theorie II. Ordnung ein.

$$N_{\text{ges}}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \quad (\text{Gl. 3-90})$$

Wirken keine Elementlängslasten, ist $N_{\text{ges}}(x)$ konstant. Dies lässt sich durch eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung der Kräfte in Längsrichtung nachweisen.

3.7.5 POLYNOMGRADE

In (Tab. 3-2) sind die Polynomgrade der Funktionen der Zustandsgrößen für das 2n- und das 3n-Verbundelement zusammengefasst.

Die Relativverschiebung $\delta(x)$ setzt sich aus einem Längsverschiebungsanteil und einem Verdrehungsanteil $\varphi_y(x)$ bzw. $\varphi_z(x)$ zusammen (Gl. 3-3). Die Ansätze für beide Anteile sind beim 2n-Verbundelement nicht von gleichen Polynomgrad. Es ergibt sich somit ein gemischter Ansatz für $\delta(x)$ und alle davon abhängigen Funktionen. Diese werden in der Tabelle (Tab. 3-2) durch „5“ gekennzeichnet.

	2n-Verbundelement		3n-Verbundelement	
Längsverschiebung $u_i(x)$	linear	1	quadratisch	2
Querverschiebung $w_z(x), v_y(x)$	kubisch	3	kubisch	3
Biege-Verdrehung $\varphi_y(x), \varphi_z(x)$	quadratisch	2	quadratisch	2
Relativverschiebung $\delta(x)$	linear+quadr.	1,5	quadratisch	2
Schubfluss $T(x)$	linear+quadr.	1,5	quadratisch	2
Querzug/-druck $p_v(x)$	konst.+linear	0,5	linear	1
Gesamtquerkraft $Q_{ges}(x)$	linear	1	linear	1
Teilquerkraft $Q_{z_i}(x), Q_{v_i}(x)$	linear+quadr.	1,5	quadratisch	2
Gesamtnormalkraft $N_{ges}(x)$	konst.	0	konst.	0
Teilnormalkraft $N_{i_i}(x)$	quadr.+kubisch	2,5	kubisch	3
Teilbiegemoment $M_{v_i}(x), M_{z_i}(x)$	quadr.+kubisch	2,5	kubisch	3
Torsions-Verdrehung $\varphi_x(x)$	linear	1	linear	1
Torsionsmoment $M_T(x)$	konst.	0	konst.	0

Tab. 3-2: Polynomgrade der Zustandsgrößen der Verbundelemente

3.7.6 BEISPIEL

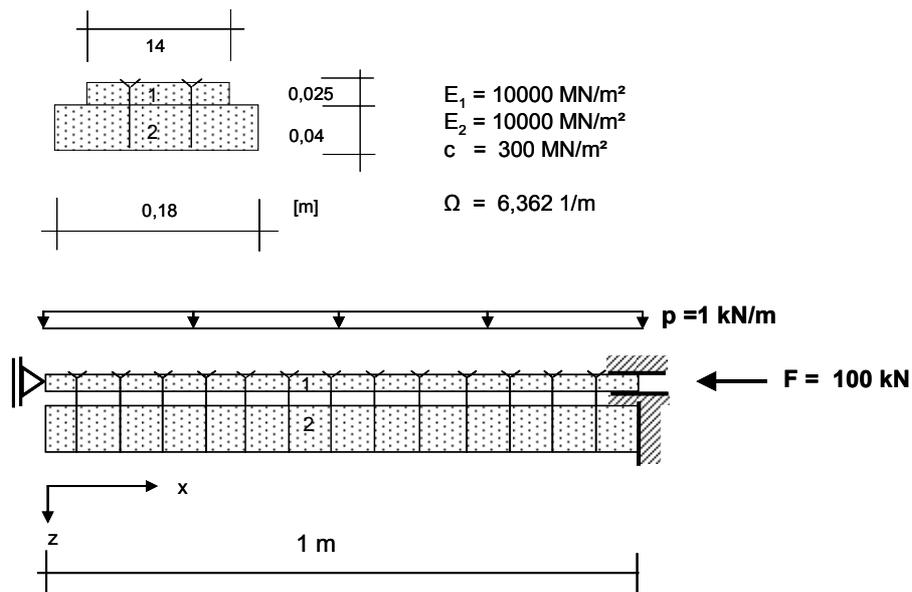


Abb. 3-13: Verifikation der Nachlaufrechnung am Beispiel aus Kapitel 2.12

Zur Verifikation und zur Visualisierung der Gleichungen (Gl. 3-73) bis (Gl. 3-89) der Nachlaufrechnung wird das Beispiel (Abb. 3-13) aus Kapitel 2.12 numerisch mit $3n$ -Verbundelementen nach Theorie I. Ordnung berechnet und der exakten analytischen Lösung gegenübergestellt. Das System wird mit einem, zwei bzw. vier Verbundelementen diskretisiert.

Die große Längseinzelkraft F , die nur in den Teilstab 1 eingeleitet wird, stellt eine ungewöhnliche und extreme Belastung dar. Auch die relative Fugensteifigkeit Ω (Gl. 2-15) ist mit $6,362 [1/m]$ relativ hoch gewählt. Die Annahme dieser extremen Systembedingungen soll die Robustheit des Berechnungsverfahrens unter Beweis stellen. So ergibt sich bei der Diskretisierung mit einem Element eine Fugenkennzahl (Gl. 2-16) $\varepsilon_F = 6,362$, mit zwei Elementen $\varepsilon_F = 3,181$ und mit vier Elementen eine Fugenkennzahl $\varepsilon_F = 1,56$.

Die Zustandslinien der numerischen Lösungen zeigen durchweg eine gute Übereinstimmung mit den Verläufen der analytischen Lösung. Bereits bei einer Modellierung des Systems mit zwei Verbundelementen ist eine für die Baupraxis ausreichende Genauigkeit der numerisch gewonnenen Zustandslinien festzustellen. Bei vier Elementen ist der Verlauf nahezu deckungsgleich mit der analytischen Lösung. Lediglich das Modell mit einem Element zeigt nennenswerte Abweichungen. Dies ist auf die hohe Fugenkennzahl $\varepsilon_F = 6,382$ zurückzuführen, die deutlich über dem in Kapitel 4.4 angegebenen empfohlenen Grenzwert liegt.

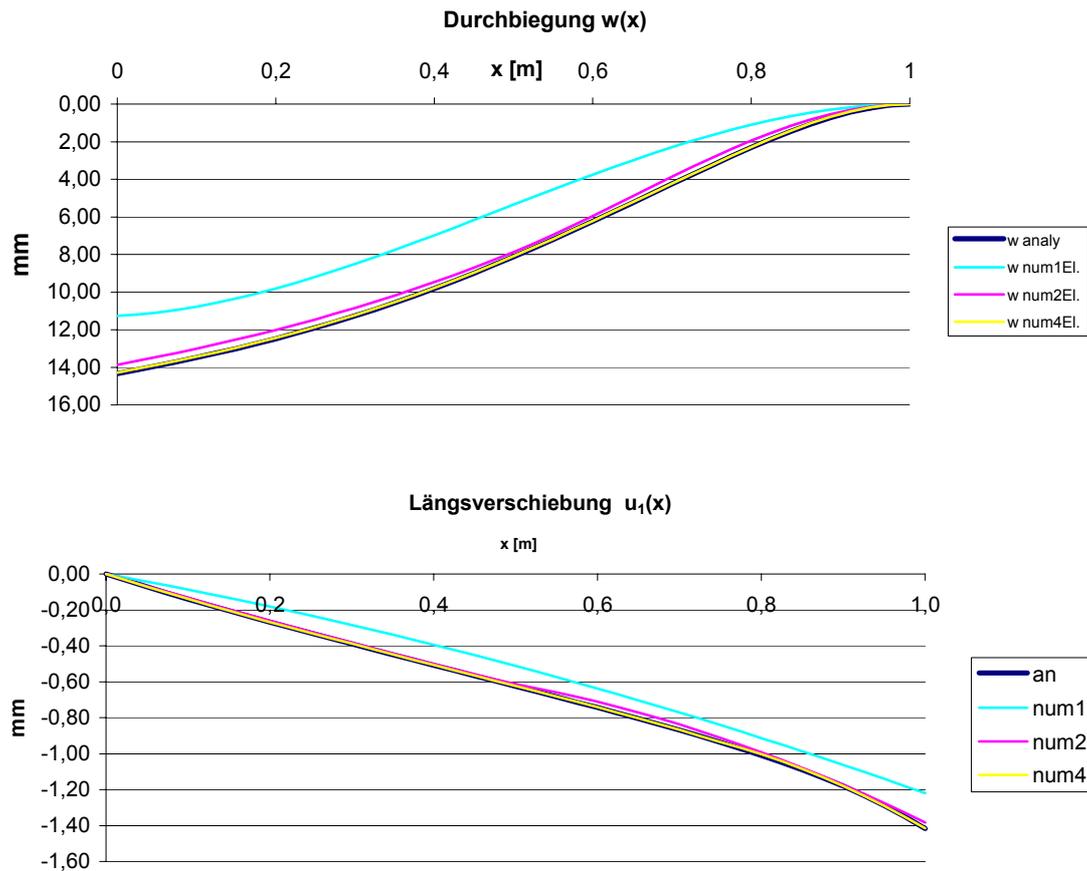


Abb. 3-14: Verformungsverläufe

Die größten Diskrepanzen sind bei den Verformungsgrößenverläufen zu beobachten (Abb. 3-14). Je größer der Modellierungsgrad, desto kleiner sind die Verformungen. So wird z. B. die Durchbiegung w am Stabanfang bei der Modellierung mit einem Element um 27 % zu gering ermittelt. Der Verlauf ist annähernd parallel zur angestrebten analytischen Lösung. Ähnliches ergibt sich bei der Längsverschiebung $u_1(x)$. Am Stabende beträgt die Abweichung ca. 14 % und verläuft ebenfalls annähernd parallel zur analytischen Lösung. Bei der Modellierung mit zwei Elementen beträgt die Abweichung der Durchbiegung am Stabanfang nur 3,3 %. Bei $x = 0,65$ m ist bei der Längsverschiebung $u_1(x)$ eine Abweichung von 5 % zu beobachten. Bei der Längsverschiebung $u_1(x)$ mit zwei Elementen ist deutlich ein Knick an der Übergangsstelle der Elemente zu erkennen. Dies ist auf den nur quadratischen Polynomgrad der Längsverschiebung $u_i(x)$ zurückzuführen. Die Neigungen der Tangenten (Ableitungen) der Längsverschiebungen der beiden Elemente sind an der Übergangsstelle nicht zwingend gleich groß. Bei der Modellierung mit vier Elementen sind die Verformungsverläufe nahezu deckungsgleich mit der analytischen Lösung. Die Abweichung ist an keiner Stelle größer 0,5 %.

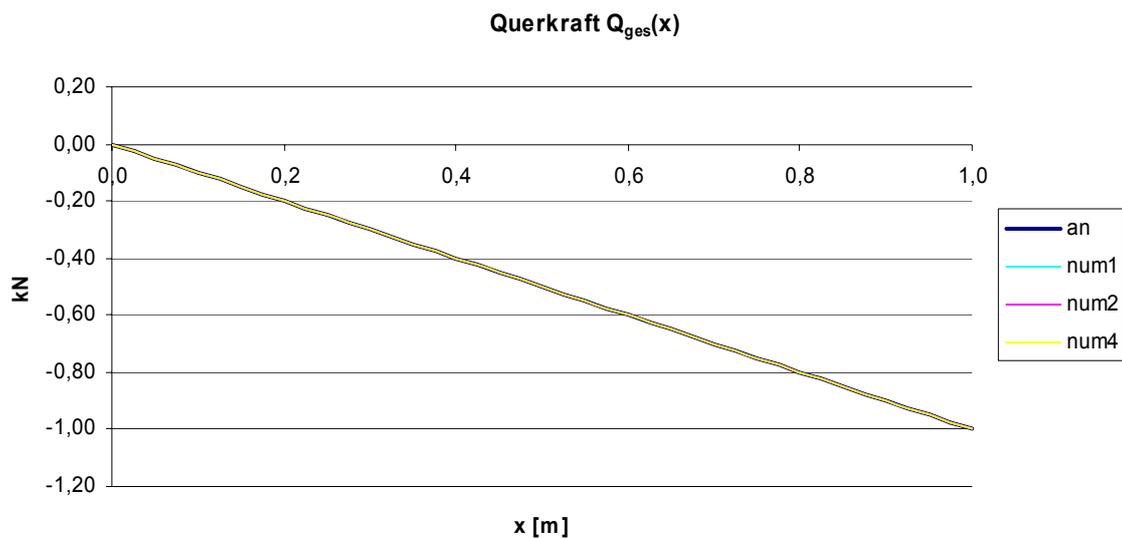


Abb. 3-15: Gesamtquerkraft und Schubfluss in der Fuge

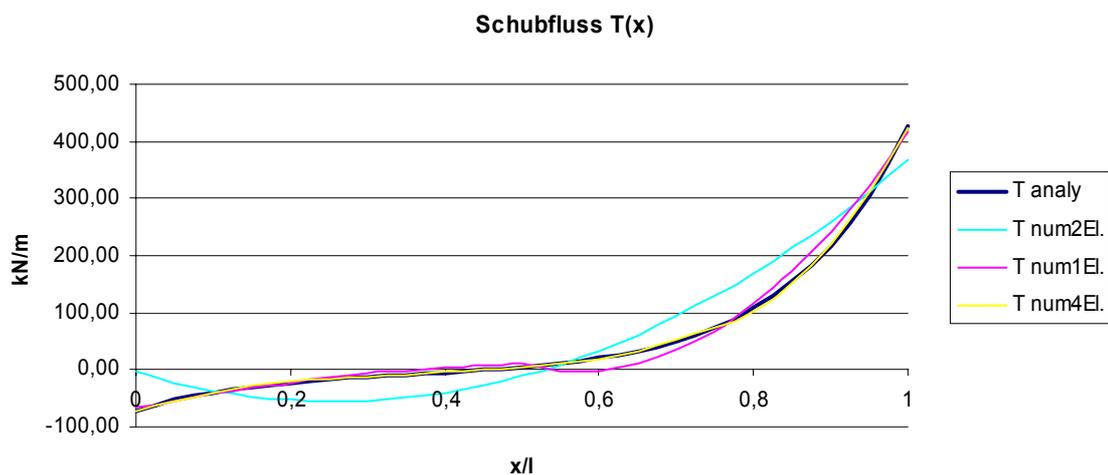


Abb. 3-16: Gesamtquerkraft und Schubfluss in der Fuge

Die Grundlage für die Ermittlung aller Schnittgrößen sind die Gesamtquerkraft $Q_{ges}(x)$ (Abb. 3-15) und der Schubfluss $T(x)$ in der Fuge (Abb. 3-16). Die Gesamtquerkraft wird bei allen Modellierungsgraden exakt abgebildet. Eine Abweichung ist nicht erkennbar. Dadurch sind alle Schnittgrößen von einer guten Abbildung des Schubflusses $T(x)$ abhängig.

Der Schubfluss $T(x)$ kann bei der Modellierung mit einem Element nur grob den exakten Verlauf wiedergeben. Der Krümmungswechsel mit dem Wendepunkt ca. in Stabmitte wird nicht abgebildet. Das Maximum am Stabende wird um 15 % zu gering ermittelt. Bei zwei Elementen ist in der ersten Stabhälfte eine befriedigende Übereinstimmung erkennbar. Der Verlauf in der zweiten Stabhälfte wird zunächst zu gering, im weiteren Verlauf als zu hoch, das Maximum am Stabende aber nahezu exakt ermittelt. Der Verlauf bei vier Elementen ist ebenso deckungsgleich mit der analytischen Lösung. An den Übergangsstellen zwischen den Elementen sind Knicke im Verlauf erkennbar. Die Ursache liegt in der quadratischen Funktion von $T(x)$.

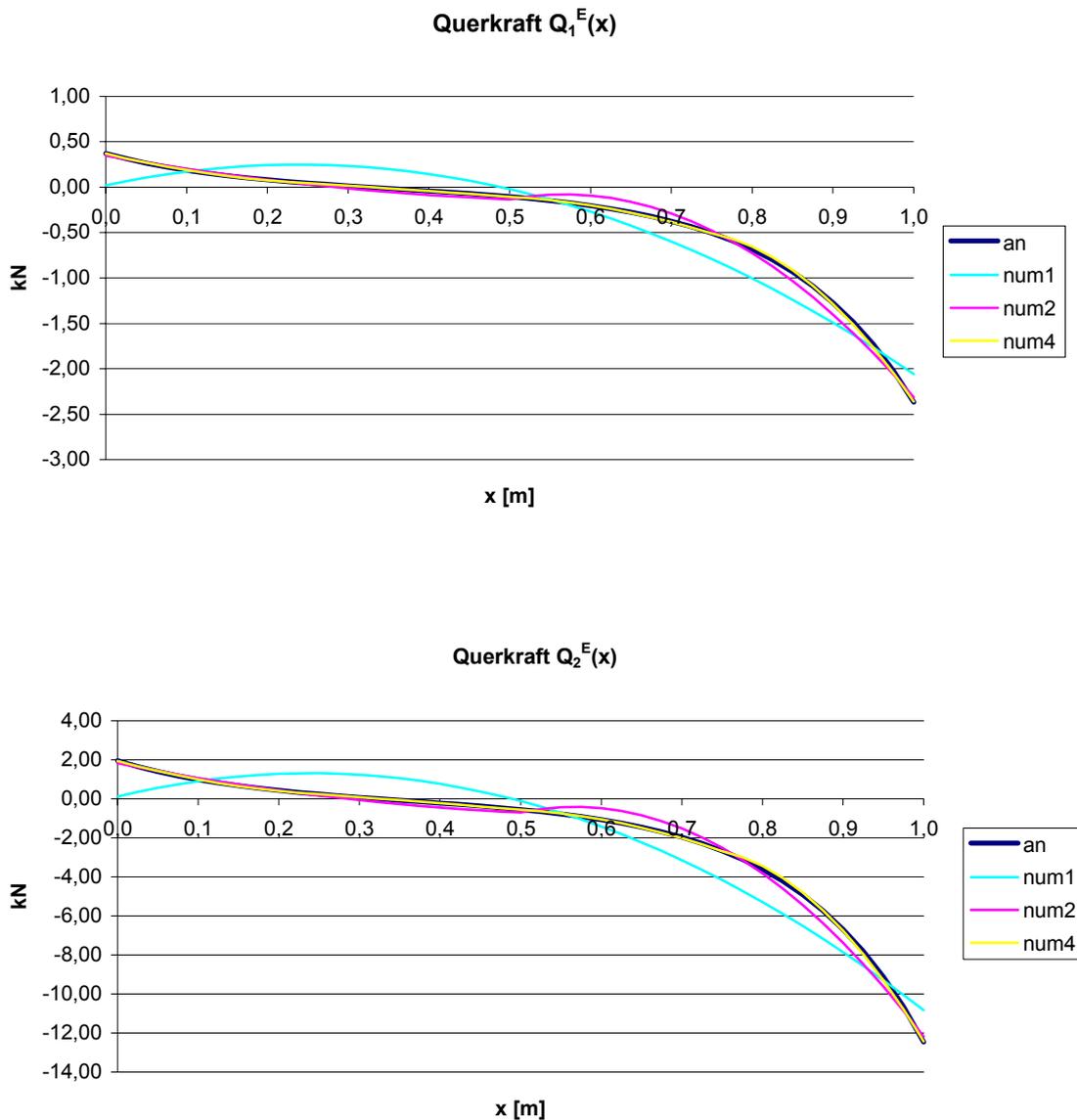


Abb. 3-17: Eigenquerkräfte

Die Eigenquerkräfte $Q_1^E(x)$ und $Q_2^E(x)$ (Abb. 3-17) ergeben sich aus der Gesamtquerkraft $Q_{ges}(x)$ abzüglich der Querkräft $Q^V(x)$ aus der Verbundwirkung (Gl. 3-80). $Q^V(x)$ ist direkt proportional zum Schubfluss $T(x)$.

Aus der Integration der Eigenquerkräfte ergeben sich die Teilmomente (Abb. 3-18). Ihre Verläufe sind kubische Funktionen. Bei einem Element ist der Verlauf nicht befriedigend. Allerdings werden die bemessungsrelevanten Maxima am Stabende mit einer Überschätzung von 7 % noch in einer Weise abgebildet, die für baupraktische Zwecke als ausreichend anzusehen sind. Die Verläufe bei zwei Elementen sind befriedigend mit einer Überschätzung der Maxima von 1,6 % (Moment M_1) bzw. 2,4 % (Moment M_2). Bei vier Elementen sind die Verläufe als deckungsgleich anzusehen mit einer Abweichung im Verlauf von maximal 1,5 %. Die Maxima am Stabende werden nur um 0,17 % (Moment M_1) bzw. um 0,24 % (Moment M_2) überschätzt. Die Gesamtnormalkraft ist konstant über die Stablänge (Abb. 3-19), die in jedem

Modellierungsgrad auch als konstant abgebildet wird. Der Betrag wird allerdings bei einem Element um 10 %, bei zwei Elementen um 2 % und bei vier Elementen um 0,2 % unterschätzt.

Die Elementendgrößen der Teilnormalkräfte werden in ähnlicher Genauigkeit ermittelt wie die Gesamtnormalkraft. Der Verlauf dazwischen besitzt bei einem Element eine größere Abweichung, ist aber bei zwei Elementen befriedigend. Bei vier Elementen sind die Verläufe wiederum deckungsgleich mit der analytischen Lösung mit einer maximalen Abweichung von 0,5 %.

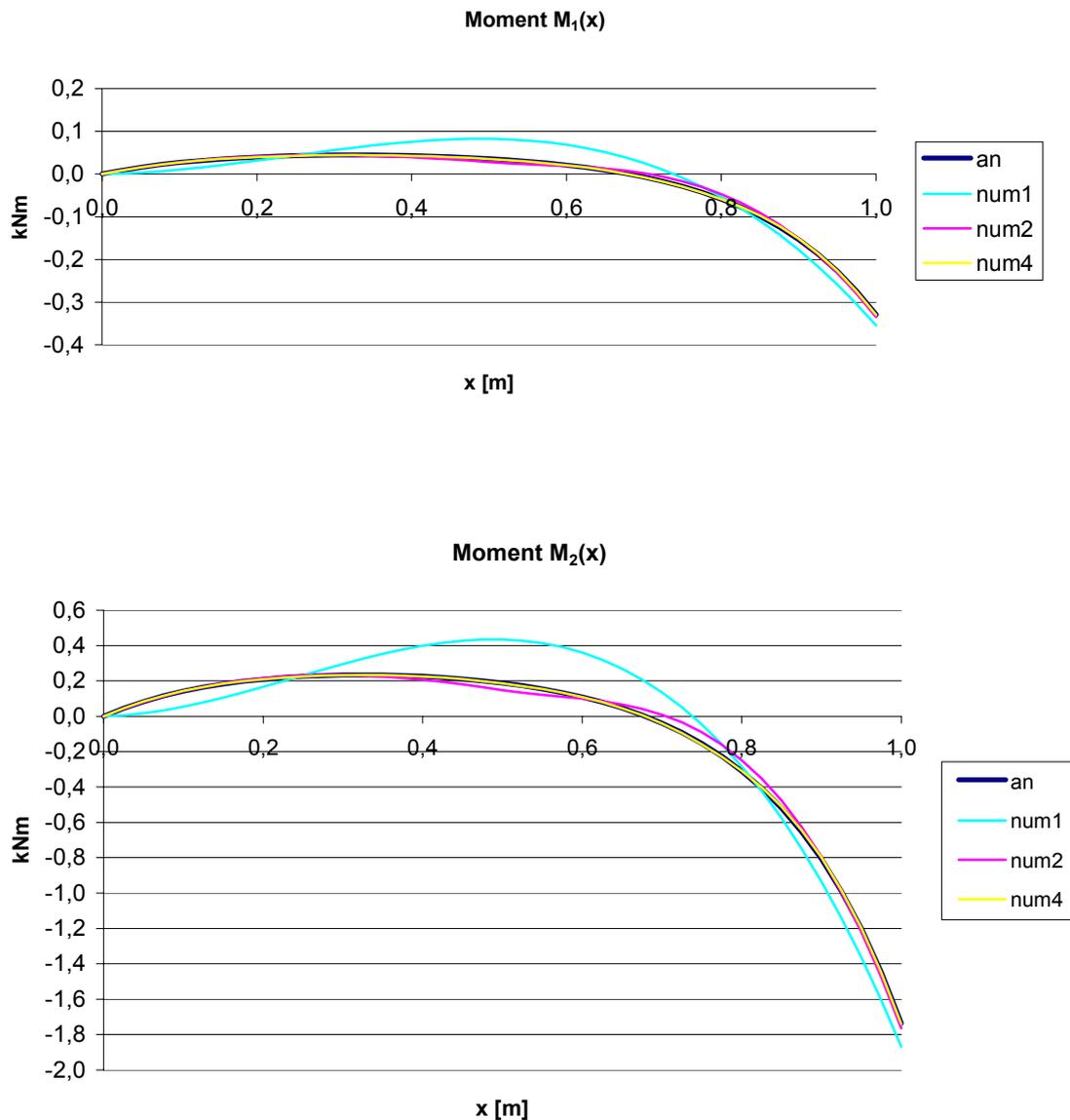


Abb. 3-18: Teilmomente

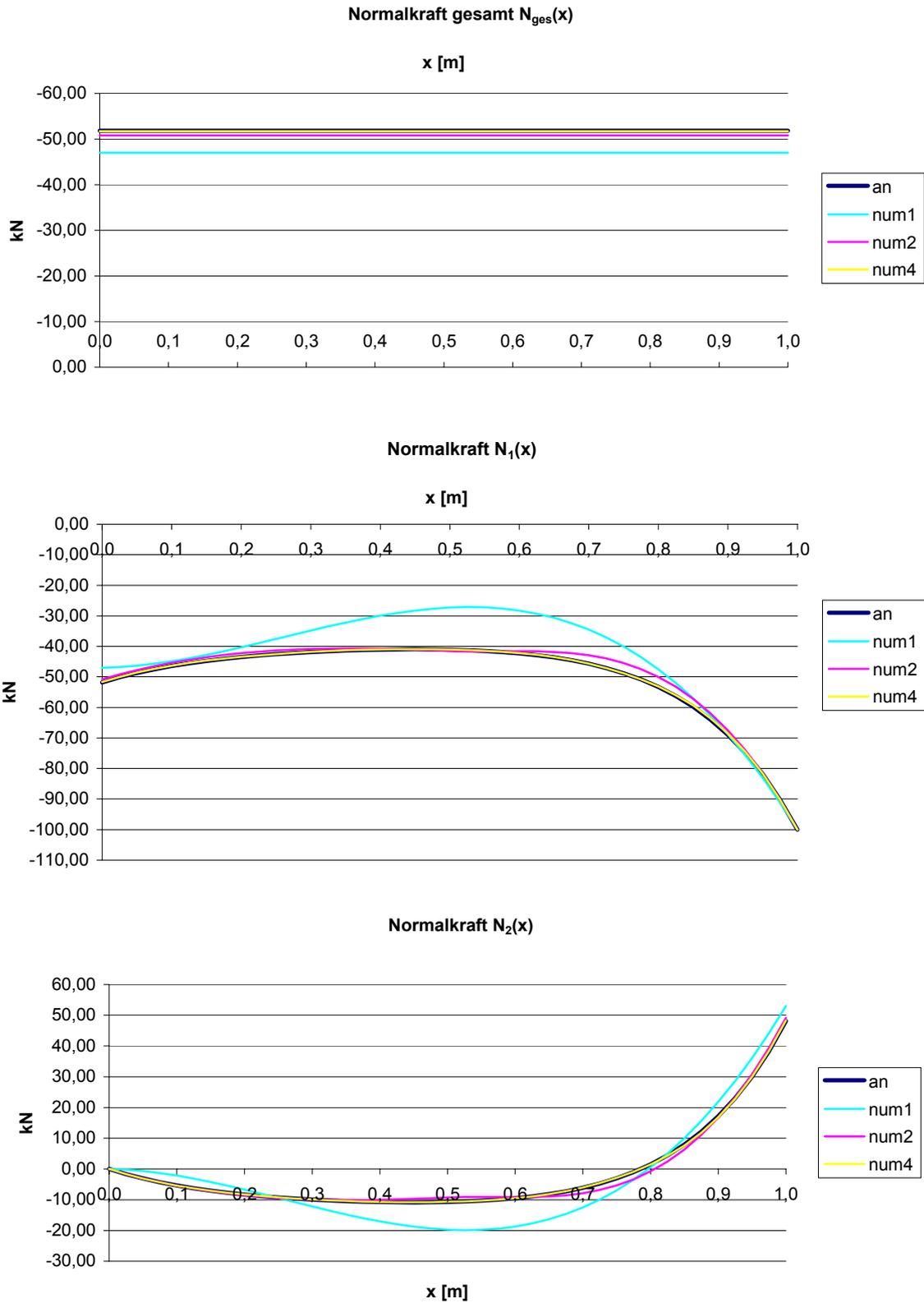


Abb. 3-19: Normalkräfte

3.8 SCHUBSPANNUNGEN AUS QUERKRAFT

Die Schubspannungen für beliebig unregelmäßige, nichtdünnwandige Querschnitte sind analytisch nicht ermittelbar und können daher nur mit numerischen Methoden genähert gewonnen werden. Hierfür bietet die FEM mit einer Diskretisierung des Tragwerks mit Volumenelementen eine Lösungsmethode an. Eine weitere Möglichkeit ist das Integralverfahren nach Sauer [Sau80], mit dem die Schubspannungen durch auf dem Rand des Querschnitts definierten Lösungsfunktionen ermittelt werden können. Beide Verfahren sind aufwändig und nur dann sinnvoll anzuwenden, wenn eine hohe Genauigkeit gefordert wird.

Für die meisten in der Baupraxis üblichen Querschnitte können die Schubspannungen mit einfachen Überlegungen mit guter Näherung ermittelt werden, ohne dabei die Stabtheorie verlassen zu müssen.

Im Rahmen der Stabtheorie (nach Bernoulli und auch nach Timoshenko) werden die Schubspannungen erst nachträglich aus den Normalspannungen ermittelt. Sie ergeben sich aus dem Kräftegleichgewicht in x-Richtung am herausgeschnittenen infinitesimal kleinen Element des Tragwerks (Abb. 3-20).

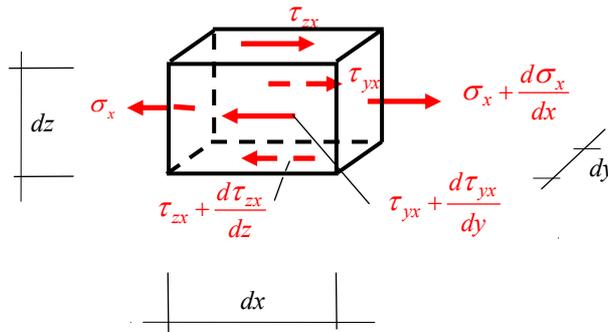


Abb. 3-20: Schubspannungen aus dem Gleichgewicht in x-Richtung

Für die Summe der Kräfte in x-Richtung gilt:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0 \quad (\text{Gl. 3-92})$$

Die Normalspannung σ_x ergibt sich aus den Biegemomenten und der Normalkraft. Verändert sich die Normalspannung σ_x über die Stablänge x , so sind Schubspannungen für das Kräftegleichgewicht notwendig. Es gilt:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{z}{I_y} + \frac{dM_z}{dx} \frac{y}{I_z} + \frac{dN}{dx} \frac{1}{A} \quad (\text{Gl. 3-93})$$

Bei Verbundquerschnitten sind die Teilschnittgrößen Grundlage für die Ermittlung der Schubspannungen. Bei monolithischen Querschnitten verändert sich, soweit keine Längskräfte eingeleitet werden, die Normalkraft über die Stablänge nicht. Eine Änderung der Normalspannung σ_x resultiert daher dort einzig aus den Änderungen der Biegemomente.

Im Unterschied dazu verändert sich bei Verbundquerschnitten über die Stablänge die Normalkräfte N_i in den Teilquerschnitten infolge der Verbundwirkung. Die daraus resultierenden Verbundschubspannungen τ^V müssen berücksichtigt werden.

Die Schubspannungen τ setzen sich somit aus den Eigenschubspannungen τ^E und aus den Schubspannungen τ^V aus der Verbundwirkung zusammen:

$$\tau = \tau^E + \tau^V \tag{Gl. 3-94}$$

Aus der Veränderung der Teilbiegemomente M_{y_i} und M_{z_i} ergeben sich Eigenschubspannungen τ^E innerhalb der Teilquerschnitte. Die Resultierende in z- bzw. y-Richtung aus τ^E sind die Eigenteilquerkräfte Q_{z_i} und Q_{y_i} .

Um die folgenden Ausführungen übersichtlich darzustellen, wird im Weiteren nur eine ebene Biegetragwirkung in der xz-Ebene betrachtet. Es wirken somit auf den Querschnitt nur Biegemomente um die y-Achse und Querkräfte in z-Richtung. Eine Tragwirkung senkrecht (xy-Ebene) ist analog dazu. Die Teilquerkräfte $Q_{z_i}^E$ ergeben sich aus (Gl. 3-82). Mit der bekannten Dübelformel lassen sich daraus die Eigenschubspannungen τ^E bzw. der Eigenschubfluss T^E bestimmen mit:

$$\tau_{zx_i}^E(x, z) = - \frac{Q_{z_i}^E(x) S_{y_i}(z)}{I_{y_i} b_i} \tag{Gl. 3-95a}$$

$$T_{zx_i}^E(x, z) = - \frac{Q_{z_i}^E(x) S_{y_i}(z)}{I_{y_i}} \tag{Gl. 3-95b}$$

Die Querschnittswerte statisches Moment $S_{y_i}(z)$ und Trägheitsmoment I_{y_i} beziehen sich auf den Teilquerschnitt i in seinem Koordinatensystem.

Ist der Teilquerschnitt i ein Rechteckquerschnitt mit der Höhe h und der Breite b , so ergibt sich eine maximale Eigenschubspannung bzw. der Schubfluss in Höhe des Teilschwerpunkts S_i zu:

$$\tau_{zx_i \max}^E = 1,5 \frac{Q_{z_i}^E}{b_i h_i} \tag{Gl. 3-96a}$$

$$T_{zx_i \max}^E = 1,5 \frac{Q_{z_i}^E}{h_i} \tag{Gl. 3-96b}$$

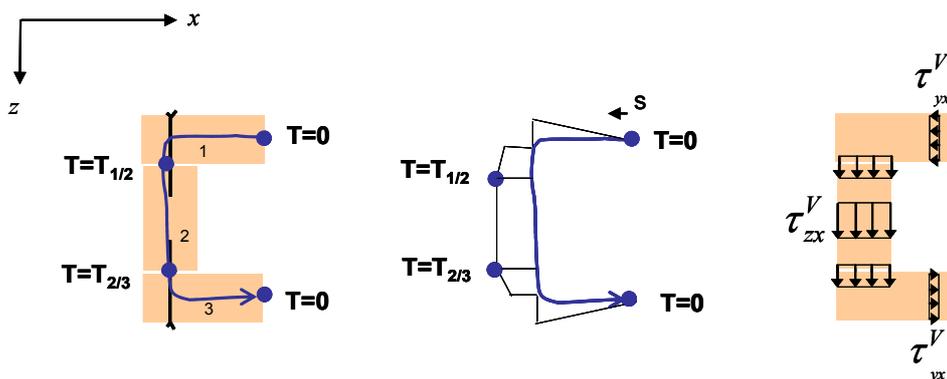


Abb. 3-21: Schubspannungen aus Querkraft infolge Verbundwirkung

Die Schubspannungen τ^V infolge Verbundwirkung werden konstant über die Querschnittsbreite angenommen. Die über die Breite integrierten Schubspannungen, der Schubfluss T , greift somit in der Mitte des Teilquerschnitts an (Abb. 3-21). Der Schubfluss $T(x)$ ist an einigen Stellen im Querschnitt bekannt. Jedes Berechnungsverfahren (Gl. 3-74) bzw. (Gl. 2-44) gibt Auskunft über die Schubflüsse in den Fugen. Darüber hinaus ist der Schubfluss an den Querschnittsenden gleich

Null (Abb. 3-21). Zwischen diesen Stützstellen wird ein linearer Schubflussverlauf angenommen. Bei einer Breite b quer zum Schubfluss ergibt sich somit näherungsweise der Schubfluss aus Verbundwirkung zu:

$$\tau^V = \frac{T}{b} \tag{Gl. 3-97}$$

3.9 LAGE DES SCHUBMITTELPUNKTS

Der Schubmittelpunkt M ist der Punkt des Querschnitts, durch den die Lastebenen der Querlasten q_y und q_z verlaufen müssen, damit keine ungewollte Torsionsbeanspruchung entsteht [Ste99]. Die Berechnung des Schubmittelpunkts basiert auf der Forderung, dass das Moment aus äußerer Last (Querkräfte) gleich dem inneren Moment aus den Schubspannungen sein muss (Abb. 3-22).

Bei doppelt symmetrischen Querschnitten liegt M im Schnittpunkt der Symmetrieachsen (vgl. Abb. 3-1a). Bei einfach symmetrischen Querschnitten, deren Profilmittellinien sich in einem Punkt schneiden, liegt M im Schnittpunkt der Profilmittellinien (vgl. Abb. 3-1d) [Kin02]. Bei allen anderen Querschnitten kann die Lage von M erst nachträglich aus den system- und lastabhängigen Schubspannungen ermittelt werden.

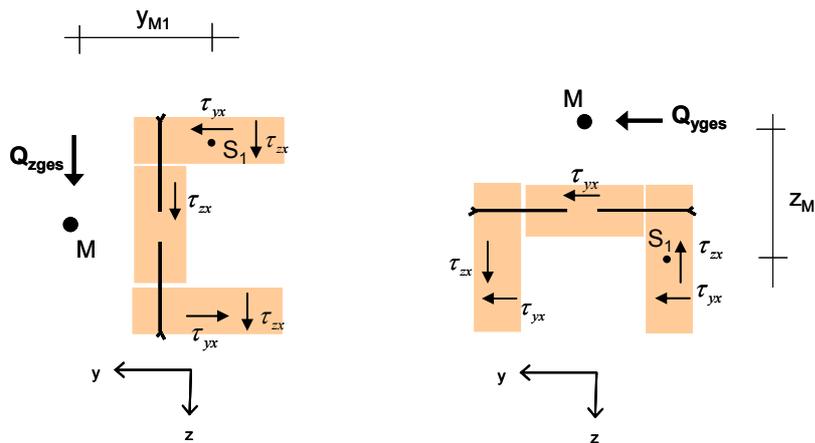


Abb. 3-22: Lage des Schubmittelpunkts M

Wählt man die Schwerachse S_1 des Teilquerschnitts 1 als Bezugskoordinatensystem, so muss gelten [Sau80]:

$$Q_{zges} y_{M1} = \iint (\tau_{zx} y - \tau_{xy} z) dy dz \tag{Gl. 3-98}$$

$$Q_{yges} z_{M1} = \iint (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dy dz$$

Q_{zges} bzw. Q_{yges} sind die Gesamtquerkräfte.

Im Weiteren wird zunächst nur eine Gesamtquerkraft Q_{zges} angenommen. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \iint \tau_{zx} dy dz &= Q_{zges} \\ \iint \tau_{yx} dy dz &= 0 \end{aligned} \tag{Gl. 3-99}$$

Die Gesamtquerkraft wird durch einen Eigenanteil und einen Verbundanteil abgetragen.

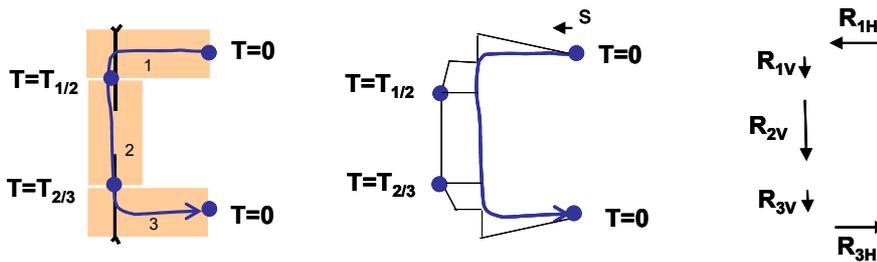


Abb. 3-23: Schubfluss aus Querkraft und Resultierende des Schubflusses infolge Verbundwirkung

Betrachtet wird zunächst der Verbundanteil mit dem Schubfluss aus der Verbundwirkung T^V . In Teilbereichen werden durch Integration über s Teilresultierende R gebildet (Abb. 3-23):

$$R = \int T ds \tag{Gl. 3-100}$$

R liegt jeweils im Schwerpunkt der Teilintegrationsfläche.

Die Resultierende der Schubspannungen aus Eigentragswirkung entspricht der Eigenquerkraft Q_{zi}^E . Es gilt:

$$Q_{zi}^E = \int \tau_{xz_i}^E dz \tag{Gl. 3-101}$$

Q_{zi}^E greift im Schwerpunkt S_i des Teilquerschnitts i an.

Aus (Gl. 3-98) ergibt sich somit die Lage des Schubmittelpunktes y_{M1} im Koordinatensystem des Teilquerschnitts 1 zu (Abb. 3-24):

$$y_{M1} = \frac{\sum_i \underbrace{(-R_{iH} z_i + R_{iV} y_i)}_{Verbund} + \sum_i \underbrace{Q_{zi}^E y_i}_{Eigen}}{Q_z} \tag{Gl. 3-102}$$

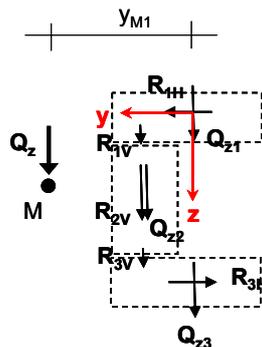


Abb. 3-24: Momentengleichgewicht, äußeres Moment aus Gesamtquerkraft Q_z im Gleichgewicht mit Resultierenden der Schubflüsse

Es besteht kein direkter Zusammenhang zwischen der Gesamtquerkraft Q_{zges} und den Schubflüssen aus Verbundwirkung T^V bzw. den Eigenquerkräften Q_{zi}^E . Die Anteile der Lastabtragung der Gesamtquerkraft über die Stablänge sind nicht konstant auf die Eigenanteile und die Verbundanteile aufgeteilt. Es finden ein laufender Austausch und eine Umlagerung statt.

Damit folgt aus (Gl. 3-102): Die Lage des Schubmittelpunkts y_M ist nicht nur vom Querschnitt abhängig und ist somit keine Querschnittsgröße, sondern eine Systemgröße und kann über die Stablänge variieren.

Die Lage von M kann erst nachträglich aus der system- und belastungsabhängigen Schubspannungsverteilung ermittelt werden und ist zu Berechnungsbeginn unbekannt.

In analoger Weise ergibt sich für die Biegung in der xy -Ebene der Abstand des Schubmittelpunkts von der z_{M1} aus (Gl. 3-98) mit:

$$Q_{yges} z_{M1} = \underbrace{\sum_i (R_{iH} z_i - R_{iV} y_i)}_{\text{Verbund}} + \underbrace{\sum_i Q_{yi}^E z_i}_{\text{Eigen}} \quad (\text{Gl. 3-103})$$

Auch hier ist die Lage des Schubmittelpunkts z_{M1} keine Querschnittsgröße, sondern eine Systemgröße.

3.10 QUERZUG IN DER FUGE

Die Festigkeiten der Fugenverbindung quer zur Fuge sind begrenzt. Darüber hinaus ist die geringe Zugfestigkeit quer zur Faser bei Teilquerschnitten aus Holz zu berücksichtigen. Es ist daher eine Abschätzung der Querkzug/druckspannungen σ_z [kN/m²] insbesondere in den Fugen und innerhalb der Teilquerschnitte notwendig. Werden mechanische Verbindungsmittel als Verbindung verwendet, belastet ein positives σ_z die Verbindungsmittel auf Herausziehen. Ist σ_z negativ, entsteht Querpressung in der Fuge. Die flächige, positive Querkzugspannung σ_z ist entsprechend den Verbindungsmittelabständen den punktuellen Verbindungsmitteln zuzuweisen.

Die Berechnung der Querkzugspannungen kann aus dem Gleichgewicht der Längs- und Schubspannungen nach der technischen Biegetheorie erfolgen [Zil02]. Es wird aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit lediglich eine ebene Biegetragwirkung in der xz -Ebene mit einfach symmetrischem Querschnitt um die z -Achse betrachtet.

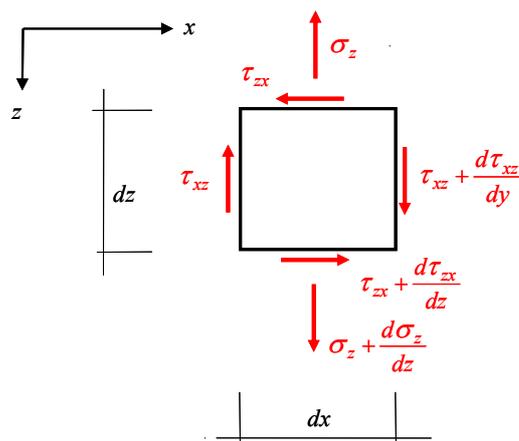


Abb. 3-25: Querkzugspannungen σ_z aus dem Gleichgewicht in z -Richtung

Aus dem Verlauf der Schubspannungen τ_{zx} und der Zuordnung der Schubspannungen $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ergibt sich für das Gleichgewicht in z-Richtung (Abb. 3-25)

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx} = 0. \quad (\text{Gl. 3-104})$$

Damit ergeben sich die Querkzugspannungen zu:

$$\sigma_z(z) = -\int_z \frac{d\tau_{xz}}{dx} dz + C = -\int_z \tau'_{xz} dz + C \quad (\text{Gl. 3-105})$$

Stellt man die Veränderung der Schubspannungen τ'_{xz} im Querschnitt dar und integriert sie vom oberen Rand in z-Richtung, so ergeben sich für jede Höhe z die dortigen Querkzugspannungen.

Die Schubspannungen beim nachgiebigen Verbund setzen sich aus den Schubspannungen aus der Eigentragwirkung und aus den Schubspannungen aus Verbundtragwirkung zusammen (Gl. 3-94). Die Aufteilung in die beiden Tragwirkungen variiert über die Stablänge. Die Gesamtergebnis der Schubspannungen entspricht, ebenso wie bei monolithischen Querschnitten, der Gesamtquerkraft Q_{ges} (Gl. 3-99). Die Gesamtquerkraft kann aufgeteilt werden in Resultierende der Eigentragwirkung Q_{zi} (Gl. 3-101) und Resultierende der Verbundtragwirkung R_i (Gl. 3-100). Es gilt daher:

$$Q_{zges} = b \cdot \int \tau_{xz} dz = \sum_i \left(b \int \tau_{xz_i}^E dz + b \int \tau_{xz_i}^V dz \right) = \sum_i (Q_{zi} + R_i) \quad (\text{Gl. 3-106})$$

Grundlage der Querkzugspannungen ist die Veränderung der Schubspannungen über die Stablänge x (Gl. 3-105). Die Anteile in (Gl. 3-106) abgeleitet ergeben:

$$Q'_{zges} = \sum_i Q'_{zi} + \sum_i R'_i \quad (\text{Gl. 3-107})$$

$$Q'_{zi} = b \cdot \int \tau'_{xz_i}{}^E dz \quad (\text{Gl. 3-108})$$

$$R'_i = b \cdot \int \tau'_{xz_i}{}^V dz \quad (\text{Gl. 3-109})$$

Somit ergibt sich aus den Gleichungen (Gl. 3-105) bis (Gl. 3-109) die Querkzugspannungen σ_z [kN/m²] in der Fuge i/i+1:

$$\sigma_{zi/i+1} \cdot b = -\sum_i (Q'_{zi} + R'_i) + C \quad (\text{Gl. 3-110})$$

bzw. der Querkzug p [kN/m]

$$p_{zi/i+1} = -\sum_i (Q'_{zi} + R'_i) + C \quad (\text{Gl. 3-111})$$

Verändert sich bei einem monolithischen Querschnitt die Gesamtquerkraft nicht, verändern sich auch nicht die Schubspannungen. Nach (Gl. 3-105) treten dort keine Querkzugspannungen auf. Im Gegensatz dazu ist bei nachgiebigen Verbundquerschnitten die Schubspannungsverteilung geprägt von den nicht gleichlaufenden Eigenquerkräften und den Schubflüssen in den Fugen. Dies gilt auch für deren Ableitungen. Es tritt daher ein Eigenspannungszustand mit Querkzugspannungen auf. Dies wird am Beispiel eines Kragarms mit Einzellast F verdeutlicht (Abb. 3-26). Die Berechnung wird mit der analytischen Lösung nach Kapitel 2 durchgeführt.

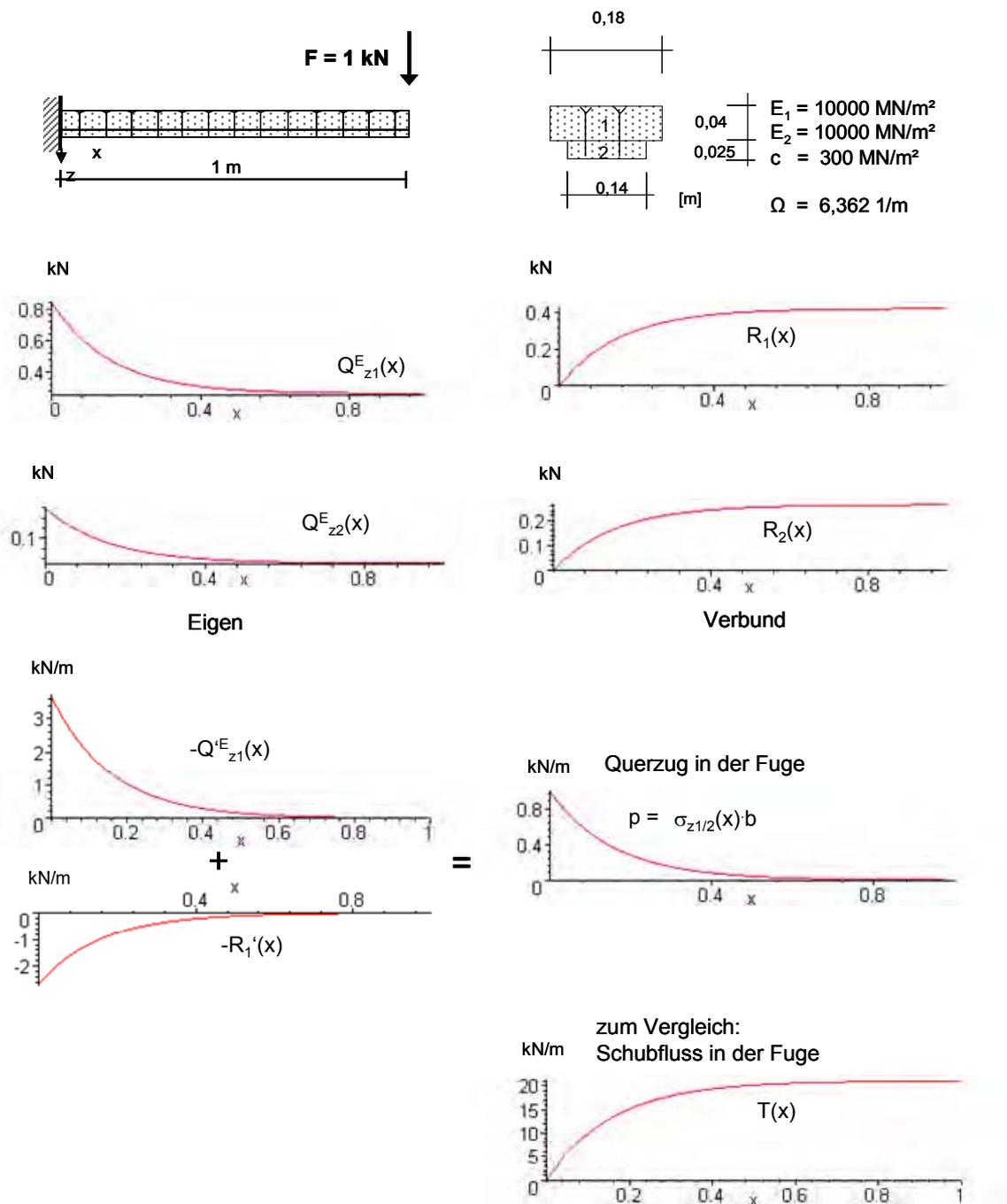


Abb. 3-26: Beispiel, Querzug bei nachgiebigem Verbund trotz konstanter Gesamtquerkraft Q_{ges}

Die konstante Gesamtquerkraft $Q_{ges} = 1 \text{ kN}$ wird durch die vier Anteile Q^E_1 , Q^E_2 , R_1 und R_2 abgetragen. An jeder Stelle des Stabes ist ihre Summe 1 kN . Betrachtet man die Ableitungen Q'^E_1 und R'_1 im Teilquerschnitt 1 und summiert diese auf, so ergibt sich nach (Gl. 3-110) ein maximaler Querzug in der Fuge $1/2$ von $\sigma_{z1/2}b = 1 \text{ kN/m}$. Zum Vergleich ist der Schubfluss T dargestellt. Sein Maximum mit 20 kN/m ist somit 20fach höher als das Maximum des Querzugs. Die beiden Maxima sind nicht an der gleichen Stelle. Der Querzug spielt im Vergleich zum Schubfluss für die Belastung der Verbindungsmittel eine untergeordnete Rolle.

KAPITEL 4

VERIFIZIERUNG DER FINITEN VERBUNDELEMENTE

4.1 MEHRTEILIGE QUERSCHNITTE BEI BIEGEBEANSPRUCHUNG

Die vorgestellten Finiten Verbundelemente werden mit der analytischen Lösung nach dem γ -Verfahren nach Schelling [Sche82] verglichen. Das γ -Verfahren ist die einzig bekannte, analytisch geschlossene Lösung für mehrteilige Querschnitte. Es liefert exakte Ergebnisse für Systeme mit sinusförmigem Momentenverlauf, wie er sich bei Einfeldträgern unter sinusförmiger Querstreckenlast einstellt. Dieses nur auf Biegung belastete System ist Grundlage der folgenden Studie. Die Berechnung erfolgt nach der Theorie I. Ordnung.

Darüber hinaus werden als weitere numerische Verfahren die Schubanalogie bzw. das Berechnungsmodell „Jakobs“ [Jak05] in die Studie mit einbezogen und ebenfalls der Referenzlösung nach dem γ -Verfahren gegenüber gestellt. Die Schubanalogie bzw. das Berechnungsmodell „Jakobs“ wurde im Kapitel 1.3 ausführlich vorgestellt.

Es wird als Beispielsystem ein vierteiliger, symmetrischer Querschnitt mit Teilquerschnitten von je $3 \times 20 \text{ cm}^2$ Fläche als Einfeldträger mit 5 m Spannweite gewählt (Abb. 4-1). Bei den numerischen Lösungsverfahren wird die sinusförmige Belastung (Maximum 1 kN/m) genähert durch Trapezlasten innerhalb der Elemente und damit polygonal aufgebracht.

Für die Genauigkeit der numerischen Lösungen ist die Festlegung einer ausreichenden Elementlänge entscheidend. Es werden unterschiedliche Elementlängen l von 0,625 m bis zu 0,0625 m untersucht. Die Elementlänge geht direkt – zusammen mit der konstanten, querschnittspezifischen relativen Fugensteifigkeit Ω – in die Fugenkennzahl ε_F (Gl. 2-16) ein, die von 5,3 bis 0,53 variiert wird. Auf diese Kennzahl werden alle Ergebnisse bezogen.

Die relative Fugensteifigkeit Ω (Gl. 2-15) der Verbundfugen wird sehr steif zu 8,48 [1/m] gewählt, um bei kleinen Elementlängen l eine große Fugenkennzahl ε_F zu erreichen. Der Einfluss der genähert aufgetragenen Trapezlasten ist somit geringer.

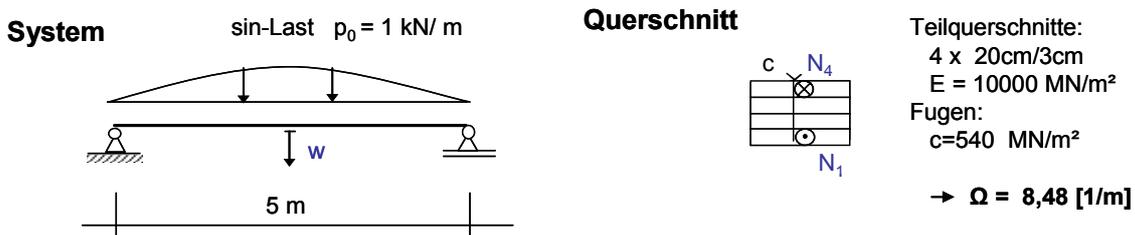
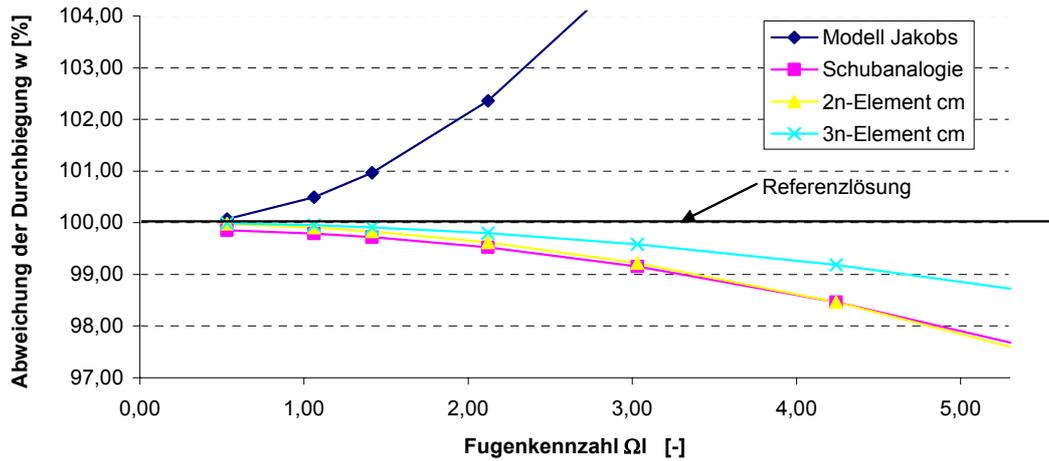


Abb. 4-1: Berechnungsbeispiel: Einfeldträger, 4-teiliger nachgiebiger Verbundquerschnitt unter sinus-Last

Die analytische Referenzlösung mit Hilfe des γ -Verfahrens ergibt in Feldmitte eine Durchbiegung von 2,383 cm, einen maximalen Betrag der Normalkräfte N_1 bzw. N_4 in den Randteilquerschnitten 1 und 4 von je 23,67 kN bzw. Teilmomente in jedem der Teilquerschnitte von je 4,223 kNcm. An den Auflagerpunkten beträgt der maximale Schubfluss $T = 19,759 \text{ kN/m}$.

Durchbiegung w Referenzlösung (analytisch) **2,383 cm**

Teilung	Fugenkennzahl $\epsilon_F = \Omega \cdot l$	3n-Element		2n-Element		Schubanalogie		Modell Jakobs	
		cm	%	cm	%	cm	%	cm	%
8	5,30	2,352	98,72	2,326	97,60	2,328	97,68	2,758	115,76
10	4,24	2,363	99,18	2,346	98,46	2,346	98,46	2,621	110,01
14	3,03	2,373	99,58	2,364	99,22	2,363	99,15	2,502	105,01
20	2,12	2,378	99,80	2,374	99,62	2,371	99,52	2,439	102,36
30	1,41	2,381	99,91	2,379	99,83	2,376	99,72	2,406	100,97
40	1,06	2,382	99,95	2,381	99,91	2,378	99,79	2,395	100,50
80	0,53	2,383	99,99	2,382	99,98	2,379	99,86	2,384	100,07



Normalkraft N_1, N_4 Referenzlösung (analytisch) **23,671 kN**

Teilung	Fugenkennzahl $\epsilon_F = \Omega \cdot l$	3n-Element		2n-Element		Schubanalogie		Modell Jakobs	
		cm	%	cm	%	cm	%	cm	%
8	5,30	23,369	98,73	23,420	98,94	23,397	98,84	22,773	96,21
10	4,24	23,477	99,18	23,505	99,30	23,483	99,21	23,094	97,56
14	3,03	23,572	99,58	23,583	99,63	23,559	99,53	23,375	98,75
20	2,12	23,622	99,79	23,627	99,81	23,600	99,70	23,521	99,36
30	1,41	23,649	99,91	23,652	99,92	23,621	99,79	23,606	99,73
40	1,06	23,658	99,95	23,660	99,95	23,629	99,82	23,635	99,85
80	0,53	23,667	99,98	23,662	99,96	23,637	99,85	23,662	99,96

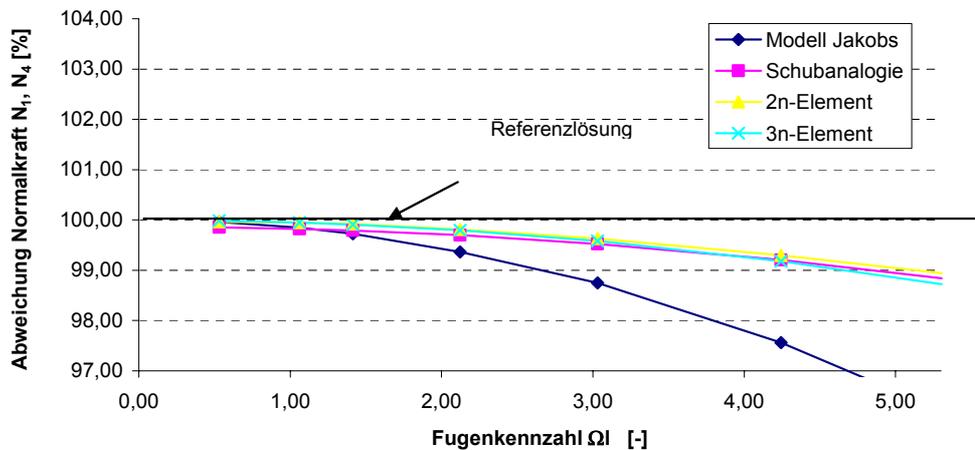
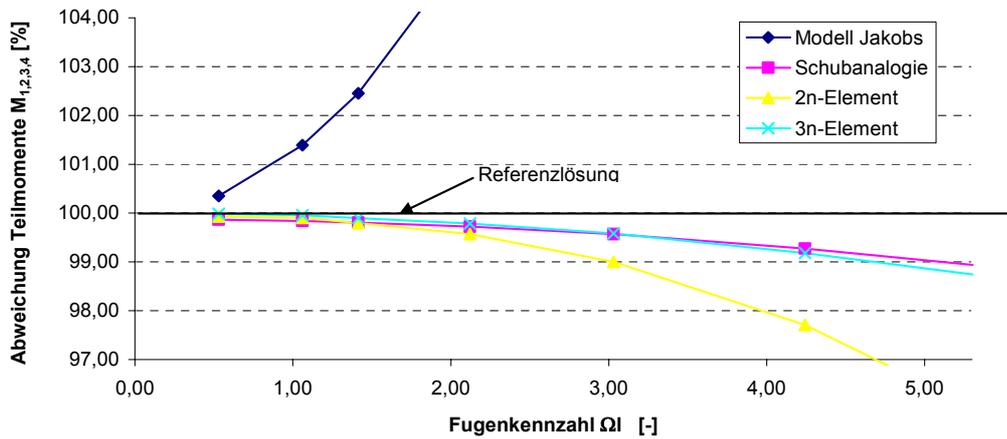


Abb. 4-2: Durchbiegung und Teilnormalkräfte, asymptotische Konvergenz mit kleiner werdenden ϵ_F

Teil-Moment $M_{1,2,3,4}$ Referenzlösung (analytisch) 4,233 kNcm

Teilung	Fugenkennzahl $\epsilon_F = \Omega \cdot l$	3n-Element		2n-Element		Schubanalogie		Modell Jakobs	
		cm	%	cm	%	cm	%	cm	%
8	5,30	4,180	98,74	4,065	96,02	4,188	98,94	5,666	133,85
10	4,24	4,199	99,18	4,136	97,71	4,202	99,27	5,157	121,82
14	3,03	4,216	99,58	4,191	99,00	4,215	99,57	4,707	111,19
20	2,12	4,224	99,78	4,215	99,57	4,222	99,72	4,466	105,50
30	1,41	4,229	99,90	4,224	99,79	4,225	99,81	4,337	102,45
40	1,06	4,231	99,95	4,229	99,90	4,226	99,84	4,292	101,39
80	0,53	4,233	99,99	4,230	99,93	4,228	99,87	4,248	100,35



Schubfluss T_{23} Referenzlösung (analytisch) 19,759 kNcm

Teilung	Fugenkennzahl $\epsilon_F = \Omega \cdot l$	3n-Element		2n-Element		Schubanalogie		Modell Jakobs	
		cm	%	cm	%	cm	%	cm	%
8	5,30	19,506	98,72	17,730	89,73	19,100	96,66	10,001	50,61
10	4,24	19,596	99,17	18,272	92,47	19,351	97,93	10,281	52,03
14	3,03	19,674	99,57	18,892	95,61	19,572	99,05	10,802	54,67
20	2,12	19,716	99,78	19,300	97,67	19,689	99,65	11,544	58,42
30	1,41	19,739	99,90	19,546	98,92	19,752	99,96	12,675	64,15
40	1,06	19,748	99,94	19,637	99,38	19,775	100,08	13,585	68,75
80	0,53	19,755	99,98	19,729	99,84	19,797	100,19	15,806	79,99

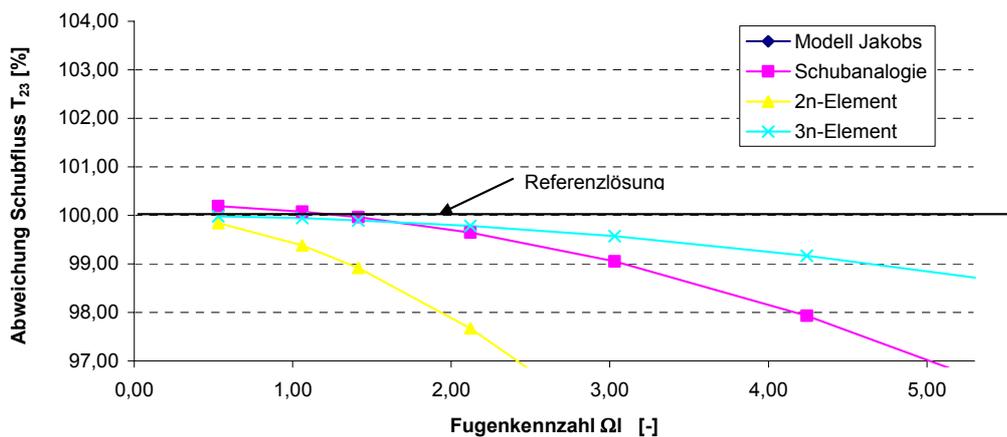


Abb. 4-3: Teilmomente und maximaler Schubfluss, asymptotische Konvergenz mit kleiner werdenden ϵ_F

Die Steifigkeitsmatrix K des 2n- und des 3n-Verbundelements wird durch ein Unterprogramm in Sofistik implementiert. Neben den bekannten Materialkennwerten der Teilquerschnitte sind die

Parameter der Fugen die Fugensteifigkeit c , der Schwerpunktabstand der verbundenen Teilquerschnitte a und die Elementlänge l einzugeben.

Im Einzelnen werden die maximale Durchbiegung w , die maximale Normalkraft in den Randteilquerschnitten N_1 und N_4 , die maximalen Teilmomente $M_{1,2,3,4}$ in Feldmitte sowie der maximale Schubfluss $T_{2,3}$ in der mittleren Fuge an den Auflagerpunkten betrachtet.

Es zeigt sich, dass der Grad der Übereinstimmung der numerischen Lösungen von den Elementlängen l , und folglich von der Fugenkennzahl ε_F abhängt (Abb. 4-2/Abb. 4-3). Je geringer die Fugenkennzahl ε_F bzw. die Elementlängen l gewählt werden, desto geringer sind auch die Abweichungen. Die prozentualen Abweichungen von den analytischen Lösungen werden in den Diagrammen dargestellt. Die Zustandsgrößen der Lösungen der 2n- und 3n-Verbundelemente nähern sich asymptotisch der exakten analytischen Lösung an. Die Lösungen des Berechnungsmodells „Jakobs“ konvergieren ebenfalls gegen den analytischen Wert, dabei sind die Abweichungen allerdings erheblich größer. Die Lösungen der Schubanalogie konvergieren gegen Werte, die ca. 0,15 % - 0,20 % von der analytischen Lösung abweichen.

Das 3n-Verbundelement liefert im Vergleich zu den anderen Berechnungsverfahren die besten Ergebnisse. Ab einer Fugenkennzahl $\varepsilon_F < 4,5$ sind die Abweichungen aller Zustandsgrößen kleiner als 1 %, was aus baupraktischer Sicht als tolerierbar angesehen wird. Bemerkenswert ist, dass beim 3n-Verbundelement die Konvergenzkurven aller betrachteten Zustandsgrößen gleich verlaufen. Diese Zustandsgrößen haben bei gleicher Fugenkennzahl die gleiche Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

Beim 2n-Verbundelement ist die 1 %-ige Abweichungsgrenze bei einer Fugenkennzahlen $\varepsilon_F = 1,5$. Entscheidend ist der Schubfluss T an den Auflagerpunkten. Schubfluss wird unter anderem durch unterschiedliche Längsverschiebungen u_i der Teilquerschnitte (Gl. 2-8), (Gl. 2-7) verursacht. Beim 2n-Verbundelement werden die Längsverschiebungen nur durch einen linearen Verschiebungsansatz abgebildet, was im Vergleich zum 3n-Verbundelement (quadratischer Ansatz) zu schlechteren Ergebnissen aller direkt davon abhängigen Zustandslinien führt. Nicht davon betroffen sind die Teilnormalkräfte in Feldmitte, da im vorliegenden Beispiel keine Längsverschiebungen auftreten.

Für die Teilnormalkräfte und für die Teilmomente liefert die Schubanalogie ähnlich gute Ergebnisse wie das 3n-Verbundelement. Die Ergebnisse für die Durchbiegung sind ähnlich dem 2n-Verbundelement. Die Schubanalogie schätzt den Schubfluss zwischen 3n- und 2n-Verbundelement ein. Ab einer Fugenkennzahl $\varepsilon_F < 3,0$ liegen die Abweichungen der Ergebnisse der Schubanalogie unter 1 %.

Die Lösung nach dem Berechnungsmodell „Jakobs“ zeigt für die Durchbiegung und die Normalkräfte und Momente bei einer Fugenkennzahl $\varepsilon_F < 1,5$ ein befriedigendes Ergebnis (Abweichung < 1 %). Der maximale Schubfluss an den Auflagern kann nur unzureichend abgebildet werden.

4.2 STABILITÄT

4.2.1 VORBEMERKUNGEN

Die Lasten von Tragwerken werden sehr häufig durch Drucknormalkräfte abgetragen. Dies gilt insbesondere für Stützen und für Schalen bzw. für schalenähnliche Tragwerke, wie z. B. für

Brettrippenschalen. Für die Berechnung solcher Systeme ist in der Regel die Theorie II. Ordnung anzuwenden und der Nachweis auf Stabilität zu führen. Das hierfür eingesetzte Berechnungsverfahren muss dies ermöglichen. Die vorgestellten Verbundelemente leisten dies durch die geometrische Steifigkeitsmatrix. Sie geht als Zusatzmatrix in die Elementsteifigkeit ein.

Grundsätzlich sind alle statischen Systeme, die Druckkräfte abtragen, stabilitätsgefährdet auf Biegeknicken. Wirken, neben druckerzeugenden Lasten, zusätzlich Streckenquerlasten oder sind Vorverformungen zu berücksichtigen, so liegt ein Spannungsproblem vor. In beiden Fällen ist das Gleichgewicht am verformten System nach Theorie II. Ordnung aufzustellen.

4.2.2 VERIFIKATION AM BEISPIEL

Am Eulerfall 2 wird die Leistungsfähigkeit der Elemente für Stabilitätsuntersuchungen validiert. Für den Eulerfall 2 sind zwei unabhängige, analytische Lösungen für nachgiebige Verbundquerschnitte bekannt, die den FE-Lösungen gegenübergestellt werden können. Dies ist zum einen die nur für den zweiteiligen, ebenen Querschnitt geltende, analytische Lösung nach Girhammar [Gir93]. Zum anderen ist dies das auch für mehrteilige Querschnitte anwendbare, aber nur für den Pendelstab geltende γ -Verfahren [DIN04].

Das gewählte Zahlenbeispiel ist aus [Schol04-2] entnommen. Dort werden mit der Schubanalogie Stabilitätsuntersuchungen für den Eulerfall 2 durchgeführt. Die dortigen Ergebnisse werden ebenfalls mit den Ergebnissen der Verbundelemente verglichen.

Stabilitätsuntersuchungen mit der Schubanalogie sind nur dann möglich, wenn das Ersatzmodell der "klassischen" Schubanalogie mit den Ersatzstäben A und B durch einen weiteren Ersatzstab C ergänzt wird. Dem Ersatzstab C wird die gesamte Dehnsteifigkeit des Querschnitts zugewiesen. Die Lastabtragung der gesamten Normalkraft erfolgt so nur durch den Ersatzstab C (Abb. 1-10).

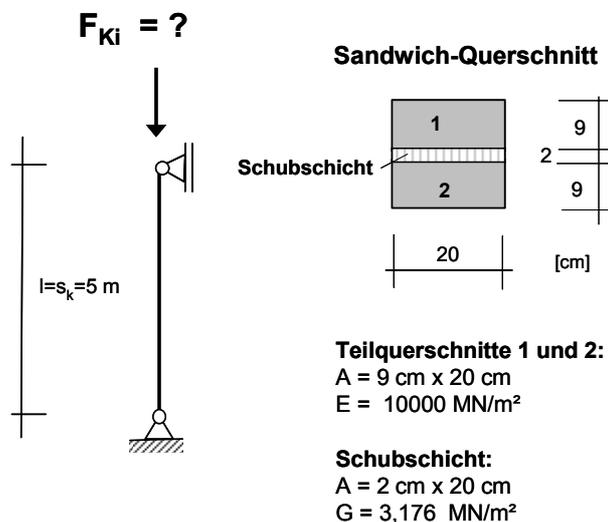


Abb. 4-4 Eulerfall 2, System und Querschnitt

Das in Abb. 4-4 dargestellte System besteht aus einem zweiteiligen Sandwich-Querschnitt mit einer Gesamtabmessung von $20 \times 20 \text{ cm}^2$. Die schubsteifen Teilstäbe haben Abmessungen von je $9 \times 20 \text{ cm}^2$ und besitzen einen E-Modul von 10.000 MNm^2 . Sie werden über eine 2 cm dicke Kern-Schubschicht mit einem Schubmodul $G = 3,176 \text{ MN}$ in Längsrichtung nachgiebig und in Querrichtung starr miteinander gekoppelt. Die Biege- und Dehnsteifigkeit der Schubschicht wird

vernachlässigt. Die Stablänge beträgt 5,0 m. Beim Eulerfall 2 ist die Knicklänge s_k gleich der Stablänge.

Es wird Knicken um die nachgiebige Achse untersucht. Das System wird mit 2n-Elementen bzw. 3n-Elementen und nach der Schubanalogie modelliert. Dabei wird die Elementunterteilung von 2 Elementen bis hin zu 80 Elementen variiert. Den Eulerfall 2 mit nur einem Finiten Element zu generieren ist nicht sinnvoll, da das Modell keinen Freiheitsgrad in Richtung der Durchbiegung w aufweist. Die Durchbiegung spielt jedoch bei der Knickbiegeline des Eulerfalls 2 die Hauptrolle. Die numerischen Lösungen der Knicklasten F_{Ki} werden den analytischen Lösungen nach Girhammar und dem γ -Verfahren gegenübergestellt.

Die Berechnung mit den 2n-Elementen und den 3n-Elementen erfolgt mit dem Programm ASE von Sofistik. Es wird die Last F_{ki} solange gesteigert, bis das System instabil wird und ausknickt. Dies ist rechnerisch genau dann der Fall, wenn die Determinante der Gesamtsteifigkeitsmatrix den Wert Null annimmt und ein Element auf der Hauptdiagonale negativ wird. Der kleinste Wert für F_{ki} ist maßgebend. Im stabilen Zustand ist die Determinante positiv. Wird sie im Verlauf der Laststeigerung negativ, so wurde ein Nulldurchgang gefunden.

Die Schubnachgiebigkeit der Kernschicht kann nach (Gl. 1-4) in eine äquivalente Fugensteifigkeit c umgerechnet werden. Somit ergibt sich für c :

$$c = \frac{3,176 \frac{MN}{m^2} \cdot 0,2m}{0,02m} = 31,76 \frac{MN}{m^2} \quad (\text{Gl. 4-1})$$

Die restlichen Querschnittsparameter sind:

$$\begin{aligned} EI_1 = EI_2 = EI &= 0,1215 MNm^2 \\ EA_1 = EA_2 = EA &= 0,018 MN \\ a &= 0,11m \end{aligned} \quad (\text{Gl. 4-2})$$

Es ergibt sich somit nach (Gl. 2-15), (Gl. 2-12) eine relative Fugensteifigkeit von

$$\Omega = \sqrt{\frac{31,76}{0,018} + \frac{31,76}{0,018} + \frac{31,76}{0,11}} = 1,3908 \text{ m}^{-1} \quad (\text{Gl. 4-3})$$

und die starre Biegesteifigkeit zu

$$EI_\infty = 0,1215 + 0,1215 + \frac{0,018 \cdot 0,018}{0,018 + 0,018} 0,11^2 = 1,332 MNm^2 \quad (\text{Gl. 4-4})$$

Nach Girhammar [Gir93] errechnet sich die kritische Knicklast F_{Ki}^{analy1} mit

$$F_{Ki}^{analy1} = \frac{\pi^2 EI_\infty}{s_k^2 \left(1 + \frac{\frac{EI_\infty}{EI_1 + EI_2} - 1}{1 + \frac{s_k^2 \Omega^2}{\pi^2}} \right)} \quad (\text{Gl. 4-5})$$

Nach dem γ -Verfahren errechnet sich die Knicklast F_{Ki}^{analy2} für den zweiteiligen Querschnitt [DIN98] zu

$$K_1 = \frac{\pi^2 EA_1}{s_k^2 c} \tag{Gl. 4-8}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + K_1} \tag{Gl. 4-9}$$

$$EI_{eff} = EI_1 + EI_1 + a^2 \frac{\gamma_1 EA_1 EA_2}{\gamma_1 EA_1 + EA_2} \tag{Gl. 4-10}$$

$$F_{Ki}^{analy2} = \frac{\pi^2 EI_{eff}}{s_k^2} \tag{Gl. 4-11}$$

Nach beiden Verfahren ergibt sich eingesetzt:

$$F_{Ki}^{analy} = F_{Ki}^{analy1} = F_{Ki}^{analy2} = 298,874 \text{ kN} \tag{Gl. 4-12}$$

In Abb. 4-5 wird die analytische Lösung (Gl. 4-12) den numerischen Ergebnissen gegenüber gestellt.

Knicklast F_{ki} Referenzlösung (analytisch) 298,847 kN

Teilung	Elementlänge m	Fugenkennzahl $\epsilon_F = \Omega I$	3n-Element		2n-Element		Schubanalgie	
			kN	%	kN	%	kN	%
2	2,50	3,477	300,450	100,54	320,160	107,13	338,010	113,10
3	1,67	2,318					316,390	105,87
4	1,25	1,739	298,940	100,03	303,810	101,66	308,600	103,26
6	0,83	1,159	298,860	100,00	300,950	100,70		
7	0,71	0,993					301,980	101,05
10	0,50	0,695	298,850	100,00	299,630	100,26	300,330	100,50
20	0,25	0,348	298,846	100,00	299,040	100,06	299,150	100,10
40	0,13	0,174	298,847	100,00	298,890	100,01	298,850	100,00
80	0,06	0,087	298,855	100,00	298,850	100,00	298,780	99,98

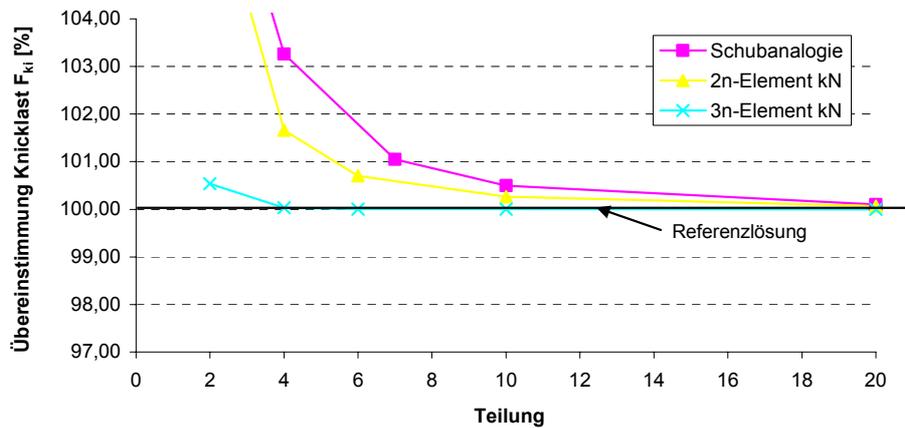


Abb. 4-5: Numerische Lösungen konvergieren gegen die analytische Referenzlösung

Mit zunehmender Elementverfeinerung konvergieren die drei numerischen Lösungen asymptotisch gegen die analytische Lösung. Die Knicklasten der numerischen Lösungen werden grundsätzlich etwas höher als die der analytischen Lösung und damit auf der unsicheren Seite eingeschätzt. Die Lösung des 3n-Elements weicht nur geringfügig von der analytischen Lösung ab. Bereits bei einer Unterteilung des Systems in nur zwei 3n-Elemente weicht die Lösung nur um 0,54 % von der analytischen Lösung ab. Hingegen beträgt die Abweichung beim 2n-Element in diesem Fall 7,13 %.

Grund dafür ist der schlechtere Verformungsansatz für die Längsverschiebungen $u_i(x)$. Im Vergleich dazu weicht die Lösung der Schubanalogie mit 13,10 % von der analytischen Lösung ab.

Modelliert man die Knicklast des Eulerfalls 2 an einem monolithischen Querschnitt mit nur einem Finiten Stabelement nach Bernoulli, so wird die Knicklast generell um 21,5 % zu hoch abgeschätzt [Wun95]. Führt man das gleiche mit dem 3n-Verbundelement am oben vorgestellten nachgiebigen Verbundquerschnitt durch, so weicht die Knicklast nur um 10,4 % von der analytischen Lösung ab. Das 3n-Verbundelement kann durch seine zusätzlichen Längsverschiebungs-Freiheitsgrade der Teilquerschnitte die Knickfigur besser abbilden.

4.2.3 ALLGEMEINE AUSSAGEN ZUR STABILITÄT

Die Studie im Punkt 4.2.2 zeigt sehr deutlich, dass bei Stabilitätsproblemen der Diskretisierungsgrad (Teilung) des Systems einen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisqualität besitzt. Je feiner das numerische, statische System generiert wird, desto größer ist die Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

Dieser Zusammenhang ist auch bei Stabilitätsuntersuchungen an monolithischen Querschnitten mit der FEM zu beobachten. Es gilt die bekannte Gleichung für die kritische Biegeknicklast

$$F_{ki} = \frac{\pi^2 EI}{s_k^2} \quad (\text{Gl. 4-13})$$

Untersucht man den Eulerfall 2 mit der Systemlänge L , so gilt dort für die Knicklänge $s_k = L$. Damit ergibt sich aus (Gl. 4-13):

$$F_{ki} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{Gl. 4-14})$$

Setzt man (Gl. 4-14) in (Gl. 3-14) ein, ergibt sich bei einer Unterteilung in zwei Finite Stabelemente mit den Elementlängen $l = L/2$ die Stabkennzahl ε_s zu

$$\varepsilon_s = \sqrt{\frac{F_{ki} l}{EI}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} l} = \sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} \frac{L}{2}} = 1,57 \quad (\text{Gl. 4-15})$$

Nach Wunderlich [Wun95] wird bei einer Unterteilung in zwei Elemente die Biegeknicklast F_{ki} gegenüber der analytisch exakten Lösung um 0,75 % zu groß abgeschätzt. Unterteilt man das System in vier Finite Elemente ($l = L/4$), ergibt sich nach (Gl. 4-15) eine Stabkennzahl $\varepsilon_s = 1,11$. Die Abweichung der numerischen Lösung gegenüber der analytischen Lösung beträgt 0,04 % nach Wunderlich [Wun95].

Es stellt sich die Frage, inwieweit der Grad der Nachgiebigkeit, die Fugenkennzahl ε_F , sich auf die Qualität der Ergebnisse der Verbundelemente (Gl. 2-15) auswirkt. Die Fugenkennzahl errechnet sich aus der relativen Fugensteifigkeit Ω und der Länge l des Finiten Elements (Gl. 2-15). Aufgrund ihrer Bedeutung wird sie hier nochmal dargestellt.

$$\varepsilon_F = \Omega l = \sqrt{\frac{c}{EA_1} + \frac{c}{EA_2} + \frac{ca^2}{EI_1 + EI_2}} l \quad (\text{Gl. 4-16})$$

Um dies herauszuarbeiten, wird folgende Studie durchgeführt:

Es wird die Biegeknicklast F_{ki}^{FE} des Eulerfalls 2 mit verschiedenen Fugenkennzahlen ε_F mit der FEM berechnet und den analytischen Lösungen nach Girhammar und dem γ -Verfahren gegenüber

gestellt. Wie bereits dargestellt, liefern beide analytischen Verfahren identische Lösungen. Das Verhältnis aus F_{ki}^{FE} zu F_{ki}^{analy} ist der Gradmesser der Ergebnisqualität der FE-Lösung.

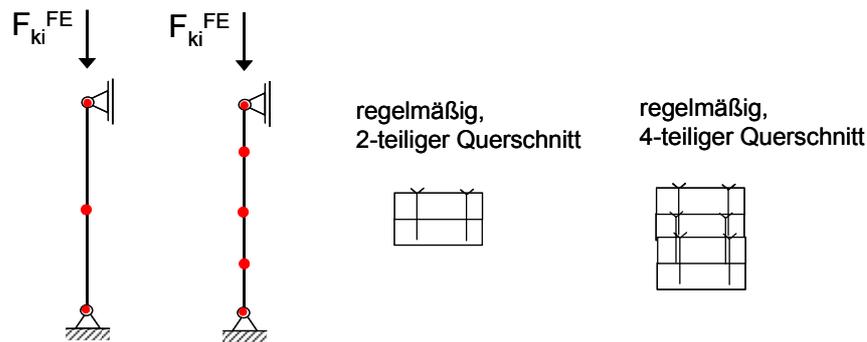


Abb. 4-6. Eulerfall 2, diskretisiert mit 2n- und 3n-Verbundelementen, als zwei- bzw. vierteiliger Querschnitt

Als Querschnittstypen werden ein regelmäßig zweiteiliger und ein regelmäßig vierteiliger Verbundquerschnitt mit gleichen Teilquerschnitten und Fugen gewählt. Die Teilquerschnitte werden ohne Lücke direkt aufeinander gefügt (Abb. 4-6).

Die Fugenkennzahl ε_F wird variiert, indem ein oder gleichzeitig mehrere Teilparameter (EA_i , EI_i , c , a oder die Elementlänge l) verändert werden (Gl. 4-16). Verschiedene Fugen mit unterschiedlichen Teilparametern (EI_i , EA_i , c , a , l), jedoch mit gleicher Fugenkennzahl (Gl. 4-16), führen zum gleichen Ergebnis. Die Studie wird mit einer Unterteilung des Systems in zwei und vier Elemente, mit dem 2n- und 3n-Element und mit den Querschnittstypen „zweiteilig“ und „vierteilig“ durchgeführt.

Zunächst wird der zweiteilige Querschnitt untersucht (Abb. 4-7). Bei einer Diskretisierung mit zwei 2n-Elementen konvergiert bei steifem Verbund ($\varepsilon_F = \infty$) das Verhältnis der Biegeknicklast gegen 121,5 %, bei losem Verbund ($\varepsilon_F = 0$) ist das Verhältnis 100,75 %. Die gleichen Werte ergeben sich auch bei der Berechnung von monolithischen Querschnitten, modelliert mit zwei Finiten Stabelementen [Wun95].

Modelliert man am System mit vier 2n-Elementen, so konvergiert bei $\varepsilon_F = \infty$ das Verhältnis gegen 105,2 %. Bei einer Fugenkennzahl $\varepsilon_F = 0$ ist das Verhältnis 100,04 %. Auch diese Werte werden bei Berechnungen von monolithischen Querschnitten mit zwei Finiten Stabelementen erzielt [Wun95].

Die Ergebnisqualität steigt beim 3n-Element im Vergleich zum 2n-Element deutlich an. Bei zwei Elementen übersteigt die Abweichung nie den Wert von 0,75 %. Der Wert wird sowohl bei $\varepsilon_F = 0$ als auch bei $\varepsilon_F = \infty$ erreicht. Dazwischen bei $\varepsilon_F = 1,5$ ist die geringste Abweichung mit 0,53 % zu beobachten.

Diskretisiert man das System mit vier 3n-Elementen, so ist die Abweichung kleiner als 0,054 %. Auch hier gilt, dass die Abweichung bei losem Verbund und bei steifem Verbund den gleichen Wert annimmt und dazwischen ein Minimum auftritt. Das Minimum liegt mit einer Abweichung von 0,034 % bei einer Fugenkennzahl von $\varepsilon_F = 1,2$.

Zum Vergleich wird der Eulerfall 2 mit nur einem 3n-Element generiert. Die Übereinstimmung bleibt stets unter dem Wert.

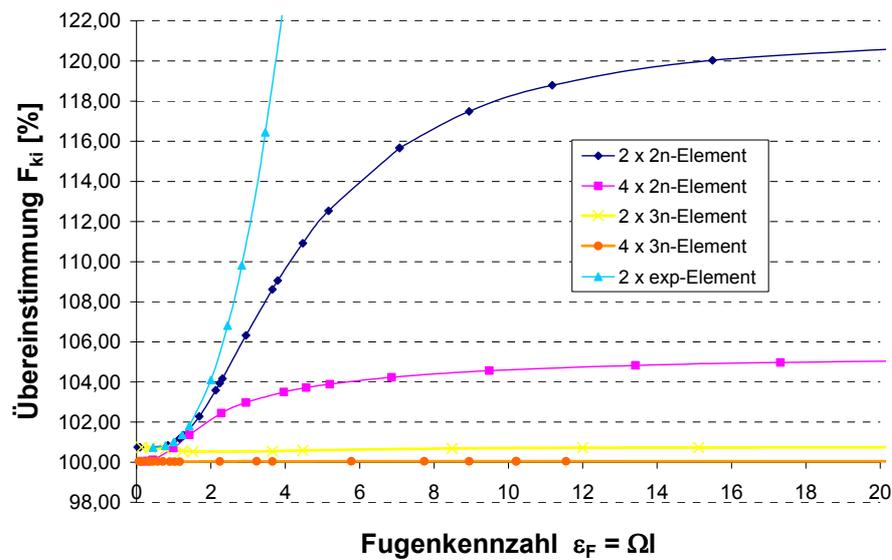


Abb. 4-7: Zweiteiliger Querschnitt, modelliert mit 2n-, 3n-Elementen bzw. exp-Element

Die Ergebnisse des zweiteiligen Querschnitts unterscheiden sich vom vierteiligen Querschnitt nur geringfügig (Abb. 4-8). Untersucht wird nur eine Unterteilung in zwei Elemente. Die Grenzwerte wie auch der Verlauf der Übereinstimmung (abhängig von der Fugenkennzahl) sind nahezu gleichlaufend mit dem vierteiligen Querschnitt (vgl. Abb. 4-7 mit 4-8).

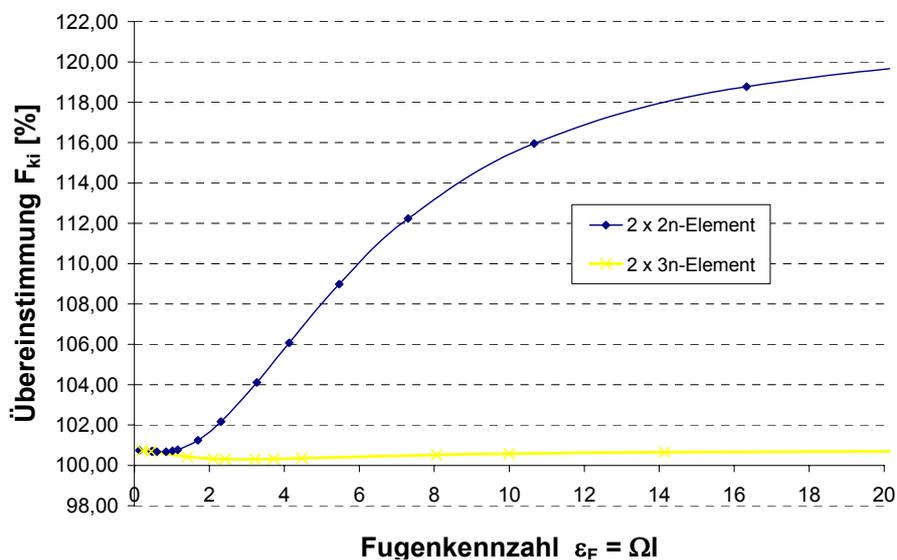


Abb. 4-8: Vierteiliger Querschnitt, modelliert mit 2n- bzw. 3n-Elementen

Es zeigt sich, dass die Ergebnisqualität in erster Linie von der Elementunterteilung abhängt. Die Teilsteifigkeiten EI_i , die Knicklänge bzw. die Anzahl der Teilquerschnitte spielen dabei keine Rolle. Beim 2n-Element ist die Abweichung umso geringer, je geringer die Fugenkennzahl ϵ_F gewählt wird. Beim 3n-Element spielt für die Ergebnisgenauigkeit die Fugenkennzahl keine nennenswerte Rolle. Die Ergebnisqualität eines nachgiebigen Verbundquerschnitts, modelliert mit 3n-

Verbundelementen, ist bei gleichem Unterteilungsgrad generell besser als die Ergebnisqualität eines monolithischen Querschnitts, modelliert mit Finiten Stabelementen nach Bernoulli.

Zum Vergleich wird ein weiteres Verbundelement hergeleitet und dem 2n- und 3n-Element gegenübergestellt. Sein Verschiebungsansatz für die Längsverschiebungen $u_i(x)$ ist exponentiell. Es wird kurz als exp-Element bezeichnet.

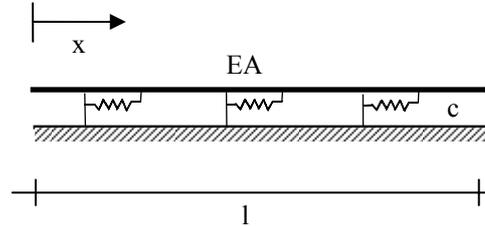


Abb. 4-9: Horizontal nachgiebig gebetteter Dehnstab

Grundlage für $u_i(x)$ ist die Lösung des horizontal nachgiebig gebetteten Dehnstabs (Abb. 4-9) mit einer Dehnsteifigkeit EA und einer horizontalen Fugensteifigkeit c. Die zugehörige Differentialgleichung lautet [Ram96]:

$$EAu''(x) + cu(x) = 0 \quad (\text{Gl. 4-17})$$

Die Lösung von (Gl. 4-17) lautet:

$$u(x) = C_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{\frac{c}{EA}} \quad (\text{Gl. 4-18})$$

Für die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0) &= u_a \\ u(l) &= u_b \end{aligned} \quad (\text{Gl. 4-19})$$

ergibt sich der Verlauf der Längsverschiebung aus (Gl. 4-18) und (Gl. 4-19) zu

$$u(x) = \frac{(e^{\lambda(x-l)} - e^{-\lambda(x-l)})}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} u_a + \frac{(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} u_b \quad (\text{Gl. 4-20})$$

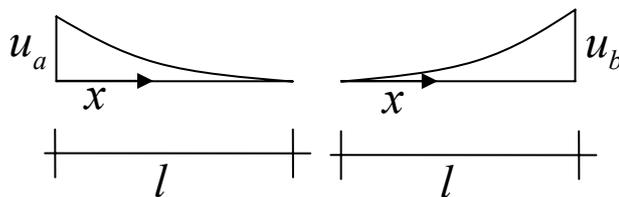


Abb. 4-10: Exponentielle Ansatzfunktion der Längsverschiebungen $u(x)$ für das exp-Element

(Gl. 4-20) ist die Grundlage für den Längsverschiebungsansatz $u_i(x)$ des exp-Elements (Abb. 4-10). Der Ansatz für die Querverschiebung $w(x)$ ist gleich dem kubischen Verschiebungsansatz (Gl. 3-13) der 2n- und 3n-Elemente.

Es wird nur eine Berechnung mit dem exp-Element mit einer Diskretisierung mit zwei Elementen am zweiteiligen Querschnitt durchgeführt (Abb. 4-7). Im Bereich $\varepsilon_F < 1$ ist eine geringfügige Abweichung gegenüber der vergleichbaren Modellierung mit dem 2n-Element festzustellen. Steigert man die Fugenkennzahl, so wird die Funktion singular im Bereich der Fugenkennzahl

$\varepsilon_F = 5$. Ein Konvergieren gegen einen festen Wert findet nicht statt. Diskretisiert man das System mit steiferen Fugen, deren Fugenkennzahlen größer als 5 sind, so wird das Ergebnis der Knicklast unbrauchbar. Folglich ist das exp-Element für Stabilitätsuntersuchungen und Berechnungen nach Theorie II. Ordnung nicht geeignet. Damit wird eine notwendige und wesentliche Eigenschaft eines Verbundelements nicht eingehalten.

Eine Verwendung des exp-Elements für $\varepsilon_F < 1$ wäre denkbar. Wird diese Grenze überschritten, ist ein fehlerhaftes Ergebnis zwangsläufig. Es ist nicht robust gegenüber einer Anwendung mit größeren Fugenkennzahlen und damit ungeeignet für einen breiten Anwenderkreis. Eine falsche Abschätzung der Knicklast könnte fatale Folgen haben. Das exp-Element wird nicht weiter untersucht.

Das 2n-Element hat dagegen den Vorteil, dass bei einer Generierung von Elementen mit zu großen Fugenkennzahlen die Fehlabschätzung der Knicklast nach oben hin begrenzt wird. Beim 3n-Element besteht kein Zusammenhang zwischen Fugenkennzahl und Ergebnisgenauigkeit. Seine Lösungen sind bei gleicher Unterteilung sogar besser wie die Lösungen mit Finiten Stabelementen nach Bernoulli bei einem monolithischen Querschnitt.

4.3 THEORIE II. ORDNUNG

Die vorgestellten Finiten Verbundelemente werden für Berechnungen nach Theorie II. Ordnung an der analytischen Lösung für zweiteilige Querschnitte nach Girhammar [Gir93] verifiziert. Grundlage ist das in Girhammar [Gir93] vorgestellte Beispiel (Abb. 4-11). Die Schubanalogie (Kapitel 1.3) wird als weiteres numerisches Verfahren in die Studie mit einbezogen und ebenfalls der Referenzlösung gegenübergestellt.

Ein zweiteiliger Querschnitt wird als Einfeldträger mit 4 m Spannweite durch eine Gleichstreckenlast $q = 1$ kN/m belastet. Zusätzlich wird in Längsrichtung in das System eine zentrische Einzellast von 50 kN eingeleitet, die eine negative Gesamtnormalkraft im Querschnitt hervorruft. Die Abmessungen des oberen Teilquerschnitts 1 ist 300×50 mm² (E-Modul = 12.000 MN/m²) bzw. 50×150 mm² für den unteren Teilquerschnitt 2 (E-Modul = 8.000 MN/m²). Die Fugensteifigkeit beträgt $c = 50$ MN/m².

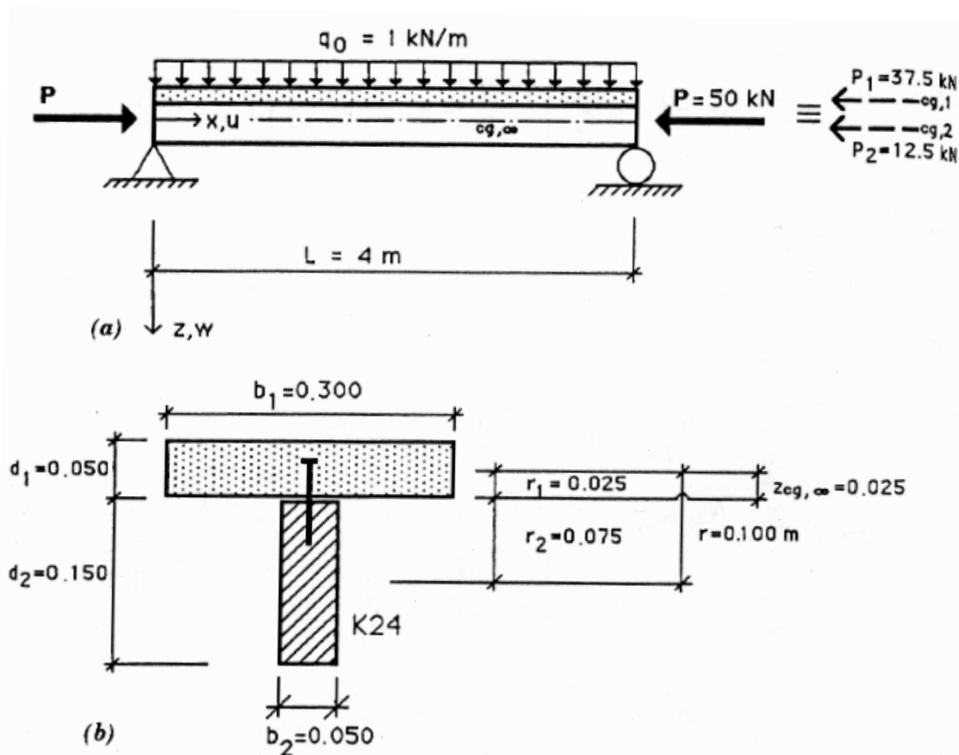
Die relative Fugensteifigkeit Ω der Verbundfuge errechnet sich nach (Gl. 4-16) zu

$$\Omega = 2,1 \frac{1}{m} \quad (\text{Gl. 4-21})$$

Die Stabkennzahl ε_s beträgt nach (Gl. 3-14)

$$\varepsilon_s = l \sqrt{\frac{N}{EI}} = l \sqrt{\frac{50}{440,9}} = l \cdot 0,337 \frac{1}{m} \quad (\text{Gl. 4-22})$$

Die Länge l ist die Elementlänge eines Finiten Elements. Die Biegesteifigkeit EI repräsentiert die Steifigkeit des Trägers mit monolithischem Querschnitt bei Biegung. Mit Hilfe der Durchbiegung des Systems mit $w = 7,56$ mm nach Theorie I. Ordnung des Einfeldträgers unter der Gleichlast kann eine äquivalente Biegesteifigkeit EI für den nachgiebigen Querschnitt errechnet werden. Es ergibt sich $EI = 440,9$ kNm². Die Anwendungsgrenze liegt bei einer Stabkennzahl $\varepsilon_s < 2,5$ [Ram95], was Elementlängen bis 7,4 m ermöglicht. Dieser Wert wird im vorliegenden Beispiel nicht überschritten.



Simply Supported Beam-Column of Concrete and Wood

Comparison of Approximate and Exact Second-Order Results

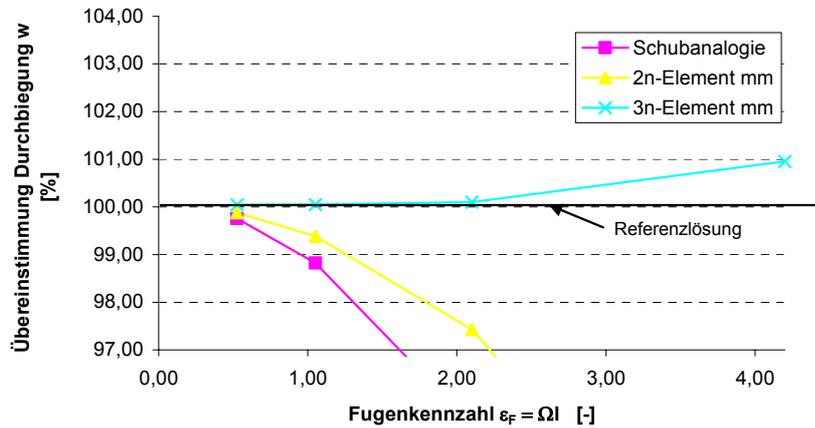
Displacement/ action (1)	First-order analysis (2)	Second-order analysis (3)	Magnification (column 3/ column 2) (4)
w_{max}	7.560 mm	9.276 mm	1.227
$M_{1,max}$	0.1659 kNm	0.2054 kNm	1.238
$M_{2,max}$	0.4977 kNm	0.6162 kNm	1.238
$N_{1,max}$	-50.863 kN	-53.897 kN	1.060 ^a
$N_{2,max}$	0.863 kN	3.897 kN	4.516 ^a
$V_{s,max}$	11.444 kN/m	13.878 kN/m	1.213

^aRefer to section headed "Example" for comments on these values.

Abb. 4-11: Berechnungsbeispiel Theorie II. Ordnung: Einfeldträger, zweiteiliger Querschnitt, Gleichlast und zentrische Druckkraft [Gir93]

Durchbiegung w Referenzlösung (analytisch) **9,276 mm**

Teilung	Fugenkennzahl $\epsilon_F = \Omega l$	3n-Element		2n-Element		Schubanalogie	
		mm	%	mm	%	mm	%
2	4,20	9,365	100,95	8,339	89,90	7,576	81,67
4	2,10	9,285	100,10	9,038	97,43	8,853	95,44
8	1,05	9,281	100,05	9,219	99,38	9,167	98,82
16	0,53	9,280	100,05	9,265	99,88	9,253	99,76



Normalkraft N_1 Referenzlösung (analytisch) **-53,897 kN**

Teilung	Fugenkennzahl $\epsilon_F = \Omega l$	3n-Element		2n-Element		Schubanalogie	
		kN	%	kN	%	kN	%
2	4,20	-54,155	100,48	-55,197	102,41	-52,765	97,90
4	2,10	-53,940	100,08	-54,088	100,35	-53,725	99,68
8	1,05	-53,928	100,06	-53,955	100,11	-53,877	99,96
16	0,53	-53,927	100,06	-53,934	100,07	-53,915	100,03

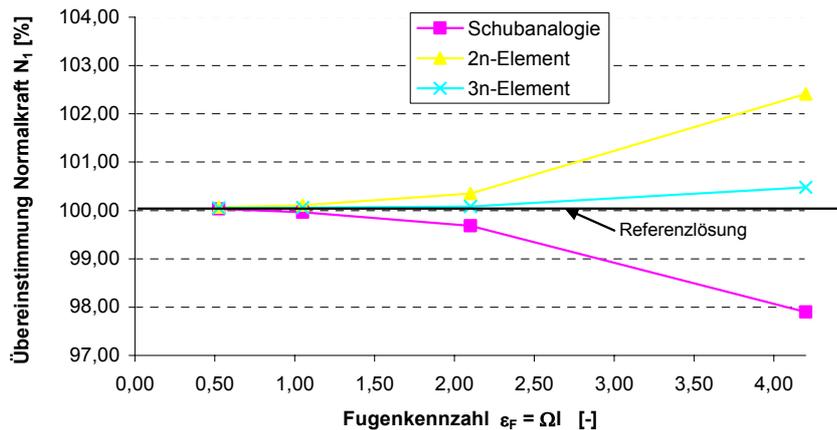
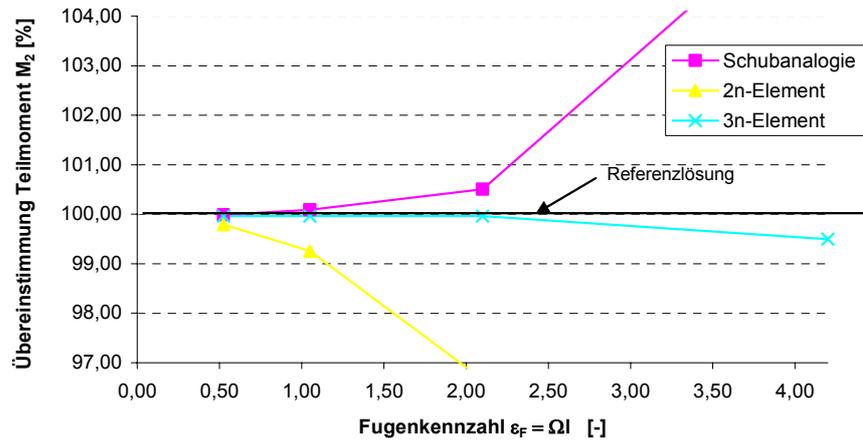


Abb. 4-12: Durchbiegung w und Teilnormalkraft N_1 in Feldmitte nach Theorie II. Ordnung

Teilmoment M_2 Referenzlösung (analytisch) **0,6162 kNm**

Teilung	Fugenkennzahl $\varepsilon_F = \Omega l$	3n-Element		2n-Element		Schubanalogie	
		kNm	%	kNm	%	kNm	%
-							
2	4,20	0,613	99,50	0,496	80,51	0,657	106,62
4	2,10	0,616	99,96	0,596	96,66	0,619	100,50
8	1,05	0,616	99,96	0,612	99,26	0,617	100,09
16	0,53	0,616	99,96	0,615	99,79	0,616	99,99



Schubfluss T Referenzlösung (analytisch) **13,878 kN/m**

Teilung	Fugenkennzahl $\varepsilon_F = \Omega l$	3n-Element		2n-Element		Schubanalogie	
		kN/m	%	kN/m	%	kN/m	%
-							
2	4,20	14,379	103,61	11,703	84,33	7,845	56,52
3	2,80	14,004	100,91				
4	2,10	13,931	100,39	12,875	92,77	11,793	84,98
8	1,05	13,890	100,09	13,610	98,07	13,226	95,30
16	0,53	13,887	100,07	13,840	99,73	13,696	98,69

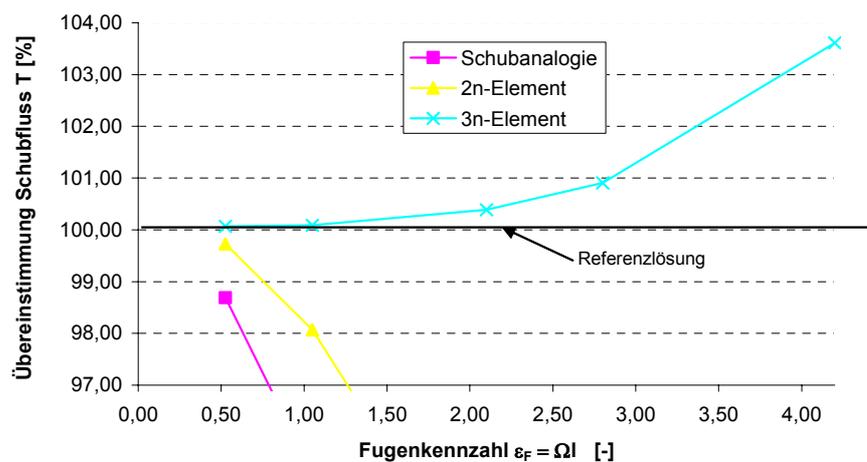


Abb. 4-13: Teilmoment M_2 in Feldmitte und Schubfluss T am Auflager nach Theorie II. Ordnung

Im Einzelnen werden die maximale Durchbiegung w , die maximale Teilnormalkraft N_1 im Teilquerschnitt 1, das maximale Teilmoment M_2 im Teilquerschnitt 2 (jeweils in Feldmitte) sowie der maximale Schubfluss T in der Fuge an den Auflagerpunkten betrachtet. Die analytische Referenzlösung nach Theorie II. Ordnung ergab eine Durchbiegung von $w = 9,276$ mm, einen maximalen Betrag der Teilnormalkraft N_1 von $-53,897$ kN bzw. ein maximales Teilmoment M_2 von $0,6162$ kNm. An den Auflagerpunkten beträgt der maximale Schubfluss $T = 13,878$ kN/m.

Es wird die Elementlänge l von 2 m bis zu $0,25$ m variiert. Die Elementlänge geht in die Fugenkennzahl ε_F (Gl. 4-16) ein. Es ergeben sich somit Fugenkennzahlen ε_F von $4,20$ bis $0,53$. Auf diese Kennzahlen werden alle Ergebnisse bezogen.

In Abb. 4-12 und Abb. 4-13 wird das prozentuale Verhältnis der numerischen Lösungen zur analytischen Lösung dargestellt. 100% bedeutet eine vollständige Übereinstimmung. Je geringer die Fugenkennzahl ε_F gewählt wird, desto geringer ist die Abweichung. Die Lösungen der Zustandsgrößen der Verbundelemente konvergieren asymptotisch gegen die exakte, analytische Lösung. Die Lösung der Schubanalogie konvergiert nicht genau gegen die exakten, analytischen Lösungen.

Die numerischen Lösungen des Schubflusses am Auflagerpunkt weisen die größte prozentuale Abweichung von der analytischen Lösung auf. Dabei erzielt das $3n$ -Verbundelement das beste Ergebnis. Ab einer Fugenkennzahl von $\varepsilon_F < 3,0$ ist die Abweichung des Schubflusses kleiner als 1% . Das $2n$ -Verbundelement erreicht diese Grenze bei einer Fugenkennzahl von $\varepsilon_F = 0,8$, während die Schubanalogie diese Grenze im untersuchten Fugenkennzahlbereich nicht erreicht. Extrapoliert liegt der Wert der Fugenkennzahl bei ca. $\varepsilon_F = 0,35$. Bei der Schubanalogie werden lediglich die Verschiebungen der Ersatzstäbe miteinander gekoppelt. Die Verdrehungen der Ersatzstäbe gleichen sich erst bei einer Steigerung der Koppelpunkte bzw. bei einer größeren Unterteilung einander an. Dies wird an einem Beispiel verdeutlicht. Bei der Unterteilung in nur zwei Elemente wird die Verdrehung am Auflager am Ersatzstab A (Eigenanteil) mit $5,792$ mrad ermittelt, während die Verdrehung am Ersatzstab B (Verbundanteil) dort $3,625$ mrad beträgt. Die resultierenden Schnittgrößen der Ersatzstäbe (insbesondere an Punkten mit großen Verdrehungen wie hier am Auflager) werden nur unzureichend abgebildet. Die 1% Grenze erreicht die Schubanalogie hier (extrapoliert) ab einer Unterteilung in 24 Elemente.

Die Zustandsgrößen in Feldmitte unterschreiten die 1% Abweichungsgrenze bereits bei höheren Fugenkennzahlen. Wiederum erzielt das $3n$ -Verbundelement das beste Ergebnis. Bei der größten untersuchten Fugenkennzahl $\varepsilon_F = 4,2$ weicht die Durchbiegung w um $0,95\%$, die Teilnormalkraft N_1 um $0,48\%$ bzw. das Teilmoment M_2 um $0,50\%$ von der analytischen Lösung ab. Es findet eine leichte Überbewertung der Verbundwirkung statt.

Beim $2n$ -Verbundelement erreicht die Durchbiegung w bei $\varepsilon_F = 1,3$, das Teilmoment M_2 bei $\varepsilon_F = 1,2$ bzw. die Normalkraft N_1 bei $\varepsilon_F = 2,7$ die 1% Grenze. Bei der Schubanalogie liegen die Werte für die Durchbiegung w bei $\varepsilon_F = 1,0$, für das Teilmoment M_2 bei $\varepsilon_F = 2,3$ bzw. für die Normalkraft N_1 bei $\varepsilon_F = 2,8$. Die Verdrehung des Ersatzstabes B und damit die Verbundwirkung werden zu gering abgeschätzt.

Das $3n$ -Element liefert insgesamt das beste Ergebnis. Die Durchbiegung, der Schubfluss bzw. die Teilnormalkräfte werden etwas zu hoch abgeschätzt (und damit auf der sicheren Seite) als die entsprechenden Referenzlösungen. Die Abweichung bei den Teilmomenten ist marginal.

Durch den nur linearen Verschiebungsansatz der Längsverschiebungen der Teilquerschnitte bei den $2n$ -Elementen wird das Tragverhalten erst bei kleineren Fugenkennzahlen und größerer

Unterteilung hinreichend abgebildet. Dies gilt besonders für die ausgewählten Maxima der Zustandsgrößen.

Bei der erweiterten Schubanalogie wird die Normalkraft durch den Ersatzstab C abgeleitet. Dieser besteht aus einer Kette von Pendelstäben. Pendelstäbe erzeugen nach Theorie II. Ordnung (vgl. Gl. 3-25) nur Zusatzquerkräfte, die nur aus den Verschiebungen der Knoten resultieren. In den Beitrag der Theorie II. Ordnung gehen keine Zusatzmomente bzw. die Verdrehungen der Knoten nicht ein. Dieser Einfluss verschwindet mit zunehmender Unterteilung des Systems. Die Verformungen sind durch die geringeren Zusatzkräfte aus Theorie II. Ordnung insgesamt geringer.

4.4 ANWENDUNGSGRENZEN

Analog zum quergebetteten Finiten Stabelement (z.B. für die Abbildung von Streifenfundamenten) haben die vorgestellten, nachgiebigen Verbundelemente ihre Grenzen in der Anwendung. Ziel der Verifizierung war es, bei einem bestimmten Verbundquerschnitt, Maximallängen l der Verbundelemente festzulegen. So kann eine ausreichende Ergebnisgenauigkeit gewährleistet werden. Die Ergebnisgenauigkeit ist abhängig von den Fugenkennzahlen ε_F (Gl. 4-16). Sie setzt sich zusammen aus relativer Fugensteifigkeit Ω der Verbundfugen und der Elementlänge l . Je kleiner die Fugenkennzahl, desto genauer sind die numerischen Ergebnisse der Verbundelemente. Verbundquerschnitte mit steiferen Fugen erfordern geringere Elementlängen.

Als ausreichende Ergebnisgenauigkeit wird eine Abweichungstoleranz von der exakten, analytischen Lösung im Bereich von ± 1 % angesehen. Bedenkt man die Tatsache, dass die Streuung der Eingangsparameter in der Regel höher ist, ist die festgelegte Abweichungstoleranz ausreichend.

Es wird empfohlen:

$$\varepsilon_F^{2n} = l \cdot \Omega \leq 0,8 \quad 2n\text{-Verbundelement} \quad (\text{Gl. 4-23})$$

$$\varepsilon_F^{3n} = l \cdot \Omega \leq 3,0 \quad 3n\text{-Verbundelement} \quad (\text{Gl. 4-24})$$

Der Anwender ist aufgefordert, seine Elementeinteilung so vorzunehmen, dass diese Grenzen nicht überschritten werden. Maßgebend ist diejenige Fuge innerhalb des Querschnitts, deren relative Fugensteifigkeit Ω am größten ist.

Eine Fuge einer Holz-Beton-Verbunddecke im Hochbau aus [Kuh04] mit einem 8 cm dicken Beton- und einem 16 cm dicken Holzteilquerschnitt, einer Fugensteifigkeit c von 688 MN/m² besitzt eine relative Fugensteifigkeit $\Omega = 1,7$ (Gl. 4-16). Bei einer Spannweite von 5,25 m sind für deren Berechnung drei 3n-Verbundelemente bzw. elf 2n-Verbundelemente ausreichend.

Die Fugen von Rippen von Brettrippenschalen haben in der Regel eine relative Fugensteifigkeit im Bereich von $\Omega = 1$ [1/m]. Für deren Berechnung mit dem 3n-Verbundelement sind somit Elementlängen l bis 3,0 m möglich. Die Länge einer Rippe zwischen zwei Rippenknoten von gebauten Brettrippenschalen beträgt maximal 1,7 m. Eine Modellierung der Rippen zwischen den Rippenknoten mit nur einem 3n-Verbundelement ist somit ausreichend.

KAPITEL 5

TORSION IM HOLZBAU

5.1. ALLGEMEINES

Ein auf einen Querschnitt wirkendes Torsionsmoment M_T wird grundsätzlich durch zwei Arten abgetragen: Torsion nach St. Venant (primäre Torsion) und durch Wölbkrafttorsion (sekundäre Torsion). Der Querschnitt erfährt dadurch eine Verdrehung $\varphi_x(x)$ um seine Längsachse.

Es gilt grundsätzlich die additive Aufspaltung:

$$M_T = M_T^P + M_T^S = GI_T \varphi_x'(x) - EC_M \varphi_x'''(x) \quad (\text{Gl. 5-0})$$

Bei geschlossenen Querschnitten und gedrunenen dickwandigen Querschnitten ist die Wölbkrafttorsion M_T^S vernachlässigbar klein und die Querschnitte sind "quasi-wölbfrei" [Pet03].

Die Wölbkrafttorsion M_T^S tritt nur auf bei

- nichtwölbfreien Querschnitten,
- wölbbehinderter Lagerung,
- und zusätzlich nur bei nicht-konstantem M_T -Verlauf.

Für die weitergehenden Betrachtungen wird Folgendes vorausgesetzt:

- Es wird von gleicher Verdrillung aller Querschnittsteile (keine klaffenden Fugen o.ä.) ausgegangen.
- Die Verformungen werden als hinreichend klein angesetzt (Theorie kleiner Verformungen).
- Torsionslasten wirken nicht nur als gegengerichtete Streckenlasten quer auf den oberen und unteren Teilquerschnitt, sondern sie werden in den Gesamtquerschnitt eingeleitet.

Das Tragverhalten eines nachgiebigen Verbundquerschnittes auf Torsion setzt sich aus dem Eigenanteil der Einzelquerschnitte und aus der Verbundwirkung zusammen. Querschnitte im Holzbau sind in der Regel rechteckig. Daher wird für rechteckige Querschnitte der Torsions-Eigenanteil ausführlich dargestellt. Bei der Verwendung anderer Querschnitte wird auf einschlägige Literatur verwiesen [z.B. Pet03].

5.2. TORSIONS-EIGENANTEIL VON RECHTECKQUERSCHNITTEN

5.2.1. VORBEMERKUNGEN

Bei schubbeanspruchten und damit auch bei tordierten Querschnitten ist der Schubmodul die entscheidende Materialgröße. Er ist bei homogenen, isotropen Materialien in allen drei

Raumrichtungen gleich. Holz dagegen ist ein inhomogener, anisotroper Werkstoff und besitzt abhängig von der Wuchsrichtung und der Jahresringebene drei verschiedene, senkrecht zueinander stehende Schubmoduli. Allerdings ist es schwierig, diese gerichteten Schubmoduli messtechnisch zuverlässig zu erfassen.

Die Jahresringe fallen auf Grund ihrer kreisförmigen Geometrie, insbesondere bei großen Querschnitten, unterschiedlich im Querschnitt aus. Holz besitzt außerdem ausgeprägte Inhomogenitäten wie Wuchsfehler, Ästigkeit usw. [Möh77]. Darüber hinaus macht die große Streubreite der Materialparameter, wie des E-Moduls, des Schubmoduls und der Festigkeiten von Holz eine realitätsnahe Berechnung schwierig.

Aus diesen Gründen hat sich für die praktische Berechnung die näherungsweise Annahme eines homogenen, isotropen Materialverhaltens bei Torsionsbelastung bewährt. Werden Hölzer mit ausgeprägter Anisotropie, wie z.B. Kiefer verwendet, ist eine genauere Betrachtung mit der anisotropen Theorie sinnvoll [Brü72].

In den einschlägigen Normen wie der DIN 1052 [DIN04] wird ein eigener, richtungsunabhängiger Schubmodul G_T für Torsion angegeben, der von dem Schubmodul für Querkraft abweicht.

Im Folgenden werden sowohl die isotrope Theorie [Wun04], als auch die anisotrope Theorie [Hei82] vorgestellt. Beide werden so aufbereitet, dass ein leichter Übergang möglich wird.

Wölbkrafttorsion spielt bei Rechteckquerschnitten nur eine untergeordnete Bedeutung: Rechtecke sind quasi wölbfrei; Quadrate sind wölbfrei.

5.2.2. HOMOGENES, ISOTROPES WERKSTOFFGESETZ

Für die homogene Theorie wird von einem einheitlichen, richtungsunabhängigen Torsions-Schubmodul G_T im Querschnitt ausgegangen.

Die Torsionssteifigkeit eines homogenen, isotropen Rechteckquerschnitts errechnet sich nach [Wun04] aus:

$$GI_T = G_T \frac{b^3 h}{3} \underbrace{\left(1 - 192 \frac{b}{\pi^5 h} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \tanh \frac{k\pi h}{2b} \right)}_{\alpha(\mu)} \quad (\text{Gl. 5-1})$$

Es wird die Formzahl

$$\mu = \frac{h}{b} \quad (\text{Gl. 5-2a})$$

eingeführt. Der Klammerausdruck in (Gl. 5-1) wird mit $\alpha(\mu)$ in Abhängigkeit von der Formzahl μ in Abb. 5-1 ausgewertet.

Damit ergibt sich

$$GI_T = G_T \frac{hb^3}{3} \alpha(\mu) \quad (\text{Gl. 5-2b})$$

Die Verdrillung φ'_x folgt gemäß der Mechanik zu

$$\varphi_x' = \frac{M_T}{GI_T} \quad (\text{Gl. 5-3})$$

Die Schubspannungen in der xy-Ebene errechnen sich [Wun04] mit (Abb. 5-2)

$$\tau_{xy} = 8G_T b \frac{\varphi_x'}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos \frac{k\pi y}{b} \sinh \frac{k\pi z}{b}}{k^2 \cosh \frac{k\pi h}{2b}} \quad (\text{Gl. 5-4})$$

Das Maximum der Schubspannungen ergibt sich bei $y=0$ und $z=-h/2$ zu

$$\tau_{xy \max} = G_T b \varphi_x' \underbrace{\frac{(-8)}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^2} \tanh \frac{k\pi h}{2b}}_{\beta(\mu)} \quad (\text{Gl. 5-5a})$$

Der Klammerausdruck in (Gl. 5-5a) wird mit $\beta(\mu)$ in Abhängigkeit von der Formzahl μ in Abb. 5-1 ausgewertet.

Es gilt somit

$$\tau_{xy \max} = G_T b \varphi_x' \beta(\mu) \quad (\text{Gl. 5-5b})$$

Die Schubspannungen in der xz-Ebene ergeben sich nach [Wun04] mit

$$\tau_{xz} = G_T \varphi_x' \left(2y + 8 \frac{b}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin \frac{k\pi y}{b} \cosh \frac{k\pi z}{b}}{k^2 \cosh \frac{k\pi h}{2b}} \right) \quad (\text{Gl. 5-6})$$

Das Maximum der Schubspannungen ergibt sich bei $y=b/2$ und $z=0$ zu

$$\tau_{xz \max} = G_T \varphi_x' b \underbrace{\left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cosh \frac{k\pi h}{2b}} \right)}_{\gamma(\mu)} \quad (\text{Gl. 5-7a})$$

Der Klammerausdruck in (Gl. 5-7a) wird mit $\gamma(\mu)$ in Abhängigkeit von der Formzahl μ in Abb. 5-1 ausgewertet.

Damit ergibt sich

$$\tau_{xz \max} = G_T \varphi_x' b \gamma(\mu). \quad (\text{Gl. 5-7b})$$

μ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
α	0,009	0,035	0,073	0,120	0,172	0,225	0,279	0,330	0,378	0,422	0,498	0,561	0,611	0,652	0,686
β	0,074	0,148	0,223	0,297	0,370	0,440	0,507	0,569	0,625	0,675	0,759	0,822	0,869	0,904	0,930
γ	0,100	0,200	0,297	0,387	0,465	0,529	0,581	0,621	0,652	0,675	0,706	0,723	0,732	0,737	0,739

μ	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00	20,00
α	0,720	0,748	0,771	0,790	0,806	0,820	0,832	0,842	0,874	0,895	0,910	0,921	0,930	0,937	0,968
β	0,953	0,968	0,978	0,985	0,990	0,993	0,996	0,997	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
γ	0,741	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742

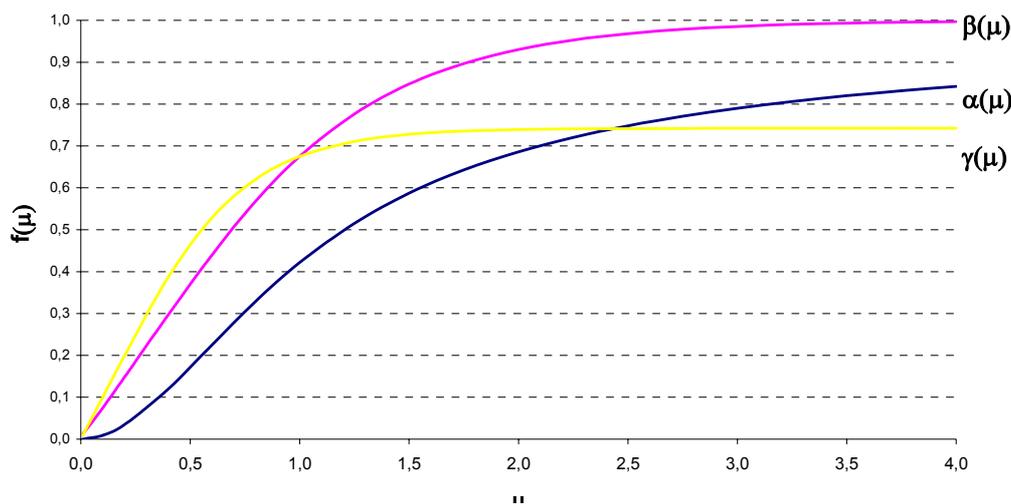


Abb. 5-1: Beiwerte zur Berechnung der Torsionssteifigkeit und der maximalen Torsionsschubspannungen von Rechteckquerschnitten

5.2.3. INHOMOGENES, ANISOTROPES WERKSTOFFGESETZ

Bei Biegebelastung hat die Anisotropie nur eine untergeordnete Bedeutung auf den Spannungsverlauf im Querschnitt. Dies wird durch Scholz [Scho04-2] in einer Studie bestätigt.

Er untersuchte einen Einfeldträger unter mittiger Einzellast mit einem Verhältnis der Spannweite zu Trägerhöhe von 10. Dabei stellte er die Spannungen eines isotropen Werkstoffes mit einem Verhältnis Elastizitätsmodul/Schubmodul = 1 denen eines anisotropen Holzquerschnittes (Elastizitätsmodul/Schubmodul = 20) gegenüber. Die Abweichungen der Spannungen liegen deutlich unter 1%. Die Annahme eines isotropen Werkstoffverhaltens bei Biegebelastung liefert daher hinreichend genaue Ergebnisse.

Bei Torsionsbelastung hat die Anisotropie einen größeren Einfluss als bei Biegebelastung. Holz besitzt für jede Raumrichtung einen unterschiedlichen Schubmodul G . Die Orientierung der 3 Richtungen ist abhängig von der Orientierung der Jahresringebenen (Abb. 5-2). Es wird im Folgenden von einer Wuchsrichtung in Richtung der x -Achse und von einer Jahresringebene in der xy -Ebene ausgegangen. Diese bildet in der Abb. 5-2 die horizontale Ebene. Es wird ab jetzt unterschieden in einen Schubmodul mit G_{xz} in der xz -Ebene, einen Schubmodul G_{xy} in der xy -Ebene und einen Schubmodul G_{yz} in der yz -Ebene.

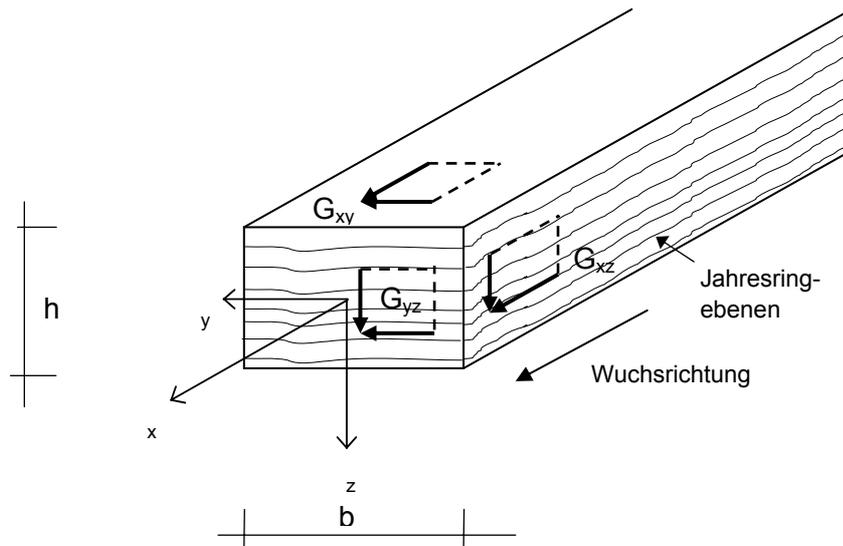


Abb. 5-2: Definition des lokalen Koordinatensystems eines Holzstabes

Der Schubmodul G_{xz} von Holz ist in der xz -Ebene am größten. In dieser Ebene wird auch die Querkraft Q_z abgetragen. Die yz -Ebene besitzt den geringsten G -Modul. Die dort wirkenden Schubspannungen werden als Rollschub bezeichnet und spielen bei Stabwerken aus Vollholz oder Brettschichtholz keine Rolle.

Torsion bei Stabwerken wird durch einen kreisförmigen Schubfluss in der xz - und xy -Ebene abgetragen. Sind die zugehörigen G -Moduli G_{xz} und G_{xy} nicht annähernd gleich, so ist der tordierte Querschnitt nach dem anisotropen Werkstoffgesetz zu berechnen.

Grundlage der folgenden Gleichungen ist die Theorie nach Heimeshoff [Hei82]. Sie werden in komplexen Ausdrücken siehe (Gl. 5-9), (Gl. 5-11), (Gl. 5-14) angegeben. Ziel ist es, diese zu vereinfachen und in eine, der isotropen, homogenen Theorie ähnliche Form zu überführen. Eine anschauliche Gegenüberstellung wird möglich und die Anwendung vereinfacht.

Mit der durch die Wurzel des Quotienten aus G_{xy} und G_{xz} erweiterten Formzahl (Gl. 5-2a)

$$\mu = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \tag{Gl. 5-8}$$

wird die Verdrillung nach [Hei82] mit

$$\varphi_x' = \frac{M_T}{bh} \left(\frac{1}{G_{xz} b^2} + \frac{1}{G_{xy} h^2} \right) \eta_1 \quad \text{mit} \quad \eta_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \left(1 - 192 \frac{1}{\pi^5 \mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \tanh \frac{k\pi\mu}{2} \right)} \tag{Gl. 5-9}$$

angegeben.

Mit der Grundgleichung (Gl. 5-3) ergibt sich somit die Torsionssteifigkeit zu

$$GI_T = \frac{bh}{3 \left(\frac{1}{G_{xz} b^2} + \frac{1}{G_{xy} h^2} \right) \eta_1} \tag{Gl. 5-10a}$$

Diese Gleichung lässt sich mit (Gl. 5-8) und (Gl. 5-9) vereinfachen zu

$$GI_T = G_{xz} \frac{hb^3}{3} \underbrace{\left(1 - 192 \frac{1}{\pi^5 \mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \tanh \frac{k\pi\mu}{2}\right)}_{\alpha(\mu)} \quad (\text{Gl. 5-10b})$$

Der Klammerausdruck ist abhängig von der erweiterten Formzahl μ gemäß (Gl.5-8) und ist identisch mit der Funktion $\alpha(\mu)$, die in Abb. 5-1 ausgewertet ist.

$$GI_T = G_{xz} \frac{hb^3}{3} \alpha(\mu) \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \quad (\text{Gl. 5-10c})$$

Die Funktion $\alpha(\mu)$ gilt sowohl für die isotrope als auch für die anisotrope Theorie.

Die Schubspannungen nach [Hei82] ergeben sich nach der Gleichung

$$\tau_{xy} = \frac{M_T}{b^2 h} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \frac{8}{1-f} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos \frac{k\pi y}{b} \sinh \frac{k\pi\mu z}{h}}{\pi^2 k^2 \cosh \frac{k\pi\mu}{2}} \quad (\text{Gl. 5-11})$$

mit $f = 192 \frac{1}{\pi^5 \mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \tanh \frac{k\pi\mu}{2}$

Durch Substitution von M_T mit (Gl. 5-3) und (Gl. 5-10) ergibt sich dann

$$\tau_{xy} = \frac{8\varphi_x' \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{yz}}}}{b \left(\frac{1}{G_{yz} b^2} + \frac{1}{G_{xy} h^2}\right)} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos \frac{k\pi y}{b} \sinh \frac{k\pi\mu z}{h}}{\pi^2 k^2 \cosh \frac{k\pi\mu}{2}} \quad (\text{Gl. 5-12a})$$

und durch die Substitution der erweiterten Formzahl μ (Gl. 5-8) wird die Schubspannung vereinfacht zu

$$\tau_{xy} = G_{xz} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \varphi_x' b \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos \frac{k\pi y}{b} \sinh \frac{k\pi\mu z}{h}}{k^2 \cosh \frac{k\pi\mu}{2}} \quad (\text{Gl. 5-12b})$$

Die maximale Schubspannung im Querschnitt ergibt sich bei $y=0$ und $z=-h/2$ mit

$$\tau_{xy\max} = G_{xz} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \varphi_x' b \underbrace{\frac{(-8)}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \tanh \frac{k\pi\mu}{2}}{k^2}}_{\beta(\mu)} \quad (\text{Gl. 5-13a})$$

oder mit $\beta(\mu)$ nach Abb. 5-1 ausgewertet

$$\tau_{xy\max} = G_{xz} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{xz}}} \varphi_x' b \beta(\mu) \quad (\text{Gl. 5-13b})$$

Die Funktion $\beta(\mu)$ gilt sowohl für die isotrope als auch für die anisotrope Theorie.

Die Schubspannungen in der xz -Ebene werden nach [Hei82] angegeben durch

$$\tau_{xz} = \frac{M_T}{b^2 h} \frac{8}{1-f} \left[\frac{2y}{b} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin \frac{k\pi y}{b} \cosh \frac{k\pi\mu z}{h}}{k^2 \cosh \frac{k\pi\mu}{2}} \right]$$

mit $f = 192 \frac{1}{\pi^5 \mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \tanh \frac{k\pi\mu}{2}$ (Gl. 5-14)

Durch Substitution von M_T mit (Gl. 5-3) und (Gl. 5-10) ergibt sich dann

$$\tau_{xz} = \frac{\varphi_x' \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right)}{b \left(\frac{1}{G_{yz} b^2} + \frac{1}{G_{xy} h^2} \right)} \left(\frac{2y}{b} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin \frac{k\pi y}{b} \cosh \frac{k\pi\mu z}{h}}{k^2 \cosh \frac{k\pi\mu}{2}} \right)$$

und durch Substitution der Formzahl μ (Gl. 5-8) wird die Schubspannung vereinfacht zu

$$\tau_{xz} = G_{xz} \varphi_x' \left(2y + 8 \frac{b}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin \frac{k\pi y}{b} \cosh \frac{k\pi\mu z}{h}}{k^2 \cosh \frac{k\pi\mu}{2}} \right) \quad (\text{Gl. 5-15})$$

Die maximale Schubspannung im Querschnitt ergibt sich bei $y=b/2$ und $z=0$ zu

$$\tau_{xz \max} = G_{xz} \varphi_x' b \underbrace{\left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cosh \frac{k\pi\mu}{2}} \right)}_{\gamma(\mu)} \quad (\text{Gl. 5-16a})$$

oder mit $\gamma(\mu)$ nach Abb. 5-1 ausgewertet

$$\tau_{xz \max} = G_{xz} \varphi_x' b \gamma(\mu) \quad (\text{Gl. 5-16b})$$

Die Funktion $\gamma(\mu)$ gilt sowohl für die isotrope als auch für die anisotrope Theorie.

5.2.4. FAZIT

Für homogene, isotrope Rechteckquerschnitte unter Torsionsbelastung stehen einem Anwender in den einschlägigen Tabellenwerken [z. B. Schn01] Angaben für die Ermittlung der Torsionssteifigkeit und der maximalen Schubspannung zur Verfügung. Sie sind abhängig vom geometrischen Seitenverhältnis, der Formzahl h/b (Gl. 5-2a).

Erweitert man lediglich den Leitparameter Formzahl durch einen Term mit den Schubmoduli G_{xz} und G_{xy} (Gl. 5-8) und ersetzt den einheitlichen Torsions-Schubmodul G_T durch G_{xz} , so kann diese Theorie auch für die Berechnung von inhomogenen, anisotropen Holzrechteckquerschnitten mit unterschiedlichen Schubmoduli G_{xz} und G_{xy} angewandt werden.

5.3. TORSION BEI NACHGIEBIGEN VERBUNDQUERSCHNITTEN

5.3.1. GRUNDSÄTZLICHES

Ein Torsionsmoment M_T wird zum einen durch die Eigentragswirkungen der Teilquerschnitte und zum anderen durch die Verbundtragwirkung abgetragen. Da die Verdrillung $\varphi_x'(x)$ im Gesamtquerschnitt als gleich vorausgesetzt wird, teilt sich M_T im Verhältnis der Torsionssteifigkeiten der Eigentragswirkungen zur Verbundtragwirkung in ein $M_{T\text{Eigen}}$ und in ein $M_{T\text{Verbund}}$ auf.

Es gilt:

$$\varphi_x' = \frac{M_T}{GI_T} = \sum_{i=1}^n \frac{M_{T\text{Eigen}}}{GI_{T\text{Eigen}}} = \frac{M_{T\text{Verbund}}}{GI_{T\text{Verbund}}} \quad (\text{Gl. 5-17})$$

5.3.2. EINREIHIGE VERBINDUNG

Querschnitte mit nur einer Verbindungsmittelreihe pro Fuge verhalten sich wie offene Querschnitte, da sie nur an einem Punkt im Querschnitt gekoppelt sind. Der in Abb. 5-3 dargestellte zweiteilige Querschnitt ist vergleichbar mit einem I-Profil des Stahlbaus. Die Teilquerschnitte (Flansche) werden nur durch eine Verbindungsmittelreihe (Steg) miteinander verbunden.

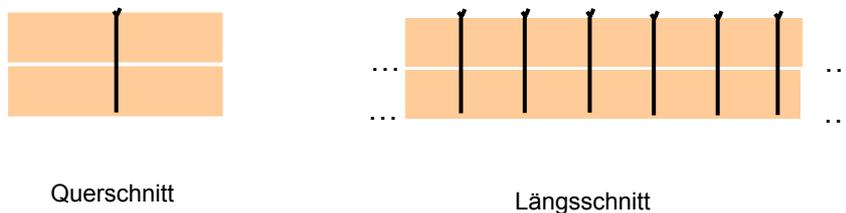


Abb. 5-3: Verbundquerschnitt mit je einer Verbindungsmittelreihe pro Fuge

Es wird davon ausgegangen, dass sich durch Schwinden der Teilquerschnitte die Fuge öffnet. Es bestehen dadurch keine direkten Presskontakte und damit Reibung zwischen den Teilquerschnitten. Eine Kraftübertragung findet ausschließlich über die Verbindungsmittelreihe statt.

Bei offenen Querschnitten wird Torsion nicht ausschließlich über die primäre St.Vernant'sche Torsion abgetragen, sondern auch über die sekundäre Wölbkrafttorsion.

Das Torsionsmoment wird grundsätzlich über einen geschlossenen Schubkreislauf abgetragen. Dies ist nur innerhalb der Teilquerschnitte möglich. Eine Verbindungsmittelreihe kann Schub nur in einer Richtung aufnehmen. Ein geschlossener Kreislauf über mehrere Einzelquerschnitte ist somit nicht möglich. Der Verbund leistet keinen Beitrag zur Lastabtragung des Torsionsmomentes. Torsion wird daher nur durch die Teilquerschnitte abgetragen.

Nach [Ser93] gilt

$$GI_{T_{\text{Eigen}}} = \sum_{i=1}^n GI_{T_{i\text{Eigen}}}$$

$$GI_{T_{\text{Verbund}}} = 0 \quad (\text{Gl. 5-18})$$

$GI_{T_{i\text{Eigen}}}$ ist die Eigentorsionssteifigkeit eines Teilquerschnittes i . Für einen Rechteckquerschnitt errechnet sie sich nach (Gl. 5-2b) oder (Gl. 5-10a).

Die sekundäre Torsionssteifigkeit ergibt sich aus der Gleichung

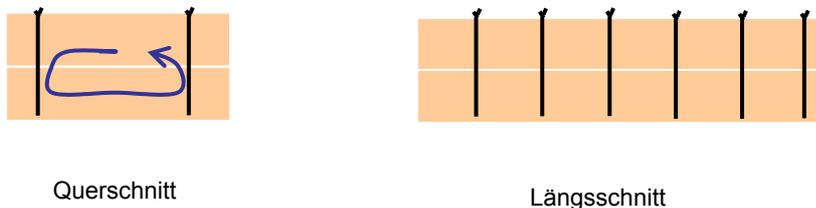
$$EC_M = \sum_{i=1}^n EI_{z_i} z_{M_i}^2 \quad (\text{Gl. 5-19})$$

z_{M_i} ist der Schwerpunktsabstand (z-Komponente) des Teilquerschnittes i vom Schubmittelpunkt des Gesamtquerschnittes. EI_{z_i} ist die Querbiegesteifigkeit um die z-Achse des Teilquerschnittes i . Die in der Praxis üblichen Feder-Steifigkeiten der Verbindungsmittel gewährleisten eine vollständige Verschiebungskopplung der Teilquerschnitte [Ser93].

5.3.3. ZWEIREIHIGE VERBINDUNG

5.3.3.1. ALLGEMEINES

Häufig werden im Holzbau die Teilquerschnitte, wie z.B. in der Brettrampenbauweise, durch zwei Verbindungsmittelreihen miteinander verbunden (Abb. 5-4).



Querschnitt

Längsschnitt

Abb. 5-4: Verbundquerschnitt mit zwei Verbindungsmittelreihen pro Fuge

Im Gegensatz zur einreihigen Verbindung ist bei einer zweireihigen Verbindung ein geschlossener Torsionsschubflusskreislauf zwischen den Teilquerschnitten möglich. Der Verbund ist dadurch in erheblichem Maße an der Lastabtragung des Torsionsmomentes beteiligt. Zu den Eigentorsionssteifigkeiten der "offenen" n Teilquerschnitte addiert sich die Verbundtorsionssteifigkeit des "geschlossenen" Querschnittes.

Es gilt:

$$GI_T = \sum_{i=1}^n GI_{T_{i\text{Eigen}}} + GI_{T_{\text{Verbund}}} \quad (\text{Gl. 5-20})$$

Geschlossene Querschnitte sind "quasi-wölbfrei" und somit spielt Wölbkrafttorsion keine Rolle [Pet03].

Direkter Kontakt und Reibung zwischen den Teilquerschnitten wird, wie bei einer einreihigen Verbindung, nicht angesetzt.

5.3.3.2. ZWEITEILIGER QUERSCHNITT

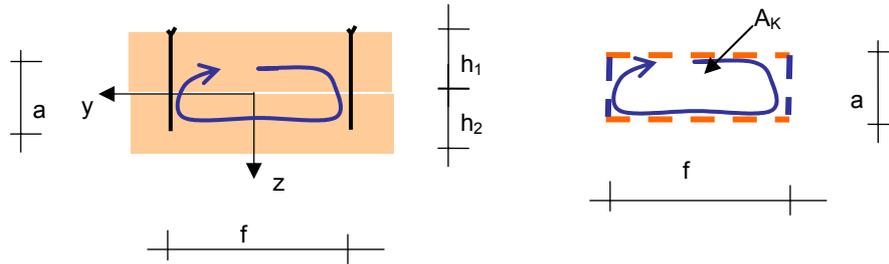


Abb. 5-5: Zweiteiliger Verbundquerschnitt mit je zwei Verbindungsmittelreihen, statisches Modell

Das statische Modell der geschlossenen Verbundtorsionswirkung besteht nur aus einer Zelle. Einzellige Querschnitte sind mit den Bredt'schen Formeln einfach zu berechnen.

Es errechnet sich die Verbundtorsionssteifigkeit $GI_{T\text{Verbund}}$ nach der 2. Bredt'schen Formel:

$$GI_{T\text{Verbund}} = \frac{4 \cdot A_K^2}{\int \frac{ds}{Gt}} \quad (\text{Gl. 5-21})$$

A_K ist die umschlossene Fläche der Zelle (Abb. 5-5). Die horizontalen Flansche des Modells stellen die Anteile der Teilquerschnitte zwischen den Verbindungsmittelreihen dar. Die vertikalen Stege des Modells symbolisieren die beiden Verbindungsmittelreihen. Jede Zellenwand im Modell wird mit ihrer Schubsteifigkeit Gt charakterisiert. Mit t wird allgemein die Zellwanddicke und mit G deren Schubmodul bezeichnet.

Es ergibt sich somit

$$GI_{T\text{Verbund}} = \frac{4 \cdot (af)^2}{2 \frac{f}{Gt_{\text{Flansch}}} + 2 \frac{a}{Gt_{\text{Steg}}}} \quad (\text{Gl. 5-22})$$

Für den Querwert der Schubsteifigkeit der Flansche $\frac{f}{Gt_{\text{Flansch}}}$ gehen die Höhen h und die

Schubmoduli G_{xy} der Teilquerschnitte ein.

Die Schubnachgiebigkeit des Modellsteges soll der Schubnachgiebigkeit einer Verbindungsmittelreihe c' entsprechen, d.h. ein möglicher Schubfluss T hat die gleiche Fugenverschiebung Δ zu verursachen. Es gilt nach [Aic87]:

$$T = \underbrace{c' \cdot \Delta}_{\text{Verbindungsreihe}} = \underbrace{\frac{G}{a} t_{\text{Steg}} \cdot \Delta}_{\text{Modellsteg}} \quad (\text{Gl. 5-23a})$$

c' ist bei zwei gleichen Verbindungsmittelreihen die halbe Fugensteifigkeit c .

Somit ergibt sich

$$c' = \frac{Gt_{\text{Steg}}}{a} \quad (\text{Gl. 5-23b})$$

und die Verbundtorsionssteifigkeit zu

$$GI_{T_{Verbund}} = \frac{4 \cdot (af)^2}{\frac{f}{G_{xy}h_1} + \frac{f}{G_{xy}h_2} + 2 \frac{1}{c'}} \quad (\text{Gl. 5-24})$$

Der Schubfluss T in einer Verbindungsmittelreihe errechnet sich aus der 1. Bredt'schen Formel mit

$$T = \frac{M_{T_{Verbund}}}{2A_K} \quad (\text{Gl. 5-25})$$

Die konstanten Schubspannungen in den beiden Teilquerschnitten aus der Verbundwirkung sind analog

$$\tau_{xy_{Verbund}} = \frac{M_{T_{Verbund}}}{2A_K h_{1,2}} \quad (\text{Gl. 5-26})$$

Sie wird überlagert von dem Eigenschubspannungsverlauf $\tau_{xy_{Eigen}}$ in jedem Teilquerschnitt.

5.3.3.3. MEHRTEILIGER QUERSCHNITT

Ein mehrzelliger Querschnitt mit m Zellen ist m-fach statisch unbestimmt. Die Torsionssteifigkeit und die Schubflüsse errechnen sich z.B. mit dem Kraftgrößenverfahren.

Exemplarisch wird dies am 3-teiligen Querschnitt (2 Zellen) demonstriert (Abb. 5-6 / Abb. 5-7).

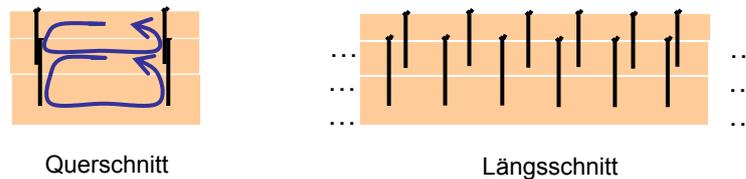


Abb. 5-6: Mehrteiliger Verbundquerschnitt mit je zwei Verbindungsmittelreihen pro Fuge

Die Gleichung (Gl. 5-20) gilt unverändert auch für mehrzellige Querschnitte.

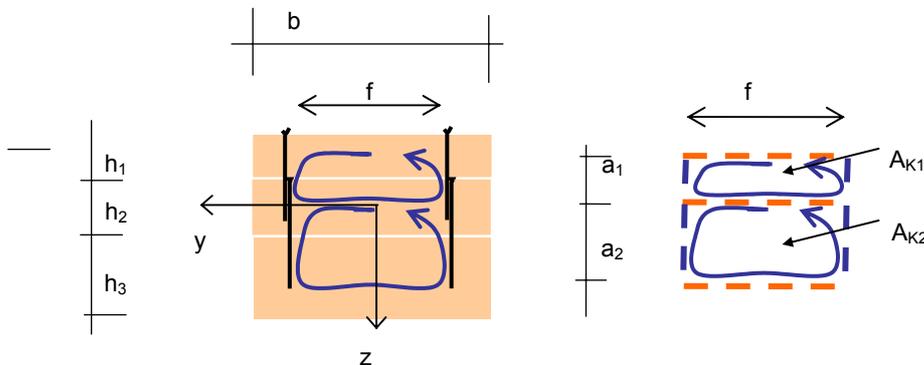


Abb. 5-7: Mehrteiliger Verbundquerschnitt je zwei Verbindungsmittelreihen pro Fuge und das dazugehörige mehrzellige, statische Modell der Verbundtragwirkung

Der 2-fach statisch unbestimmte Querschnitt wird durch einen Längsschnitt in jeder Zelle in einen statisch bestimmten Querschnitt überführt. Die Öffnungen des dann offenen Querschnittes werden mit 1 und 2 bezeichnet (Abb. 5-8).

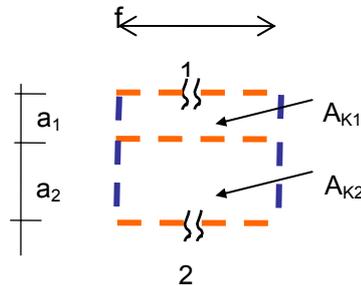


Abb. 5-8: Statisch bestimmtes Hauptsystem des zweizelligen Modellquerschnitts

Infolge des Torsionsmomentes M_T (Lastzustand 0) ergeben sich am Hauptsystem an den Stellen 1 und 2 die Längsverschiebungsdifferenzen (Verwölbungen) u_{10} und u_{20} .

Die Verwölbung u errechnet sich allgemein aus der Einheitsverwölbung ω multipliziert mit der Verdrillung φ'_x

$$u = \omega \varphi'_x = - \int r(s) ds \varphi'_x = -2 A_K \varphi'_x \quad (\text{Gl. 5-27})$$

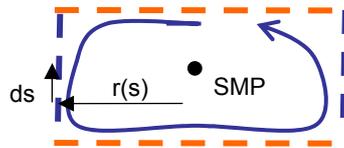


Abb. 5-9: Einheitsverwölbung

$r(s)$ ist der Hebelarm der Umlaufvariable s um den Schubmittelpunkt SMP einer Zelle (Abb. 5-9).

Somit ergeben sich die Längsverschiebung u_{10} an den Stellen 1 und u_{20} an der Stelle 2 abhängig von deren umschlossenen Kernflächen A_{K1} der Zelle 1 und A_{K2} der Zelle 2.

$$\begin{aligned} u_{10} &= -2 A_{K1} \varphi'_x \\ u_{20} &= -2 A_{K2} \varphi'_x \end{aligned} \quad (\text{Gl. 5-28})$$

Es stellt sich die zentrale Frage: Welcher Schubfluss T_1 an den Stellen 1 und T_2 an der Stelle 2 ist aufzubringen, damit die dortigen Lücken kompensiert werden (Abb. 5-10)?

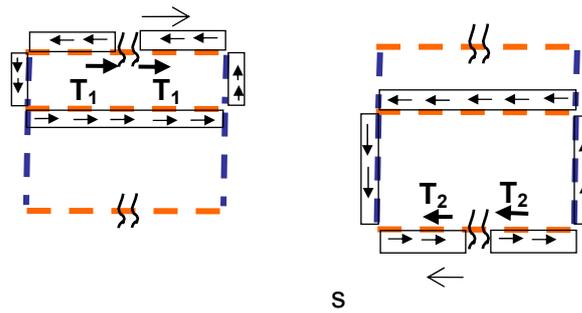


Abb. 5-10: Einheitszustände

Es muss gelten:

$$\begin{aligned} u_{10} + u_{11} + u_{12} &= 0 \\ u_{20} + u_{21} + u_{22} &= 0 \end{aligned} \tag{Gl. 5-29}$$

Es sind also zwei Verträglichkeitsbedingungen für die Längsverschiebungen an den Stellen 1 und 2 aufzustellen.

u_{11} , u_{12} , u_{21} und u_{22} errechnet sich mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte. An den Stellen 1 und 2 sind jeweils virtuelle Kräfte 1 anzutragen und der zugehörige virtuelle Schubflussverlauf zu ermitteln (Abb. 5-11).

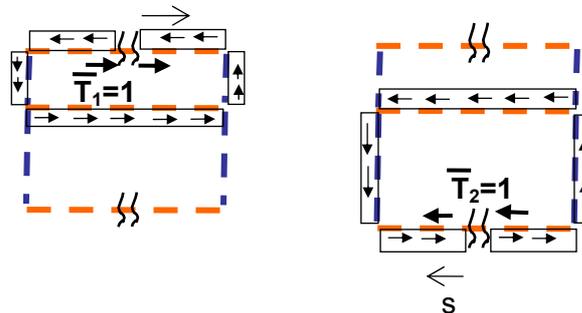


Abb. 5-11: Virtueller Schubfluss T_1 und T_2 zur Berechnung der Verformungen an der Stelle 1 und 2

$$\begin{aligned} u_{11} &= \int \bar{T}_1 \cdot T_1 \frac{ds}{Gt} = T_1 \left(2 \frac{1}{c'_{12}} + \frac{f}{G_{xy1} h_1} + \frac{f}{G_{xy2} h_2} \right) \\ u_{12} &= \int \bar{T}_1 \cdot T_2 \frac{ds}{Gt} = -T_2 \left(\frac{f}{G_{xy2} h_2} \right) \\ u_{21} &= \int \bar{T}_2 \cdot T_1 \frac{ds}{Gt} = -T_1 \left(\frac{f}{G_{xy2} h_2} \right) \\ u_{22} &= \int \bar{T}_2 \cdot T_2 \frac{ds}{Gt} = T_2 \left(2 \frac{1}{c'_{23}} + \frac{f}{G_{xy2} h_2} + \frac{f}{G_{xy3} h_3} \right) \end{aligned} \tag{Gl. 5 -30}$$

f ist der horizontale Abstand der beiden Verbindungsmittelreihen. Mit h_i werden die Höhen des Teilquerschnittes i und mit c_{ij} die Fugensteifigkeit der Fuge zwischen den Querschnitten i und j bezeichnet. G_{xyi} ist der Schubmodul des Teilquerschnittes i in der horizontalen xy -Ebene.

Um die drei Unbekannten T_1 , T_2 und φ_x' ermitteln zu können, ist neben den beiden Verträglichkeitsbedingungen eine weitere Gleichung notwendig. Da von gleicher Verdrillung im Gesamtquerschnitt ausgegangen wird, verteilt sich das gesamte Torsionsmoment im Verhältnis zu den Torsionssteifigkeiten.

$$\begin{aligned}
 M_T &= \sum_i^3 M_{T_{iEig}} + M_{T_{1Verbund}} + M_{T_{2Verbund}} \\
 M_T &= \sum_i^3 GI_{T_{iEig}} \varphi_x' + GI_{T_{1Verbund}} \varphi_x' + GI_{T_{2Verbund}} \varphi_x' \\
 M_T &= \sum_i^3 GI_{T_{iEig}} \varphi_x' + 2A_{K1}T_1 + 2A_{K2}T_2
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 5-31}$$

Somit ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix}
 2\frac{1}{c'_{12}} + \frac{f}{G_{xy1}h_1} + \frac{f}{G_{xy2}h_2} & -\frac{f}{G_{xy2}h_2} & -2A_{K1} \\
 -\frac{f}{G_{xy2}h_2} & 2\frac{1}{c'_{23}} + \frac{f}{G_{xy2}h_2} + \frac{f}{G_{xy3}h_3} & -2A_{K2} \\
 2A_{K1} & 2A_{K2} & \sum_i^n GI_{T_{iEig}}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 \varphi_x'
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 M_T
 \end{bmatrix}
 \tag{Gl. 5-32}$$

und die die Lösungen für die unbekanntenen Größen T_1 , T_2 und φ_x' .

Die gesamte Torsionssteifigkeit setzt sich somit zusammen aus

$$GI_T = \sum_{i=1}^3 GI_{T_{iEig}} + \frac{2A_{K1}T_1}{\varphi_x'} + \frac{2A_{K2}T_2}{\varphi_x'}
 \tag{Gl. 5-33}$$

Der resultierende Schubfluss der Verbundwirkung ist in Abb. 5-12 dargestellt.

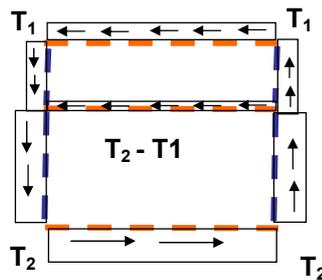


Abb. 5-12: Resultierender Schubfluss im mehrteiligen, zweireihigen Verbundquerschnitt

Wie man erkennt, werden die Verbindungsmittelreihen durch den Schubfluss T_1 und T_2 beansprucht.

Die Schubspannungen $\tau_{xyiVerbund}$ der Verbundwirkung im Teilquerschnitt i errechnen sich aus dem Schubfluss im Teilquerschnitt i zu:

$$\tau_{xyiVerbund} = \frac{T_i}{h_i}
 \tag{Gl. 5-34}$$

Sie wird überlagert von dem Eigenschubspannungsverlauf τ_{xy}^{Eigen} in jedem Teilquerschnitt.

5.3.3.4. REGELMÄßIGER MEHRTEILIGER QUERSCHNITT

Bei Brettrippenschalen wird der nachgiebige Verbundquerschnitt regelmäßig aufgebaut. Er besteht aus identischen Teilquerschnitten, die durch identische zweireihige Verbundfugen miteinander verschraubt oder vernagelt werden. So ergeben sich im Modellquerschnitt i gleiche Zellen, deren Schubflüsse T_i identisch sind.

Die Zellschubflüsse von zwei benachbarten Zellen sind gegenläufig und heben sich dadurch in Zwischenflanschen des Modells auf. Übrig bleibt ein einheitlicher umlaufender Schubfluss T ($=T_i$) über die beiden Randflansche und die Stege des Modells. Die Zwischenflansche sind daher nicht an der Verbundtorsionstragwirkung beteiligt. Der Querschnitt verhält sich wie ein einzelliger Querschnitt.

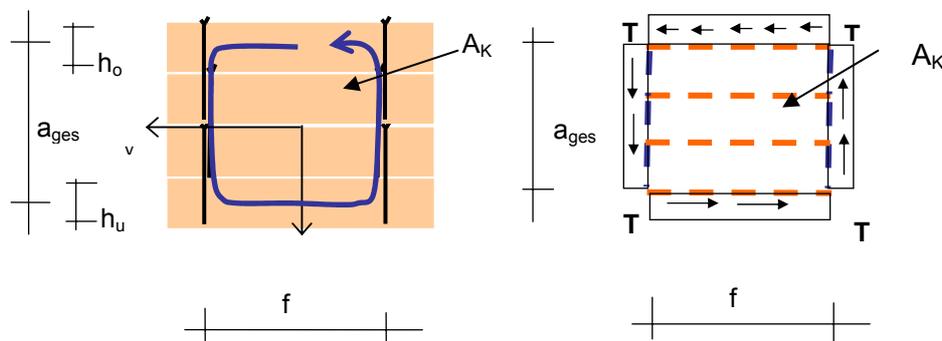


Abb. 5-13: Regelmäßiger, mehrteiliger Verbundquerschnitt mit zwei Verbindungsmittelreihen, Schubfluss wie ein einzelliger Querschnitt

Die Torsionssteifigkeit errechnet sich somit nach der 2. Bredt'schen Formel. c' ist die Schubnachgiebigkeit einer Verbindungsmittelreihe in einer Fuge.

$$GI_{T_{Verbund}} = \frac{4(a_{ges}f)^2}{\frac{f}{G_{xy_u}h_u} + \frac{f}{G_{xy_o}h_o} + \sum_{Fugen} \frac{2}{c'}} \quad (Gl. 5-35)$$

Aus der 1. Bredt'schen Formel ergibt sich der Schubfluss T in jeder Verbindungsmittelreihe zu

$$T = \frac{M_{T_{Verbund}}}{2A_K} = \frac{M_{T_{Verbund}}}{2a_{ges}f} \quad (Gl. 5-36)$$

Die konstanten Schubspannungen in den beiden Randquerschnitten aus der Verbundwirkung sind

$$\tau_{xy_{Verbund}} = \frac{M_{T_{Verbund}}}{2A_K h_{o,u}} \quad (Gl. 5-37)$$

Diese Schubspannung (Gl. 5-37) wird überlagert von dem Eigenschubspannungsverlauf τ_{xy}^{Eigen} in jedem Teilquerschnitt.

KAPITEL 6 BERECHNUNG EINER BRETRIPPENSCHALE

6.1 VORBEMERKUNGEN

Im folgenden Kapitel wird die praktische Einsatzmöglichkeit der neuen Finiten Verbundelemente für die Berechnung eines räumlichen Stabtragwerks aus nachgiebigen Verbundquerschnitten aufgezeigt.

Mit dem $3n$ -Element wird eine Brettrippenschale berechnet und auf die dabei speziell auftretenden Fragestellungen bei der Berechnung und Modellierung eingegangen.

Die Berechnungen werden mit dem Programmsystem Sofistik durchgeführt. Die Steifigkeitsmatrizen der Verbundelemente werden durch ein Unterprogramm auf Basis des Satzes FLEX in Sofistik implementiert.

Als Beispieltragwerk wird eine Kuppel in Brettrippenbauweise ausgewählt, wie sie schon mehrfach zur Ausführung gekommen ist [Nat00]. Ihre Standsicherheit wird nachgewiesen.

Brettrippenschalen sind hochgradig statisch unbestimmte Systeme, deren Lastabtragung äußerst komplex verläuft. Die Lastabtragung erfolgt bei idealer Stützlinienbelastung ausschließlich durch Drucknormalkräfte, die mit geringem Materialeinsatz äußerst günstig abgetragen werden können. Auf ein Bauwerk wirkt nicht nur ein ständig vorhandenes, unveränderliches Lastbild (z. B. Eigengewicht), sondern eine Vielzahl von Verkehrslastbildern (z. B. Wind und Schnee), die in unterschiedlicher Verteilung auf das Tragwerk einwirken. Die Stützlinie jedes Lastbildes weicht in der Regel von der Tragstruktur ab. Die Folge sind Biegemomente und Schub in den Fugen, die nur durch einen größeren Materialeinsatz abgetragen werden können.

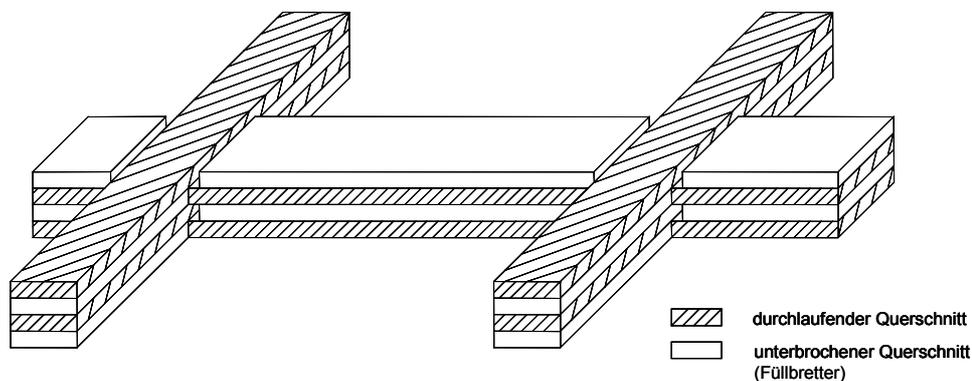


Abb. 6-1: Aufbau der Rippen einer Brettrippenschale [Schw06]

Doppelt gekrümmte Tragwerke (z. B. Kuppeln) weisen gegenüber einfach gekrümmten Tragwerken (z. B. Tonnenschalen) ein höheres Lastpotenzial auf.

Für die Dimensionierung einer Brettrippenschale ist in der Regel eine asymmetrische Lastfallkombination aus einseitiger Schneelast, asymmetrischer Imperfektion und ständigem Eigengewicht entscheidend. Für die einseitige Schneelast ist nach DIN 1055-5 [DIN05] nur der halbe Bemessungswert anzusetzen. Das Windlastbild für bogenförmige Bauwerke ist geprägt von mehrheitlich abhebenden und damit entlastenden Windsogkräften. Wind geht daher in die entscheidende Lastkombination meist nicht ein. Dies ist aber im Einzelfall zu prüfen.

Aufgrund der filigranen und damit weichen Tragstruktur und der durch Druckkräfte geprägten Lastabtragung ist eine Berechnung des Gleichgewichts am verformten System nach Theorie II. Ordnung zwingend erforderlich. Nach DIN 1052 [DIN04] sind sämtliche Steifigkeiten des Tragwerks, einschließlich der Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel, durch den Sicherheitsbeiwert des Materials abzumindern. So wird ein ausreichendes Sicherheitsniveau gegenüber einem plötzlich auftretenden Stabilitätsversagen gewährleistet.

Im Hinblick auf eine realistische Abschätzung der Tragwirkung von Brettrippenschalen existieren noch zahlreiche Unklarheiten. Einige davon werden mit der vorliegenden Arbeit geklärt. Bis jetzt war der Einfluss der unterbrochenen Brettlagen (Füllbretter) auf das Tragverhalten unklar [Pir05] (Abb. 6-1). Eine Studie im Kapitel 6.4 gibt darüber Aufschluss. Die Initialspannungen, die sich nach dem Einbau und Lösen vom Lehrgerüst in den gekrümmten Bauteilen entstehen, können mit dem Verbundelement abgeschätzt werden (Kapitel 6.3).

Das Zusammenspiel der Schalung mit den Rippen ist in einigen Punkten unbekannt [Pir05]. Es ist ungeklärt, wie eine exzentrisch an die Rippen angeschlossene Schalung sich auf das Tragverhalten auswirkt. Bisher wurde die Exzentrizität einer über den Rippen angeordneten Dachschalung nicht berücksichtigt. Darüber hinaus ist der Einspanneffekt (Koppelsteifigkeiten der Verdrehungen), den die großflächige Schalung auf die Rippen ausübt, nur schwer zu quantifizieren. Ebenso ist der Einspanneffekt zwischen Längs- und Querrippen in den Rippenknoten unbekannt. Dies können nur Versuche klären.

6.2 GEKRÜMMTE STÄBE

Sowohl die Rippen als auch die Dachschalung sind gekrümmte Bauteile. Ihre Berechnung unterscheidet sich von geraden Trägern nach der Biegetheorie nach Bernoulli in mehreren Punkten. Die Spannungsverteilung über die Trägerhöhe ist bei gekrümmten Trägern unter Biegebelastung nicht linear, sondern hyperbolisch (Abb. 6-2). Die Nulllinie ist zum inneren Rand hin verschoben. An der Innenseite stellt sich ein höherer Spannungswert ein als an der Außenseite. Es werden zusätzlich rechtwinklig zur Faserrichtung Querspannungen durch die Umlenkkräfte erzeugt [Buc67]. Angaben über die Spannungsberechnung für Kreisbogenträger aus isotropen Materialien findet man in [Hei67].

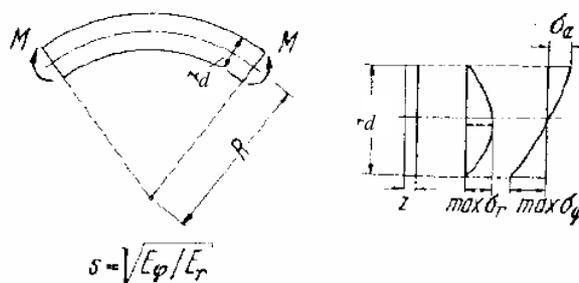


Abb. 6-2: Tangential - und Radialspannungen eines polarorthotropen Kreisbogenträgers infolge von Biegung [Buc67]

Für anisotrope Materialien wie Holz leitet Blumer [Blu79] Gleichungen für die Tangential- (Normal-) und Radial- (Querzug-)spannungen für einen polarorthotropen Kreisbogenträger mit Rechteckquerschnitt her. Es wird lineares Materialverhalten vorausgesetzt.

Der Anisotropiegrad s ist die Wurzel des Verhältnisses zwischen dem tangentialen und dem radialen E-Modul:

$$s = \sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}}, \quad (\text{Gl. 6-1})$$

Für den Werkstoff Holz errechnet sich der Anisotropiegrad zu $s = 6$.

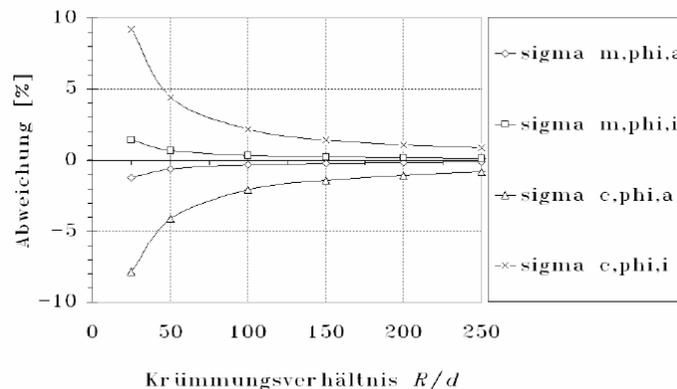


Abb. 6-3: Tangentialspannung am Rand; Abweichung eines Kreisbogenträgers von einem geraden Träger in Abhängigkeit vom Verhältnis Radius R zur Trägerhöhe d [Blu79/Pir05]

In Abb. 6-3 ist die prozentuale Abweichung der Tangentialspannung gekrümmter Holzträger gegenüber geraden Holzträgern, abhängig vom Krümmungsverhältnis Radius R zur Trägerhöhe d , dargestellt. Ausgewertet ist die Tangentialspannung σ_φ am Rand infolge Biegung (Index m) bzw. Normalkraft (Index c), jeweils unterschieden für den inneren (Index i) bzw. den äußeren Querschnittsrand (Index a).

Die anzusetzende Trägerhöhe d ist für nachgiebige Verbundquerschnitte nicht eindeutig. Es wird daher eine Grenzwertbetrachtung auf der sicheren Seite durchgeführt. Geht man von einem Querschnitt mit steifen Fugen aus, dessen Tragverhalten dem des monolithischen Querschnitts nahe kommt, so ist d die Gesamthöhe des Verbundquerschnitts.

Bisher gebaute Brettrippenschalen wurden mit einem maximalen Krümmungsverhältnis R/d - bezogen auf die Höhe einer Einzelbrettlage - von 500 ausgeführt. Ein sechsteiliger Querschnitt - angenommen als monolithischer Querschnitt - besitzt somit ein Krümmungsverhältnis von 83, bezogen auf die Gesamthöhe des Querschnitts.

Hierbei ergeben sich Spannungsabweichungen von -2,5 % (außen, unter Normalkraft) und +2,5 % (innen, unter Normalkraft). Die Spannungsabweichung bei Biegung ist geringer und liegt bei $\pm 0,7$ %. Vor dem Hintergrund der großen Streubreite der Festigkeitskennwerte und sonstiger Materialparameter von Holz sind die Abweichungen der Spannungen von gekrümmten Trägern gegenüber geraden Trägern vernachlässigbar. Eine Modellierung der Rippen und der sonstigen gekrümmten Bauteile als polygonalen Stabzug mit geraden Stäben ist somit vertretbar.

Grundsätzlich treten bei gekrümmten Trägern infolge unterschiedlicher Tangentialspannungen über die Trägerhöhe Radialspannungen σ_r quer zur Faser auf.

Bei gekrümmten, monolithischen Trägern im Ingenieurholzbau kann infolge Normalkraftbelastung näherungsweise von konstant verteilter Tangentialspannung über die Trägerhöhe ausgegangen werden (s. o.). Normalkräfte erzeugen dort keine Radialspannungen. Veränderliche Tangentialspannungen über die Trägerhöhe werden lediglich durch ein Biegemoment M hervorgerufen. Ein Biegemoment, das Zug auf der Innenseite des gekrümmten Trägers verursacht, erzeugt positive Radialspannungen (Querzugspannungen) (Gl. 6-2).

Auch bei nachgiebigen, gekrümmten Verbundquerschnitten ist die Verteilung der Tangentialspannungen über die Querschnittshöhe Grundlage für die Berechnung der Radialspannungen. Teilmomente erzeugen innerhalb der Teilquerschnitte Radialspannungen. Der Verlauf ist bei Rechteckquerschnitten parabolisch mit einem Maximum in Höhe der Teilschwerachse. Es wird von einem gemittelten Radius R im Gesamtquerschnitt ausgegangen. Es ergibt sich eine maximale Radialspannung innerhalb eines Teilquerschnitts i mit der Höhe d_i und dem Widerstandsmoment W_i infolge des Teilmoments M_i [Zim95]:

$$\sigma_{r,M_i,max} = 0,25 \frac{d_i M_i}{R W_i} \tag{Gl. 6-2}$$

Bei nachgiebigen Verbundquerschnitten verursachen die Verbund-Teilnormalkräfte N_i^V unterschiedliche Tangentialspannungen im Gesamtquerschnitt. N_i^V ist der Teil der Teilnormalkraft N_i abzüglich dem Anteil an der Gesamtnormalkraft N_{ges} . N_i^V wird ermittelt durch:

$$N_i^V = N_i - \frac{N_{ges}}{EA_{ges}} EA_i \tag{Gl. 6-3}$$

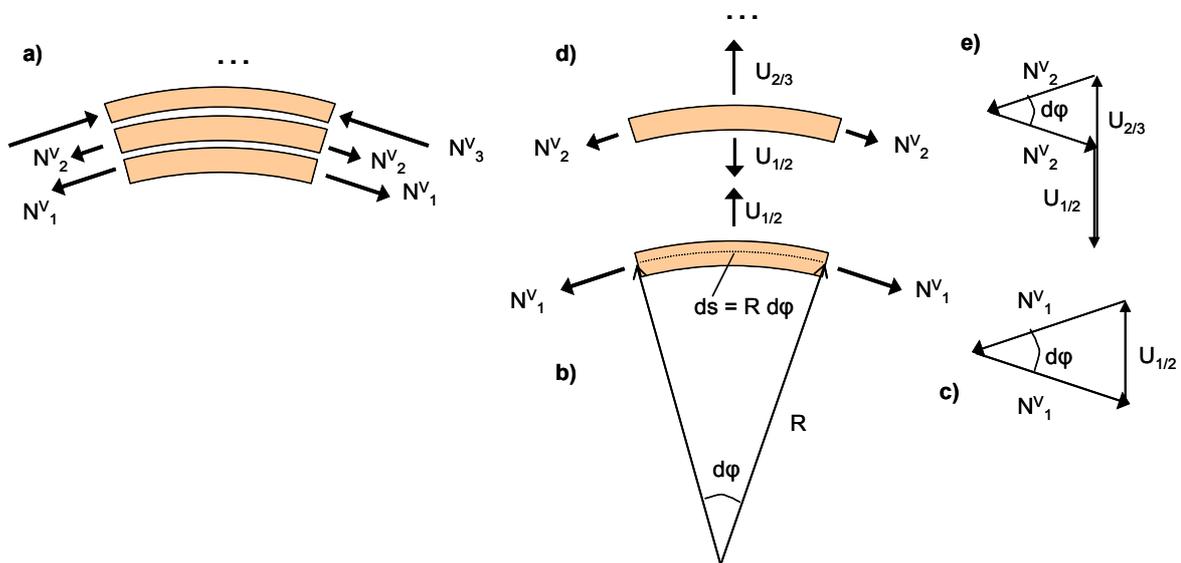


Abb. 6-4: Umlenkkräfte aus den Verbund-Teilnormalkräften N_i^V

Dabei gilt:

$$N_{ges} = \sum_{i=1}^n N_i \tag{Gl. 6-4}$$

$$\sum_{i=1}^n N_i^V = 0 \tag{Gl. 6-5}$$

Die beiden auf den unteren Randquerschnitt 1 (Abb. 6-4a) wirkenden Verbund-Teilnormalkräfte N_1^V erzeugen die Umlenkraft $U_{1/2}$ (Abb. 6-4b). Die Umlenkraft $U_{1/2}$ errechnet sich allgemein nach (Abb. 6-4c):

$$U_{1/2} = N_1^V \cdot d\varphi \quad (\text{Gl. 6-6})$$

$U_{1/2}$ zeigt gemäß (Abb. 6-4c) weg vom Querschnitt und erzeugt somit Querzug in der Fuge.

Am Teilquerschnitt 2 wirken neben den beiden Verbund-Teilnormalkräften N_2^V die Umlenkkräfte $U_{1/2}$ und $U_{2/3}$ (Abb. 6-4d). Es gilt nach (Abb. 6-4e):

$$U_{2/3} - U_{1/2} = N_2^V \cdot d\varphi \quad (\text{Gl. 6-7})$$

Umgeformt ergibt sich für $U_{2/3}$:

$$U_{2/3} = N_2^V \cdot d\varphi + U_{1/2} \quad (\text{Gl. 6-8})$$

Es gilt somit allgemein:

$$U_{i/i+1} = N_i^V \cdot d\varphi + U_{i-1/i} \quad (\text{Gl. 6-9})$$

Mit der Fläche der Fuge A_F (Abb. 6-4b)

$$A_F = b \cdot ds = b \cdot R \cdot d\varphi \quad (\text{Gl. 6-10})$$

ergibt sich die Radialspannung zu

$$\sigma_r = \frac{U}{A_F} \quad (\text{Gl. 6-11})$$

Mit (Gl. 6-9) und (Gl. 6-10) ergibt sich schließlich die Radialspannung in einer Fuge zwischen dem Teilquerschnitt i und $i+1$:

$$\sigma_{r_{i/i+1}} = \frac{N_i^V}{b \cdot R} + \sigma_{r_{i-1/i}} \quad (\text{Gl. 6-12a})$$

Zwischen den Radialspannungen in den Fugen (Gl. 6-12a) ist der Verlauf linear. Auf den Verlauf sind die der Radialspannungen innerhalb der Teilquerschnitte (Gl. 6-2) zu addieren.

Aus (Gl. 6-12a) ergibt sich der Querzug/druck p [kN/m] in einer Fuge zu

$$p_{i/i+1} = \frac{N_i^V}{R} + p_{i-1/i} \quad (\text{Gl. 6-12b})$$

6.3 EINFLUSS DER ZWANGSKRÜMMUNG BEIM EINBAU

6.3.1. INITIALSPANNUNGEN

Beim Einbau werden die Brettlagen der Rippen und die Bretter der Schalung über dem Lehrgerüst zwangsgekrümmt und anschließend dort befestigt. Der Einfluss des

konstruktionsbedingten Verformungslastfalls „Zwangskrümmung“ soll auf die Tragfähigkeit von Brettrippenschalen im folgenden Abschnitt untersucht werden. Nach DIN 1052 [DIN98] sind Radien R bis minimal zum 200-fachen der Brettdicke d möglich. Infolge der aufgetragenen Zwangskrümmung

$$\kappa = \frac{1}{R} \quad (\text{Gl. 6-13})$$

stellt sich beim Einbau eine Initialbiegespannung mit einem maximalen Randwert σ_0 in jeder Brettlage ein von [Pir05]

$$\sigma_0 = \frac{Ed}{2R} \quad (\text{Gl. 6-14})$$

Nach Abschluss der Einbauarbeiten und der Verbindung der Brettlagen werden die Rippen vom Lehrgerüst gelöst. Das Tragwerk kann sich verformen und kann „aufatmen“. In der folgenden Studie wird die Initialspannung σ_0 in einer Rippe nach dem Lösen vom Lehrgerüst untersucht. Mit dem Verbundelement ist die Modellierung des Vorgangs sehr einfach möglich. Es werden lediglich Krümmungslasten aufgebracht, analog einer ungleichmäßig verteilten Temperaturlast über die Trägerhöhe. Sofistik bietet Krümmungslasten explizit als mögliche Lastart an. Stehen diese nicht zur Verfügung, kann die Krümmung durch äquivalente Knotenmomente auf das System aufgebracht werden. Sie errechnen sich mit (Gl. 6-13) aus:

$$M_a^0 = -M_e^0 = \kappa \sum_{i=1}^n EI_{yi} \quad (\text{Gl. 6-15})$$

Im Knotenbereich (KB) ist der Rippenquerschnitt geschwächt. Es steht nur die Hälfte der Brettlagen im Vergleich zum ungeschwächten Feldbereich (FB) zur Verfügung. Die Summe der Eigenbiegesteifigkeiten $\sum EI_{yi}$ und die äquivalenten Knotenmomente (Gl. 6-15), sind damit im Knotenbereich nur halb so groß wie im Feldbereich.

Bei statisch bestimmten Systemen erzeugt ein Verformungslastfall grundsätzlich keine Schnittgrößen. Das System entzieht sich durch Verformung der Belastung. Je größer der Grad der statischen Unbestimmtheit eines Systems ist, desto größer sind die sich einstellenden Schnittgrößen. Diese nehmen im Extremfall Werte der äquivalenten Knotenlasten an. Rippen von Brettrippenschalen sind durch die Kopplung mit den Querrippen und durch ihre Endlagerung hochgradig statisch unbestimmt. Sie besitzen nur eine begrenzte Möglichkeit sich zu verformen. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass durch das Verformen nach dem Lösen vom Lehrgerüst die aufgetragenen Zwangskrümmungen kaum abgebaut werden. Es findet lediglich eine gleichmäßige Verteilung und Umlagerung der Last über die Rippen statt.

Allgemein kann bei Brettrippenschalen das Gesamtmoment infolge der Zwangskrümmung κ (Gl. 6-13) berechnet werden durch

$$M_{ges} = \kappa \left(\frac{l_{KB}}{l_{ges}} \sum_{i=1}^n EI_{yi}^{KB} + \frac{l_{FB}}{l_{ges}} \sum_{i=1}^n EI_{yi}^{FB} \right) \quad \text{mit} \quad l_{ges} = l_{KB} + l_{FB} \quad (\text{Gl. 6-16})$$

Der Randwert der Initialspannung ergibt sich somit zu

$$\sigma_0 = \frac{M_{ges} \frac{EI_i}{\sum_i EI_{yi}}}{W_i} \quad (\text{Gl. 6-17})$$

Für die Abtragung des Gesamtbiegemoments M_{ges} steht im geschwächten Knotenbereich nur die Hälfte der Brettlagen zur Verfügung. Dort erzeugt M_{ges} nach dem Lösen eine höhere Initialspannung (Gl. 6-17), als sich beim Einbau einstellt (Gl. 6-14).

Dies wird an einem Beispiel verdeutlicht. Es wird eine vierteilige Rippe einer Brettrippenschale mit Brettlagen der Abmessung $27 \times 120 \text{ mm}^2$, einer Fugensteifigkeit $c = 6 \text{ MN/m}^2$, einer Spannweite von 37 m und einem Radius von $R = 27,5 \text{ m}$ angenommen. Der Knotenbereich wird abgebildet durch $0,2 \text{ m}$ lange Lücken im Abstand von 1 m in zwei der vier Brettlagen. Darüber hinaus wird die Rippe in diesem Bereich durch die Querrippen in radialer Richtung unterstützt, was durch einwertige Lager abgebildet wird. Die Rippe ist an ihren Enden unverschieblich gelagert. Beim Einbau ergibt sich eine Initialspannung am Rand jeder Brettlage von 5 MN/m^2 (Gl. 6-4).

Nach (Gl. 6-15) ergeben sich im Knotenbereich äquivalente Knotenmomente von

$$M_a^0 = -M_e^0 = 0,143 \text{ kNm}$$

und im Feldbereich von

$$M_a^0 = -M_e^0 = 0,286 \text{ kNm}$$

Die aufgebrachten äquivalenten Knotenmomente erzeugen ein gleichmäßig über die Rippenlänge verteiltes Gesamtmoment M_{ges} von $0,245 \text{ kNm}$ (Abb. 6-5). Durch die Verformung nach dem Lösen vom Lehrgerüst findet eine Umlagerung und gleichmäßige Verteilung der Lastmomente über die Rippenlänge statt. Das Verhältnis zwischen Knotenbereichen und Feldbereichen beträgt $1:4$. Nach diesem Verhältnis gewichtet ergibt sich ein durchschnittliches Moment von $0,257 \text{ kNm}$, was annähernd dem sich einstellenden Gesamtmoment entspricht. Ein geringer Teil des Moments wird durch Verformung abgebaut.

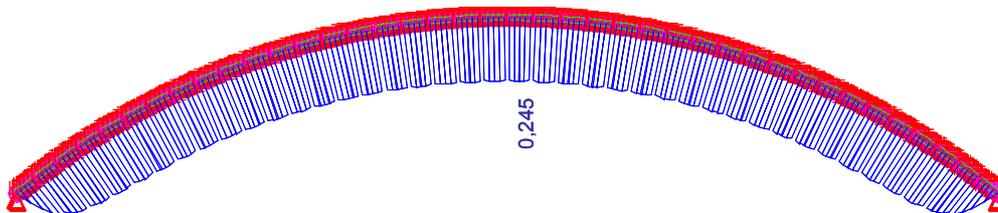


Abb. 6-5: Gesamtmoment M_{ges} nach Lösen vom Lehrgerüst in kNm

Für das vorliegende Beispiel ergibt sich im Knotenbereich nach dem Lösen eine Initialspannung nach (Gl. 6-17) von

$$\sigma_0 = \frac{M_{ges} \frac{EI_i}{\sum_i EI_{yi}}}{W_i} = \frac{0,245 \text{ kNm} \frac{1}{2}}{\frac{0,027^2 \cdot 0,12}{6}} = 8,4 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

Im Feldbereich steht der komplette Querschnitt zur Verfügung. Die Initialspannung nach dem Lösen beträgt dort

$$\sigma_0 = 4,2 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

Nach dem Lösen erhöht sich die Initialspannung im Knotenbereich von 5 MN/m² beim Einbau auf 8,4 MN/m², was eine Zunahme von 66 % bedeutet. Gleichzeitig sinkt im Feldbereich die Initialspannung von 5 MN/m² auf 4,2 MN/m².

6.3.2. SPANNUNGSRELAXATION

Infolge rheologischer Vorgänge im Holz findet über die Zeit ein Spannungsabbau der Initialspannung σ_0 statt. Diese so genannte Spannungsrelaxation beschreibt im Gegensatz zum Kriechen - bei dem eine Dehnung/Stauchung bei konstanter Spannung eintritt - den Spannungsabbau bei konstanter Dehnung/Stauchung. Über die Spannungsrelaxation bei Holz und deren Einflussparameter wie E-Modul, Holzfeuchte, Temperatur, Spannungsart, Intensität und Kraft-Faser-Orientierung ist relativ wenig bekannt [Pir05].

Pirazzi [Pir05] führte daher Versuche zur Bestimmung der Relaxation infolge Zwangskrümmung über einen Zeitraum von 286 Tagen durch. Er verwendete Holz mit einer Holzfeuchte von 12 % bei einer Raumtemperatur von 20°C und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 65 %. Dies entspricht den klimatischen Bedingungen der Nutzungsklasse 1 nach DIN 1052 (allseitig geschlossene und beheizte Räume) [DIN04].

Er stellt einen Spannungsabbau infolge Relaxation abhängig vom E-Modul fest. Er definiert eine Endmaßzahl der Spannungsrelaxation ϕ_∞ , die sich nach ca. einem halben Jahr einstellt. Diese errechnet sich für einen E-Modul in [MN/m²] aus

$$\phi_\infty = e^{-0,4 \sqrt{\frac{E}{10.000 \frac{MN}{m^2}}}} \quad (\text{Gl. 6-18})$$

Der größte Teil des Spannungsabbaus findet in den ersten Tagen nach dem Aufbringen der Initialspannung statt. Bereits nach 28 Tagen werden 90 % der späteren Endmaßzahl ϕ_∞ erreicht.

Ausgewertet für E-Moduli im baupraktischen Bereich von 10.000 MN/m² bis 14.000 MN/m² ergeben sich Endmaßzahlen zwischen 0,67 und 0,82. Dies bedeutet, dass langfristig zwischen 67 % bis 82 % der Initialspannung σ_0 erhalten bleiben.

Für die verbleibende Randspannung für den Zeitpunkt $t=\infty$ ergibt sich somit folgende Beziehung:

$$\sigma_\infty = \phi_\infty \cdot \sigma_0 \quad (\text{Gl. 6-19})$$

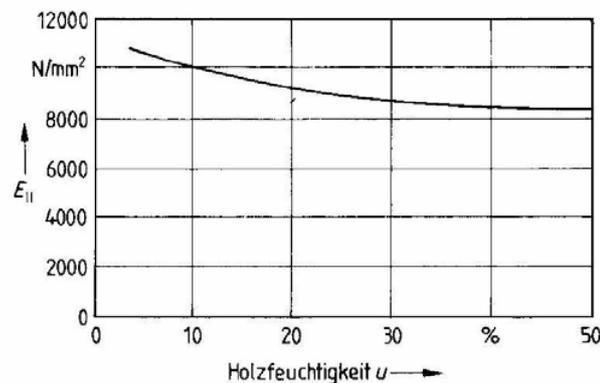


Abb. 6-6: E-Modul parallel zur Faser für Nadelholz, abhängig von der Holzfeuchte u [Pir05]

Nach Möhler [Möh78] besteht eine Abhängigkeit des E-Moduls von Nadelholz von der Holzfeuchte (Abb. 6-6). Je höher die Holzfeuchte ist, desto geringer ist der E-Modul. Baut man Holz mit höherer Holzfeuchte als der späteren Ausgleichsfeuchte (in geschlossenen Räumen ca. 12 %) ein, so reduziert sich die Initialspannung [Pir05].

Der Einbau von Holz mit einer Holzfeuchte von 20 % ist unproblematisch, wenn sichergestellt werden kann, dass dieses weiter austrocknen kann.

Nach (Abb. 6-6) kann zwischen 20 %-iger und 12 %-iger Holzfeuchte näherungsweise von einem linearen Zusammenhang zwischen der Holzfeuchte und dem E-Modul ausgegangen werden. So ist der E-Modul bei 20 % Holzfeuchte im Vergleich zu 12 % um ca. 8 % geringer, was nach (Gl. 6-3) eine ebenso starke Verringerung der Initialspannung σ_0 bedeutet.

Nach den Versuchen von Pirazzi ist die Hälfte der Relaxation bereits nach wenigen Tagen abgeschlossen. Der überwiegende Teil der Relaxation findet somit bei relativ hoher Holzfeuchte mit geringerem E-Modul statt. Nimmt man an, dass (Gl. 6-18) auch für 20 % Holzfeuchte gilt, so verringert sich das Endschwindmaß Φ_∞ um ca. 3 %.

Die langfristig verbleibende Eigenspannung σ_∞ wird somit um ca. 11 % verringert (Gl. 6-19).

Allerdings wird dabei unterstellt, dass im Laufe der Austrocknung mit anwachsendem E-Modul keine zusätzlichen Initialspannungen entstehen. Ein Indiz für diese These sind die Erfahrungen aus dem Möbelbau. Zwangsgekrümmtes, feucht eingebautes Holz behält durch plastische Vorgänge einen Großteil seiner Form. Hierfür gibt es allerdings keinen wissenschaftlichen Nachweis. Auf diesem Gebiet besteht noch Forschungsbedarf, um den positiven Einfluss von feucht eingebautem, zwangsgekrümmten Holz für den Ingenieurholzbau verlässlich nutzen zu können.

Versuche über die Spannungsrelaxation bei Zwangstorsion, wie sie z.B. beim Einbau der Brettlagen bei Tonnenschalen auftritt, sind dem Autor nicht bekannt. Pirazzi [Pir05] schlägt eine Abschätzung der Spannungen auf Grundlage des Kriechens vor.

6.4 MODELLIERUNG DER RIPPEN

Jede Rippe besteht aus mehreren Teilquerschnitten (Brettlagen). Die Hälfte der Brettlagen ist im Rippenknoten durchlaufend, die andere Hälfte ist unterbrochen. Die unterbrochenen Brettlagen setzen sich somit aus mehreren kurzen Brettern - den Füllbrettern - zusammen. Um den Modellierungsaufwand einer Brettrippenschale so gering wie möglich zu halten, wird angestrebt, nur die durchlaufenden Brettlagen direkt durch Verbundelemente zu modellieren. Dieses wird erreicht, indem man nur Längsverschiebungsfreiheitsgrade für die durchlaufenden Brettlagen einführt. Bildet man das Tragverhalten der Füllbretter direkt ab, so ist die Modellierung des Rippenknotens äußerst komplex. Neben dem Berechnungsknoten im Schnittpunkt der Rippen sind weitere Berechnungsknoten an den Enden der Füllbretter einzuführen. Dies ist im Sinne eines angestrebten, einfachen und übersichtlichen Modells nicht sinnvoll. Die Tragwirkung der Füllbretter wird daher auf andere, einfachere Weise im Modell berücksichtigt. Hierzu sind Kenntnisse über deren lokale Tragwirkung notwendig.

Im Folgenden wird ein Gedankenmodell aufgestellt, das durch eine nachfolgende Studie bestätigt wird:

Die Füllbretter besitzen hinsichtlich ihrer Normkraftabtragung nur eine eingeschränkte Tragwirkung. An ihren Enden ist die Normalkraft gleich Null. Ursächlich hierfür ist ihre dortige freie Lagerung in Längsrichtung. Durch ihre kurzen Längen können nur geringe Normalkräfte eingeleitet und wieder ausgeleitet werden. Die Normalkräfte in den Füllstäben sind somit sehr gering und haben dadurch nur einen geringen Anteil an der potentiellen inneren Gesamtenergie und damit an der Gesamtverformung des Systems. Eine Vernachlässigung der Dehnsteifigkeiten der Füllbretter verändert damit nicht die Lastabtragung und das Gesamtverformungsverhalten des Systems. Die Dehnsteifigkeiten der Füllbretter werden nicht angesetzt.

Anders verhält sich der Einfluss der Füllbretter auf die Abtragung der Momente. Durch die starre Querkopplung an die durchlaufenden Brettlagen versteifen sie den Querschnitt hinsichtlich Biegung und Torsion.

Um den Anteil der Füllbretter an der Biege- und Torsionssteifigkeit der Gesamtrippe zu berücksichtigen, werden ihre Biegesteifigkeiten I_y und I_z und ihre Torsionssteifigkeit I_T auf die durchlaufenden Bretter addiert.

Füllbretter sind nur im Feldbereich (FB) vorhanden. Die Gesamtlänge der Füllbretter ist daher geringer als die Gesamtlänge der Rippe. Ihr Anteil an der Biege- und Torsionssteifigkeit an der Steifigkeit der Rippe wird daher gleichmäßig verteilt auf die durchlaufenden Bretter aufaddiert.

Näherungsweise wird von konstanten Momenten über die Rippenlänge ausgegangen. So ist der Steifigkeitsübertrag nur vom Längenverhältnis Gesamtlänge des Feldbereichs l_{FB} zu Gesamtlänge Rippe l_{ges} abhängig. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} I_y^{Zuschlag} &= \frac{l_{FB}}{l_{ges}} \sum_i I_{yi}^{FB} \\ I_z^{Zuschlag} &= \frac{l_{FB}}{l_{ges}} \sum_i I_{zi}^{FB} \\ I_T^{Zuschlag} &= \frac{l_{FB}}{l_{ges}} \sum_i I_{Ti}^{FB} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 6-20})$$

Stellt sich heraus, dass die Momente zwischen Feld- und Knotenbereich stark variieren, so ist eine Unterteilung in mehrere Stabelemente mit unterschiedlichen Zuschlägen sinnvoll. Dies würde aber dem Grundgedanken einer einfachen Modellierung zuwiderlaufen. Der Aufwand einer direkten Modellierung der Freiheitsgrade der Füllstäbe wäre nur unwesentlich größer.

Das Gedankenmodell wird in folgender Studie bestätigt werden. Angenommen wird ein durch eine Gleichlast halbseitig belasteter Einfeldträger mit einer Stützweite von 5,8 m (Abb. 6-7). Der Querschnitt ist vierteilig mit Teilquerschnitten von je $30 \times 160 \text{ mm}^2$ der Güteklasse C24. Die Fugensteifigkeiten c betragen je 2816 kN/m^2 . Zwei Teilquerschnitte sind im Abstand von 1,0 m durch eine 0,2 m lange Lücke unterbrochen, die bei Brettrippenschalen durch die querverlaufenden Rippen verursacht wird. Jeder Teilquerschnitt ist an den Auflagern unverschieblich und gelenkig gelagert.

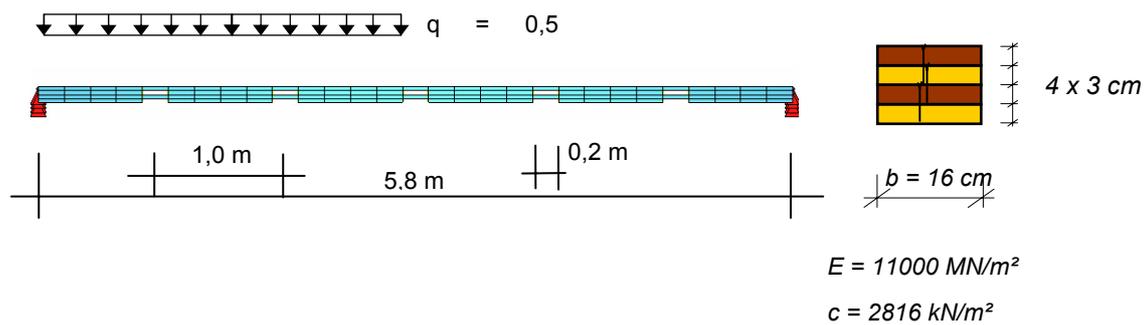


Abb. 6-7: System, Belastung, Studie Füllbretter

Nachfolgend wird das System durch zwei unterschiedliche Modelle abgebildet: Zum einen als vierteiliger Querschnitt mit einer direkten Modellierung der Füllbretter (Modell 1) und zum anderen vereinfacht als zweiteiliger Querschnitt ohne Füllbretter (Modell 2). Im Modell 2 verläuft die Schubübertragung zwischen den durchlaufenden Brettlagen über zwei nachgiebige Fugen. Diese werden gedanklich als eine einzige Fuge betrachtet. Der Schwerpunktabstand a beträgt dann

$$a = 2 \cdot h = 2 \cdot 0,03 = 0,06 \text{ m} \quad (\text{Gl. 6-21})$$

Die beiden Fugen sind in Reihe geschaltet. Ihre Ersatzfugensteifigkeit c' errechnet sich somit zu

$$c' = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{c}} = \frac{c}{2} = \frac{2816}{2} = 1408 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad (\text{Gl. 6-22})$$

Darüber hinaus ist im Modell 2 die Biegesteifigkeit I_y der Füllbretter auf die durchlaufenden Bretter zu addieren. Die Länge der Füllbretter im Verhältnis zur Gesamtlänge des Trägers beträgt $0,82$. Der Zuschlag I_y^{Zuschlag} beträgt nach (Gl. 6-20) $0,82 \sum I_y^{\text{Füllbretter}}$.

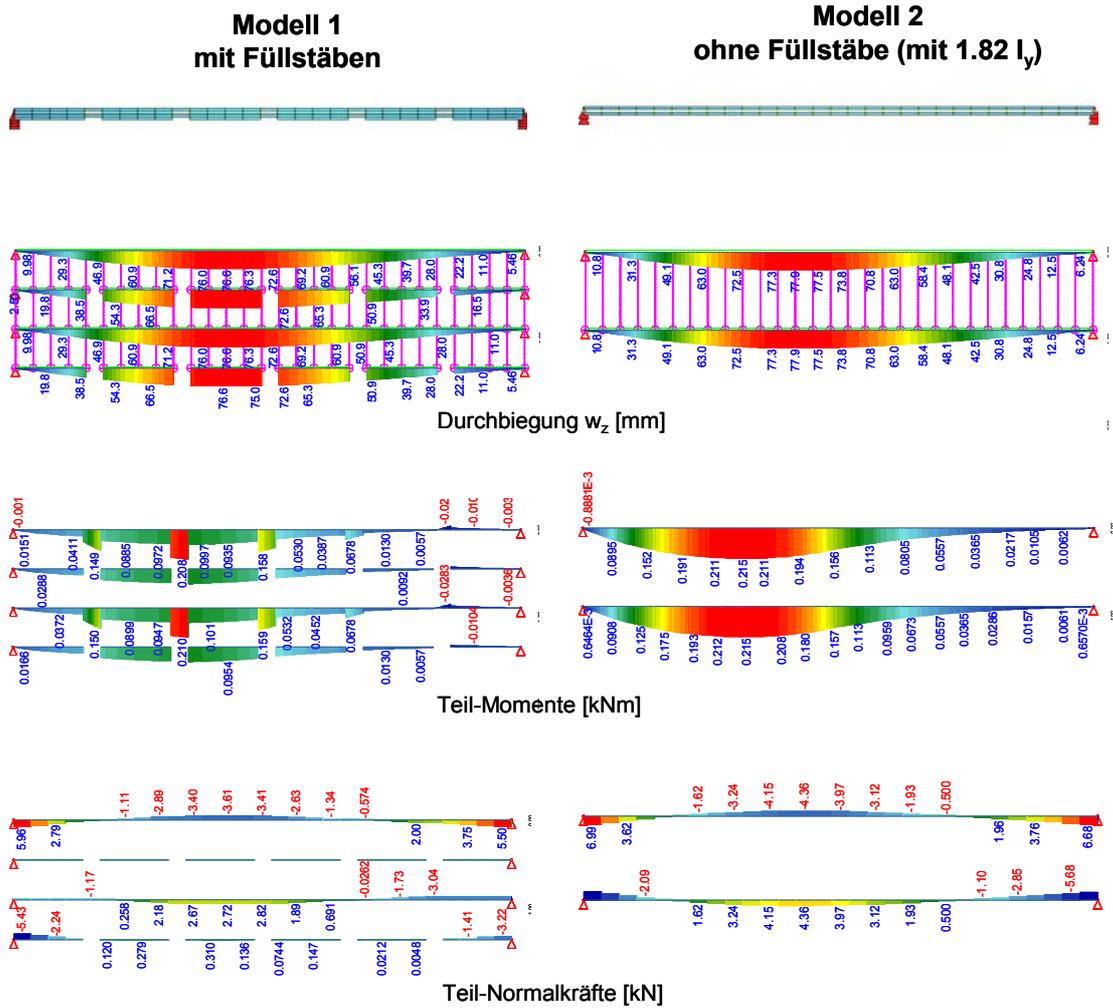


Abb. 6-8: Studie Füllbretter, Vergleich der Ergebnisse zwischen Modell 1 und 2

Vergleicht man die Berechnungsergebnisse miteinander (Abb. 6-8), so stellt man fest, dass die Verläufe der Durchbiegung w_z nahezu identisch sind. Dies gilt auch für die maßgebenden Teilbiegemomente an den unterbrochenen Stellen. Lediglich die Teilnormalkräfte weichen voneinander ab. Das Modell 2 ermittelt höhere, auf der sichereren Seite liegende Werte. Die innen liegenden Füllbretter nehmen nahezu keine Normalkräfte auf. Der durch die oberhalb liegende Fuge eingeleitete Schubfluss wird direkt durch die unterhalb liegende Fuge wieder ausgeleitet. Es kann sich keine Normalkraft aufbauen. Im Gegensatz dazu treten an den außen liegenden Füllbrettern Normalkräfte mit einem Maximum in der Mitte der Füllbretter auf. Der Schubfluss wird in der ersten Längshälfte eingeleitet, zu einer Normalkraft aufsummiert und in der zweiten Längshälfte wieder ausgeleitet. Die Normalkraft eines außen liegenden Füllbretts besitzt einen großen Hebelarm im Gesamtquerschnitt, so dass das Moment aus Verbundwirkung durch geringere Normalkräfte in den restlichen Teilquerschnitten abgetragen werden kann. Dieser Effekt wird im Modell 2 auf der sicheren Seite vernachlässigt.

Ein Modell ohne Füllstäbe liefert befriedigende Ergebnisse auf der sicheren Seite. Der Eingriff in die Querschnittsgeometrie kann durch einen Übertrag der Biege- und Torsionssteifigkeit der

Füllbretter auf die durchlaufenden Bretter korrigiert werden. Das Konzept wird daher auf die Berechnung der Brettrippenschale übertragen.

6.5 MODELLIERUNG DER SCHALUNG

Aufgrund ihrer aussteifenden Wirkung hat die Schalung einen erheblichen Einfluss auf das Gesamttragverhalten. Sie steifen die Rippenvierecke diagonal aus. Die Schalungsbretter kreuzen abwechselnd eine Längs- und eine Querrippe (Abb. 6-9) und werden durch mindestens zwei Holzschrauben bzw. Rillennägel befestigt.

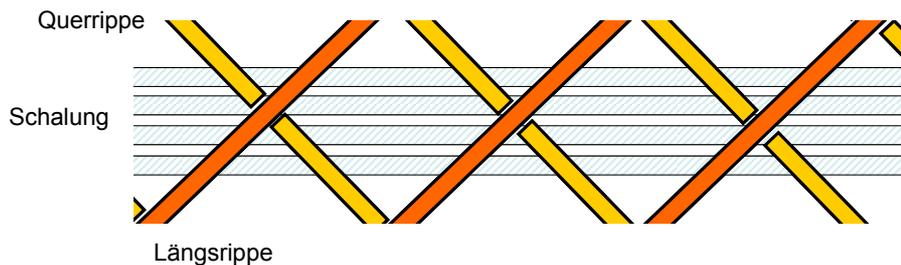


Abb. 6-9: Schalungstreifen, wird durch ein monolithisches Finites Stabelement abgebildet

Bretter im Einflussbereich eines Rippenknotens werden zu einem Schalungstreifen zusammengefasst und durch ein monolithisches Finites Stabelement, dem Schalungsstab, abgebildet. Dieser wird im Bereich der Rippenknoten an die dortigen Berechnungsknoten angeschlossen. Damit wird die Einführung von weiteren Berechnungszwischenknoten im Feldbereich der Rippen vermieden. Die Bretter der Schalung sind durchlaufend, so dass auch der Schalungsstab durchlaufend modelliert wird. Dies erfordert die Einführung von eigenen Berechnungsknoten für die Schalung. Die Kopplung der Schalungsknoten mit den Berechnungsknoten der Rippen erfolgt durch Einzelwegfedern, die die Nachgiebigkeit der Verbindung Schalung/Rippe abbilden. Eine Holzschraube, die auf Abscheren (tangential zur Schalenebene) beansprucht wird, ist nachgiebig. Die zugehörige Wegfedersteifigkeit wird in gewohnter Weise nach DIN 1052 [DIN04] berechnet. Die Verbindung wird in ihre Richtung (radial zur Schalenebene) als starr angenommen.

Ein sicherlich vorhandener, gegenseitiger Einspanneffekt von Schalung und Rippen ist äußerst schwierig abzuschätzen. Eine Quantifizierung der Koppeldrehfedersteifigkeiten der drei Raumrichtungen ist schwierig. Der Einspanneffekt wird daher auf der sicheren Seite vernachlässigt und ist als vorhandene, aber nicht quantifizierbare, stille Tragreserve zu sehen. Angaben über den Einspanneffekt können nur durch zukünftige Versuche gewonnen werden.

Ist die Schalung exzentrisch zum Schwerpunkt der Rippen, kann die Exzentrizität nicht vernachlässigt werden. Normalkräfte, die von der Schalung in die Rippen und umgekehrt übertragen werden, erzeugen Biegemomente und Torsionsmomente in den Rippen von nicht zu vernachlässigender Größe. Der Versatz kann z. B. durch einen biegesteifen Stab abgebildet werden, der Schalungsknoten und Rippenknoten miteinander verbindet. Hierbei ist es ratsam die Elementfeinheit der Rippen und der Schalung zu erhöhen, um mehr Koppelpunkte zwischen Schalung und Rippen und damit einen gleichmäßigeren Kraftaustausch im Modell zu

gewährleisten. So werden unrealistische Spitzen der Momente im Bereich der Koppelstellen vermieden.

6.6 MODELLIERUNG DER RIPPENKNOTEN

In den Rippenknoten werden die Brettlagen der Längs- und Querrippe durch einen senkrecht zu den Rippen verlaufenden Passbolzen, durch mehrere Holzschrauben bzw. durch Rillennägel miteinander verbunden. Die Verbindung wird in ihrer Richtung (radial zur Schalenebene) - analog der Querkopplung der Brettlagen innerhalb einer Rippe - als starr angenommen. Senkrecht dazu (tangential zur Schalenebene) werden die Verbindungsmittel auf Abscheren beansprucht und sind damit nachgiebig. Die Federsteifigkeit [kN/m] der Verbindung pro Fuge kann in gewohnter Weise nach DIN 1052 [DIN04] bestimmt werden. Der Grad der gegenseitigen Einspannwirkung von Längs- und Querrippe im Bereich des Knotens ist schwierig abzuschätzen. Da die Berührfläche und folglich der innere Hebelarm der Verbindung sehr gering ist, wird auf der sicheren Seite davon ausgegangen, dass die Verbindung nur geringe Momente übertragen kann. Der Einspanneffekt ist jedoch geringer als die großflächigere Kopplung Schalung/Rippen und die damit verbundene „stille“ Tragreserve.

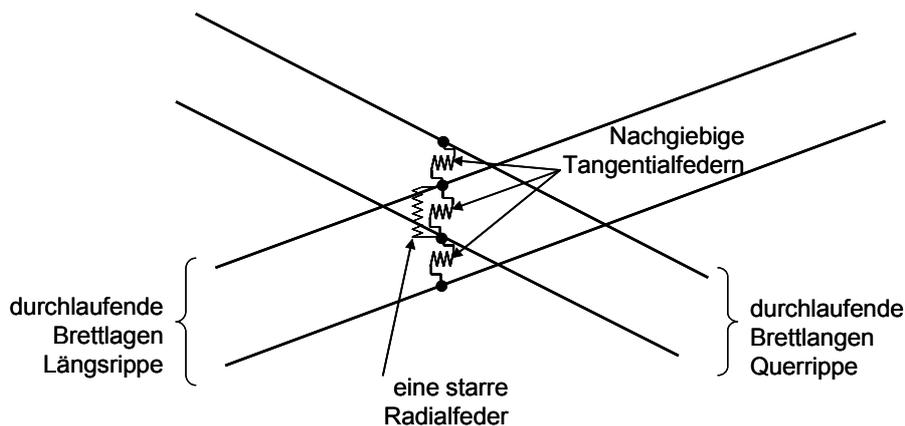


Abb. 6-10 Kopplung der durchlaufenden Brettlagen der Längsrippe und Querrippe durch Wegfedern

Umgesetzt in ein FE-Modell bedeutet dies, dass die Berechnungsknoten der durchlaufenden Brettlagen durch Einzelwegfedern miteinander gekoppelt werden (Abb. 6-10). In den meisten Statikprogrammen stehen dem Anwender hierfür Federelemente zur Verfügung. Sofistik bietet hierfür das so genannte FEDE-Element, bei dem unterschiedliche Federsteifigkeiten in ihrer Wirkungsrichtung und quer dazu angegeben werden können. Die Wirkungsrichtungen werden radial zur Schalenoberfläche gewählt. Den beiden Querrichtungen wird die Federsteifigkeit der Verbindung zugeordnet. Einer Feder wird die Aufgabe der radialen starren Kopplung von Längs- und Querrippen zugewiesen. Dies geschieht, indem die Federsteifigkeit in ihrer Wirkungsrichtung sehr groß (nahezu starr) gewählt wird. Die Brettlagen innerhalb einer Rippe sind bereits durch das Verbundelement starr quergekoppelt. Eine mehrfache Kopplung zwischen Längs- und Querrippen würde einen kreisförmigen Kurzschluss der Kräfte erzeugen, was keine negativen Auswirkungen auf das Tragverhalten hat, aber zu irreführenden Ergebnissen der radialen Koppelkräfte zwischen den Längs- und Querrippen führt.

6.7 BEISPIELTRAGWERK

Als Beispieltragwerk wird eine Kuppel in Brettrippensbauweise ausgewählt. Sie ist in der Abb. 6-11 bzw. Abb. 6-12 dargestellt. Grundlage für deren Berechnung ist die DIN 1052 [DIN04]. Die geometrische Form beschreibt einen Ausschnitt einer Kugeloberfläche mit einem Radius von 27,5 m, mit einer Grundfläche von 25 x 25 m² und einer Firsthöhe von 6,80 m. Die zueinander kreuzweise verlaufenden Längs- und Querrippen bilden die Haupttragstruktur. Im Bereich der beiden Diagonalen sind die Rippen konzentriert angeordnet und lagern in den Eckpunkten in einem fächerförmigen Stahlknoten unverschieblich auf. Die Spannweite der Diagonalrippen beträgt 37 m. Die Rippen verlaufen auf Größtkreisen der Kugeloberfläche und werden so nur um ihre schwache Achse zwangsgekrümmt. Die nicht in den Ecken mündenden Rippen werden an einen, ebenfalls auf einem Größtkreis liegenden, gekippten Randbogen angeschlossen. Er ist ebenso wie die Rippen nur einfach gekrümmt. Der Randbogen lagert an seinen Enden ebenfalls unverschieblich im fächerförmigen Stahlknoten auf und wird durch die in die Fassade integrierten Pendelstützen zwischenunterstützt. Sie werden im Modell als einwertige, vertikale Auflager modelliert.

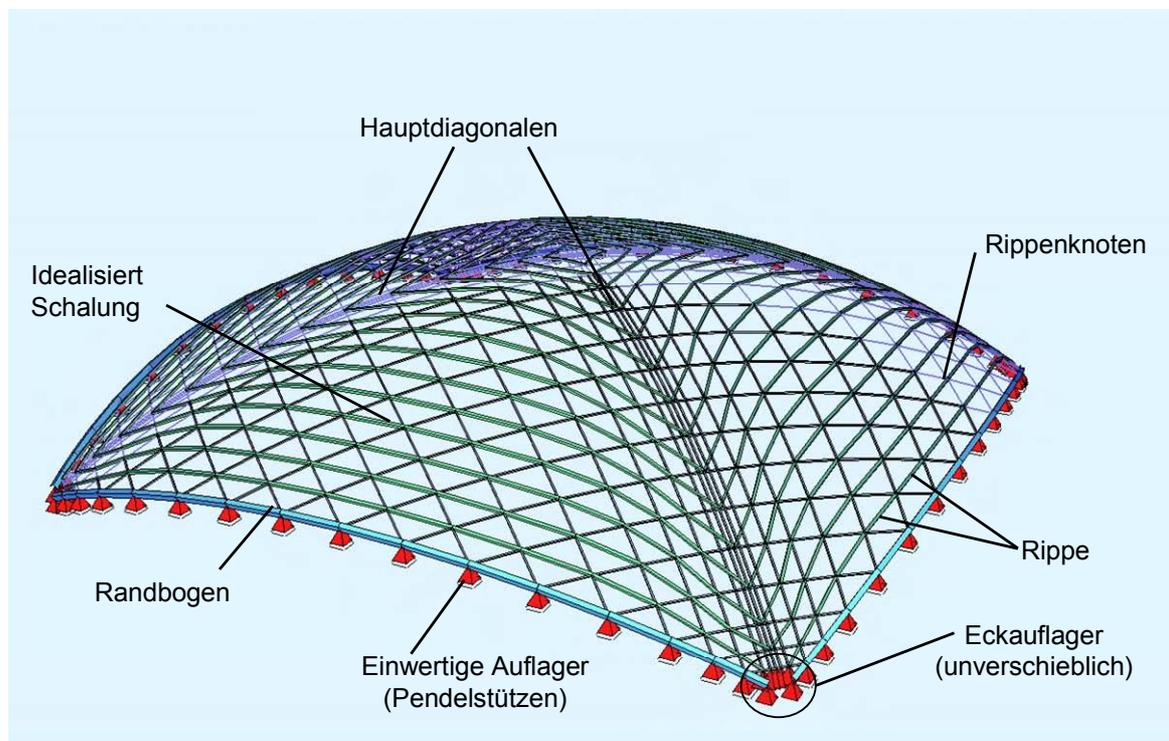


Abb. 6-11: 3D Ansicht, Kuppelschale in Brettrippensbauweise, statisches System, Bauteile

Der Rippenquerschnitt (Abb. 6-13) setzt sich aus vier nachgiebig verbundenen, in der Mitte durch die Schalung gespreizten Brettlagen aus Nadelholz der Güteklasse C24 mit den Abmessungen von jeweils 27 x 160 mm² zusammen. Für die Güteklasse C24 ist $E_{0,mean}$ mit 11.000 MN/m² und einer Rohdichte ρ_k von 350 kg/m³ anzusetzen. Die Brettlagen werden durch Holzschrauben HS Ø 4,5 mm zweireihig im Abstand von 200 mm nachgiebig miteinander verbunden. Die Holzschrauben, die über die gespreizte Fuge verlaufen, sind länger auszuführen.

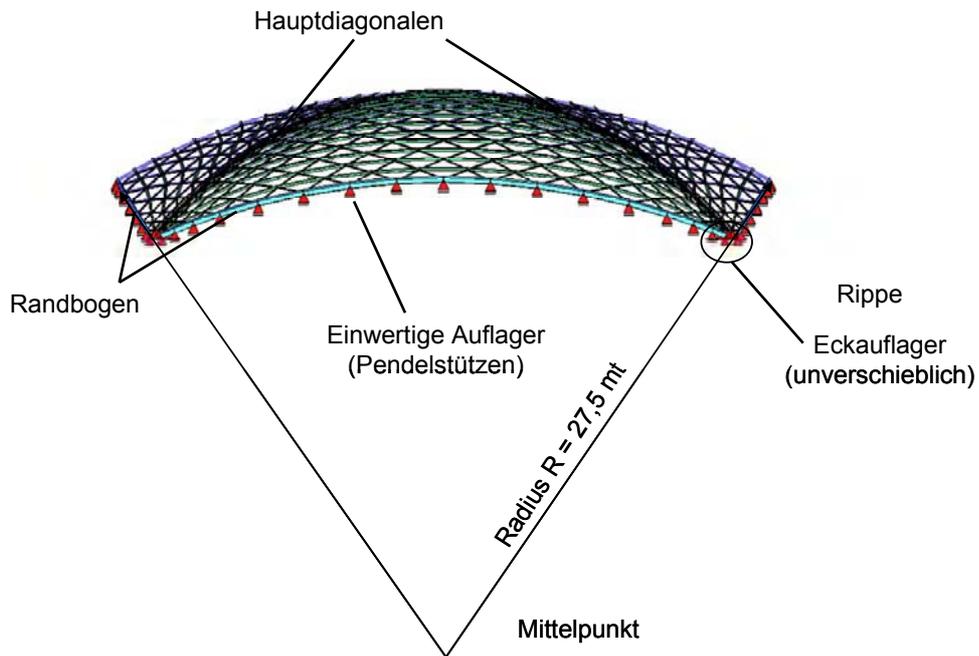


Abb. 6-12: Seitenansicht, Kuppelschale in Brettrippensbauweise, statisches System, Bauteile

Die beiden Rippenrichtungen kreuzen sich in den Rippenknoten, versetzt um eine Bretthöhe, wobei von den vier Brettlagen pro Rippe nur zwei durchlaufend sind (Abb. 6-13). Die unterbrochenen Brettlagen bestehen nur aus kurzen, in die Zwischenräume eingepasste Füllbretter. In den Rippenknoten werden die beiden Rippenrichtungen durch einen Passbolzen M12 miteinander gekoppelt. Es werden nur für die durchlaufenden Brettlagen Längsfreiheitsgrade modelliert. Die Tragwirkung der unterbrochenen Brettlagen (Füllstäbe) wird durch einen Übertrag der Biege- und Torsionssteifigkeiten auf die durchlaufenden Brettlagen nach (Gl. 6-20) berücksichtigt. Die durchlaufenden Brettlagen der Längsrippe werden mit Lage 1 und 4, die der Querrippe mit Lage 2 und 5 bezeichnet.

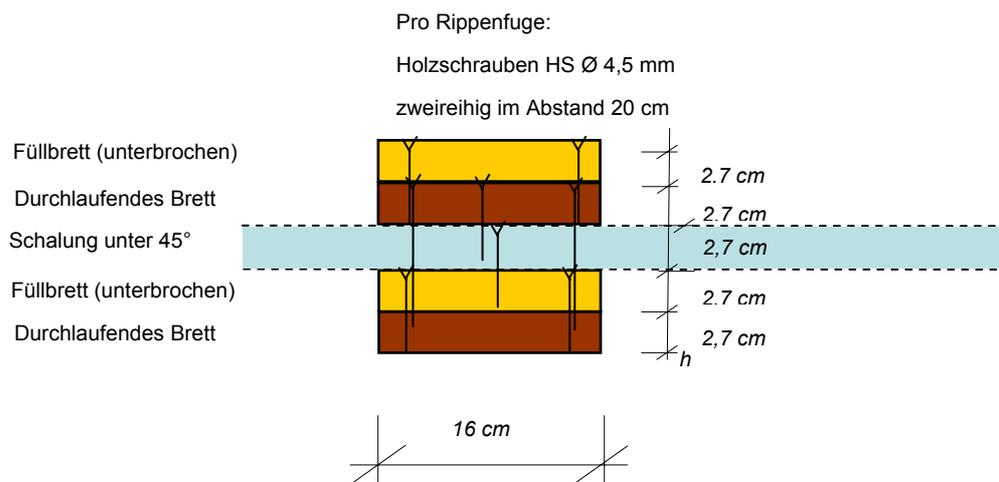


Abb. 6-13: Rippenquerschnitt

Die Schalungsbretter verlaufen jeweils parallel zu den Seiten und kreuzen die von den Längs- und Querrippen gebildeten Vierecke diagonal aus. Die Schalungsbretter enden im Bereich der Hauptdiagonalen. Es ergeben sich somit vier dreiecksförmige Schalungsfelder. Jedes Schalungsbrett wird mit jeweils zwei Holzschrauben HS \varnothing 4,5 nach unten mit der unteren Rippenhälfte und mit jeweils zwei Holzschrauben HS \varnothing 4,5 von oben mit der oberen Rippenhälfte verbunden.

Die aussteifende Schalung besteht aus Brettern mit den Abmessungen 27 x 160 mm² der Güteklasse C 24, die auf Lücke verlegt werden. Die Schalung (Lage 3) kreuzt den Rippenquerschnitt unter 45°. Sie verläuft mittig durch den Rippenquerschnitt, sodass Schalung und Rippen nicht exzentrisch zueinander verlaufen. Versatzmomente in den Rippen und der Schalung werden vermieden. Der zentrische Anschluss hat darüber hinaus den Vorteil, dass die statische Höhe des Rippenquerschnitts erhöht wird. Nachteilig dabei ist, dass der Schubfluss durch eine zusätzliche Fuge geleitet werden muss, was die Verbundsteifigkeit mindert.

Im Rippenknoten werden die fünf Lagen jeweils durch eine Wegfeder pro Fuge miteinander gekoppelt. Die unteren Brettlagen mit Lage 1 und 2 werden durch den Passbolzen M12 gekoppelt. Gleiches gilt für die oberen Brettlagen (Lage 4 und Lage 5). Die tangentiale Federsteifigkeit der Verbindung errechnet sich nach (Gl. 6-24). Die Lagen 2 und 4 liegen nicht direkt aufeinander. Infolge ihres Abstands ist der Widerstand des Passbolzens auf Abscheren gering und wird dort vernachlässigt. Die Kopplung der Längs- und Querrippen erfolgt durch eine starre Radialfeder zwischen der Lage 1 und 5 (Gruppe 10).

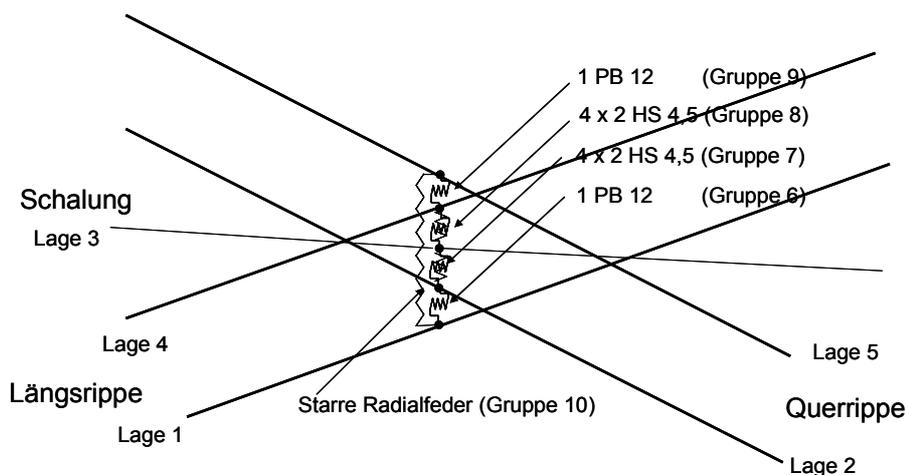


Abb. 6-14: Modell Rippenknoten, Kopplung durch nachgiebige Tangential- und starre Radialfedern

Der Anschluss der Schalung (Lage 3) mit Holzschrauben HS 4,5 an die Längsrippe bzw. Querrippe erfolgt konzentriert im Rippenknoten, jeweils durch eine Feder nach unten (in die Lage 2) und nach oben (in die Lage 3) mit nachgiebiger Tangential- (Gl. 6-23) und starrer Radialsteifigkeit (Abb. 6-14).

Für den Randbogen wird ein Querschnitt von 218 x 160 mm² in Brettschichtholz der Güteklasse GL28c gewählt. Die einzelnen Brettlagen werden seitlich an den Randbogen unverschieblich und gelenkig angeschlossen.

Angaben über den Verschiebungsmodul K für ein stiftförmiges Verbindungsmittel je Scherfuge auf Abscheren werden der DIN 1052 [DIN04] entnommen. Für eine nicht vorgebohrte

Holzschraube HS Ø 4,5 bzw. für einen Passbolzen PB Ø 12 bei einer Holzrohddichte ρ_k ist für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit anzusetzen (Index ser):

$$K_{ser,HS} = \frac{\rho_k^{1,5}}{25} \cdot d^{0,8} = \frac{350^{1,5}}{25} \cdot 4,5^{0,8} = 861 \frac{kN}{m} \quad (\text{Gl. 6-23})$$

$$K_{ser,PB} = \frac{\rho_k^{1,5}}{20} \cdot d = \frac{350^{1,5}}{20} \cdot 12 = 3929 \frac{kN}{m} \quad (\text{Gl. 6-24})$$

Der Verschiebungsmodul K fällt mit zunehmender Beanspruchung. Die Verbindung zeigt bei hoher Auslastung ein plastisches Verhalten und wird somit weicher. Im Grenzzustand der Tragfähigkeit schreibt die DIN 1052 daher einen Verschiebungsmodul $K_{u,mean}$ von lediglich 2/3 des Gebrauchswertes K_{ser} vor.

$$K_{u,mean} = \frac{2}{3} \cdot K_{ser} \quad (\text{Gl. 6-25})$$

Für Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach Theorie II. Ordnung sind nach DIN 1052 [DIN04] alle Steifigkeiten durch den Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_M = 1,3$ abzumindern. Dies gilt für den Elastizitätsmodul bzw. den Schubmodul des Holzes, wie auch die Verschiebungsmoduli der mechanischen Verbindungsmittel. Es ergibt sich somit

$$E_d = \frac{E_{0,mean}}{\gamma_M} = \frac{11000}{1,3} = 8462 \frac{MN}{m^2} \quad (\text{Gl. 6-26})$$

$$G_d = \frac{G_{mean}}{\gamma_M} = \frac{690}{1,3} = 530 \frac{MN}{m^2} \quad (\text{Gl. 6-27})$$

$$K_{u,mean,d} = \frac{K_{u,mean}}{\gamma_M} \quad (\text{Gl. 6-28})$$

Aus dem Verschiebungsmodul K_{HS} pro Verbindungsmittel und den effektiven Abständen $e' = 0,2/2$ errechnet sich nach (Gl. 1-1) die Fugensteifigkeit c der Rippen:

$$c = \frac{K_{u,mean,d,HS}}{e'} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 861}{0,10} = 4470 \frac{kN}{m^2} \quad (\text{Gl. 6-29})$$

Findet die Schubübertragung über mehr als eine Fuge mit den Fugensteifigkeiten c_1, c_2, \dots statt, so sind die Fugen „in Reihe geschaltet“. Daraus lässt sich eine Gesamtstufensteifigkeit c' errechnen mit

$$c' = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots} = \frac{1}{\frac{1}{4470} + \frac{1}{4470} + \frac{1}{4470}} = 1490 \frac{kN}{m^2} \quad (\text{Gl. 6-30})$$

Der anzusetzende Schwerpunktsabstand a ist der Gesamtabstand der über die Fugen verbundenen Teilquerschnitte und beträgt hier $3 \cdot 2,7 \text{ cm} = 8,1 \text{ cm}$.

Es wird angenommen, dass die Feldbereiche ca. 85 % der Gesamtrippenlänge umfassen. Das Nichtmodellieren der Füllstäbe wird durch einen Übertrag der Biege- und Torsionssteifigkeiten auf die modellierten, durchlaufenden Brettlagen kompensiert. Nach (Gl. 6-20) beträgt der Übertrag 85 % der Eigensteifigkeitswerte der Füllbretter.

Es ergibt sich eine relative Fugensteifigkeit (Gl. 2-15) von

$$\Omega = \sqrt{c \left(\frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} + \frac{a^2}{EI_1 + EI_2} \right)} = \sqrt{1,409 \left(2 \frac{1}{10000 \cdot 0,027 \cdot 0,16} + \frac{0,081^2}{2 \cdot 10000 \cdot 1,85 \frac{0,027^3 \cdot 0,16}{12}} \right)} = 1,01 \frac{1}{m}$$

Die Anwendungsgrenze der Fugenkennzahl ε_F (Gl. 2-16) wird im Kapitel 4.4 für das 3n-Element mit 3,0 empfohlen. Somit sind Elementlängen l bis ca. 3 m möglich. Der maximale Abstand der Rippenknoten beträgt ca. 1,7 m. Es ist somit ausreichend, die Rippen mit nur einem Element zwischen den Rippenknoten zu diskretisieren.

Die Verbindungsmittel in den Fugen sind zweireihig angeordnet. Dadurch wird neben der Eigentorsionssteifigkeit der Brettlagen eine Torsionssteifigkeit infolge der Verbundwirkung aktiviert. Es ergibt sich nach (Gl. 5-35)

$$GI_{T_{\text{geschlossen}}} = \frac{4(a_{\text{ges}} f)^2}{\frac{f}{G_{xy,u,d} h_u} + \frac{f}{G_{xy,o,d} h_o} + 3 \sum_{\text{Fugen}} \frac{1}{c/3}} = \frac{4(0,108 \cdot 0,11)^2}{\frac{0,11}{530 \cdot 0,027} + \frac{0,11}{530 \cdot 0,027} + \frac{2}{2,235/3}} = 0,209 \cdot 10^{-3} \text{ MNm}^2$$

Die Eigentorsionssteifigkeit der Brettlagen beträgt

$$GI_{T_{\text{Eigen}}} = 4 \cdot G \cdot h^3 b \alpha = 4 \cdot 530 \cdot 0,027^3 \cdot 0,16 \cdot 0,298 = 1,990 \cdot 10^{-3} \text{ MNm}^2$$

6.8 LASTFALLANNAHMEN

Die Lasten werden als Linienlasten auf die Rippen aufgebracht. Für eine Kuppelschale sind im Allgemeinen folgende Lastfälle anzusetzen. Neben dem Eigengewicht ist die Schneelast s in die Teillastfälle „Schnee, komplett“ und „Schnee/2, halbseitig“ (Abb. 6-15) aufzuteilen.

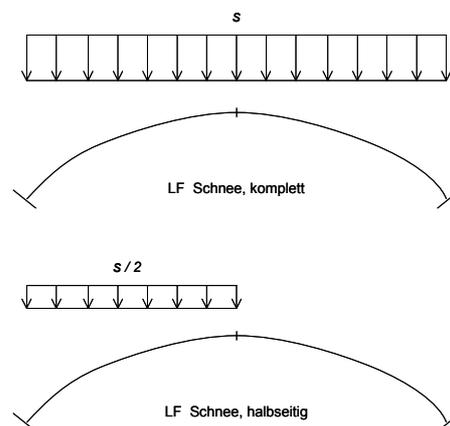


Abb. 6-15: Teillastfälle Schnee

Die Lastannahmen für den Lastfall „Wind“ beruhen auf den Angaben des Eurocode 1 [EC1]. Demnach berechnet sich die Windlast w auf Grundlage des Staudrucks q und des aerodynamischen Beiwerts c_p

$$w = c_p \cdot q \quad [\text{kN/m}^2] \quad (\text{Gl. 6-31})$$

In Anströmrichtung (y -Richtung) variiert der Wert von c_p über die Kuppelfläche (Abb. 6-16). Quer zur Anströmrichtung (x -Richtung) wird gleichmäßiger Winddruck angenommen. Um eine Funktion der Winddruckverteilung aufzustellen, werden in y -Richtung drei Stützstellen berechnet und dazwischen wird linear interpoliert.

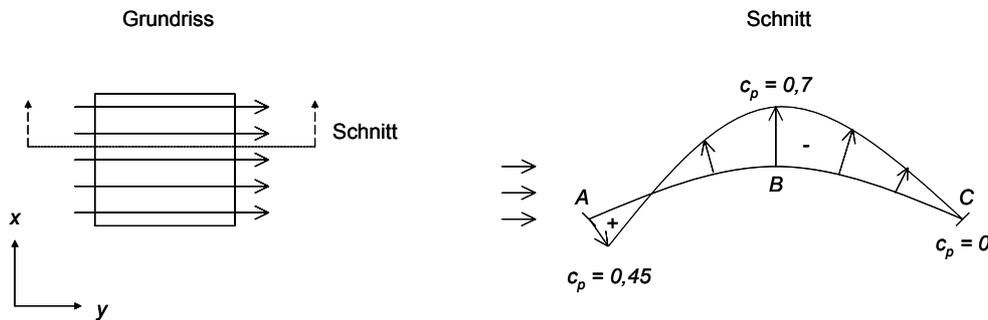


Abb. 6-16: Winddruckverteilung einer Kuppelfläche [EC1]

Die Angaben für die Lastfälle „Imperfektion, symmetrisch“ und „Imperfektion, asymmetrisch“ werden der DIN 1052 [DIN04] entnommen. Dort finden sich Angaben zu Vorverformungen von Bogentragwerken. Hierbei werden ein symmetrischer und ein antimetrischer Lastfall unterschieden (Abb. 6-17). Angegeben sind Maximalwerte für die Querverschiebung w_{\max} . Diese hängen vom Abstand l_0 der Nulldurchgänge der Querverschiebung ab. Die maximale Querverschiebung berechnet sich zu

$$w_{\max} = 0,0025 \cdot l_0 \quad (\text{Gl. 6-32})$$

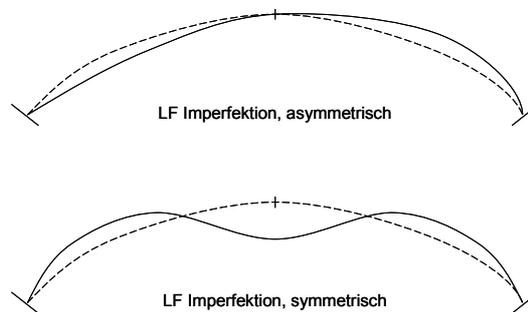


Abb. 6-17: Lastfall Imperfektion

Die aufgestellten Lastfälle (LF) sind nach DIN 1052 [DIN04] zu Lastkombinationen (LK) zusammenzufassen. Für die Lastfälle sind drei Klassen der Lasteinwirkungsdauer (KLED) zu unterscheiden: Für ständige (Eigengewicht, Imperfektion), mittlere (Schnee über 1000 mNN, sonst kurz) und kurze Einwirkungsdauern (Wind).

Maßgebend für die Brettrippenschale ist für alle Bauteile die Lastkombination (kurz) aus den Lastfällen:

- Eigengewicht g (mit $\gamma_G = 1,35$)
- Schnee/2 halbseitig $s/2_{\text{halbseitig}}$ (mit $\gamma_Q = 1,5$)
- Imperfektion antimetrisch i_a (mit $\gamma = 1,0$)

Der Lastfall Wind wirkt hier entlastend und geht daher nicht in die maßgebende Lastkombination ein.

6.9 ERGEBNISSE

6.9.1 VERFORMUNGEN UND SCHNITTGRÖßEN

Im Anhang B sind die Ergebnisse der maßgebenden Lastkombination der einseitigen Lasten „Schnee/2 halbseitig + Imperfektion antimetrisch + Eigengewicht“ (LF 200) dargestellt. Die Gruppen 1 bzw. 2 umfassen die unteren Brettlagen der Längs- bzw. der Querrippen. Die Gruppen 4 und 5 sind die oberen Brettlagen der Längs- bzw. Querrippen. In Gruppe 3 werden die Schalungsstäbe bzw. in Gruppe 0 die Randbögen zusammengefasst. Aufgrund der Symmetrie werden, im Sinne einer besseren Übersichtlichkeit, nur die Zustandsgrößen der Längsrippen dargestellt. Die Zustandslinien der Querrippen sind analog. Die Rippe 24 wird jeweils exemplarisch herausgegriffen und je nach Zustandsgröße in der Ansicht bzw. im Grundriss dargestellt. Die Rippe 24 ist die zweite Rippe neben den Rippen der Hauptdiagonale (Abb. 6-19).

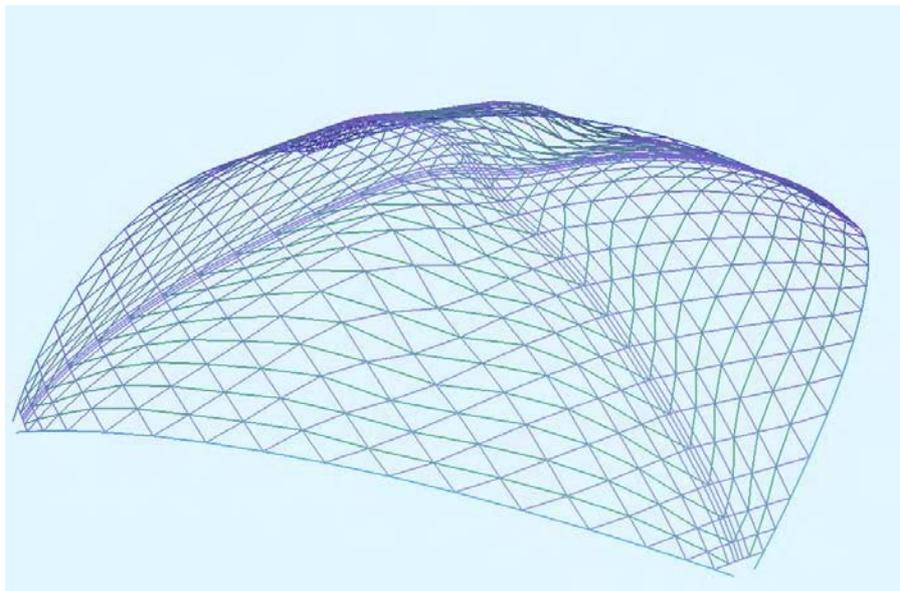


Abb. 6-18: Verformungsfigur mit 20-facher Überhöhung der maßgebenden Lastkombination „g + s/2_{halbseitig} + i_a“

(Abb. 6-18) zeigt die Verformungsfigur unter den einseitigen Lasten in 20-facher Überhöhung. Man erkennt deutlich ein Einbeulen der Struktur im Übergangsbereich von der schneefreien linken Seite auf die durch Schnee belastete, rechte Seite. Die maximale Durchbiegung beträgt dort 46,5 mm. Dies entspricht einer bezogenen Durchbiegung von $L/537$ (Spannweite $L = 25$ m). Im Bereich der Eckpunkte verformt sich das Tragwerk um ca. 10 mm nach oben. Es sind absolute Längsverschiebungen u_x bis 5,5 mm der Brettlagen zu beobachten. Sie haben ihren Nulldurchgang im Bereich der Firstlinie (Abb. 6-19). Die Differenz der Längsverschiebungen zwischen der unteren Brettlage (Gruppe 1) und der oberen Brettlage (Gruppe 4) ist kleiner als 1 mm. Infolge der Längsverschiebungen werden durch die Kopplung in den Rippenknoten die senkrecht dazu verlaufenden Rippen in ihrer Querrichtung v_y verschoben. Die Kopplung ist nicht starr. Die Querverschiebung v_y ist gering im Vergleich zu den Längsverschiebungen der quer dazu verlaufenden Brettlagen. Das absolute Maximum beträgt 4,5 mm.

Die Lastabtragung in den Rippen erfolgt in erster Linie durch Druckkräfte. Die minimale Druckkraft in eine Brettlage beträgt -17,8 kN. In Brettlagen der kurzen Rippen im Eckbereich, die zu den Hauptdiagonalen verlaufen (Abb. 6-22), sind Zugkräfte bis +16,8 kN zu beobachten. Die Zugkräfte werden durch die dortige abhebende Verformung hervorgerufen und vermindern

durch ihre „einschnürende“ Tragwirkung ein weitergehendes Abheben. Die Teilnormalkräfte innerhalb einer Rippe unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander. Die Differenz liegt in einer Größenordnung von 1 bis 3 kN, wobei die oberen Brettlagen in der Regel kleinere Teilnormalkräfte aufweisen (Druckzone der Verbundwirkung). Die maximale Differenz beträgt 8,6 kN.

Die Teilbiegemomente M_{yi} wechseln in der Regel zwischen den Knotenbereichen (negatives Stützmoment) und den Feldbereichen (positives Feldmoment) das Vorzeichen auf relativ niedrigem Niveau. Entscheidend für die Bemessung ist das minimale Teilstützmoment von -0,119 kNm im Bereich der Rippenknoten. Das maximale Teilfeldmoment von 0,120 kNm wird zur Hälfte durch die dort vorhandenen Füllbretter mit abgetragen. Überträgt man die Hälfte des Teilfeldmoments auf die Füllbretter, so ergibt sich pro Brettlage ein maximales Teilmoment von 0,060 kNm.

Die Teilbiegemomente M_{zi} erreichen am Übergangsbereich vom Schnee belasteten in den unbelasteten Bereich ihre höchsten Werte mit einem Maximum von 0,280 kNm. Die Werte sind relativ gering. Sie erzeugen angesichts des zugehörigen Widerstandsmoments W_{zi} um die starke Achse nur geringe Biegenormalspannungen.

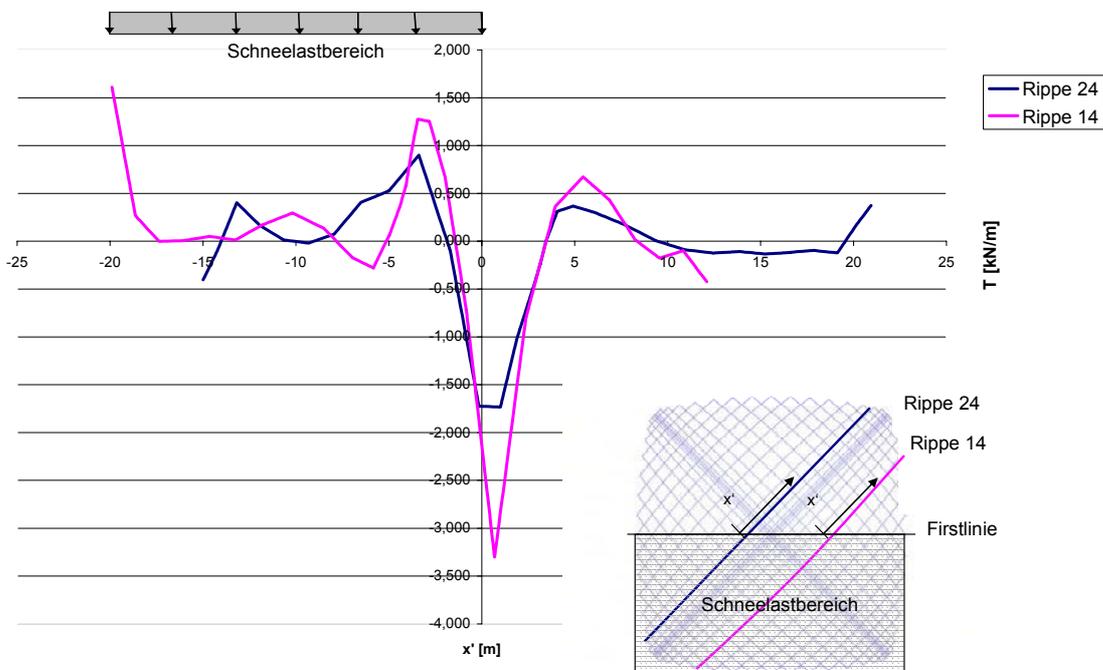


Abb. 6-19: Schubfluss T in der Fuge der Rippe 24 und in der maßgebenden Rippe 14

Torsionsmomente spielen bei Kuppelschalen, mit im Rippenquerschnitt zentrisch angeordneter Schalung, eine untergeordnete Rolle. Das maximale Torsionsmoment pro Brettlage tritt in den kurzen Rippen des Eckbereichs mit 0,020 kNm auf.

Infolge der Koppelkräfte im Bereich der Rippenknoten werden Einzelkräfte in Brettlagen eingeleitet. Diese führen zu Sprüngen, insbesondere in den Querkraftverläufen. Die maximale Teilquerkraft Q_{zi} beträgt 0,55 kN und tritt im Bereich der Firstlinie und im Eckbereich auf. Die Teilquerkraft Q_{yi} hat ihre Maxima im Eckbereich in einer Größenordnung von 1,2 kN.

Der Schubfluss zwischen den durchlaufenden Brettlagen errechnet sich aus (Gl. 3-74). Der größte Schubfluss tritt mit 3,2 kN/m in Rippe 14 im Übergangsbereich vom Schnee belasteten in den

unbelasteten Bereich auf. In (Abb. 6-19) ist, neben dem Schubfluss der maßgebenden Rippe 14, der Schubfluss in der Rippe 24 abgewickelt über ihre Länge x' dargestellt. Der Nullpunkt der Ordinate x' liegt im Bereich der Firstlinie, am Übergang zwischen der vom Schnee belasteten zur unbelasteten Hälfte des Tragwerks. Dort erreicht der Schubfluss T in jeder Rippe seinen Maximalwert. Die Veränderung der Teilnormalkräfte ist dort am stärksten ($N' = T$). Der Schubfluss T stellt das Gleichgewicht der Kräfte in Längsrichtung wieder her (Gl. 2-9). Hohe Schubflüsse sind auch an den Enden der Rippen zu erkennen. Aufgrund der dortigen gelenkigen, aber unverschieblichen Lagerung jeder Brettlage können Relativverschiebungen δ (Gl. 2-8) in der Fuge auftreten. Schubfluss T ist die Folge.

6.9.2. NACHWEISE IM GRENZZUSTAND DER TRAGFÄHIGKEIT

Die Festigkeitseigenschaften für den Nachweis der Tragfähigkeit werden in den Normen durch charakteristische Werte X_k angegeben. Sie beschreiben den 5 %-Fraktilwert [Schi05].

Im Ingenieurholzbau nach DIN 1052 [DIN04] ist der Bemessungswert X_d (Design-Wert) neben den Materialeigenschaften von der Nutzungsklasse des Bauwerks und von der Klasse der Lasteinwirkungsdauer abhängig. Es wird hierfür ein Modifikationsbeiwert k_{mod} eingeführt. Darüber hinaus wird mit dem Teilsicherheitsfaktor γ_M die Unsicherheit der Streuung der Baustoffeigenschaften abgedeckt. Der Bemessungswert X_d (Design-Wert) einer Festigkeitseigenschaft ergibt sich allgemein nach:

$$X_d = \frac{k_{mod} \cdot X_k}{\gamma_M} \quad (\text{Gl. 6-33})$$

Die Brettrippenschale wird der Nutzungsklasse I (Bauwerk allseitig geschlossen und beheizt) zugeordnet. Die einseitigen Schneelasten werden bei Gebäuden in der Höhenlage unter 1000 m NN der Lasteinwirkungsdauer „kurz“ zugeordnet. Die DIN 1052 schreibt somit einen Modifikationsbeiwert von $k_{mod} = 0,9$ vor. Für Holz und Holzwerkstoffe ist $\gamma_M = 1,3$ anzusetzen. Somit ergibt sich nach (Gl. 6-33):

$$X_d = \frac{0,9 X_k}{1,3} = 0,69 X_k \quad (\text{Gl. 6-34})$$

Nach DIN 1052 wird die Einhaltung der Normalspannungen bei Druck (Index c) mit Biegung (Index m) durch folgende Bedingungen nachgewiesen:

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (\text{Gl. 6-35})$$

Bei Zug (Index t) mit Biegung (Index m) gilt

$$\frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (\text{Gl. 6-36})$$

Für k_{red} ist für Balkenschichtholz mit $h/b \leq 4$ $k_{red} = 0,7$ anzusetzen.

Im Nachweis sind die Initialspannungen durch die konstruktionsbedingten Zwangskrümmungen zu berücksichtigen. Diese sind auf die Biegenormalspannung $\sigma_{m,y}$ der maßgebenden Lastfallkombination zu addieren. Bei einer Brettlagendicke von $d = 0,027$ m, einem Radius von $R = 27,5$ m und einem E-Modul von 11.000 MN/m^2 wird beim Einbau nach (Gl. 6-14) eine Initialspannung von $\sigma_0 = 5,4 \text{ MN/m}^2$ am Rand der Teilquerschnitte erzeugt.

Nach dem Lösen vom Lehrgerüst findet eine Umlagerung der Belastung statt. Das Gesamtmoment M_{ges} verteilt sich gleichmäßig über die Rippenlänge. Es errechnet sich nach (Gl. 6-16) zu:

$$M_{ges} = \frac{1}{27,5} \left(0,18 \cdot 2 \cdot \left(11000 \cdot \frac{0,027^3 \cdot 0,16}{12} \right) + 0,82 \cdot 4 \cdot \left(11000 \cdot \frac{0,027^3 \cdot 0,16}{12} \right) \right) = 0,38 kNm$$

Im geschwächten Knotenbereich stehen lediglich zwei Brettlagen für die Abtragung vom M_{ges} zur Verfügung. Die Initialspannung am Rand der Brettlagen ist dort am größten und erreicht einen maximalen Wert von (Gl. 6-17):

$$\sigma_0 = \frac{0,38 \cdot \frac{1}{2}}{0,16 \cdot 0,027^2} = 9,7 \frac{MN}{m^2}$$

30 % der Initialspannungen werden durch Spannungsrelaxation abgebaut (Gl. 6-18). Die Spannungsrelaxation ist zum Großteil nach ca. einem Monat abgeschlossen. Es ergibt sich somit eine Endmaßzahl der Spannungsrelaxation von $\Phi_\infty = 0,7$. Dadurch bleibt in den Knotenbereichen langfristig eine Randspannung von

$$\sigma_\infty = 0,7 \cdot 9,7 \frac{MN}{m^2} = 6,8 \frac{MN}{m^2}$$

erhalten (Gl. 6-19). Diese ist bei den Biegespannungen $\sigma_{m,y}$ zu berücksichtigen. Bei einem Bemessungswert von $f_{m,y,d} = 16,66 \text{ MN/m}^2$ werden die Brettlagen im Knotenbereich durch die Zwangskrümmung zu 40 % ausgelastet.

Die maximale Biegespannung $\sigma_{m,y,d}$ aus dem Teilbiegemoment M_{yi} im Knotenbereich beträgt $6,0 \text{ MN/m}^2$ und tritt in der Mitte der schneebelasteten Tragwerkshälfte auf. Bei einem Bemessungswert von $f_{m,y,d} = 16,7 \text{ MN/m}^2$ bedeutet dies einen Auslastungsgrad von 36 %. Das Teilbiegemoment M_{zi} spielt eine untergeordnete Rolle. Es erzeugt eine maximale Biegespannung $\sigma_{m,z,d}$ von $2,4 \text{ MN/m}^2$, die abgemindert durch $k_{red} = 0,7$ bei einem Bemessungswert $f_{m,z,d} = 16,7 \text{ MN/m}^2$ einen maximalen Auslastungsgrad von 10 % erzeugt. Diese treten in den kurzen Rippen im Eckbereich auf (Abb. 6-20).

Die Beträge der maximalen Zugkraft bzw. der maximalen Druckkraft in den Brettlagen sind annähernd gleich groß. Da die zulässige Zugnormalspannung ($f_{t,0,d} = 9,7 \text{ MN/m}^2$) nach DIN 1052 geringer ist als die zulässige Drucknormalspannung ($f_{c,0,d} = 14,5 \text{ MN/m}^2$), lasten die Zugkräfte den Querschnitt überproportional aus. In der oberen Brettlage der kurzen Rippen im Eckbereich treten die maximalen Zugkräfte auf und führen zu einem Auslastungsgrad von 40 %.

Aufgrund der hohen Zugnormalspannung ist für den Nachweis die obere Brettlage der kurzen Rippen (Abb. 6-22) maßgebend. Zusammen mit den Spannungen aus den Teilbiegemomenten M_{yi} und M_{zi} , beträgt die dortige Auslastung 67,3 %.

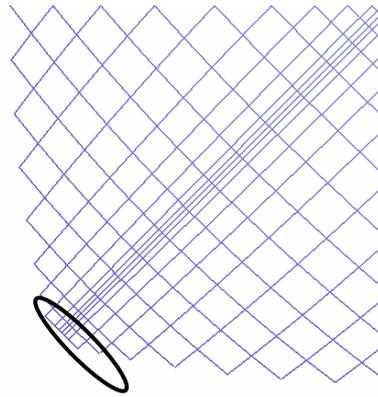


Abb. 6-20: Maßgebende Rippe mit der höchsten Auslastung auf Normalspannung und Schubspannung

Addiert man die Spannungen mit den maximalen Spannungen aus Zwangskrümmung, so ergibt sich letztlich für den Nachweis der zulässigen Normalspannungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit eine maximale Gesamtauslastung von 107,3 %. Der Nachweis wird somit knapp nicht erfüllt. Durch einen Einbau von weiteren Brettlagen in diesem lokal begrenzten Bereich kann Abhilfe geschaffen werden. Der Nachweis der Tragfähigkeit wird so erbracht. Gleichzeitig versteift die Verstärkung den „Kämpferbereich“ der Schale und reduziert die dortige abhebbende Verformung, was sich positiv auf Gesamtstabilität des Tragwerks auswirkt. Die zusätzlichen Brettlagen können entweder für den Nutzer an der Unterseite sichtbar oder unsichtbar auf der Oberseite im Bereich der Dämmebene angebracht werden.

Für den Nachweis der Einhaltung der Schubspannungen im Querschnitt gelten nach DIN 1052 folgende Bedingungen:

$$\frac{\tau_{\text{tor},d}}{f_{V,d}} + \left(\frac{\tau_{y,d}}{f_{V,d}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{z,d}}{f_{V,d}} \right)^2 \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau_{y,d}}{f_{V,d}} \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau_{z,d}}{f_{V,d}} \leq 1 \quad (\text{Gl. 6-37})$$

Schubspannungen aus Torsion τ_{tor} werden aufgrund der geringen Torsionsmomente vernachlässigt.

Die maximalen Schubspannungen in den Brettlagen aus den Querkräften mit $\tau_{y,d} = 0,38 \text{ MN/m}^2$ und $\tau_{z,d} = 0,09 \text{ MN/m}^2$ treten ebenfalls in den kurzen Rippen der Eckbereiche auf (Abb. 6-20). Damit ergibt sich bei einem Bemessungswert von $f_{V,d} = 1,7 \text{ MN/m}^2$ ein maximaler Auslastungsgrad von 22 % (Gl. 6-37).

Die Fugen der Rippen werden mit Holzschrauben HS 4,5 verbunden. Der Bemessungswert der Tragfähigkeit auf Abscheren pro Scherfuge beträgt für die maßgebende Lastkombination ($k_{\text{mod}} = 0,9$):

$$R_d = 0,50 \text{ kN}$$

Der zulässige Schubfluss in der Fuge (effektiver Verbindungsmittelabstand $e' = 0,1 \text{ m}$) ist somit

$$T_d = \frac{R_d}{e'} = \frac{0,50 \text{ kN}}{0,1} = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Der vorhandene, maximale Schubfluss in der Fuge zwischen den durchlaufenden Brettlagen beträgt in der Rippe 14 im Firstbereich $T = 3,2 \text{ kN/m}$ (Abb. 6-19). Die Verbindungsmittel werden auf Abscheren maximal zu 64 % ausgelastet. Die Abstände könnten verringert werden. Die

Fugensteifigkeiten und damit die Steifigkeit des Querschnitts würden sich verändern. Die Verbundtragwirkung würde reduziert. Die Eigentragwirkung der Teilquerschnitte würde erhöht. Die Berechnung wäre erneut durchzuführen.

Infolge der gekrümmten Form der Brettrippen tritt Querzug in den Fugen auf. Er ergibt sich aus den Teilnormalkräften N_i^V (Gl. 6-3). Es ergibt sich ein Maximum von 4,3 kN. Nach (Gl. 6-12a) ergibt sich der maximale Querzug aus Krümmung in der Fuge zu

$$p = \frac{4,3 \text{ kN}}{27,5 \text{ m}} = 0,15 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

Nach DIN 1052 [DIN04] beträgt der Ausziehwiderstand einer Holzschraube HS 4,5 bei einer Gewindelänge im Holzteil von 27 mm $R_{ax,d} = 0,392 \text{ kN}$. Bei einem effektiven Abstand der Holzschrauben von $e' = 0,1 \text{ m}$ beträgt somit die Auslastung

$$\eta = \frac{0,15 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{0,392 \text{ kN}} = 0,04 \leq 1.$$

Die Verbindungsmittel werden somit nur sehr gering auf Herausziehen beansprucht. Die Hauptbeanspruchung der Verbindungsmittel bleibt das Abscheren aus Schubfluss.

Im Rippenknoten wird der Passbolzen auf Abscheren mit maximal 2,4 kN belastet (Gruppe 6 bzw. 9). Sein zulässiger Bemessungswert auf Abscheren bei einem Kraft-Faserwinkel von 90° beträgt 4,0 kN, was einen maximalen Auslastungsgrad von 60 % bedeutet. In seiner Richtung wird der Passbolzen M12 mit maximal 6 kN gezogen (Gruppe 10), was einen Auslastungsgrad auf Zug von ca. 20 % bedeutet. Die Krafteinleitung in den Passbolzen erfolgt über Pressung mit beidseitigen Unterlegscheiben.

ANHANG A

AUSDRUCK ANALYTISCHE LÖSUNG MIT MAPLE (KAPITEL 2)

Analytische Lösung des zweiteiligen Verbundquerschnitts

> **restart**; **with (linalg)**:
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Gleichung 1: (Gl. delta(Kreuzinger) = delta(Schuler)
Gleichung 2: Beziehung zwischen u1 und u2

```
> A1 := u2 - u1 + w_a = delta;
A2 := u1 * EA1 + u2 * EA2 + C7 * x + C8;
sol := solve({A1, A2}, {u1, u2});
assign(sol);
u1 := simplify(u1);
u2 := simplify(u2);
```

$$A1 := u2 - u1 + w_a = \delta$$

$$A2 := u1 EA1 + u2 EA2 + C7 x + C8$$

$$u1 := -\frac{C7 x + C8 - w_a EA2 + \delta EA2}{EA2 + EA1}$$

$$u2 := -\frac{C7 x + EA1 w_a - EA1 \delta + C8}{EA2 + EA1}$$

Grundlösung Schuler (Kapitel 2.5)

```
> delta := C2 * a * Omega / alpha ^ 2 * sinh(Omega * x) + C1 * a * Omega / alpha ^ 2 * cosh(Omega * x) - C3 * 6 * a / omega ^ 2 - a * q / omega ^ 2 / EIu * x;
w := C1 * sinh(Omega * x) + C2 * cosh(Omega * x) + C3 * x ^ 3 + C4 * x ^ 2 + C5 * x + C6 + q * x ^ 4 / 24 / EIu;
w_ := diff(w, x);
```

$$\delta := \frac{C2 a \Omega \sinh(\Omega x)}{\alpha^2} + \frac{C1 a \Omega \cosh(\Omega x)}{\alpha^2} - \frac{6 C3 a}{\omega^2} - \frac{a q x}{\omega^2 EIu}$$

$$w := C1 \sinh(\Omega x) + C2 \cosh(\Omega x) + C3 x^3 + C4 x^2 + C5 x + C6 + \frac{q x^4}{24 EIu}$$

$$w_ := C1 \cosh(\Omega x) \Omega + C2 \sinh(\Omega x) \Omega + 3 C3 x^2 + 2 C4 x + C5 + \frac{q x^3}{6 EIu}$$

[u1 sortiert

```
> u1 := collect(collect(collect(collect(collect(collect(collect(collect(collect(
```

$$u1 := -\frac{\left(-\cosh(\Omega x) \Omega a EA2 + \frac{a \Omega \cosh(\Omega x) EA2}{\alpha^2}\right) C1}{EA2 + EA1}$$

$$\frac{\left(-\sinh(\Omega x) \Omega a EA2 + \frac{a \Omega \sinh(\Omega x) EA2}{\alpha^2}\right) C2}{EA2 + EA1} - \frac{\left(-3 x^2 a EA2 - \frac{6 a EA2}{\omega^2}\right) C3}{EA2 + EA1}$$

$$+ \frac{2 x a EA2 C4}{EA2 + EA1} + \frac{a EA2 C5}{EA2 + EA1} - \frac{x C7}{EA2 + EA1} - \frac{C8}{EA2 + EA1} - \frac{q x^3 a EA2}{\omega^2 EIu} - \frac{a q x EA2}{\omega^2 EIu} - \frac{6 EIu}{\omega^2 EIu} - \frac{EA2 + EA1}{EA2 + EA1}$$

[u2 sortiert

```
> u2 := collect(collect(collect(collect(collect(collect(collect(collect(
```

$$u2 := -\frac{\left(EA1 \cosh(\Omega x) \Omega a - \frac{EA1 a \Omega \cosh(\Omega x)}{\alpha^2}\right) C1}{EA2 + EA1}$$

$$- \frac{\left(EA1 \sinh(\Omega x) \Omega a - \frac{EA1 a \Omega \sinh(\Omega x)}{\alpha^2}\right) C2}{EA2 + EA1} - \frac{\left(3 EA1 x^2 a + \frac{6 EA1 a}{\omega^2}\right) C3}{EA2 + EA1}$$

$$- \frac{2 EA1 x a C4}{EA2 + EA1} - \frac{EA1 a C5}{EA2 + EA1} - \frac{x C7}{EA2 + EA1} - \frac{C8}{EA2 + EA1} - \frac{EA1 q x^3 a}{6 EIu} + \frac{EA1 a q x}{\omega^2 EIu} - \frac{EA2 + EA1}{EA2 + EA1}$$

> N1 := eval(diff(u1, x) * EA1);

```
N1V1 := -C1 * c * a / omega ^ 2 * sinh(Omega * x) - C2 * c * a / alpha ^ 2 * cosh(Omega * x) + C3 * 6 * c * a / omega ^ 2 * x + C4 * 2 * c * a / omega ^ 2 - C7 * c / omega ^ 2 + q * c * a / 2 / omega ^ 2 / EIu * x ^ 2 + q * c * a / omega ^ 4 / EIu;
```

$$N1 := -\frac{\left(-\sinh(\Omega x) \Omega^2 a EA2 + \frac{a \Omega^2 \sinh(\Omega x) EA2}{\alpha^2}\right) C1}{EA2 + EA1}$$

$$- \frac{\left(-\cosh(\Omega x) \Omega^2 a EA2 + \frac{a \Omega^2 \cosh(\Omega x) EA2}{\alpha^2}\right) C2}{EA2 + EA1} + \frac{6 x a EA2 C3}{EA2 + EA1} - \frac{2 a EA2 C4}{EA2 + EA1}$$

$$- \frac{C7}{EA2 + EA1} - \frac{2 EIu}{\omega^2 EIu} - \frac{a q EA2}{\omega^2 EIu} - \frac{EA1}{EA2 + EA1}$$

$$N1V1 := -\frac{C1 c a \sinh(\Omega x)}{\alpha^2} - \frac{C2 c a \cosh(\Omega x)}{\alpha^2} + \frac{6 C3 c a x}{\omega^2} + \frac{2 C4 c a}{\omega^2} - \frac{C7 c}{\omega^2} - \frac{q c a x^2}{2 \omega^2 EIu} + \frac{q c a}{\omega^4 EIu}$$

```
> N2 := collect(eval(diff(u2, x) * EA2), C1);
```

N2V1 := C1*c*a/alpha^2*sinh(Omega*x) + C2*c*a/alpha^2*cosh(Omega*x) -
 C3*6*c*a/omega^2*x-C4*2*c*a/omega^2-C7*c/omega^2/EA1-q*c*a/2/ome
 ga^2/EIu*x^2-q*c*a/omega^4/EIu;
N2V2 := -alpha^2*EIu/a*(diff(w,x\$2)-diff(delta,x)/a);

$$N2 := -\frac{\left(EA1 \sinh(\Omega x) \Omega^2 a - \frac{EA1 a \Omega^2 \sinh(\Omega x)}{\alpha^2} \right) EA2 C1}{EA2 + EI} + \left(-\frac{C7}{EA2 + EI} \right)$$

$$-\frac{\left(EA1 \cosh(\Omega x) \Omega^2 a - \frac{EA1 a \Omega^2 \cosh(\Omega x)}{\alpha^2} \right) C2}{EA2 + EI} - \frac{6 EA1 x a C3}{EA2 + EI} - \frac{2 EA1 a C4}{EA2 + EI}$$

$$\frac{EA1 q x^2 a}{2 EIu} + \frac{EA1 a q}{\omega^2 EIu}$$

$$-\frac{EA2}{EA2 + EI} \frac{EA2}{EA2 + EI}$$

$$N2V1 := \frac{C1 c a \sinh(\Omega x)}{\alpha^2} + \frac{C2 c a \cosh(\Omega x)}{\alpha^2} - \frac{6 C3 c a x}{\omega^2} - \frac{2 C4 c a}{\omega^2} - \frac{C7 c}{\omega^2 EA1}$$

$$-\frac{q c a x^2}{2 EIu} - \frac{q c a}{\omega^4 EIu}$$

$$N2V2 := -\alpha^2 EIu \left(C1 \sinh(\Omega x) \Omega^2 + C2 \cosh(\Omega x) \Omega^2 + 6 C3 x + 2 C4 + \frac{q x^2}{2 EIu} \right)$$

$$\frac{C2 a \Omega^2 \cosh(\Omega x)}{\alpha^2} + \frac{C1 a \Omega^2 \sinh(\Omega x)}{\alpha^2} - \frac{a q}{\omega^2 EIu} \Bigg) / a$$

T := -diff(N1V1, x);
TV := delta*c;

$$T := \frac{C1 c a \cosh(\Omega x) \Omega}{\alpha^2} + \frac{C2 c a \sinh(\Omega x) \Omega}{\alpha^2} - \frac{6 C3 c a}{\omega^2} - \frac{q c a x}{\omega^2 EIu}$$

$$TV := \left(\frac{C2 a \Omega \sinh(\Omega x)}{\alpha^2} + \frac{C1 a \Omega \cosh(\Omega x)}{\alpha^2} - \frac{6 C3 a}{\omega^2} - \frac{a q x}{\omega^2 EIu} \right) c$$

M1 := -EI1*diff(w, x\$2);
M2 := -EI2*diff(w, x\$2);

$$M1 := -EI1 \left(C1 \sinh(\Omega x) \Omega^2 + C2 \cosh(\Omega x) \Omega^2 + 6 C3 x + 2 C4 + \frac{q x^2}{2 EIu} \right)$$

$$M2 := -EI2 \left(C1 \sinh(\Omega x) \Omega^2 + C2 \cosh(\Omega x) \Omega^2 + 6 C3 x + 2 C4 + \frac{q x^2}{2 EIu} \right)$$

Q1 := collect(collect(diff(M1, x)+T*r1, C1), C2), C3);
Q2 := collect(diff(M2, x)+T*r2, C1);

$$Q1 := \left(-6 EI1 - \frac{6 c a r l}{\omega^2} \right) C3 + \left(-EI1 \sinh(\Omega x) \Omega^3 + \frac{c a \sinh(\Omega x) \Omega r l}{\alpha^2} \right) C2$$

$$+ \left(-EI1 \cosh(\Omega x) \Omega^3 + \frac{c a \cosh(\Omega x) \Omega r l}{\alpha^2} \right) C1 - \frac{EI1 q x}{EIu} - \frac{q c a x r l}{\omega^2 EIu}$$

$$Q2 := \left(-EI2 \cosh(\Omega x) \Omega^3 + \frac{c a \cosh(\Omega x) \Omega r2}{\alpha^2} \right) C1$$

$$-EI2 \left(C2 \sinh(\Omega x) \Omega^3 + 6 C3 + \frac{q x}{EIu} \right) + \left(\frac{C2 c a \sinh(\Omega x) \Omega}{\alpha^2} - \frac{6 C3 c a}{\omega^2} - \frac{q c a x}{\omega^2 EIu} \right) r2$$

> Mges := collect(M1+M2-N1V1*a1+N2V1*a2, C7);

$$Mges := \left(\frac{c a l}{\omega^2 EA2} - \frac{c a2}{\omega^2 EA1} \right) C7$$

$$-EI1 \left(C1 \sinh(\Omega x) \Omega^2 + C2 \cosh(\Omega x) \Omega^2 + 6 C3 x + 2 C4 + \frac{q x^2}{2 EIu} \right)$$

$$-EI2 \left(C1 \sinh(\Omega x) \Omega^2 + C2 \cosh(\Omega x) \Omega^2 + 6 C3 x + 2 C4 + \frac{q x^2}{2 EIu} \right) -$$

$$\left(-\frac{C1 c a \sinh(\Omega x)}{\alpha^2} - \frac{C2 c a \cosh(\Omega x)}{\alpha^2} + \frac{6 C3 c a x}{\omega^2} + \frac{2 C4 c a}{\omega^2} + \frac{q c a x^2}{2 \omega^2 EIu} + \frac{q c a}{\omega^4 EIu} \right) a l$$

$$+ \left(\frac{C1 c a \sinh(\Omega x)}{\alpha^2} + \frac{C2 c a \cosh(\Omega x)}{\alpha^2} - \frac{6 C3 c a x}{\omega^2} - \frac{2 C4 c a}{\omega^2} - \frac{q c a x^2}{2 \omega^2 EIu} - \frac{q c a}{\omega^4 EIu} \right) a 2$$

> Qges := Q1+Q2;

$$Qges := \left(-6 EI1 - \frac{6 c a r l}{\omega^2} \right) C3 + \left(-EI1 \sinh(\Omega x) \Omega^3 + \frac{c a \sinh(\Omega x) \Omega r l}{\alpha^2} \right) C2$$

$$+ \left(-EI1 \cosh(\Omega x) \Omega^3 + \frac{c a \cosh(\Omega x) \Omega r l}{\alpha^2} \right) C1 - \frac{EI1 q x}{EIu} - \frac{q c a x r l}{\omega^2 EIu}$$

$$+ \left(-EI2 \cosh(\Omega x) \Omega^3 + \frac{c a \cosh(\Omega x) \Omega r2}{\alpha^2} \right) C1 - EI2 \left(C2 \sinh(\Omega x) \Omega^3 + 6 C3 + \frac{q x}{EIu} \right)$$

$$+ \left(\frac{C2 c a \sinh(\Omega x) \Omega}{\alpha^2} - \frac{6 C3 c a}{\omega^2} - \frac{q c a x}{\omega^2 EIu} \right) r2$$

> Nges := N1V1+N2V1;

$$Nges := -\frac{C7 c}{\omega^2 EA2} - \frac{C7 c}{\omega^2 EA1}$$

Beispiel (Kap 2.12)

```

> q:=0.001;
h1:=0.025;
h2:=0.04;

b1:=0.14;
b2:=0.18;
c:=300;
l:=1;
Es:=10000;
EA1:=Es*b1*h1;
EA2:=Es*b2*h2;
EI1:=Es*b1*h1^3/12;
EI2:=Es*b2*h2^3/12;
zm:=(EA1*h1/2-EA2*h2/2)/(EA1+EA2);
r1:=h1/2;
r2:=h2/2;
a1:=b1/2-zm;
a2:=h2/2+zm;

> Bst:=EA1*EA2*a^2/(EA1+EA2);
omega:=sqrt(c*(EA1+EA2)/EA1/EA2);
> a:=a1+a2;
EIu:=EI1+EI2+Bst;
alpha:=sqrt(Bst/EIu);
Omega:=sqrt(omega^2/(1-alpha^2));

q:=0.001
h1:=0.025
h2:=0.04
b1:=0.14
b2:=0.18
c:=300
l:=1
Es:=10000
EA1:=35.00000
EA2:=72.0000
EI1:=0.001822916667
EI2:=0.009600000000
zm:=-0.009369158878
r1:=0.012500000000

```

```

r2:=0.020000000000
a1:=0.02186915888
a2:=0.01063084112
Bst:=23.55140187 a^2
o:=3.569046825
a:=0.032500000000
EIu:=0.03629908490
alpha:=0.8278352293
Omega:=6.362262444

```

8 Gleichungen für 8 RB

```

> RB1:=eval(subs(x=0,0ges=0));
RB2:=eval(subs(x=0,M1=0));
RB3:=eval(subs(x=0,u1=0));
RB4:=eval(subs(x=0,N2=0));
RB5:=eval(subs(x=1,w=0));
RB6:=eval(subs(x=1,w_ =0));
RB7:=eval(subs(x=1,N1=-.1));
RB8:=eval(subs(x=1,u2=0));

RBI:=-0.2177945093 C3 - 0.5 10^-9 CI = 0
RB2:=-0.07378871977 C2 - 0.003645833334 C4 = 0

RB3 :=
-0.06389063187 CI + 0.01030098699 C3 + 0.02186915888 C5 - 0.009345794393 C8 = 0
RB4 := -0.001655388583 - 0.6728971963 C7 + 14.22711387 C2 - 1.530841121 C4 = 0
RB5 := 289.7771810 CI + 289.7789064 C2 + C3 + C4 + C5 + C6 + 0.001147870994 = 0
RB6 := 1843.649453 CI + 1843.638476 C2 + 3 C3 + 2 C4 + C5 + 0.004591483977 = 0
RB7 := -4122.692948 CI - 4122.717496 C2 + 4.592523366 C3 + 1.530841122 C4
- 0.3271028038 C7 + 0.01219863730 = -0.1
RB8 := 8.999937653 CI + 8.999884066 C2 - 0.03689994759 C3 - 0.02126168224 C4
- 0.01063084112 C5 - 0.009345794393 C7 - 0.009345794393 C8 - 0.00007180284477 = 0

Lösung der 8 Koeffizienten
> Lös:=solve({RB1,RB2,RB3,RB4,RB5,RB6,RB7,RB8},{C1,C2,C3,C4,C5,C6,
C7,C8});assign(Lös);

lös := {C2 = 0.0008081252858, C4 = -0.01635580258, C6 = 0.01353080477,
C5 = -0.003257459978, C7 = 0.05183561059, C8 = -0.002214253124,
C1 = -0.0007911011970, C3 = 0.1816164236 10^11}
> w;

```

```

-0.0007911011970 sinh(6.362262444 x) + 0.0008081252858 cosh(6.362262444 x)
+ 0.1816164236 10-11 x3 - 0.01635580258 x2 - 0.003257459978 x + 0.01353080477
+ 0.001147870994 x4
> u1 ;

0.0005054395535 cosh(6.362262444 x) - 0.00005163163514 sinh(6.362262444 x)
+ 0.1191539527 10-12 x2 - 0.00005054395535 - 0.001152523432 x + 0.0001004118926 x3
> u2 ;

-0.00002456997833 cosh(6.362262444 x) + 0.00002509871156 sinh(6.362262444 x)
- 0.5792206032 10-13 x2 + 0.00005532349390 - 0.0001596845897 x - 0.00004881133667 x3
> T ;
TV ;

-0.07160781605 cosh(6.362262444 x) + 0.07314877924 sinh(6.362262444 x)
- 0.8340776688 10-11 - 0.02108649743 x
0.07314877926 sinh(6.362262444 x) - 0.07160781606 cosh(6.362262444 x)
- 0.8340776688 10-11 - 0.02108649744 x
> N1 ;
N1V1 ;
N1V2 ;

0.01125508680 sinh(6.362262444 x) - 0.01149729046 cosh(6.362262444 x)
+ 0.8340776689 10-11 x - 0.04033832012 + 0.01054324872 x2
0.01125508680 sinh(6.362262444 x) - 0.01149729045 cosh(6.362262444 x)
+ 0.8340776688 10-11 x - 0.04033832014 + 0.01054324872 x2
N1V2

> N2 ;
N2V1 ;
N2V1 ;

-0.01125508681 sinh(6.362262444 x) - 0.01149729046
+ 0.01149729046 cosh(6.362262444 x) - 0.8340776683 10-11 x - 0.01054324872 x2
-0.01125508680 sinh(6.362262444 x) + 0.01149729045 cosh(6.362262444 x)
- 0.8340776688 10-11 x - 0.01149729045 - 0.01054324872 x2
-0.01125508680 sinh(6.362262444 x) + 0.01149729045 cosh(6.362262444 x)
- 0.8340776688 10-11 x - 0.01149729045 - 0.01054324872 x2
> M1 ;

0.00005837434454 sinh(6.362262444 x) - 0.00005963053025 cosh(6.362262444 x)

```

```

- 0.1986429634 10-13 x + 0.00005963053025 - 0.00002510967800 x2
> M2 ;

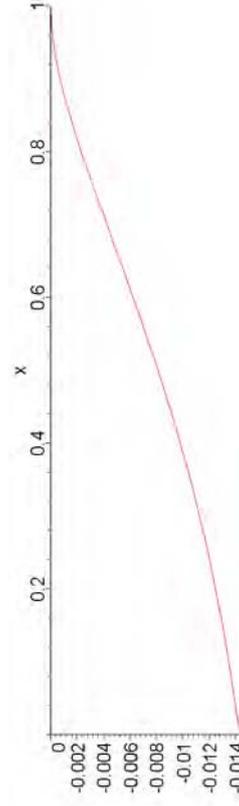
0.0003074159767 sinh(6.362262444 x) - 0.0003140314095 cosh(6.362262444 x)
- 0.1046110600 10-12 x + 0.0003140314095 - 0.0001322347385 x2
> Q1 ;
Q2 ;
Qges ;

-0.1241240049 10-12 + 0.0005349746573 sinh(6.362262444 x)
- 0.0005237048008 cosh(6.362262444 x) - 0.0003138005739 x
0.0005237048012 cosh(6.362262444 x) - 0.000534974658 sinh(6.362262444 x)
- 0.2714265938 10-12 - 0.0006861994257 x
- 0.3955505987 10-12 - 0.1 10-11 sinh(6.362262444 x) + 0.4 10-12 cosh(6.362262444 x)
- 0.00099999999996 x
> Mges ;

0.001133601204 + 0.2 10-12 sinh(6.362262444 x) - 0.1 10-12 cosh(6.362262444 x)
- 0.3955505987 10-12 x - 0.00049999999999 x2
> Nges ;

-0.05183561059
> plot ({-w}, x=0..1) ;

```



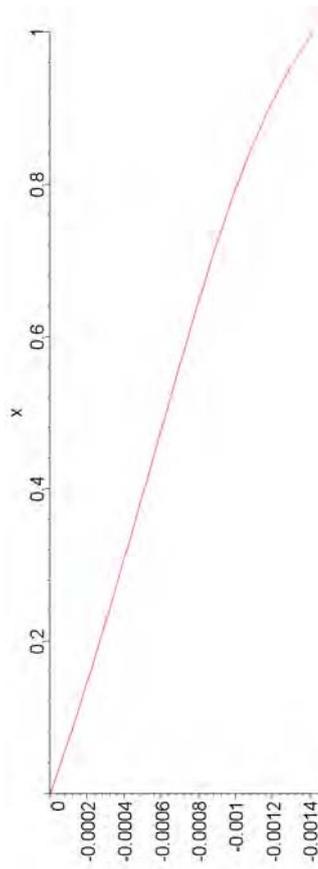
```

> evalf (subs (x=0, w)) ;
evalf (subs (x=1/2, w)) ;
evalf (subs (x=1, w)) ;

0.01433893006
0.008122999631
0.4 10-11

> plot ({u1}, x=0..1) ;

```



```

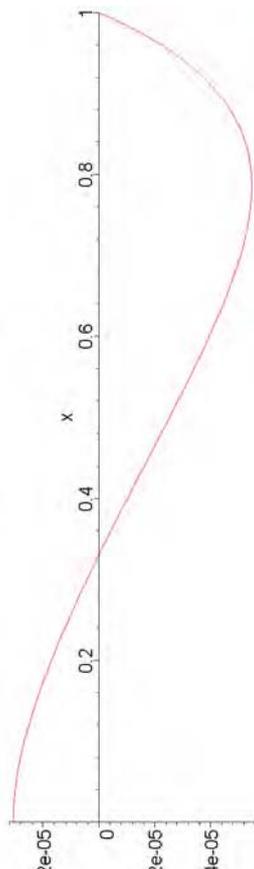
> evalf (subs (x=0, u1));
> evalf (subs (x=1/2, u1));
> evalf (subs (x=1, u1));
0.
-0.0006252244531
-0.001417753064

```

```

> plot({u2}, x=0..1);

```



```

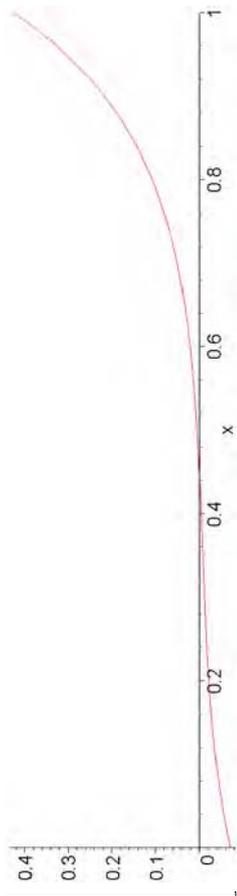
> evalf (subs (x=0, u2));
> evalf (subs (x=1/2, u2));
> evalf (subs (x=1, u2));
0.00003075351557
-0.00002528744864
-0.6 10^-12

```

```

> plot({T}, x=0..1);

```



```

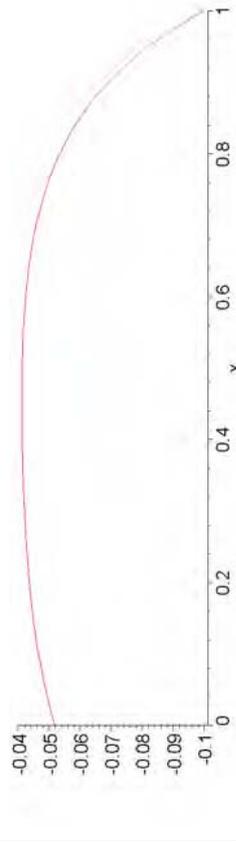
> evalf (subs (x=0, T));
> evalf (subs (x=1/2, T));
> evalf (subs (x=1, T));
-0.07160781606
0.00499880687
0.4253259226

```

```

> plot({N1}, x=0..1);

```



```

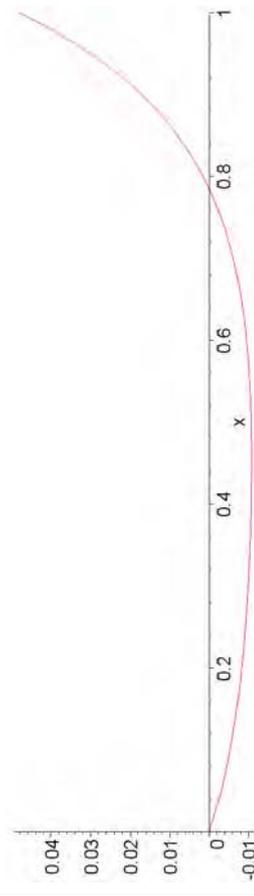
> evalf (subs (x=0, N1));
> evalf (subs (x=1/2, N1));
> evalf (subs (x=1, N1));
-0.05183561058
-0.04109046134
-0.1000000024

```

```

> plot({N2}, x=0..1);

```



```

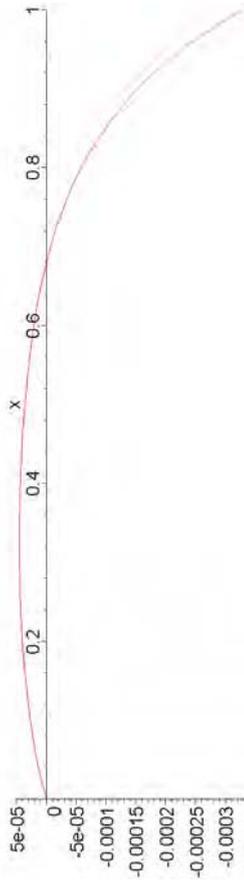
> evalf (subs (x=0, N2));
> evalf (subs (x=1/2, N2));

```

```
evalf(subs(x=1,M2));
```

```
0.  
-0.0107451493  
0.048164389
```

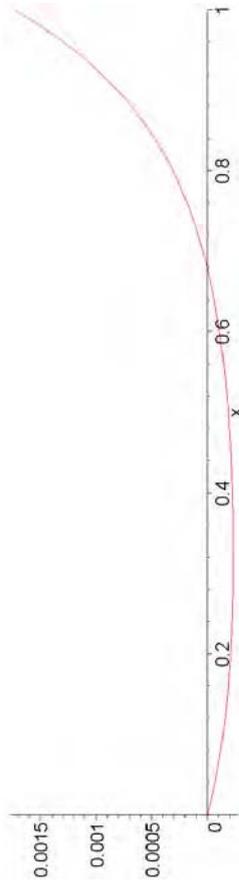
```
> plot({M1}, x=0..1);
```



```
> evalf(subs(x=0,M1));  
evalf(subs(x=1/2,M1));  
evalf(subs(x=1,M1));
```

```
0.  
0.00003578154044  
-0.0003295959878
```

```
> plot({-M2}, x=0..1);
```



```
> evalf(subs(x=0,-M2));  
evalf(subs(x=1/2,-M2));  
evalf(subs(x=1,-M2));
```

```
0.  
-0.0001884358158  
0.001735746629
```

```
> plot({Q1,Q2}, x=0..1);
```

```
0.003  
0.002  
0.001  
0  
-0.001  
-0.002  
-0.003  
-0.004
```

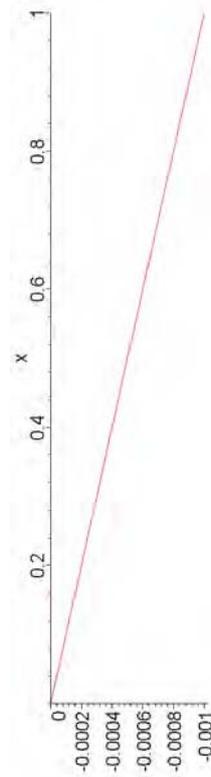
```
> evalf(subs(x=0,Q1));  
evalf(subs(x=1/4,Q1));  
evalf(subs(x=1,Q1));
```

```
-0.0005237048009  
-0.000158687126  
0.0029510430
```

```
> evalf(subs(x=0,Q2));  
evalf(subs(x=1/4,Q2));  
evalf(subs(x=1,Q2));
```

```
0.0005237048009  
-0.0000913128747  
-0.003951043126
```

```
> plot({Qges}, x=0..1);  
> evalf(subs(x=0,Qges));  
evalf(subs(x=1/4,Qges));  
evalf(subs(x=1,Qges));
```

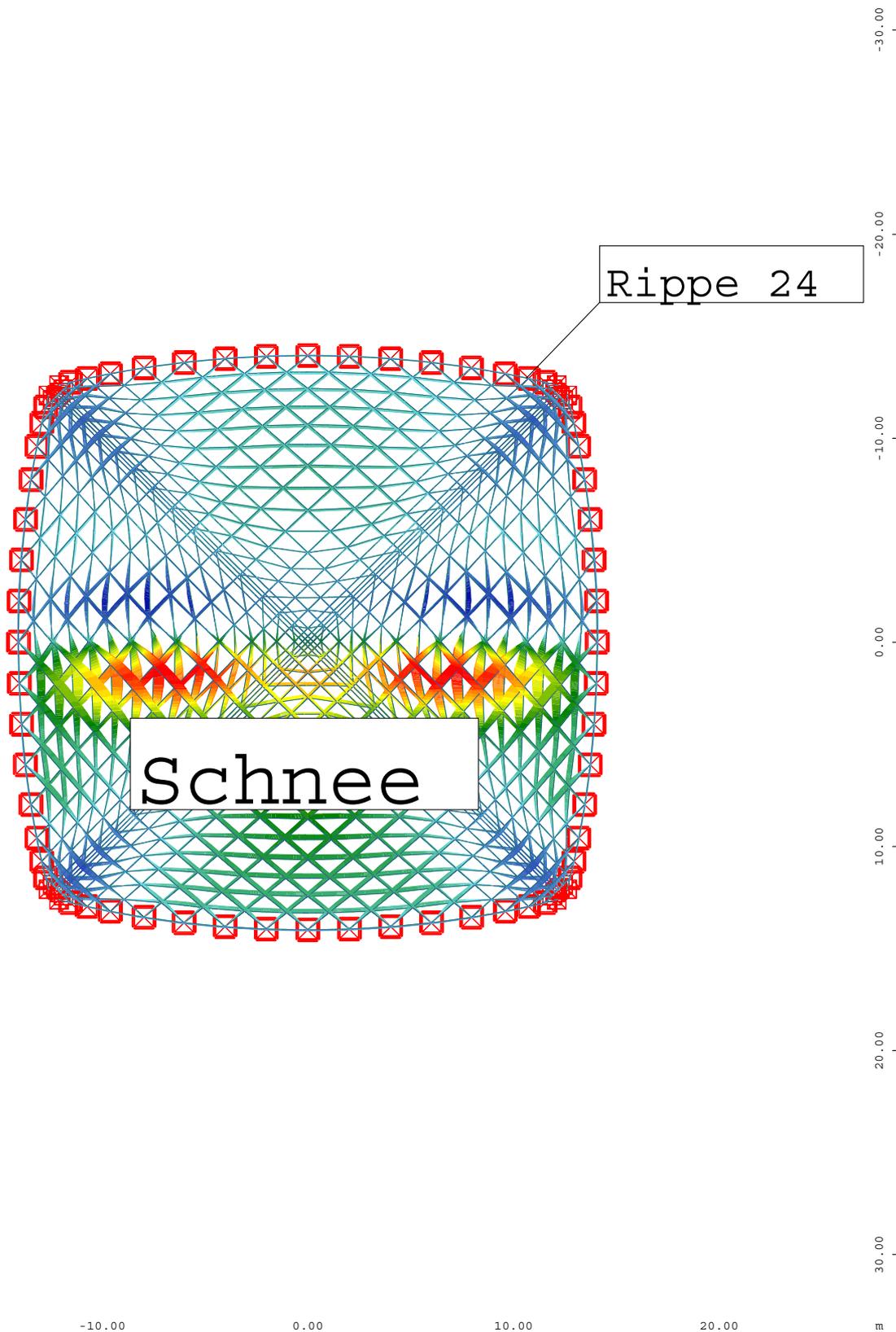
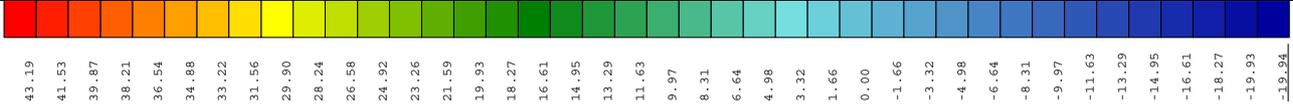


```
0.444494013 10^-14  
-0.0002500000017  
-0.0010000000174
```

ANHANG B

SOFISTIK ERGEBNISSE

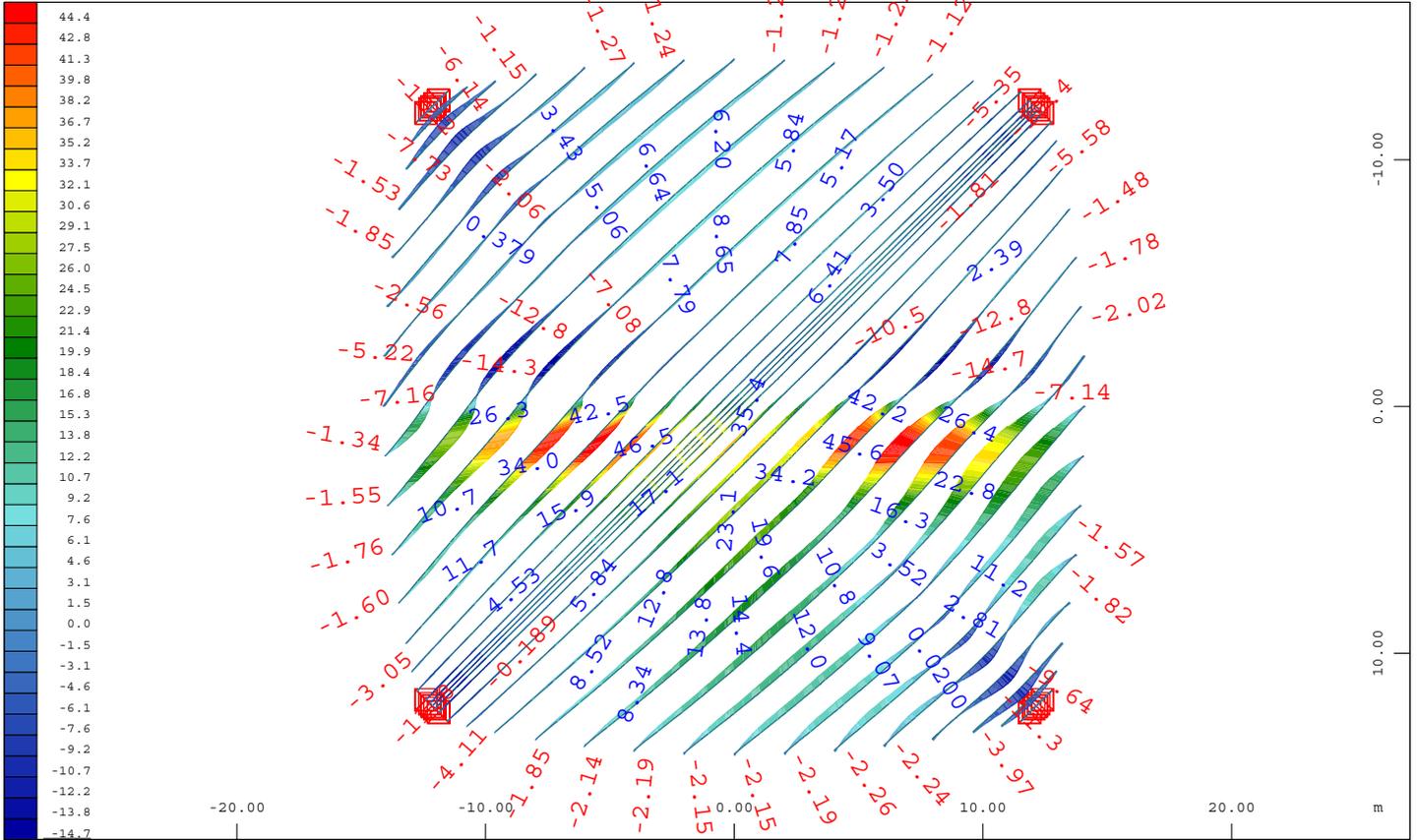
BRETRIPPENSCHALE (KAPITEL 6)



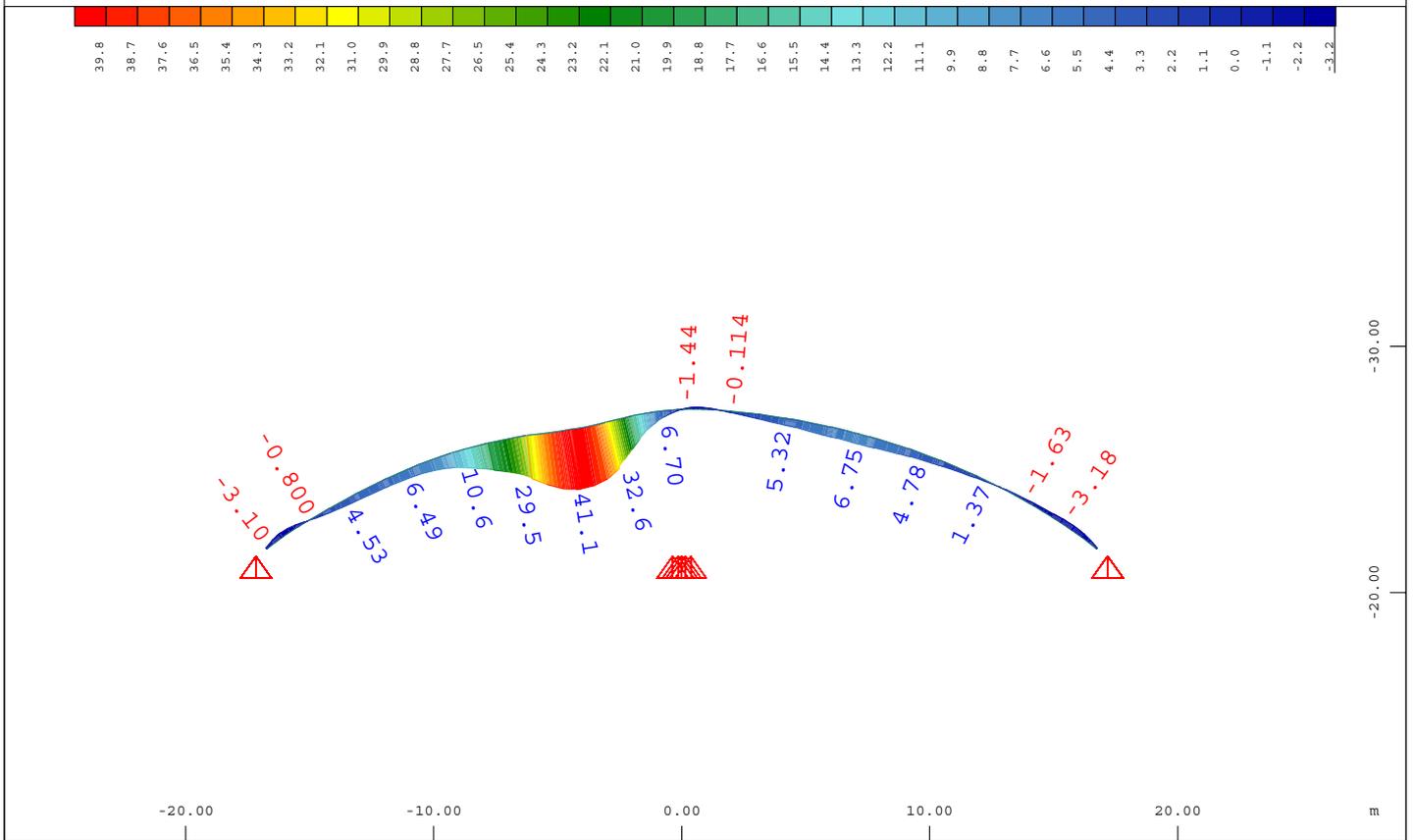
Z
Y

Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Stabverschiebung z, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 70.0 mm (Min=-19.9) (Max=46.5)

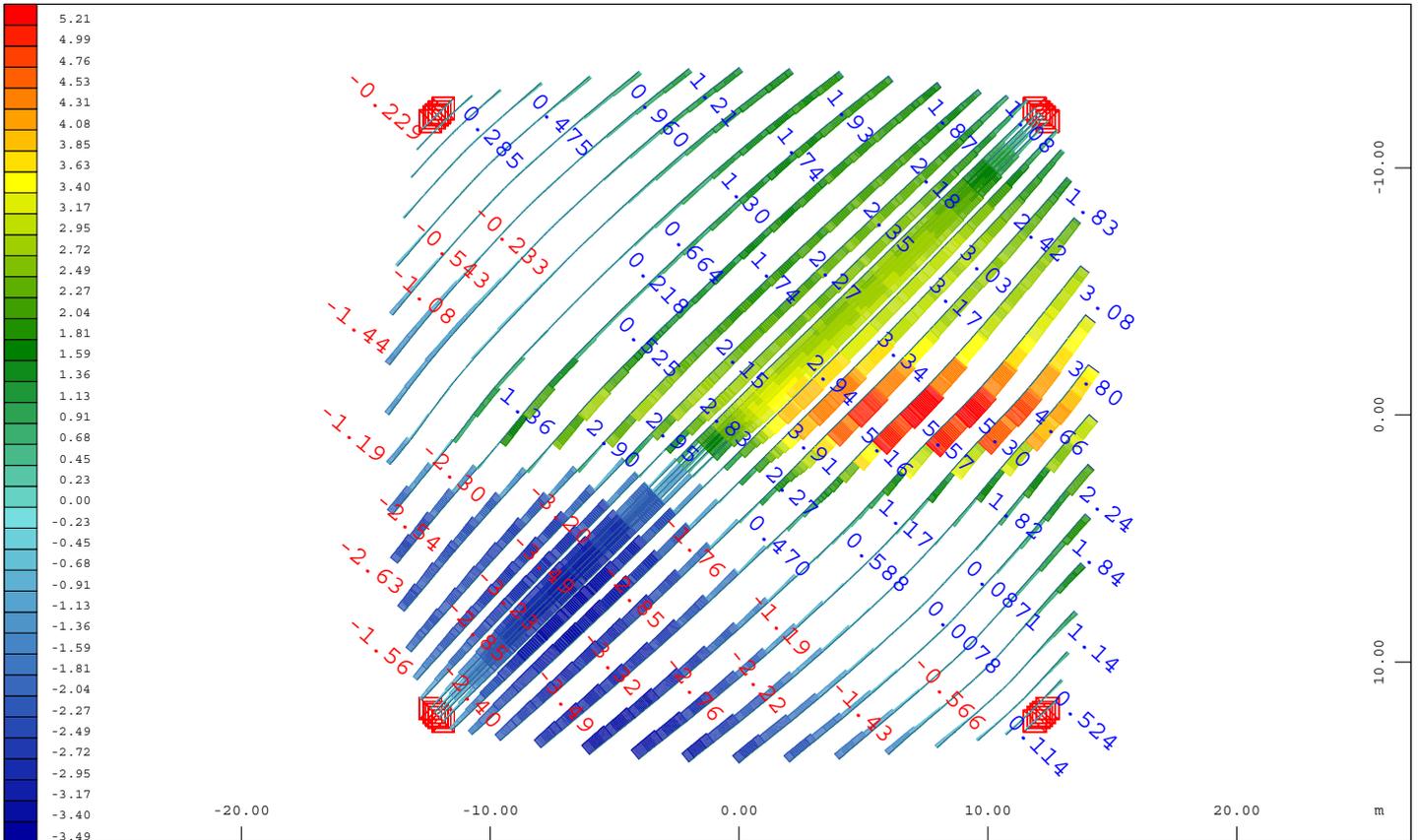
M 1 : 300



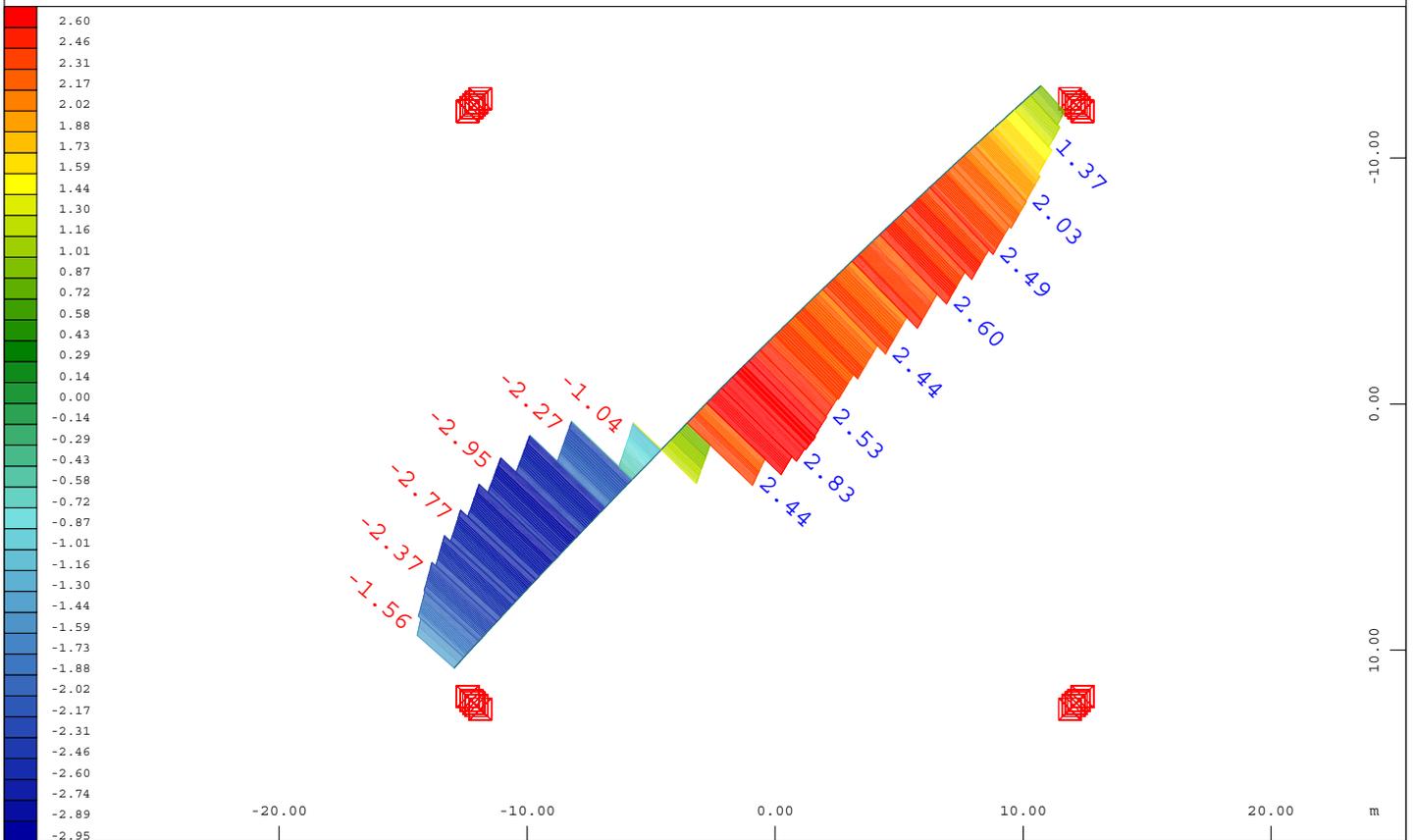
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 1
 Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
 Stabverschiebung z, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 50.0 mm (Min=-14.7) (Max=46.5) M 1 : 300



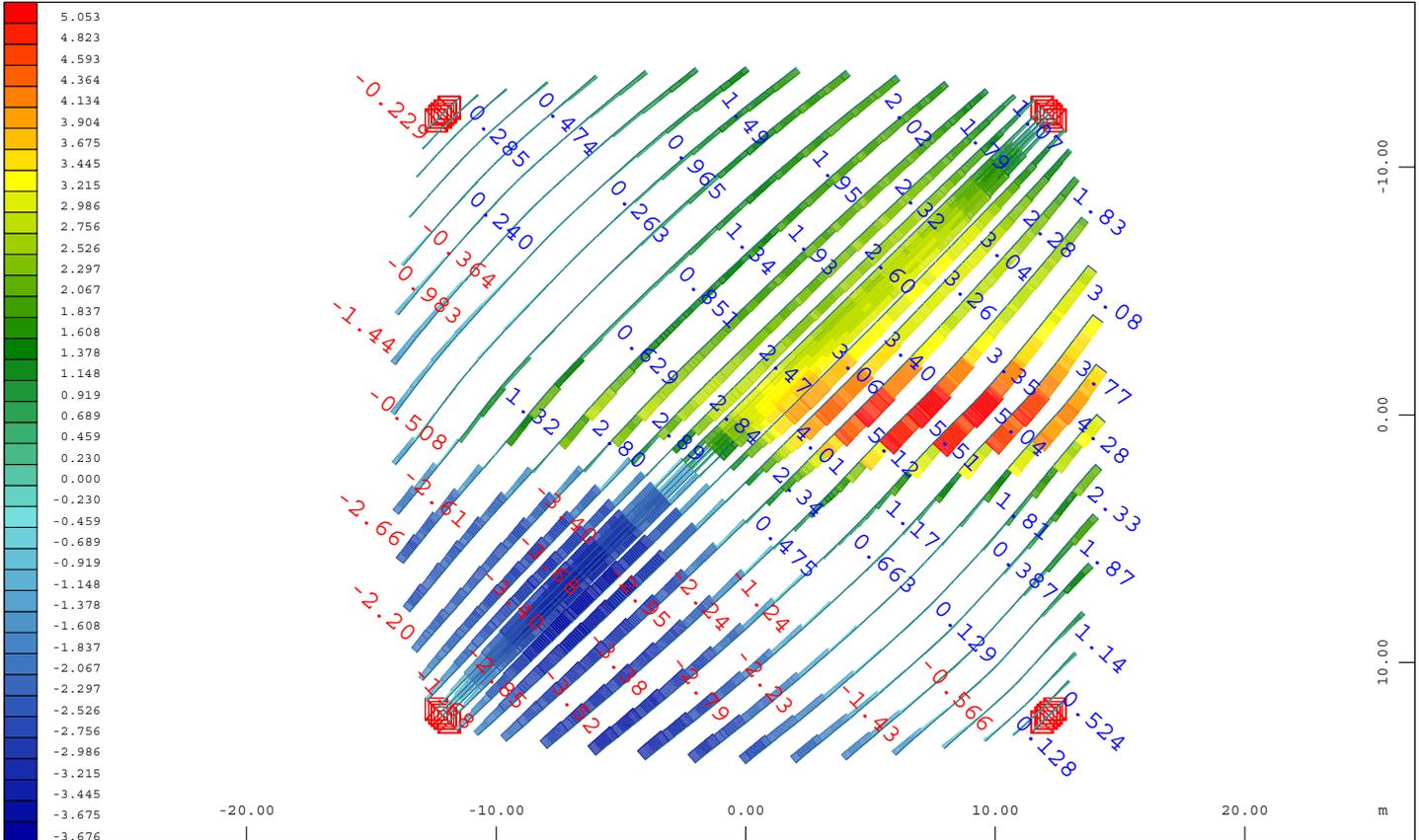
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 124
 Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
 Stabverschiebung z, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 50.0 mm (Min=-3.18) (Max=41.1) M 1 : 300
 X * 0.707
 Y * 0.707



Systemausschnitt Stäbe Gruppe 1 M 1 : 300
Z-X
Y
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Stabverschiebung x, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 20.0 mm (Min=-3.49) (Max=5.57)



Systemausschnitt Stäbe Gruppe 124 M 1 : 300
Z-X
Y
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Stabverschiebung x, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 2.00 mm (Min=-2.95) (Max=2.83)



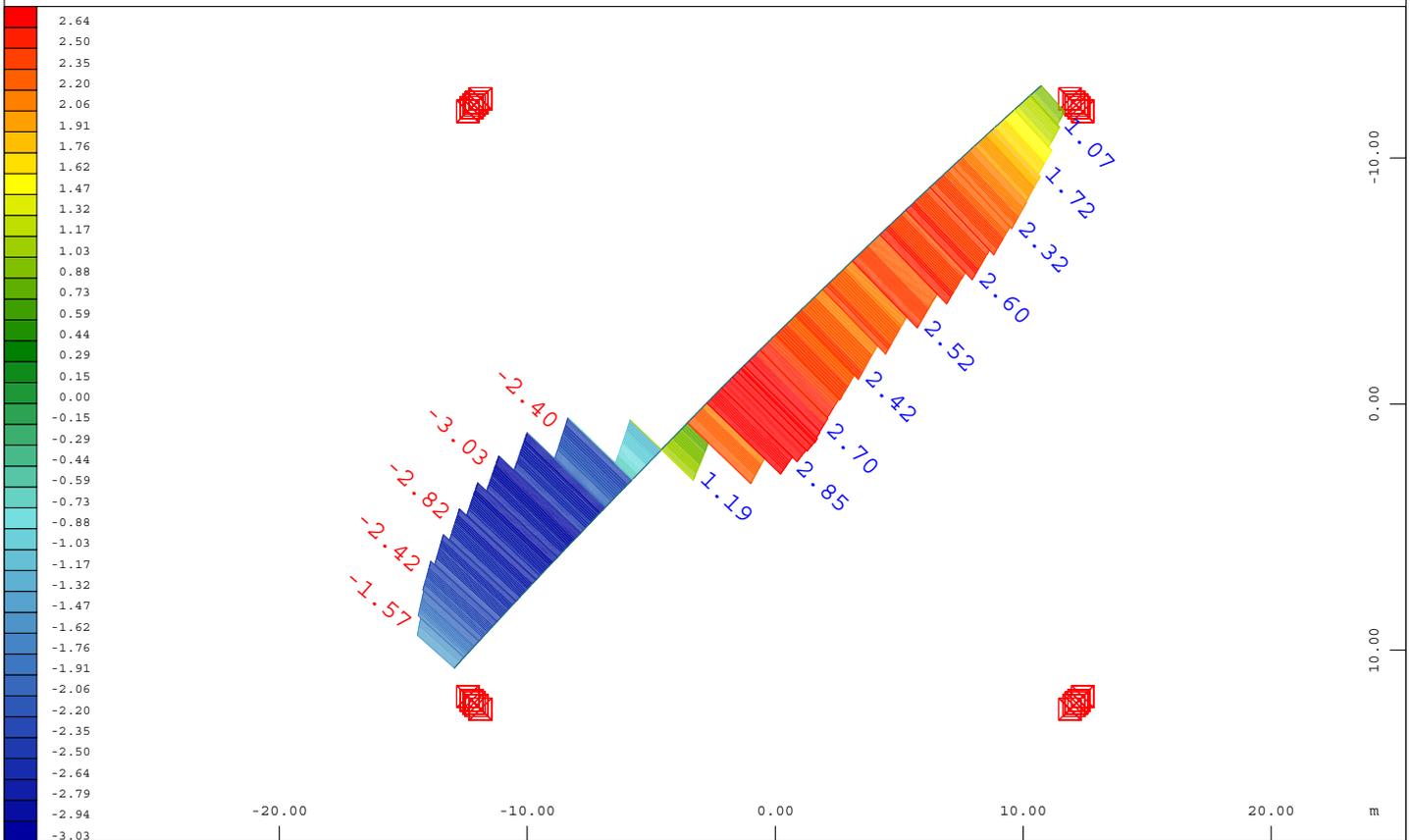
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 4

M 1 : 300

Z
Y
X

Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung

Stabverschiebung x, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 20.0 mm (Min=-3.68) (Max=5.51)



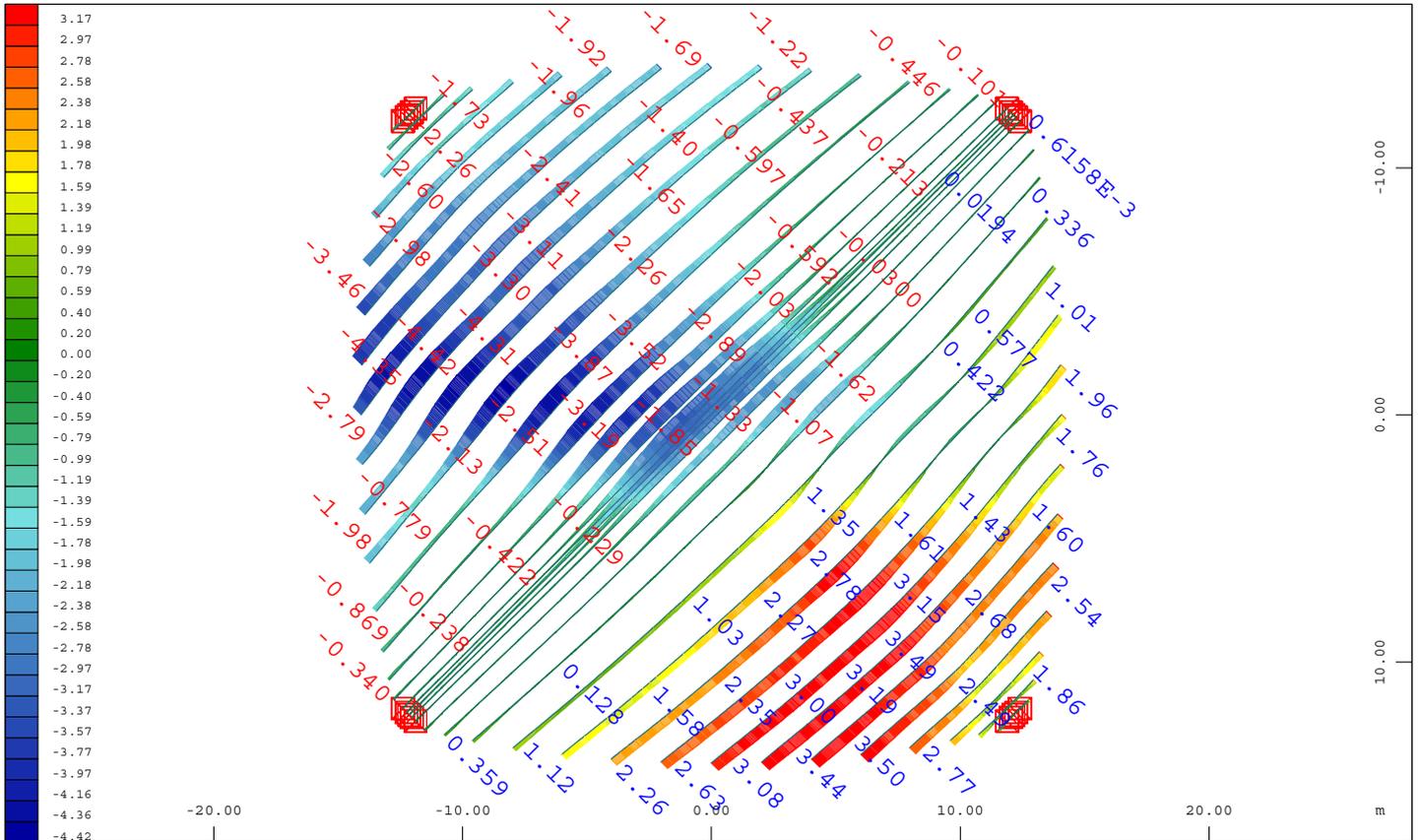
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 424

M 1 : 300

Z
Y
X

Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung

Stabverschiebung x, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 2.00 mm (Min=-3.03) (Max=2.85)

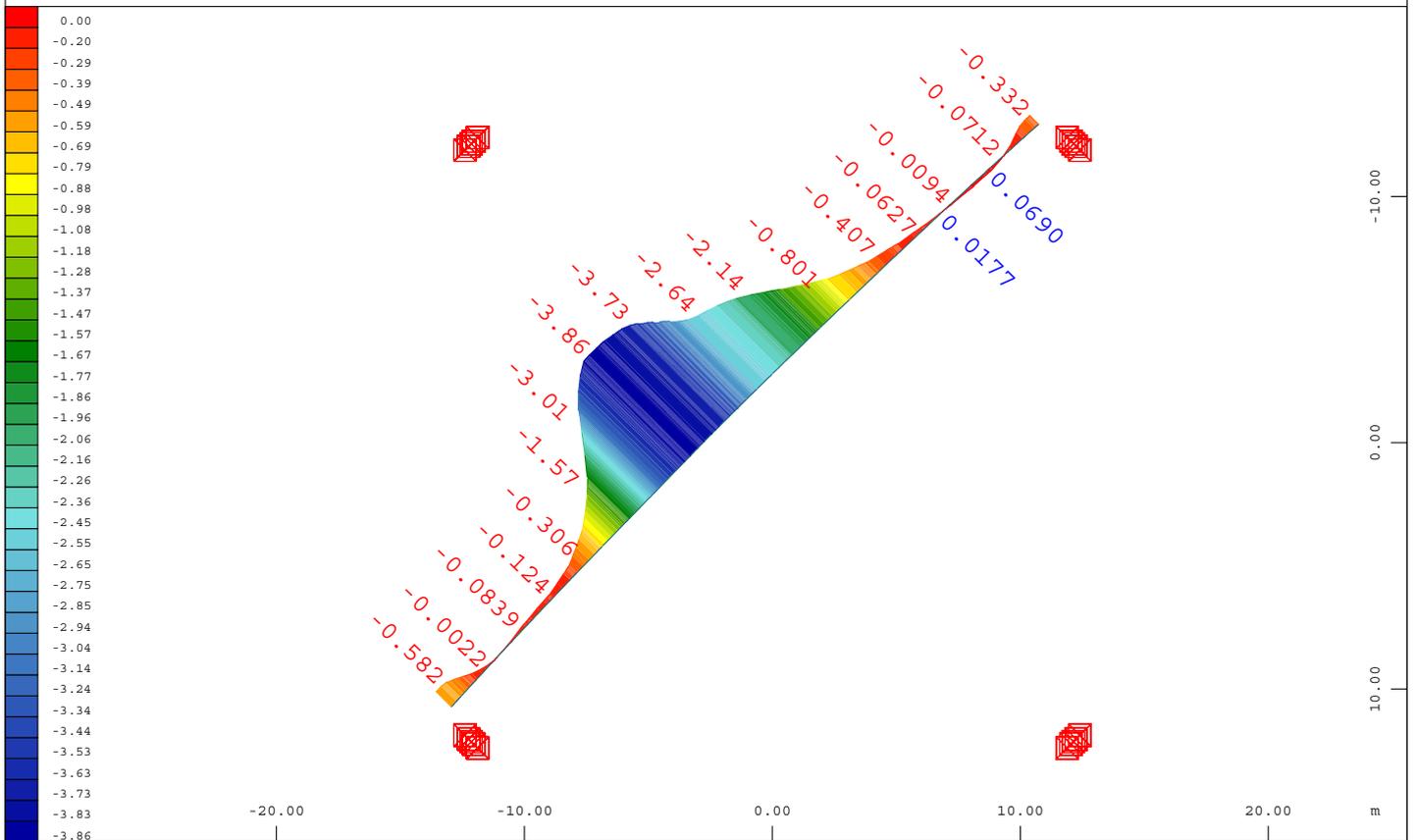


Systemausschnitt Stäbe Gruppe 1

M 1 : 300

Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung

Stabverschiebung y, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 20.0 mm (Min=-4.42) (Max=3.51)

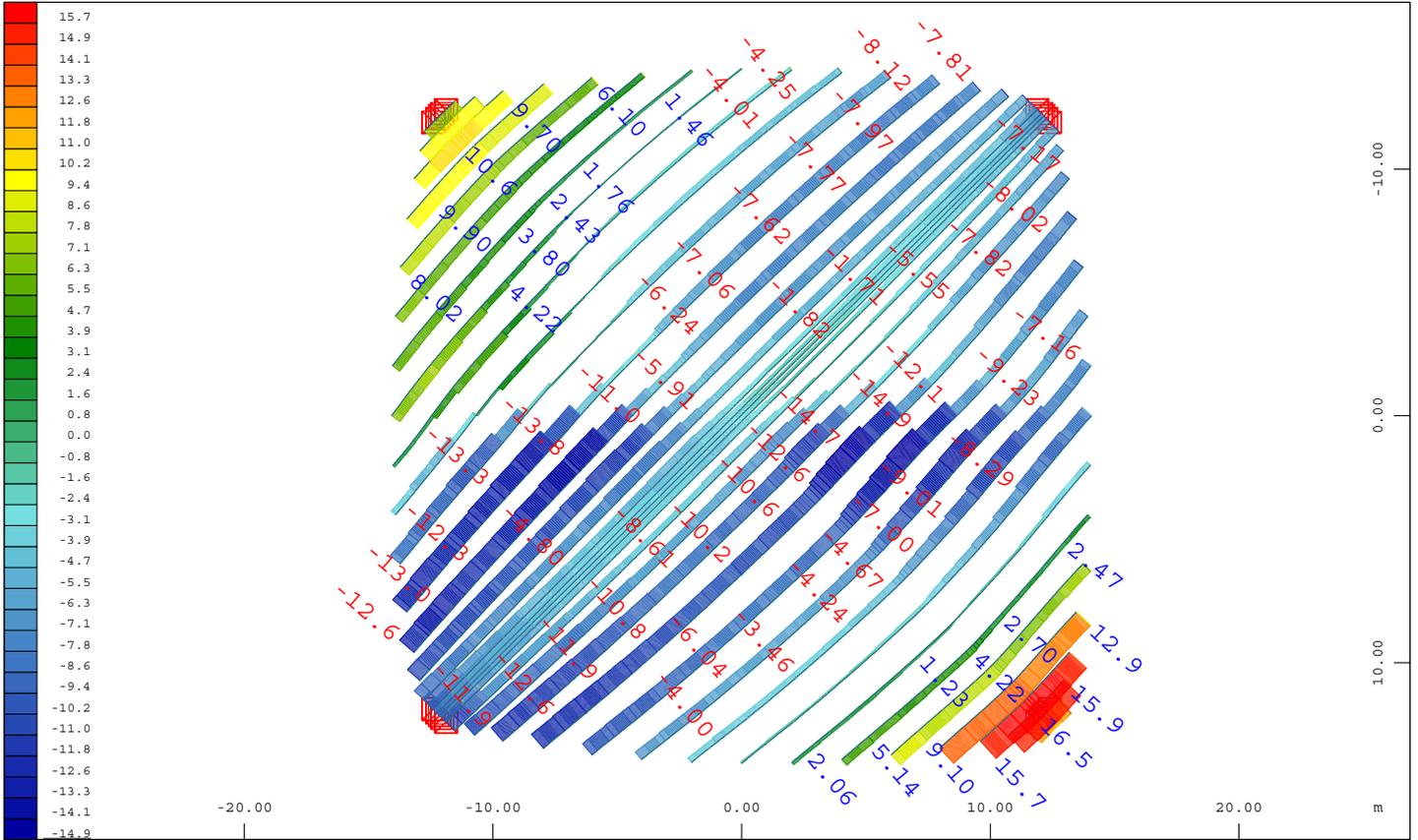


Systemausschnitt Stäbe Gruppe 124

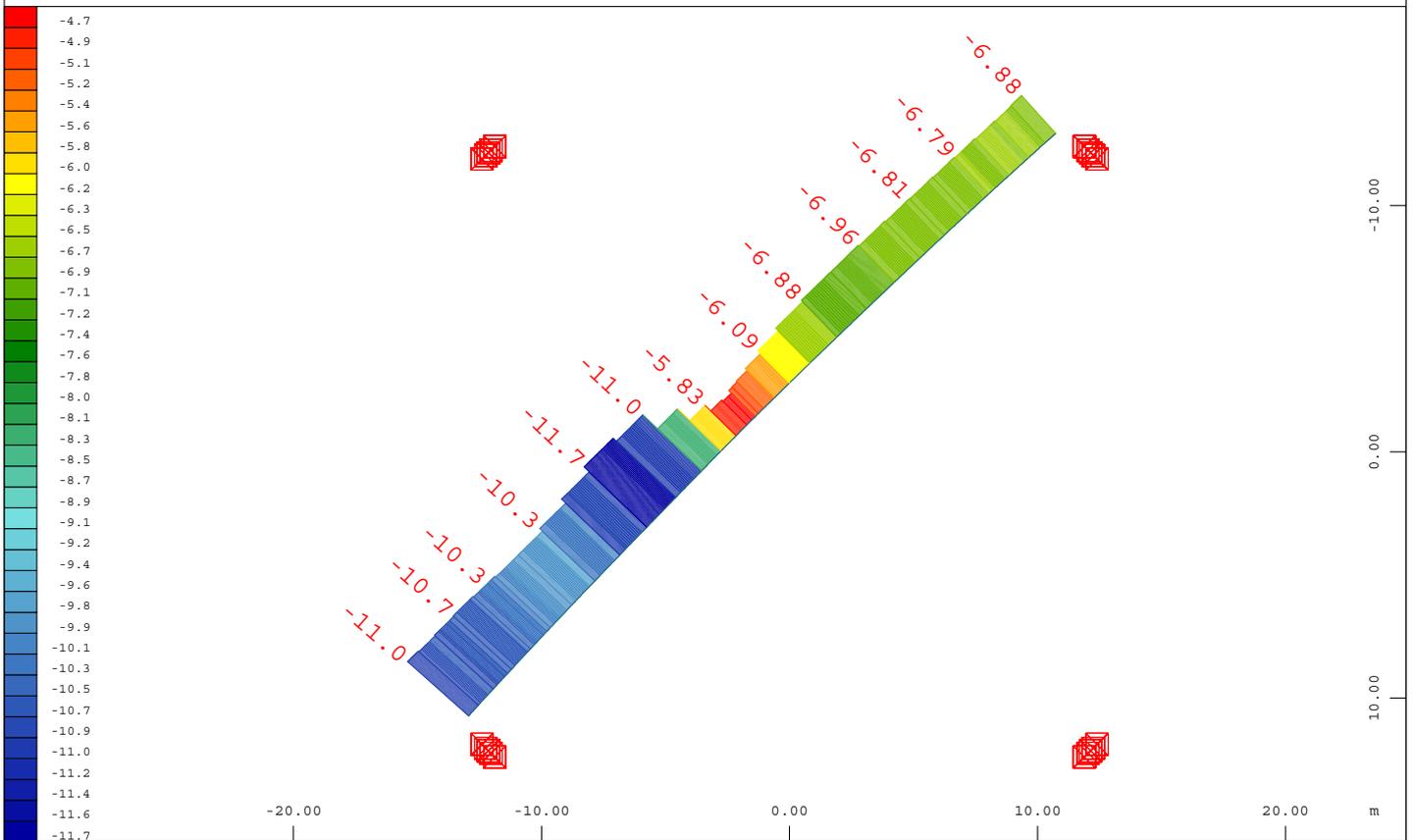
M 1 : 300

Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung

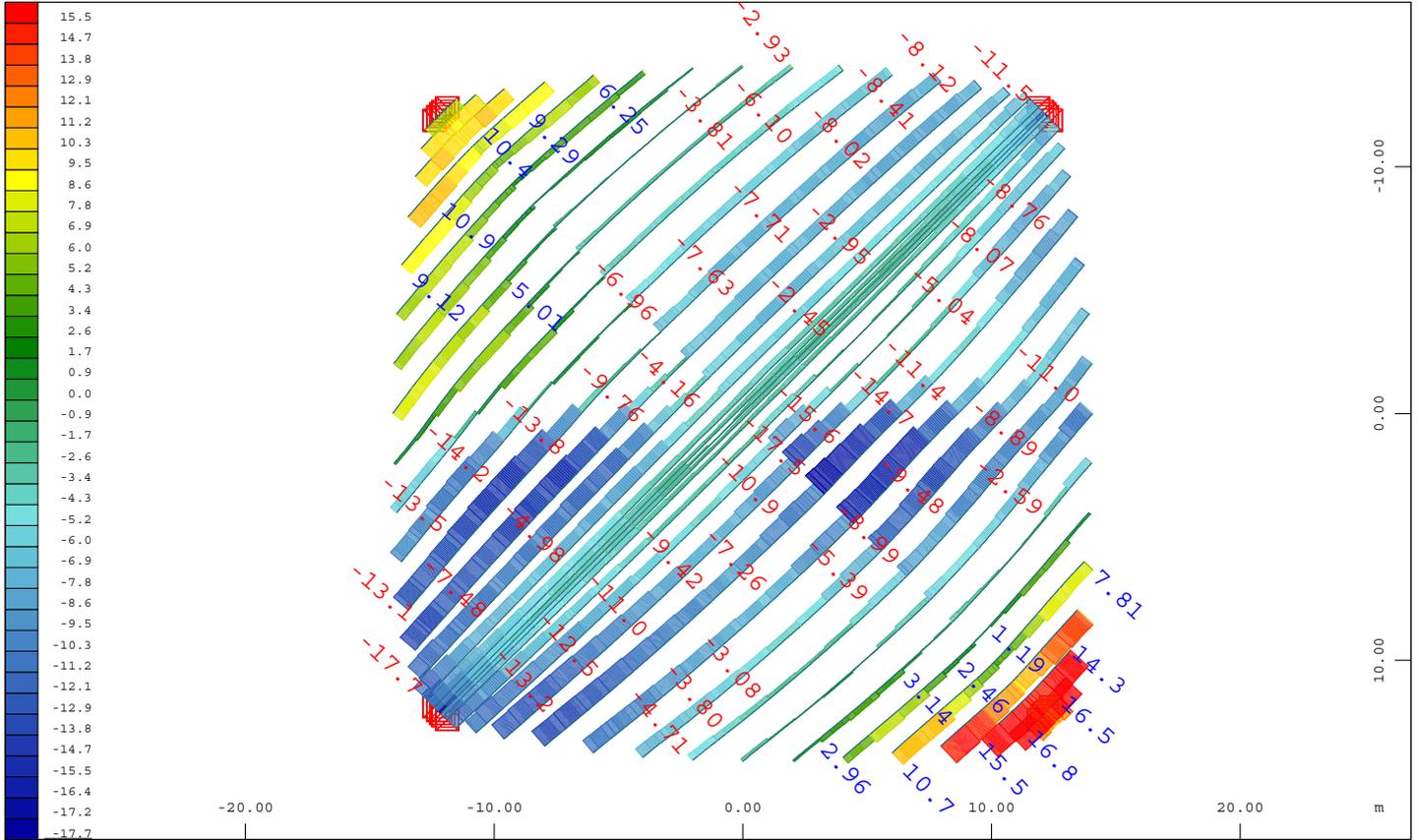
Stabverschiebung y, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 2.00 mm (Min=-3.86) (Max=0.0691)



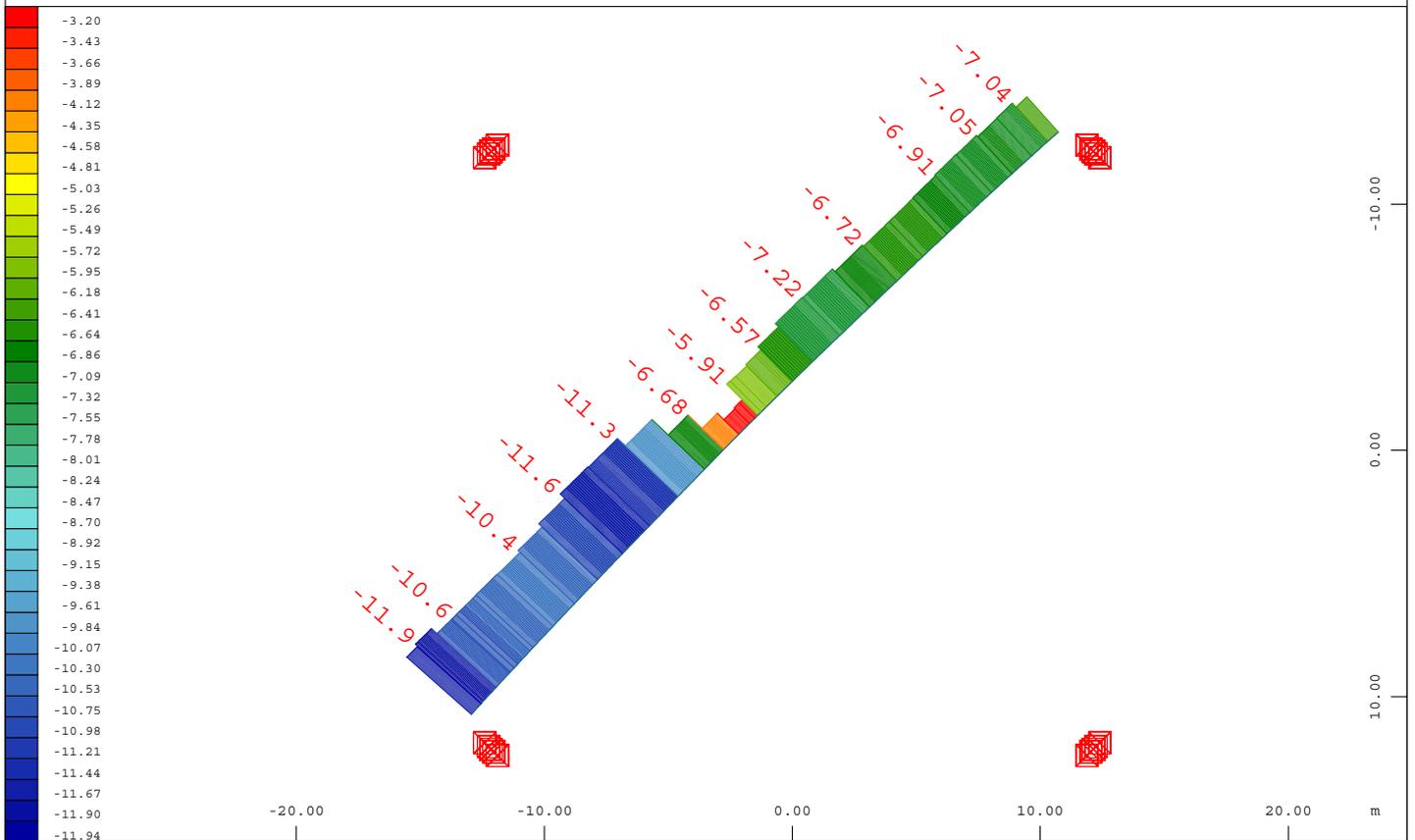
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 1 M 1 : 300
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Normalkraft der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 50.0 kN (Min=-14.9) (Max=16.5)



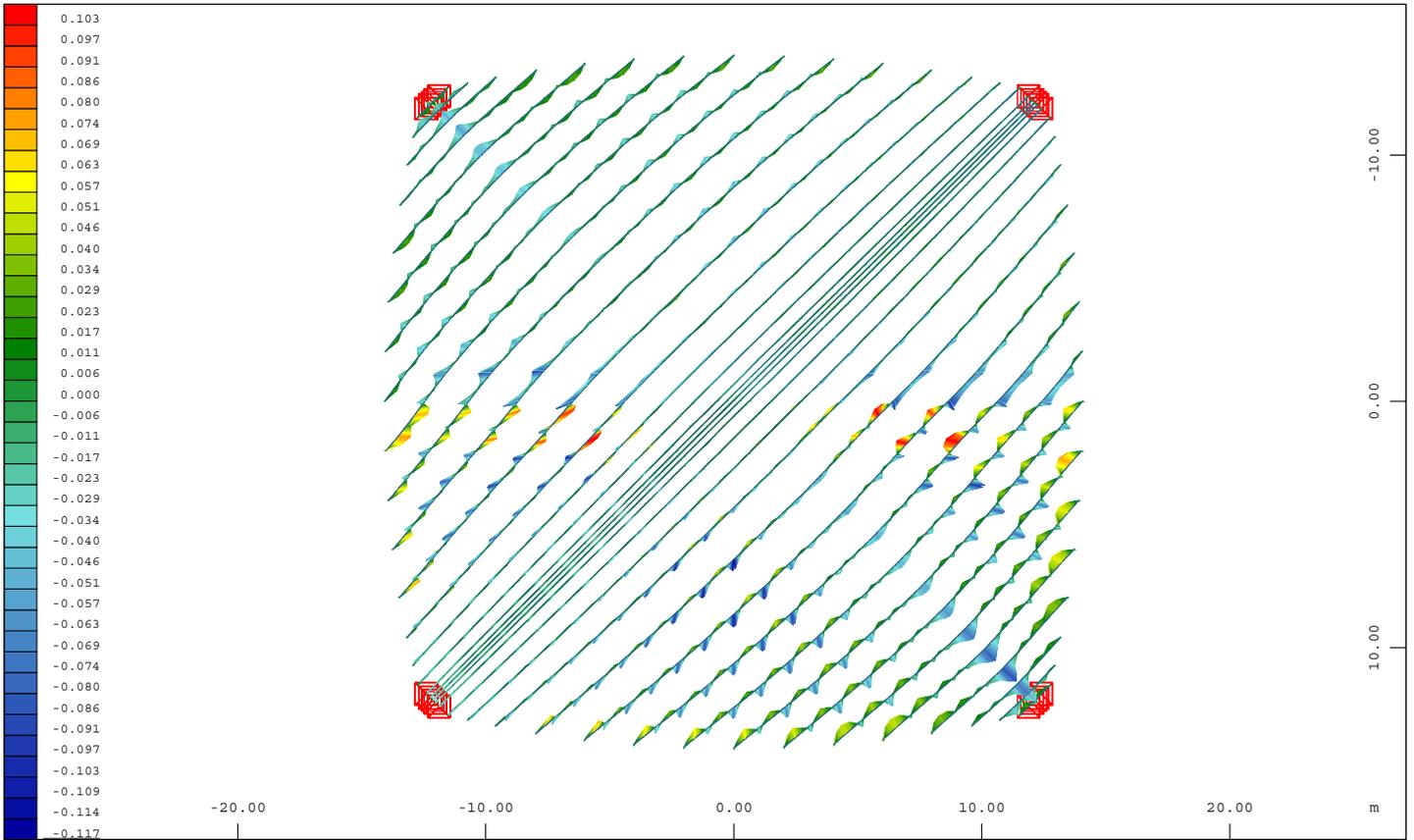
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 124 M 1 : 300
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Normalkraft der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 10.0 kN (Min=-11.7) (Max=-4.49)



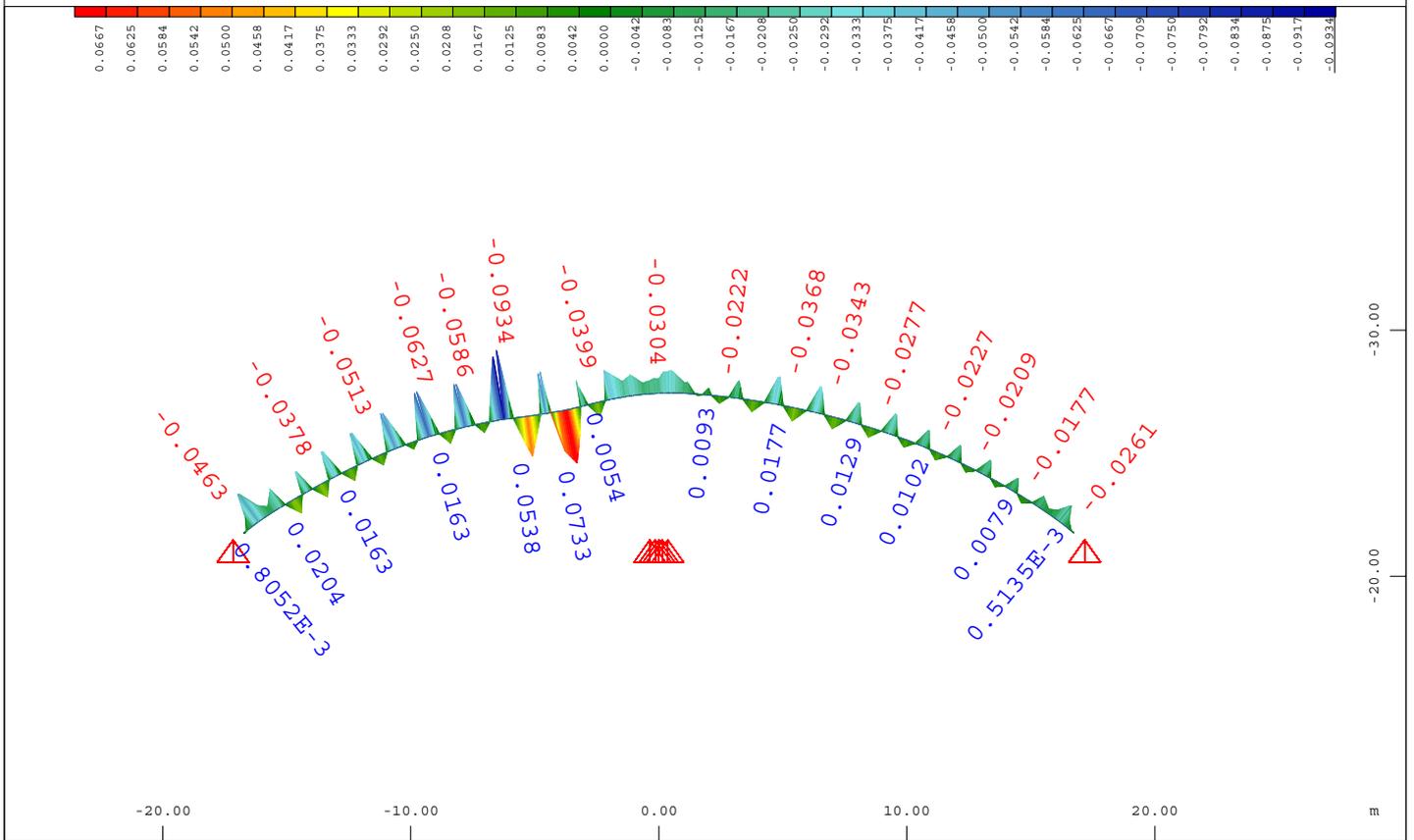
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 4 M 1 : 300
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Normalkraft der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 50.0 kN (Min=-17.7) (Max=16.8)



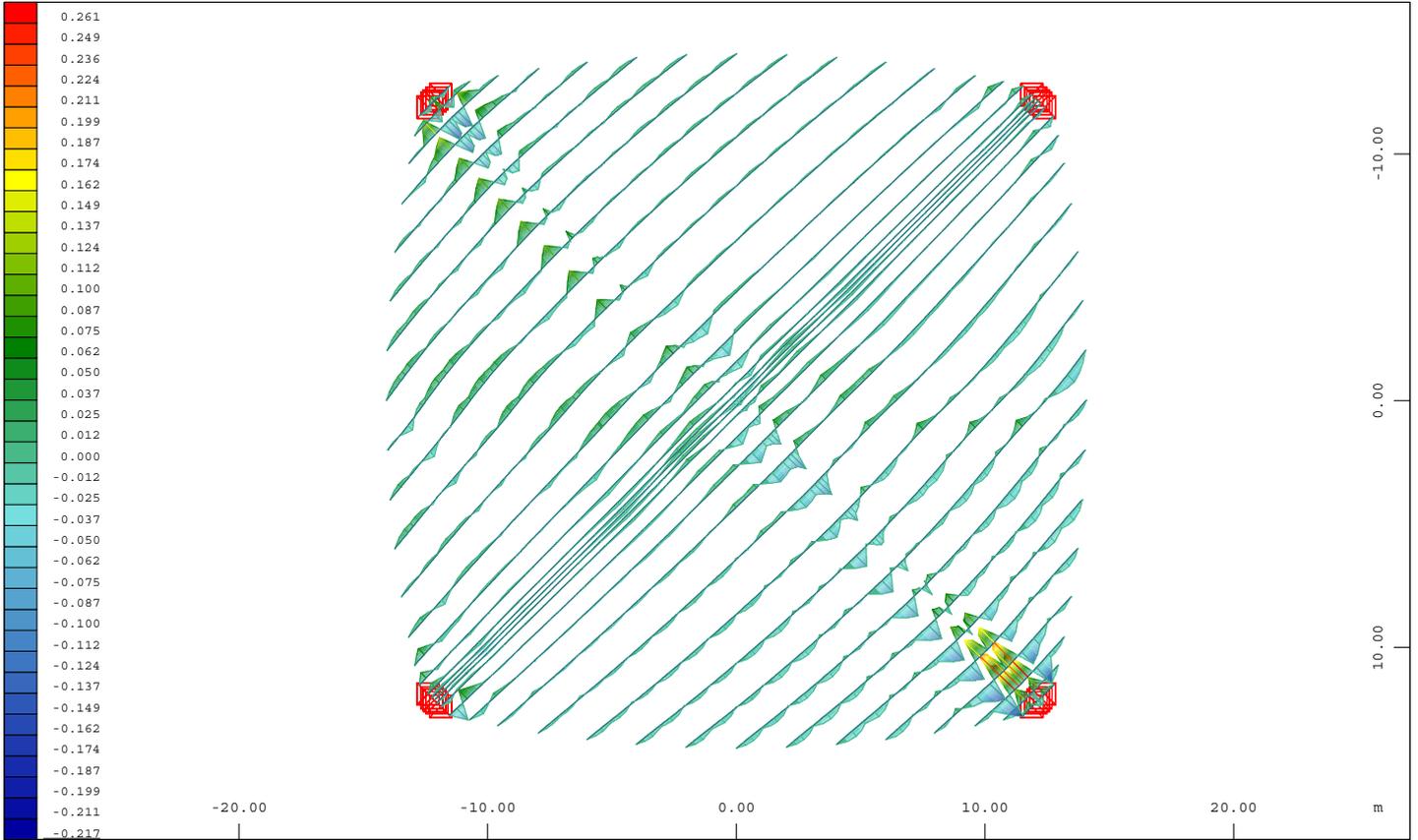
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 424 M 1 : 300
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Normalkraft der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 10.0 kN (Min=-11.9) (Max=-2.79)



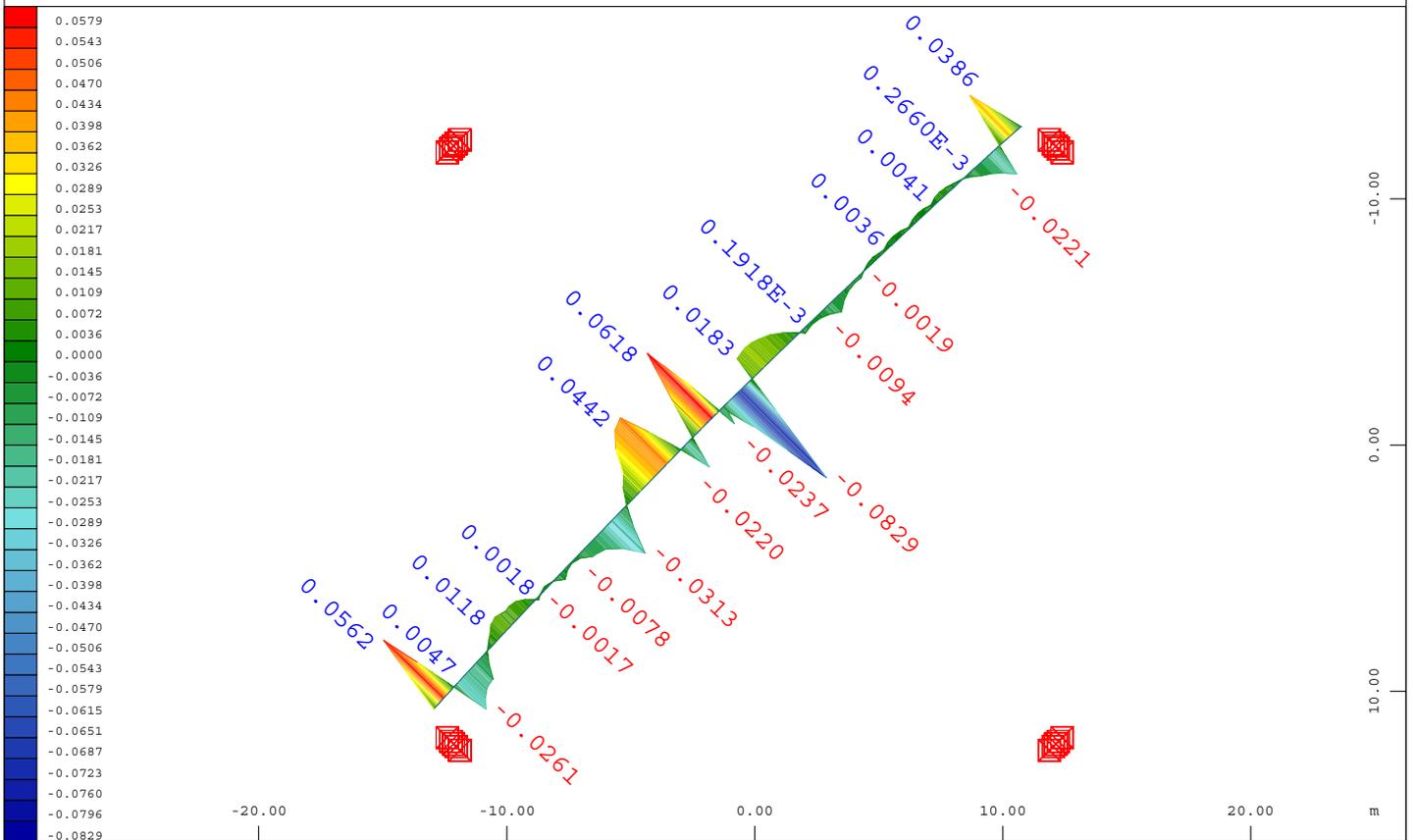
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 1 4 M 1 : 300
 Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
 Biegemoment My der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 0.200 kNm (Min=-0.117) (Max=0.111)



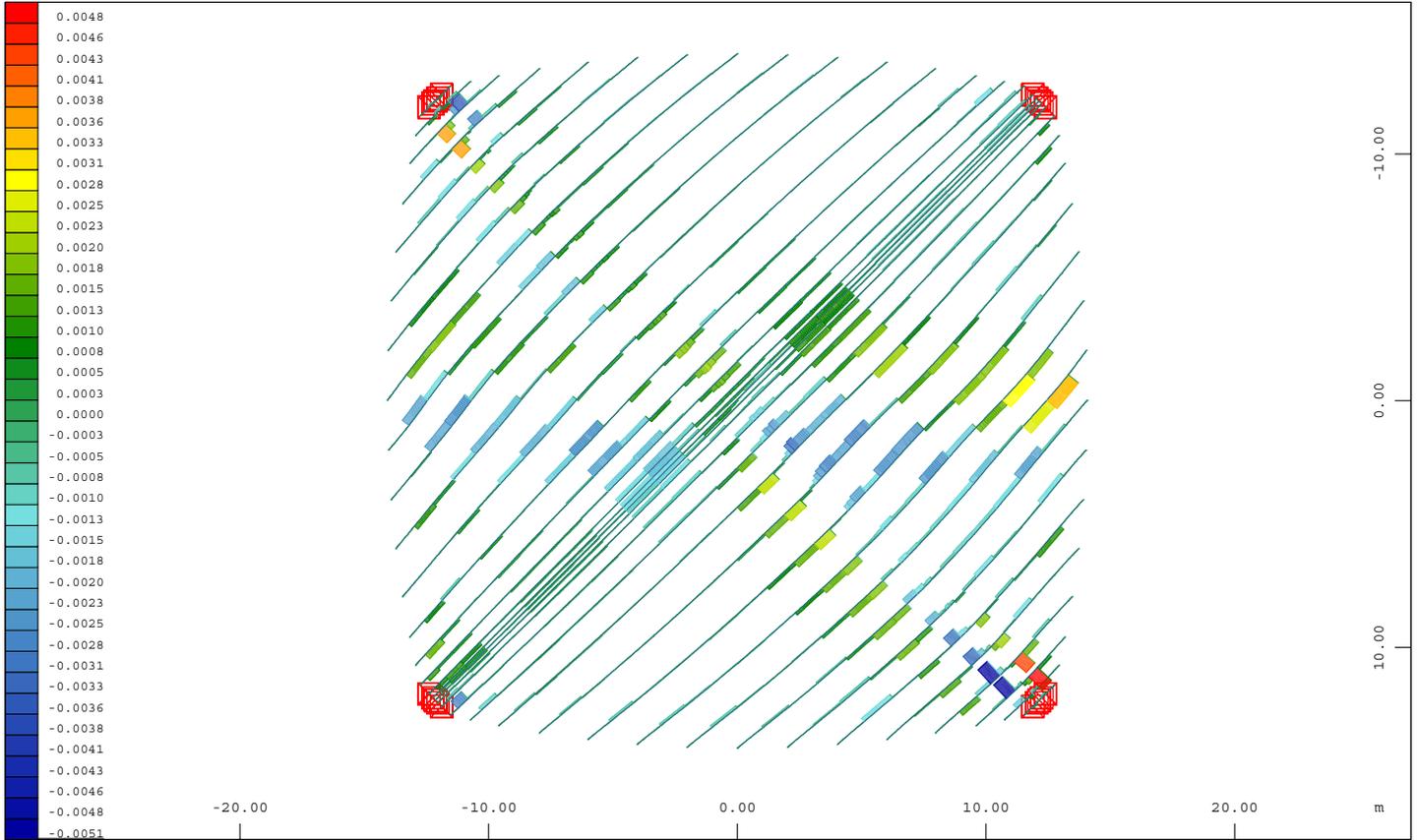
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 124 424 M 1 : 300
 Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung X * 0.707
 Biegemoment My der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 0.100 kNm (Min=-0.0934) (Max=0.0733) Y * 0.707



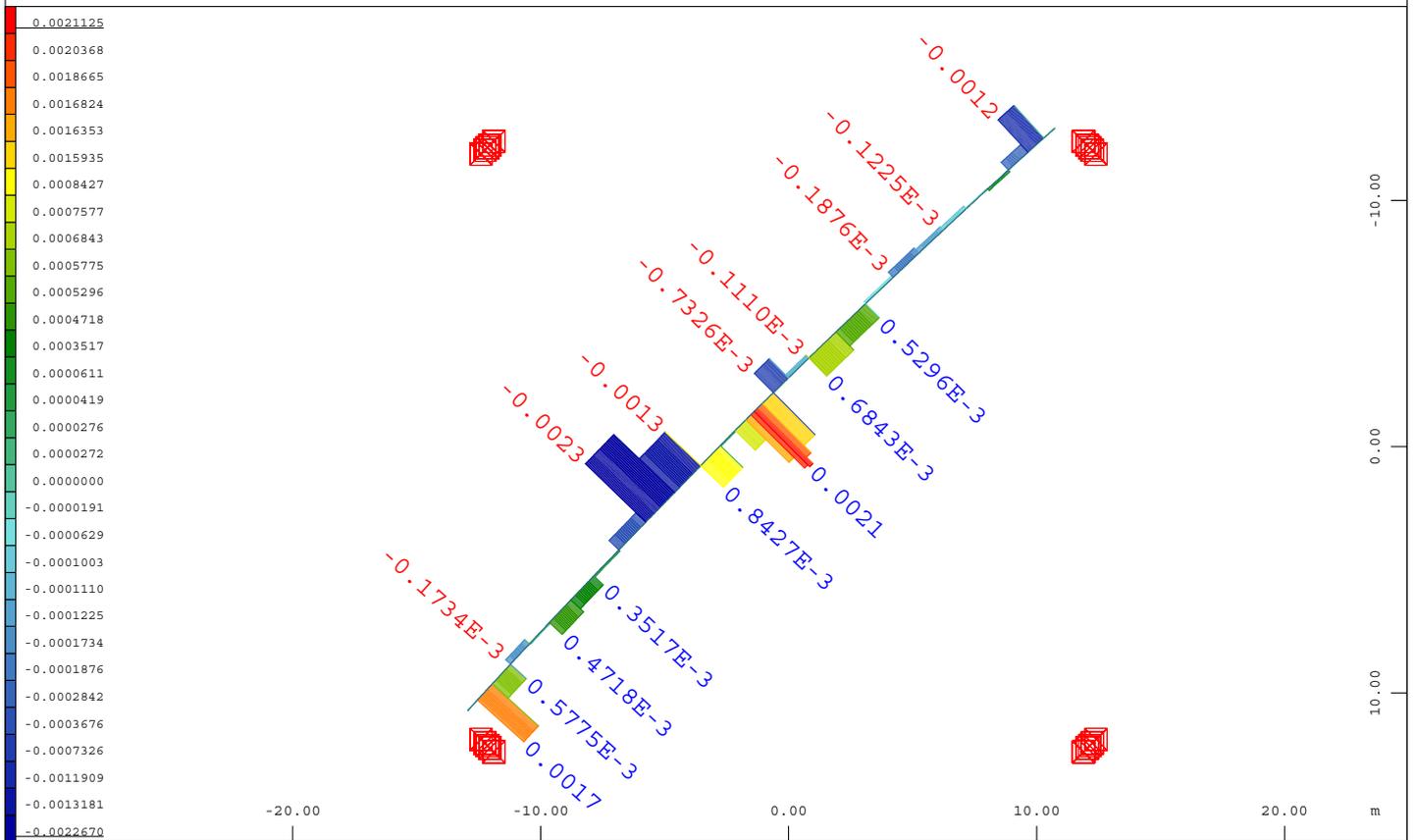
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 4
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Biegemoment Mz der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 0.500 kNm (Min=-0.217) (Max=0.280) M 1 : 300



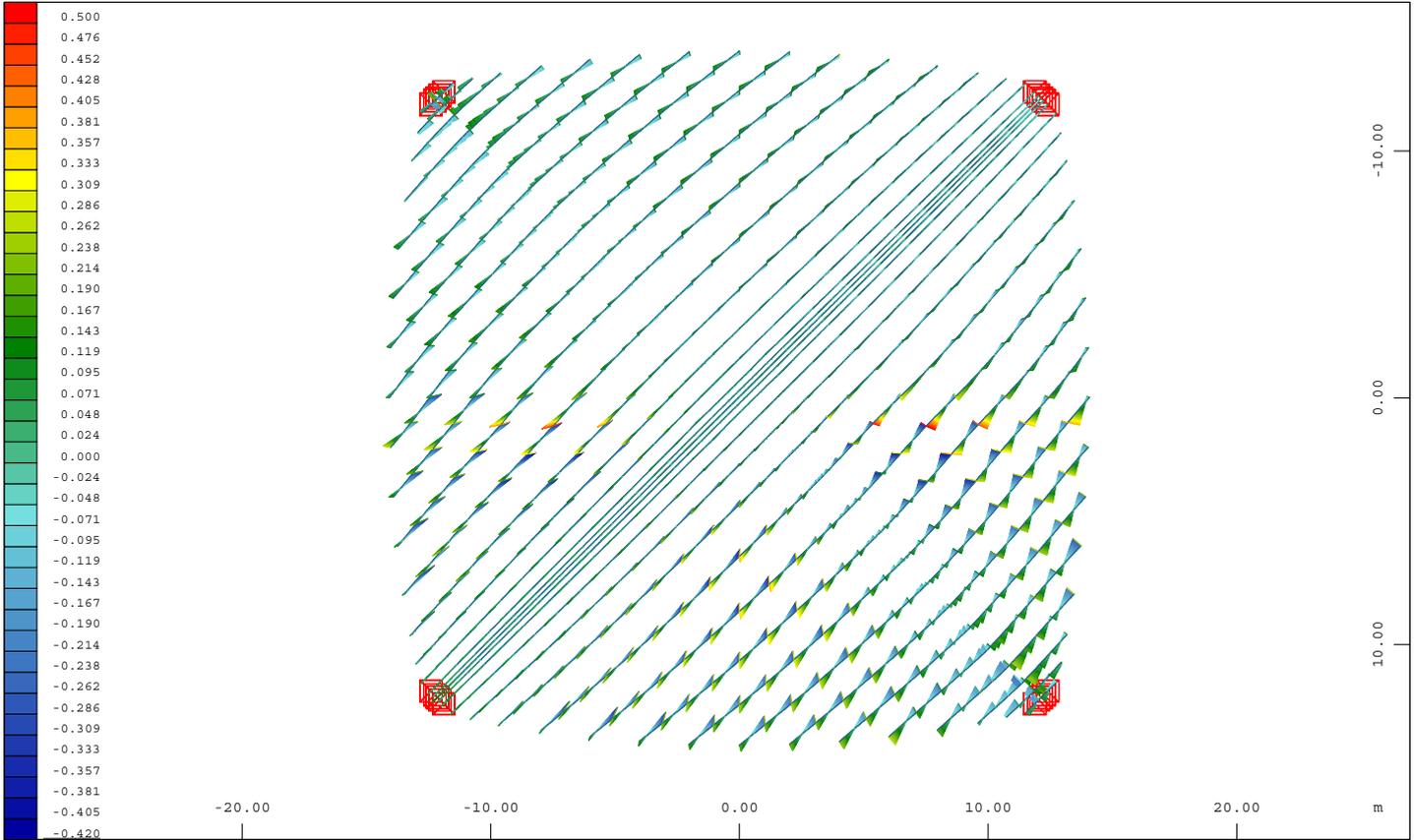
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 424
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Biegemoment Mz der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 0.0500 kNm (Min=-0.0829) (Max=0.0618) M 1 : 300



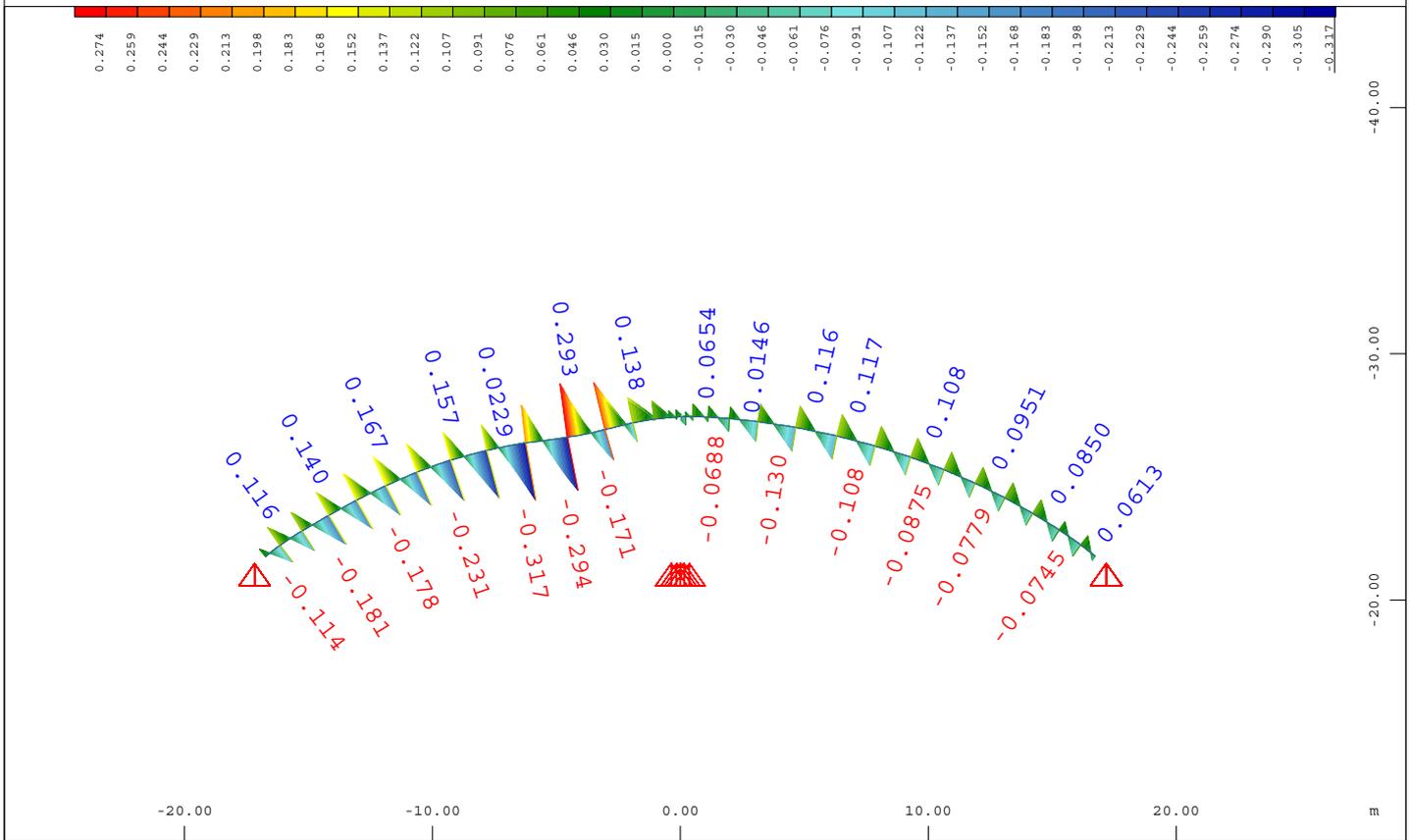
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 4 M 1 : 300
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Torsionsmoment Mt der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 0.0200 kNm (Min=-0.0051)



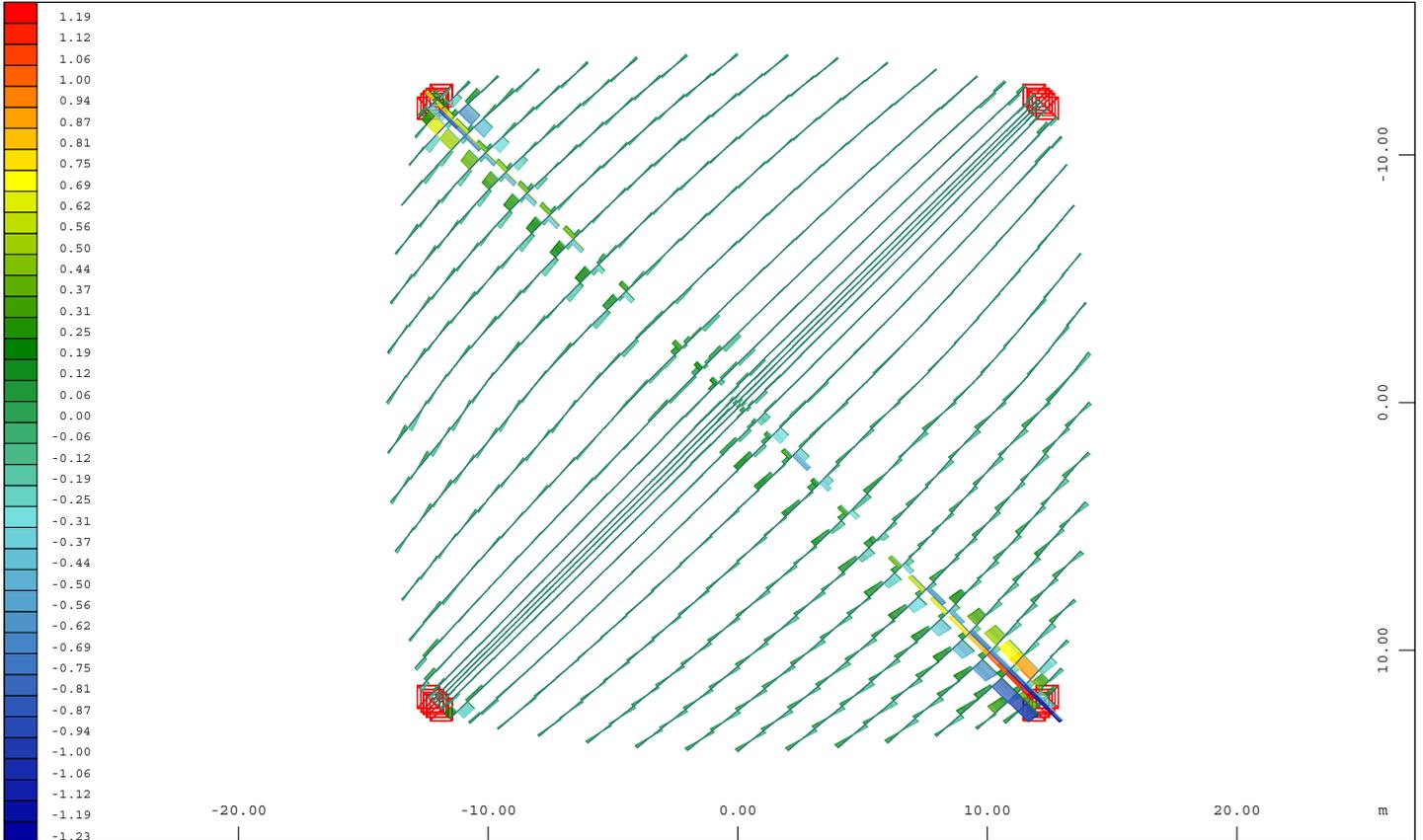
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 424 M 1 : 300
Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
Torsionsmoment Mt der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 0.0020 kNm (Min=-0.0023)



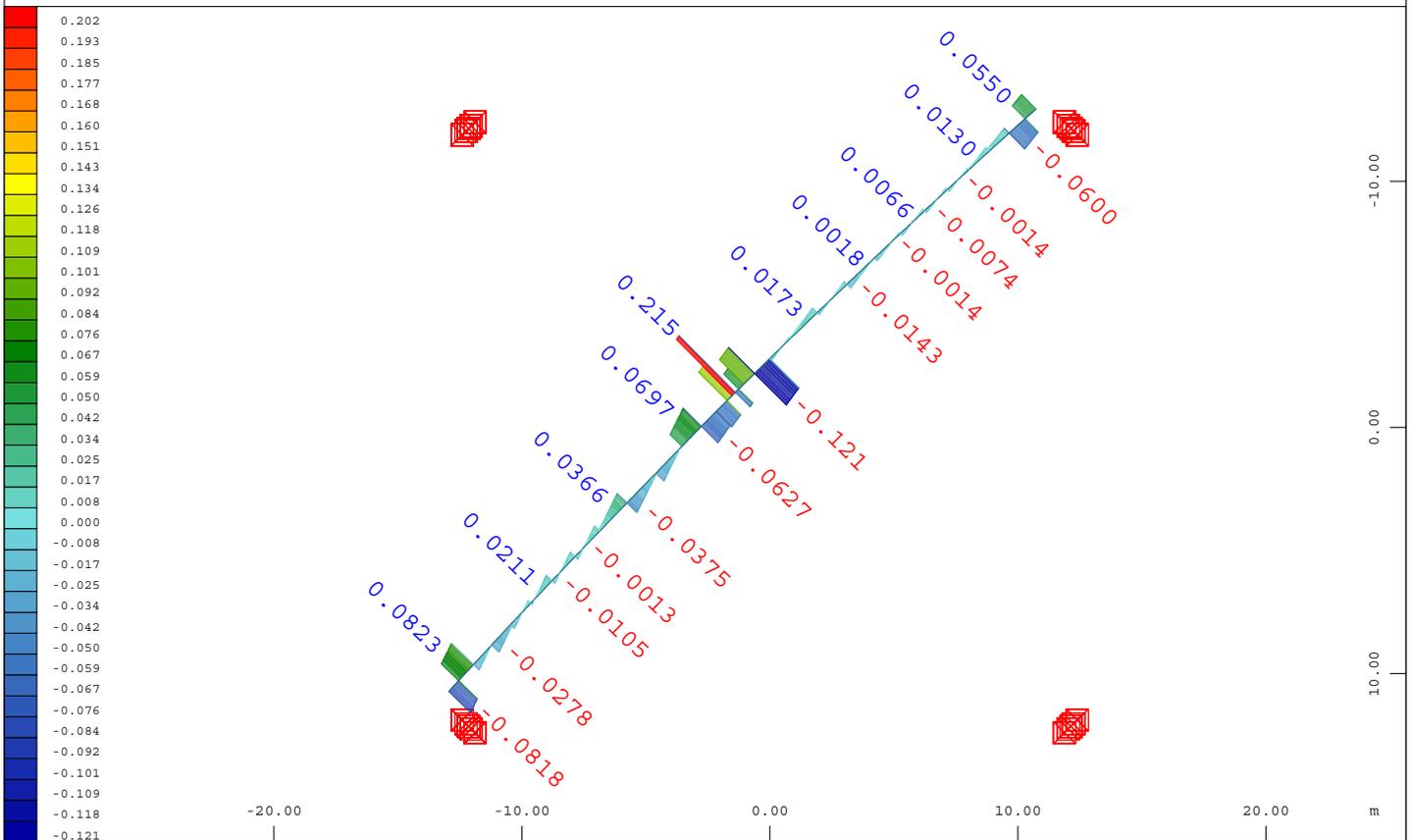
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 1 4 M 1 : 300
 Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
 Querkraft Vz der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 1.00 kN (Min=-0.420) (Max=0.532)



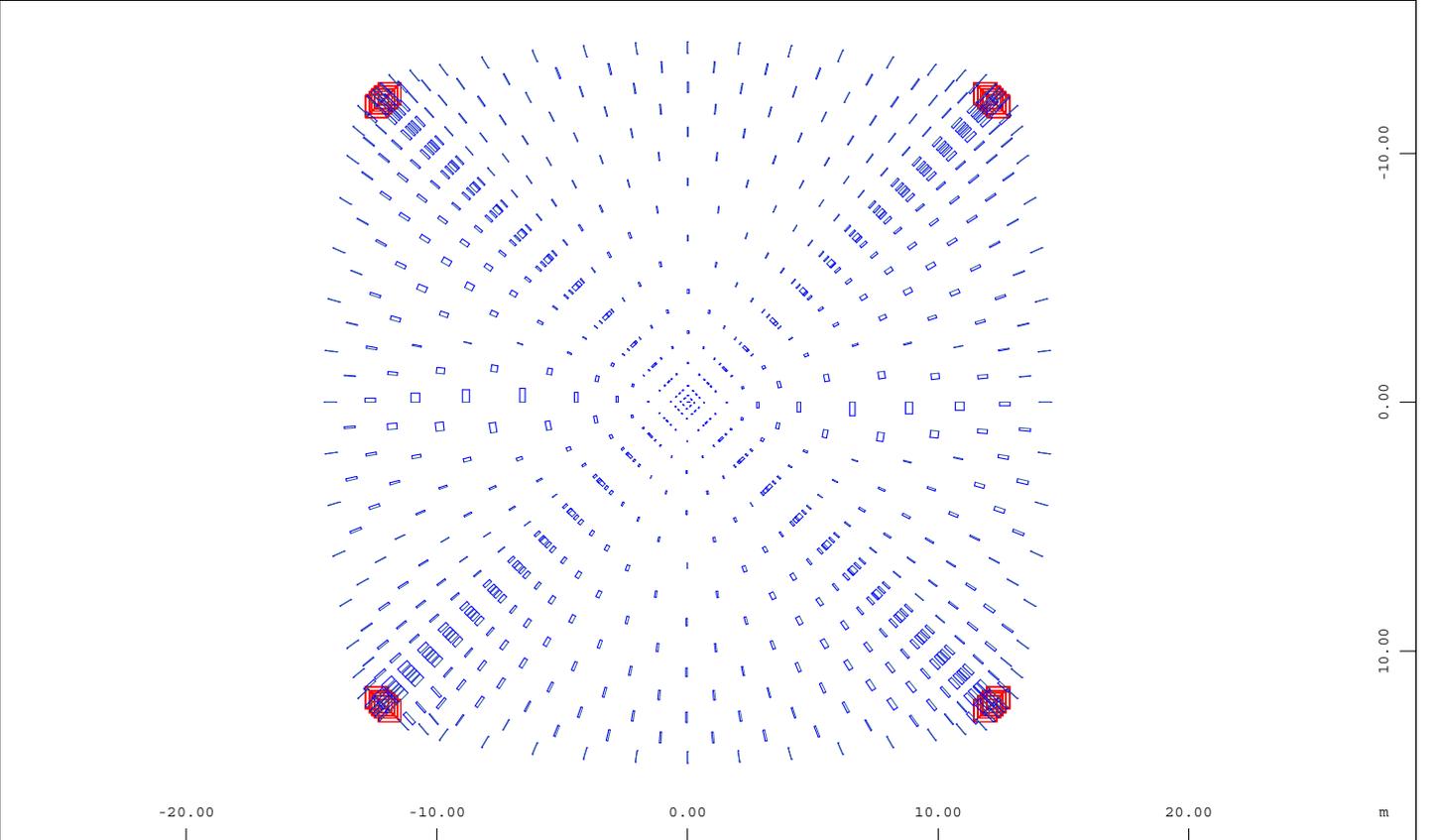
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 124 424 M 1 : 300
 Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
 Querkraft Vz der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 0.400 kN (Min=-0.317) (Max=0.293)
X * 0.707
Y * 0.707



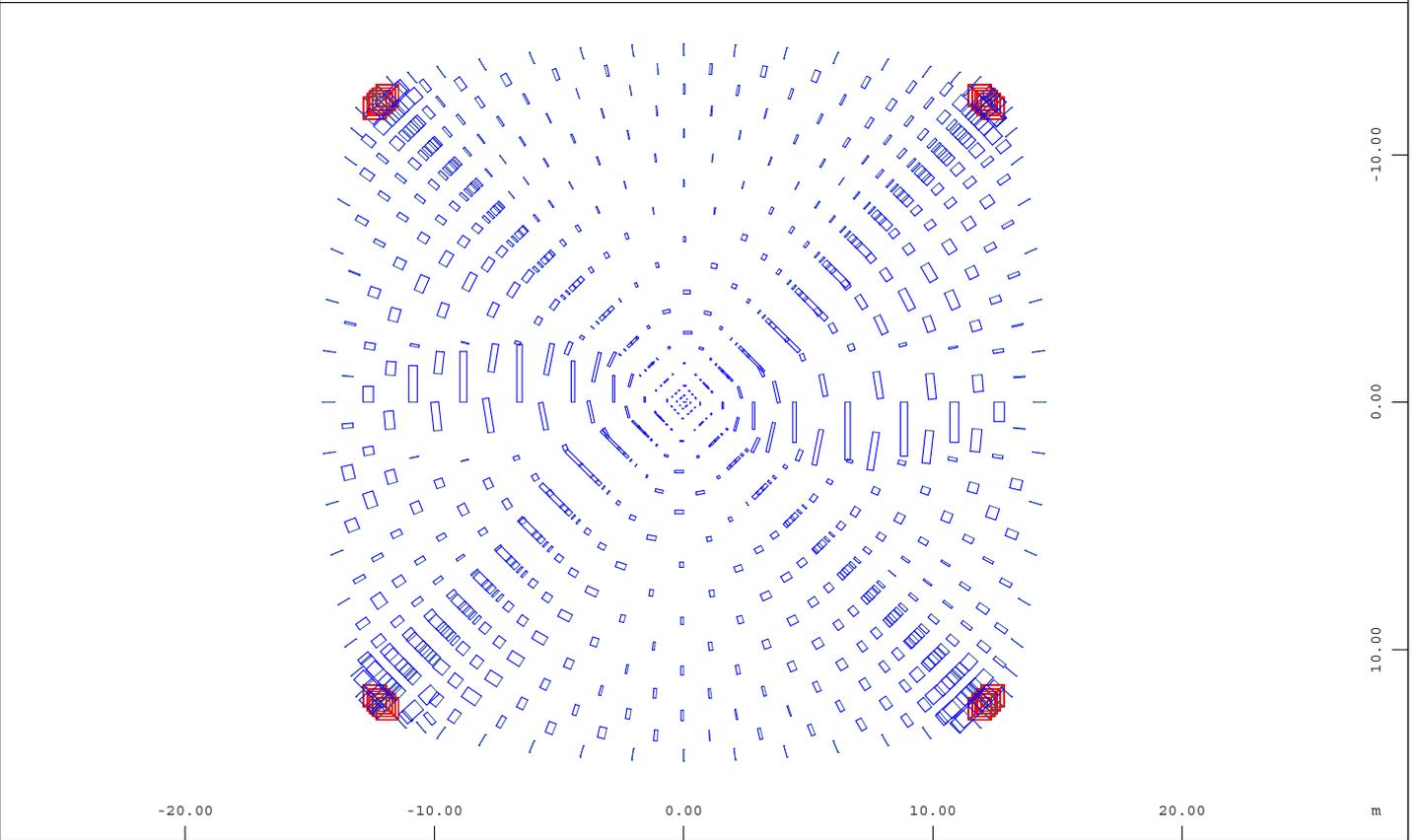
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 4 M 1 : 300
 Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
 Querkraft V_y der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 2.00 kN (Min=-1.23) (Max=1.26)



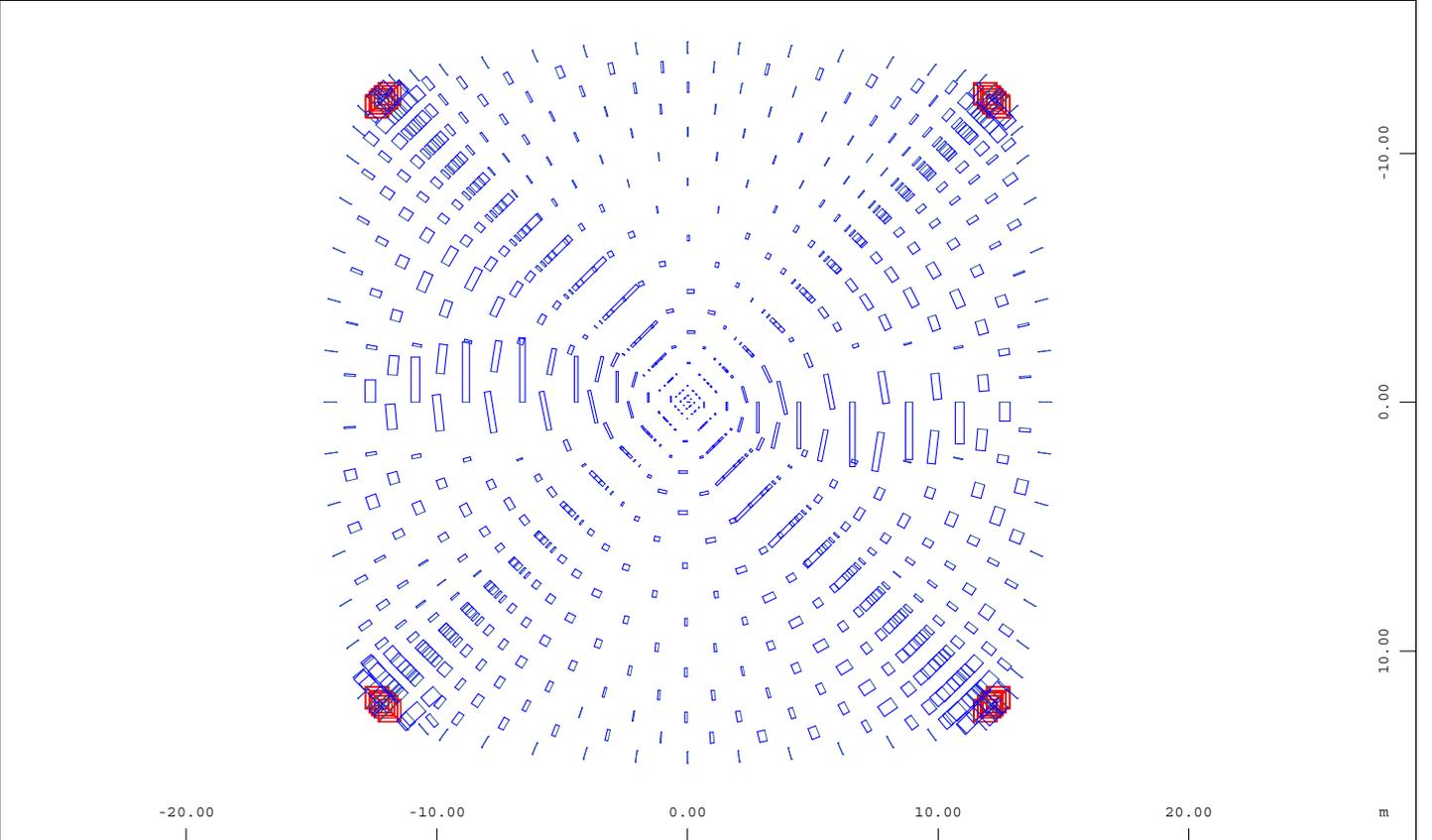
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 424 M 1 : 300
 Verschobene Struktur aus LF 200 in 10.0-facher Überhöhung
 Querkraft V_y der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 0.200 kN (Min=-0.121) (Max=0.215)



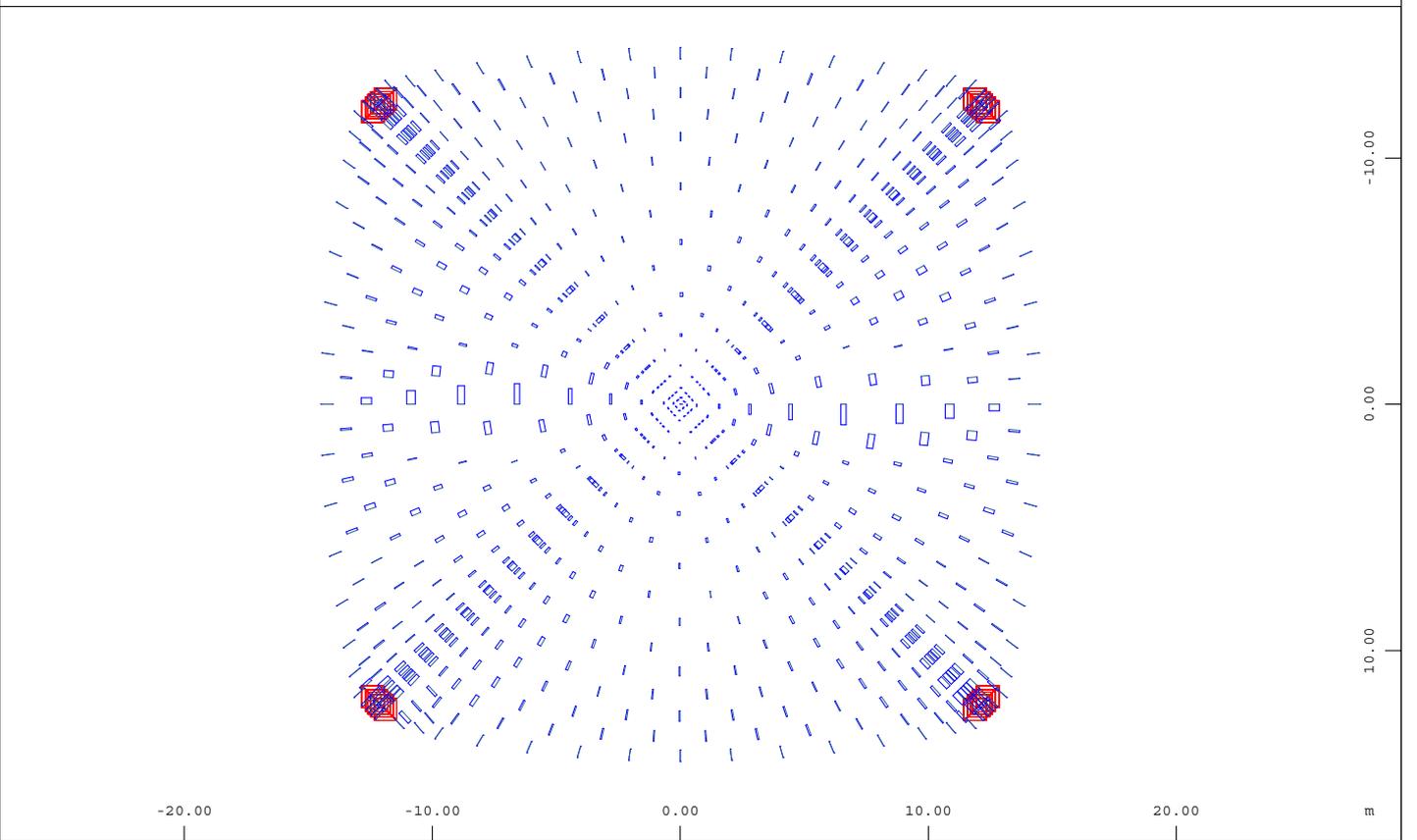
Systemausschnitt Federn Gruppe 6 M 1 : 300
Koppelfederquerkraft, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 10.0 kN (Max=1.86) (Summe: 218.7)



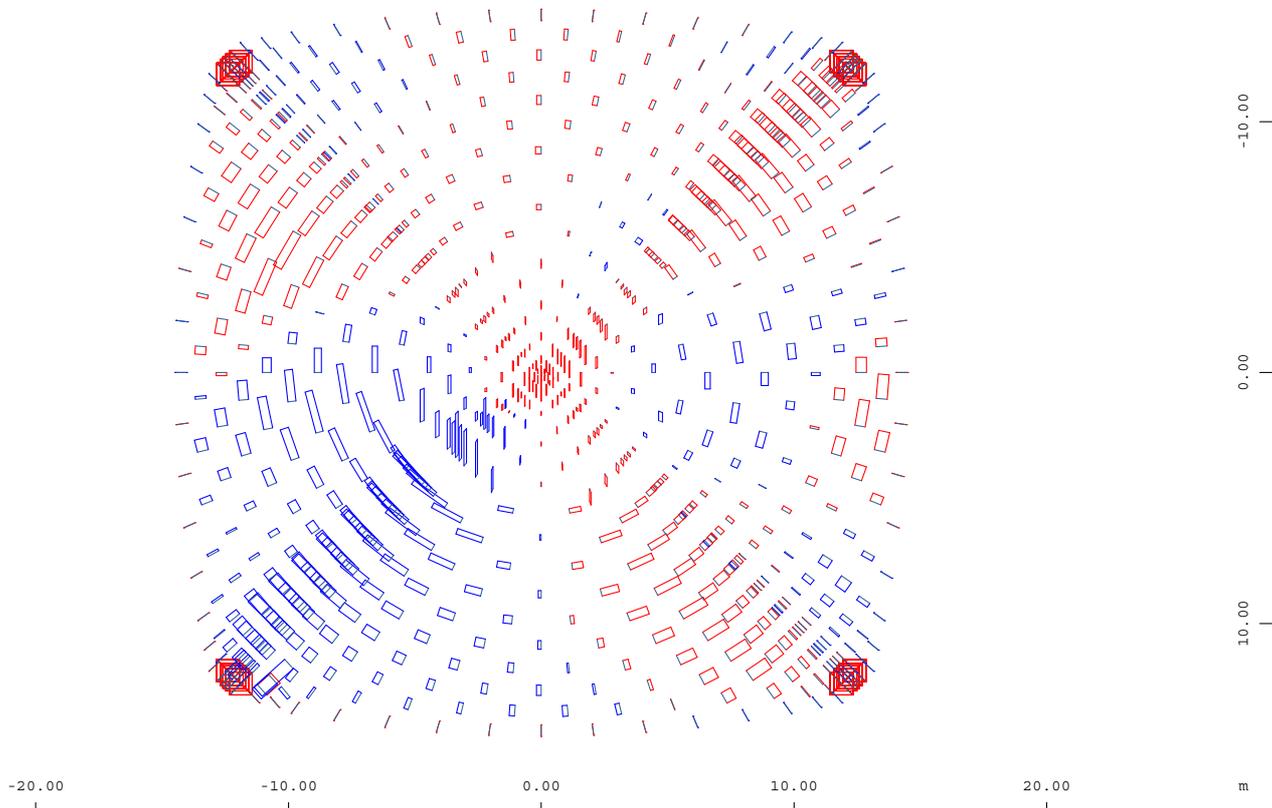
Systemausschnitt Federn Gruppe 7 M 1 : 300
Koppelfederquerkraft, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 10.0 kN (Max=7.80) (Summe: 696.5)



Systemausschnitt Federn Gruppe 8 M 1 : 300
Koppelfederquerkraft, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 10.0 kN (Max=8.63) (Summe: 722.4)



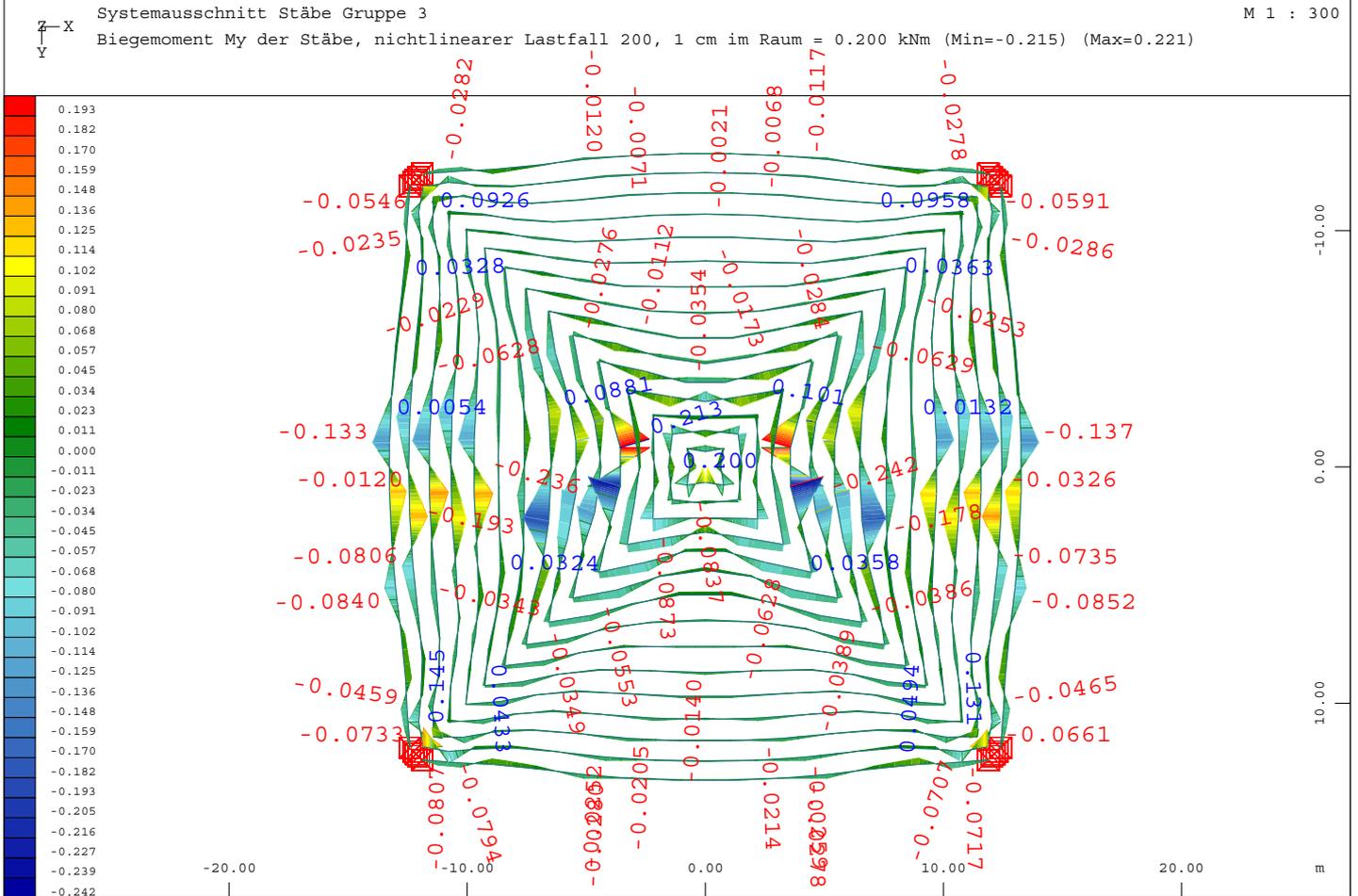
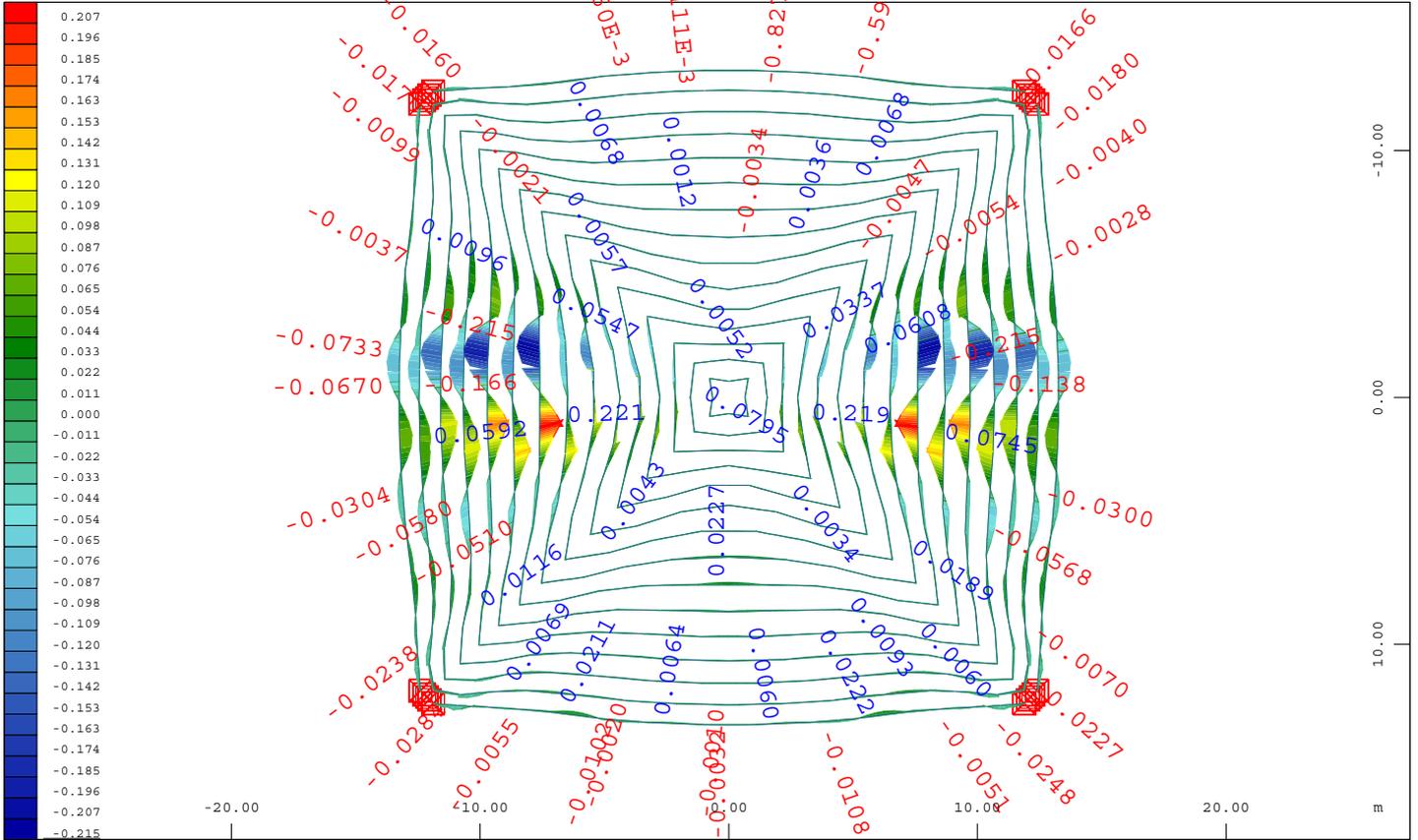
Systemausschnitt Federn Gruppe 9 M 1 : 300
Koppelfederquerkraft, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 10.0 kN (Max=2.79) (Summe: 240.6)

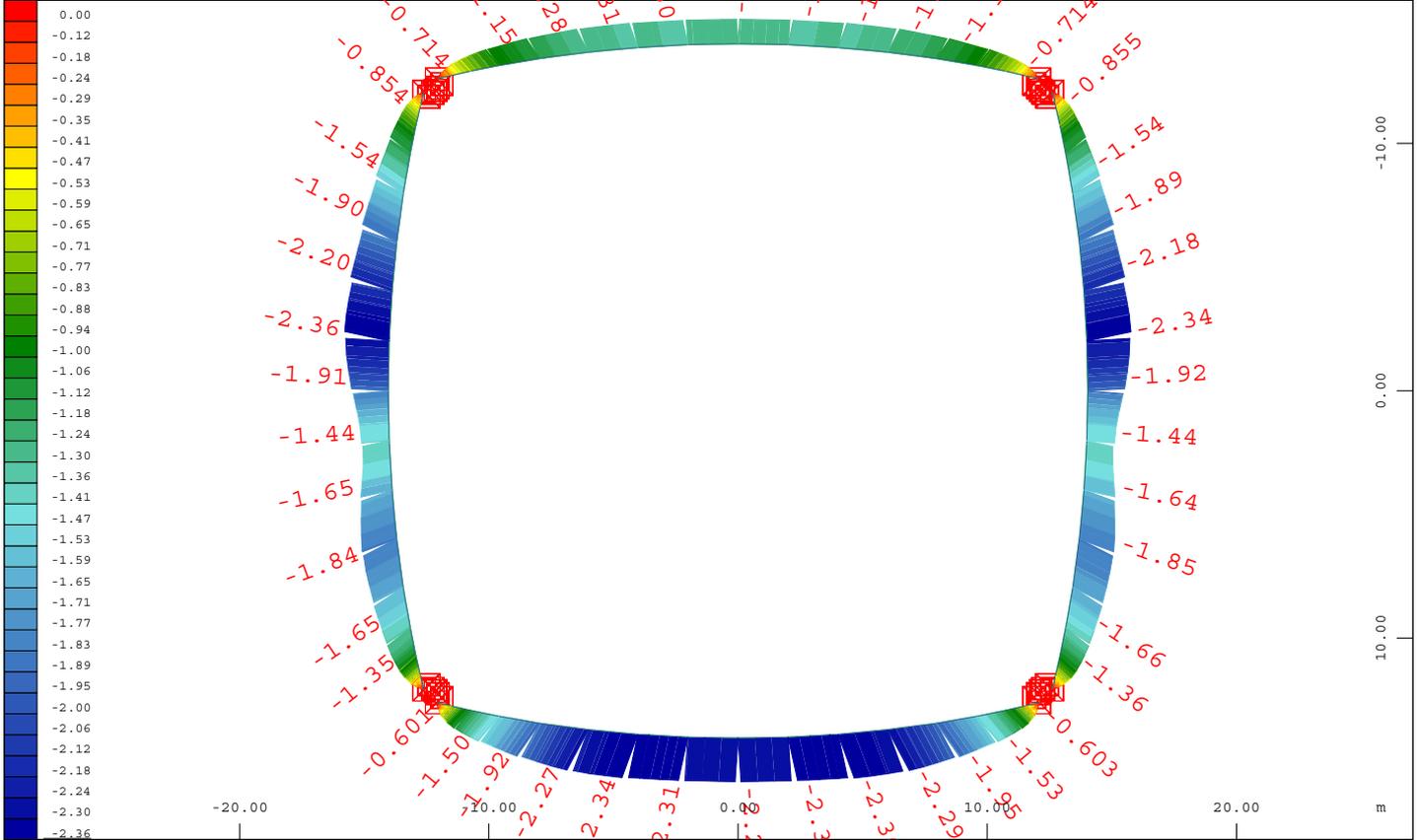


Z
Y

Systemausschnitt Federn Gruppe 10
Koppelfederkraft, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 10.0 kN (Min=-5.17) (Max=6.00) (Summe: 8.11)

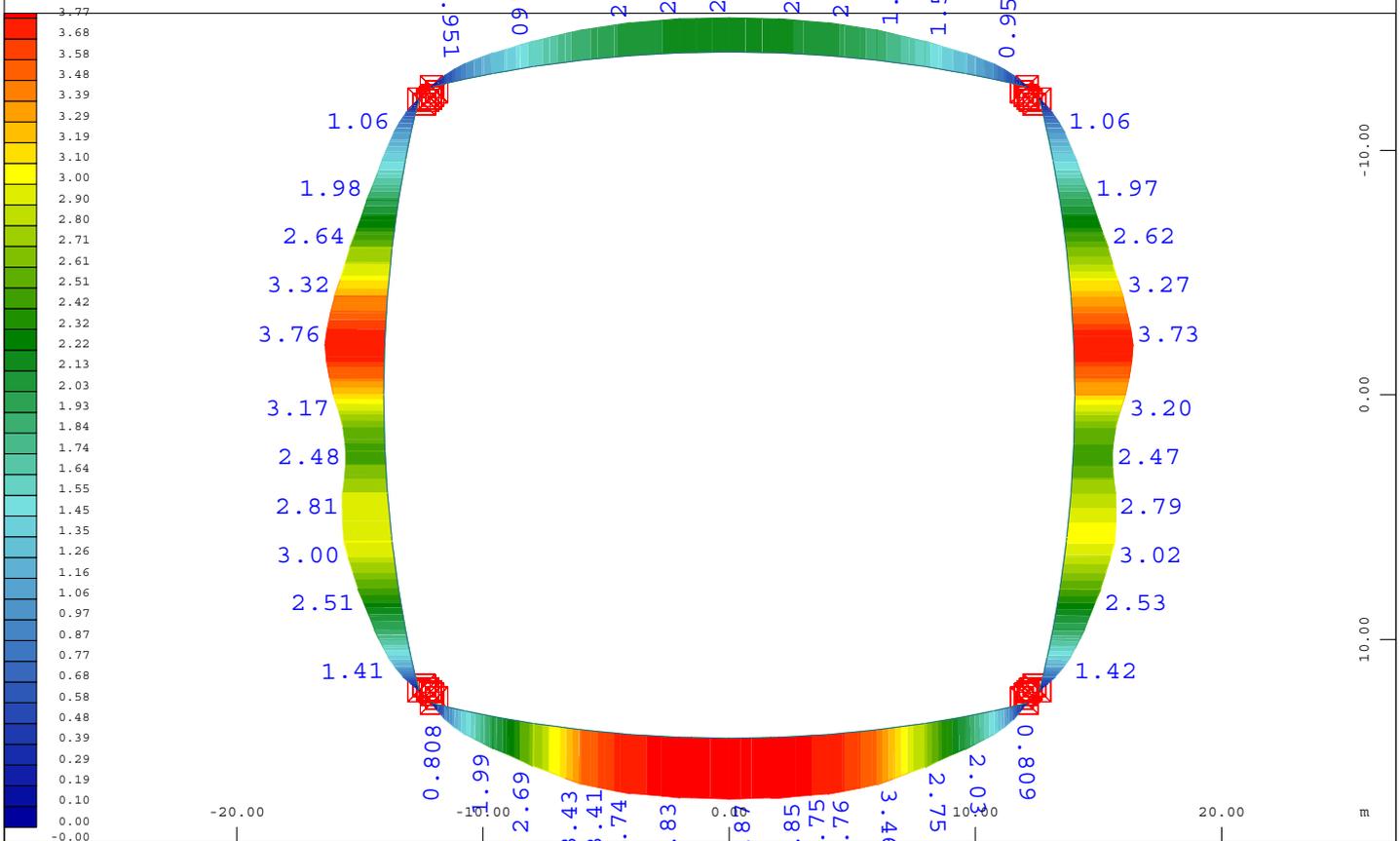
M 1 : 300





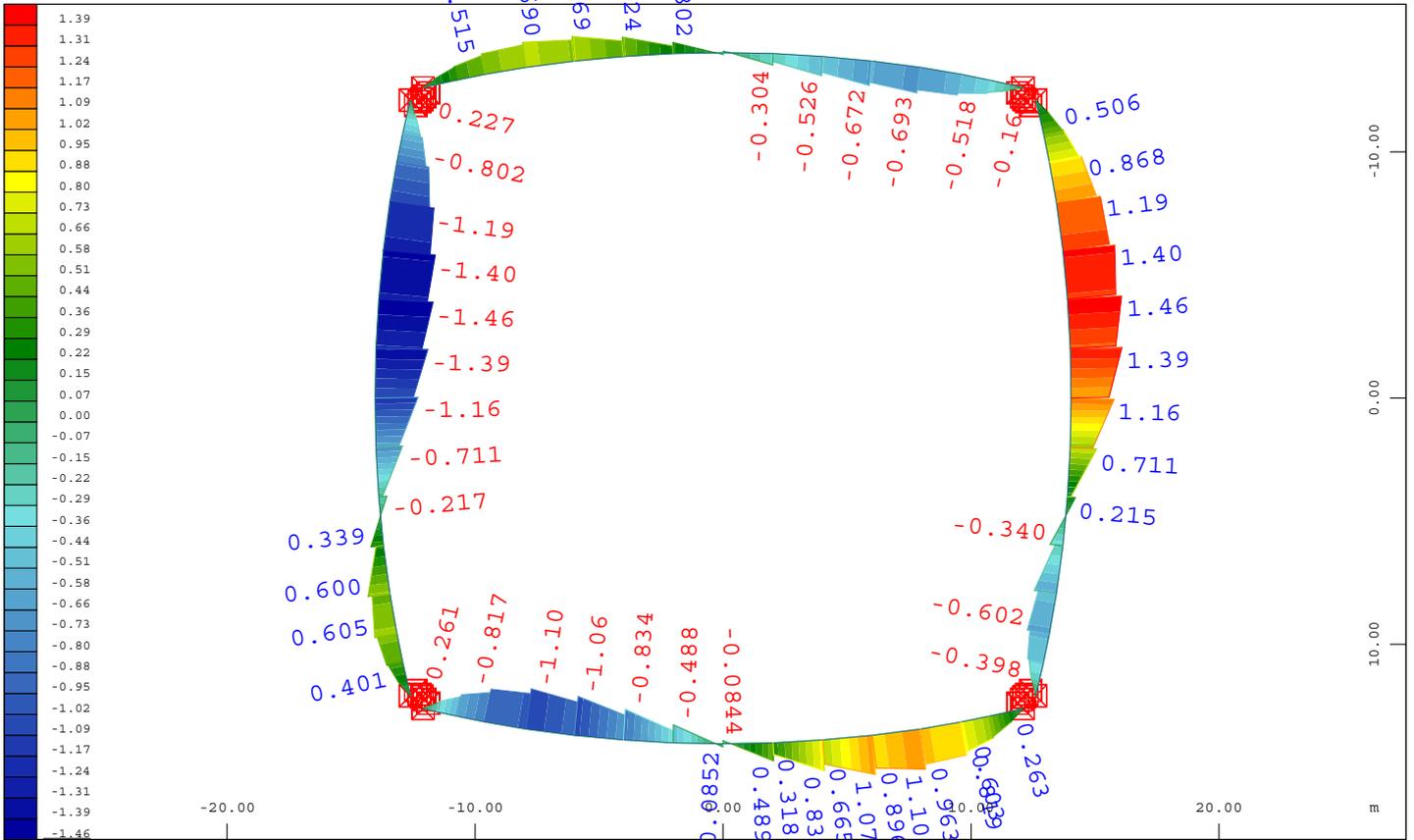
Systemausschnitt Stäbe Gruppe 0
Stabverschiebung z, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 2.00 mm (Min=-2.36) (Max= 4.7611e-08)

M 1 : 300

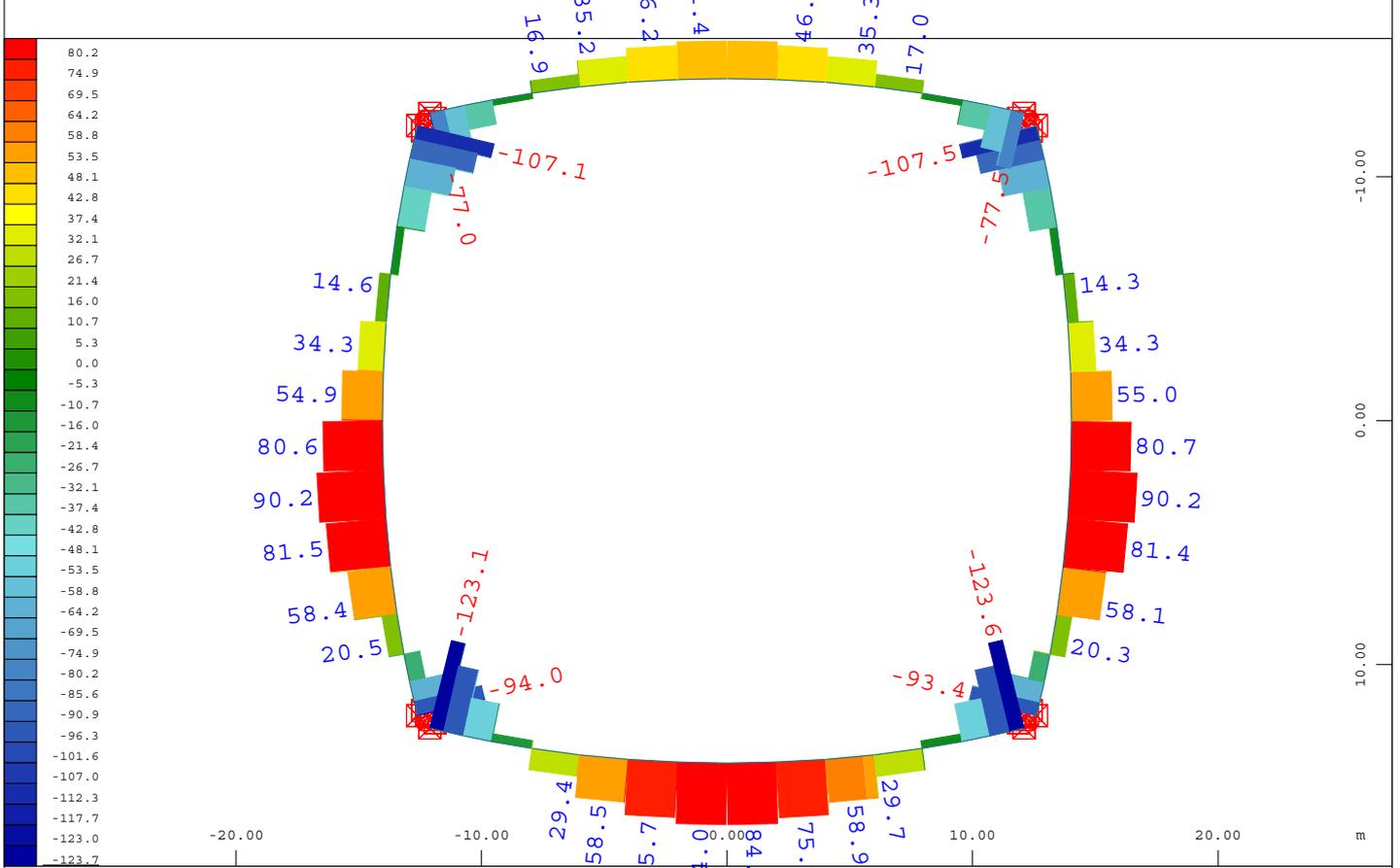


Systemausschnitt Stäbe Gruppe 0
Stabverschiebung y, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 4.00 mm (Min=-1.8024e-07) (Max=3.87)

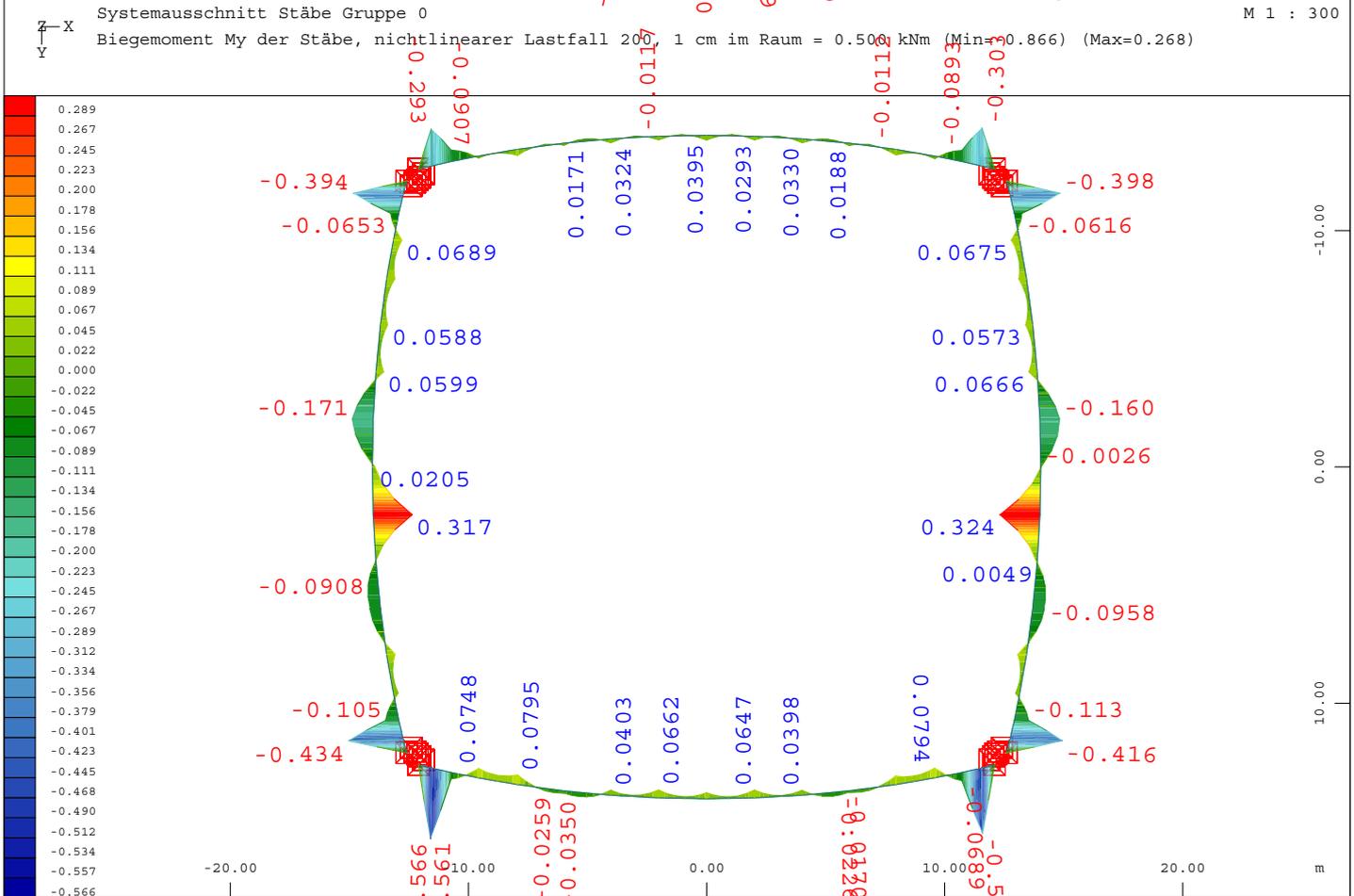
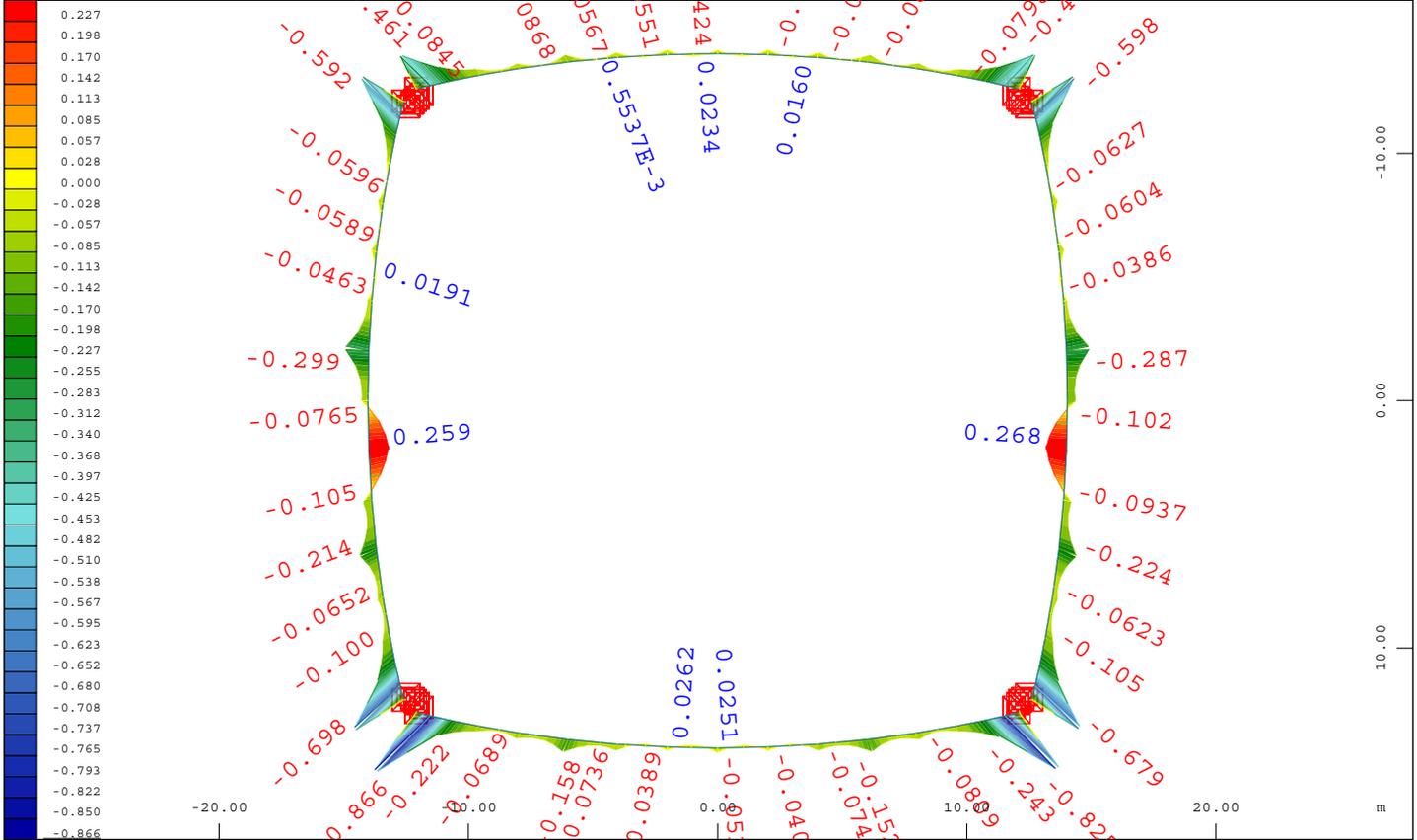
M 1 : 300



Systemausschnitt Stäbe Gruppe 0
 Stabverschiebung x, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 2.00 mm (Min=-1.46) (Max=1.46) M 1 : 300



Systemausschnitt Stäbe Gruppe 0
 Normalkraft der Stäbe, nichtlinearer Lastfall 200, 1 cm im Raum = 100.0 kN (Min=-123.7) (Max=90.3) M 1 : 300



SCHLUSSBEMERKUNGEN UND AUSBLICK

Die vorgestellten Finiten Verbundelemente ermöglichen es, die Tragwirkung von Brettrippenschalen zu modellieren, mit relativ geringem Aufwand zu berechnen und dabei Ergebnisse mit hoher Genauigkeit zu erzielen. Dies ist mit dem γ -Verfahren nicht und mit der Schubanalogie nur bedingt möglich.

Es wurde gezeigt, dass die Unterbrechung von Brettlagen im Rippenknoten einen erheblichen Einfluss auf die Lastabtragung von Brettrippenschalen hat. Dies nicht zu berücksichtigen, führt zu unrealistischen Ergebnissen. Die Lastabtragung erfolgt in erster Linie durch die durchlaufenden Brettlagen. Die unterbrochenen Brettlagen übertragen in erster Linie den Schubfluss zwischen den durchlaufenden Brettlagen und versteifen die Rippen nur auf Biegung und Torsion. An der Lastabtragung der Normalkräfte sind sie nahezu unbeteiligt. Es ist mit dem Verbundelement möglich - im Gegensatz zur Schubanalogie - die Rippen mit unterbrochenen Brettlagen zu modellieren. Dies wurde aber im Berechnungsbeispiel nicht umgesetzt, um den Diskretisierungsaufwand gering zu halten. Mit dem 3n-Verbundelement ist es möglich, die Rippen zwischen den Rippenknoten bei üblichen Rippenquerschnitten mit nur einem Element zu generieren. Um eine ähnliche Zuverlässigkeit der Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit der Schubanalogie zu erzielen, ist ein höherer Diskretisierungsgrad der Rippen notwendig.

Die Abbildung der einzelnen Längsverschiebungen der Teilquerschnitte ermöglicht - im Gegensatz zur Schubanalogie - eine realitätsnahe Modellierung des Tragverhaltens der Rippenknoten. Die dortige Nachgiebigkeit geht in das Modell ein und die Kräfte in den Verbindungsmitteln werden erfasst. Die Verbundelemente eröffnen die Möglichkeit, die gegenseitigen Einspanneffekte zwischen den Längs- und Querrippen bzw. zwischen der Schalung und den Rippen abzubilden. Dies konnte aber mangels gesicherter Grundlagen nicht angesetzt werden. Es ist anzunehmen, dass eine Berücksichtigung der Einspanneffekte die Gesamtsteifigkeit des Tragwerks in nennenswertem Maße erhöht.

Die sicherlich vorhandenen Einspanneffekte zwischen den Bauteilen der Schalenoberfläche (Schalung/Rippen bzw. Längs-/Querrippen) sind schwierig abzuschätzen und wurden auf der sicheren Seite vernachlässigt. Diese „stille“ Steifigkeits- und damit Tragreserve der Brettrippenschalen können nur durch die Gewinnung von verlässlichen Angaben der zugehörigen Drehfedersteifigkeiten der Kopplungen rechnerisch genutzt werden. Hierzu sind Versuche notwendig.

Es zeigte sich, dass bei Kuppelschalen die kurzen Querrippen im Auflagerbereich durch ihre hohen Zugkräfte den kritischen Bereich der Lastabtragung darstellen.

Mit dem Verbundelement konnte gezeigt werden, dass durch eine Umlagerung der aufgetragenen Zwangskrümmung nach dem Lösen vom Lehrgerüst die durchlaufenden Brettlagen im Bereich der Rippenknoten überproportional beansprucht werden. Um die Grundausslastung der Rippen infolge der Zwangskrümmung zu minimieren, ist, wie schon durch Pirazzi angedacht, der Einbau von Holz mit höherer Holzfeuchte (z. B. 20 %) als der späteren Ausgleichsfeuchte denkbar. Erfahrungen aus dem Möbelbau zeigen, dass zwangsgekrümmtes, feucht eingebautes Holz durch plastische Vorgänge einen erheblichen Teil der Spannungen abbaut. Um einen solchen Effekt auch für den Ingenieurholzbau nutzen zu können, sind aber Versuche notwendig.

Mit den Verbundelementen stehen leistungsfähige Finite Elemente zur Verfügung, um Fragestellungen der Tragwirkung von nachgiebigen Verbundkonstruktionen beantworten zu können. Für einen nachgiebigen Holz-Holz-Verbund ist eine Modellierung eines nichtlinearen Materialverhaltens der Fugen (noch) nicht sinnvoll, da noch keine allgemeingültigen Erkenntnisse über das Verformungsverhalten von mechanischen Verbindungen im plastischen Bereich vorliegen. Insbesondere ist eine verlässliche Abschätzung der Grenzverformung im Bruchzustand schwierig. Eine Erweiterung hinsichtlich eines nichtlinearen Materialverhaltens der Fuge ist denkbar. Die Verbundelemente sind dann direkt in den Rechenkern des Programms zu implementieren.

Das Verfahren kann auch für andere denkbare Stabtragwerke mit nachgiebigen Verbundquerschnitten eingesetzt werden. Weitere Anwendungsfelder sind z. B. Holz-Beton-Verbund, Stahl-Beton-Verbund, Sandwichelemente oder Verbundglas. Eine Berücksichtigung von Schwinden und Kriechen in einzelnen Teilquerschnitten ist problemlos möglich.

Die Elemente basieren auf der Voraussetzung kleiner Verformungen. Eine Erweiterung der Elemente hinsichtlich großer Verformungen (Theorie III. Ordnung) und damit eine genaue Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen sind denkbar. Damit kann die infolge großer Querverschiebungen auftretende stabilisierende Membrantragwirkung (Zugkräfte in den Stäben) berücksichtigt werden. In die Potentialgleichungen (Gl. 3-8) und (Gl. 3-27) sind dann genauere Ansätze für ε , φ und φ' [Rot87] einzusetzen. Damit wird eine direkte Abhängigkeit zwischen den Längsverschiebungen u und damit den Normalkräften und den Querverschiebungen w und v hergestellt. Dabei verändert sich die Steifigkeitsmatrix der Fuge aber nur unwesentlich. Für das Tragverhalten der Fuge spielt die Theorie III. Ordnung somit keine nennenswerte Rolle und kann unberücksichtigt bleiben. Anders sind die Auswirkungen auf die Steifigkeitsmatrix der Teilstäbe und dabei im Besonderen die Terme der Normalkrafttragwirkung. Verwendet man für die Teilstäbe Stabelemente eines FEM-Programms, die große Verformungen berücksichtigen (z. B. die Stabelemente im Programmmodul ASE von Sofistik) und führt die Berechnung nach der Theorie III. Ordnung durch, so werden die stabilisierenden Effekte der Membrantragwirkung infolge großer Verformungen für das Tragverhalten der Gesamtstruktur automatisch berücksichtigt, ohne das Bestehende verändern zu müssen.

LITERATUR

- | | | | |
|-----------|-------------------------------------|--|--|
| [Aic87] | Aicher, S.; v. Roth, W. | Ein modifiziertes γ -Verfahren für das mechanische Analogon: dreischichtiger Sandwichverbund - zweiteiliger verschieblicher Verbund | Bautechnik, Ernst&Sohn Berlin, 3/1987; S.21-S.29 |
| [Ari81] | Arizumi Y.; Hamada S. | Elastic-plastic analysis of composite beams with incomplete interaction by finite element method | Computers&Structures Vol. 14, p.453-462, 1981 |
| [Bla] | Blaß H. J.; Laschewitz B. | Tragfähigkeit von Verbindungen mit stiftförmigen Verbindungsmitteln und Zwischenschichten | nicht bekannt |
| [Blu79] | Blumer, H | Spannungsberechnung an anisotropen Kreisbogenscheiben und Sattelträgern konstanter Dicke | Veröffentlichung des Lehrstuhls für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen, Bruderverlag, Karlsruhe 1979 |
| [Boh99] | Bohmann D. | Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Verbundglasscheiben | D 82 Dissertation RWTH Aachen, Shaker Verlag Aachen, ISBN 3-8265-6635-1 |
| [Bra98] | Braun H.-J.; Schaal W.; Schneck F.; | Der Brettstapel als Verbundelement - Vorschlag für einen Berechnungsansatz | Bautechnik 1998/8 S.539 |
| [Brü72] | Brünighoff, H. | Spannungen und Stabilität bei quergestützten Brettschichtholzträgern | Dissertation Universität Karlsruhe 1972 |
| [Buc67] | Buchmann, W. | Beitrag zur Berechnung polarorthotroper Kreisbogenscheiben konstanter Dicke unter reiner Biegebeanspruchung | Dissertation, TU Wien 1967 |
| [Cas04] | Cas, B.; Saje M.; Planinc I. | Non-linear finite element analysis of composite planar frames with interlayer slip | Computers&Structures Vol. 82, p.1901-1912, 2004 |
| [Dal02] | Dall'Asta A.; Zona A. | Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach | Computers&Structures Vol. 80 (2002), p.2217 - 2228 |
| [Dal04-1] | Dall'Asta A.; Zona A. | Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection | Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004) p. 1907-1930 |
| [Dal04-2] | Dall'Asta A.; Zona A. | Comparison and validation of displacement and mixed elements for non-linear analysis of continuous composite beams | Computers&Structures Vol. 82 (2004) , p.2117 - 2130 |
| [Dan93] | Daniels B.; Crisinel M. | Composite Slab behaviour and strength analysis. Part I: Calculation procedure | Journal of Structural engineering, 1993, p. 16-35 |
| [DIN04] | DIN 1052 neu | Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken | Berlin Beuth-Verlag 2004 |

- | | | | |
|----------------|--|---|---|
| [DIN05] | DIN 1055-5 | Einwirkungen auf Tragwerke
Teil 5: Schnee und Eislasten | Berlin Beuth-Verlag Juli
2005 |
| [DIN98] | DIN 1052 alt | Holzbauwerke, Berechnung und Ausführung | Berlin Beuth-Verlag April
1998 |
| [Drö93] | Dröge, G. | Grundzüge des Holzbaus, Band 1
Konstruktionselemente | Ernst und Sohn 1993, Berlin,
2. Auflage |
| [Dub88] | Dubas, P. | Zusammengesetzte Holzstäbe mit unsymmetrischen,
zweiteiligem Querschnitt | Schweizer Ingenieur und
Architekt, Nr.9/1988, S. 243-
245 |
| [EC1] | Eurocode 1 | Basis of design and action on structures, Part 2-4,
Wind Actions | 7/94 |
| [Ehl] | Ehlbeck J.;
Siebert W. | Tragverhalten von Nagelverbindungen bei
gleichzeitiger Beanspruchung auf Abscheren und
Ausziehen | Versuchsanstalt für Stahl,
Holz und Steine, Abt.
Ingenieurholzbau,
Universität Karlsruhe |
| [Fae02] | Faella, C.;
Martinelli, E.;
Nigro, E. | Steel and concrete composite beams with flexible
shear connection: "exact" analytical expression of the
stiffness matrix and applications | Computers&Structures 80,
p.1001-1009, 2002 |
| [Fae03] | Faella, C.;
Martinelli, E.;
Nigro, E. | Shear Connection Nonlinearity and Deflections of
Steel-Concrete Composite Beams: a simplified
Method | Journal of Structural
engineering, Jan 2003, p. 12-
20 |
| [Gir93] | Girhammar,
U.A.;
a Vijaya K.A.G. | Composite Beam-Columns with interlayer slip-exact
analysis | Journal of Structural
Engineering, Vol 119, No 4,
1993, S.1265-1277 |
| [Gli00] | Gliniorz K.-U.,
Stolper, M.;
Natterer, Ju.; | Berechnung von Kreuzrippenschalen aus Holz | Publication IBOIS 00:13,
Eigenverlag EPFL Lausanne,
2000 |
| [Gli01] | Gliniorz K.-U.,
Natterer, Julius;
Kreuzinger, H. | Tonnenschalen aus Holz in Kreuzrippenbauweise | Bautechnik 2001, S.464-473,
Berlin Ernst und Sohn Verlag |
| [Gol03] | Gollwitzer, T.
Gebbeken, N. | Aktuelle Beiträge aus Baustatik und Comp.
Mechanics: Ein neues FEM-Stabelement für
nachgiebige Verbundquerschnitte | Berichte aus dem
Konstruktiven Ingenieurbau
03/3, Universität der
Bundeswehr München |
| [Gol04] | Gollwitzer, T.
Gebbeken, N. | Ein neues FEM-Stabelement für nachgiebige
Verbundquerschnitte | Bautechnik 07/2004,
Ernst&Sohn Berlin |
| [Har00] | Hartmann, H. | Die Berücksichtigung elastisch-plastischer
Verformungseigenschaften mechanischer
Verbindungsmittel bei Verbundkonstruktionen im
Ingenieurholzbau | Dissertation 3/2000 TU
München |
| [Har02] | Hartmann, F.;
Katz C. | Statik mit finiten Elementen | Springer-Verlag, Berlin,
Heidelberg 2002 |

- | | | | |
|---------|----------------------------|---|--|
| [Hei67] | Heimeshoff B. | Praktische Spannungsberechnung für den gekrümmten Träger mit Rechteckquerschnitt | Bautechnik 1967/4, S. 135-140 |
| [Hei82] | Heimeshoff B. | Über den Einfluss der Anisotropie auf den Spannungs- und Verformungsverlauf von Stäben mit Rechteckquerschnitt bei Torsionsbeanspruchung | Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis, Bruderverlag Karlsruhe 1982 |
| [Hoe92] | Hoefl M. | Ausstellungspavillon in Brettrippenbauweise | Fachbeitrag zum Schweizer Baublatt, 1992 (2) |
| [Hoe94] | Hoefl M. | Zur Berechnung von Verbundträgern mit beliebig gefügtem Querschnitt | Dissertation These 1213, EPFL Lausanne, IBOIS, 1994 |
| [Hol91] | Informationsdienst Holz | Holzbau Handbuch, Reihe 2 Tragwerksplanung, Teil 2 Verbindungsmittel, Folge 2 Genaue Nachweise Sonderbauten | Entwicklungsgemeinschaft Holzbau (EGH), Düsseldorf 1991 |
| [Jak05] | Jakobs, A. | Zur Berechnung von Brettlagenholz mit starrem und nachgiebigem Verbund unter plattenartiger Belastung mit besonderer Berücksichtigung des Rollschubs und der Drillweichheit | Universität der Bundeswehr, Professur für Konstruktive Gestaltung und Holzbau, Dissertation 2005 |
| [Kie88] | Kiener, G.; Kreuzinger, H. | Differentialgleichungen und Energieausdrücke für Tragsysteme; | Technische Universität München, Selbstverlag 1988, Mitteilungen aus dem Institut Bauingenieurwesen I |
| [Kin02] | Kindmann, R.; Frickel, J. | Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit | Ernst & Sohn Berlin, 2002 |
| [Kne91] | Kneidl R. | Ein Beitrag zur linearen und nichtlinearen Berechnung von Schichtbalkensystemen | Dissertation 6/1991 TU München |
| [Kne95] | Kneidl R.; Hartmann H. | Träger mit nachgiebigem Verbund | bauen mit Holz 1995/4, S 285ff |
| [Kne96] | Kneidl R. | Träger mit nachgiebigem Verbund - Eine Diskretisierung mit STAR 2 | Katz&Protopsaltis, Sofistik Seminar 95, Balkema Rotterdam ISBN 9054105992 |
| [Krä01] | Krämer V. | Load-Carry capacity of nail-laminated timber | Meeting Thrity-Four Venice Italy August 2001 |
| [Krä97] | Krätzig, Basar | Tragwerke 3, Theorie und Anwendung der finiten Elemente Methode | Springer-Verlag, Berlin 1997 |
| [Kre02] | Kreuzinger, H. | Verbundkonstruktionen, Holzbau Kalender 2002 | S. 598-621; Karlsruhe Bruderverlag, 2001 |
| [Kre99] | Kreuzinger, H. | Holz-Beton-Verbundbauweise | Informationsdienst Holz, Fachtagung Holzbau 1999_2000, Holz für das neue Jahrhundert, ArGe Holz, Düsseldorf Nov 99 |

- | | | | |
|-----------------|--|---|--|
| [Kuh04] | Kuhlmann, U.;
Schänzlin J.;
Michelfelder B. | Berechnung von Holz-Beton-Verbunddecken | Beton- und Stahlbetonbau,
4/2004, S. 262-270 |
| [Mey90] | Meyberg;
Vachenaer | Höhere Mathematik 1 | Springer-Lehrbuch, Berlin
1990 |
| [Möh56] | Möhler, K. | Über das Tragverhalten von Biegeträgern und
Druckstäben mit zusammengesetzten Querschnitten
und nachgiebigen Verbindungsmitteln | Dissertation Uni Karlsruhe
1956, |
| [Möh77] | Möhler, K.;
Hemmer K. | Verformungs- und Festigkeitsverhalten von
Nadelvoll- und Brettschichtholz bei
Torsionsbeanspruchung | Holz als Roh und Werkstoff,
1977, S.473-478 |
| [NaJo04] | Natterer
Johannes | Die exklusive Tragstruktur einer Therapiehalle | Schweizer Holzbau
Nr.9/2004 S.12-13 |
| [Nat00] | Natterer, Julius;
Burger, N.;
Müller, A;
Natterer
Johannes | Holzrippendächer in Brettstapelbauweise -
Raumerlebnis durch filigrane Bauwerke | Bautechnik 2000, S.783-793,
Berlin Ernst und Sohn Verlag |
| [Nat02] | Natterer, Julius;
Pirazzi C.,
Gliniorz K.-U.,
Ulmer H. | Holzflächentragwerke in Brettstapelbauweise | EPFL Lausanne, IBOIS
02:04, April 2002 |
| [Nat87] | Natterer Julius | Zum Tragverhalten von Holz-Beton-
Verbundkonstruktionen | Ecole Polytechnique federale
de Lausanne, IBOIS,
Forschungsbericht CERS Nr.
1345, 1987 |
| [New51] | Newmark NM;
Siess CP;
Viest IM | Tests and analysis of composite beams with
incomplete interaction, | proc Soc Exp Stress Anal
1951; 9(1): 75-92 |
| [Nie03] | Nie J.; Cai C.S.; | Steel-Concrete Composite Beams Considering Shear
Slip Effects | Journal of Structural
engineering, April 2003, p.
495-506 |
| [Ove97] | Oven, V.A.;
Burgess;
Plank; Wali; | An analytical model for the analysis of composite
beams with partial interaction | Computers&Structures Vol.
62,No.3 p.493-504, 1997 |
| [Pap76] | Papsch E. | Eine lineare Stabtheorie für mehrteilige gerade Stäbe
mit elastischem Verbund | Dissertation Uni Hannover
1975, Lehrstuhl für
Bautechnik und Holzbau,
Mitteilung Nr. 3,1976 |
| [Pet03] | Petersen, C. | Statik und Stabilität der Baukonstruktionen | Vieweg&Sohn, Wiesbaden 3.
Auflage 2003 |
| [Pir02] | Pirazzi C. | Experimente an Tonnenschalen | IBOIS EPFL Lausanne
Publikation 02:27 |
| [Pir04] | Pirazzi C. | Leichte Flächentragwerke aus Holz | |

- [Pir05] Pirazzi C. Zur Berechnung von Holzschalen in Brettrippenbauweise mit elastischem Verbundquerschnitt EPFL Lausanne, These Nr. 3229, Dissertation, 2005
- [Por94] Porco, G., Spadea, G.; Zinno R. Finite element analysis and parametric study of concrete-steel composite beams Cement&concrete Compos., 16, S. 261-272
- [Ram95] Ramm, E. Platten, Vorlesungsmanuskript Uni Stuttgart Uni Stuttgart, Institut für Baustatik 3.Auflage 1995
- [Rot87] Rothert, H.; Gensichen, V. Nichtlinear Stabstatik Springer Verlag, Berlin 1987
- [Ram96] Ramm, E Der Ingenieurbau, Baustatik, Baudynamik Ernst und Sohn Berlin 1996, Kapitel Stabtragwerke, S.1-38[49]
- [Rug04] Rug, W. Lißner, K. Holz-Beton-Verbundbauweise in der Praxis Beton und Stahlbetonbau 99 (2004) Heft 7
- [Sal98] Salari; Reza M. Nonlinear Analysis of composite beams with deformable shear connectors Journal of Structural engineering, Oct 1998, p. 1148-1157
- [Sau80] Sauer, E. Schub und Torsion bei elastischen prismatischen Balken Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin München, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau, TH Darmstadt 1980
- [Sche68] Schelling, W. Die Berechnung nachgiebig verbundener, zusammengesetzter Biegeträger im Ingenieurholzbau Dissertation TU Karlsruhe 1968
- [Sche82] Schelling, W.; Zur Berechnung von nachgiebig zusammengesetzten Biegeträgern aus beliebig vielen Querschnitten Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis, Bruderverlag Karlsruhe 1982, Herausgeber Jürgen Ehlbeck, Günter Steck, S. 163-169.
- [Schi05] Schild, K.; Völkner, S. Praxishandbuch Ingenieurholzbau Fraunhofer IRB Verlag 2005, Stuttgart
- [Schi94] Schickerhofer, G. Starrer und nachgiebiger Verbund bei geschichteten flächenhaften Holzstrukturen Dissertation TU Graz, Mai 1994 an der Fakultät für Bauingenieurwesen
- [Schm04] Schmidt J.; Kaliske M.; Schneider W.; Thiele R. Bemessungsvorschlag für Holz/Beton-Verbunddecken unter Beachtung abgestufter Verbindungsmittelabstände Bautechnik 2004/3 S.172
- [Schn01] Schneider Bautabellen für Ingenieure 14. Auflage, 2001, Werner Verlag Düsseldorf
- [Scho04-1] Scholz, A. Eigenspannungszustände an Verbundquerschnitten infolge von Dehnungsunterschieden Bautechnik 2004 S.180-188

- | | | | |
|-------------------|--|---|--|
| [Scho04-2] | Scholz, A. | Ein Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken aus Holz | Dissertation TU München 2004 |
| [Schu86] | Schuler, G. | Durchlaufträger mit elastischem Verbund bei abschnittsweise veränderlichen Steifigkeiten | Berichte der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Karlsruhe, 4.Folge-Heft 14, Karlsruhe 1986 |
| [Schw06] | Schweighofer, T. | Berechnung einer Brettrippenschale mit einem neuen Stabelement für nachgiebige Verbundquerschnitte im Rahmen der Finiten Elemente Methode | Universität der Bundeswehr, Insitut für Mechanik und Statik, Diplomarbeit 2006 |
| [Ser93] | Scheer C.;
Laschinski C. | Kippverhalten und Kippaussteifung von Holzträgern unter schwerpunktmäßiger Berücksichtigung von Trägern aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen T2590 | IRB Verlag Stuttgart, TU Berlin 1993, |
| [Sie01] | Siebert, G. | Entwurf und Bemessung von tragenden Bauteilen aus Glas | Ernst und Sohn Verlag Berlin 2001, ISBN 3-433-01614-3 |
| [Sof00] | Sofistik | Sofistik-Layermodell für Platten und Schalenberechnung | Sofistik-Bibliothek, www.sofistik.de, 2004 |
| [Sof03] | Sofistik
Handbuch | GENF Generierung Finiter Elemente und Stabwerke | Version 11.05, SOFiSTiK AG, Oberschleisheim, 2003 |
| [Sta74] | Stamm K.;
Witt H. | Sandwichkonstruktionen | Springer-Verlag, Berlin, 1974 |
| [Stad97] | Stade, F. | Die Holzkonstruktionen | Moritz Schäfer Verlag, Leipzig 1909; Reprint: Weltbild Verlag GmbH, Leipzig 1997 |
| [Ste99] | Stein, E.
Mehlhorn, G. | Der Ingenieurbau, Mathematik, Technische Mechanik | Ernst & Sohn Berlin, 1999 |
| [Stü43] | Stüssi, F. | Über den verdübelten Balken | Schweizer Bauzeitung, Band 122, Nr.21/1943, S. 271-274 |
| [Thi96] | Thieme, D | Einführung in die Finite-Elemente-Methode für Bauingenieure | Berlin Verlag für Bauwesen, 1996 |
| [Tho77] | Thompson, E.G.
Vanderbilt D.;
Goodman J.R. | Feaflo: A programm for the analysis of layered wood systems | Computers&Structures, Vol 7. pp. 237-248, 1977 |
| [Wan98] | Wang. Y.C. | Deflection of Steel-concrete composite Beams with partial shear interaction | Journal of Structural engineering, Oct 1998, p. 1159-1165 |
| [Whe94] | Wheat D.;
Calixto J. | Nonlinear Analysis of two-layered wood members with interlayer slip | Journal of Structural engineering, June 1994, p. 1909-1929 |
| [Wun04] | Wunderlich, W.;
Kiener G. | Statik der Stabtragwerke | Teubner Verlag, Wiesbaden, 1.Auflage 2004 |

-
- [Wun95] Wunderlich, W. Statik 3/4 Vorlesungsskript TU München Studienjahr 1995/96 TU München, Lehrstuhl für Statik, Eigenverlag 1995
- [Zil02] Zilch, K. Handbuch für Bauingenieure Springer Verlag Berlin Heidelberg 2002
Diederichs C.J.;
Katzenbach R.