



Universität der Bundeswehr München  
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik  
Institut für Mathematik und Rechneranwendung

EINSTUFIGE  
APPROXIMATIVE  
OPTIMALE STOCHASTISCHE PLANUNG  
NEUER ROBOTERTRAJEKTORIEN  
IN ECHTZEIT

Dipl.-Ing. Tanno Zantz

Vollständiger Abdruck der bei der  
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik  
der Universität der Bundeswehr München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

eingereichten Dissertation

Vorsitzender: Universitätsprof. Dr.sc.math. Joachim Gwinner (LRT-1)  
1. Berichterstatter: Universitätsprof. Dr.sc.math. Kurt Marti (LRT-1)  
2. Berichterstatter: Universitätsprof. Dr.rer.nat. Bernd Häusler (LRT-9)

Diese Dissertation wurde am 12.01.2006 bei der Universität der Bundeswehr München, D-85577 Neubiberg, eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 18.01.2006 angenommen.

Tag der Prüfung: 21. Juni 2006

## Vorwort

Diese Dissertation entstand an der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik im Institut für Mathematik und Rechneranwendung der Universität der Bundeswehr München.

Herr Prof. Dr. sc. math. K. Marti machte mich auf das hier behandelte Themengebiet aufmerksam. An dieser Stelle danke ich ihm nicht nur für die stete Begleitung meiner Untersuchungen, sondern auch ganz besonders für seine intensive Betreuung bei der Erstellung der Arbeit.

Für seine stets freundschaftliche Zusammenarbeit auf dem Gebiet der stochastischen Optimierung danke ich Herrn Dr.-Ing. Andreas Aurnhammer.

Allen Mitarbeitern des Instituts für Mathematik und Rechneranwendung und des Rechnerzentrums gebührt mein Dank für die vertrauensvolle Zusammenarbeit und kollegiale Unterstützung.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Stefan Marx von der Flughafengesellschaft München für die fachkundige Führung durch die Gepäckförderanlage des Franz-Joseph-Strauß-Flughafens und die begleitende, umfassende Information.

Meinen Eltern und meiner Schwester danke ich für den während des gesamten Zeitraumes gewährten Rückhalt.

*Die Bezeichnung Roboter leitet sich aus dem tschechischen Wort für Fronarbeit=robota ab.*

*Die Norm ISO 8373 definiert Roboter als universell einsetzbare Handhabungsautomaten  
mit mindestens drei Achsen, deren Bewegungen ohne mechanische Eingriffe  
frei programmierbar sind.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Gepäckverladeroboter auf Flughäfen</b>	<b>12</b>
2.1	Stochastische Modellparameter . . . . .	12
2.2	Automatisierte Behandlung abgehender Koffer . . . . .	13
2.2.1	Aufnahmepunkt Transportband . . . . .	13
2.2.2	Absetzpunkt Vorfeldfahrzeug . . . . .	15
2.2.3	Konzept für Umschlagstation auf Roboterbasis . . . . .	17
2.2.4	Teilsystem Kofferzuführung . . . . .	18
2.2.5	Teilsystem Kofferabtransport für kleine Maschinen . . . . .	19
2.2.6	Teilsystem Kofferabtransport für Großraumflugzeuge . . . . .	20
2.3	Fluggepäckumschlag und -aufkommen . . . . .	21
2.3.1	Gepäckfördermethoden . . . . .	21
2.3.2	Weiterverarbeitungsmöglichkeiten der Gewichtsinformationen . . . . .	23
2.3.3	Gepäckkategorien . . . . .	24
2.3.4	Szenarien des Gepäckumschlages . . . . .	24
2.3.5	Konsequenzen für die Robotersteuerung . . . . .	28
2.4	Teilsystem Roboter . . . . .	29
2.4.1	Steuerkette des Roboters MANUTECH r3 . . . . .	29
2.4.2	Begriffe . . . . .	29
2.4.3	Schwachstellen des bisherigen Steuerungskonzeptes . . . . .	32
2.4.4	Methoden zur rechnerischen Ermittlung von Robotersteuerungen . . . . .	33
2.4.5	Szenarien des Gepäckumschlages im Abflugbereich . . . . .	33
2.4.6	Durchsatz . . . . .	49

<b>3</b>	<b>Kinematik</b>	<b>52</b>
3.1	Notation . . . . .	52
3.1.1	Denavit-Hartenberg-Repräsentation (D-H-Repräsentation) . . . . .	53
3.1.2	Modifizierte Denavit-Hartenberg-Repräsentation . . . . .	53
3.2	Umrechnung von der Konfigurations- in die Arbeitsraumdarstellung . . . . .	56
3.3	Die Kinematik des Ersatzsystems . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Dynamik</b>	<b>58</b>
4.1	Die Bewegungsgleichung holonomer Systeme . . . . .	58
4.2	Die kinetische Energie des physikalischen Ersatzsystems . . . . .	61
4.3	Die generalisierten Kräfte des Ersatzsystems . . . . .	62
4.4	Die benötigten Momente der Getriebeabgangswelle für die Trajektorie $\theta(t)$ . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Regelung</b>	<b>68</b>
5.1	Unterscheidung zwischen Steuerung und Regelung . . . . .	68
5.1.1	Proportionalität zwischen Steuerspannung und Antriebsmoment . . . . .	71
5.1.2	Der in dieser Arbeit verwendete Regler . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Optimale Trajektorienplanung</b>	<b>75</b>
6.1	AOSTP . . . . .	76
6.1.1	Formel für den Erwartungswert der Zielfunktion . . . . .	79
6.1.2	Ungleichungen für die Wahrscheinlichkeitsrestriktionen . . . . .	81
6.2	Trajektorienparametertransformation . . . . .	85
6.2.1	Erste Transformation . . . . .	85
6.2.2	Zweite Transformation . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Numerische Lösung des Ersatzproblems für das AOSTP</b>	<b>90</b>
7.1	Splines und B-Splines . . . . .	90
7.1.1	Eigenschaften der Splines . . . . .	91
7.1.2	Eigenschaften der B-Splines . . . . .	91
7.1.3	Spline-Raum-Dimension . . . . .	91
7.1.4	Die hier verwendeten B-Splines . . . . .	92
7.2	Darstellung von $\tilde{\theta}_e(\tilde{s})$ und $\tilde{\beta}(\tilde{s})$ durch B-Spline-Basisfunktionen . . . . .	94
7.3	Endlich dimensionales AOSTP . . . . .	95

<b>8</b>	<b>Datenbasen, Singularitäten, Echtzeitapproximation</b>	<b>101</b>
8.1	Erzeugung der Datenbasen der Szenarien . . . . .	120
8.1.1	Eingangsvektoren Szenario 1 und Datenbasis Szenario 2 . . . . .	121
8.1.2	Eingangsvektoren Szenario 3 und Datenbasis Szenario 4 . . . . .	121
8.1.3	Datenbasis des Szenarios 5 . . . . .	122
8.1.4	Datenbasis des Szenarios 6 . . . . .	123
8.1.5	Datenbasis des Szenarios 7 . . . . .	124
8.2	Eigenschaften und Ursachen der Singularitäten . . . . .	127
8.2.1	Szenario 2: Numerische Singularitäten, Anzahl der Änderungen von aktiven/inaktiven UNB . . . . .	131
8.2.2	Szenario 4: Numerische Singularitäten, Anzahl der Änderungen von aktiven/inaktiven UNB . . . . .	132
8.2.3	Szenario 5: Numerische Singularitäten, Anzahl der Änderungen von aktiven/inaktiven UNB . . . . .	133
8.2.4	Koeffizienten in Abhängigkeit von der Standardabweichung . . . . .	135
8.3	Erkennung numerischer Singularitäten . . . . .	136
8.3.1	Verletzungen am Beispiel des Szenario 2 . . . . .	137
8.3.2	Verletzungen am Beispiel des Szenario 4 . . . . .	138
8.3.3	Verletzungen am Beispiel des Szenario 5 . . . . .	139
8.3.4	Verletzungen am Beispiel der Szenarien 6 und 7 . . . . .	139
8.3.5	Verletzung des Singularitätskriteriums: Zusammenstellung . . . . .	140
8.3.6	Approximation bei Verletzung des Singularitätskriteriums . . . . .	145
8.4	Durchführung der Echtzeitapproximation . . . . .	147
<b>9</b>	<b>Approximationseigenschaften</b>	<b>156</b>
9.1	Sprunghöhen des Szenarios 2 . . . . .	157
9.1.1	Schritt 1: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$ des Szenarios 2 . . . . .	159
9.1.2	Schritt 2: Sprunghöhen des Zustandes des Szenarios 2 . . . . .	166
9.1.3	Schritt 3: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$ des Szenarios 2 . . . . .	170
9.2	Maximale relative Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$ . . . . .	175
9.2.1	Szenario 4: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$ . . . . .	176
9.2.2	Szenario 5: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$ . . . . .	179
9.2.3	Szenario 6: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$ . . . . .	182
9.2.4	Szenario 7: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$ . . . . .	185
9.3	Absolute Sprunghöhen des Zustandes . . . . .	187
9.3.1	Szenario 4: Sprunghöhen des Zustandes . . . . .	188

9.3.2	Szenario 5: Sprunghöhen des Zustandes . . . . .	190
9.3.3	Szenario 6: Sprunghöhen des Zustandes . . . . .	192
9.3.4	Szenario 7: Sprunghöhen des Zustandes . . . . .	194
9.4	Absolute Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$ . . . . .	196
9.4.1	Szenario 4: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$ . . . . .	197
9.4.2	Szenario 5: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$ . . . . .	200
9.4.3	Szenario 6: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$ . . . . .	203
9.4.4	Szenario 7: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$ . . . . .	206
<b>10</b>	<b>Beispiele</b> . . . . .	<b>209</b>
10.1	Regelaufwandsberechnung . . . . .	209
10.2	Beispiele für Szenario 1 . . . . .	212
10.2.1	Solltrajektorien im Arbeitsraum . . . . .	212
10.2.2	Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile . . . . .	212
10.2.3	Auswirkung des Nominalwertes auf die Trajektorien . . . . .	214
10.3	Beispiele für Szenario 2 . . . . .	216
10.3.1	Solltrajektorien im Arbeitsraum . . . . .	216
10.3.2	Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile . . . . .	216
10.4	Beispiele für Szenario 3 . . . . .	219
10.4.1	Solltrajektorien im Arbeitsraum . . . . .	219
10.4.2	Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile . . . . .	219
10.4.3	Robustheit stochastisch-optimaler Trajektorien . . . . .	221
10.4.4	Auswirkung des Erwartungswertes auf die Trajektorien . . . . .	223
10.4.5	Auswirkung der Standardabweichung auf die Trajektorien . . . . .	224
10.5	Beispiele für Szenario 4 . . . . .	226
10.5.1	Solltrajektorien im Arbeitsraum . . . . .	226
10.5.2	Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile . . . . .	226
10.6	Beispiele für Szenario 5 . . . . .	229
10.6.1	Solltrajektorien im Arbeitsraum . . . . .	229
10.6.2	Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile . . . . .	230
10.6.3	Aufintegrierter Gesamtregelungsaufwand . . . . .	231
10.7	Beispiele für Szenario 6 (Änderung des Endpunktes am Zeitpunkt $t_1$ ) . . . . .	234
10.7.1	Solltrajektorien im Arbeitsraum . . . . .	234
10.7.2	Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile . . . . .	235
10.8	Beispiele für Szenario 7 (Änderung des Endpunktes am Zeitpunkt $t_0$ ) . . . . .	237
10.8.1	Solltrajektorien im Arbeitsraum . . . . .	237
10.8.2	Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile . . . . .	238

<b>11 Abschließende Betrachtungen</b>	<b>240</b>
11.1 Automatisierter Fluggepäckumschlag mit optimalen Trajektorien . . . . .	240
11.2 Wirtschaftlicher Nutzen des automatisierten Gepäckumschlages . . . . .	247
<b>12 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>252</b>
12.1 Zusammenfassung . . . . .	252
12.2 Ausblick . . . . .	253
<b>13 Anhang</b>	<b>254</b>
13.1 Die Programme . . . . .	254
13.1.1 Das Programm <b>OSTP V0.3</b> . . . . .	254
13.1.2 Das Programm <b>SAGAF V0.1</b> . . . . .	256
13.1.3 Das Programm <b>VERGLEICH V0.1</b> . . . . .	257
13.2 Grundlagen der linearen Regelung . . . . .	258
13.2.1 Proportionalregelung . . . . .	258
13.2.2 Differentialregelung . . . . .	258
13.2.3 Integralregelung . . . . .	258
13.2.4 Proportional-Integral-Differentialregelung (PID-Regelung) . . . . .	258
13.2.5 Der Regler des Roboters MANUTECH r3 . . . . .	259
13.3 Prädiktion der Gelenkwinkel $\theta$ und -geschwindigkeiten $\dot{\theta}$ . . . . .	260
13.4 Grundlegende Funktionsweise der SQP . . . . .	268
13.4.1 Kuhn-Tucker-Bedingungen: Notwendige Bedingungen 1. Ordnung . . . . .	269
13.4.2 Hinreichende Bedingungen 2. Ordnung . . . . .	269
13.4.3 Algorithmus der Sequentiellen Quadratischen Programmierung . . . . .	269
13.4.4 Berechnung der Suchrichtung . . . . .	270
13.5 Vorschlag für mehrdimensionale Singularitätsintervalle . . . . .	272
13.6 Zur Diskussion . . . . .	273



# Kapitel 1

## Einführung

Heutige Verkehrsflughäfen garantieren ihren Passagieren eine Transferzeit von 35 Minuten und Regionalflugzeugen eine Bodenzeit von nur noch 20 Minuten. Eine bereits einminütige Überschreitung der Bodenzeit verursacht einen Schaden von 60 Euro, ein zurückgebliebener Koffer sogar von 250 Euro [5]. Die beiden folgenden, erst in jüngster Zeit konsequent durchgeführten Sicherheitsmaßnahmen haben die für den Gepäckumschlag zur Verfügung stehende Zeitspanne deutlich reduziert:

- Jedes Gepäckstück durchläuft inzwischen eine Sprengstoffkontrolle.
- Ein Gepäckstück darf erst in das Flugzeug eingeladen werden, wenn feststeht, daß der zugehörige Passagier sich auch an Bord befinden wird.

Die heute schon angespannte Situation wird sich ab 2007 mit der Einführung des Großraumflugzeuges A380 erheblich verschärfen: Ein A380 befördert zweimal so viele interkontinentale Passagiere wie ein A340 oder eine Boeing 747. 90 Prozent der Passagiere eines Interkontinentalfluges steigen auf Regionalflüge um. Da die Regionalflugzeuge absehbar ihre Passagierkapazität pro Maschine nicht erhöhen, müssen die Flughäfen innerhalb der gleichen Zeit die doppelte Anzahl von Regionalflugzeugen abfertigen.

Den kritischen Punkt innerhalb des Gepäckflusses stellen die sog. Umschlagstationen dar. Es existieren zwei Sorten von Umschlagstationen:

- *für eingehendes Gepäck:* An diesen wird das Gepäck von den Vorfeldfahrzeugen bzw. aus den Containern auf die Transportbänder der Gepäckförderanlage umgeschlagen. Menschen sind hierzu nicht erforderlich, da die die eingehenden Koffer transportierenden Fahrzeuge bzw. Container in Umstülpvorrichtungen gelangen und ihren Inhalt direkt auf ein Transportband entleeren. Der eingehende Gepäckfluß läßt sich an den Umschlagstationen nicht mehr wesentlich beschleunigen.
- *für abgehendes Gepäck:* An diesen wird das Gepäck von den Transportbändern auf die Vorfeldfahrzeuge bzw. in die Container umgeladen. Diese Tätigkeit führen derzeit ausschließlich Menschen aus, deren individuelle Umschlagsleistung sich nicht mehr steigern läßt.

Zwecks Verdoppelung der Umschlagsleistung für abgehendes Gepäck gibt es zwei Möglichkeiten:

- *Verdoppelung der Anzahl der vorhandenen Umschlagstationen*  
Die Anzahl der Umschlagstationen läßt sich in den vorhandenen Gepäckterminals nicht heraufsetzen, so daß Neubaumaßnahmen erforderlich werden. Es werden erhebliche Investitionsmittel für den Bau sowie die Beschaffung und Installation der Fördertechnik benötigt.

Durch die Verdoppelung der Anzahl der Umschlagstation verlängert sich der durchschnittliche Transportweg eines Gepäckstückes, den eine fortgeschrittene Fördertechnik, z.B. linear-motorgetriebene Schalenförderer, kompensieren muß. Diese Möglichkeit wird hier nicht weiter behandelt.

- *Verdoppelung der Kapazität der vorhandenen Umschlagstationen*

Eine Vermehrung des Personals pro Umschlagstation bewirkt aufgrund deren ergonomischer Auslegung keine Steigerung des Durchsatzes der Umschlagstation und ist damit wirkungslos. Ein Umbau für weitere Personen ist aus Platzgründen nicht möglich; ein Abänderung der vorhandenen Umschlagstationen zur Installation von Robotern läßt sich jedoch unter Wegfall der menschlichen Arbeitsplätze umsetzen <sup>1</sup>. Daher beabsichtigen die Flughäfen Frankfurt-Rhein-Main und München, handelsübliche Roboter anzuschaffen und den Umschlag auf die Vorfeldfahrzeuge mit diesen zu automatisieren. Der Flughafen Zürich erprobt bereits einen solchen Roboter.

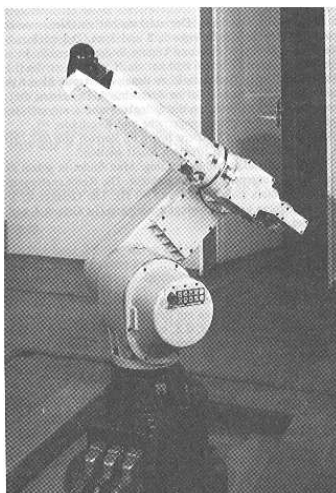


Abbildung 1.1: Roboter MANUTEC r3 im Labor der TU München

Der Nutzer eines Industrieroboters strebt eine möglichst hohe Taktrate an. Die in Kapitel 2 dargelegten Szenarien des Gepäckumschlages im Abflugbereich zielen daher darauf ab, Gepäckstücke zwischen zwei gleichbleibenden Punkten mit maximaler Taktrate zu transportieren, wobei das Gewicht  $m$  der einzelnen Gepäckstücke mathematisch als Realisierung einer Zufallsvariablen  $m(\cdot)$  mit bekannter Verteilung  $P_{m(\cdot)}$  aufgefaßt wird. Unter bestimmten Bedingungen für den Erwartungswert  $\bar{m}$  und die Standardabweichung  $\sigma$  kann dazu auch eine Normalverteilung verwendet werden. Ein Beispiel ist  $\bar{m} = 15 \text{ kg}$  und  $\sigma = 5.0 \text{ kg}$ . Die Trägheitsmomente unterliegen ebenfalls stochastischen Verteilungen. In der vorliegenden Arbeit werden die Gepäckstücke jedoch als punktförmige Massen betrachtet. Somit entfällt die Einbeziehung der Schwankungen der Trägheitsmomente. Den vorgestellten Berechnungen liegt das Modell des Roboters MANUTEC r3 nach [73] zugrunde, wobei aufgrund der zuvor vereinbarten Punktförmigkeit der Nutzlast nur die ersten drei Gelenke, von der Basis aus gezählt (s. Abb. 4.1), berücksichtigt und die Gelenke 4 bis 6 als in ihrer Nullstellung arretiert betrachtet werden.

Die Ziele dieser Arbeit sind,

---

<sup>1</sup>Die in diesem Bereich freierwerbenden Mitarbeiter unterstützen dann ihre Kollegen, die auf dem Rollfeld die Flugzeuge be- bzw. entladen. Somit sinkt die Wirbelsäulenbelastung des einzelnen Beschäftigten um die Hälfte. Die Arbeitgeber erhoffen sich durch diese Umstrukturierungsmaßnahme einen drastischen Rückgang der Anzahl der Rückenerkrankungen.

- Formulierung von Szenarien zur Beschreibung möglicher (und typischer) Arten des Fluggepäckaufkommens und des daraus resultierenden Vorgehens beim Gepäckumschlag unter Einsatz eines Roboters,
- die Berechnung einer deterministischen Referenztrajektorie vom Anfangs- zum Endpunkt im Falle der Verfügbarkeit des exakten Wertes der Nutzlastmasse,
- die Schätzung einer solchen deterministischen Referenztrajektorie in Echtzeit,
- die Berechnung einer robust-optimalen Referenztrajektorie vom Anfangs- zum Endpunkt durch Lösen eines sog. Punkt-zu-Punkt-Problems <sup>2</sup>, wenn die Nutzlastmasse nur in Form einer Verteilung bekannt ist,
- die Schätzung einer solchen robust-optimalen Referenztrajektorie in Echtzeit,
- die Durchführung einer einmaligen Schätzung einer besser angepassten Referenztrajektorie in Echtzeit von der aktuellen Betriebsposition zum Endpunkt zur Verminderung des Regelaufwandes einer berechneten robust-optimalen Referenztrajektorie. Diese Schätzung erfolgt, sobald nach dem Losfahren an vorab festgelegten Zeitpunkten durch Abfragen eines als gegeben angenommenen Parameterschätzers neue, präzisere Informationen über den realisierten Wert der Nutzlastmasse, bestehend aus Erwartungswert und deutlich verkleinerter Standardabweichung, eintreffen.

Kapitel 3 vereinbart die in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme nebst den zugehörigen Transformationen zur Beschreibung der Kinematik des Roboters als Starrkörperkette.

In Kapitel 4 wird das in dieser Arbeit benutzte dynamische Modell des Roboters MANUTEC r3 vorgestellt. Die Gelenke werden als reibungsfrei und die Untersetzungsgetriebe der Motoren als spielfrei angenommen. Da zudem von einer Punktförmigkeit der Nutzlastmasse ausgegangen wird, finden im Modell nur die ersten drei Gelenke des Roboters Berücksichtigung (s.o.).

Kapitel 5 stellt den für den Roboter MANUTEC r3 in dieser Arbeit verwendeten PD-Regler dar.

In Kapitel 6 werden die verschiedenen Trajektorienplanungsprobleme aufgeführt. Als erstes wird das Punkt-zu-Punkt-Problem mit deterministischer Nutzlast behandelt, wie es u.a. durch Johanni [20] beschrieben wird. Schließlich erfolgt die Erläuterung der Erweiterung des deterministischen Problems zu einem Ersatzproblem mit Wahrscheinlichkeitsrestriktionen für stochastisch verteilte Nutzlastmassen [40], aus dem das Adaptive Stochastische Punkt-zu-Punkt-Problem entwickelt wird.

Kapitel 7 beschreibt

- die Transformation der freien Endzeit  $t_f$  des Ersatzproblems auf eine feste Weglänge  $s_f = 1$ ,
- die Reduzierung der unendlichen Dimension auf eine endliche mittels B-Spline-Basisfunktionen sowie

---

<sup>2</sup>Ein solches Problem besteht aus einer Zielfunktion, Gleichungsnebenbedingungen (GNB) und Ungleichungsnebenbedingungen (UNB).

- die Lösung des nun endlich dimensionalen Optimierungsproblems durch das direkte numerische Verfahren der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP).

Damit lassen sich alle Trajektorien bis auf die zu schätzenden erzeugen.

Kapitel 8 beschreibt das Vorgehen zur Erzeugung der Datenbasen. Diese bestehen aus einem ein-<sup>3</sup>, zwei-<sup>4</sup> bzw. dreidimensionalen<sup>5</sup> äquidistanten Gitter. An jedem Gitterpunkt werden mittels des *Impliziten Satzes der Funktionen* die ersten Ableitungen nach den Eingangsparametern bereitgestellt. Diese lassen sich dann zur Durchführung einer linearen Approximation zwischen zwei Gitterpunkten heranziehen. Ferner stellt das Kapitel

- die Durchsuchungsmethode der Datenbasen sowie
- die Erzeugung der zu approximierenden Trajektorien durch Anpassung der ausgewählten Trajektorien an die gemessenen Gelenkwinkel und Gelenkwinkelgeschwindigkeiten

vor.

Das Kapitel 9 führt Approximationsfehlerbetrachtungen anhand sogenannter Sprunghöhen zwischen benachbarten Gitterpunkten durch. Dazu wird die durch Lösen eines Ersatzproblems entstandene Trajektorie von einem benachbarten Gitterpunkt aus approximiert. Die Differenz zwischen der durch Lösen eines Ersatzproblems entstandenen Trajektorie zu der vom Nachbarpunkt aus entwickelten wird als Sprunghöhe bezeichnet. Das Kapitel zeigt Sprunghöhen für den Lösungs-, den Konfigurations- und den Arbeitsraum.

Das Kapitel 10 enthält Beispielrechnungen zu den einzelnen Szenarien. Diese bestehen aus grafischen Darstellungen

- der Trajektorien im Konfigurations- und Arbeitsraum sowie
- des Regelaufwandes dieser Trajektorien<sup>6</sup>.

Abschließend werden Betrachtungen zur Realisierung eines automatisierten, optimale Robotertrajektorien verwendenden Gepäckumschlages und zu dessen wirtschaftlichem Nutzen durchgeführt.

---

<sup>3</sup>Szenario 2

<sup>4</sup>Szenarien 4 und 5

<sup>5</sup>Notfallszenarien 6 und 7

<sup>6</sup>,sofern vorhanden,

## Kapitel 2

# Gepäckverladeroboter auf Flughäfen

### 2.1 Stochastische Modellparameter

Die rechnerische Bestimmung von Roboterbahnen greift auf sog. dynamische Modelle zurück. Diese bestehen aus den Bewegungsgleichungen des Roboters. Die folgenden, in den Bewegungsgleichungen vorkommenden Größen lassen sich als Realisierungen stochastischer Verteilungen beschreiben:

- Länge, Trägheitstensor, Masse und Schwerpunktlage der Roboterglieder. Ursächlich hierfür sind die Fertigungstoleranzen in der Produktion.
- Winkel, Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen der Robotergelenke aufgrund von Meßfehlern,
- Trägheitstensor, Schwerpunktlage und Masse der Nutzlasten.

Infolgedessen sind die vorgenannten Größen nur in Form von Erwartungswert und Standardabweichung bekannt. In der Praxis fallen die Standardabweichungen der in den ersten beiden Punkten aufgeführten Größen jedoch so klein aus, daß die Nominalwertmethode zur Anwendung kommt, d.h. die Standardabweichung wird vernachlässigt und der Erwartungswert als Realisierung herangezogen. Führen die Unterschiede zwischen realisierten Werten und Nominalwerten zu Abweichungen von der Sollbahn, so gleicht der Regler des Roboters diese aus.

Für die Nutzlast kommt die Nominalwertmethode auf Trägheitstensor, Schwerpunktlage und Masse der Nutzlast in Anlagen der industriellen Massenproduktion zur Anwendung, da Großserienprodukte hinsichtlich dieser Parameter nur innerhalb enger Fertigungstoleranzen schwanken. Sind Standardabweichungen von Trägheitstensor, Schwerpunktlage und Masse der Nutzlasten jedoch groß, wie in den folgenden, gemäß [56] nicht der Großserienfertigung zuzuordnenden Einsatzbereichen, hätte deren Vernachlässigung einen deutlich erhöhten und damit unerwünschten Regelaufwand zur Folge:

- Landwirtschaft: Pflückroboter,
- Brandbekämpfung: Personenrettungsroboter
- Postverteilzentren: Sortieren von Paketen,

- Flughäfen: Gepäckumschlag
- Pflege:
  - Roboterarm für Rollstühle
  - Roboter für den Anstaltsbereich
- Medizin: Assistenzroboter in der Chirurgie
- Unterwassertechnik: Unterwasserroboter mit Manipulatorarm
- Weltraum: freifliegende Serviceroboter mit Manipulatorarmen
- Zukunft: Beschickungsroboter für Regale im Supermarkt.

In der vorliegenden Arbeit wird nur die Nutzlastmasse  $m$  als unsicher angenommen, wobei die Nutzlast selbst punktförmig in das Robotermodell eingeht.

Echtzeitanforderungen liegen wegen der erforderlichen hohen Taktrate bei den Anwendungsfällen

- Paketsortierung und
- Kofferverladung <sup>1</sup>

vor. Auf den Anwendungsfall Kofferverladung zielt diese Arbeit ab.

## 2.2 Automatisierte Behandlung abgehender Koffer

Zwecks der Automatisierung der Behandlung abgehender Koffer wird das folgende, auf einem handelsüblichen Industrieroboter basierende Konzept vorgeschlagen:

### 2.2.1 Aufnahmepunkt Transportband

Das seitens der Firma Lödige projektierte, am Flughafen Zürich in Erprobung befindliche, unter den Koffer fassende Löffelsystem (siehe Abb. 2.1, 2.2) weist vier gravierende Nachteile auf:

- Das Gepäckstück kann nur liegend transportiert werden, da ansonsten die Gefahr des Umfallens während des Transportvorganges besteht.
- Flieh- und Coriolis-Kräfte zerren das Gepäckstück vom Löffel.
- Am Zielpunkt lassen sich die Gepäckstücke nur nebeneinander oder übereinander im liegenden Zustand ablegen. Dazu muß der Löffel ähnlich der Schaufel eines Radladers abgekippt werden oder über eine integrierte Fördereinrichtung verfügen.
- Der erreichte Befüllungsgrad liegt bei nur 80%, ein für interkontinentale Fluggesellschaften unakzeptabler Wert.



Abbildung 2.1: Verladroboter der Firma Lödige/Warburg bei Befüllen eines Luftfrachtcontainers



Abbildung 2.2: Pilotanlage am Flughafen Zürich



Abbildung 2.3: Vollautomatische Abstapelanlage für Bleche mit Maschinellen Sichtsystem der Firma Lödige/Warburg

Aufgrund der sehr unterschiedlichen Oberflächenbeschaffenheit der Gepäckstücke sind die zum Abstapeln von Blechen gebräuchlichen Saugnäpfe ebenfalls ungeeignet (siehe Abb. 2.3).

<sup>1</sup> *Kofferverladung, Kofferumschlag, Gepäckumschlag* und *Gepäckverladung* werden in dieser Arbeit als äquivalente

Daher hat sich der Flughafen München für das in Abbildung 2.4 gezeigte Roboterwerkzeug der Firma Grenzebach entschieden. Dieses Werkzeug fixiert das Gepäckstück mittels Flachbändern an der Roboterhand und kann daher sowohl Hartschalenkoffer als auch weiche, flexible Reisetaschen handhaben [18] [55]. Aufgrunddessen **empfiehlt** sich eine **Verwendung** dieses Werkzeuges. Am Absetzpunkt werden die Flachbänder einfach gekappt und unter dem Gepäckstück während des Rücklaufes des Roboters weggezogen.



Abbildung 2.4: Pilotanlage der Fa. Grenzebach

### 2.2.2 Absetzpunkt Vorfeldfahrzeug

Derzeit kommen auf Flughäfen zwei unterschiedliche Arten des Transportes des Gepäcks zwischen Terminal und Flugzeug zum Einsatz:

- Die Koffer werden auf offene Anhänger verladen, die dann von einer kleinen Zugmaschine zum Flugzeug gezogen werden. Dort steht ein Förderband (siehe Abb. 2.5) bereit, um die Gepäckstücke in den Laderaum zu befördern.

---

Begriffe verwendet.





Abbildung 2.5: Zwillingsförderband der Firma Lödige

- Die Koffer werden im Terminal in Luftfrachtcontainern verstaut, die ein Rollenband (siehe Abb. 2.6) zu einer selbstfahrenden Hebebühne (siehe Abb. 2.7) bringt. Diese begibt sich dann zum Flugzeug und hebt ihre Last auf Höhe des Ladetores. Das Bodenpersonal schiebt die Container in den Rumpf.



Abbildung 2.6: Rollenband mit Drehtisch der Firma Lödige auf dem Flughafen Frankfurt

Das zweite Verfahren kommt jedoch nur bei Großraumflugzeugen wie dem A330, A340, A380, der Boeing 747 oder Boeing 777 zum Einsatz, da die Container nicht in die Laderäume der kleineren Zubringerflugzeuge, z.B. A318, Do728, A319, Do928, A320, A321, Boeing 737, passen. Daher ist es nur an den internationalen Drehkreuzen zu finden. Die Zubringermaschinen müssen jedoch gemäß dem ersten Verfahren abgefertigt werden. Somit benutzen die großen Umsteigeknotenpunkte beide, die kleinen regionalen Flughäfen nur die erste Abfertigungsmethode.

Um die Belastungen des Gepäckstückes durch Stöße beim Absetzen gering zu halten, legt der Roboter den Koffer

- im ersten Fall auf den offenen Anhänger,
- im zweiten Fall in den auf der Rückseite liegenden und dadurch mit seiner Öffnung nach oben zeigenden Container. Ein Kippgestell (siehe Abb. 2.8) richtet den Container wieder auf.



Abbildung 2.7: selbstfahrende Hebebühne Goliath der Firma Lödige



Abbildung 2.8: Kippgestell der Firma Interroll

### 2.2.3 Konzept für Umschlagstation auf Roboterbasis

Roboter sind in der Anschaffung und Wartung sehr teuer. Daher besteht auf Seiten des Betreibers das Bestreben

- zum einen mit möglichst wenigen Robotern auszukommen und
- zum anderen die erworbenen Roboter möglichst verschleißarm zu betreiben.

Nun verzeichnen moderne Großflughäfen (Frankfurt, München, Atlanta, Chicago) alle 30sec eine Flugbewegung. Aus Sicht der Bodendienste bedeutet dies, im Dreißig-Sekunden-Takt mit einer zu be- bzw. entladenden Maschine konfrontiert zu werden. Der Dreißig-Sekunden-Takt pflanzt sich bis zum Kofferumschlagpunkt im Terminal fort. Der Zielkonflikt zwischen Kostenreduzierung in Anschaffung und Betrieb einerseits sowie der zwingenden Notwendigkeit zu äußerst zügiger Be- bzw. Entladung der Koffertransportfahrzeuge im Terminal andererseits wird in dieser Arbeit dadurch gelöst, indem

- die Umschlagstation selbst derart gestaltet wird, daß die den Industrierobotern ureigenste Fähigkeit, Güter zwischen zwei stets gleichbleibenden Punkten zügig zu befördern, voll zur Geltung kommt,

- der den Roboterverschleiß erhöhende Regelungsaufwand <sup>2</sup> so gering wie möglich gehalten wird.

Die Baumaßnahmen beschränken sich auf den robotergerechten Umbau der Umschlagstation.

### 2.2.4 Teilsystem Kofferzuführung

Um das Gepäckstück unter dem Werkzeug zu zentrieren, benötigt man ein maschinelles Sichtsystem und einen Ausrichter. Ein nachgeschalteter, auf einer hydraulischen Hebebühne montierter Eckumsetzer positioniert das Gepäckstück mittig unter das Werkzeug des Roboters. Die Bilder 2.9 und 2.10 zeigen einen Eckumsetzer mit vorausgehendem Ausrichter.



Abbildung 2.9: Hebebühne der Firma Lödige

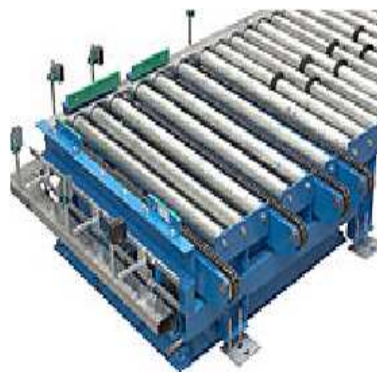


Abbildung 2.10: Eckumsetzer der Firma Lödige mit vorausgehender Ausrichterstrecke

Die Rollen der Förderstrecke des Ausrichters sind zweigeteilt und werden unabhängig voneinander angetrieben. Unterschiedliche Drehzahlen der Rollenhälften bewirken eine Drehung des Koffers um die Hochachse. Der Vorteil eines solchen Ausrichters gegenüber einem Drehtisch liegt darin, daß das Transportgut sich weiterhin auf sein Ziel hin bewegt und nicht wie im Falle eines Drehtellers zum Stillstand kommt.

---

<sup>2</sup>Wechsellasten!

### 2.2.5 Teilsystem Kofferabtransport für kleine Maschinen

Die für kleinere Maschinen benutzten Anhänger fahren auf eine in einer Grube versenkbare Hebebühne mit integriertem Eckumsetzer und Radfixiereinrichtungen. Nach dem Entkoppeln ist jedes Fahrzeug unabhängig voneinander translatorisch in x-,y- und z-Richtung bewegbar. Der für ein Gepäckstück vorgesehene, seitens eines weiteren maschinellen Sichtsystems aufgespürte freie Platz wird somit direkt unter den Endpunkt des Roboters positioniert (siehe Abb. 2.12).



Abbildung 2.11: Eckumsetzer der Firma Lödige mit vorausgehender Ausrichter-  
strecke auf Hebebühne montiert

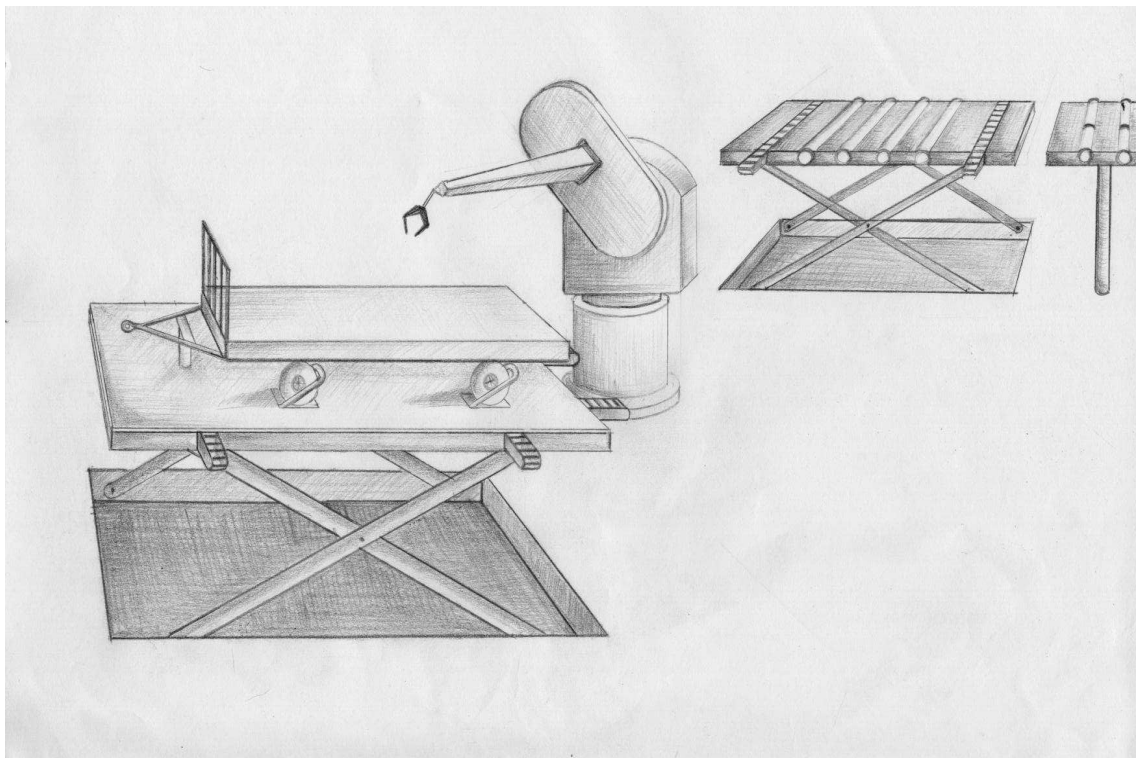


Abbildung 2.12: Umschlagstation für kleine Maschinen

### 2.2.6 Teilsystem Kofferabtransport für Großraumflugzeuge

Eine Kippvorrichtung dreht die Öffnung des Containers nach oben. Rollenförderer bringen ihn anschließend zu einem auf einer Hebebühne montierten Eckumsetzer (siehe Abb. 2.11). Dieser sorgt für die Bereitstellung eines freien Platzes unter dem Absetzpunkt des Roboters. Zwecks Erhöhung der Ausnutzung des Containervolumens hat der Umschlagstation (siehe Abb. 2.14) ein Sortierer (siehe Abb. 2.13) voranzugehen, der die Gepäckstücke in geeigneter Reihenfolge der Umschlagstation zuführt. Ein Zwischenspeichern für nicht mehr in den Container hineinpassende Gepäckstücke an der Umschlagstation nach Vorbild der Züricher Pilotanlage kostet zuviel Zeit.



Abbildung 2.13: Sortierer der Firma Interroll

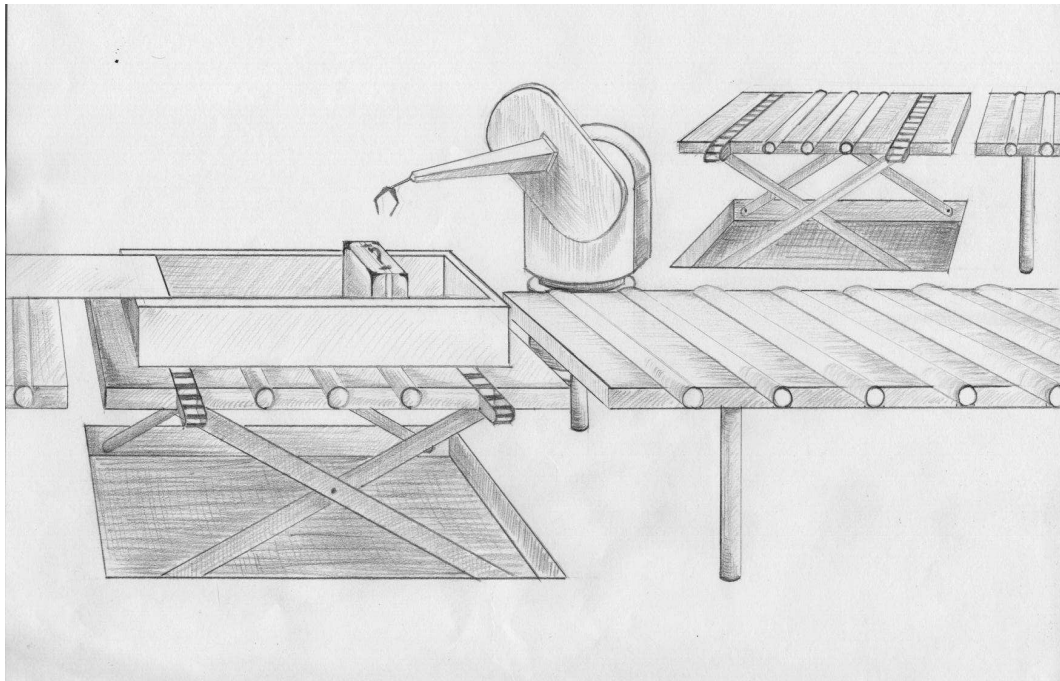


Abbildung 2.14: Umschlagstation für Großraumflugzeuge

## 2.3 Fluggepäckumschlag und -aufkommen

Die Eincheckschalter und die Umschlagstationen sind an allen Flughäfen funktionsgleich. Die Anlagen, die das Gepäck von den Eincheckschaltern zu den Umschlagstationen bringen, weisen hingegen Unterschiede auf. Diese sind entweder **dezentral** oder **zentral** konzipiert (Einzelheiten siehe Unterkapitel 2.3.1).

Im Hinblick auf den Robotereinsatz an den Umschlagstationen erläutert das Unterkapitel 2.3.2 die drei bislang nicht verwirklichten Möglichkeiten der Weiterverarbeitung der am Eincheckschalter anfallenden Gewichtsinformationen.

Das Fluggepäck läßt sich gemäß Unterkapitel 2.3.3 in drei Kategorien einteilen.

Aus den zwei unterschiedlichen Fördermethoden (dezentral oder zentral), den drei Möglichkeiten der Weiterverarbeitung der am Eincheckschalter anfallenden Gewichtsinformationen und den drei Gepäckkategorien ergeben sich die in Unterkapitel 2.3.4 vorgestellten fünf Szenarien des Gepäckumschlages.

Die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die Robotersteuerung führt Unterkapitel 2.3.5 auf.

Im folgenden wird zunächst die Abfertigung des eingehenden Gepäcks und die damit derzeit eingehende Datenverarbeitung am Eincheckschalter dargestellt:

Gibt ein Passagier sein Gepäck am Eincheckschalter ab, nimmt gemäß [5] <sup>3</sup> der Rechner des Eincheckschalters nach dem Wiegen über das Gateway des Flughafen-Intranets Verbindung mit dem Rechenzentrum (z.B. bei Lufthansa in Köln) der Luftfahrtgesellschaft auf, deren Flug gerade abgefertigt wird. Der Rechner des Eincheckschalters sendet die Passagier- und Gepäckdaten an das Rechenzentrum der Luftfahrtgesellschaft. Dieses erstellt gemäß IATA 720 die ein-eindeutige Tag-ID, einen 10-stelligen Barcode, sowie das zugehörige EDV-Datenfeld Baggage Service Message (BSM) und schickt beides an den Rechner des sendenden Eincheckschalters zurück, der dann den Gepäckaufkleber ausdruckt. Die Tag-ID ist als Strichcode auf dem Gepäckaufkleber vorhanden. Die Rechner der Umsteige- und Zielflughäfen erhalten Exemplare der Tag-ID und BSM. Über den mittels Laserscannerbrücke auslesbaren, die Tag-ID enthaltenen Strichcode des Gepäckaufklebers identifizieren die Start-, Umsteige- und Zielflughäfen das Gepäckstück eindeutig und greifen anhand der ausgelesenen Tag-ID über ihr Intranet auf die zugehörige BSM zu. Um die anfallenden Datenströme zu bewältigen, verfügt jeder Flughafen über ein ausgebautes Intranet.

Die BSM enthält ein Feld, in das das Gewicht des Gepäckstückes eingetragen werden kann. Derzeit nutzen die Luftfahrtgesellschaften dieses Feld nicht. Da die Flughäfen für die Beladung des Flugzeuges, d.h. für das Gesamtgewicht der Ladung und für deren Verteilung im Flugzeug <sup>4</sup>, verantwortlich sind, kopieren viele Flughäfen die BSM und befüllen das Gewichtsfeld der kopierten BSM, um das Wiegen der Gepäckcontainer vor dem Verladen in das Flugzeug einzusparen:

Hat das Personal an den Umschlagstationen einen Gepäckcontainer beladen, werden vor dem Verschließen die Strichcodes der Gepäckaufkleber mit einem Handscanner eingelesen. Anschließend werden die Einträge der Gewichtsfelder der kopierten BSM addiert.

### 2.3.1 Gepäckfördermethoden

- **Dezentrale Methode:**

Die dezentrale Methode (Siehe Abb. 2.15) findet z.B. im Kölner Terminal I oder in Berlin-Tegel Anwendung:

Jedem Gate sind ein Eincheckschalter und eine Umschlagstation zugeordnet. Das Gepäck geht direkt vom Eincheckschalter zur Umschlagstation, da nur ein Förderband zwischen Eincheckschalter und Umschlagstation existiert. Es gibt keine die Eincheckschalter und Umschlagstationen untereinander verbindenden Förderbänder. Infolgedessen kann der Flug nur durch einen

<sup>3</sup>Der Autor ist Mitarbeiter der Flughafengesellschaft München.

<sup>4</sup>Schwerpunktlage des Flugzeuges!

Eincheckschalter terminalseitig und eine Umschlagstation flugfeldseitig, d.h. seriell, abgefertigt werden. Dieses serielle Vorgehen eignet sich aus Zeitgründen nur für Regionalflugzeuge ( $\leq 150$  Passagiere). Aufgrund des Fehlens von verbindenden Förderbändern verfügen diese Flughäfen auch über keinerlei Frühgepäckspeicher. Die Eincheckschalter öffnen erst dreißig Minuten vor Abflug bei Linienflügen. Verladebeginn und das Öffnen der Eincheckschalter fallen somit zeitlich zusammen.

Das Gepäck der Umsteigepassagiere wird in der Regel beim Ausladen aus dem Flugzeug auf ein extra Vorfeldfahrzeug verladen. Dieses fährt dann die Umschlagstationen der Folgeflüge ab. An jeder dieser Stationen entnehmen Flughafenmitarbeiter die jeweiligen Gepäckstücke und laden sie auf die dort stehenden Vorfeldfahrzeuge um.

Bei Charterflügen muß jeder Passagier sein Gepäck zwei Stunden vor Abflug aufgegeben haben. Da ein Frühgepäckspeicher fehlt, wird das Gepäck direkt auf die Vorfeldfahrzeuge verladen, die dann mindestens 90 min in beladenem Zustand im Terminal stehen und etwa 20 Minuten vor Abflug zum Flugzeug gebracht werden.

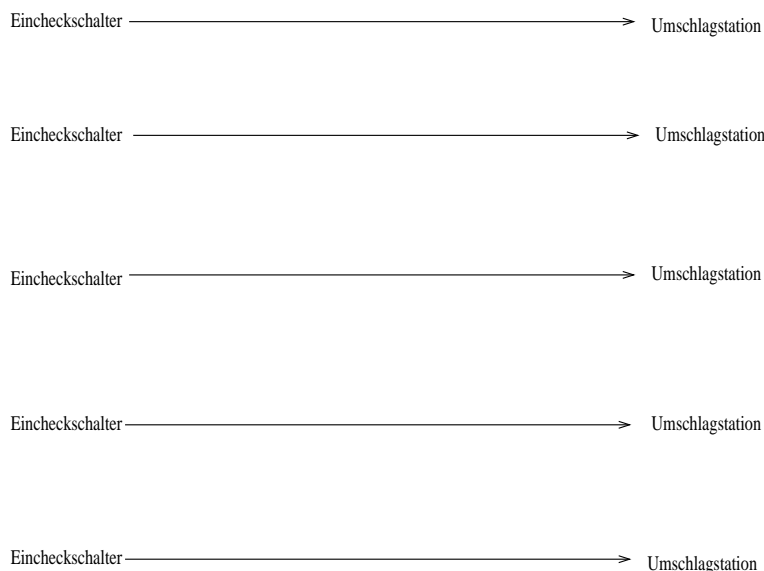


Abbildung 2.15: Dezentrale Methode

- **Zentrale Methode:**

Die Flughäfen wie Frankfurt-Rhein-Main, München oder Zürich wenden die zentrale Methode (Siehe Abb. 2.16) an:

Die Eincheckschalter geben das Gepäck an einen zentralen Sortierer ab. Dieser schleust das Gepäck zur jeweiligen Umschlagstation aus. Jedes Gepäckstück ist durch die ein-eindeutig zugeordnete, auf dem Aufkleber als Strichcode vermerkte Tag-ID mittels Scannerbrücke identifizierbar. Der zentrale Gepäcksortierer ermöglicht einen Flug terminalseitig durch mehrere Eincheckschalter und flugfeldseitig durch mehrere Umschlagstationen, d.h. parallel, abzufertigen. Dieses parallele Vorgehen ist bei Großraumflugzeugen, wie dem A380 auch zwingend erforderlich, da die Bodenzeit sich ansonsten vervielfacht. Gibt ein Passagier sein Gepäckstück früher als eine halbe Stunde vor Abflug auf, geht sein Gepäck in den Frühgepäckspeicher <sup>5</sup>, andernfalls läuft es zu den in der Regel 30 min vor Abflug öffnenden Umschlagstationen durch

<sup>5</sup>Ein Frühgepäckspeicher besteht aus bis zu 200 m langen, übereinander angeordneten Förderbändern. In der Regel ist es an Flughäfen mit Frühgepäckspeicher einem Passagier bereits dreieinhalb Stunden vor Abflug möglich, sein Gepäck aufzugeben. Als Einbauort wird häufig das vom Sortierer eingeschlossene Oval gewählt.

und wird dort sofort auf ein Vorfeldfahrzeug oder in einen Container verladen. Die Transportzeit beträgt ca. 3 min.

Das Gepäck der Umsteigepassagiere wird von der Gepäckförderanlage in der Regel direkt an die den Folgeflug abfertigenden Umschlagstationen geleitet, da aufgrund der kurzen Transferzeit von 35 min dessen Abfertigung bereits begonnen hat, wenn die Gepäckstücke des ankommenden Fluges das Terminal erreichen.

Das Gepäck eines Charterfluges gelangt vollständig in den Frühgepäckspeicher und verbleibt dort bis die Umschlagstationen 30 min vor Abflug öffnen. Die Verweildauer im Frühgepäckspeicher beträgt somit mindestens 90 min.

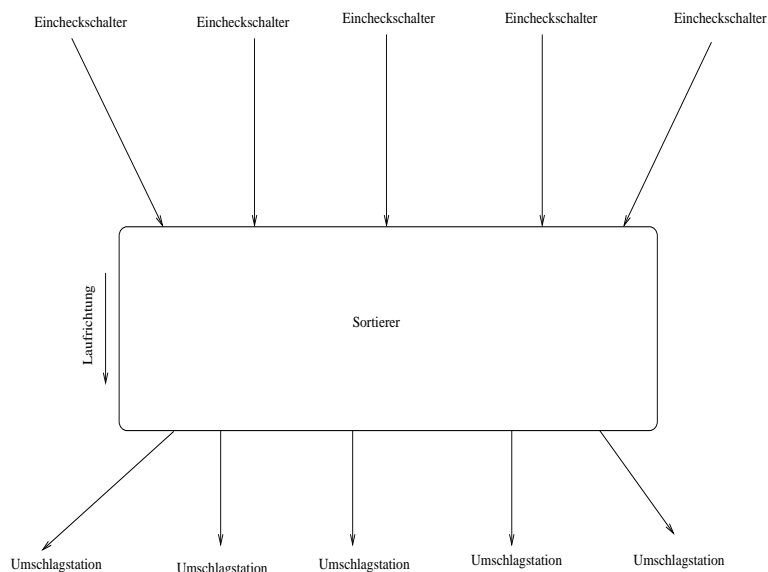


Abbildung 2.16: Zentrale Methode

### 2.3.2 Weiterverarbeitungsmöglichkeiten der Gewichtsinformationen

Die am Eincheckschalter anfallenden Gewichtsinformationen können im Hinblick auf den Einsatz von Robotern an den Umschlagstationen auf unterschiedliche Art und Weise weiterverarbeitet werden:

1. Der Flughafen kopiert die BSM und befüllt das Gewichtsfeld der Kopie. Liest eine Scannerbrücke die als Strichcode verschlüsselte Tag-ID auf dem Gepäckaufkleber aus, stellt das Intranet des Flughafens die Gewichtsinformation des Gepäckstückes dem Roboter der Umschlagstation zur Verfügung.
2. Der Flughafen errechnet Erwartungswert und Standardabweichung des Gepäckes des betreffenden Fluges.
3. Der Flughafen verarbeitet die Gewichtsinformation selbst gar nicht weiter.



### 2.3.3 Gepäckkategorien

Das abgehende Gepäckaufkommen läßt sich in drei Kategorien <sup>6</sup> einteilen:

- **Kategorie 1:**  
Charterflüge; das Gepäck wird mindestens 90 Minuten zwischengespeichert;
- **Kategorie 2:**  
Linienflüge auf sog. Rennstrecken <sup>7</sup>; die Passagiere dieser Flüge setzen sich grundsätzlich aus demselben Klientel zusammen. Somit existieren zuverlässige Statistiken bezüglich des Gepäcks, d.h. dessen Erwartungswert und die Standardabweichung sind in Abhängigkeit von der Jahreszeit bekannt. Erwartungswert und Standardabweichung werden anhand der am Eincheckschalter anfallenden Gewichtsdaten des Frühgepäcks nochmals verifiziert und gegebenenfalls angepaßt;
- **Kategorie 3:**  
anderweitige Linienflüge; die Passagiere setzen sich sowohl aus Touristen als auch Geschäftsleuten zusammen. Ferner weisen diese Flüge gerade bei interkontinentalen Verbindungen einen hohen Anteil an Umsteigepassagieren auf <sup>8</sup>. Eine verlässliche Schätzung von Erwartungswert und Standardabweichung steht nicht zur Verfügung.

### 2.3.4 Szenarien des Gepäckumschlages

In Abhängigkeit von der infrastrukturseitig vorgegebenen Fördermethode (zentral/dezentral), den drei Möglichkeiten der Weiterverarbeitung und Bereitstellung der Information Gepäckgewicht sowie den drei Kategorien des Gepäckaufkommens ergeben sich die folgenden **fünf Szenarien des Fluggepäckaufkommens und -umschlages im Abflugbereich** (Tabelle 2.1):

---

<sup>6</sup>Ein leitender Angestellter der Flughafengesellschaft München bestätigte die Zweckmäßigkeit dieser Einteilung anlässlich einer Besichtigung der Gepäckförderanlage durch eine Abordnung des Institutes für Mathematik und Rechneranwendung im November 2003.

<sup>7</sup>Zürich-Frankfurt, Frankfurt-Berlin, Berlin-München

<sup>8</sup>Die Kategorie Umsteigegepäck gibt es nicht, da dies als Teil des jeweiligen abgehenden Folgefluges zu betrachten ist.

Szenario	Information über			Kategorie	Fördermethode	
	Gewicht	Bereitstellung	Zeitliche Verfügbarkeit		zentral	dezentral
1	effektives Gepäckgewicht	per Intranet	frühzeitig bekannt	1	ja	nein
2	effektives Gepäckgewicht	per Intranet	kurzfristig bekannt	1,3	ja	ja
3	Erwartungswert und Varianz des Gepäckgewichts der Flugverbindung	per Intranet	frühzeitig bekannt	2	ja	ja
4	a priori Informationen in Form von Erwartungswert und Varianz der Flugverbindung sowie die beim Einchecken anfallenden Gepäckdaten	per Intranet	kurzfristig verfügbare Schätzwerte für Erwartungswert und Varianz des Fluges aufgrund der beim Einchecken anfallenden Gepäckdaten	2	ja	ja
5	a priori Informationen in Form von Erwartungswert und Varianz der Kategorien	aus Statistiken bekannt	vor Inbetriebnahme des Roboters	1,2,3	ja	ja
	sowie die aktuellen Roboterdaten	Online-Schätzung des Gepäckgewichtes durch Roboter selbst im Korrekturzeitpunkt $t_1 > t_0$	ab $t_0$			

Tabelle 2.1: Tabellarische Kurzbeschreibung der Szenarien 1 bis 5

Ferner existieren zwei weitere Szenarien, auf die bei dem Notfall *Positionierungsungenauigkeiten des Teilsystems Kofferabtransport*, z.B. infolge schwankenden Hydraulikdrucks, zurückgegriffen wird (Tabelle 2.2):

Szenario	Information über			Kategorie	Fördermethode	
	Endposition	Bereitstellung	Zeitliche Verfügbarkeit		zentral	dezentral
6	neue Endposition wegen Ungenauigkeit des Systems Kofferabtransport	durch maschinelles Sichtsystem	zwischen $t_0$ und $t_1$	1,2,3	ja	ja
7	neue Endposition wegen Ungenauigkeit des Systems Kofferabtransport	durch maschinelles Sichtsystem	vor $t_0$	1,2,3	ja	ja

Tabelle 2.2: Tabellarische Kurzbeschreibung der Notfallszenarien 6 bis 7

Um die im Unterabschnitt 2.2.3 aufgeführten Ziele

- zum einen mit möglichst wenigen Robotern auszukommen,
- zum anderen die vorhandenen Roboter möglichst verschleißarm zu betreiben,

zu erreichen, wird innerhalb der Szenarien folgendermaßen vorgegangen:

#### Szenario 1:

Im Szenario 1 steht das Gewicht jedes Gepäckstückes mindestens zwei Stunden vor Abflug zur Verfügung. Spätestens mit Verladebeginn, d.h. 30 min vor Abflug muß für jedes Gepäckstück eine individuelle Vorsteuerung dem Roboter zur Verfügung stehen, so daß beim Umschlag durch den Roboter kein Regelungsaufwand und damit auch keine die Getriebelebensdauer verkürzenden Wechsellasten auftreten. Da die Berechnung einer solchen Vorsteuerung auf einem handelsüblichen Rechner mit 1.3 GHz-Pentium-III-Prozessor ca. 30 sec dauert, ist die Lagerzeit im Frühgepäckspeicher von mindestens 90 min zu nutzen. Ein 1.3 GHz-Pentium-III-Prozessor erstellt somit 180 Vorsteuerungen in 90 min.

Alternativ kann die Berechnung der Vorsteuerungen durch einen virtuellen Großrechner vorgenommen werden: In den heutigen hausinternen Netzwerken sind die Prozessoren der Personalcomputer im Schnitt nur zu 10% ausgelastet. Bei Verwendung des Betriebssystems Linux können diese freien Prozessorkapazitäten zu einem virtuellen parallelen Großrechner zusammengeschlossen werden. Auf diese Weise entfällt die Notwendigkeit zur Anschaffung neuer Rechner.

Das Intranet leitet die Vorsteuerungen an den Steuerrechner des Roboters weiter. Der Steuerrechner des Roboters muß an das Intranet des Flughafens angeschlossen sein.

#### Szenario 2:

Im Szenario 2 hingegen gehen die Gepäckstücke direkt zu den Umschlagstationen. Bei zentraler Methode beträgt die Förderzeit ca. 3 min, bei dezentraler weniger als ca. 20 sec. Somit muß mit Verlassen des Eincheckschalters eine Vorsteuerung für das Gepäckstück bereitstehen. Dieses geschieht daher mittels Echtzeitschätzung. Bei präziser Schätzung tritt so gut wie kein Regelungsaufwand auf.

Ein handelsüblicher 1.3 GHz-Pentium III benötigt unter dem Betriebssystem S.u.S.E-Linux 8.2<sup>9</sup> für die Schätzung weniger als 0.01 sec.

<sup>9</sup>S.u.S.E-Linux 8.2 liest die Rechneruhr nur bis zu einer hundertstel Sekunde aus. Erst das seit Frühsommer 2004 verfügbare S.u.S.E-Linux 9.1 stellt auch tausendstel Sekunden bereit.

Der Steuerrechner des Roboters muß an das Intranet des Flughafens angeschlossen sein.

**Szenario 3:**

Im Szenario 3 gibt es eine Vorhersage für Erwartungswert und Standardabweichung der Masse der Gepäckstücke des jeweiligen Fluges.

- *Dezentrale Methode:*

Ein Flughafen mit dezentraler Förderung besitzt keinen Frühgepäckspeicher; ein abgegebenes Gepäckstück wird daher sofort umgeschlagen. Fünf Minuten vor Öffnen des Eincheckschalters und damit 35 min vor Abflug wird daher für das vorhergesagte Wertepaar Erwartungswert und Standardabweichung eine Vorsteuerung berechnet. Mit dieser Vorsteuerung fördert der Roboter dann die ab 30 min vor Abflug eintreffenden Gepäckstücke.

- *Zentrale Methode:*

Ein Flughafen mit zentraler Förderung besitzt hingegen einen Frühgepäckspeicher; alle bis 30 min vor Abflug abgegebenen Gepäckstücke gelangen dorthin. Mittels der bis fünf Minuten vor Verladebeginn und damit 35 min vor Abflug eingegangenen Gepäckstücke wird die Vorhersage für Erwartungswert und Standardabweichung verifiziert und gegebenenfalls modifiziert. Jetzt erfolgt die Berechnung einer den aktuellen Erwartungswert und die aktuelle Standardabweichung berücksichtigenden Vorsteuerung. Mit dieser Vorsteuerung fördert der Roboter die Gepäckstücke.

**Szenario 4:**

Nach Verladebeginn werden mit jedem weiteren Gepäckstück der Erwartungswert und die Standardabweichung anhaltend überprüft. Verändern sich nun Erwartungswert und die Standardabweichung, wird verzugslos eine neue Vorsteuerung geschätzt. Dieser Vorgang wiederholt sich bei jedem Eintreffen eines aktualisierten Wertepaares Erwartungswert und Standardabweichung. Diese gegebenenfalls wiederholt durchzuführenden Schätzungen nach Verladebeginn sind das Szenario 4. Da die Vorsteuerungen der Szenarien 3 und 4 auf mehrere Gepäckstücke hintereinander angewendet werden, können diese auch manuell in die Steuerrechner des Roboters eingegeben werden. Daher ist ein Anschluß des Steuerrechners des Roboters an das Intranet des Flughafens nicht zwingend erforderlich.

**Szenario 5:**

Im Szenario 5 stellt der Flughafen dem Steuerrechner des Roboters keinerlei Daten über das Gepäck zur Verfügung.

Daher befördert der Roboter der Umschlagstation zunächst jedes Gepäckstück mit einer vor Inbetriebnahme berechneten Vorsteuerung, der ein aus Statistiken bekanntes Wertepaar aus Erwartungswert und Standardabweichung der zu verladenden Gepäckkategorien zugrunde liegt. Während des Transportes paßt sich die Vorsteuerung selbständig an das Gewicht des gerade transportierten Gepäckstückes an. Nach dieser Anpassung fällt so gut wie kein Regelungsaufwand mehr an. Das Szenario 5 arbeitet autonom.

Szenario 6 und 7 kommen zum Einsatz, wenn das in den Unterabschnitten 2.2.5 und 2.2.6 beschriebene System Kofferabtransport Positionierungsungenauigkeiten aufweist.

**Szenario 6:**

Szenario 6 fungiert als Notfallprozedur des Szenarios 5. Im regulären Betrieb stellt das System Kofferabtransport bis zum Korrekturzeitpunkt die freie Endposition bereit. Kommt es zu einer Positionierungsungenauigkeit des Systems Kofferabtransport zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$ , z.B. infolge schwankenden Hydraulikdrucks, muß der gerade im Transport befindliche Koffer zu einer abweichenden Endposition verbracht werden. Dazu wird am Korrekturzeitpunkt  $t_1$  eine robust-optimale Vorsteuerung von der aktuellen Betriebsposition zum neuen, durch ein maschinelles Sichtsystem gemessenen Endpunkt geschätzt. Diese Vorsteuerung arbeitet mit dem Wertepaar Erwartungswert und Standardabweichung des Szenarios 5.

**Szenario 7:**

In den Szenarien 1 bis 4 muß im Gegensatz zu Szenario 5 die freie Endposition schon zum Zeitpunkt  $t_0$  bereitstehen. Kommt es zu einer Positionierungsungenauigkeit des Systems Kofferabtransport, wird in Echtzeit eine robust-optimale Vorsteuerung, vom Anfangspunkt ausgehend, zum neuen Endpunkt geschätzt (siehe auch Abbildung 2.18).

Den Vorsteuerungen des Szenarios 7 liegt das aus Statistiken bekannte Wertepaar Erwartungswert und Standardabweichung der umzuschlagenden Gepäckkategorie zugrunde.

Eine weiterführende Beschreibung der Szenarien 1 bis 7 enthält der Unterabschnitt 2.4.5.

**2.3.5 Konsequenzen für die Robotersteuerung**

- **Konsequenzen aus Szenario 1:**  
Für das effektive Gewicht jedes Gepäckstückes ist ein Optimalsteuerungsproblem, bestehend aus einer deterministischen Zielfunktion und deterministischen Nebenbedingungen, zu lösen.
- **Konsequenzen aus Szenario 2:**  
Für das effektive Gewicht jedes Gepäckstückes ist in Echtzeit die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, bestehend aus einer deterministischen Zielfunktion und deterministischen Nebenbedingungen, zu approximieren.
- **Konsequenzen aus Szenario 3:**  
Für den Erwartungswert und die Varianz des Gepäckgewichtes der Flugverbindung ist ein Optimalsteuerungsproblem, bestehend aus dem Erwartungswert der Zielfunktion und Wahrscheinlichkeitsrestriktionen, zu lösen.
- **Konsequenzen aus Szenario 4:**  
Für die kurzfristig und wiederholt hintereinander anfallenden Erwartungswerte und Varianzen des Gepäckgewichtes des Fluges sind in Echtzeit Lösungen eines Optimalsteuerungsproblems, bestehend aus dem Erwartungswert der Zielfunktion und Wahrscheinlichkeitsrestriktionen, zu approximieren.
- **Konsequenzen aus Szenario 5:**  
Vorab ist für den Erwartungswert und die Varianz des Gepäckgewichtes der zu verladenden Gepäckkategorie ein Optimalsteuerungsproblem, bestehend aus dem Erwartungswert der Zielfunktion und Wahrscheinlichkeitsrestriktionen, zu lösen.  
Während des Transportes jedes einzelnen Gepäckstückes durch den Roboter ist für das in Form von Mittelwert und mittlerem Fehler geschätzte Gepäckgewicht in Echtzeit die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, bestehend aus dem Erwartungswert der Zielfunktion und Wahrscheinlichkeitsrestriktionen, zu approximieren.
- **Konsequenzen aus Szenario 6:**  
Für die *während des Transportes* des Gepäckstückes durch den Roboter bekanntwerdende abweichende Endposition ist in Echtzeit die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, bestehend aus dem Erwartungswert der Zielfunktion und Wahrscheinlichkeitsrestriktionen, zu approximieren. Als Gewichtsinformation geht nicht die Masse des Gepäckstückes, sondern der Erwartungswert und die Varianz der im Szenario 5 gerade beförderten Gepäckkategorie in das Optimalsteuerungsproblem ein.
- **Konsequenzen aus Szenario 7:**  
Für die *bei Aufnahme* des Gepäckstückes durch den Roboter bekanntwerdende abweichende Endposition ist in Echtzeit die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, bestehend aus dem Erwartungswert der Zielfunktion und Wahrscheinlichkeitsrestriktionen, zu approximieren. Als Gewichtsinformation geht nicht die Masse des Gepäckstückes, sondern der Erwartungswert

und die Varianz der im vorausgehenden Szenario <sup>10</sup> beförderten Gepäckkategorie in das Optimalsteuerungsproblem ein.

## 2.4 Teilsystem Roboter

Heutzutage stehen gemäß [23] drei Methoden zur Einrichtung des Roboterpfades zur Verfügung:

- Methode 1: Führen des Roboterkopfes per Hand am Einsatzort,
- Methode 2: Steuerknüppel,
- Methode 3: grafische Planungssoftware.

Anschließend zerlegt der Steuerrechner den seitens des Nutzers mit einer der Methoden 1, 2 oder 3 festgelegten Roboterpfad in einzelne, im Konfigurationsraum linear miteinander verbundene Punkte und versieht diese nun als geometrischen Pfad bezeichnete Punktfolge im Konfigurationsraum mit einem Geschwindigkeitsprofil <sup>11</sup>. Der Steuerrechner speichert den geometrischen Pfad und das Geschwindigkeitsprofil und gibt mit diesen beiden die Trajektorie (= *Solltrajektorie*) im Betrieb vor. Der roboterinterne Regler unterdrückt Abweichungen der Hand von der Solltrajektorie.

### 2.4.1 Steuerkette des Roboters MANUTEC r3

Diese Arbeit stellt in Kapitel 8 für den Block 11 der Abbildung 2.17 ein sich auf eine zuvor errechnete Datenbasis abstützendes Verfahren zur Echtzeitapproximation einer Optimalen Führungsgröße  $\mathbf{w}(t)$  zwecks Erreichung des gewünschten Endzustandes  $\mathbf{y}_e$  bereit, wobei die Steuerstrecke den Anfangszustand  $\mathbf{x}_j(t)$ ,  $0 \leq j$ , aufweist.

Der Block 12 rechnet die Optimale Führungsgröße  $\mathbf{w}(t)$  in eine Optimale Vorsteuerung  $\mathbf{u}_j(t)$ ,  $0 \leq j$ , mittels der Dynamischen Gleichung (4.14) bis (4.16) und der Gleichung (5.6) um <sup>12</sup>. Das Zustandsmodell des Blocks 21 ist durch die Gleichungen (13.30) bis (13.39) gegeben, das Ausgangsmodell durch das Gleichungssystem (13.50).

### 2.4.2 Begriffe

Es folgt eine Reihe von Begriffsbestimmungen, die zudem die in Abbildung (2.17) verwendeten Formelzeichen näher erläutern und für die hier betrachtete Anwendung konkret definieren:

- *gewünschter Endzustand*  $\mathbf{y}_e := \mathbf{y}(t_e)$ :  
Der gewünschte Endzustand besteht hier aus der Sollgelenkwinkelstellung  $\theta_j(t_e)$  <sup>13</sup> und Sollgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_j(t_e)$  am Endzeitpunkt  $t_e$ :

$$\mathbf{y}(t_e) := \begin{pmatrix} \theta_j(t_e), \dot{\theta}_j(t_e) \end{pmatrix}^T \quad (2.1)$$

mit  $j = 0, 1, 2, \dots$

---

<sup>10</sup>nur Szenarien 1 bis 4

<sup>11</sup>siehe hierzu Abschnitt 6.2

<sup>12</sup>Die Gleichungen (4.14) bis (4.16) geben die von den Motoren aufzubringenden Drehmomente  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$  aus. Diese werden dann mittels (5.6) in Steuerspannungen umgerechnet, wobei diese Steuerspannungen hier als Vorsteuerung bezeichnet werden.

<sup>13</sup>Sollgelenkwinkel, Sollgelenkwinkelgeschwindigkeiten und Sollgelenkwinkelbeschleunigungen sind mit dem Index  $j$  versehen. Reale und damit meßbare Größen weisen diesen Index nicht auf.

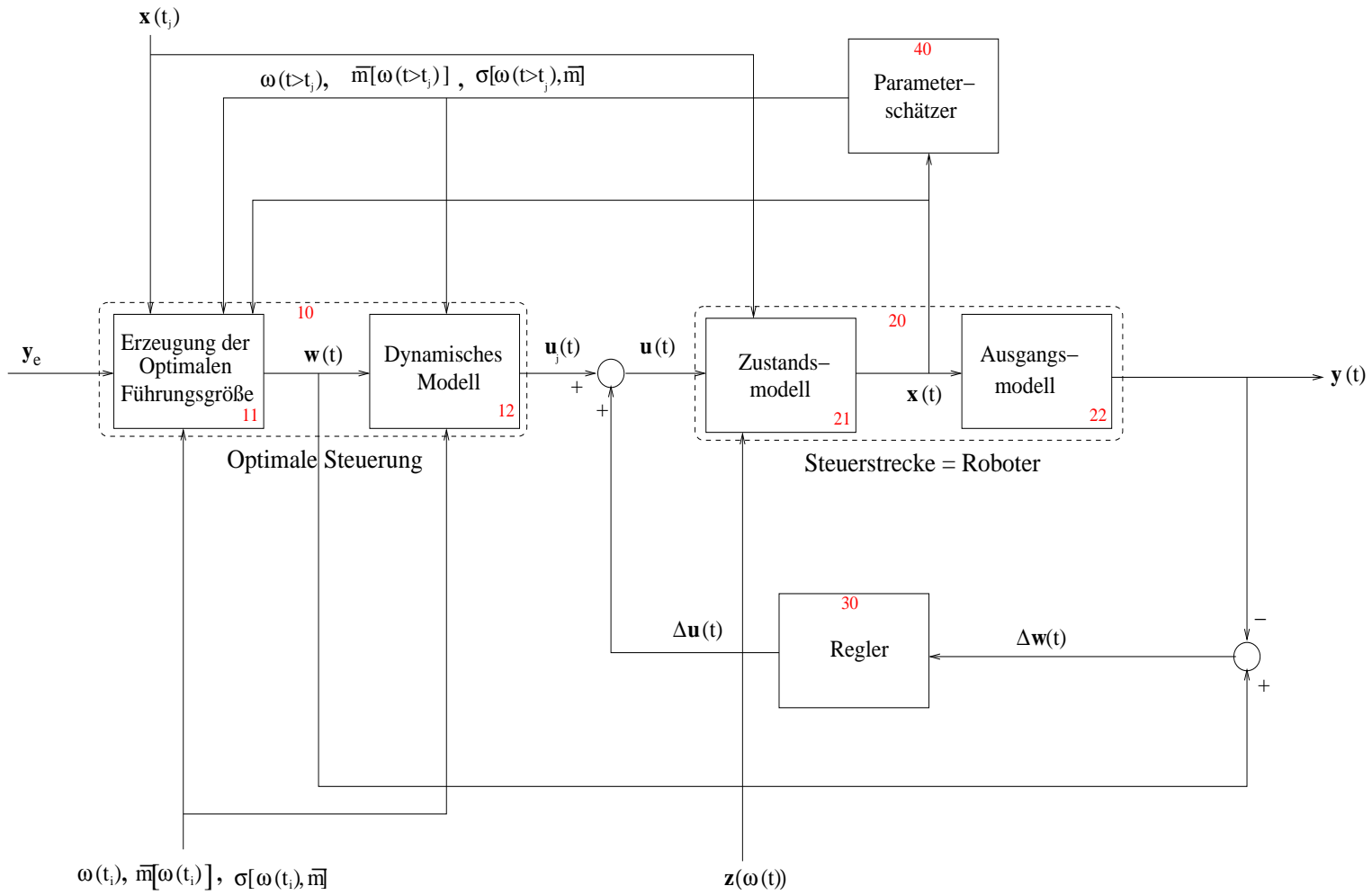


Abbildung 2.17: Steuerkette des Roboters MANUTECr3

- *Führungsgröße  $\mathbf{w}(t)$ :*

Die Führungsgröße  $\mathbf{w}(t)$  setzt sich hier aus dem Sollverlauf der Gelenkwinkel  $\theta_j(t)$ , der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_j(t)$  und der Gelenkwinkelbeschleunigungen  $\ddot{\theta}_j(t)$  zusammen:

$$\mathbf{w} := \left( \theta_j(t), \dot{\theta}_j(t), \ddot{\theta}_j(t) \right)^T \quad (2.2)$$

mit  $j = 0, 1, 2, \dots$

- *Vorsteuerung  $\mathbf{u}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ :*

Die Optimale Führungsgröße wird in eine Optimale Vorsteuerung  $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j(t)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , mittels der Dynamischen Gleichung (4.14) bis (4.16) und der Gleichung (5.6) umgerechnet. Bei gegebenen Parameter-Nominalwerten  $\mathbf{p}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , fährt der Roboter die vorgegebene Referenztrajektorie ab (Siehe Abb. 2.17 und [31]).

- *Steuerung  $\mathbf{u}(t) := \mathbf{u}_j(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ :*

Gesamtsteuerungsinputfunktion, die sich aus der Summe der gewählten Vorsteuerung  $\mathbf{u}_j(t)$  und einer Steuerungskorrektur (Regelung)  $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}(t)$  in Abhängigkeit vom aktuellen Roboterzustand zusammensetzt.

- *Zustand  $\mathbf{x}(t)$ :*

Der Zustand  $\mathbf{x}(t)$  setzt sich aus der realen Gelenkwinkelstellung  $\theta(t)$ , den realen Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}(t)$  und den realen Gelenkwinkelbeschleunigungen  $\ddot{\theta}(t)$  zusammen:

$$\mathbf{x}(t) := \left( \theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t) \right)^T, \quad (2.3)$$

- *Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t)$ :*

Die Ausgangsgröße besteht aus der realen Gelenkwinkelstellung  $\theta(t)$  und der realen Gelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}(t)$ :

$$\mathbf{y}(t) = \left( \theta(t), \dot{\theta}(t) \right)^T, \quad (2.4)$$

- $\omega(t_j)$ : stochastische Verteilung der Nutzlastmasse zum Zeitpunkt  $t_j$ ,

- $\bar{m}(t_j)$ : Erwartungswert der Nutzlastmasse zum Zeitpunkt  $t_j$ ,

- $\sigma(t_j)$ : Standardabweichung der Nutzlastmasse zum Zeitpunkt  $t_j$ ,

- *effektive bzw. realisierte Roboterparameter:*

Tatsächliche Parameter des Robotersystems. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich dabei entweder um die tatsächliche Nutzlast (Koffergewicht, Szenarien 1 bis 5) oder um den geänderten Endpunkt der Trajektorie (Szenarien 6 und 7).

- *Nominalwert, Nominal-Parameter  $\mathbf{p}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ :*

Schätzwerte für unbekannte und stochastisch variable effektive Roboterparameter. Dabei ist  $j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , der Stufenindex bei mehrstufigen Steuerungsverfahren, siehe [31].

- *Trajektorie  $\theta = \theta(t)$  bzw.  $\left( x(t), y(t), z(t) \right)^T$ :*

Funktion, die die Position des Roboters im Konfigurations- bzw. Arbeitsraum in Abhängigkeit von der Zeit  $t \geq t_j$ ,  $0 \leq j$ , beschreibt. Dabei ist  $t_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , der Anfangszeitpunkt bei ein- bzw. mehrstufigen Steuerungsverfahren. Weitere Details findet man in [31].



- *Referenztrajektorie oder Solltrajektorie:*  
Vorgegebene Trajektorie, die vom Roboter abgefahren werden soll; somit gibt die Referenztrajektorie Sollgelenkwinkel, Sollgelenkwinkelgeschwindigkeiten und Sollgelenkwinkelbeschleunigungen vor. Hängt die Referenztrajektorie nur von deterministischen Parametern ab, so wird diese mit  $\theta_j = \theta_j(t)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  bezeichnet, bei Vorhandensein stochastischer Parameter hingegen mit  $\bar{\theta}_j = \bar{\theta}_j(t)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Im vorhergehenden Text dieser Aufzählung wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit die Bezeichnung für den deterministischen Fall verwendet.
- *robust-optimale Trajektorie  $\bar{\theta}_j = \bar{\theta}_j(t)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ :*  
Optimale Referenztrajektorie, die sich durch die im Folgenden, siehe Kapitel 6, beschriebene optimale stochastische Trajektorienplanung (OSTP) bzw. adaptive optimale stochastische Trajektorienplanung ergibt. Bei den eingesetzten stochastischen Optimierungsverfahren wird die Verteilung der stochastischen Nutzlast (Koffergewicht) durch eine Normalverteilung mit einem bestimmten Erwartungswert  $\bar{m}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , und einer bestimmten Standardabweichung  $\sigma_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , approximiert. Zusammen mit der zugehörigen Vorsteuerung ergeben sich dann robustere effektive Trajektorien, d.h. Robotertrajektorien, die weniger empfindlich auf Abweichungen der effektiven Roboterparameter (Nutzlast) von den Nominalparametern reagieren.
- *effektive oder reale Trajektorie:*  
Trajektorie, die der Roboter mit den effektiven Roboterparametern  $\mathbf{p}$  unter der Steuerung (Gesamtinputfunktion)  $\mathbf{u}(t)$  abfährt (Siehe Abb. 2.17).
- *Datenbasis:*  
Vorausgerechnetes Datenfeld, in dem
  - die Koeffizienten der optimalen Referenztrajektorien (in Bezug auf eine gewählte Spline-Basis) für eine bestimmte Menge von Inputparametern des (OSTP) bzw. des (AOSTP) sowie
  - die partiellen Ableitungen der Koeffizienten der optimalen Referenztrajektorien (in Bezug auf eine gewählte Spline-Basis) nach einer bestimmte Menge von Inputparametern des (OSTP) bzw. des (AOSTP)
 abgelegt sind. Inputparameter sind insbesondere der (bedingte) Erwartungswert, die Varianz des Gepäckgewichts und die Endposition der Referenztrajektorie auf einer bestimmten Stufe  $j = 0, 1, 2, \dots$
- *Parameterschätzer:*  
Verfahren auf der Basis von Least Squares Schätzern, das die zwischen der effektiven Trajektorie und der Referenztrajektorie auftretenden Abweichungen auswertet, um die unbekannt Modellparameter zu schätzen. Der Parameterschätzer gibt dabei einen Mittelwert und einen mittleren Fehler für die unbekannt Modellparameter aus. Diese Werte können dann rechnerisch wie Erwartungswert und Varianz der oben erwähnten approximativen Normalverteilung für die Modellparameter behandelt werden.

### 2.4.3 Schwachstellen des bisherigen Steuerungskonzeptes

Die in der Einleitung des Abschnittes 2.4 vorgestellten konventionellen Methoden der Trajektorienplanung, die mehr ein experimentelles Auffinden einer Referenztrajektorie und der dazu gehörenden Vorsteuerung vom Anfangs- zum Endpunkt durch den Bediener darstellen, berücksichtigen in keiner Weise die dynamischen Eigenschaften des Roboters, z.B. Trägheitstensor und Masse der Glieder sowie Trägheitstensor und Masse der Nutzlast. Somit ist bei der konventionellen Trajektorienplanung der für die Einhaltung der Solltrajektorie notwendige Drehmomentenverlauf, aufzubringen durch

die Antriebsmotoren, nicht bekannt. Auftretende Abweichungen von der Solltrajektorie, z.B. verursacht durch eine Änderung der Masse der Nutzlast, müssen vom roboterinternen Regler aufwendig und damit energie-, zeit- und verschleißintensiv kompensiert werden. Da die Form des Pfades bei der konventionellen Trajektorienplanung ausschließlich vom Fingerspitzengefühl, der Erfahrung und der Experimentierfreude des einrichtenden Menschen abhängt, wird eine mit dieser Vorgehensweise erstellte Referenztrajektorie im Allgemeinen weder den zeit- noch energieoptimalen Weg vom Anfangs- zum Endpunkt für eine bestimmte Nutzlast  $m$  beschreiben.

Aber nur eine zeitoptimale Trajektorie vom Aufnahme- zum Absetzpunkt liefert die im Anwendungsgebiet Flughafen benötigte hohe Taktrate.

Eine numerische Trajektorienplanung überwindet die v.g. Schwachstellen der konventionellen Bahnplanung.

#### 2.4.4 Methoden zur rechnerischen Ermittlung von Robotersteuerungen

Folgende Berechnungsmethoden wurden in der gesichteten Literatur aufgefunden:

- Berechnung des notwendigen Drehmomentenverlaufes für eine vom Benutzer vorgegebene Solltrajektorie bei exakt bekannten Modellparametern [45];
- zeit- oder energieminimale Referenztrajektorie vom Anfangs- zum Endpunkt mit exakt bekannten Modellparametern [21];
- robust-optimale Referenztrajektorie [29, 30, 31, 34, 36, 37, 38].

Die zuerst genannte Methode liefert keine zeit- bzw. energieoptimalen Referenztrajektorien und kann daher nicht im Block 11 der Steuerkette (Siehe Abbildung 2.17) eingesetzt werden.

Die an zweiter Stelle aufgeführte Methode bewerkstelligt dieses, setzt jedoch die genaue Kenntnis der Masse voraus<sup>14</sup>. Diese Methode wäre daher nur auf den Flughäfen anwendbar, die eine Kopie der BSM erstellen und in dieser Kopie das Gewichtsfeld befüllen.

Die o.g. dritte Methode ermöglicht hingegen die Herabsetzung des Regelaufwandes bei unbefülltem Gewichtsfeld der BSM. Diese Methode bewirkt eine Reduzierung der Antriebsbeschleunigungen, wodurch die Laufzeit zunimmt. Der Zeitverlust bewegt sich jedoch nur im Zehntel-Sekunden-Bereich.

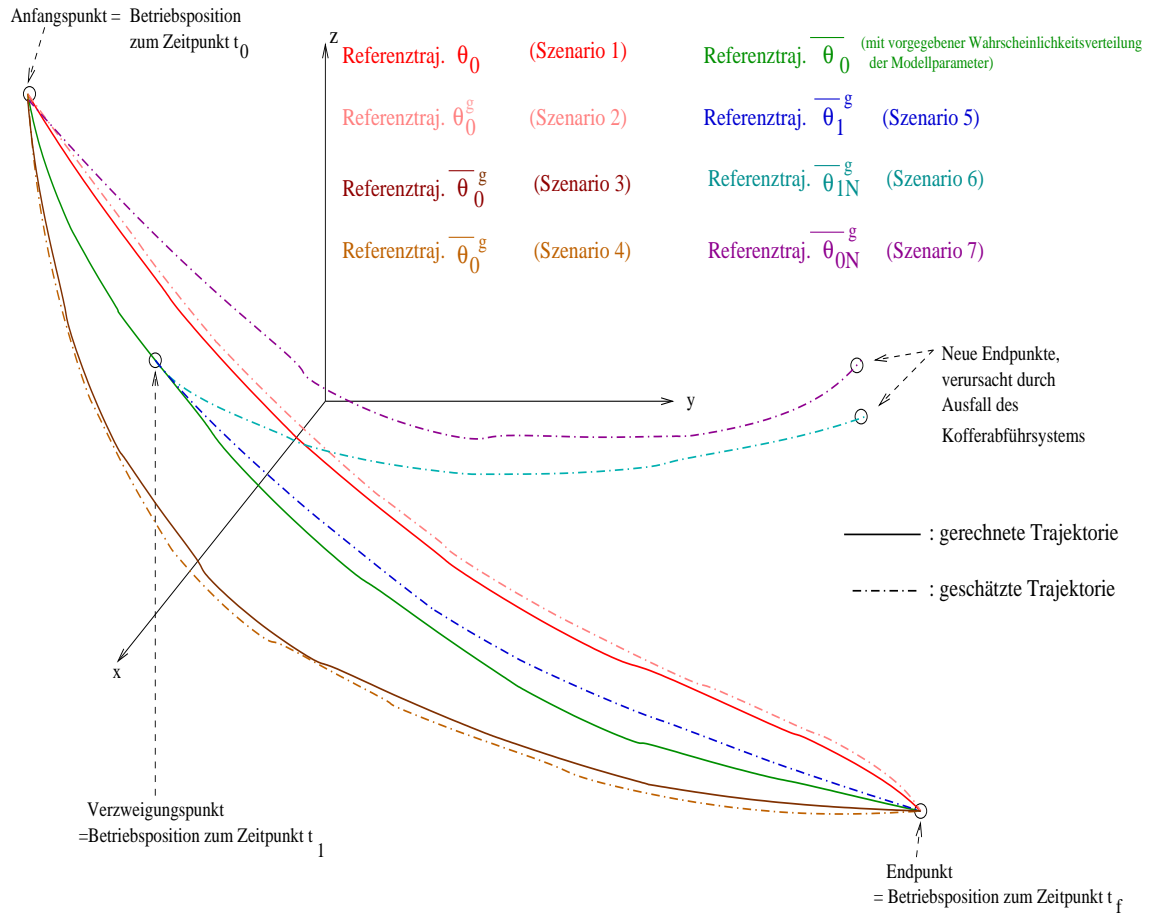
#### 2.4.5 Szenarien des Gepäckumschlages im Abflugbereich

Die Methoden zur Berechnung bzw. Schätzung optimaler Referenztrajektorien werden in den Kapiteln 6, 7 und am Ende des Kapitels 8 präsentiert.

*Übersicht über die vorkommenden Referenztrajektorien:*

- $\theta_0(t)$ : optimale Referenztrajektorie gemäß Gepäckgewichtsinformation nach Szenario 1,
- $\theta_0^g(t)$ : geschätzte optimale Referenztrajektorie gemäß Gepäckgewichtsinformation nach Szenario 2,
- $\bar{\theta}_0(t)$ : robust-optimale Referenztrajektorie gemäß Gepäckgewichtsinformation nach Szenario 3,
- $\bar{\theta}_0^g(t)$ : geschätzte robust-optimale Referenztrajektorie gemäß Gepäckgewichtsinformation nach Szenario 4,

<sup>14</sup>Weicht die realisierte Masse vom Nominalwert ab, kann die vorausgeplante Trajektorie nur durch Regelaufwand eingehalten werden.

Abbildung 2.18: Referenztrajektorien  $\theta_0(t)$ ,  $\theta_0^g(t)$ ,  $\bar{\theta}_0(t)$ ,  $\bar{\theta}_0^g(t)$ ,  $\bar{\theta}_1^g(t)$ ,  $\bar{\theta}_{1N}^g(t)$ ,  $\bar{\theta}_{0N}^g(t)$ 

- $\bar{\theta}_1^g(t)$ : robust-optimale Referenztrajektorie gemäß Gepäckgewichtsinformation nach Szenario 5,
- $\bar{\theta}_{1N}^g(t)$ : robust-optimale Referenztrajektorie gemäß Information über neuen Endpunkt nach Szenario 6,
- $\bar{\theta}_{0N}^g(t)$ : robust-optimale Referenztrajektorie gemäß Information über neuen Endpunkt nach Szenario 7,
- $\theta_R(t)$ : Rückkehrtrajektorie von den Endpositionen der zuvor definierten Trajektorien  $\theta_0(t)$ ,  $\theta_0^g(t)$ ,  $\bar{\theta}_0^g(t)$ ,  $\bar{\theta}_1^g(t)$ ,  $\bar{\theta}_{1N}^g(t)$  und  $\bar{\theta}_{0N}^g(t)$  zu deren Anfangspositionen ohne Nutzlast.

*Hinweis:*

Durch eine in Kapitel 7 genauer beschriebene Diskretisierungsmethode wird die Gesamtheit der zulässigen Trajektorien  $\theta = \theta(t)$ ,  $t \geq t_0$  bzw.  $t \geq t_1$ , approximiert durch eine  $K$ -parametrische Kurvenschar,

$$\theta = \theta(t, \gamma), \quad t \geq t_0 \text{ bzw. } t \geq t_1 \quad (2.5)$$

mit einem Koeffizientenvektor  $\gamma \in \mathbb{R}^K$ .

Die optimalen Trajektorien  $\theta^* = \theta^*(t)$  ergeben sich dann durch die Gleichung

$$\theta^* = \theta(t, \gamma^*), t \geq t_0 \text{ bzw. } t \geq t_1. \quad (2.6)$$

Nach der Reduktion des ursprünglichen Roboter-Steuerungsproblems mittels Linearkombination auf ein endlich dimensionales Parameteroptimierungsproblem ist dabei

$$\gamma^* = \gamma^*(\mathbf{p}_E) \quad (2.7)$$

der dadurch optimal bestimmte Koeffizientenvektor. Dieser ist abhängig vom Vektor  $\mathbf{p}_E$  der jeweiligen Anfangsparameter des ursprünglichen Robotersteuerungsproblems. Der Anfangsparametervektor  $\mathbf{p}_E$  wird im folgenden als Eingangsvektor bezeichnet.

In den Szenarien 2 und 4 bis 7 werden sog. Datenbasen zur **Echtzeitapproximation** von Trajektorien verwendet. Jede der hier verwendeten Datenbasis besteht aus einem äquidistanten Gitter. Jeder Gitterpunkt setzt sich zusammen aus:

- dem sog. Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$ ,
- dem zugehörigen, vorab berechneten optimalen Koeffizientenvektor  $\gamma^*(\mathbf{p}_E)$  (Szenarien 2 und 4 bis 7) und
- den ersten Ableitungen  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E)$  des optimalen Koeffizientenvektors nach den Komponenten des Eingangsvektors an der Stelle  $\mathbf{p}_E$ .

Die Koordinaten des Gitterpunktes sind die in Abhängigkeit vom jeweiligen Szenario veränderlichen Komponenten des Eingangsvektors  $\mathbf{p}_E$ . Zu den Komponenten des Eingangsvektors  $\mathbf{p}_E$  gehören

- die Anfangszeit  $t_j$
- der Erwartungswert  $\bar{m}_j$
- die Standardabweichung  $\sigma_j$
- die Anfangsgelenkwinkelstellung  $\theta_j = (\theta_{1j}, \theta_{2j}, \theta_{3j})^T$
- die Anfangsgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_j = (\dot{\theta}_{1j}, \dot{\theta}_{2j}, \dot{\theta}_{3j})^T$
- die gewünschte Endgelenkwinkelstellung  $\theta_f = (\theta_{1f}, \theta_{2f}, \theta_{3f})^T$  und
- die gewünschte Endgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_f = (\dot{\theta}_{1f}, \dot{\theta}_{2f}, \dot{\theta}_{3f})^T$ .

In Szenario 2 ist im Gegensatz zu den Szenarien 4 bis 7 die Nutzlastmasse exakt bekannt. Somit entfällt hier die Komponente Standardabweichung. An die Stelle der Komponente Erwartungswert tritt die Komponente Nutzlastmasse.

In den Szenarien 2, 4 und 7 tritt nur die Stufe  $j = 0$ , in den Szenarien 5 und 6 zusätzlich die Stufe  $j = 1$  auf; d.h. in den Szenarien 2, 4 und 7 wird lediglich zum Zeitpunkt  $t_0$  eine optimale Trajektorie bereitgestellt, in den Szenarien 5 und 6 hingegen auch am Zeitpunkt  $t_1$ .

- Im Szenario 2 ist nur die Komponente Nutzlastmasse  $m$  variabel und bildet die Koordinaten der Gitterpunkte der eindimensionalen Datenbasis.  
Daher geht  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial m}$  in die Linearisierung (2.9) ein.

- Im Szenario 4 sind der Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und die Standardabweichung  $\sigma_0$  variabel und bilden die Koordinaten der Gitterpunkte der zweidimensionalen Datenbasis. Daher gehen  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \bar{m}}$  und  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \sigma}$  in die Linearisierung (2.11) ein.
- Im Szenario 5 sind der Erwartungswert  $\bar{m}_1$  und die Standardabweichung  $\sigma_1$  variabel und bilden die Koordinaten der Gitterpunkte der zweidimensionalen Datenbasis. Daher gehen  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \bar{m}}$  und  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \sigma}$  in die Linearisierung (2.13) ein.
- Im Szenario 6 bzw. Szenario 7 sind die Endgelenkwinkelstellungen  $\theta_f$  veränderlich und bilden die Koordinaten der Gitterpunkte der dreidimensionalen Datenbasis. Daher gehen  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{1f}}$ ,  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{2f}}$  und  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{3f}}$  in die Linearisierung (2.15) bzw. (2.17) ein.

Die partiellen Ableitungen nach den in den jeweiligen Szenarien konstant bleibenden Komponenten der Eingangsvektoren gehen in die Linearisierungen (2.9), (2.11), (2.13), (2.15) und (2.17) nicht ein.

Es werden fünf Szenarien für den Normalbetrieb und **zwei Szenarien für den Notbetrieb** dargestellt:

- **Notfallbetrieb für Szenarien 1 bis 4:**

Während des Rücklaufes des leeren Roboters ermittelt im regulären Betrieb bei den Szenarien 1 bis 4 das maschinelle Sichtsystem einen freien Platz im Container bzw. auf dem Vorfeldfahrzeug. Das System Kofferabtransport stellt diesen vor dem Zeitpunkt  $t_0$ , d.h. vor dem Aufgreifen des folgenden Gepäckstückes, mit Hilfe der Eckumsetzer-Hebebühnenkombination an der gleichbleibenden Endposition der Robotertrajektorie bereit (siehe Abschnitte 2.2.5 und 2.2.6 sowie Abbildungen 2.12 und 2.14).

Kommt es zu einer Positionierungsungenauigkeit der Eckumsetzer-Hebebühnenkombination während des Rücklaufes des Roboters und damit vor dem Zeitpunkt  $t_0$ , gehen die Szenarien 1 bis 4 auf das **Szenario 7** über und arbeiten das zur Beförderung anstehende Gepäckstück gemäß Szenario 7 ab.

- **Notfallbetrieb für Szenario 5:**

Im Szenario 5 muß der freie Platz erst zum Schaltzeitpunkt  $t_1$  an der Endposition zur Verfügung stehen. Tritt die Positionierungsungenauigkeit des Systems Kofferabtransport vor dem Zeitpunkt  $t_1$  auf, kommt **einmalig**, d.h. für das gerade transportierte Gepäckstück, das **Szenario 6** zum Einsatz.

- **Szenario 1:**

Das am Eincheckschalter erfaßte Gewicht  $m_0$  des Gepäckstückes wird der zugehörigen BSM zugewiesen und steht an jedem Punkt, an dem ein Bar-Code-Scanner die Tag-ID<sup>15</sup> ausliest, bereit. Der Steuerrechner des Roboters berechnet für jedes Gepäckstück eine zeit- oder energieminimale deterministische Referenztrajektorie  $\theta_0(t) = \theta(t, \gamma^*(m))$  im Konfigurationsraum des Roboters vom Anfangs- zum Endpunkt mittels des auf der Sequentiellen Quadratischen Programmierung beruhenden Programmes OSTP<sup>16</sup> und legt diese im Speicher ab<sup>17</sup>. Über die

<sup>15</sup>Die zehnstellige Tag-ID befindet sich als Bar-Code auf dem Gepäckaufkleber. An den Einschleusestellen der Gepäcksortierer lesen sog. Scannerbrücken die Tag-ID aus. Diese Brücken decken einen 270° Winkel ab. Durch die zusätzliche Montage von Scannern zwischen zwei Förderbändern wird eine 360°-Abdeckung erreicht. Die Gepäcksortierer verteilen die Gepäckstücke auf die Umschlagstationen. Der Steuerrechner des Gepäcksortierers speichert, welche seiner Schalen das eingeschleuste Gepäckstück aufgenommen hat und ordnet über die Tag-ID und die BSM die für den betreffenden Flug vorgesehene Umschlagstation zu. Erreicht die befüllte Schale nun den Abzweiger zur Zielumschlagstation, gibt der Gepäcksortierer durch Kippen der Schale das Gepäckstück an die Umschlagstation ab. Der Umschlagstation selbst stehen die Reihenfolge der Gepäckstücke und deren Gewicht bereits mit dem Passieren der Scannerbrücke an der Einschleusestelle zur Verfügung.

<sup>16</sup>Eine Beschreibung der hier zum Einsatz gekommenen Version V0.3 des Programmes OSTP findet sich im Anhang unter 13.1.1

<sup>17</sup>Das Gepäck des Szenarios 1 gehört zur Kategorie 1. Jedes Gepäckstück hält sich mindestens 90 min im Frühgepäckspeicher auf.

an der Scannerbrücke ausgelesene Tag-ID korreliert der Steuerrechner nach Beginn des Verladevorganges das jeweilige Gepäckstück mit der zugehörigen Trajektorie, mit der der Roboter das Gepäckstück ohne Regelungsaufwand dann vom Anfangs- zum Endpunkt befördert.

- **Szenario 2:**

Im Unterschied zum ersten Szenario ist für die Berechnung der deterministischen Referenztrajektorien nicht genügend Zeit vorhanden. Daher werden als  $\theta_0^g(t)$  bezeichnete Referenztrajektorien mittels eines Echtzeitapproximationsverfahrens geschätzt und mit einem geringem Regelungsaufwand abgefahren<sup>18</sup>. Der Schätzvorgang sucht aus der vorab mit dem Programm OSTP erstellten Datenbasis (siehe Kapitel 8) den Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Gewichtsparmeter  $m^\eta$  heraus. Die Datenbasis enthält  $n_m$  Referenztrajektorien, die vorab für unterschiedliche Nutzlastmassen  $m^\eta$  mit dem konstanten Abstand  $\Delta m = m^{\eta+1} - m^\eta$  berechnet wurden. Der Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Gewichtsparmeter  $m^\eta$  ergibt sich aus

$$\min_{\eta} \left| \frac{m^\eta - m}{\Delta m} \right| \quad (2.8)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, n_m$ . Die Lösung des Optimierungsproblems (2.8) wird mit  $m^{\eta^\circ}$  bezeichnet. Die geschätzte Referenztrajektorie  $\theta_0^g(t)$  entsteht durch Linearisierung des optimalen Koeffizientenvektors  $\gamma^* = \gamma^*(m)$  bezüglich  $m$  an der Stelle  $m^{\eta^\circ}$ :

$$\theta_0^g(t, m) = \theta \left( t, \gamma^*(m^{\eta^\circ}) + \frac{\partial \gamma^*}{\partial m}(m^{\eta^\circ}) \cdot (m - m^{\eta^\circ}) \right), t \geq t_0 \quad (2.9)$$

Dabei bezeichnet  $\gamma^* = \gamma^*(m)$  den optimalen Koeffizientenvektor zum Eingangsparameter  $m$  ( $\equiv$  Nutzlastmasse) gemäß Kapitel 6. Die partielle Ableitung  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial m}$  liefert der Abschnitt 8.1.

Das abgegebene Gepäckstück ist sofort umschlagbar.

- **Szenario 3:**

Die Passagiere der Linienflüge auf den sog. Rennstrecken<sup>19</sup> setzen sich grundsätzlich aus demselben Klientel zusammen. Somit existieren zuverlässige Statistiken bezüglich dieses zur Kategorie 2 gehörenden Gepäcks, d.h. der Erwartungswert  $\bar{m}_{-1}$  und die Standardabweichung  $\sigma_{-1}$  sind in Abhängigkeit von der Jahreszeit bekannt. Erwartungswert und Standardabweichung werden anhand der am Eincheckschalter anfallenden Gewichtsdaten des Frühgepäcks nochmals verifiziert und gegebenenfalls angepaßt. Fünf Minuten vor Verladebeginn berechnet der Steuerrechner eine robust-optimale Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t) = \theta \left( t, \gamma^*(\bar{m}_0, \sigma_0) \right)$  mittels des Programmes OSTP für das verifizierte und gegebenenfalls angepaßte Wertepaar  $\bar{m}_0$  und  $\sigma_0$ . Diese Trajektorie wird solange auf die umzuschlagenden Gepäckstücke angewandt, bis sich aufgrund nachfolgender Gepäckstücke ein abweichender Erwartungswert und eine abweichende Standardabweichung ergeben. Für diese wird eine neue robust-optimale Referenztrajektorie gemäß Szenario 4 geschätzt. Eine Rückkehr zum Szenario 3 erfolgt dann nicht mehr.

- **Szenario 4:**

Im Unterschied zum dritten Szenario wird die robust-optimale Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t)$  mittels eines Echtzeitapproximationsverfahrens, das sich einer vorab mit dem Programm OSTP errechneten Datenbasis bedient, unmittelbar vor Verladebeginn in Echtzeit geschätzt (siehe Kapitel 8.4). Verändern sich aufgrund der nach Verladebeginn eingehenden Gepäckstücke der Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und die Standardabweichung  $\sigma_0$  des Fluges, so reagiert Szenario 4 mit einer sofortigen Neuschätzung der Referenztrajektorie, die dann auf alle folgenden Gepäckstücke angewendet wird.

<sup>18</sup>Verwendeten alle Flughäfen identische Umschlagstationen, ließe sich die geschätzte Referenztrajektorie auch durch den die BSM bereitstellenden Rechner der Luftfahrtgesellschaft erzeugen und in bislang ungenutzten Feldern der BSM speichern, so daß die Trajektorie auch an Umsteige-flughäfen unverzüglich bereitstünde.

<sup>19</sup>z.B. Zürich-Frankfurt, Frankfurt-Berlin, Berlin-München

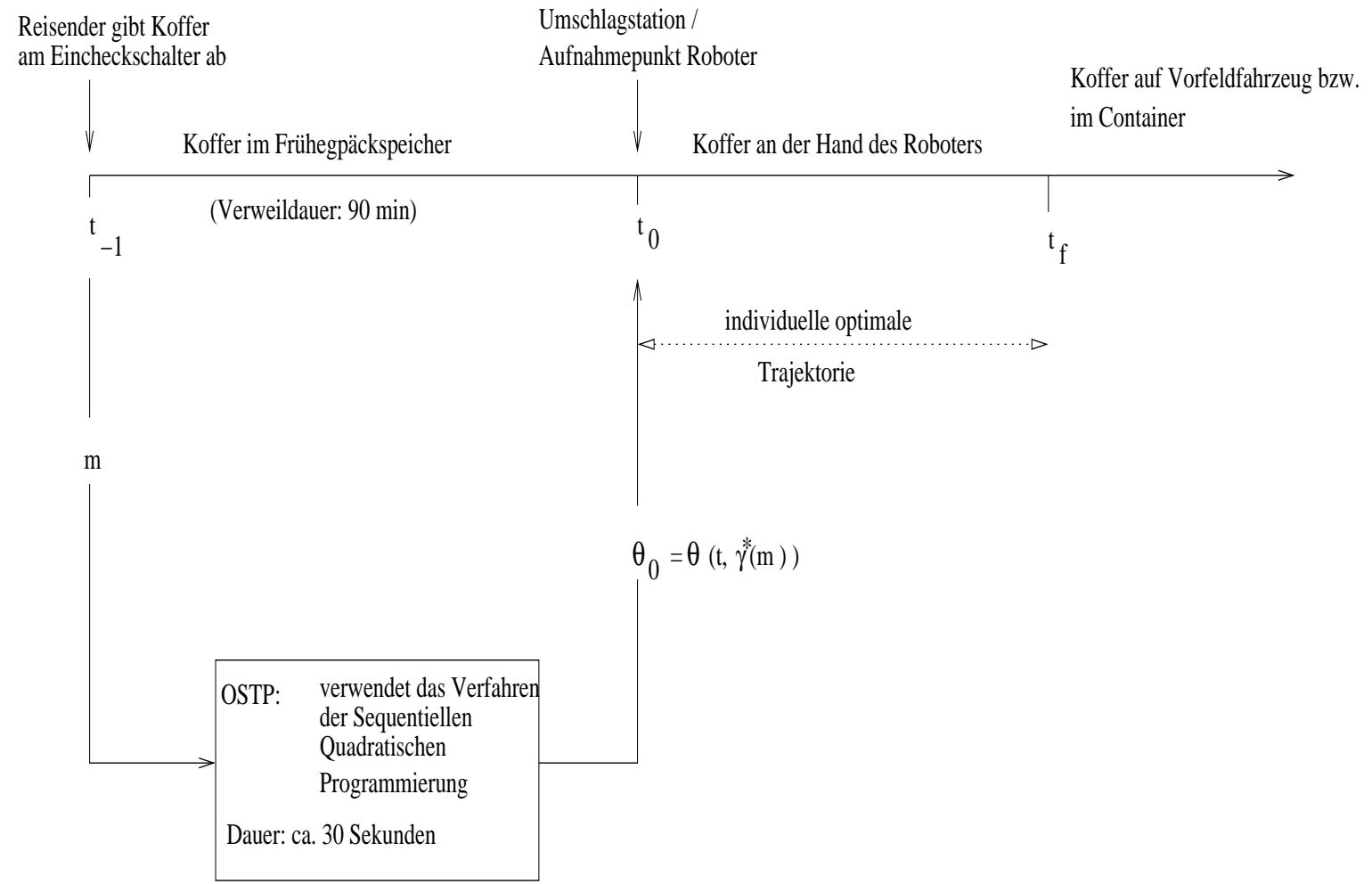


Abbildung 2.19: Informationsfluß des Szenarios 1

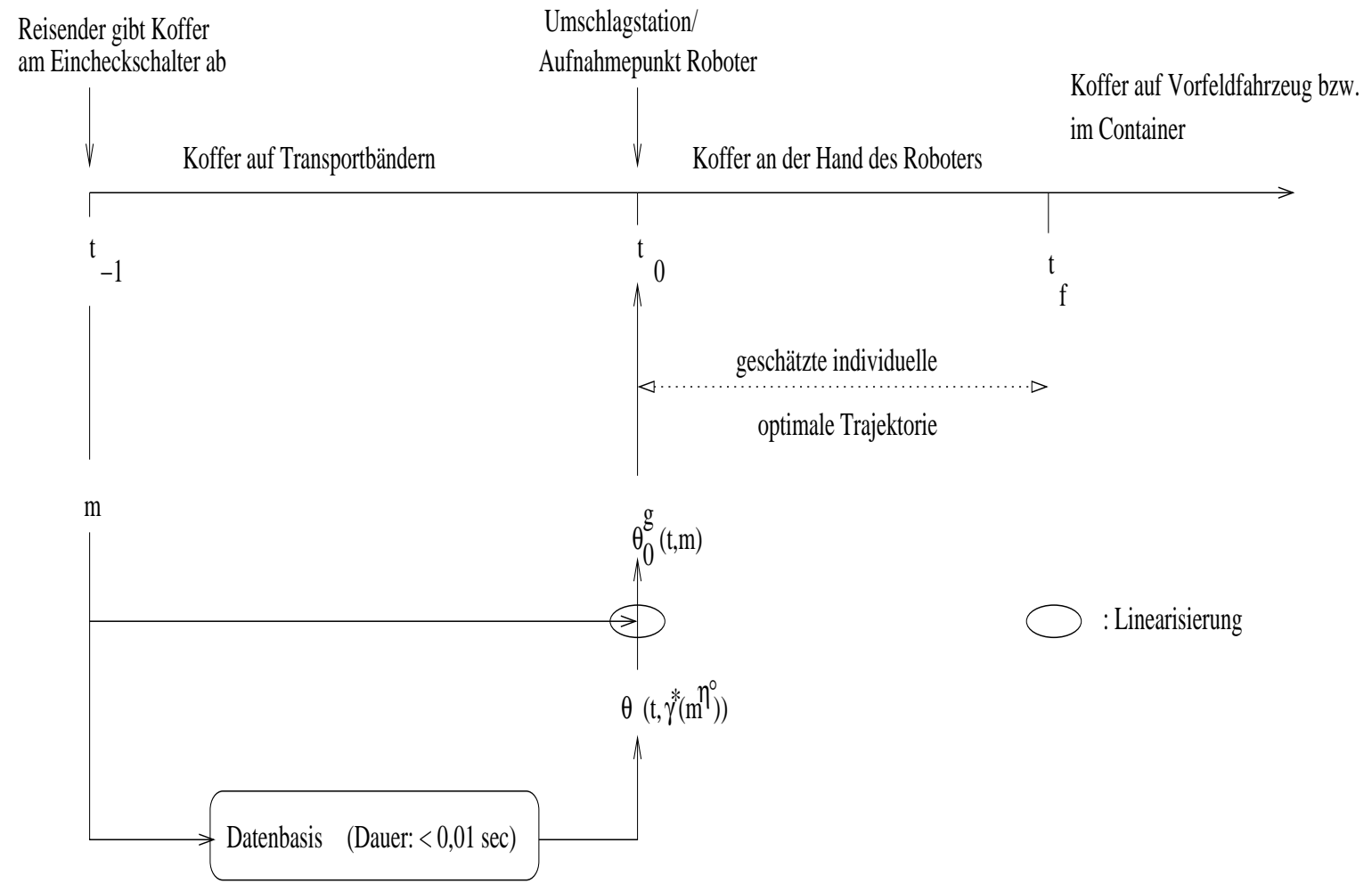


Abbildung 2.20: Informationsfluß des Szenarios 2



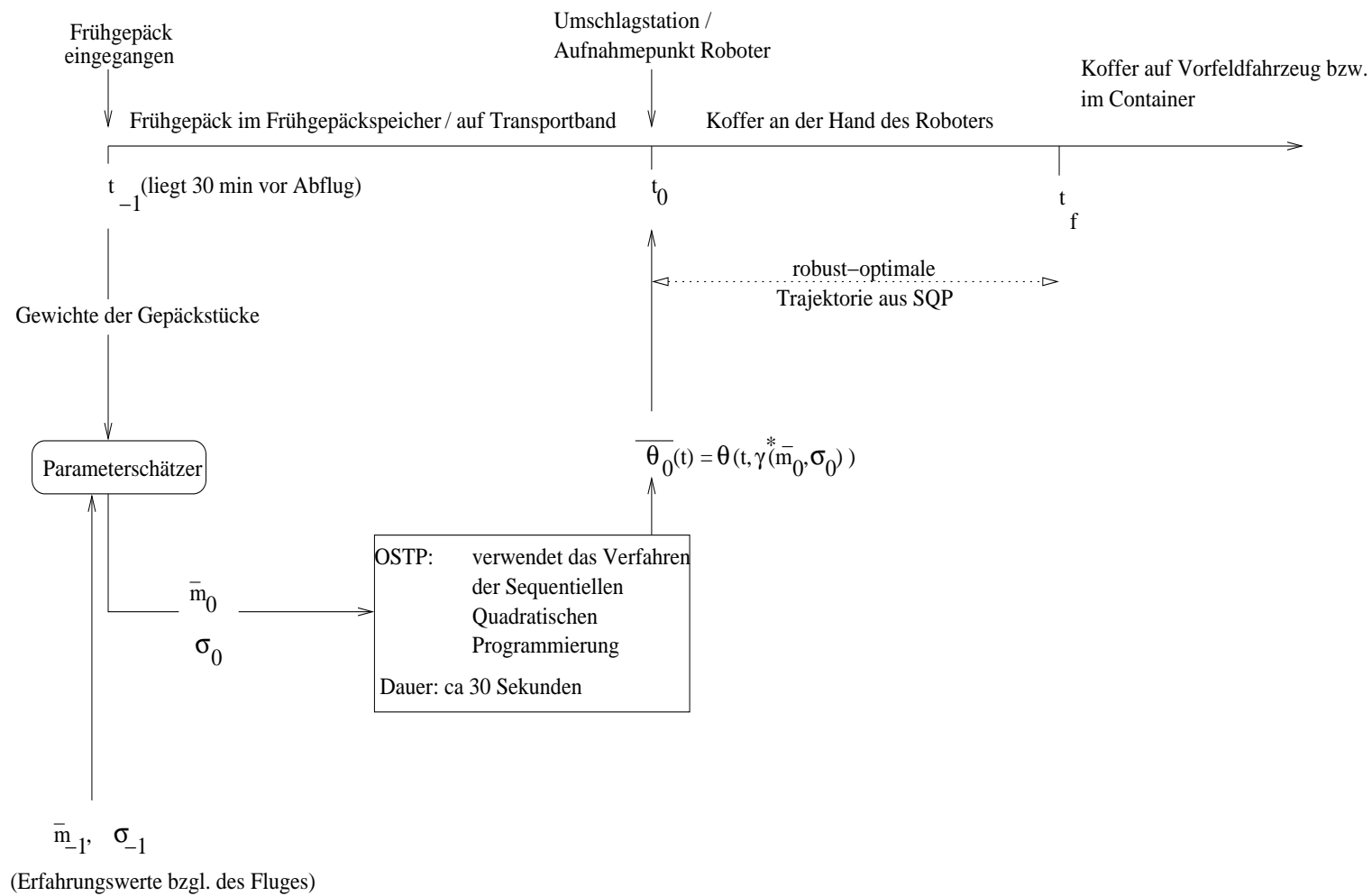
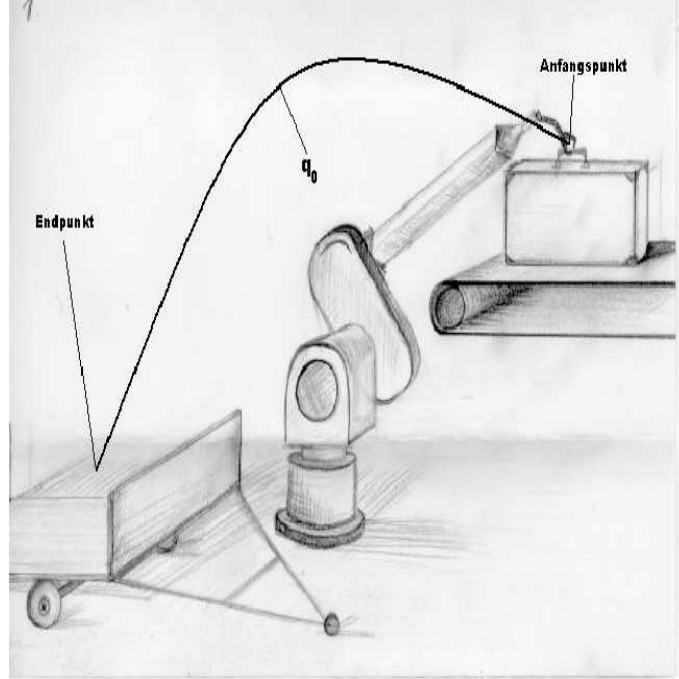


Abbildung 2.21: Informationsfluß des Szenarios 3

Abbildung 2.22: Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t)$ 

Der Schätzvorgang sucht aus der Datenbasis (siehe Kapitel 8.4) den Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Wertepaar  $\bar{m}_0^{\eta^\circ}, \sigma_0^{\iota^\circ}$  heraus. Die Datenbasis enthält  $n_{\bar{m}} \cdot n_\sigma$  Referenztrajektorien, die vorab für unterschiedliche Erwartungswerte  $\bar{m}_0^\eta$  mit dem konstanten Abstand  $\Delta\bar{m}_0 = \bar{m}_0^{\eta+1} - \bar{m}_0^\eta$  und Standardabweichungen  $\sigma_0^\iota$  mit konstantem Abstand  $\Delta\sigma_0 = \sigma_0^{\iota+1} - \sigma_0^\iota$  berechnet wurden. Der Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Wertepaar  $\bar{m}_0^{\eta^\circ}, \sigma_0^{\iota^\circ}$  ergibt sich aus

$$\min_{\eta, \iota} \left( \left| \frac{\bar{m}_0^\eta - \bar{m}_0}{\Delta\bar{m}} \right| + \left| \frac{\sigma_0^\iota - \sigma_0}{\Delta\sigma} \right| \right) \quad (2.10)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, n_{\bar{m}_0}$  und  $\iota = 1, 2, \dots, n_{\sigma_0}$ . Die Lösung des Optimierungsproblems (2.10) wird mit  $\bar{m}_0^{\eta^\circ}, \sigma_0^{\iota^\circ}$  bezeichnet. Die geschätzte Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0^g(t)$  entsteht durch Linearisierung des optimalen Koeffizientenvektors  $\gamma^* = \gamma^*(\bar{m}_0, \sigma_0)$  bezüglich  $(\bar{m}_0, \sigma_0)$  an der Stelle  $(\bar{m}_0^{\eta^\circ}, \sigma_0^{\iota^\circ})$ :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_0^g(t) &= \theta \left( t, \gamma^*(\bar{m}_0^{\eta^\circ}, \sigma_0^{\iota^\circ}) + \frac{\partial \gamma^*}{\partial \bar{m}_0}(\bar{m}_0^{\eta^\circ}, \sigma_0^{\iota^\circ}) \cdot (\bar{m}_0 - \bar{m}_0^{\eta^\circ}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \gamma^*}{\partial \sigma_0}(\bar{m}_0^{\eta^\circ}, \sigma_0^{\iota^\circ}) \cdot (\sigma_0 - \sigma_0^{\iota^\circ}) \right), t \geq t_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dabei bezeichnet  $\gamma^* = \gamma^*(\bar{m}_0, \sigma_0)$  den optimalen Koeffizientenvektor zu den Eingangsparametern  $\bar{m}_0$  ( $\equiv$  Erwartungswert) und  $\sigma_0$  ( $\equiv$  Standardabweichung) gemäß Kapitel 6. Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \bar{m}_0}$  und  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \sigma_0}$  liefert der Abschnitt 8.1. Bei erneuten Änderungen von  $\bar{m}_0$  und  $\sigma_0$  erfolgen aktualisierende Neuschätzungen der Referenztrajektorie.

- **Szenario 5:**

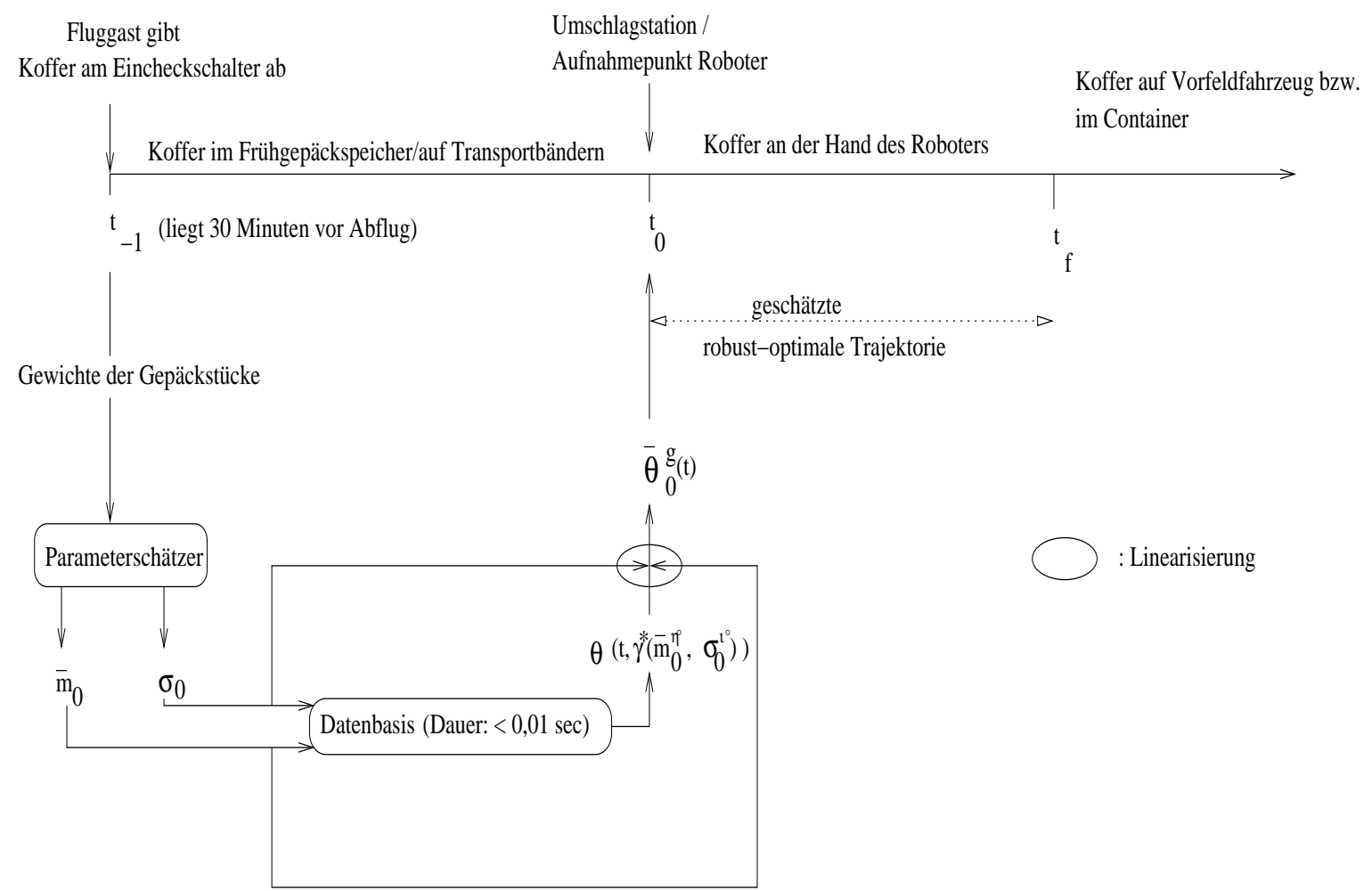


Abbildung 2.23: Informationsfluß des Szenarios 4

Dieses Szenario benötigt weder Daten noch Auswertungen des Einchecksalters. Stattdessen arbeitet es mit dem Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und der Standardabweichung  $\sigma_0$  der umzuschlagenden Gepäckkategorie. Um den Regelaufwand der hierfür vor Inbetriebnahme ermittelten Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t) = \theta(t, \gamma^*(\bar{m}_0, \sigma_0))$  (Abb. 2.22) wesentlich zu reduzieren, wird folgendermaßen vorgegangen:

- Nach dem Anfahren erfolgt auf Grundlage der Messung von Gelenkwinkeln, Gelenkwinkelgeschwindigkeiten und Gelenkwinkelbeschleunigungen<sup>20</sup> mit Hilfe der dynamischen Gleichung des Roboters (siehe Kapitel 4.4) eine fortlaufende Berechnung von Werten für die realisierte Nutzlastmasse (d.h. für das gerade vom Roboter beförderte Gepäckstück). Da sich jedoch Meß-, Integrations- und Differenzierungsfehler fortpflanzen, werden die berechneten Werte des jeweiligen Gepäckstückes an einen als gegeben angenommenen Parameterschätzer weitergegeben, der die Punktschätzung der realisierten Nutzlastmasse zum vorab festgelegten Abfragezeitpunkt  $t_1$  vornimmt und den Mittelwert  $\bar{m}_1$  und den mittleren Fehler  $\sigma_1$  der realisierten Nutzlast  $m$  an die Datenbasis liefert.
- Der Abfragezeitpunkt  $t_1$ , der Mittelwert  $\bar{m}_1$ , der mittlere Fehler  $\sigma_1$ , die Gelenkwinkel  $\theta_1$  und die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1$  bilden einen Eingangsvektor  $\mathbf{p}_{E_1}$ .

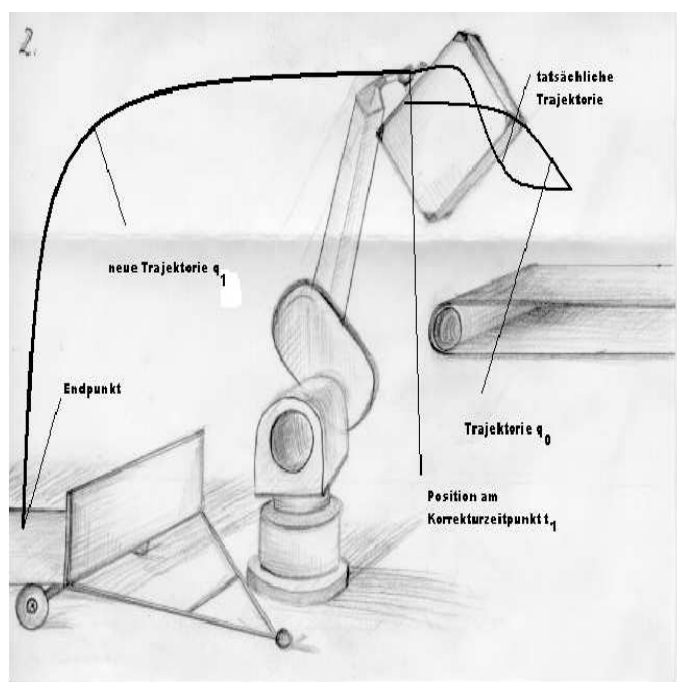


Abbildung 2.24: Wechsel von der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t) = \theta(t, \gamma^*(\bar{m}_0, \sigma_0))$  auf die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_1^q(t)$  beim Zugang aktueller Informationen zum Zeitpunkt  $t_1$

- Mit diesem Eingangsvektor läßt sich von der Betriebsposition des Roboters zum Zeitpunkt  $t_1$  ausgehend eine neue robust-optimale Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_1(t)$  zum Endpunkt bestimmen. Dazu wird aus der Datenbasis (siehe Kapitel 8.4) der Gitterpunkt mit dem

<sup>20</sup>Der Roboter MANUTEc r3 weist eine Besonderheit auf: Hier werden die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten gemessen, daraus über Tiefpaßfilterung die Gelenkwinkel ermittelt und durch Hochpaßfilterung die Gelenkwinkelbeschleunigungen erzeugt [73].

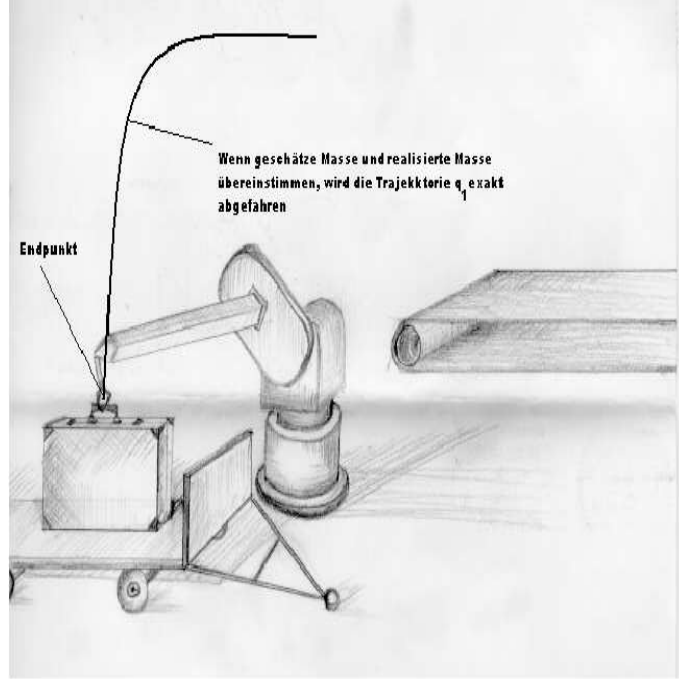


Abbildung 2.25: Abliefern des Gepäckstückes

nächstliegenden Wertepaar  $\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota$  herausgesucht. Für die Berechnung der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_1(t)$  werden aktuelle Position und Geschwindigkeit des Roboters am Zeitpunkt  $t_1$  benötigt. Reglerbedingt befindet sich die Roboterhand am vorab festgelegten Zeitpunkt  $t_1$  in unmittelbarer Nähe der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t)$ . Daher werden deren Gelenkwinkelstellungen und Gelenkwinkelgeschwindigkeiten am Zeitpunkt  $t_1$  als Anfangsgelenkwinkel  $\theta_1$  und Anfangsgelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1$  der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_1(t)$  herangezogen. Die Datenbasis enthält  $n_{\bar{m}_1} \cdot n_{\sigma_1}$  Referenztrajektorien, die vorab für unterschiedliche Mittelwerte  $\bar{m}_1^\eta$  mit dem konstanten Abstand  $\Delta\bar{m}_1 = \bar{m}_1^{\eta+1} - \bar{m}_1^\eta$  und unterschiedliche mittlere Fehler  $\sigma_1^\iota$  mit dem konstanten Abstand  $\Delta\sigma_1 = \sigma_1^{\iota+1} - \sigma_1^\iota$  berechnet wurden. Der Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Wertepaar  $\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota$  ergibt sich aus

$$\min_{\eta, \iota} \left( \left| \frac{\bar{m}_1^\eta - \bar{m}_1}{\Delta\bar{m}_1} \right| + \left| \frac{\sigma_1^\iota - \sigma_1}{\Delta\sigma_1} \right| \right) \quad (2.12)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, n_{\bar{m}_1}$  und  $\iota = 1, 2, \dots, n_{\sigma_1}$ . Die Lösung des Optimierungsproblems (2.12) wird mit  $\bar{m}_1^{\eta^\circ}, \sigma_1^{\iota^\circ}$  bezeichnet.

- Die geschätzte Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_1^g(t)$  entsteht durch Linearisierung des optimalen Koeffizientenvektors  $\gamma^* = \gamma^*(\bar{m}_1, \sigma_1)$  für  $t \geq t_1$  bezüglich  $(\bar{m}_1, \sigma_1)$  an der Stelle  $(\bar{m}_1, \sigma_1)$ . Da sich die Roboterhand aufgrund des Reglers zum Schaltzeitpunkt  $t_1$  in unmittelbarer Nähe der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t)$ , d.h. ihrer Sollposition- und geschwindigkeit, befindet, sind die Differenzen  $\theta_1 - \theta_1^{\eta^\circ, \iota^\circ}$  und  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1^{\eta^\circ, \iota^\circ}$  in der Linearisierung (2.13) nicht berücksichtigt.

$$\bar{\theta}_1^g(t) = \theta \left( t, \gamma^*(\bar{m}_1^{\eta^\circ}, \sigma_1^{\iota^\circ}) + \frac{\partial \gamma^*}{\partial \bar{m}_1}(\bar{m}_1^{\eta^\circ}, \sigma_1^{\iota^\circ}) \cdot (\bar{m}_1 - \bar{m}_1^{\eta^\circ}) \right)$$

$$+ \frac{\partial \gamma^*}{\partial \sigma_1}(\bar{m}_1^{\eta^\circ}, \sigma_1^{\iota^\circ}) \cdot (\sigma_1 - \sigma_1^{\iota^\circ}), t \geq t_1 \quad (2.13)$$

Dabei bezeichnet  $\gamma^* = \gamma^*(\bar{m}_1, \sigma_1)$  den optimalen Koeffizientenvektor zu den Eingangsparametern  $\bar{m}_1$  ( $\equiv$  Mittelwert) und  $\sigma_1$  ( $\equiv$  mittlerer Fehler) gemäß Kapitel 6. Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \bar{m}_1}$  und  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \sigma_1}$  liefert der Abschnitt 8.1.

- Das entscheidende Merkmal dieser neuen Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_1^g(t)$  ist ein signifikant herabgesetzter Regelaufwand gegenüber  $\bar{\theta}_0(t)$ .

Durch den Übergang von der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t)$  auf die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_1^g(t)$  (siehe Abb. 2.24) mit ihrer deutlich kleineren Standardabweichung strebt man gewissermaßen wieder in Richtung der im zweiten Szenario beschriebenen deterministischen Referenztrajektorie. Das Szenario 5 kommt ohne Tag-ID und BSM aus <sup>21</sup>.

- **Szenario 6:**

Vor dem Zeitpunkt  $t_1$  tritt der Notfall *Positionierungsungenauigkeit des Teilsystems Kofferabtransport*, z.B. durch Schwankungen des Hydraulikdruckes, auf. Beim Erreichen des Zeitpunktes  $t_1$  erfolgt daher die Schätzung einer neuen robust-optimalen Referenztrajektorie zu einem neuen Endpunkt in Echtzeit, wobei der Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und die Standardabweichung  $\sigma_0$  des Szenarios 5 beibehalten werden.

Gemäß Abbildung 2.27 geht der Koffer zum Zeitpunkt  $t_{-1}$  am Eincheckschalter ein. Zur Zeit  $t_0$  erreicht der Koffer die Umschlagstation. Der Roboter beginnt, den Koffer mit der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t)$  zum Endpunkt hin zu bewegen. Tritt nun vor dem Zeitpunkt  $t_1$  eine Positionierungsungenauigkeit des Teilsystems Kofferabtransport auf, bestimmt das maschinelle Sichtsystem die Lage des neuen Endpunktes  $\theta_f$ , leitet diese der vorab errechneten Datenbasis zu, die den Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Endpunkt  $\theta_{1f}, \theta_{2f}, \theta_{3f}$  ausgibt. Die Datenbasis enthält  $n_{\theta_{1f}} \cdot n_{\theta_{2f}} \cdot n_{\theta_{3f}}$  Referenztrajektorien, die vorab für unterschiedliche Endpositionen  $\left( \theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\iota, \theta_{3f}^\zeta \right)^T$  mit dem konstanten Abstand  $\left( \Delta\theta_{1f}, \Delta\theta_{2f}, \Delta\theta_{3f} \right)^T = \left( \theta_{1f}^{\eta+1} - \theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^{\iota+1} - \theta_{2f}^\iota, \theta_{3f}^{\zeta+1} - \theta_{3f}^\zeta \right)^T$  berechnet wurden. Der Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Endpunkt  $\theta_{1f}, \theta_{2f}, \theta_{3f}$  ergibt sich aus

$$\min_{\eta, \iota, \zeta} \left( \left| \frac{\theta_{1f}^\eta - \theta_{1f}}{\Delta\theta_{1f}} \right| + \left| \frac{\theta_{2f}^\iota - \theta_{2f}}{\Delta\theta_{2f}} \right| + \left| \frac{\theta_{3f}^\zeta - \theta_{3f}}{\Delta\theta_{3f}} \right| \right) \quad (2.14)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, n_{\theta_{1f}}$ ,  $\iota = 1, 2, \dots, n_{\theta_{2f}}$  und  $\zeta = 1, 2, \dots, n_{\theta_{3f}}$ . Die Lösung des Optimierungsproblems (2.14) wird mit  $\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ} := (\theta_{1f}^{\eta^\circ}, \theta_{2f}^{\iota^\circ}, \theta_{3f}^{\zeta^\circ})^T$  bezeichnet. Die geschätzte Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{1N}^g(t)$  entsteht durch Linearisierung des optimalen Koeffizientenvektors  $\gamma^* = \gamma^*(\theta_f)$  für  $t \geq t_1$  bezüglich  $\theta_f$  an der Stelle  $\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}$ . Da sich die Roboterhand aufgrund des Reglers zum Schaltzeitpunkt  $t_1$  in unmittelbarer Nähe der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t)$ , d.h. ihrer Sollposition- und geschwindigkeit, befindet, sind die Differenzen  $\theta_1 - \theta_1^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}$  und  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}$  in der Linearisierung (2.15) nicht berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{1N}^g(t, \theta_f) &= \theta \left( t, \gamma^*(\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}) + \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{1f}}(\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}) \cdot (\theta_{1f} - \theta_{1f}^{\eta^\circ}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{2f}}(\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}) \cdot (\theta_{2f} - \theta_{2f}^{\iota^\circ}) \right) \end{aligned}$$

<sup>21</sup>Szenario 5 kann auch als Notfallszenario der Szenarien 1 und 2 fungieren, falls trotz befülltem Gewichtsfeld der BSM die Masse des Gepäckstückes nicht vor dem Zeitpunkt  $t_0$ , sondern erst zwischen  $t_0$  und  $t_1$  dem Roboter mitgeteilt wird.

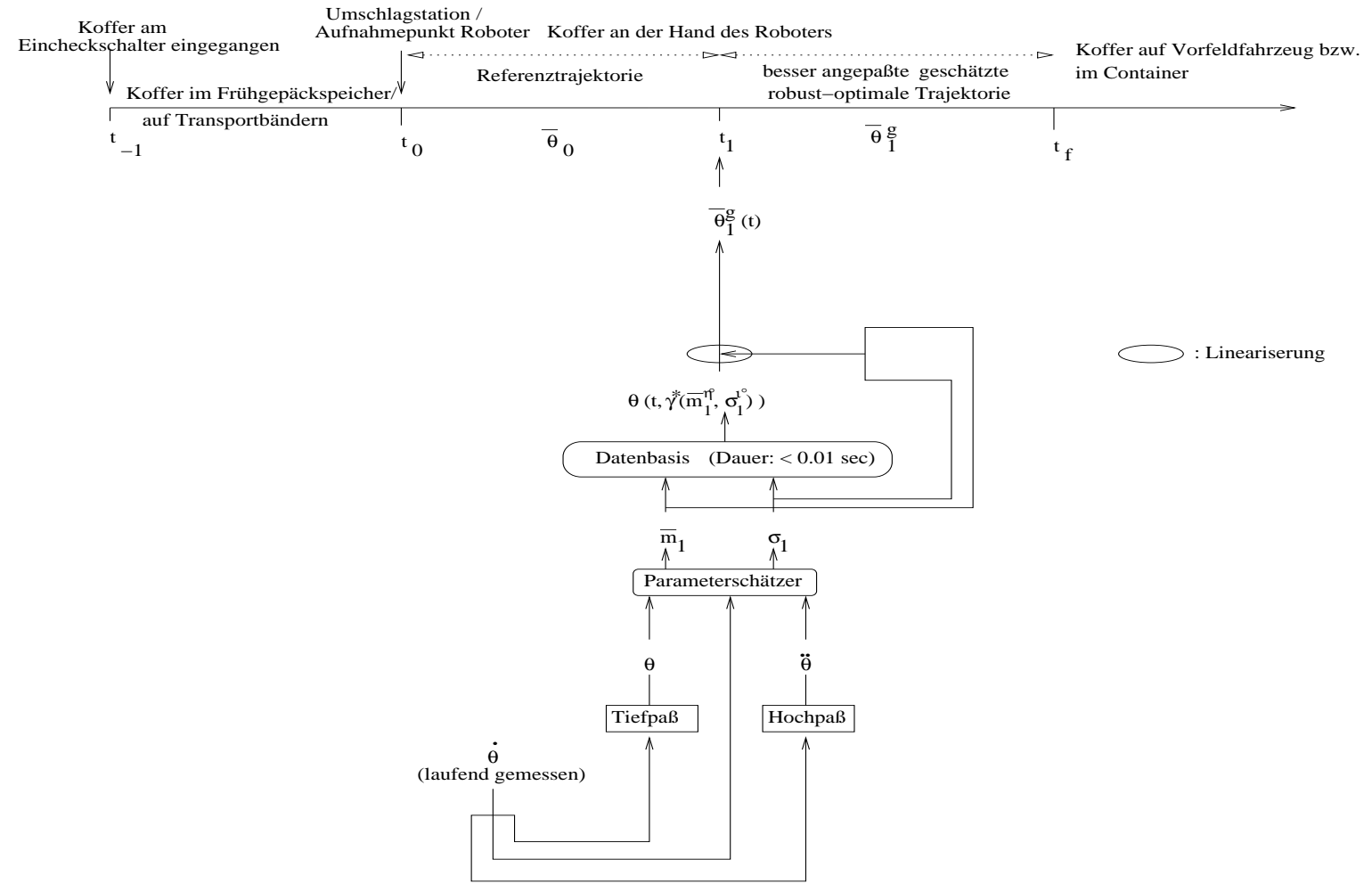


Abbildung 2.26: Informationsfluß Szenario 5

$$+ \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{3f}}(\theta_f^\zeta) \cdot (\theta_{3f} - \theta_{3f}^{\zeta^\circ}), t \geq t_1 \quad (2.15)$$

Dabei bezeichnet  $\gamma^* = \gamma^*(\theta_f)$  die optimale Referenztrajektorie zu den Parametern  $\theta_f = (\theta_{1f}, \theta_{2f}, \theta_{3f})^T$  (vom maschinellen Sichtsystem bereitgestellte neue Endposition) gemäß Kapitel 6. Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{1f}}$ ,  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{2f}}$  und  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{3f}}$  liefert Abschnitt 8.1.

Am Zeitpunkt  $t_1$  geht die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_0(t)$  in die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{1N}^g(t)$  über. Am Zeitpunkt  $t_f$  erreicht der Roboter die neue Endposition und setzt den Koffer durch Kappen der Flachbänder auf den dortigen freien Platz. Während der Rückkehr des leeren Roboters zum Anfangspunkt bestimmt das maschinelle Sichtsystem die Endposition für das nächste Gepäckstück.

- **Szenario 7:**

Da die Vorsteuerungen des Szenarios 7 im Gegensatz zum Szenario 6 vom Anfangs- zum Endpunkt reichen, wird in den Szenarien 1 bis 4 bei Auftreten des Notfalls *Positionierungsungenauigkeit des Teilsystems Kofferabtransport* zum Szenario 7 übergegangen (siehe auch Abbildung 2.18). Für das zur Beförderung anstehende Gepäckstück ergibt sich infolge der Positionierungsungenauigkeit des Teilsystems Kofferabtransport eine andere Endposition. Das maschinelle Sichtsystem mißt während des Rücklaufes des leeren Roboters die jeweils benötigte neue Endposition  $\theta_f$  aus. Für diese wird in Echtzeit eine robust-optimale Vorsteuerung, vom gleichbleibenden Anfangspunkt  $\theta_0$  ausgehend, zum Zeitpunkt  $t_0$  geschätzt.

Den Vorsteuerungen des Szenarios 7 liegt das aus Statistiken bekannte Wertepaar Erwartungswert und Standardabweichung der umzuschlagenden Gepäckkategorie zugrunde.

Gemäß Abbildung 2.28 geht der Koffer zum Zeitpunkt  $t_{-1}$  am Eincheckschalter ein. Das Maschinelle Sichtsystem gibt die neue Endposition an die Datenbasis weiter, die den Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Endpunkt  $\theta_{1f}, \theta_{2f}, \theta_{3f}$  ausgibt. Die Datenbasis enthält  $n_{\theta_{1f}} \cdot n_{\theta_{2f}} \cdot n_{\theta_{3f}}$

Referenztrajektorien, die vorab für unterschiedliche Endpositionen  $(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\iota, \theta_{3f}^\zeta)^T$  mit dem konstanten Abstand  $(\Delta\theta_{1f}, \Delta\theta_{2f}, \Delta\theta_{3f})^T = (\theta_{1f}^{\eta+1} - \theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^{\iota+1} - \theta_{2f}^\iota, \theta_{3f}^{\zeta+1} - \theta_{3f}^\zeta)^T$  berechnet wurden. Der Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Endpunkt  $\theta_{1f}, \theta_{2f}, \theta_{3f}$  ergibt sich aus

$$\min_{\eta\zeta} \left( \left| \frac{\theta_{1f}^\eta - \theta_{1f}}{\Delta\theta_{1f}} \right| + \left| \frac{\theta_{2f}^\iota - \theta_{2f}}{\Delta\theta_{2f}} \right| + \left| \frac{\theta_{3f}^\zeta - \theta_{3f}}{\Delta\theta_{3f}} \right| \right) \quad (2.16)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, n_{\theta_{1f}}$ ,  $\iota = 1, 2, \dots, n_{\theta_{2f}}$  und  $\zeta = 1, 2, \dots, n_{\theta_{3f}}$ . Die Lösung des Optimierungsproblems (2.16) wird mit  $\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ} = (\theta_{1f}^{\eta^\circ}, \theta_{2f}^{\iota^\circ}, \theta_{3f}^{\zeta^\circ})^T$  bezeichnet. Die geschätzte Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0N}^g(t)$  entsteht durch Linearisierung des optimalen Koeffizientenvektors  $\gamma^* = \gamma^*(\theta_f)$  bezüglich  $\theta_f$  an der Stelle  $\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ} = (\theta_{1f}^{\eta^\circ}, \theta_{2f}^{\iota^\circ}, \theta_{3f}^{\zeta^\circ})^T$ , wobei sich die Anfangsgelenkwinkelstellung  $\theta_0$  und die Anfangsgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_0 = 0 \frac{rad}{s}$  nicht verändern:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{0N}^g(t) &= \theta \left( t, \gamma^*(\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}) + \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{1f}}(\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}) \cdot (\theta_{1f} - \theta_{1f}^{\eta^\circ}) \right. \\ &\quad + \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{2f}}(\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}) \cdot (\theta_{2f} - \theta_{2f}^{\iota^\circ}) \\ &\quad \left. + \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{3f}}(\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ}) \cdot (\theta_{3f} - \theta_{3f}^{\zeta^\circ}) \right), t \geq t_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dabei bezeichnet  $\gamma^* = \gamma^*(\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ})$  den optimalen Koeffizientenvektor zu den Eingangsparametern  $\theta_f^{\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ} = (\theta_{1f}^{\eta^\circ}, \theta_{2f}^{\iota^\circ}, \theta_{3f}^{\zeta^\circ})^T$  (vom maschinellen Sichtsystem bereitgestellte neue Endpo-



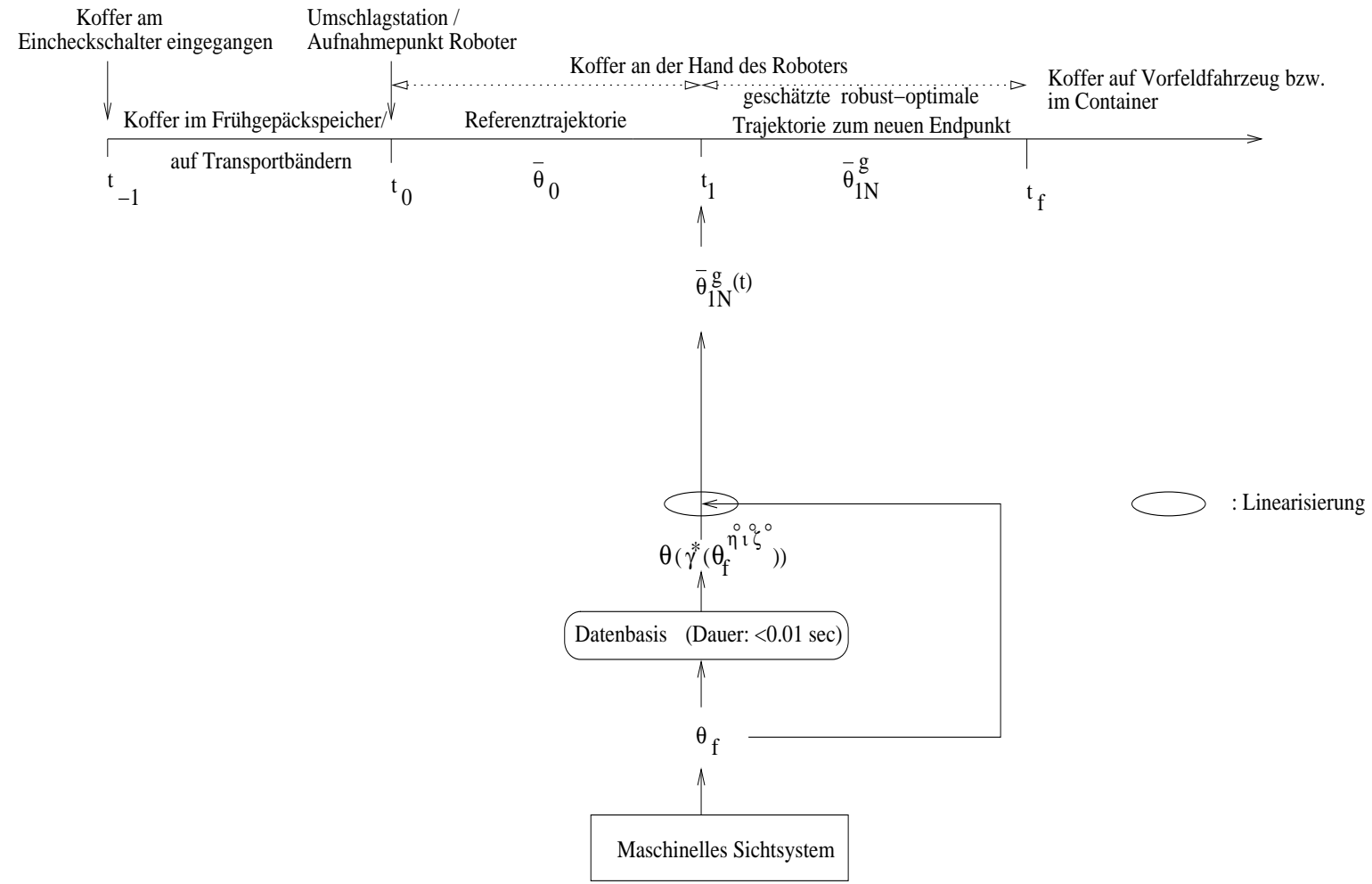


Abbildung 2.27: Informationsfluß Szenario 6

sition) gemäß Kapitel 6. Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{1f}}$ ,  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{2f}}$  und  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta_{3f}}$  liefert der Abschnitt 8.1.

Mit der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0N}^g(t)$  verbringt der Roboter das Gepäckstück zur neuen Endposition. Am Zeitpunkt  $t_f$  erreicht der Roboter die neue Endposition und setzt den Koffer durch Kappen der Flachbänder [55] auf den dortigen freien Platz.

### 2.4.6 Durchsatz

Da zur Berechnung einer optimalen Rückkehrtrajektorie  $\theta_R(t)$  alle Parameter bekannt sind, läßt sich diese mit deterministischen Methoden bestimmen.

Die Summen der Laufzeiten aus

- $\theta_0(t)$  und  $\theta_R(t)$  (Szenario 1),
- $\theta_0^g(t)$  und  $\theta_R(t)$  (Szenario 2),
- $\bar{\theta}_0(t)$  und  $\theta_R(t)$  (Szenario 3),
- $\bar{\theta}_0^g(t)$  und  $\theta_R(t)$  (Szenario 4),
- $\bar{\theta}_1^g(t)$  und  $\theta_R(t)$  (Szenario 5),
- $\bar{\theta}_{1N}^g(t)$  und  $\theta_R(t)$  (Szenario 6) sowie
- $\bar{\theta}_{0N}^g(t)$  und  $\theta_R(t)$  (Szenario 7)

liegen für jedes Szenario knapp unter 2.3 Sekunden. Setzt man

- 1.25 sec für das Einschnüren am Aufnahmepunkt [69] <sup>22</sup> und
- 0.45 sec Kappen der Flachbänder am Absetzpunkt

an, ergibt sich eine Taktzeit von 4 sec. D.h. pro Minute schlägt ein Roboter 15 Koffer (= 900 Koffer pro Stunde) um. Vierzig Roboter bewältigen demnach innerhalb von 60 sec das Gepäck eines 600 Passagiere fassenden A380. Ein Arbeiter schafft laut der Gepäckleitzentrale des Flughafens Münchens 90 bis 120 Koffer pro Stunde.

Durch Einsatz eines Roboters mit optimalen Trajektorien läßt sich demnach eine Versiebeneinhalb- bis Verzehnfachung des Kofferumschlages pro Station erreichen. Die in Kapitel 1 geforderte Verdoppelung ist um das Dreidreiviertel- bis Fünffache übertroffen.

Das Ziel, den Durchsatz einer Umschlagstation zu verdoppeln, ist damit erreicht.

Die derzeit in Entwicklung befindlichen roboterbasierten Kofferumschlagsysteme verfügen nach [55] nur über nicht-optimale Trajektorien, weisen eine Taktzeit von 12 sec auf und damit einen Durchsatz von 300 Koffern pro Stunde. Die Anwendung optimaler Trajektorien bewirkt demnach eine Verdreifachung des Durchsatzes gegenüber Robotern mit nicht-optimale Trajektorien.

*Hinweis:*

*Da die maximale Nutzlast des Roboters MANUTECr3 (Abb. 1.1) allerdings auf 15 kg beschränkt ist, wird für die Datenbasen des Kapitels 8.1 und in den Beispielen des Kapitels 10 hinsichtlich der Masse der Maßstab 1 : 2 gewählt; d.h.*

<sup>22</sup>Die derzeit schnellste Umreifungsmaschine schafft 48 Umreifungen pro Minute.

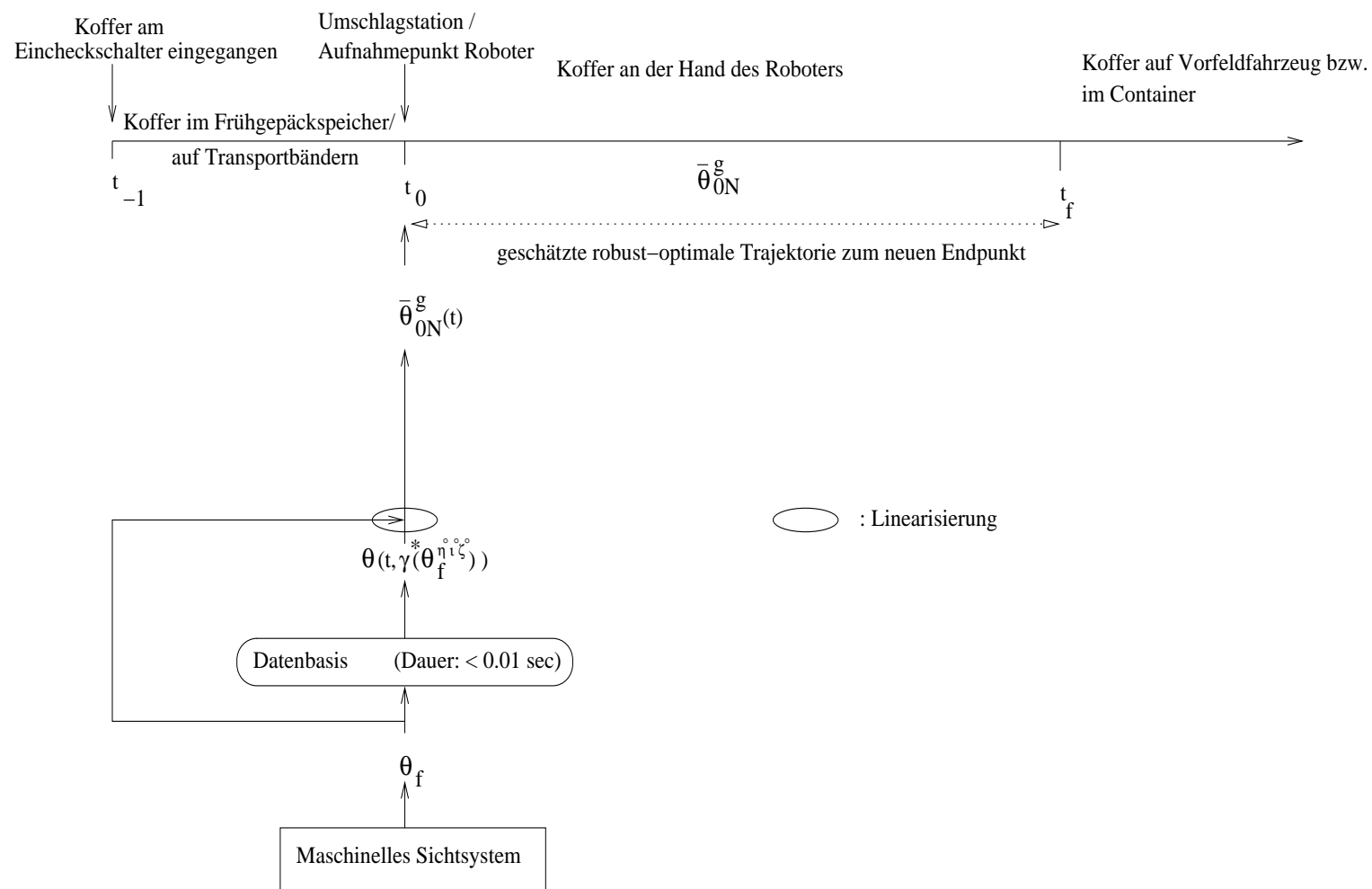


Abbildung 2.28: Informationsfluß Szenario 7

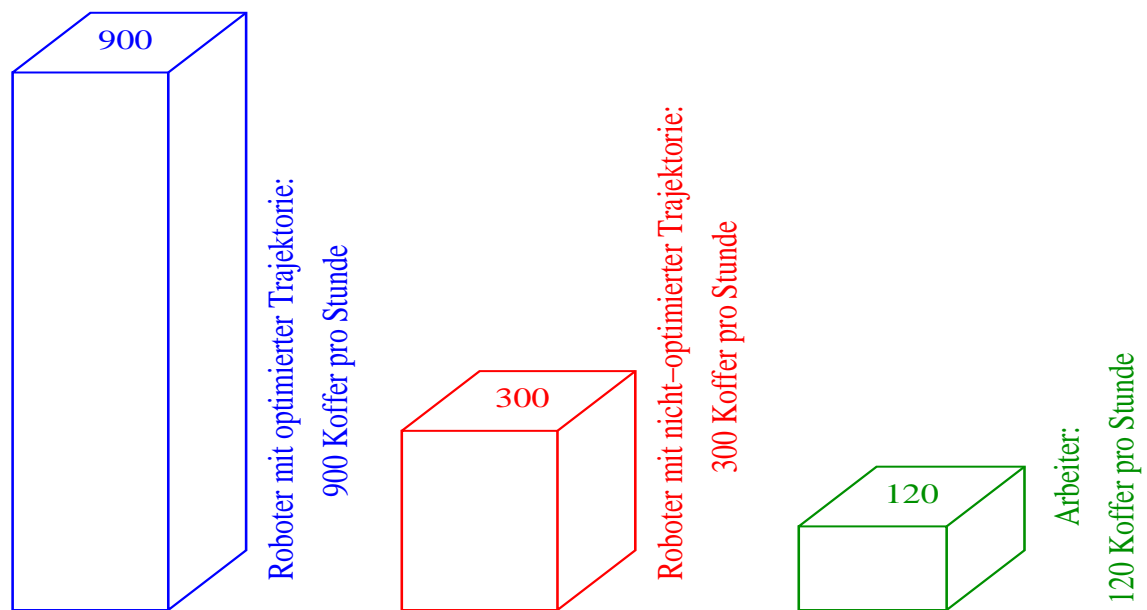


Abbildung 2.29: Kofferdurchsatz

- der Erwartungswert der Gepäckkategorie 3 wird mit  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$  statt mit  $15 \text{ kg}$  und
- die Standardabweichung der Gepäckkategorie 3 mit  $\sigma_0 = 2.5 \text{ kg}$  statt mit  $5 \text{ kg}$

angesetzt. Die zugehörige  $3\sigma_0$ -Umgebung erstreckt sich somit von  $0 \text{ kg}$  bis  $15 \text{ kg}$ . Innerhalb der  $3\sigma_0$ -Umgebung liegen im Falle einer Normalverteilung 99.73% aller möglichen Realisierungen.

# Kapitel 3

## Kinematik

Die Industrieroboter gehören zu den Mehrkörpersystemen.

### 3.1 Notation

Zur Beschreibung von Mehrkörpersystemen kommen neben dem Basis-Koordinatensystem noch mehrere körperlokale Koordinatensysteme zum Einsatz. Das Koordinatensystem  $O_i$  des Körpers  $i$  läßt sich mit Hilfe der Transformationsmatrix  $A_{i \rightarrow i-1}$  im Koordinatensystem  $O_{i-1}$  des Körpers  $i-1$  darstellen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{i \rightarrow i-1} & \mathbf{p}_{i \rightarrow i-1} \\ 000 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Die  $3 \times 3$  Matrix  $\mathbf{R}_{i \rightarrow i-1}$  gibt die Rotation und der  $3 \times 1$  Vektor  $\mathbf{p}_{i \rightarrow i-1}$  die Translation an. Die kinematische Kette von der Roboterbasis zum Werkzeugzentrierpunkt (WZP) der Hand entsteht durch Hintereinanderschalten der Transformationen (Matrizenmultiplikation):

$$\mathbf{A}_{WZP \rightarrow Basis} = \mathbf{A}_{1 \rightarrow Basis} \cdot \mathbf{A}_{2 \rightarrow 1} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_{n \rightarrow n-1} \cdot \mathbf{A}_{WZP \rightarrow n}. \quad (3.2)$$

Die kinematische Beschreibung eines Roboters erfordert pro Gelenk 4 Werte <sup>1</sup> (Siehe Abbildungen 3.1 und 3.2); zwei beziehen sich auf das Glied und zwei auf die Verbindung zum Nachfolglied:

- $a_i$  : kürzester Abstand zwischen den Gelenkachsen  $i$  und  $i+1$ ,
- $\alpha_i$  : Verdrehwinkel der Achsen  $i$  und  $i+1$ ,
- $d_i$  : Versatz des Robotergliedes in Richtung der Achse  $i$ ,
- $\theta_i$  : Drehwinkel um Achse  $i$ .

Bei rotatorischen Gelenken werden  $\theta_i$  als Gelenkvariable und  $a_i, \alpha_i$  sowie  $d_i$  als Gelenkparameter, bei translatorischen hingegen  $d_i$  als Gelenkvariable und  $\theta_i, a_i$  sowie  $\alpha_i$  als Gelenkparameter eingestuft. Der hier betrachtete Roboter MANUTECH r3 besitzt ausschließlich rotatorische Gelenke, die über Motoren mit Untersetzungsgetrieben angetrieben werden.

---

<sup>1</sup>Ein Gelenk ist immer von zwei Robotergliedern eingeschlossen.

### 3.1.1 Denavit-Hartenberg-Repräsentation (D-H-Repräsentation)

Denavit und Hartenberg schlugen einige Konventionen zur Bezeichnung und Anordnung der Koordinatensysteme der einzelnen Roboterglieder vor. Die Denavit-Hartenberg-Repräsentation arbeitet mit  $4 \times 4$  Transformationsmatrizen, die das Koordinatensystem eines Robotergliedes im Koordinatensystem des vorhergehenden Gliedes beschreiben. Die Handkoordinaten des Endeffektors (Werkzeug), angegeben im Koordinatensystem des WZP, sind somit durch Aneinanderreihung der Transformationsmatrizen im System der Roboterbasis darstellbar (siehe Gl. 3.2). Die D-H-Repräsentation bedient sich der folgenden D-H-Konvention:

- Die Achse  $z_{i-1}$  liegt in der Gelenkachse  $i$ .
- Die Achse  $x_i$  steht senkrecht auf  $z_{i-1}$  (=Gelenkachse  $i$ ) und  $z_i$  (=Gelenkachse  $i + 1$ ).
- Die Achse  $x_i$  zeigt von  $z_{i-1}$  weg.
- Die Achse  $y_i$  ergänzt die Achsen  $x_i$  und  $z_i$  zu einem rechtshändigen orthogonalen Koordinatensystem.

Der Übergang vom Koordinatensystem  $O_i$  zum System  $O_{i-1}$  erfolgt durch Multiplikation folgender Rotations- und Translationsmatrizen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{i \rightarrow i-1} &= \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(z_{i-1}, d_i) \cdot \text{Trans}(x_i, a_i) \cdot \text{Rot}(x_i, \alpha_i) \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{i \rightarrow i-1} & \mathbf{p}_{i \rightarrow i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

### 3.1.2 Modifizierte Denavit-Hartenberg-Repräsentation

Eine Anordnung des Ursprunges eines Koordinatensystems  $O_i$  am Übergang von Glied  $i$  zu Glied  $i + 1$  hat sich zwar für kinematische, jedoch nicht für dynamische Beschreibungen als praktikabel erwiesen. Weitere gravierende Nachteile der im vorherigen Unterabschnitt beschriebenen Version der Denavit-Hartenberg-Repräsentation sind:

- Darstellung geschlossener kinematischer Ketten und Bäume nicht möglich,
- Bezeichnung der Gelenkachse  $i$  als  $z_{i-1}$  sehr verwirrend.

Deshalb empfiehlt sich die Benutzung der heutzutage gebräuchlichen modifizierten Denavit-Hartenberg-Repräsentation, die mit einer Positionierung des Ursprunges am Übergang vom Glied  $i - 1$  zum Glied  $i$  arbeitet. Durch diese Modifikation fällt  $z_i$  mit der Gelenkachse  $i$  zusammen, und  $x_i$  steht sowohl auf  $z_{i-1}$  und als auch auf  $z_i$  senkrecht (siehe Abbildung 3.2). Damit ergibt sich der Übergang vom Koordinatensystem  $O_i$  zum System  $O_{i-1}$  wie folgt:

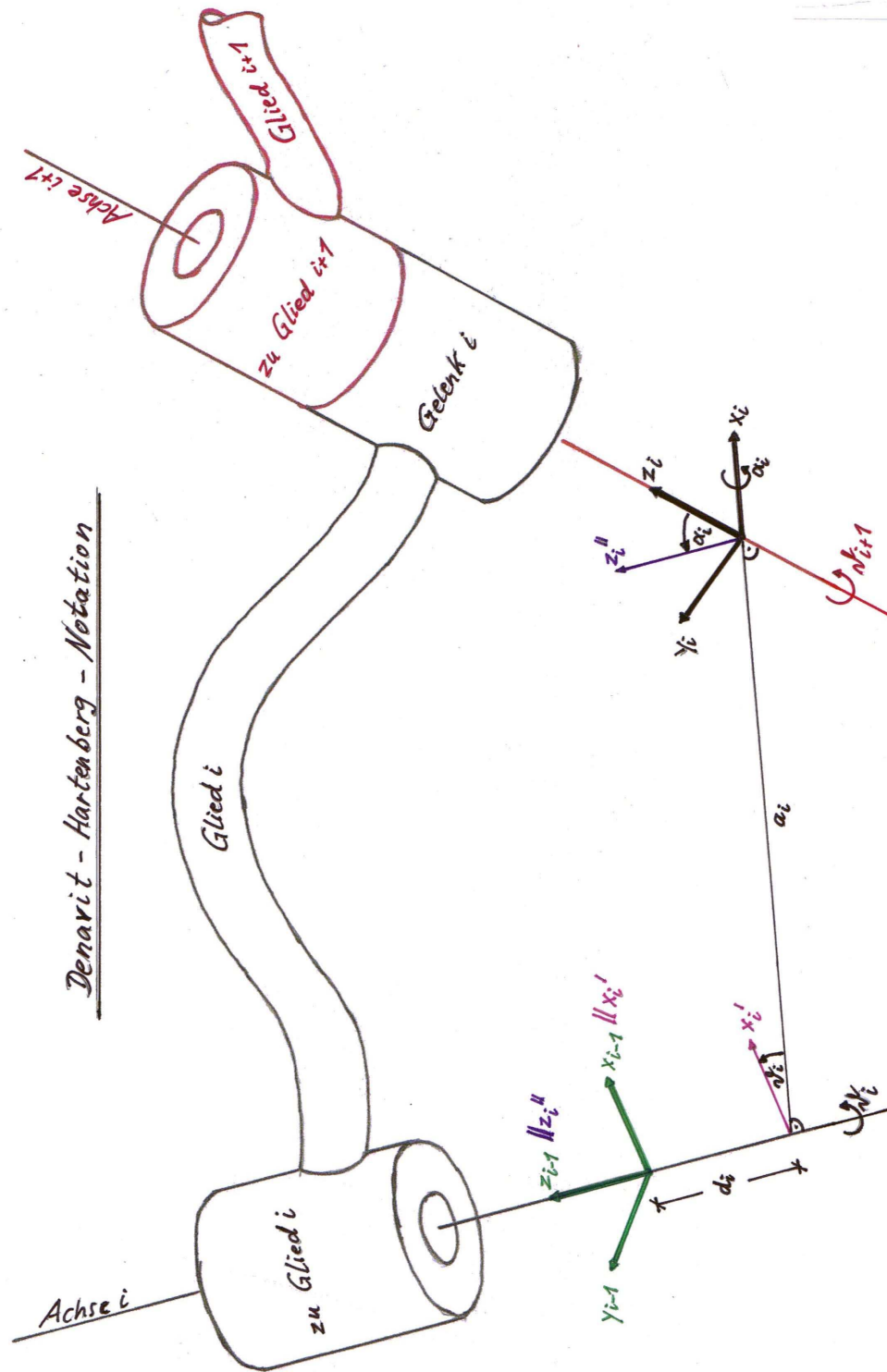


Abbildung 3.1: Denavit-Hartenberg-Notation

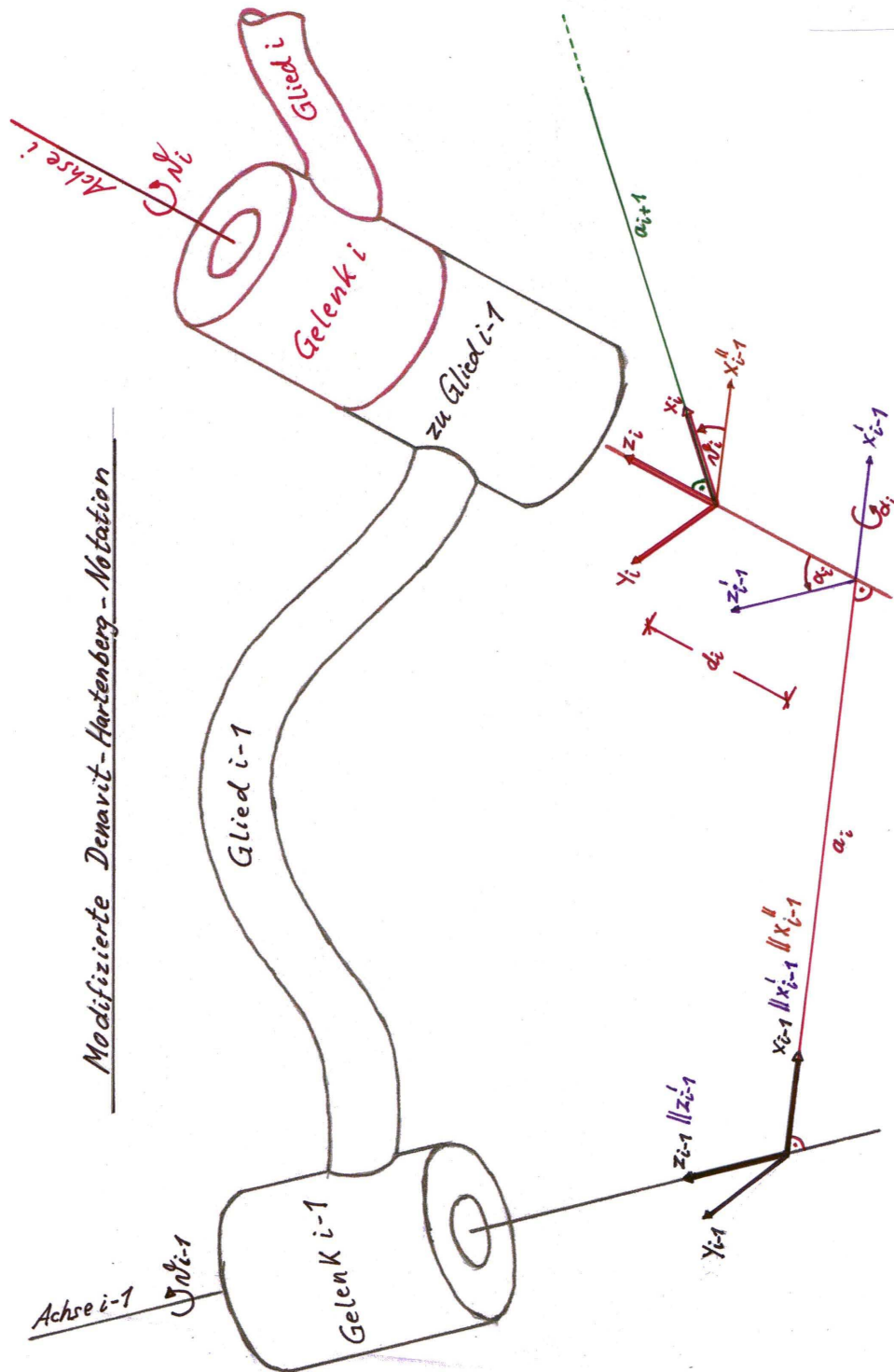


Abbildung 3.2: Modifizierte Denavit-Hartenberg-Notation



$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{i \rightarrow i-1} &= \text{Trans}(x_{i-1}, a_i) \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_i) \text{Trans}(z_i, d_i) \text{Rot}(z_i, \theta_i) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{i \rightarrow i-1} & \mathbf{p}_{i \rightarrow i-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_i \\ \cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i & -d_i \sin \theta_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & d_i \cos \theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

### 3.2 Umrechnung von der Konfigurations- in die Arbeitsraumdarstellung

Der Konfigurationsraum  $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^3$  ist die Menge aller möglichen Roboterkonfigurationen  $\theta \in \mathbb{R}^3$ , wobei  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  und  $\theta_3$  die Minimalkoordinaten des Systems bilden. Im Folgenden ist die Umrechnung von den Minimalkoordinaten  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  und  $\theta_3$  in die kartesischen Inertialkoordinaten  $x_0, y_0, z_0$  aufgeführt:

$$x_0 = [a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin \theta_2] \cos \theta_1 \tag{3.5}$$

$$y_0 = [a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin \theta_2] \sin \theta_1 \tag{3.6}$$

$$z_0 = a_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \cos \theta_2 + a_1. \tag{3.7}$$

Der Vektor  $(x_0, y_0, z_0)^T$  gibt die Position des Werkzeugzentrierpunktes (WZP) im Arbeitsraum an. Beim Roboter MANUTEC r3 schneiden sich die Achsen des 1. und 2. Gelenkes; daher hat  $a_2$  den Wert 0.

### 3.3 Die Kinematik des Ersatzsystems

Das Ersatzsystem zur Beschreibung des Roboters besteht nach [73] aus einer Kette starrer Körper, die die Antriebsmotoren enthalten. Die Richtungseinheitsvektoren  $\mathbf{z}_i$  bezeichnen die Gelenkachsen und  $\theta_i$  die zugehörigen Drehwinkel um die Achsen  $i$ .

Im einzelnen beschreiben

- $\omega_{Aj}$  den Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Armes  $j$  und Gesamtarmes  $j$ <sup>2</sup> bezüglich des Koordinatensystems  $O_0$ :

$$\omega_{Aj} = \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \dot{\theta}_i \tag{3.8}$$

mit  $j = 1, \dots, 3$ ,

---

<sup>2</sup>Gesamtarm  $j$  = Arm  $j$  + Motor  $j$

- $\mathbf{v}_{Aj}$  den Vektor der translatorischen Geschwindigkeit des Armes  $j$ :

$$\mathbf{v}_{Aj} = \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times (\gamma_{ij} + \zeta_j) \dot{\theta}_i \quad (3.9)$$

mit

$$\gamma_{ij} = \mathbf{r}_{s_j} + \sum_{l=i}^{j-1} a_{l+1} \mathbf{x}_{l+1}, \quad (3.10)$$

so daß

$$\mathbf{v}_{Aj} = \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times (\gamma_{ij} + \zeta_j) \dot{\theta}_i = \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times \left( \left( \mathbf{r}_{s_j} + \sum_{l=i}^{j-1} a_{l+1} \mathbf{x}_l \right) + \zeta_j \right) \dot{\theta}_i, \quad (3.11)$$

- $\mathbf{v}_{Rj}$  den Vektor der translatorischen Geschwindigkeit des Motors  $j$ :

$$\mathbf{v}_{Rj} = \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times (\gamma_{ij} + \eta_j) \dot{\theta}_i \quad (3.12)$$

- $\mathbf{v}_j$  den Vektor der translatorischen Geschwindigkeit des Gesamtarmes  $j$ :

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times \gamma_{ij} \dot{\theta}_i. \quad (3.13)$$

Erläuterungen zu obigen Formeln:

- $\times$ : Vektorprodukt,
- $\gamma_{ij}$ : Vektor, der vom Gelenk  $i$  zum Massenmittelpunkt des Gesamtarmes  $j$  zeigt,
- $\mathbf{r}_{s_j} = (x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})^T$ : Vektor, der vom Gelenk  $j$  zum Massenmittelpunkt des Gesamtarmes  $j$  zeigt,
- $a_{l+1} \mathbf{x}_l$ : der Vektor, der vom Gelenk  $l$  zum Gelenk  $l + 1$  zeigt,
- $\zeta_j$ : Vektor, der vom Massenmittelpunkt des Gesamtarmes  $j$  zum Massenmittelpunkt des Armes  $j$  zeigt,
- $\eta_j$ : Vektor, der vom Massenmittelpunkt des Gesamtarmes  $j$  zum Massenmittelpunkt des Motors  $j$  (also zurück) zeigt,
- $\mathbf{z}_i$ : Einheitsvektor der Gelenkachse  $i = z$ -Achse des Koordinatensystems  $O_i$ .

# Kapitel 4

## Dynamik

Für die Aufstellung des hier verwendeten dynamischen Modells der Roboters MANUTEc r3 werden folgende Vereinfachungen getroffen:

- Nutzlast wird als punktförmig angenommen,
- Beschränkung auf drei Gelenke,
- Nichtberücksichtigung der Gelenkreibung (ist im Regelkreis selbst zu berücksichtigen; siehe [47]),
- Glieder werden als starr angenommen.

### 4.1 Die Bewegungsgleichung holonomer Systeme

Nach [72] und [73] läßt sich der Roboter MANUTEc r3 als Starrkörper mit holonomen (ganzgesetzlichen, d.h. nicht in differentieller Form gegebenen), skleronomen (starrgesetzlichen) Bindungen auffassen. Zur Beschreibung der Bewegung eignen sich daher die Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_k} = f_k \quad (4.1)$$

$$f_k = -\frac{\partial U}{\partial \theta_k} + \tau_k, \quad (4.2)$$

wobei

- $T$ : Kinetische Energie des Roboters,
- $U$ : Potentielle Energie des Roboters (Potential der Gewichtskräfte der Roboterglieder),
- $\tau_k$ : Momente der Getriebeabgangswelle des Motors  $k$ ,  $k = 1, \dots, 3$ ,
- $\theta_k$ : Drehwinkel um Achse  $k$ ,  $k = 1, \dots, 3$ ,
- $f_k$ : Koordinate der generalisierte Kräfte in Richtung der Gelenkachse  $k$  entlang des Einheitsrichtungsvektors  $\mathbf{z}_k$  des Gelenkes  $k$ .

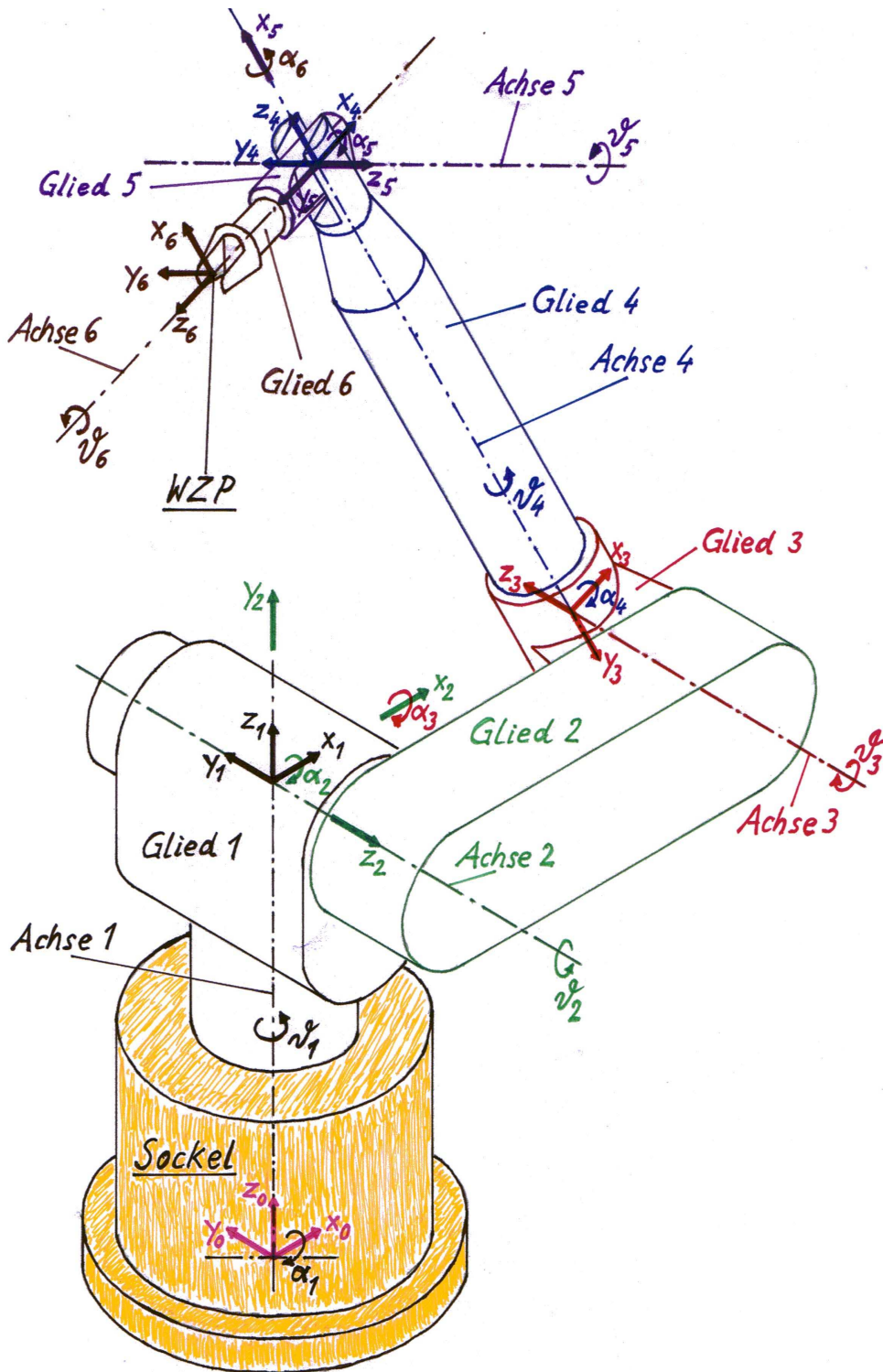


Abbildung 4.1: Zeichnung des Roboters MANUTEC r3

sind.

Die kinetische Energie  $T$  des Roboters wird mittels generalisierter Minimalkoordinaten beschrieben:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \\ &= \frac{1}{2} J_{11} \dot{\theta}_1^2 + J_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + J_{13} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} J_{22} \dot{\theta}_2^2 + J_{23} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} J_{33} \dot{\theta}_3^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

mit  $J_{ij} = J_{ji}$  für die Trägheitsmomente.

Die die Dynamik des Roboters beschreibende Differentialgleichung lautet:

$$f_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_k} \quad (4.4)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k} \right) \dot{\theta}_i - \frac{\partial T}{\partial \theta_k}. \quad (4.5)$$

Für einen Dreigelenkroboter gilt:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \theta_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta_3} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_3 - \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_3} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

nach Ausführung der partiellen Ableitungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_{11} \ddot{\theta}_1 + J_{12} \ddot{\theta}_2 + J_{13} \ddot{\theta}_3 \\ J_{12} \ddot{\theta}_1 + J_{22} \ddot{\theta}_2 + J_{23} \ddot{\theta}_3 \\ J_{13} \ddot{\theta}_1 + J_{23} \ddot{\theta}_2 + J_{33} \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1^2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2^2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_3^2 \\
& - \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1^2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2^2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_3^2 \right], \quad (4.8)
\end{aligned}$$

zusammengefaßt zu:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} J_{11} \ddot{\theta}_1 + J_{12} \ddot{\theta}_2 + J_{13} \ddot{\theta}_3 \\ J_{12} \ddot{\theta}_1 + J_{22} \ddot{\theta}_2 + J_{23} \ddot{\theta}_3 \\ J_{13} \ddot{\theta}_1 + J_{23} \ddot{\theta}_2 + J_{33} \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1^2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_3} + \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_3} + \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2^2 \\
& + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_3} + \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \dot{\theta}_3^2 \quad (4.9)
\end{aligned}$$

mit  $f_1, f_2$  und  $f_3$  als Koordinaten der generalisierten, eingepägten Kräfte in Richtung der Achsen der Gelenke 1, 2 und 3 entlang der Einheitsvektoren  $\mathbf{z}_1$ ,  $\mathbf{z}_2$  und  $\mathbf{z}_3$  ihrer Gelenkachsen.

## 4.2 Die kinetische Energie des physikalischen Ersatzsystems

Nach [72] und [73] ergibt sich die kinetische Energie  $T$  zu:

$$\begin{aligned}
2T & = \sum_{j=1}^3 (m_{A_j} \mathbf{v}_{A_j} \mathbf{v}_{A_j} + m_{R_j} \mathbf{v}_{R_j} \mathbf{v}_{R_j} + \omega_{A_j} \mathbf{I}_{A_j} \omega_{A_j} + \omega_{R_j} \mathbf{I}_{R_j} \omega_{R_j}) \\
& + m \mathbf{v}_N \mathbf{v}_N + \omega_{A3} \mathbf{I}_N \omega_{A3} \\
& = \sum_{j=1}^3 [m_{A_j} \left( \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times [\gamma_{ij} + \zeta_j] \dot{\theta}_i \right) \left( \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times [\gamma_{ij} + \zeta_j] \dot{\theta}_i \right) \\
& + m_{R_j} \left( \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times [\gamma_{ij} + \eta_j] \dot{\theta}_i \right) \left( \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \times [\gamma_{ij} + \eta_j] \dot{\theta}_i \right) \\
& + \left( \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \dot{\theta}_i \right) \mathbf{I}_{A_j} \left( \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \dot{\theta}_i \right) \\
& + \left( (\rho_j - 1) \dot{\theta}_j \mathbf{z}_j + \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \dot{\theta}_i \right) \mathbf{I}_{R_j} \left( (\rho_j - 1) \dot{\theta}_j \mathbf{z}_j + \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \dot{\theta}_i \right) \\
& + m \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{z}_i \times [\gamma_{i3} + \zeta_N] \dot{\theta}_i \right) \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{z}_i \times [\gamma_{i3} + \zeta_N] \dot{\theta}_i \right), \quad (4.10)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{v}_{Aj}$ : Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes des Armes  $j$ ,
- $\mathbf{v}_{Rj}$ : Geschwindigkeitvektor des Schwerpunktes des Motors  $j$ ,
- $\mathbf{v}_N$ : Geschwindigkeitvektor des Schwerpunktes der Nutzlast,
- $\mathbf{I}_{Aj}$ : Trägheitstensor des Armes  $j$ ,
- $\mathbf{I}_{Rj}$ : Trägheitstensor des Motors  $j$ ,
- $\mathbf{I}_N$ : Trägheitstensor der Nutzlast; da die Nutzlast hier als punktförmig betrachtet wird, ist der Trägheitstensor  $\mathbf{I}_N$  der Nutzlast eine Nullmatrix und tritt daher im letzten Term der Gleichung (4.10) nicht mehr auf,
- $m_{Aj}$ : Masse des Armes  $j$ ,
- $m_{Rj}$ : Masse des Motors  $j$ ,
- $m$ : Masse der Nutzlast,
- $\mathbf{z}_i$ : Einheitsrichtungsvektor des Gelenkes  $i$ ,
- $\gamma_{ij}$ : Ortsvektor vom Gelenkpunkt  $i$  zum Massenmittelpunkt des Gesamtarmes  $j$ ,
- $\zeta_j$ : Ortsvektor vom Massenmittelpunkt des Gesamtarmes  $j$  zum Massenmittelpunkt des Armes  $j$ ,
- $\zeta_N$ : Ortsvektor vom Massenmittelpunkt des Gesamtarmes  $j$  zum Massenmittelpunkt der Nutzlast,
- $\eta_j$ : Ortsvektor vom Massenmittelpunkt des Gesamtarmes  $j$  zum Massenmittelpunkt des Motors  $j$ ,
- $\rho_j$ : Übersetzungsverhältnis des zum Motor  $j$  gehörenden Getriebes,
- $\omega_{Aj}$ : Winkelgeschwindigkeit des Schwerpunktes des Armes und des Gesamtarmes  $j$  bezüglich des Koordinatensystems  $O_0$ :

$$\omega_{Aj} = \sum_{i=1}^j \mathbf{z}_i \dot{\theta}_i, \quad (4.11)$$

- $\omega_{Rj}$ : Winkelgeschwindigkeit der Abtriebswelle des Motors  $j$  bezüglich des Koordinatensystems  $O_0$ :

$$\omega_{Rj} = \omega_{Aj-1} + \mathbf{z}_j \dot{\theta}_{Rj}, \quad (4.12)$$

- $\dot{\theta}_{Rj} = \rho_j \dot{\theta}_j$ : Winkelgeschwindigkeit der Abtriebswelle des Motors  $j$ .

### 4.3 Die generalisierten Kräfte des Ersatzsystems

Nach [72] und [73] ergeben sich ohne Berücksichtigung der Reibung in Vektordarstellung die generalisierten Kräfte zu:

$$\begin{aligned} f_k \mathbf{z}_k &= \mathbf{z}_k \tau_k + \mathbf{z}_k \times [\gamma_{k3} + \zeta_N] m \mathbf{g} + \sum_{j=k}^3 (\mathbf{z}_k \times [\gamma_{kj} + \zeta_j] m_{Aj} \mathbf{g}) \\ &+ \sum_{j=k}^3 (\mathbf{z}_k \times [\gamma_{kj} + \eta_j] m_{Rj} \mathbf{g}) \\ &= \left[ -\frac{\partial U}{\partial \theta_k} + \tau_k \right] \mathbf{z}_k \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit  $\mathbf{g} = -g \mathbf{z}_0$ , wobei  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ .

## 4.4 Die benötigten Momente der Getriebeabgangswelle für die Trajektorie $\theta(t)$

Die Komponenten des Drehmomentes der Getriebeabgangswelle des Motors  $k$  ergeben sich gemäß [72] und [73] nach Einsetzen von Gl. (4.10) und Gl. (4.13) in Gl. (4.1) für die gewünschte Trajektorie  $\theta(t)$  zu:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= J_{11} \ddot{\theta}_1 + J_{12} \ddot{\theta}_2 + J_{13} \ddot{\theta}_3 - 2\Gamma_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2\Gamma_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ &\quad - \Gamma_3 (\dot{\theta}_2)^2 - \Gamma_4 [2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (\dot{\theta}_3)^2] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= J_{12} \ddot{\theta}_1 + J_{22} \ddot{\theta}_2 + J_{23} \ddot{\theta}_3 + \Gamma_1 (\dot{\theta}_1)^2 \\ &\quad - \Gamma_5 [2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (\dot{\theta}_3)^2] - \chi_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 &= J_{13} \ddot{\theta}_1 + J_{23} \ddot{\theta}_2 + J_{33} \ddot{\theta}_3 \\ &\quad + \Gamma_2 (\dot{\theta}_1)^2 + \Gamma_5 (\dot{\theta}_2)^2 - \chi_3 \end{aligned} \quad (4.16)$$

mit

$$\begin{aligned} J_{11} &= I_{A1} + (\rho_1)^2 I_{R1} + (s_{3x})^2 m_{G3} + (s_{2x})^2 m_{G2} + I_{A233} \cos^2 \theta_2 + I_{A222} \sin^2 \theta_2 \\ &\quad + I_{A333} \cos^2(\theta_2 + \theta_3) + I_{A322} \sin^2(\theta_2 + \theta_3) + (s_{2z})^2 m_{G2} \sin^2 \theta_2 \\ &\quad + m_{G3} [a_3 \sin \theta_2 + s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3)]^2 \\ &\quad + m [a_3 \sin \theta_2 + a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3)]^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= [I_{A213} - s_{3x} a_3 m_{G3} - s_{2x} s_{2z} m_{G2}] \cos \theta_2 \\ &\quad + [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$J_{13} = [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \cos(\theta_2 + \theta_3) \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} J_{22} &= I_{A311} + I_{A211} + (\rho_2)^2 I_{R2} + (s_{2z})^2 m_{G2} + [(s_{3z})^2 + (a_3)^2] m_{G3} \\ &\quad + [(a_4)^2 + (a_3)^2] m + 2 [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} J_{23} &= I_{A311} + \rho_3 I_{R3} + (s_{3z})^2 m_{G3} + (a_4)^2 m \\ &\quad + [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$J_{33} = I_{A311} + (\rho_3)^2 I_{R3} + (s_{3z})^2 m_{G3} + (a_4)^2 m \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (I_{A233} - I_{A222} - (s_{2z})^2 m_{G2} - (a_3)^2 m_{G3} - (a_3)^2 m) \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ &\quad - [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2) \\ &\quad - [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad + [I_{A333} - I_{A322} - (s_{3z})^2 m_{G3} - (a_4)^2 m] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= -[s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_2 \\ &\quad + (I_{A333} - I_{A322} - (s_{3z})^2 m_{G3} - (a_4)^2 m) \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= [I_{A213} - s_{3x} a_3 m_{G3} - s_{2x} s_{2z} m_{G2}] \sin \theta_2 \\ &\quad + [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\Gamma_4 = [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \sin(\theta_2 + \theta_3) \quad (4.26)$$

$$\Gamma_5 = [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \sin \theta_3 \quad (4.27)$$

$$\chi_2 = s_{2z} \sin \theta_2 m_{G2} g + [s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin \theta_2] m_{G3} g$$



$$+ [a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin \theta_2] m g \quad (4.28)$$

$$\chi_3 = s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3) m_{G3} g + a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) m g. \quad (4.29)$$

Erläuterung der Abkürzungen:

$I_{A1}$  Trägheitsmoment des Armes 1 entlang der Gelenkachse 1 (entspricht  $I_{A133}$ ),

$I_{A2_{ij}}$  Trägheitstensor des Armes 2,

$I_{A3_{ij}}$  Trägheitstensor des Armes mit Hand,

$I_{Rk}$  Trägheitsmoment des Motors  $k$  entlang der Gelenkachse  $k$ ,

$m_{G2}$  Masse des Gesamtarmes 2,

$m_{G3}$  Masse des Gesamtarmes 3 inklusive der Hand,

$m$  Nutzlastmasse,

$(s_{2x}, s_{2y}, s_{2z})^T$  Koordinaten des Massenmittelpunktes des Gesamtarmes 2 im Koordinatensystem  $O_2$ ,

$(s_{3x}, s_{3y}, s_{3z})^T$  Koordinaten des Massenmittelpunktes des Gesamtarmes 3 im Koordinatensystem  $O_3$ ,

$a_3$  Länge des Ortsvektors vom Gelenk 2 zum Gelenk 3,

$a_4$  Länge des Ortsvektors vom Gelenk 3 zum Werkzeugzentrierpunkt (WZP) der Hand,

$\rho_k$  Untersetzungsverhältnis des Getriebes des Motors  $k$ ,

$g$  Gravitationskonstante.

Die zugehörigen Zahlenwerte des Roboters Manutec r3 finden sich in der nachstehenden Tabelle.

$I_{A1}$	1.16 kg m <sup>2</sup>	$I_{R1}$	0.0013 kg m <sup>2</sup>
$I_{A2_{11}}$	2.58 kg m <sup>2</sup>	$I_{R2}$	0.0013 kg m <sup>2</sup>
$I_{A2_{12}}$	0.0 kg m <sup>2</sup>	$I_{R3}$	0.0013 kg m <sup>2</sup>
$I_{A2_{13}}$	-0.46 kg m <sup>2</sup>	$m_{G2}$	56.5 kg
$I_{A2_{22}}$	2.73 kg m <sup>2</sup>	$m_{G3}$	60.3 kg
$I_{A2_{23}}$	0.0 kg m <sup>2</sup>	$s_{2x}$	0.172 m
$I_{A2_{33}}$	0.064 kg m <sup>2</sup>	$s_{2y}$	0.0 m
$I_{A3_{11}}$	5.41 kg m <sup>2</sup>	$s_{2z}$	0.205 m
$I_{A3_{12}}$	0.0 kg m <sup>2</sup>	$s_{3x}$	0.028 m
$I_{A3_{13}}$	0.33 kg m <sup>2</sup>	$s_{3y}$	0.0 m
$I_{A3_{22}}$	5.6 kg m <sup>2</sup>	$s_{3z}$	0.202 m
$I_{A3_{23}}$	0.0 kg m <sup>2</sup>	$a_3$	0.5 m
$I_{A3_{33}}$	0.39 kg m <sup>2</sup>	$a_4$	0.98 m
$\rho_1$	-105.0	$\rho_2$	210.0
$\rho_3$	60.0		

Tabelle 4.1: Dynamische Parameter des MANUTEc r3

In Unterabschnitt 6.1.2 wird zwecks Herleitung der sog. deterministischen Ersatzrestriktionen für  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  und  $\tau_3$  folgende von den Gleichungen (4.14), (4.15) und (4.16) abweichende Darstellung verwendet:

#### 4.4. DIE BENÖTIGTEN MOMENTE DER GETRIEBEABGANGSWELLE FÜR DIE TRAJEKTORIE $\theta(T)$ 65

$$\tau_1 = \tau_{01} + m \tau_{11} \quad (4.30)$$

$$\tau_2 = \tau_{02} + m \tau_{12} \quad (4.31)$$

$$\tau_3 = \tau_{03} + m \tau_{13}, \quad (4.32)$$

wobei sich

- $\tau_{01}$ ,  $\tau_{02}$  und  $\tau_{03}$  aus

$$\begin{aligned} \tau_{01} &= J_{011} \ddot{\theta}_1 + J_{012} \ddot{\theta}_2 + J_{013} \ddot{\theta}_3 - 2\Gamma_{01} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2\Gamma_{02} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ &\quad - \Gamma_{03} (\dot{\theta}_2)^2 - \Gamma_{04} [2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (\dot{\theta}_3)^2] \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \tau_{02} &= J_{012} \ddot{\theta}_1 + J_{022} \ddot{\theta}_2 + J_{023} \ddot{\theta}_3 + \Gamma_{01} (\dot{\theta}_1)^2 \\ &\quad - \Gamma_{05} [2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (\dot{\theta}_3)^2] - \chi_{02} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \tau_{03} &= J_{013} \ddot{\theta}_1 + J_{023} \ddot{\theta}_2 + J_{033} \ddot{\theta}_3 \\ &\quad + \Gamma_{02} (\dot{\theta}_1)^2 + \Gamma_{05} (\dot{\theta}_2)^2 - \chi_{03} \end{aligned} \quad (4.35)$$

mit

$$\begin{aligned} J_{011} &= I_{A1} + (\rho_1)^2 I_{R1} + (s_{3x})^2 m_{G3} + (s_{2x})^2 m_{G2} + I_{A233} \cos^2 \theta_2 + I_{A222} \sin^2 \theta_2 \\ &\quad + I_{A333} \cos^2(\theta_2 + \theta_3) + I_{A322} \sin^2(\theta_2 + \theta_3) + (s_{2z})^2 m_{G2} \sin^2 \theta_2 \\ &\quad + m_{G3} [a_3 \sin \theta_2 + s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3)]^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} J_{012} &= [I_{A213} - s_{3x} a_3 m_{G3} - s_{2x} s_{2z} m_{G2}] \cos \theta_2 \\ &\quad + [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$J_{013} = (I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}) \cos(\theta_2 + \theta_3) \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} J_{022} &= I_{A311} + I_{A211} + (\rho_2)^2 I_{R2} + (s_{2z})^2 m_{G2} + [(s_{3z})^2 + (a_3)^2] m_{G3} \\ &\quad + 2 [s_{3z} a_3 m_{G3}] \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} J_{023} &= I_{A311} + \rho_3 I_{R3} + (s_{3z})^2 m_{G3} \\ &\quad + [s_{3z} a_3 m_{G3}] \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$J_{033} = I_{A311} + (\rho_3)^2 I_{R3} + (s_{3z})^2 m_{G3} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01} &= (I_{A233} - I_{A222} - (s_{2z})^2 m_{G2} - (a_3)^2 m_{G3}) \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ &\quad - [s_{3z} a_3 m_{G3}] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2) \\ &\quad - [s_{3z} a_3 m_{G3}] \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad + [I_{A333} - I_{A322} - (s_{3z})^2 m_{G3} - (a_3)^2 m] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{02} &= -[s_{3z} a_3 m_{G3}] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_2 \\ &\quad + (I_{A333} - I_{A322} - (s_{3z})^2 m_{G3}) \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3), \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{03} &= [I_{A213} - s_{3x} a_3 m_{G3} - s_{2x} s_{2z} m_{G2}] \sin \theta_2 \\ &\quad + [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\Gamma_{04} = [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \sin(\theta_2 + \theta_3) \quad (4.45)$$

$$\Gamma_{05} = [s_{3z} a_3 m_{G3}] \sin \theta_3 \quad (4.46)$$

$$\chi_{02} = s_{2z} \sin \theta_2 m_{G2} g + [s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin \theta_2] m_{G3} g \quad (4.47)$$

$$\chi_{03} = s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3) m_{G3} g \quad (4.48)$$

- und  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{12}$  und  $\tau_{13}$  aus

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= J_{111} \ddot{\theta}_1 + J_{112} \ddot{\theta}_2 + J_{113} \ddot{\theta}_3 - 2\Gamma_{11} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2\Gamma_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ &\quad - \Gamma_{13} (\dot{\theta}_2)^2 - \Gamma_4 [2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (\dot{\theta}_3)^2] \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= J_{112} \ddot{\theta}_1 + J_{122} \ddot{\theta}_2 + J_{123} \ddot{\theta}_3 + \Gamma_{11} (\dot{\theta}_1)^2 \\ &\quad - \Gamma_{15} [2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (\dot{\theta}_3)^2] - \chi_{12} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= J_{113} \ddot{\theta}_1 + J_{123} \ddot{\theta}_2 + J_{133} \ddot{\theta}_3 \\ &\quad + \Gamma_{12} (\dot{\theta}_1)^2 + \Gamma_{15} (\dot{\theta}_2)^2 - \chi_{13} \end{aligned} \quad (4.51)$$

mit

$$J_{111} = [a_3 \sin \theta_2 + a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3)]^2 \quad (4.52)$$

$$J_{112} = 0 \quad (4.53)$$

$$J_{113} = 0 \quad (4.54)$$

$$J_{122} = (a_4)^2 + (a_3)^2 + 2a_4 a_3 \cos \theta_3 \quad (4.55)$$

$$J_{123} = (a_4)^2 + a_4 a_3 \cos \theta_3 \quad (4.56)$$

$$J_{133} = (a_4)^2 \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= -(a_3)^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ &\quad - a_4 a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2) \\ &\quad - a_4 a_3 \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad - (a_4)^2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= -a_4 a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_2 \\ &\quad - (a_4)^2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\Gamma_{13} = 0 \quad (4.60)$$

$$\Gamma_{14} = 0 \quad (4.61)$$

$$\Gamma_{15} = a_4 a_3 \sin \theta_3 \quad (4.62)$$

$$\chi_{12} = [a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin \theta_2] g \quad (4.63)$$

$$\chi_{13} = a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) g. \quad (4.64)$$

ergeben.

#### 4.4. DIE BENÖTIGTEN MOMENTE DER GETRIEBEABGANGSWELLE FÜR DIE TRAJEKTORIE $\theta(T)$ 67

Im Unterabschnitt 5.1.2 wird zur Formulierung des Reglergesetzes folgende Darstellung der Drehmomente anstelle der Gleichungen (4.14) bis (4.16) eingesetzt:

$$\tau = \mathbf{F}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \mathbf{M}(\theta) \cdot \ddot{\theta} + \mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) \quad (4.65)$$

wobei sich  $\mathbf{M}(\theta)$  und  $\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta})$  durch Umformung der Gleichungen (4.14) bis (4.16) ergeben:

$$\mathbf{M}(\theta) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

und

$$\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} -2\Gamma_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2\Gamma_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \Gamma_3 (\dot{\theta}_2)^2 - \Gamma_4 [2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (\dot{\theta}_3)^2] \\ \Gamma_1 (\dot{\theta}_1)^2 - \Gamma_5 [2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (\dot{\theta}_3)^2] - \chi_2 \\ \Gamma_2 (\dot{\theta}_1)^2 + \Gamma_5 (\dot{\theta}_2)^2 - \chi_3 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

# Kapitel 5

## Regelung

### 5.1 Unterscheidung zwischen Steuerung und Regelung

Nach [27]: Ein dynamisches System kann prinzipiell auch ohne Rückkoppelung gesteuert werden. In einer solchen, als Steuerung in der offenen Wirkungskette bezeichneten Steuerkette wird die Stellgröße direkt aus der Führungsgröße ermittelt. Das zugehörige dynamische System heißt Steuerstrecke. Eine Steuerkette erreicht genau dann das gewünschte Ziel  $\mathbf{y}(t)$ , wenn die Steuerstrecke folgende Bedingungen erfüllt:

- Die dynamischen Eigenschaften der Steuerstrecke sind genau bekannt.
- Es treten keinerlei Störgrößen auf.

Beide Bedingungen liegen in der Realität jedoch niemals vor. Daher besitzen dynamische Systeme neben der Steuerung eine Regelung (Siehe Abbildung 5.1).

Die in dieser Arbeit vorgestellte Führungsgrößenentwurfsmethode der *Einstufigen Approximativen Optimalen Stochastischen Planung von Robotertrajektorien in Echtzeit* berücksichtigt die ungenaue Kenntnis des für die dynamischen Eigenschaften der Steuerstrecke (=Roboter) wichtigen Parameters Nutzlastmasse in Form einer stochastischen Verteilung.

Die Approximative Stochastische Trajektorienplanung erhöht allgemein die Robustheit der Steuerung gegenüber solchen dynamischen Parametern der Steuerstrecke, von denen z. Zt. des Entwurfes der Steuerung keine exakten Werte, sondern nur stochastische Verteilungen bekannt sind. Somit werden Abweichungen von der Solltrajektorie nach Maßgabe der Varianzen der stochastisch variablen Parameter erheblich verkleinert, nicht aber eliminiert.

Die Steuereinrichtung erhält keinerlei Informationen über auftretende Störgrößen (z.B. Reibung <sup>1</sup>). Daher findet eine Störkompensation nicht statt.

Aus den beiden vorgenannten Gründen kann auch bei einem Roboter mit der hier verwendeten Entwurfsmethode für neue Steuerungen nicht auf einen leistungsfähigen Regler verzichtet werden.

Hier gilt

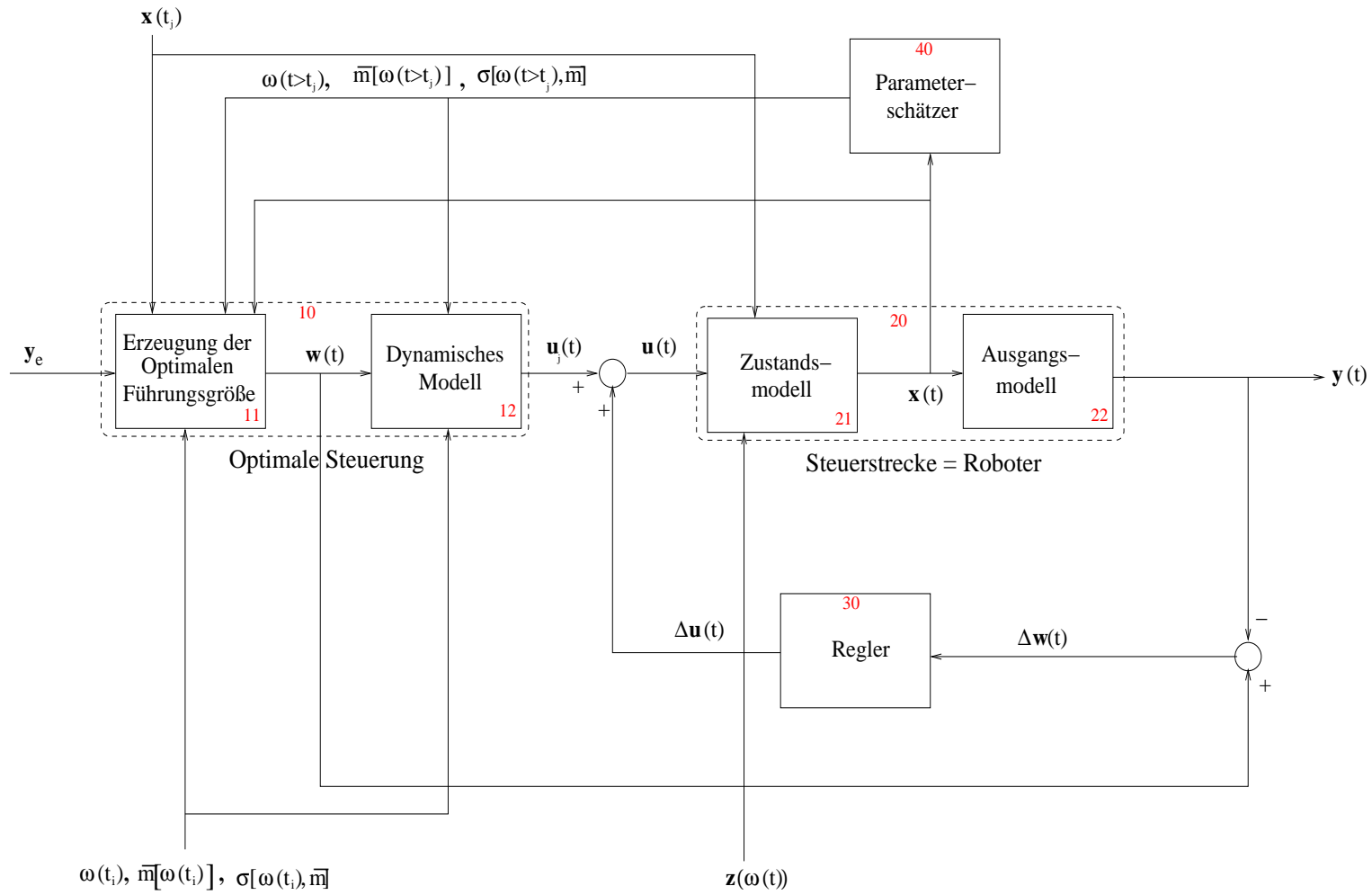
- für den gewünschten Endzustand  $\mathbf{y}_e = \mathbf{y}(t_e)$ :

$$\mathbf{y}(t_e) := \left( \theta_j(t_e), \dot{\theta}_j(t_e) \right)^T \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>Nach [47] ist eine Berechnung der Reibung vor Inbetriebnahme nicht möglich, da diese von der Temperatur des Getriebeöles abhängt. Für die Getriebeöltemperaturänderungen in Abhängigkeit von den Bewegungen des Roboters existieren gegenwärtig keine brauchbaren Vorhersagemodelle.

Abbildung 5.1: Steuerkette des Roboters MANUTEC-3



oder

$$\mathbf{y}(t_e) := \left( \bar{\theta}_j(t_e), \dot{\bar{\theta}}_j(t_e) \right)^T \quad (5.2)$$

mit  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,

- für die Führungsgröße  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w} := \left( \theta_j(t), \dot{\theta}_j(t), \ddot{\theta}_j(t) \right)^T \quad (5.3)$$

oder

$$\mathbf{w} := \left( \bar{\theta}_j(t), \dot{\bar{\theta}}_j(t), \ddot{\bar{\theta}}_j(t) \right)^T \quad (5.4)$$

mit  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,

- für die Vorsteuerung  $\mathbf{u}_j(t) = (u_{j_1}, u_{j_2}, u_{j_3})^T$ : Bei der Vorsteuerung  $\mathbf{u}_j$  handelt es sich um die an den Antriebsmotoren anliegenden Spannungen  $U$  [V]. Wie in Unterkapitel 5.1.1 dargestellt, ergibt sich unter den in [52] genannten Voraussetzungen eine Proportionalität zwischen der Steuerspannung  $\mathbf{u}$  und den Antriebsmomenten  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  und  $\tau_3$ . Daher erhält man die Steuerspannungen  $u_{j_1}$ ,  $u_{j_2}$  und  $u_{j_3}$  aus den Drehmomenten  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  und  $\tau_3$  der Getriebeabgangswelle<sup>2</sup>, indem diese durch das Produkt aus Getriebeübersetzung  $\rho_j$ <sup>3</sup> und Drehmomentenkonstante  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dividiert werden:

$$\begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tau_1}{\rho_1 \cdot V_1} \\ \frac{\tau_2}{\rho_2 \cdot V_2} \\ \frac{\tau_3}{\rho_3 \cdot V_3} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Die Drehmomentenkonstanten  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  haben die Einheit  $[\frac{Nm}{V}]$  und dienen der Umrechnung der Drehmomente in Spannungen.

- für die Steuerung  $\mathbf{u}$ ; diese ist die Summe aus der Vorsteuerung  $\mathbf{u}_j$  und der Korrekturspannung  $\Delta \mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}. \quad (5.7)$$

- für den Zustand  $\mathbf{x}(t)$ :

$$\mathbf{x} := \left( \theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t) \right)^T, \quad (5.8)$$

- für die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t)$ :

$$\mathbf{y}(t) = \left( \theta(t), \dot{\theta}(t) \right)^T, \quad (5.9)$$

- für die Abweichung  $\Delta \mathbf{w}$ :

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{w}. \quad (5.10)$$

- für die Korrekturspannungen  $\Delta \mathbf{u} = \left( \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3 \right)^T$ ; diese ergeben sich in dieser Arbeit aus Gleichung (5.24).

<sup>2</sup>Siehe Gleichungen 4.14, 4.15 und 4.16

<sup>3</sup>Dividiert man die Drehmomente  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  bzw.  $\tau_3$  der Getriebeabgangswelle durch die Übersetzungen  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  bzw.  $\rho_3$  der Getriebe, erhält man die Motordrehmomente  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  bzw.  $\xi_3$ :

$$\xi_i = \frac{\tau_i}{\rho_i} \quad (5.5)$$

### 5.1.1 Proportionalität zwischen Steuerspannung und Antriebsmoment

Für Permanentmagnet-Gleichstrommotoren und bürstenlose Gleichstrommotoren ergibt sich gemäß [52] und Abbildung 5.2

- das elektrische Gleichgewicht zu:

$$u_a = (R_a + s \cdot L_a)i_a + u_g, \quad (5.11)$$

$$u_g = k_v \rho \dot{\theta}, \quad (5.12)$$

daraus folgt:

$$u_a = (R_a + s \cdot L_a)i_a + k_v \rho \dot{\theta}; \quad (5.13)$$

- das mechanische Gleichgewicht zu:

$$\frac{\tau}{\rho} = (sI_R + F_R)\rho\dot{\theta} + C_r, \quad (5.14)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = k_t i_a, \quad (5.15)$$

daraus folgt:

$$i_a = \frac{sI_R + F_R}{k_t} \rho \dot{\theta} + \frac{C_r}{k_t}. \quad (5.16)$$

Für den Verstärker gilt:

$$u_a = \frac{K}{1 + sT_v}(u_j - k_i i_a) \quad (5.17)$$

Erläuterungen der Abkürzungen:

- $u_a$ : Ankerspannung,
- $i_a$ : Ankerstromstärke,
- $R_a$ : Ankerwiderstand,
- $s$ : komplexer Parameter der Laplace-Transformation,
- $L_a$ : Ankerinduktivität,
- $u_g$ : Gegenspannung, proportional zur Drehzahl  $\rho \cdot \dot{\theta}$
- $\rho$ : Getriebeübersetzung,
- $\dot{\theta}$ : Winkelgeschwindigkeit an der Getriebeabgangswelle,
- $\rho \dot{\theta}$ : Winkelgeschwindigkeit der Motorwelle,
- $k_v$ : Spannungskonstante,



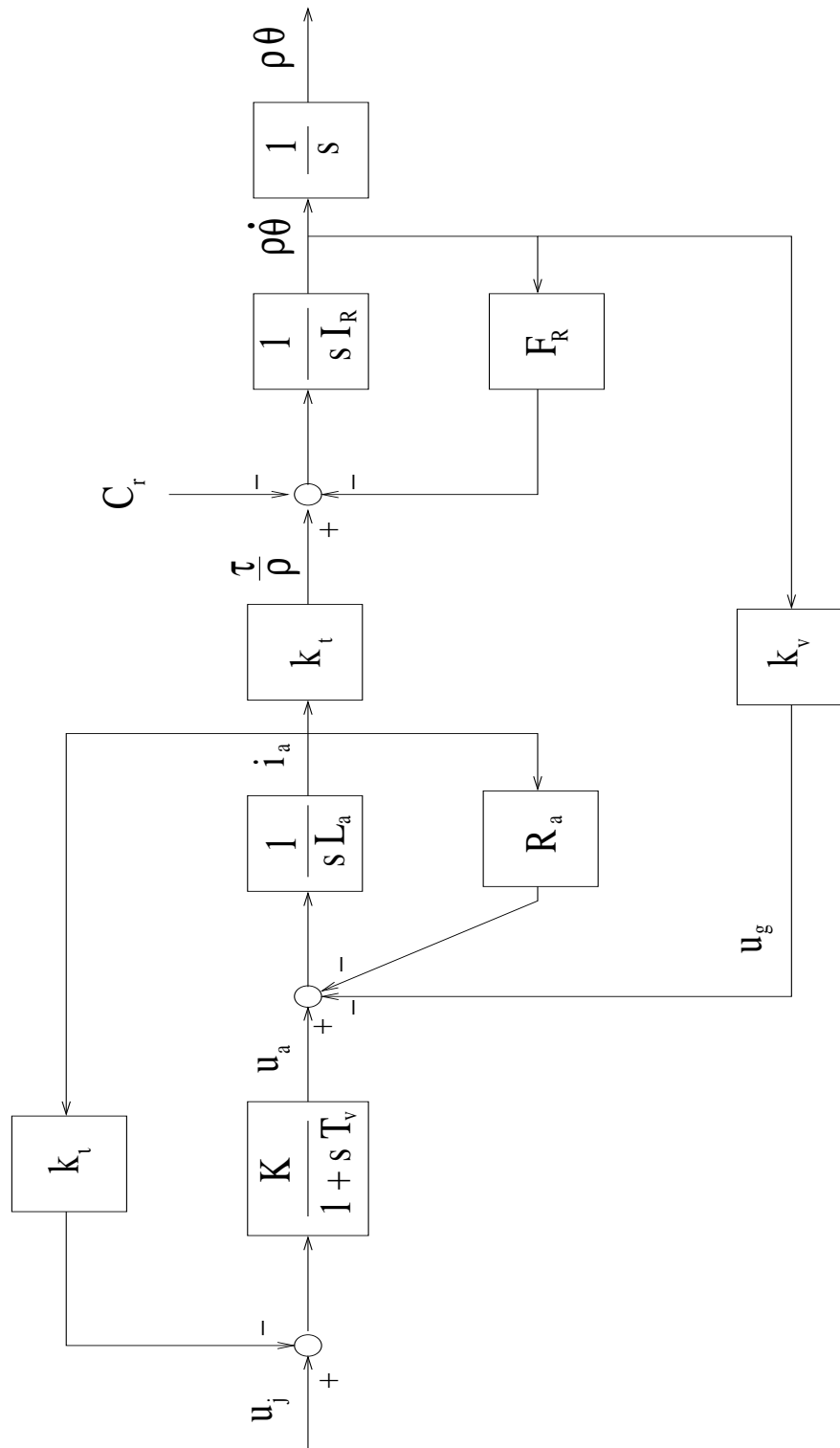


Abbildung 5.2: Blockschema eines Servomotors nach [52]

- $\tau$ : Drehmoment der Getriebeabgangswelle,
- $\frac{\tau}{\rho}$ : Drehmoment der Motorwelle,
- $I_R$ : Trägheitsmoment des Motors,
- $F_R$ : viskoser Reibungskoeffizient,
- $C_r$ : Koppelmoment,
- $k_t$ : Drehmomentenkonstante,
- $u_j$ : Steuerspannung,
- $K$ : Spannungsverstärkung,
- $T_v$ : Zeitkonstante,
- $k_l$ : Umformerkonstante.

Durch Einsetzen von (5.16) in (5.17) sowie von (5.16) und (5.17) in (5.13) ergibt sich

$$\frac{K}{1 + sT_v} \left( u_j - \frac{sI_R + F_R}{k_t} k_l \rho \dot{\theta} - \frac{k_l C_r}{k_t} \right) = (R_a + sL_a) \left( \frac{sI_R + F_R}{k_t} \rho \dot{\theta} + \frac{C_r}{k_t} \right) + k_v \rho \dot{\theta}. \quad (5.18)$$

Nach Termumformung:

$$\rho \dot{\theta} = \frac{K \cdot \left( u_j - \frac{C_r k_l}{k_t} \right) - \frac{C_r}{k_t} (R_a + sL_a) (1 + sT_v)}{k_v \left( \frac{k_l K}{k_t k_v} (sI_R + F_R) + \frac{(R_a + sL_a)(sI_R + F_r)(1 + sT_v)}{k_t k_v} + 1 + T_v \right)} \quad (5.19)$$

Unter Vernachlässigung

- von  $T_v$ , d.h.  $T_v := 0$ , und
- $C_r$ , d.h.  $C_r := 0$

sowie den Annahmen

- $k_l \neq 0$
- $Kk_l \gg R_a$

ergibt sich

$$\rho \dot{\theta} \left( \frac{k_l}{k_t} (sI_R + F_R) + \frac{k_v}{K} \right) = u_j, \quad (5.20)$$

nach Umformung

$$(sI_R + F_R) \rho \dot{\theta} = \frac{k_t}{k_l} \cdot \left( u_j - \frac{k_v}{K} \rho \dot{\theta} \right) \quad (5.21)$$

Die Verstärkung  $K$  ist gegenüber  $k_v$  normalerweise sehr groß, so daß  $\frac{k_v}{K}\rho\dot{\theta}$  in (5.21) vernachlässigt werden kann.

Meist ist das mechanische Koppelmoment  $C_r$  ebenfalls vernachlässigbar. Daher vereinfacht sich (5.14) zu

$$(sI_R + F_R)\rho\dot{\theta} = \frac{\tau}{\rho}. \quad (5.22)$$

Damit ergibt sich aus (5.21) zwischen dem Drehmoment  $\tau$  und der Steuerspannung  $u_j$  die folgende proportionale Beziehung:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{k_t}{k_l}u_j. \quad (5.23)$$

Setzt man  $V_j := \frac{k_t}{k_l}$ , so entsteht die Proportionalität der Gleichung (5.6).

### 5.1.2 Der in dieser Arbeit verwendete Regler

In dieser Arbeit wird jedoch nicht der Originalregler des Roboters MANUTEC r3 (Siehe Unterabschnitt 13.2.5) verwendet, sondern ein Proportional-Differential-Regler gemäß [31] und [1] eingesetzt. Der Vektor der Korrekturspannung  $\Delta u$  ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1(t) \\ \Delta u_2(t) \\ \Delta u_3(t) \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla_{\theta} \mathbf{F} - \mathbf{M} \mathbf{K}_p & \nabla_{\dot{\theta}} \mathbf{h} - \mathbf{M} \mathbf{K}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

mit

$$\mathbf{K}_p = \begin{pmatrix} 34.08 & 0 & 0 \\ 0 & 34.08 & 0 \\ 0 & 0 & 34.08 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{pmatrix} 0.89 & 0 & 0 \\ 0 & 1.12 & 0 \\ 0 & 0 & 1.34 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

und

$$\begin{pmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \theta_1(t) - \check{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) - \check{\theta}_2(t) \\ \theta_3(t) - \check{\theta}_3(t) \\ \dot{\theta}_1(t) - \check{\dot{\theta}}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) - \check{\dot{\theta}}_2(t) \\ \dot{\theta}_3(t) - \check{\dot{\theta}}_3(t) \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

$\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{h}$  sind in den Gleichungen (4.65) bis (4.67) angegeben.

Die Zustandsraumdarstellung findet sich in Unterkapitel 13.3.

## Kapitel 6

# Optimale Trajektorienplanung

In den Szenarien 3, 4, 5, 6 und 7 wird die unbekannte Nutzlastmasse  $m$  durch eine gegebene **bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung**  $P(m|\mathcal{A}_j)$  modelliert. Dabei bezeichnet  $\mathcal{A}_j$  die bis zur Stufe  $j = 0, 1, \dots$  verfügbaren Informationen über den Steuerungsprozeß. Eine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung wird rechnerisch wie jede andere stochastische Verteilung behandelt. Im vorliegenden Falle wird eine Normalverteilung verwendet, da die Verteilung der Massen bei Fluggepäck in guter Näherung einer bei Null linksseitig abgeschnittenen Gaußverteilung entspricht.

Jede der bekannten, also deterministischen Nutzlastmassen der Szenarien 1 und 2 läßt sich durch eine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Standardabweichung  $\sigma = 0$  beschreiben.

Die für die Berechnung der optimalen Referenztrajektorien der Szenarien 1 bis 7 zu lösenden Optimierungsprobleme sind Konkretisierungen des in [31] von K.Marti entwickelten AOSTP (**A**daptives <sup>1</sup> **O**ptimales **S**tochastisches **T**rajektorien-**P**lanungsproblem). Daher werden nun die folgenden Punkte behandelt:

- Erläuterungen des **A**daptiven **O**ptimalen **S**tochastischen **T**rajektorien-**P**lanungsproblems,
- Transformation des Problems der freien Endzeit auf ein Problem mit fester Weglänge und
- Zurückführung des unendlich dimensionalen Optimierungsproblems auf ein endlich dimensionales Parameteroptimierungsproblem mit Angabe der Zuweisungen, aufgrund derer
  - die deterministischen Referenztrajektorien  $\theta_0$  (Szenario 1),
  - die für die Echtzeitapproximation der deterministischen Referenztrajektorien  $\theta_0$  benötigten Referenztrajektorien  $\theta_0^q$  (Szenario 2),
  - die robust-optimalen Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_0$  (Szenario 3),
  - die für die Echtzeitapproximation der robust-optimalen Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_0$  erforderlichen Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_0^q$  (Szenario 4),
  - die Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{0R}$  und die zur Echtzeitapproximation der besser angepaßten Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_1^q$  benötigten Referenztrajektorien (Szenario 5),
  - die zur Echtzeitapproximation der Notfalltrajektorien  $\bar{\theta}_{1N}$  benötigten Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{1N}^q$  (Szenario 6),
  - die zur Echtzeitapproximation der Notfalltrajektorien  $\bar{\theta}_{0N}$  benötigten Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{0N}^q$  (Szenario 7)

Lösungen des AOSTP sind.

---

<sup>1</sup>  $\hat{=}$  sich anpassendes

## 6.1 AOSTP

Das AOSTP wird im Folgenden eingesetzt, um besser angepaßte Referenztrajektorien von der Betriebsposition des Roboters an den Zeitpunkten  $t_0, t_1, \dots, t_j$  zu einem Endpunkt bereitzustellen, indem die bis einschließlich zum Zeitpunkt  $t_j$ ,  $j \geq 0$ , vorliegenden Informationen  $\mathcal{A}_j$ <sup>2</sup> in die Planung der neuen Referenztrajektorie eingehen.

Dem Roboter fließt zum Zeitpunkt  $t_j$  der Eingangsparametersvektor  $\mathbf{P}_{E_j}$  zu. Dieser besteht aus

- der sich aus dem Erwartungswert  $\bar{m}_j$  und der Standardabweichung  $\sigma_j$  zusammensetzenden Verteilung  $\mathbf{P}(m|\mathcal{A}_j)$ ,
- den zum Zeitpunkt  $t_j$  gemessenen aktuellen Gelenkwinkelstellungen  $\theta_j$  und Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_j$  sowie
- der vom maschinellen Sichtsystem gelieferten anzufahrenden Endposition  $\theta_{f_j}$  und der zu erreichenden Endgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_{f_j}$ .

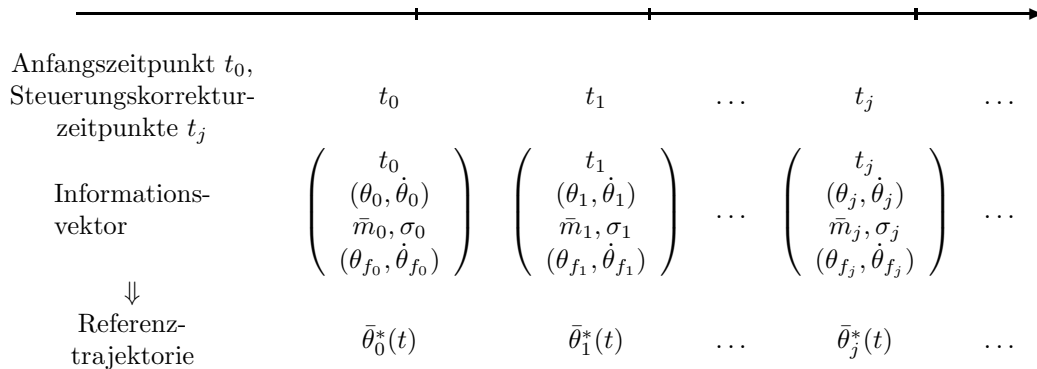


Abbildung 6.1: AOSTP

Mit dem Wechsel auf die neue Referenztrajektorie am Zeitpunkt  $t_j$  geht man von der Stufe  $j - 1$  auf die Stufe  $j$  über<sup>3</sup>.

In Abhängigkeit vom jeweiligen Szenario stammen die Komponenten des Vektors  $\mathbf{P}_{E_j}$  aus unterschiedlichen Quellen:

- In den Szenarien 1 und 2 ( $j = 0$ ) ergibt sich das Gewicht des Gepäckstückes aus der BSM.
- In den Szenarien 3 und 4 ( $j = 0$ ) liefert ein Parameterschätzer den Erwartungswert und die Standardabweichung des Koffergewichtes des abzufertigenden Fluges aus den am Eincheckschalter anfallenden Gewichtsdaten.
- Im Szenario 5 ( $j = 1$ ) erhält man einen Mittelwert und einen mittleren Fehler von einem Parameterschätzer, der die Masse des gerade umgeschlagenen Gepäckstückes schätzt<sup>4</sup>.

<sup>2</sup>Ein Beispiel aus dem Alltag: Ein Autofahrer hört im Verkehrsfunk, daß sich vor ihm ein Stau befindet. Diese Information benutzt der Verkehrsteilnehmer, um eine Umleitung zu seinem Ziel zu wählen.

<sup>3</sup>Eine Stufe ist der Zeitraum zwischen dem Zulauf zweier aufeinanderfolgender Eingangsvektoren  $\mathbf{P}_E$ , wobei die Stufe  $j - 1$  der Zeitraum von  $t_{j-1}$  bis  $t_j$  ist.

<sup>4</sup>Mittelwert und mittlerer Fehler sind rechnerisch genauso zu behandeln wie der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Normalverteilung.

- In den Szenarien 6 ( $j = 1$ ) und 7 ( $j = 0$ ) liefert ein maschinelles Sichtsystem die neuen Endpositionen.

Das AOSTP setzt sich aus

- dem bedingten Erwartungswert der Zielfunktion  $\mathcal{E}(f(m|\mathcal{A}_j))$ ,
- den Gleichungsnebenbedingungen (GNB)  $\mathbf{h}$  und
- den Ungleichungsnebenbedingungen (UNB)  $\mathbf{g}$

zusammen.

An die gesuchte Lösung wird der Anspruch gestellt, den Erwartungswert der Zielfunktion unter Einhaltung der Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen zu minimieren.

Das AOSTP gehört zu den beschränkten Tschebyscheff-Problemen mit freier Endzeit  $t_f$ , zählt damit mathematisch zu den nichtautonomen Systemen und lautet hier:

*Bedingter Erwartungswert der Zielfunktion:*

$$\min_{\bar{\theta}_j(\cdot)} \int_{t_j}^{t_f} \mathcal{E} \left( f(m|\mathcal{A}_j) \right) dt = \min_{\bar{\theta}_j(\cdot)} \int_{t_j}^{t_f} \left( k_t + k_e \left( (\tau_{10} + \bar{m}_j \tau_{11})^2 + (\tau_{20} + \bar{m}_j \tau_{21})^2 + (\tau_{30} + \bar{m}_j \tau_{31})^2 + (\tau_{11}^2 + \tau_{21}^2 + \tau_{31}^2) \sigma_j^2 \right) \right) dt \quad (6.1)$$

*Gleichungsnebenbedingungen:*

$$\bar{\theta}_j(t_j) = \theta_j \quad (6.2)$$

$$\bar{\theta}_j(t_f) = \theta_{f_j} \quad (6.3)$$

$$\bar{\dot{\theta}}_j(t_j) = \dot{\theta}_j \quad (6.4)$$

$$\bar{\dot{\theta}}_j(t_f) = \dot{\theta}_{f_j} \quad (6.5)$$

*Ungleichungsnebenbedingungen:*

$$\theta_{min} \leq \bar{\theta}_j(t) \leq \theta_{max}, \quad t_j \leq t \leq t_f, \quad (6.6)$$

$$\dot{\theta}_{min} \leq \bar{\dot{\theta}}_j(t) \leq \dot{\theta}_{max}, \quad t_j \leq t \leq t_f, \quad (6.7)$$

$$P \left( \tau_{min} \leq \tau(t) = \tau_0 + m(\omega) \tau_1 \leq \tau_{max} \mid \mathcal{A}_j \right) \geq \alpha_\tau, \quad t_j \leq t \leq t_f; \quad (6.8)$$

mit  $i = 1, 2, 3$  und  $j \geq 0$ . Dabei ist  $\alpha_\tau$  eine gegebene Mindestwahrscheinlichkeit, wie z.B.  $\alpha_\tau = 0,9973$ .

Erläuterung der einzelnen Formeln:

- (6.1): der zu minimierende bedingte Erwartungswert der Zielfunktion. Eine ausführliche Erläuterung erfolgt in Unterabschnitt 6.1.1.
- (6.2): Vektor der gemessenen Gelenkwinkelstellungen zum Zeitpunkt  $t_j$ ,
- (6.3): Vektor der zu erreichenden Endgelenkwinkelstellungen zum Endzeitpunkt  $t_f$ ,
- (6.4): Vektor der gemessenen Gelenkwinkelgeschw. zum Anfangszeitpunkt  $t_j$ ,
- (6.5): Vektor der zu erreichenden Endgelenkwinkelgeschwindigkeiten zum Endzeitpunkt  $t_f$ ,
- (6.6): maximal bzw. minimal zulässige Gelenkwinkelstellungen <sup>5</sup>,
- (6.7): maximal bzw. minimal zulässige Gelenkwinkelgeschwindigkeiten <sup>6</sup>,
- (6.8): Wahrscheinlichkeitsrestriktion für die Antriebsmomente:  
Die Bedingung (6.8) wird in zwei Ungleichungen zerlegt:

$$P\left(\tau_{min_i} \leq \tau_{i0} + m(\omega) \tau_{i1} \mid \mathcal{A}_j\right) \geq \alpha_\tau^{Ersatz} \quad (6.9)$$

$$P\left(\tau_{max_i} \geq \tau_{i0} + m(\omega) \tau_{i1} \mid \mathcal{A}_j\right) \geq \alpha_\tau^{Ersatz} \quad (6.10)$$

,  
mit  $i = 1, 2, 3$  und

$$\alpha_\tau^{Ersatz} = \frac{1 + \alpha_\tau}{2} \quad (6.11)$$

Die beiden Ungleichungen (6.9) und (6.10) werden durch die zwei deterministischen Restriktionen

$$\tau_{min_i} \leq \tau_{i0} + m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) \tau_{i1}, \quad (6.12)$$

$$\tau_{max_i} \geq \tau_{i0} + m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) \tau_{i1} \quad (6.13)$$

ersetzt, wobei sich die beiden deterministischen Massen  $m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)$  und  $m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)$  durch Umformung von (6.9) und (6.10) gemäß Unterabschnitt 6.1.2 ergeben.

Da die Normalverteilung von  $-\infty$  bis  $\infty$  reicht, nehmen  $m_{i1}$  und  $m_{i2}$  nur für  $\alpha_\tau < 1$  endliche Werte an. Die Ungleichungen (6.6), (6.7), (6.8) repräsentieren die Steuerungsrestriktionen des Problems.

*Anmerkung:*

$\tau_{min} = (\tau_{1min}, \tau_{2min}, \tau_{3min})^T$  und  $\tau_{max} = (\tau_{1max}, \tau_{2max}, \tau_{3max})^T$  sind Produkte aus der maximal zulässigen Motorspannung  $u_{max} = 7.5 [V]$ , den Getriebeübersetzungen  $\rho_1 = -105$ ,

---

5

- $\theta_{max} = (170^\circ, 115^\circ, 164^\circ)^T = (2.97, 2.01, 2.86)^T [rad]$  und
- $\theta_{min} = (-170^\circ, -115^\circ, -164^\circ)^T = (-2.97, -2.01, -2.86)^T [rad]$

6

- $\dot{\theta}_{max} = (172^\circ, 86^\circ, 298^\circ)^T [\frac{1}{sec}] = (3.0, 1.5, 5.2)^T [\frac{rad}{sec}]$  und
- $\dot{\theta}_{min} = (-172^\circ, -86^\circ, -298^\circ)^T [\frac{1}{sec}] = (-3.0, -1.5, -5.2)^T [\frac{rad}{sec}]$

$\rho_2 = 210$  und  $\rho_3 = 60.0$  des jeweiligen Gelenkes und den Drehmomentenkonstanten  $V_1 = V_2 = V_3 = -1.2 [\frac{Nm}{V}]$ :

$$\tau_{min} = \begin{pmatrix} \tau_{1min} = -1 \cdot V_1 \cdot \rho_1 \cdot u_{max} = -1134[Nm] \\ \tau_{2min} = V_2 \cdot \rho_2 \cdot u_{max} = -1890[Nm] \\ \tau_{3min} = V_3 \cdot \rho_3 \cdot u_{max} = -540[Nm] \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

$$\tau_{max} = \begin{pmatrix} \tau_{1max} = V_1 \cdot \rho_1 \cdot u_{max} = 1134[Nm] \\ \tau_{2max} = -1 \cdot V_2 \cdot \rho_2 \cdot u_{max} = 1890[Nm] \\ \tau_{3max} = -1 \cdot V_3 \cdot \rho_3 \cdot u_{max} = 540[Nm] \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Den Zusammenhang zwischen dem Vektor  $\tau(t)$  der Drehmomente der Getriebeabgangswellen und den Gelenkwinkeln  $\theta_0(t)$  beschreiben die Gleichungen (4.14), (4.15) und (4.16).

### 6.1.1 Formel für den Erwartungswert der Zielfunktion

Als bedingter Erwartungswert der Zielfunktion kommt in dieser Arbeit eine gewichtbare Kombination aus der Forderung nach dem schnellsten Weg und dem geringsten Energieaufwand zum Einsatz:

$$\int_{t_j}^{t_f} \int \left( k_t + k_e \left( \tau_1^2(m) + \tau_2^2(m) + \tau_3^2(m) \right) \right) \varphi(m|\mathcal{A}_j) dm dt, \quad (6.16)$$

wobei  $\varphi = \varphi(m|\mathcal{A}_j)$  die bedingte Dichte von  $m = m(\omega)$ , gegeben durch die Information  $\mathcal{A}_j$ , auf der Stufe  $j$  ist.

In die Gleichungen (4.14), (4.15) und (4.16) der Antriebsmomente  $\tau(t)$  geht die Masse  $m$  der Nutzlast linear ein. Daher lassen sich (4.14), (4.15) und (4.16) gemäß der Gleichungen (4.30) bis (4.64) folgendermaßen zerlegen:

$$\tau_i(m, \bar{\theta}(t), \dot{\bar{\theta}}(t), \ddot{\bar{\theta}}(t)) = \tau_{i0}(\bar{\theta}(t), \dot{\bar{\theta}}(t), \ddot{\bar{\theta}}(t)) + m(\omega) \tau_{i1}(\bar{\theta}(t), \dot{\bar{\theta}}(t), \ddot{\bar{\theta}}(t)) \quad (6.17)$$

mit  $i = 1, 2, \dots, n_{Gelenk} = 3$ <sup>7</sup>.

Mit (6.17) lautet Gleichung (6.16) nach Ausführung des inneren der beiden Integrale:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\theta}(\cdot)} \int_{t_j}^{t_f} \mathcal{E} \left( f(m|\mathcal{A}_j) \right) dt &= \min_{\bar{\theta}(\cdot)} \int_{t_j}^{t_f} \left( k_t + k_e \left( (\tau_{10} + \bar{m}_j \tau_{11})^2 + (\tau_{20} + \bar{m}_j \tau_{21})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\tau_{30} + \bar{m}_j \tau_{31})^2 + (\tau_{11}^2 + \tau_{21}^2 + \tau_{31}^2) \sigma_j^2 \right) \right) dt \end{aligned} \quad (6.18)$$

Die Formel (6.18) besteht hier aus zwei, mittels der Faktoren  $k_t$  und  $k_e$  gewichtbaren Summanden. Der erste zielt auf die Minimierung der benötigten Laufzeit zwischen Anfangs- und Endpunkt, der

<sup>7</sup>Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im weiteren  $(\bar{\theta}(t), \dot{\bar{\theta}}(t), \ddot{\bar{\theta}}(t))$  weggelassen.



zweite auf einen möglichst geringen Energieverbrauch ab. Die Summe  $0 \leq k_t \leq 1$  und  $0 \leq k_e \leq 1$  muß stets 1 ergeben. Im reinen zeitoptimalen Fall nimmt  $k_t$  den Wert 1 und  $k_e$  den Wert 0 an, im reinen energieoptimalen Fall umgekehrt <sup>8</sup>.

Das kaligrafische  $\mathcal{E}$  gibt den Erwartungswert an, das kaligrafische  $\mathcal{A}_j$  die zum Zeitpunkt  $t_j$  verfügbaren Informationen über die zu transportierende Nutzlast. In den Szenarien 1 und 2 enthält der Informationsvektor  $\mathcal{A}_j$  die exakte Masse, im Szenario 3 den Erwartungswert und die Standardabweichung des Gepäcks der Flugverbindung, im Szenario 4 den Erwartungswert und die Standardabweichung des Gepäcks des abzufertigenden Fluges, im Szenario 5 am Zeitpunkt  $t_0$  den Erwartungswert und die Standardabweichung der zu verladenden Gepäckkategorie, am Zeitpunkt  $t_1$  den vom Parameterschätzer zugeliferten Mittelwert und mittleren Fehler des geschätzten Gewichtes des gerade transportierten Gepäckstückes.

Die untere Integrationsgrenze  $t_j$  bezeichnet den Startzeitpunkt, die obere  $t_f$  den Endzeitpunkt. Die Antriebsmomente  $\tau$  sind linear von der Nutzlastmasse abhängig.

Durch die Ausführung der zur Berechnung eines Erwartungswertes notwendigen Integration entstehen die vom Erwartungswert der Nutzlastmasse linear abhängigen Terme  $\tau_{i0} + \bar{m}_j \tau_{i1}$  und die mit der Varianz  $\sigma_j^2$  multiplizierte Summe der  $\tau_{i1}^2$ .

In Abhängigkeit vom jeweiligen Szenario ergeben sich für  $j$ ,  $\bar{m}_j$  und  $\sigma_j$  folgende Belegungen:

- Szenarien 1 und 2:
  - $j := 0$ ,
  - $\bar{m}_0$ : Masse des umzuschlagenden Gepäckstückes
  - $\sigma_0 := 0$ , da Masse des umzuschlagenden Gepäckstückes exakt bekannt;
- Szenario 3:
  - $j := 0$ ,
  - $\bar{m}_0$ : Erwartungswert des Gepäckgewichtes der Flugverbindung,
  - $\sigma_0$ : Standardabweichung des Gepäckgewichtes der Flugverbindung;
- Szenario 4:
  - $j := 0$ ,
  - $\bar{m}_0$ : Erwartungswert des Gepäckgewichtes der Fluges,
  - $\sigma_0$ : Standardabweichung des Gepäckgewichtes des Fluges;
- Szenario 5:
  - am Zeitpunkt  $t_0$ :
    - \*  $j := 0$ ,
    - \*  $\bar{m}_0$ : Erwartungswert des Gewichtes der zu verladenden Gepäckkategorie,
    - \*  $\sigma_0$ : Standardabweichung des Gewichtes der zu verladenden Gepäckkategorie;
  - am Zeitpunkt  $t_1$ :
    - \*  $j := 1$ ,
    - \*  $\bar{m}_1$ : Mittelwert des geschätzten Gewichtes des gerade transportierten Gepäckstückes,
    - \*  $\sigma_1$ : mittlerer Fehler des geschätzten Gewichtes des gerade transportierten Gepäckstückes.

---

<sup>8</sup>Im reinen energieoptimalen Fall muß eine feste Endzeit vorgegeben werden.

### 6.1.2 Ungleichungen für die Wahrscheinlichkeitsrestriktionen

Der Ansatz zur Berechnung von  $m_{i1}(\alpha_\tau)$  und  $m_{i2}(\alpha_\tau)$  lautet gemäß [1] folgendermaßen:

Aus der Betrachtung der linken Seite von (6.10) erhält man die vom Vorzeichen von  $\tau_{i1}$  abhängige Masse  $m_{i2}(\alpha_\tau)$ :

(a)  $\tau_{i1} > 0$ :

$$P\left(\frac{\tau_{max_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}} \geq m(\omega) \mid \mathcal{A}_j\right) \geq \alpha_\tau^{Ersatz} \quad (6.19)$$

bzw. mit der bedingten Verteilungsfunktion  $F_{m,\mathcal{A}_j}(z) := P\left(m(\omega) \leq z \mid \mathcal{A}_j\right)$

$$F_{m,\mathcal{A}_j}\left(\frac{\tau_{max_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}}\right) \geq \alpha_\tau^{Ersatz}. \quad (6.20)$$

Existiert nun die inverse Verteilungsfunktion, so erhält man  $m_{i2}(\alpha_\tau)$  aus der Ungleichung (6.20):

$$m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) := F_{m,\mathcal{A}_j}^{-1}(\alpha_\tau^{Ersatz}) \leq \frac{\tau_{max_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}}. \quad (6.21)$$

Für die Restriktion (6.13) gilt dann unter Verwendung von Ungleichung (6.21):

$$\tau_{max_i} \geq \tau_{i0} + m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)\tau_{i1} := \tau_{i0} + F_{m,\mathcal{A}_j}^{-1}(\alpha_\tau^{Ersatz})\tau_{i1} \quad (6.22)$$

(b)  $\tau_{i1} < 0$ :

$$P\left(m(\omega) \geq \frac{\tau_{max_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}} \mid \mathcal{A}_j\right) \geq \alpha_\tau^{Ersatz}, \quad (6.23)$$

also

$$1 - P\left(m(\omega) < \frac{\tau_{max_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}} \mid \mathcal{A}_j\right) \geq \alpha_\tau^{Ersatz} \quad (6.24)$$

bzw. mit der bedingten Verteilungsfunktion  $F_{m,\mathcal{A}_j}(z) := P\left(m(\omega) \leq z \mid \mathcal{A}_j\right)$

$$F_{m,\mathcal{A}_j}\left(\frac{\tau_{max_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}}\right) \leq 1 - \alpha_\tau^{Ersatz}. \quad (6.25)$$

Existiert nun die inverse Verteilungsfunktion, so erhält man  $m_{i2}(\alpha_\tau)$  aus der Ungleichung (6.25):

$$m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) := F_{m,\mathcal{A}_j}^{-1}(1 - \alpha_\tau^{Ersatz}) \geq \frac{\tau_{max_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}}. \quad (6.26)$$

Für die Restriktion (6.13) gilt dann unter Verwendung von Ungleichung (6.26):

$$\tau_{max_i} \geq \tau_{i0} + m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)\tau_{i1} := \tau_{i0} + F_{m,\mathcal{A}_j}^{-1}(1 - \alpha_\tau^{Ersatz})\tau_{i1}. \quad (6.27)$$

(c)  $\tau_{i1} = 0$ :

Hier hängt die Restriktion (6.13) nicht von der Zufallsvariablen  $m(\omega)$  ab. Aufgrund des fehlenden Einflusses von  $m(\omega)$  auf die Ungleichung (6.13) entfällt die Berechnung von  $m_{i2}(\alpha_\tau)$ . Die Restriktion (6.13) lautet dann:

$$\tau_{max_i} \geq \tau_{i0}. \quad (6.28)$$

Analog erhält man aus der linken Seite der Restriktion (6.9) die vom Vorzeichen von  $\tau_{i1}$  abhängige Masse  $m_{i1}(\alpha_\tau)$ :

(d)  $\tau_{i1} > 0$ :

$$m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) := F_{m, \mathcal{A}_j}^{-1}(1 - \alpha_\tau^{Ersatz}) \geq \frac{\tau_{min_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}} \quad (6.29)$$

Für die Restriktion (6.12) gilt dann unter Verwendung von Ungleichung (6.29):

$$\tau_{min_i} \leq \tau_{i0} + m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)\tau_{i1} := \tau_{i0} + F_{m, \mathcal{A}_j}^{-1}(1 - \alpha_\tau^{Ersatz})\tau_{i1}. \quad (6.30)$$

(e)  $\tau_{i1} < 0$ :

$$m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) := F_{m, \mathcal{A}_j}^{-1}(\alpha_\tau^{Ersatz}) \leq \frac{\tau_{min_i} - \tau_{i0}}{\tau_{i1}}. \quad (6.31)$$

Für die Restriktion (6.12) gilt dann unter Verwendung von Ungleichung (6.31):

$$\tau_{min_i} \leq \tau_{i0} + m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)\tau_{i1} := \tau_{i0} + F_{m, \mathcal{A}_j}^{-1}(\alpha_\tau^{Ersatz})\tau_{i1}. \quad (6.32)$$

(f)  $\tau_{i1} = 0$ :

Hier hängt die Restriktion (6.12) nicht von der Zufallsvariablen  $m(\omega)$  ab. Aufgrund des fehlenden Einflusses von  $m(\omega)$  auf die Ungleichung (6.12) entfällt die Berechnung von  $m_{i1}(\alpha_\tau)$ . Die Restriktion (6.12) lautet dann:

$$\tau_{min_i} \leq \tau_{i0}. \quad (6.33)$$

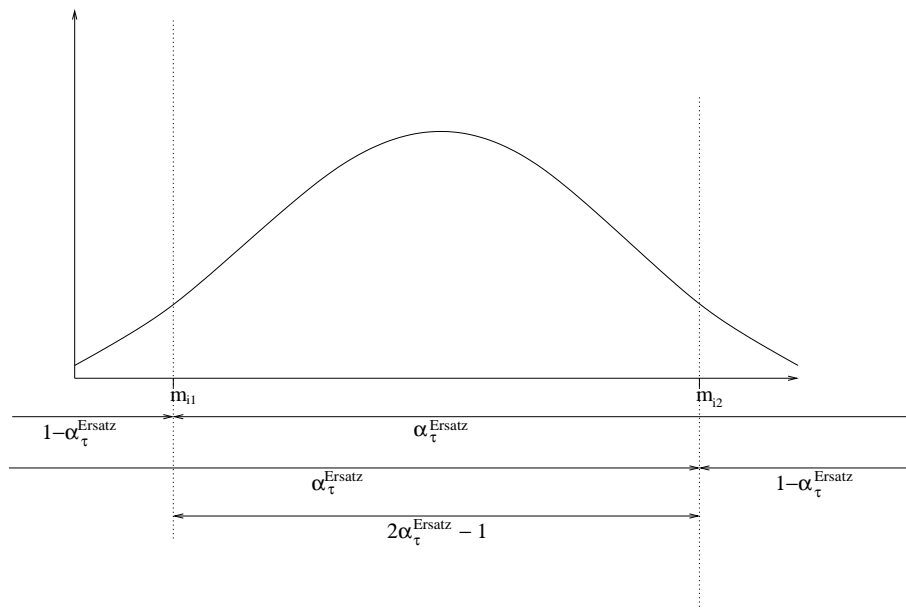
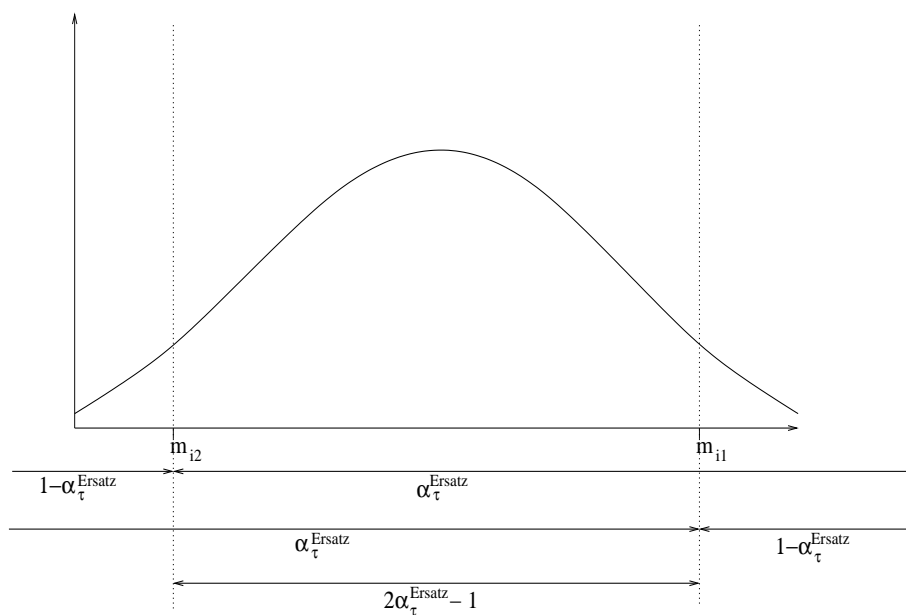
*Begründung für (6.11):*

Wie aus Abbildung 6.2 ersichtlich gilt für  $\tau_{i1} > 0$ , d.h.  $m_{i1} < m_{i2}$ :

- Wegen  $F(m_{i1}) = 1 - \alpha_\tau^{Ersatz}$  liegen  $(1 - \alpha_\tau^{Ersatz}) \cdot 100\%$  aller möglichen Fälle im Intervall  $(-\infty; m_{i1})$ ,
- wegen  $F(m_{i2}) = \alpha_\tau^{Ersatz}$  liegen  $\alpha_\tau^{Ersatz} \cdot 100\%$  aller möglichen Fälle in  $(-\infty, m_{i2})$ , und
- wegen  $F(m_{i2}) - F(m_{i1}) = \alpha_\tau^{Ersatz} - (1 - \alpha_\tau^{Ersatz}) = 2\alpha_\tau^{Ersatz} - 1 = \alpha_\tau$  liegen  $(2 \cdot \alpha_\tau^{Ersatz} - 1 = \alpha_\tau) \cdot 100\%$  aller möglichen Fälle im Intervall  $(m_{i1}, m_{i2})$ .

Wie aus Abbildung 6.3 ersichtlich gilt für  $\tau_{i1} < 0$ , d.h.  $m_{i2} < m_{i1}$ :

- Wegen  $F(m_{i2}) = 1 - \alpha_\tau^{Ersatz}$  liegen  $(1 - \alpha_\tau^{Ersatz}) \cdot 100\%$  aller möglichen Fälle im Intervall  $(-\infty, m_{i2})$ ,

Abbildung 6.2: Normalverteilung für  $\tau_{i1} > 0$  und damit  $m_{i1} < m_{i2}$ Abbildung 6.3: Normalverteilung für  $\tau_{i1} < 0$  und damit  $m_{i2} < m_{i1}$ 

- wegen  $F(m_{i1}) = \alpha_{\tau}^{Ersatz}$  liegen  $\alpha_{\tau}^{Ersatz} \cdot 100\%$  aller möglichen Fälle in  $(-\infty, m_{i1})$ , und
- wegen  $F(m_{i1}) - F(m_{i2}) = \alpha_{\tau}^{Ersatz} - (1 - \alpha_{\tau}^{Ersatz}) = 2\alpha_{\tau}^{Ersatz} - 1 \leq \alpha_{\tau}^{Ersatz}$  liegen  $(2 \cdot \alpha_{\tau}^{Ersatz} - 1 = \alpha_{\tau}) \cdot 100\%$  aller möglichen Fälle im Intervall  $(m_{i2}, m_{i1})$ .

Über  $m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_{\tau}, \mathcal{A}_j)$  und  $m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_{\tau}, \mathcal{A}_j)$  wird die stochastische Verteilung der Nutzlast in das

Optimierungsproblem zur Berechnung von  $\bar{\theta}^*$  eingebracht:

$m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)$  und  $m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)$  ergeben sich für  $\tau_{i1} > 0$

- bei Gleichverteilung der Nutzlasten auf dem Intervall  $(\bar{m}_j - \sqrt{3}\sigma_j, \bar{m}_j + \sqrt{3}\sigma_j)$  zu

$$m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) := \bar{m}_j - \sqrt{3}\sigma_j \alpha_\tau \quad (6.34)$$

$$m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) := \bar{m}_j + \sqrt{3}\sigma_j \alpha_\tau; \quad (6.35)$$

- bei Gaußverteilung durch Lösen der Gleichungen

$$\alpha_\tau^{Ersatz} = \frac{1 + \alpha_\tau}{2} = 1 - F\left(m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)\right) = \int_{m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{m}_j}{\sigma_j}\right)^2} dx \quad (6.36)$$

$$\alpha_\tau^{Ersatz} = \frac{1 + \alpha_\tau}{2} = F\left(m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)\right) = \int_{-\infty}^{m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{m}_j}{\sigma_j}\right)^2} dx \quad (6.37)$$

nach  $m_{i1}$  bzw.  $m_{i2}$  mit dem Programmpaket DCDFSRC, das nach der Methode von Kennedy und Gentle [22] arbeitet.

$m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)$  und  $m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)$  ergeben sich für  $\tau_{i1} < 0$

- bei Gleichverteilung der Nutzlasten auf dem Intervall  $(\bar{m}_j - \sqrt{3}\sigma_j, \bar{m}_j + \sqrt{3}\sigma_j)$  zu

$$m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) := \bar{m}_j - \sqrt{3}\sigma_j \alpha_\tau \quad (6.38)$$

$$m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) := \bar{m}_j + \sqrt{3}\sigma_j \alpha_\tau; \quad (6.39)$$

- bei Gaußverteilung durch Lösen der Gleichungen

$$\alpha_\tau^{Ersatz} = \frac{1 + \alpha_\tau}{2} = 1 - F\left(m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)\right) = \int_{m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{m}_j}{\sigma_j}\right)^2} dx \quad (6.40)$$

$$\alpha_\tau^{Ersatz} = \frac{1 + \alpha_\tau}{2} = F\left(m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)\right) = \int_{-\infty}^{m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{m}_j}{\sigma_j}\right)^2} dx \quad (6.41)$$

nach  $m_{i2}$  bzw.  $m_{i1}$  mit dem Programmpaket DCDFSRC.

## 6.2 Trajektorienparametertransformation

Um AOSTP (Gleichungen (6.1) bis (6.13)) mit einem direkten numerischen Verfahren lösen zu können, sind zwei Abänderungen notwendig:

- die in den Unterabschnitten 6.2.1 und 6.2.2 dargestellte Transformation der freien Endzeit  $t_f$  auf die feste Weglänge  $s_f(t_f) = 1$ ,
- die in Kapitel 7 dargestellte Reduzierung auf ein endlich dimensionales Optimierungsproblem.

Durch die erste der vorgenannten, in den Unterabschnitten 6.2.1 und 6.2.2 dargestellte Transformation treten

- der **geometrische Pfad im Konfigurationsraum**  $\theta_e(s)$  und
- das **Geschwindigkeitsprofil des geometrischen Pfades**  $\beta(s)$

an die Stelle der Trajektorie  $\bar{\theta}_j(t)$ . Die Gleichungen 6.62 bis 6.70 geben das zugehörige transformierte Optimierungsproblem an.

### 6.2.1 Erste Transformation

Der unbekannte Zeithorizont  $[t_0, t_f]$  wird im folgenden durch Einführung der neuen abstrakten Wegvariablen  $s \in (0, 1)$  auf ein festes Parameterintervall  $[s_0 = 0, s_f(t_f) = 1]$  transformiert.

Das Lösen des Anfangswertproblems, bestehend aus

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = \sqrt{\beta(s)} \quad (6.42)$$

und

$$\begin{aligned} s(t=0) &= s_0 = 0 \\ s(t_f) &= s_f = 1 \end{aligned} \quad (6.43)$$

beschreibt diese Transformation, wobei die in der Literatur als **Geschwindigkeitsprofil des geometrischen Pfades** bezeichnete **nicht negative** Funktion  $\beta(s)$  später passend zum numerischen Lösungsverfahren definiert wird [20, 21, 48] (siehe auch Kapitel 7.2).

Wird zu den Zeitpunkten  $t_j, j = 1, 2, \dots, n$  die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{j-1}$  durch die neue Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_j$  ersetzt, verändert sich Gleichung (6.42) folgendermaßen:

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\beta_{(j)}(s)}, \quad t \geq t_j \geq 0 = t_0; j = 0, 1, \dots, \quad (6.44)$$

$$s(t_j) = s_j; \quad s_f = 1 \geq s_j \geq s_0 = 0, \quad (6.45)$$

wobei  $s = s(t)$  eine streng monoton wachsende Funktion ist.

*Hinweis:*  
Die Funktion

$$s_{(j)} = s_{(j)}(t), \quad t_j \leq t \leq t_{f_j}, \quad (6.46)$$

ist die einzige Lösung von (6.44) und (6.45) auf dem verbliebenen Zeitintervall  $(t_j, t_f) = (t_j, t_{f_j})$ . Der zeitliche Endpunkt  $t_f = t_{f_j}$ , gültig für die  $j$ -te Stufe des Prozesses, ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$s_{(j)}(t_{f_j}) = s_f = 1. \quad (6.47)$$

Der Anfangsbahnparameter  $s_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  kann wie folgt rekursiv angegeben werden:

$$s_j = s_{(j-1)}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.48)$$

$s_0$  und  $s_f > s_0$  sind feste, vorgegebene Werte.

Nun werden die zeitabhängige Trajektorie

- $\bar{\theta}(t) = \left( \bar{\theta}_1(t), \bar{\theta}_2(t), \bar{\theta}_3(t) \right)^T$  sowie ihre ersten beiden Ableitungen,
- $\dot{\bar{\theta}}(t) = \left( \dot{\bar{\theta}}_1(t), \dot{\bar{\theta}}_2(t), \dot{\bar{\theta}}_3(t) \right)^T$  und
- $\ddot{\bar{\theta}}(t) = \left( \ddot{\bar{\theta}}_1(t), \ddot{\bar{\theta}}_2(t), \ddot{\bar{\theta}}_3(t) \right)^T$

aus dem geometrischen Pfad im Konfigurationsraum

- $\bar{\theta}_e(s)$ , dessen ersten beiden Ableitungen nach  $s$
- $\bar{\theta}'_e(s)$  und
- $\bar{\theta}''_e(s)$

sowie aus dem Geschwindigkeitsprofil des geometrischen Pfades

- $\bar{\beta}(s)$  und dessen erste Ableitung nach  $s$
- $\bar{\beta}'(s)$

aufgebaut:

$$\bar{\theta}_i(t) = \bar{\theta}_{e_i}(s(t)) \quad (6.49)$$

$$\dot{\bar{\theta}}_i(t) = \frac{d\bar{\theta}_{e_i}}{ds} \frac{ds}{dt} = \bar{\theta}'_{e_i}(s) \sqrt{\bar{\beta}(s)}, \quad (6.50)$$

$$\ddot{\bar{\theta}}_i(t) = \frac{d^2\bar{\theta}_{e_i}}{ds^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\bar{\theta}_{e_i}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \bar{\theta}''_{e_i}(s) \bar{\beta}(s) + \bar{\theta}'_{e_i}(s) \frac{\bar{\beta}'(s)}{2}, \quad (6.51)$$

mit  $i = 1, 2, 3$ .

### 6.2.2 Zweite Transformation

Um auf allen Stufen stets das Intervall  $[0, 1]$  für die abstrakte Wegvariable verwenden zu können, wird eine weitere Parametertransformation durch Übergang vom Parameter  $s$  zum Parameter  $\tilde{s}$  auf der Stufe  $j$  vorgenommen. Diese Vorgehensweise wurde erstmals 1996 durch K.Marti in [37] vorgestellt.

Es wird folgende zweite Parametertransformation [30, 31] eingeführt:

$$\tilde{s} = \tilde{s}(s) = \tilde{s}_0 + \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} \cdot (s - s_j) \quad (6.52)$$

mit  $s_j \leq s \leq s_f = 1$ ,  $\tilde{s}_0 = 0$  und  $\tilde{s}_f = 1$ , wodurch das Intervall  $(s_j, s_f = 1)$  in das Intervall  $(\tilde{s}_0(s_j) = 0, \tilde{s}_f = 1)$  übergeht.

Die zugehörige inverse Transformation ist:

$$s = s(\tilde{s}) = s_j + \frac{s_f - s_j}{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0} \cdot (\tilde{s} - \tilde{s}_0) \quad (6.53)$$

mit  $\tilde{s}_0 = 0 \leq \tilde{s} \leq \tilde{s}_f = 1$ , wodurch das Intervall  $(\tilde{s}_0 = 0, \tilde{s}_f = 1)$  in das Intervall  $(s_j, s_f = 1)$  übergeht.

Der normierte Wegpunkt  $s_j$  gibt die bis zum Schaltpunkt  $t_j$  zurückgelegte normierte Weglänge an.

Aus Gleichung (6.53) ergibt sich:

$$ds = d\tilde{s} \cdot \frac{s_f - s_j}{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}. \quad (6.54)$$

Darüber hinaus werden folgende Zuweisungen vorgenommen:

$$\bar{\beta}(s) := \tilde{\beta}(\tilde{s}(s)), \quad (6.55)$$

$$\bar{\theta}_e(s) := \tilde{\theta}_e(\tilde{s}(s)). \quad (6.56)$$

Damit gilt für  $\bar{\beta}'(s)$ :

$$\bar{\beta}'(s) = \tilde{\beta}'(\tilde{s}(s)) \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}. \quad (6.57)$$

Aus (6.52) und (6.53) ergibt sich:

$$\bar{\theta}'_e(s) = \frac{d\bar{\theta}_e}{ds} = \frac{\partial \tilde{\theta}_e}{\partial \tilde{s}} \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} = \tilde{\theta}'_e(\tilde{s}(s)) \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}, \quad (6.58)$$

$$\bar{\theta}''_e(s) = \frac{d^2 \bar{\theta}_e}{ds^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_e}{\partial \tilde{s}^2} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s}\right)^2 = \tilde{\theta}''_e(\tilde{s}(s)) \cdot \left(\frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}\right)^2. \quad (6.59)$$



Setzt man die rechte Seite der Gleichung (6.58) und der Gleichung (6.55) in die Gleichung (6.50) ein, so ergibt sich für die Gelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_i(t)$ :

$$\dot{\theta}_i(t) = \bar{\theta}'_{e_i}(s) \sqrt{\bar{\beta}(s)} = \tilde{\theta}'_{e_i}(\tilde{s}) \sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s})} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}. \quad (6.60)$$

Setzt man die rechte Seite der Gleichungen (6.58), (6.59), (6.55) und (6.57) in die Gleichung (6.51) ein, so ergibt sich für die Gelenkwinkelbeschleunigung  $\ddot{\theta}_i(t)$ :

$$\ddot{\theta}_i(t) = \bar{\theta}''_{e_i}(s) \bar{\beta}(s) + \bar{\theta}'_{e_i}(s) \frac{\bar{\beta}'(s)}{2} = (\tilde{\theta}''_{e_i}(\tilde{s}) \tilde{\beta}(\tilde{s}) + \tilde{\theta}'_{e_i}(\tilde{s}) \frac{\tilde{\beta}'(\tilde{s})}{2}) \cdot \left(\frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}\right)^2. \quad (6.61)$$

Damit lauten (6.1) bis (6.13):

*Bedingter Erwartungswert der Zielfunktion:*

$$\begin{aligned} \min_{\theta(\cdot)} \int_{t_j}^{t_f} \mathcal{E} \left( f(m|\mathcal{A}_j) \right) dt &= \min_{\tilde{\theta}_e(\cdot), \tilde{\beta}(\cdot)} \int_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}_f} \left( k_t + k_e \left( (\tau_{10} + \bar{m}_j \tau_{11})^2 + (\tau_{20} + \bar{m}_j \tau_{21})^2 \right. \right. \\ &+ (\tau_{30} + \bar{m}_j \tau_{31})^2 \\ &\left. \left. + (\tau_{11}^2 + \tau_{21}^2 + \tau_{31}^2) \sigma_j^2 \right) \right) \frac{s_f - s_j}{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0} \frac{d\tilde{s}}{\sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s})}} \end{aligned} \quad (6.62)$$

*Gleichungsnebenbedingungen:*

$$\tilde{\theta}_e(\tilde{s}_0) = \theta_j \quad (6.63)$$

$$\tilde{\theta}_e(\tilde{s}_f) = \theta_{f_j} \quad (6.64)$$

$$\tilde{\theta}'_e(\tilde{s}_0) \sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s}_0)} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \dot{\theta}_j \quad (6.65)$$

$$\tilde{\theta}'_e(\tilde{s}_f) \sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s}_f)} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \dot{\theta}_{f_j} \quad (6.66)$$

*Ungleichungsnebenbedingungen:*

$$\theta_{min} \leq \tilde{\theta}_e(\tilde{s}) \leq \theta_{max}, \quad \tilde{s}_0 \leq \tilde{s} \leq \tilde{s}_f, \quad (6.67)$$

$$\dot{\theta}_{min} \leq \tilde{\theta}'_e(\tilde{s}) \sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s})} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} \leq \dot{\theta}_{max}, \quad \tilde{s}_0 \leq \tilde{s} \leq \tilde{s}_f, \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \tau_{min_i} &\leq \tau_{i0}(\tilde{\theta}_e(\tilde{s}), \tilde{\theta}'_e(\tilde{s}) \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}, \tilde{\theta}''_e(\tilde{s}) \left(\frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}\right)^2, \tilde{\beta}(\tilde{s}), \tilde{\beta}'(\tilde{s}) \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}) \\ &+ m_{i1}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) \tau_{i1}(\tilde{\theta}_e(\tilde{s}), \tilde{\theta}'_e(\tilde{s}) \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}, \tilde{\theta}''_e(\tilde{s}) \left(\frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}\right)^2, \tilde{\beta}(\tilde{s}), \tilde{\beta}'(\tilde{s}) \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}) \end{aligned} \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{max_i} &\geq \tau_{i0}(\tilde{\theta}_e(\tilde{s}), \tilde{\theta}'_e(\tilde{s}) \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}, \tilde{\theta}''_e(\tilde{s}) (\frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j})^2, \tilde{\beta}(\tilde{s}), \tilde{\beta}'(\tilde{s}) \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}) \\
&+ m_{i2}(\tau_{i1}, \alpha_\tau, \mathcal{A}_j) \tau_{i1}(\tilde{\theta}_e(\tilde{s}), \tilde{\theta}'_e(\tilde{s}) \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j}, \tilde{\theta}''_e(\tilde{s}) (\frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j})^2, \tilde{\beta}(\tilde{s}), \tilde{\beta}'(\tilde{s}) \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j})
\end{aligned} \tag{6.70}$$

mit  $i = 1, 2, 3$  und  $j \geq 0$ .

Infolge des Überganges von der freien Endzeit  $t_f$  auf die feste Weglänge  $\tilde{s}_f$  sind nicht mehr die zeitabhängigen Trajektorien  $\theta^*(t)$ , sondern die Geschwindigkeitsprofile  $\tilde{\beta}^*(\tilde{s})$  und die geometrischen Pfade  $\tilde{\theta}_e^*(\tilde{s})$  Lösungen von (6.1) bis (6.13).

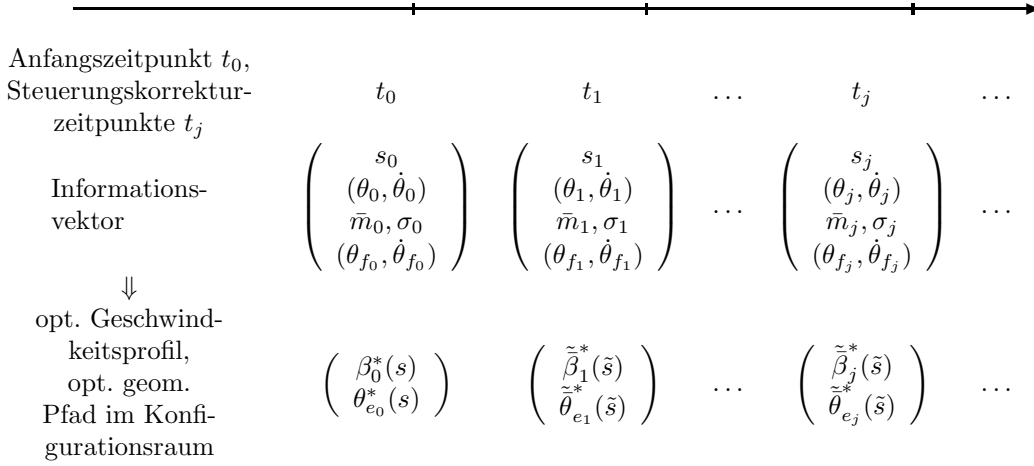


Abbildung 6.4: AOSTP im  $\tilde{s}$ -Bereich

Für die in Unterabschnitt 2.4.5 szenarienabhängig definierten Referenztrajektorien bedeutet dies:

- Szenario 1:  $\theta_0(t) \rightarrow (\beta_0(s), \theta_{0e}(s))^T$
- Szenario 2:  $\theta_0^g(t) \rightarrow (\beta_0^g(s), \theta_{0e}^g(s))^T$
- Szenario 3:  $\bar{\theta}_0(t) \rightarrow (\bar{\beta}_0(s), \bar{\theta}_{0e}(s))^T$
- Szenario 4:  $\bar{\theta}_0^g(t) \rightarrow (\bar{\beta}_0^g(s), \bar{\theta}_{0e}^g(s))^T$
- Szenario 5 und 6:  $\bar{\theta}_{0R}(t) \rightarrow (\bar{\beta}_{0R}(s), \bar{\theta}_{0Re}(s))^T$
- Szenario 5:  $\bar{\theta}_1^g(t) \rightarrow (\tilde{\beta}_1^g(\tilde{s}), \tilde{\theta}_{1e}^g(\tilde{s}))^T$
- Szenario 6:  $\bar{\theta}_{1N}^g(t) \rightarrow (\tilde{\beta}_{1N}^g(\tilde{s}), \tilde{\theta}_{1Ne}^g(\tilde{s}))^T$
- Szenario 7:  $\bar{\theta}_{0N}^g(t) \rightarrow (\bar{\beta}_{0N}^g(s), \bar{\theta}_{0Ne}^g(s))^T$

## Kapitel 7

# Numerische Lösung des Ersatzproblems für das AOSTP

Von einem Lösungsverfahren für das im vorhergehenden Kapitel vorgestellte AOSTP wird gefordert, daß es einen geometrischen Pfad  $\tilde{\theta}_e(\tilde{s})$  im Konfigurationsraum und ein Geschwindigkeitsprofil  $\tilde{\beta}(\tilde{s})$  auffindet, die gemeinsam die jeweilige Zielfunktion unter Einhaltung der zugehörigen Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen (=Restriktionen) minimieren.

Analytische Lösungen wurden bislang nur für Eingelenkroboter gefunden [48].

Bei Mehrgelenkrobotern werden direkte numerische Verfahren eingesetzt. Allen diesen direkten Verfahren ist gemeinsam, daß sie das unendlich dimensionale Optimierungsproblem auf ein endlich dimensionales Parameteroptimierungsproblem zurückführen.

Hier erfolgt die Rückführung dadurch, daß nur solche geometrischen Pfade  $\tilde{\theta}_e(\tilde{s})$  und Geschwindigkeitsprofile  $\tilde{\beta}(\tilde{s})$  des Werkzeugzentrums (WZP) zugelassen werden, die Linearkombinationen von B-Spline-Basisfunktionen sind.

Anschließend werden mittels des durch das Programmpaket SNOPT bereitgestellten Verfahrens der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) die Linearkombinationen für  $\tilde{\theta}_e(\tilde{s}) = \left( \tilde{\theta}_{1_e}(\tilde{s}), \tilde{\theta}_{2_e}(\tilde{s}), \tilde{\theta}_{3_e}(\tilde{s}), \dots \right)^T$  und die Linearkombination für  $\tilde{\beta}(\tilde{s})$  gesucht, die die Zielfunktion unter Einhaltung der Nebenbedingungen minimieren. Die gefundenen Linearkombinationen heißen  $\tilde{\theta}_e^*(\tilde{s})$  und  $\tilde{\beta}^*(\tilde{s})$ . Eingesetzt in die Gleichungen (6.49), (6.50) und (6.51) ergeben diese die optimalen Führungsgrößen  $\theta^*(t)$ ,  $\dot{\theta}^*(t)$  und  $\ddot{\theta}^*(t)$ .

### 7.1 Splines und B-Splines

Im Hinblick auf die Rückführung eines unendlich dimensionalen Optimierungsproblems auf ein endlich dimensionales Optimierungsproblem erfolgen nachstehende Festlegungen:

- Das Intervall  $\Delta = [\tilde{s}_0, \tilde{s}_f]$  der j-ten Stufe des Prozesses wird in  $L$  Subintervalle unterteilt ( $L \in \mathbb{N}$ ):  
 $\Delta_1 = [\mu_0 = \tilde{s}_0, \mu_1]$   
 $\Delta_2 = [\mu_1, \mu_2]$   
 $\vdots$   
 $\Delta_L = [\mu_{L-1}, \mu_L = \tilde{s}_f],$

- $S_{\Delta, M-1}$  ist die Menge aller Splinefunktionen  $S_{\Delta}$  vom Grade  $(M-1) \geq 0$  ( $\equiv$  Splineraum).

### 7.1.1 Eigenschaften der Splines

Die Spline-Funktion  $S_{\Delta}$  vom Grad  $(M-1)$  setzt sich aus den  $L \in \mathbb{N}$  Polynomen  $P_i(\tilde{s})$ ,  $\tilde{s} \in \Delta_i$  mit  $i = 1, \dots, L$ , zusammen. Die Polynome  $P_i(\tilde{s})$  sind stetig auf  $\Delta_i$  und werden so gewählt, daß  $S_{\Delta}$  auf  $\Delta$ , also auf dem gesamten Intervall,  $(M-2)$ -mal stetig differenzierbar ist.

Nach [61] handelt es sich bei der Spline-Funktion  $S_{\Delta}$  um die glatteste aller  $(M-2)$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f(\tilde{s})$ <sup>1</sup>, die durch die festgelegten  $(L+1)$  Punkte  $(\mu_0 = \tilde{s}_0, Y_0)$ ,  $(\mu_1, Y_1)$ ,  $\dots$ ,  $(\mu_L = \tilde{s}_f, Y_L)$  führen. Im hier zu lösenden Fall sind  $Y_0 = (\tilde{\beta}(\mu_0), \tilde{\theta}_{e_1}(\mu_0), \tilde{\theta}_{e_2}(\mu_0), \tilde{\theta}_{e_3}(\mu_0))^T$ ,  $Y_1 = (\tilde{\beta}(\mu_1), \tilde{\theta}_{e_1}(\mu_1), \tilde{\theta}_{e_2}(\mu_1), \tilde{\theta}_{e_3}(\mu_1))^T$ ,  $\dots$ ,  $Y_L = (\tilde{\beta}(\mu_L), \tilde{\theta}_{e_1}(\mu_L), \tilde{\theta}_{e_2}(\mu_L), \tilde{\theta}_{e_3}(\mu_L))^T$ .

Ferner konvergieren Spline-Funktionen gegen die Funktion, die sie interpolieren, sofern man das Gesamtintervall  $\Delta$  immer feiner unterteilt.

D.h. für  $L \rightarrow \infty$  konvergiert der Spline  $S_{\Delta}$ , der hier von einem direkten numerischen Verfahren als Lösung eines auf endliche Dimensionen zurückgeführten Optimierungsproblems ausgegeben wird, gegen die Lösungsfunktion des ursprünglichen unendlich dimensionalen Optimierungsproblems.

### 7.1.2 Eigenschaften der B-Splines

B-Splines sind besondere stückweise stetige Polynomfunktionen mit folgenden Eigenschaften:

- nicht negativ ( $\geq 0$ ),
- nur auf endlich vielen Intervallen  $\Delta_i = [\mu_i, \mu_{i+1}]$  von 0 verschieden,
- eine brauchbare Basis des Splineraumes  $S_{\Delta, M-1}$ .

Aus der letzten Eigenschaft folgt, daß die stückweise stetigen Polynome  $P_i$ , aus denen sich der Spline  $S_{\Delta}$  zusammensetzt, Linearkombination mehrerer B-Splines sind. Diese B-Splines werden im folgenden als B-Spline-Basisfunktionen bezeichnet. Weiteres zu B-Splines siehe [61], S. 95ff.

### 7.1.3 Spline-Raum-Dimension

Das Intervall  $[\tilde{s}_0 = 0, \tilde{s}_f = 1]$  der abstrakten Wegvariablen  $\tilde{s}$  wird in  $L \in \mathbb{N}$  Subintervalle unterteilt. Es wird verlangt, daß auf jedem dieser  $L$  Subintervalle ein Polynom vom Grade  $(M-1)$ , also mit  $M \in \mathbb{N}$  Koeffizienten, existiert. Für diese Polynome wird die stetige Ableitbarkeit bis einschließlich zur  $(M-2)$ -ten Ableitung auch in den Randpunkten des jeweiligen Subintervalls gefordert.

Aus dem vorhergehenden Absatz folgt, daß es  $M \cdot L$  Variablen und  $(M-1) \cdot (L-1)$  Beschränkungen gibt. Durch Subtraktion der Anzahl der Beschränkungen von der Anzahl der Variablen,  $(M \cdot L) - (M-1) \cdot (L-1)$ , ergibt sich die Dimension des aufgespannten B-Spline-Raumes zu  $K = L + M - 1$ .

<sup>1</sup>Stoer wertet dazu die Gesamtkrümmung aus, die er über  $\int_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}_f} |f''(\tilde{s})| d\tilde{s}$  berechnet, d.h.  $S_{\Delta}$  ist Lösung von

$$\min_f \int_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}_f} |f''(\tilde{s})| d\tilde{s}; \quad f \in \mathbb{C}^{M-2}, \quad \tilde{s} \in [\tilde{s}_0, \tilde{s}_f].$$

### 7.1.4 Die hier verwendeten B-Splines

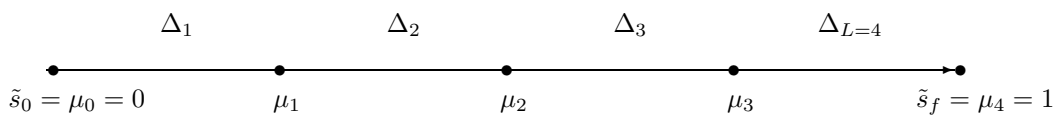
Das Intervall  $\Delta = [\tilde{s}_0, \tilde{s}_f]$  der  $j$ -ten Stufe des Prozesses wird in vier Subintervalle ( $L = 4$ ) unterteilt (siehe Figur 7.0):

$$\Delta_1 = [\mu_0 = \tilde{s}_0, \mu_1 = 0.25 \cdot \tilde{s}_f]$$

$$\Delta_2 = [\mu_1 = 0.25 \cdot \tilde{s}_f, \mu_2 = 0.5 \cdot \tilde{s}_f]$$

$$\Delta_3 = [\mu_2 = 0.5 \cdot \tilde{s}_f, \mu_3 = 0.75 \cdot \tilde{s}_f]$$

$$\Delta_4 = [\mu_3 = 0.75 \cdot \tilde{s}_f, \mu_4 = \tilde{s}_f]$$



Figur 7.0 Unterteilung von  $(\tilde{s}_0, \tilde{s}_f)$

In dieser Arbeit werden B-Splines der Ordnung ( $M = 5$ )<sup>2</sup> eingesetzt. Damit ergibt sich eine Splinerraumdimension  $K = L + M - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ .

Die B-Splines  $B_1(\tilde{s})$ ,  $B_2(\tilde{s})$ ,  $B_3(\tilde{s})$ ,  $B_4(\tilde{s})$ ,  $B_5(\tilde{s})$ ,  $B_6(\tilde{s})$ ,  $B_7(\tilde{s})$  und  $B_8(\tilde{s})$ <sup>3</sup> sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen sind in den drei Abbildungen 7.1, 7.2, 7.3 dargestellt:

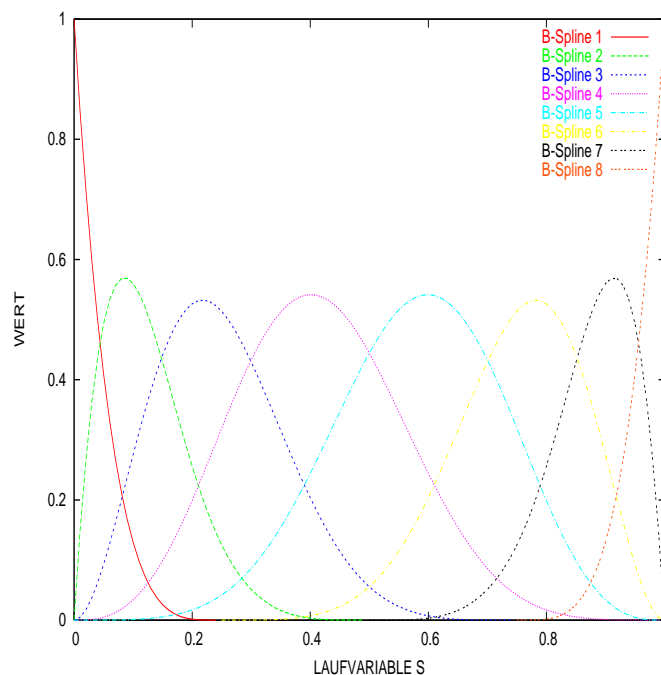


Abbildung 7.1: B-Splines für  $L = 4$ ,  $M = 5$

Aus Abbildung 7.1 geht hervor:

- $B_k(\tilde{s}) > 0$  für alle  $\mu_{k-5} < \tilde{s} < \mu_k$ ;

<sup>2</sup> $M = 5$  wurde gewählt, damit die zweiten Ableitungen wenigstens noch die Ordnung  $M = 3$  aufweisen.

<sup>3</sup>kürzer formuliert:  $B_k(\tilde{s})$ ,  $k = 1, 2, \dots, K = 8$

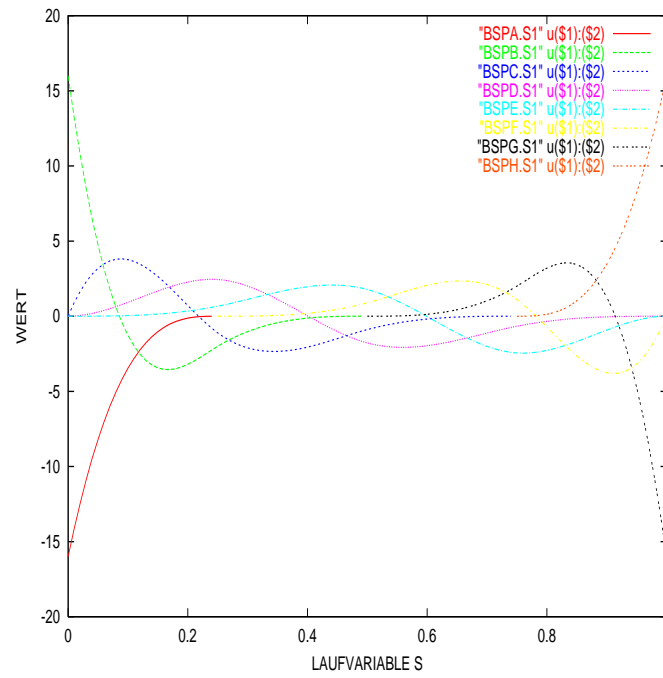


Abbildung 7.2: Erste Ableitung der B-Splines für  $L = 4$ ,  $M = 5$

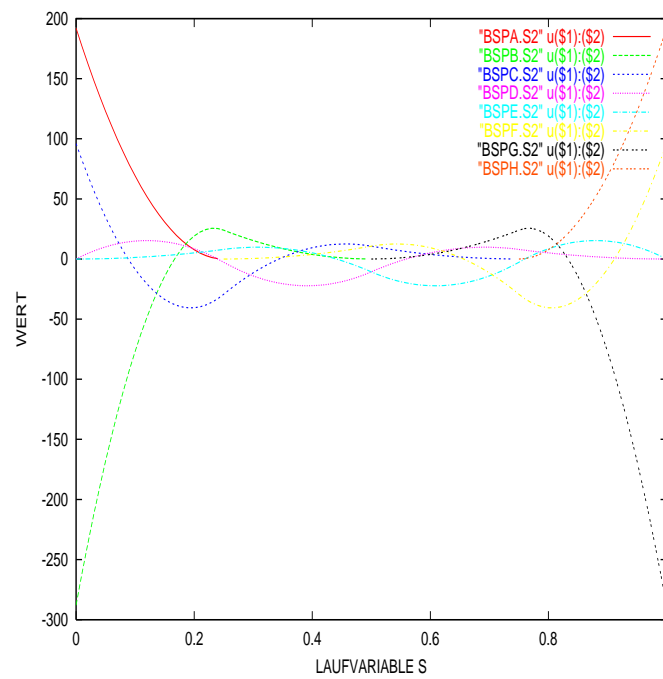


Abbildung 7.3: Zweite Ableitung der B-Splines für  $L = 4$ ,  $M = 5$

- $B_k(\tilde{s}) = 0$  für alle  $\tilde{s} \leq \mu_{k-5}$  und  $\tilde{s} \geq \mu_k$ ,
- $\mu_{k-5} = \mu_0$  für  $k < 5$  und  $\mu_k = \mu_4$  für  $k > 4$ ;
- $B_1(\tilde{s}_0) = 1$  und  $B_k(\tilde{s}_0) = 0$ ;  $k = 2, 3, \dots, 8$ ;
- $B_k(\tilde{s}_f) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, 7$  und  $B_8(\tilde{s}_f) = 1$ .

Die B-Splines  $B_1, B_2, \dots, B_8$  sind gemäß Abbildung 7.1 auf folgenden Intervallen von 0 verschieden:

- $B_1(\tilde{s})$  auf dem Intervall  $(\mu_0, \mu_1)$ ,
- $B_2(\tilde{s})$  auf dem Intervall  $(\mu_0, \mu_2)$ ,
- $B_3(\tilde{s})$  auf dem Intervall  $(\mu_0, \mu_3)$ ,
- $B_4(\tilde{s})$  auf dem Intervall  $(\mu_0, \mu_4)$ ,
- $B_5(\tilde{s})$  auf dem Intervall  $(\mu_0, \mu_4)$ ,
- $B_6(\tilde{s})$  auf dem Intervall  $(\mu_1, \mu_4)$ ,
- $B_7(\tilde{s})$  auf dem Intervall  $(\mu_2, \mu_4)$ ,
- $B_8(\tilde{s})$  auf dem Intervall  $(\mu_3, \mu_4)$ .

## 7.2 Darstellung von $\tilde{\theta}_e(\tilde{s})$ und $\tilde{\beta}(\tilde{s})$ durch B-Spline-Basisfunktionen

$\tilde{\theta}_e$  und  $\tilde{\beta}$  werden jetzt durch Linearkombinationen von B-Spline-Basisfunktionen dargestellt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}(\tilde{s}) \\ \tilde{\theta}_e(\tilde{s}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_A(\tilde{s}, \gamma_\beta) \\ \tilde{\theta}_A(\tilde{s}, \gamma_\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^8 \gamma_{k\beta} B_k \\ \sum_{k=1}^8 \gamma_{k\theta_1} B_k \\ \sum_{k=1}^8 \gamma_{k\theta_2} B_k \\ \sum_{k=1}^8 \gamma_{k\theta_3} B_k \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_\beta \\ \gamma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_\beta \\ \gamma_{\theta_1} \\ \gamma_{\theta_2} \\ \gamma_{\theta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma_{1\beta}, \dots, \gamma_{8\beta})^T \\ (\gamma_{1\theta_1}, \dots, \gamma_{8\theta_1})^T \\ (\gamma_{1\theta_2}, \dots, \gamma_{8\theta_2})^T \\ (\gamma_{1\theta_3}, \dots, \gamma_{8\theta_3})^T \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Hierbei ist  $\gamma$  der Vektor der veränderlichen Koeffizienten der B-Spline-Basisfunktionen  $B_k$ .

U.a. haben Pfeiffer und Johanni in [44] Robotertrajektorien approximativ durch Splines dargestellt und auf diese Weise das unendlich dimensionale deterministische Punkt-zu-Punkt-Problem auf ein endlich dimensionales deterministisches Punkt-zu-Punkt-Problem zurückgeführt. Dieses endlich dimensionale Punkt-zu-Punkt-Problem läßt sich mit dem direkten numerischen Verfahren der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) lösen. Diese in [44] benutzten Polynome generiert Qu in [48] als Linearkombinationen von B-Splines und führt damit das Ersatzproblem des festgelegten geometrischen Pfades mit Wahrscheinlichkeitsrestriktionen auf ein endlich dimensionales Optimierungsproblem zurück.

Qu stellt seinen festgelegten geometrischen Pfad  $\tilde{\theta}_e(\tilde{s})$  als Linearkombination von B-Splines mit unveränderlichen Koeffizienten  $\gamma_{k\theta_1}$ ,  $\gamma_{k\theta_2}$  und  $\gamma_{k\theta_3}$  sowie sein zu optimierendes Geschwindigkeitsprofil  $\tilde{\beta}(\tilde{s})$  als Linearkombination von B-Splines mit den veränderlichen Koeffizienten  $\gamma_{k\beta}$  dar.

Bei Punkt-zu-Punkt-Problemen hingegen sind nicht nur die Koeffizienten  $\gamma_{k\beta}$ , sondern auch die Koeffizienten  $\gamma_{k\theta_1}$ ,  $\gamma_{k\theta_2}$  und  $\gamma_{k\theta_3}$  veränderlich. D.h. bei Punkt-zu-Punkt-Problemen nehmen im Gegensatz zu Problemen des festgelegten geometrischen Pfades nicht nur die Komponenten von  $\gamma_\beta$ , sondern auch die von  $\gamma_\theta$ , und damit alle Komponenten des Vektors  $\gamma$  am Optimierungsprozeß teil.

### 7.3 Endlich dimensionales AOSTP

Wie aus Abbildung 7.1, 7.2 und 7.3 hervorgeht, weisen

- am Punkt  $\tilde{s} = 0$  die Funktionen  $B_1(\tilde{s})$ ,  $B'_1(\tilde{s})$ ,  $B'_2(\tilde{s})$ ,  $B''_1(\tilde{s})$ ,  $B''_2(\tilde{s})$  und  $B''_3(\tilde{s})$  Werte verschieden von 0 auf:
  - $B_1(0) = 1$ ,
  - $B'_1(0) = -16$ ,  $B'_2(0) = 16$ ,
  - $B''_1(0) = 192$ ,  $B''_2(0) = -288$ ,  $B''_3(0) = 96$  und
- die Funktionen  $B_{k>1}(\tilde{s})$ ,  $B'_{k>2}(\tilde{s})$  und  $B''_{k>3}(\tilde{s})$  den Wert 0 auf:
  - $B_k(0) = 0$  mit  $k > 1$ ,
  - $B'_k(0) = 0$  mit  $k > 2$ ,
  - $B''_k(0) = 0$  mit  $k > 3$ ,
- am Punkt  $\tilde{s}_f = 1$  die Funktionen  $B_8(\tilde{s})$ ,  $B'_7(\tilde{s})$ ,  $B'_8(\tilde{s})$ ,  $B''_6(\tilde{s})$ ,  $B''_7(\tilde{s})$  und  $B''_8(\tilde{s})$  Werte verschieden von 0 auf:
  - $B_8(1) = 1$ ,
  - $B'_7(1) = 16$ ,  $B'_8(1) = -16$ ,
  - $B''_6(1) = 96$ ,  $B''_7(1) = -288$ ,  $B''_8(1) = 192$  und
- die Funktionen  $B_{k<8}(\tilde{s})$ ,  $B'_{k<7}(\tilde{s})$  und  $B''_{k<6}(\tilde{s})$  den Wert 0 auf:
  - $B_k(1) = 0$  mit  $k < 8$ ,
  - $B'_k(1) = 0$  mit  $k < 7$ ,
  - $B''_k(1) = 0$  mit  $k < 6$ .

Damit lauten die Gleichungsnebenbedingungen (6.63), (6.64), (6.65) und (6.66):

$$\tilde{\theta}_e(0) = \gamma_{1\theta} := \theta_j, \quad (7.3)$$

$$\tilde{\theta}_e(1) = \gamma_{8\theta} := \theta_{f_j}, \quad (7.4)$$

$$\tilde{\theta}'_e(0) \sqrt{\tilde{\beta}(0)} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \left( \gamma_{1\theta} \cdot B'_1(0) + \gamma_{2\theta} \cdot B'_2(0) \right) \cdot \sqrt{\gamma_{1\beta}} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \dot{\theta}_j, \quad (7.5)$$

$$\tilde{\theta}'_e(1) \sqrt{\tilde{\beta}(1)} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \left( \gamma_{7\theta} \cdot B'_7(1) + \gamma_{8\theta} \cdot B'_8(1) \right) \cdot \sqrt{\gamma_{8\beta}} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \dot{\theta}_{f_j}. \quad (7.6)$$

Die Gleichungen (7.3) und (7.4) legen die Koeffizienten  $\gamma_{1\theta}$  und die Koeffizienten  $\gamma_{8\theta}$  fest; (7.5) und (7.6) gehen dadurch in

$$\left( \theta_j \cdot B'_1(0) + \gamma_{2\theta} \cdot B'_2(0) \right) \cdot \sqrt{\gamma_{1\beta}} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \dot{\theta}_j \quad (7.7)$$

$$\left( \gamma_{7\theta} \cdot B'_7(1) + \theta_{f_j} \cdot B'_8(1) \right) \cdot \sqrt{\gamma_{8\beta}} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \dot{\theta}_{f_j} \quad (7.8)$$

über.

Auf der Stufe



- $j = 0$  gilt  $\dot{\theta}_0 = \mathbf{0}$ , da sich der Roboter an seiner Aufnahmeposition in Ruhe befindet,
- $j > 0$  gilt  $\dot{\theta}_j \neq \mathbf{0}$ ,
- auf allen Stufen gilt für die Endgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_{f_j} = \mathbf{0}$ , d.h.

$$\left( \gamma_{7\theta} \cdot B_7'(1) + \theta_{f_j} \cdot B_8'(1) \right) \cdot \sqrt{\gamma_{8\beta}} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} = \dot{\theta}_{f_j} = \mathbf{0} \quad (7.9)$$

Gleichung (7.9) drückt aus, daß die zu erreichende Endgelenkwinkelgeschwindigkeit auf allen Stufen immer Null beträgt, also die Roboterhand zur Ruhe kommt. Die Gleichung (7.9) kann auf zwei Arten erfüllt werden:

- Der Koeffizient  $\gamma_{7\theta}$  wird so gewählt, daß der Term  $\left( \gamma_{7\theta} \cdot B_7'(1) + \theta_{f_j} \cdot B_8'(1) \right)$  zu Null wird oder
- der Koeffizient  $\gamma_{8\beta}$  wird zu Null gesetzt.

Hier wird (7.9) durch die Zuweisung

$$\gamma_{8\beta} := 0 \quad (7.10)$$

erfüllt.

Um zum einen auf allen Stufen stets das gleiche Optimierungsproblem lösen und zum anderen die Gleichungsnebenbedingungen aus dem Optimierungsproblem entfernen zu können, werden folgende Festlegungen getroffen:

- Auf der Stufe  $j = 0$  wird

$$\gamma_{1\beta} := 0.1, \quad (7.11)$$

gesetzt; für die Stufe  $j = 0$  reduziert eine Vorbesetzung von  $\gamma_{1\beta}$  mit 0.1 die Anzahl der benötigten Iterationsschritte zur Auffindung eines Minimums. Den Koeffizienten  $\gamma_{2\theta}$  besetzt die Gleichung (7.13), wobei  $\dot{\theta}_0 = \mathbf{0}$  in Gleichung (7.13) einzusetzen ist. Auf diese Weise wird sichergestellt, daß der Term  $\left( \gamma_{1\theta} \cdot B_1'(0) + \gamma_{2\theta} \cdot B_2'(0) \right)$  der Gleichung (7.5) auf der Stufe  $j = 0$  Null ergibt.

- Auf den Stufen  $j > 0$  wird gemäß Gleichung (6.55)

$$\gamma_{1\beta} = \tilde{\beta}(\tilde{s}_0 = 0) := \tilde{\beta}(s_j) \quad (7.12)$$

gesetzt. Somit läßt sich (7.7) folgendermaßen erfüllen: Aus Termumstellung ergibt sich

$$\gamma_{2\theta} := \left( \frac{\dot{\theta}_j}{\sqrt{\gamma_{1\beta}}} \cdot \frac{s_f - s_j}{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0} - \theta_j \cdot B_1'(0) \right) \cdot \frac{1}{B_2'(0)}. \quad (7.13)$$

Einerseits stehen aufgrund obiger Festlegungen  $\gamma_{1\theta}$ ,  $\gamma_{2\theta}$ ,  $\gamma_{8\theta}$ ,  $\gamma_{1\beta}$  und  $\gamma_{8\beta}$  als Optimierungsvariablen nicht mehr zur Verfügung; andererseits **entfallen** durch die Zuweisungen (7.3), (7.4), (7.10), (7.11) und (7.13) die **Gleichungsnebenbedingungen** (6.63) bis (6.66).

Der Vektor  $\tilde{\gamma}$  definiert sich folgendermaßen:

$$\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{21})^T = \begin{pmatrix} (\gamma_{2\beta}, \dots, \gamma_{7\beta})^T \\ (\gamma_{3\theta_1}, \dots, \gamma_{7\theta_1})^T \\ (\gamma_{3\theta_2}, \dots, \gamma_{7\theta_2})^T \\ (\gamma_{3\theta_3}, \dots, \gamma_{7\theta_3})^T \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

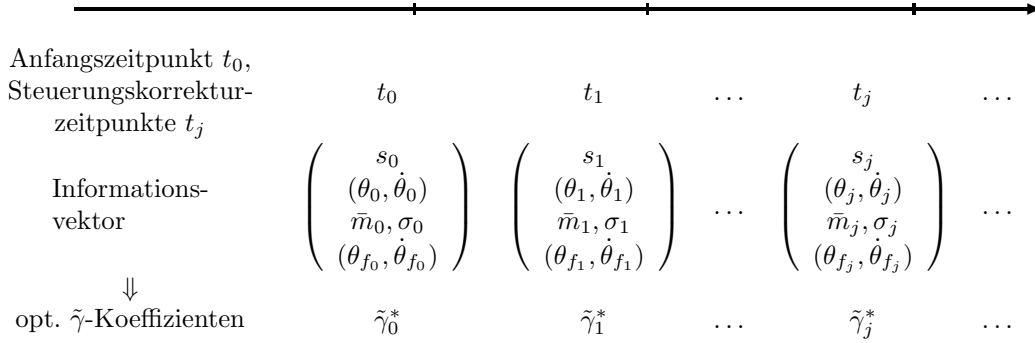


Abbildung 7.4: Endlich-dimensionales AOSTP

*Hinweis:*

Die erste Zeile der rechten Seite von (7.14) weist 6 Komponenten, die zweite bis vierte jeweils 5 Komponenten auf. Somit hat die rechte Seite von (7.14) 21 Komponenten.

AOSTP lautet jetzt:

*Bedingter Erwartungswert der Zielfunktion:*

$$\begin{aligned}
\min_{\tilde{\gamma}} F(\tilde{\gamma}) &= \min_{\tilde{\gamma}} \int_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}_f} \left( k_t + k_e \left( \left( \tau_{10}(\tilde{\gamma}) + \bar{m}_j \tau_{11}(\tilde{\gamma}) \right)^2 + \left( \tau_{20}(\tilde{\gamma}) + \bar{m}_j \tau_{21}(\tilde{\gamma}) \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \tau_{30}(\tilde{\gamma}) + \bar{m}_j \tau_{31}(\tilde{\gamma}) \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \tau_{11}^2(\tilde{\gamma}) + \tau_{21}^2(\tilde{\gamma}) + \tau_{31}^2(\tilde{\gamma}) \right) \sigma_j^2 \right) \frac{s_f - s_j}{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0} \frac{d\tilde{s}}{\sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s}, \tilde{\gamma})}} \quad (7.15)
\end{aligned}$$

*Ungleichungsnebenbedingungen:*

$$\left( \begin{array}{l} \tau_{min_i} \leq \tau_{i0}(\tilde{s}, \tilde{\gamma}) - m_{i1} \cdot \tau_{i1}(\tilde{s}, \tilde{\gamma}) \\ \tau_{i0}(\tilde{s}, \tilde{\gamma}) + m_{i2} \cdot \tau_{i1}(\tilde{s}, \tilde{\gamma}) \leq \tau_{max_i} \\ \theta_{min_i} \leq \tilde{\theta}_{e_i}(\tilde{s}, \tilde{\gamma}, \theta_i) \leq \theta_{max_i} \\ \dot{\theta}_{min_i} \leq \tilde{\theta}'_{e_i}(\tilde{s}, \tilde{\gamma}, \theta_i) \cdot \sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s}, \tilde{\gamma}, \beta)} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} \leq \dot{\theta}_{max_i} \\ \tilde{\beta}(\tilde{s}, \tilde{\gamma}, \beta) \geq 0 \end{array} \right)_{\tilde{s}_0 \leq \tilde{s} \leq \tilde{s}_f, i=1,2,3} \quad (7.16)$$

Wird die Einhaltung der Nebenbedingungen nicht mehr im gesamten Intervall  $[\tilde{s}_0 = 0, \tilde{s}_f = 1]$ , sondern nur noch an den  $n_p$ -Punkten <sup>4</sup>  $\tilde{s}_J \in [\tilde{s}_0 = 0, \tilde{s}_f = 1]$  mit  $J \in \{1, \dots, n_p\}$  verlangt, lauten die Ungleichungsnebenbedingungen:

$$\left( \begin{array}{l} \tau_{min_i} \leq \tau_{i0}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) - m_{i1} \cdot \tau_{i1}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) \\ \tau_{i0}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) + m_{i2} \cdot \tau_{i1}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) \leq \tau_{max_i} \\ \theta_{min_i} \leq \tilde{\theta}_{e_i}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}, \theta_i) \leq \theta_{max_i} \\ \dot{\theta}_{min_i} \leq \tilde{\theta}'_{e_i}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}, \theta_i) \cdot \sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}, \beta)} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} \leq \dot{\theta}_{max_i} \\ \tilde{\beta}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}, \beta) \geq 0 \end{array} \right)_{i=1,2,3; J=1, \dots, n_p}$$

<sup>4</sup>hier verwendet:  $n_p = 200$

(7.17)

*Hinweis:*

Die Zeilen 1 bis 4 von (7.17) weisen jeweils drei Komponenten, die fünfte Zeile nur eine auf. Infolgedessen hat (7.17) 13 Komponenten. Allerdings kommt jede der Komponenten  $n_p = 200$ -mal vor.

Somit AOSTP weist  $13 \cdot 200 = 2600$  Einzel- und Doppelgleichungen auf. Diese werden für das Verfahren der SQP durch Zerlegen der Winkel-Doppelgleichungen<sup>5</sup> und der Winkelgeschwindigkeits-Doppelgleichungen<sup>6</sup> in je zwei UNB in die  $19 \cdot 200 = 3800$  Komponenten umfassende Vektorungleichung  $\mathbf{g} \leq \mathbf{0}$  umgewandelt<sup>7</sup>. Damit geht AOSTP, dargestellt durch (7.15) und (7.16), ohne Veränderung der Zielfunktion (7.15) über in:

*Bedingter Erwartungswert der Zielfunktion:*

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\gamma}} F(\tilde{\gamma}) &= \min_{\tilde{\gamma}} \int_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}_f} \left( k_t + k_e \left( \left( \tau_{10}(\tilde{\gamma}) + \bar{m}_j \tau_{11}(\tilde{\gamma}) \right)^2 + \left( \tau_{20}(\tilde{\gamma}) + \bar{m}_j \tau_{21}(\tilde{\gamma}) \right)^2 \right. \right. \\ &+ \left. \left( \tau_{30}(\tilde{\gamma}) + \bar{m}_j \tau_{31}(\tilde{\gamma}) \right)^2 \right. \\ &\left. \left. + \left( \tau_{11}^2(\tilde{\gamma}) + \tau_{21}^2(\tilde{\gamma}) + \tau_{31}^2(\tilde{\gamma}) \right) \sigma_j^2 \right) \frac{s_f - s_j}{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0} \frac{d\tilde{s}}{\sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s}, \tilde{\gamma})}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

*Ungleichungsnebenbedingungen:*

$$\mathbf{g}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) = \begin{pmatrix} \tau_{min_i} - \tau_{i0}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) - m_{i1} \cdot \tau_{i1}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) \\ \tau_{i0}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) + m_{i2} \cdot \tau_{i1}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}) - \tau_{max_i} \\ \theta_{min_i} - \tilde{\theta}_{e_i}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}_{\theta_i}) \\ \tilde{\theta}_{e_i}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}_{\theta_i}) - \theta_{max_i} \\ \dot{\theta}_{min_i} - \tilde{\theta}'_{e_i}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}_{\theta_i}) \cdot \sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}_{\beta})} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} \\ \tilde{\theta}'_{e_i}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}_{\theta_i}) \cdot \sqrt{\tilde{\beta}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}_{\beta})} \cdot \frac{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0}{s_f - s_j} - \dot{\theta}_{max_i} \\ -\tilde{\beta}(\tilde{s}_J, \tilde{\gamma}_{\beta}) \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad \begin{matrix} i=1,2,3; J=1,\dots,n_p \end{matrix} \quad (7.19)$$

Durch Einsetzen der Lösung  $\tilde{\gamma}^*$  in die Gleichung (7.1) erhält man  $\tilde{\theta}_e^*(\tilde{s})$  und  $\tilde{\beta}^*(\tilde{s})$ .

Aus (6.55) und (6.56) ergibt sich dann  $\tilde{\theta}_e^*(s)$  und  $\tilde{\beta}^*(s)$ ,  $s_j \leq s \leq s_f$ . Aus (6.44) und (6.45) folgt dann die Parametertransformation  $s = s(t)$ .

Setzt man  $\tilde{\theta}_e^*(\tilde{s})$ ,  $\tilde{\beta}^*(\tilde{s})$  und  $s(t)$  in die Gleichungen (6.49), (6.50) und (6.51) ein, ergeben sich die optimalen Führungsgrößen  $\bar{\theta}^*(t)$ ,  $\dot{\theta}^*(t)$  und  $\ddot{\theta}^*(t)$ .

Durch folgende Zuweisungen sind die optimalen Referenztrajektorien der Szenarien 1 bis 7 Lösungen des AOSTP:

- die deterministischen Referenztrajektorien  $\theta_0$  (Szenario 1) und die für die Echtzeitapproximation der deterministischen Referenztrajektorien  $\theta_0^g$  benötigten Trajektorien (Szenario 2):

<sup>5</sup>Zeile 3 von (7.17)

<sup>6</sup>Zeile 4 von (7.17)

<sup>7</sup>Durch Zerlegen der beiden v.g. Doppelgleichungen treten  $6 \cdot 200$  Ungleichungen hinzu.

- $j := 0$ ;
  - $\bar{m}_0 := m_0$  und  $\sigma_0 := 0$ ; daraus folgt  $m_{i1} = m_{i2} := m_0$ ;
  - $\theta_0$  ist die vom System Kofferzuführung bereitgestellte gleichbleibende Anfangsposition des WZP;
  - $\dot{\theta}_0 := \mathbf{0}$ ;
  - $\theta_{f_0} := \theta_f$ ;  $\theta_f$  ist die vom System Kofferabtransport im regulären Betrieb bereitgestellte gleichbleibende Endposition des WZP.
- die robust-optimalen Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_0$  (Szenario 3) und die für die Echtzeitapproximation der robust-optimalen Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_0^g$  erforderlichen Trajektorien (Szenario 4):
    - $j := 0$ ;
    - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) > 0$ :
      - $m_{i1} := \bar{m}_0 - 3 \cdot \sigma_0$
      - $m_{i2} := \bar{m}_0 + 3 \cdot \sigma_0$ ;
    - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) < 0$ :
      - $m_{i1} := \bar{m}_0 + 3 \cdot \sigma_0$
      - $m_{i2} := \bar{m}_0 - 3 \cdot \sigma_0$ ;
    - $\theta_0$ ;
    - $\dot{\theta}_0 := \mathbf{0}$ ;
    - $\theta_{f_0} := \theta_f$ .
  - die Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{0R}$  (Szenarien 5 und 6):
    - $j := 0$ ;
    - $\bar{m}_0 := 7.5 \text{ kg}$  und  $\sigma_0 := 2.5 \text{ kg}$
    - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) > 0$ :
      - $m_{i1} := \bar{m}_0 - 3 \cdot \sigma_0$
      - $m_{i2} := \bar{m}_0 + 3 \cdot \sigma_0$ ;
    - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) < 0$ :
      - $m_{i1} := \bar{m}_0 + 3 \cdot \sigma_0$
      - $m_{i2} := \bar{m}_0 - 3 \cdot \sigma_0$ ;
    - $\theta_0$ ;
    - $\dot{\theta}_0 := \mathbf{0}$ ;
    - $\theta_{f_0} := \theta_f$ .
  - die zur Echtzeitapproximation der besser angepaßten Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_1^g$  benötigten Trajektorien (Szenario 5):
    - $j := 1$ ;
    - $\bar{m}_1 := \hat{m}_1$  und  $\sigma_1 := \hat{\sigma}_1$ ;
    - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) > 0$ :
      - $m_{i1} := \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1$
      - $m_{i2} := \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1$ ;
    - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) < 0$ :
      - $m_{i1} := \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1$
      - $m_{i2} := \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1$ ;
    - die Position  $\theta_1$  und die Geschwindigkeit  $\dot{\theta}_1$  am Schaltzeitpunkt  $t_1$  liefern die Meßglieder des Roboters;

- $\theta_{f_1} := \theta_f$ .
- die zur Echtzeitapproximation der Notfalltrajektorien  $\bar{\theta}_{1N}^g$  benötigten Trajektorien (Szenario 6):
  - $j := 1$ ;
  - $\bar{m}_1 := 7.5 \text{ kg}$  und  $\sigma_1 := 2.5 \text{ kg}$ ;
  - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) > 0$ :
    - $m_{i1} := \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1$
    - $m_{i2} := \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1$ ;
  - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) < 0$ :
    - $m_{i1} := \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1$
    - $m_{i2} := \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1$ ;
  - $\theta_1$  und  $\dot{\theta}_1$  am Schaltzeitpunkt  $t_1$ ;
  - die anzufahrende Endposition  $\theta_{f_1}$  liefert das maschinelle Sichtsystem.
- die zur Echtzeitapproximation der Notfalltrajektorien  $\bar{\theta}_{0N}^g$  benötigten Trajektorien (Szenario 7):
  - $j := 0$ ;
  - $\bar{m}_0 := 7.5 \text{ kg}$  und  $\sigma_0 := 2.5 \text{ kg}$ ;
  - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) > 0$ :
    - $m_{i1} := \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1$
    - $m_{i2} := \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1$ ;
  - für  $\tau_{i1}(\bar{s}_J, \tilde{\gamma}) < 0$ :
    - $m_{i1} := \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1$
    - $m_{i2} := \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1$ ;
  - $\theta_0$ ;
  - $\dot{\theta}_0 := \mathbf{0}$ ;
  - die anzufahrende Endposition  $\theta_{f_0}$  liefert das maschinelle Sichtsystem.

Die grundlegende Funktionsweise des Verfahren der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) wird im Anhang dargestellt.

## Kapitel 8

# Datenbasen, Singularitäten, Echtzeitapproximation

Die Minimumsuche mit dem in Unterkapitel 13.4 vorgestellten Verfahren der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) kann durch die heute zur Verfügung stehenden Rechner **nicht** in Echtzeit abgearbeitet werden, d.h. die Referenztrajektorie

- $\theta_0 = \theta_0(t, \gamma^*(m))$  (Szenario 2),
- $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_0(t, \gamma^*(\bar{m}_0, \sigma_0))$  (Szenario 4),
- $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(t, \gamma^*(\bar{m}_1, \sigma_1))$  (Szenario 5),
- $\bar{\theta}_{1N} = \bar{\theta}_1(t, \gamma^*(\theta_f))$  (Szenario 6) bzw.
- $\bar{\theta}_{0N} = \bar{\theta}_0(t, \gamma^*(\theta_f))$  (Szenario 7)

steht nicht rechtzeitig zur Verfügung. Im Gegensatz zu den Szenarien 2, 4, 5, 6 und 7 stellen die Szenarien 1 und 3 an die Minimumsuche keine Echtzeitanforderung. Somit werden in diesem Kapitel die Szenarien 1 und 3 nicht weiter behandelt.

Es ist jedoch möglich, in Echtzeit für einen **effektiven** Eingangsvektor in einer vorab berechneten Datenbasis das den effektiven Eingangsvektor enthaltene Gitterintervall aufzufinden und

- die zu einem der Gitterpunkte gehörende vorab berechnete Trajektorie oder
- eine um diese entwickelte Taylorreihe

als **approximierte** Referenztrajektorie

- $\theta_0^g = \theta_0(t, \gamma^g(m))$  (Szenario 2),

- $\bar{\theta}_0^g = \bar{\theta}_0 \left( t, \gamma^g(\bar{m}_0, \sigma_0) \right)$  (Szenario 4),
- $\bar{\theta}_1^g = \bar{\theta}_1 \left( t, \gamma^g(\bar{m}_1, \sigma_1) \right)$  (Szenario 5),
- $\bar{\theta}_{1N}^g = \bar{\theta}_1 \left( t, \gamma^g(\theta_f) \right)$  (Szenario 6) bzw.
- $\bar{\theta}_{0N}^g = \bar{\theta}_0 \left( t, \gamma^g(\theta_f) \right)$  (Szenario 7)

anstelle der zuvor aufgeführten Referenztrajektorie zu verwenden.

Jede der hier verwendeten Datenbasen besteht aus einem äquidistanten Gitter. Die Koordinaten des Gitterpunktes sind die Komponenten des Eingangsvektors  $\mathbf{p}_E$ . Jedem Gitterpunkt ist das folgende, dreikomponentige Datenfeld zugeordnet:

- die zum Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  gehörende Lösung  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E)$  (=Vektor der optimalen Koeffizienten),
- die Jacobi-Matrix der ersten Ableitungen von  $\tilde{\gamma}^*$  nach den Komponenten des Eingangsvektors  $\mathbf{p}_E$ :

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}^*}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E), \quad (8.1)$$

- der Vektor  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{p}_E)$ . Dieser Vektor zeigt an, ob im Raum zwischen zwei Gitterpunkten eine Approximation mit niedrigem Fehler, d.h. geringen Abweichungen, möglich ist.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden an den **Gitterpunkten** für die optimalen Koeffizienten  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E)$  im weiteren Text folgende Bezeichnungen verwendet:

- Szenario 2:  $\tilde{\gamma}_k^\eta := \tilde{\gamma}_k^*(m^\eta)$ ,
- Szenario 4:  $\tilde{\gamma}_k^{\eta^\iota} := \tilde{\gamma}_k^*(\bar{m}_0^\eta, \sigma_0^\iota)$ ,
- Szenario 5:  $\tilde{\gamma}_k^{\eta^\iota} := \tilde{\gamma}_k^*(\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota)$  und
- Szenario 6 und 7:  $\tilde{\gamma}_k^{\eta^\iota\zeta} := \tilde{\gamma}_k^*(\theta_f^{\eta^\iota\zeta})$ .

Zwischen einigen benachbarten Gitterpunkten sind die Differenzen der  $\tilde{\gamma}$ -Koeffizienten derart groß, daß die Verbindungslinien scheinbar parallel zur y-Achse verlaufen (Siehe Abbildung 8.3) und auf den Betrachter wie die Sprungfunktion  $1(t)$  wirken. Eine solche Stelle wird hier als **numerische Singularität**, der Raum zwischen den beteiligten Gitterpunkten als **numerisches Singularitätsintervall** bezeichnet, da in diesem eine Approximation mit niedrigem Fehler **nicht** möglich ist.

*Hinweis:*

- *Zwischen dem Auftreten der Singularitäten und der Art des Gitters gibt es keinen Zusammenhang.*
- *Die hier verwendeten äquidistanten Gitter werden benutzt, um das Vorhandensein der Singularitäten aufzuzeigen und deren Zustandekommen grundsätzlich zu untersuchen.*

**Definition der numerischen Singularität und des zugehörigen numerischen Singularitätsintervalls:**

Ein (Gitter-) Intervall eines der Szenarien 2, 4, 5, 6 und 7<sup>1</sup> enthält genau dann eine numerische Singularität und ist damit ein numerisches Singularitätsintervall, wenn das folgende **Singularitätskriterium** verletzt ist:

Es gibt zwei Möglichkeiten in einer aus einem äquidistanten Gitter bestehenden Datenbasis Singularitäten herauszufiltern:

- *auf Basis des absoluten Anstiegs:*

Die Beträge der Differenzenquotienten der optimalen Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k^*$  an den Gitterpunkte  $m^\eta, m^{\eta+1}$  liegen unterhalb des Wertes  $10 = \tan 84.29^\circ$  (Siehe Abbildung 8.1):,

$$\tan \alpha_k^\eta = \left| \frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} \right| \leq 10, \quad k = 1, \dots, K, \quad (8.2)$$

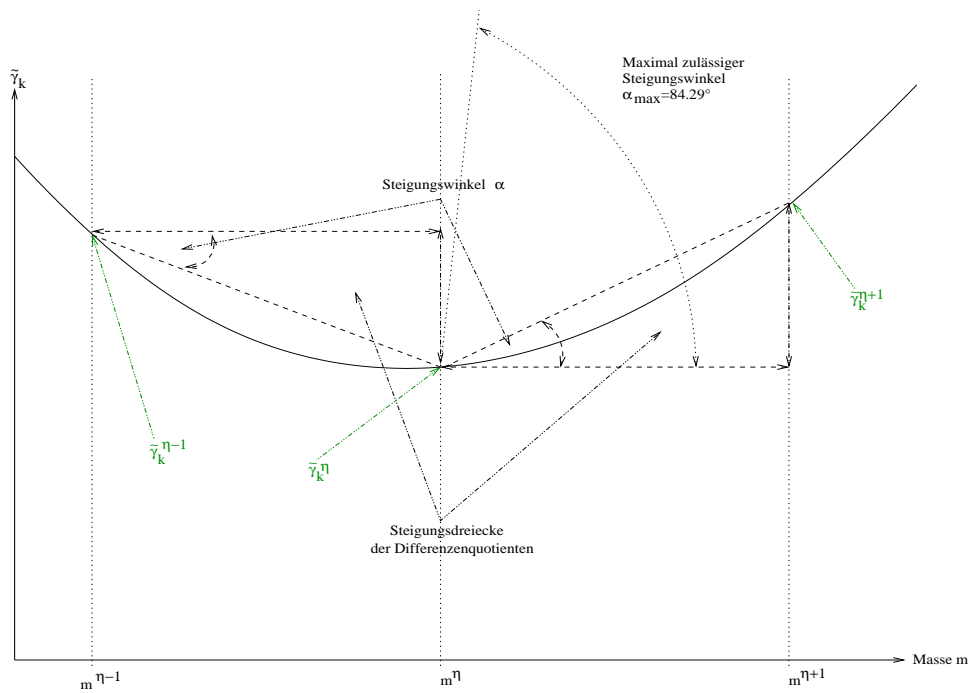


Abbildung 8.1: Steigungsdreiecke der Datenbasis des Szenarios 2

- *auf Basis des relativen Anstiegs:*

Die Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k^{\eta+1}$  an der Stelle  $m^{\eta+1}$  unterscheiden sich gemäß Formel (8.3) um höchstens 5% von ihren Nachbarn  $\tilde{\gamma}_k^\eta$  an der Stelle  $m^\eta$ :

$$100\% \cdot \left| \frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{\tilde{\gamma}_k^\eta} \right| \leq 5\%. \quad (8.3)$$

<sup>1</sup>Die nicht echtzeitfähigen Szenarien 1 und 3 approximieren ihre Trajektorien nicht, sondern berechnen diese mit SQP. Das Singularitätskriterium findet somit auf die Szenarien 1 und 3 keine Anwendung.



Aus

$$100\% \cdot \left| \frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{\tilde{\gamma}_k^\eta} \right| = 100\% \cdot \left| \frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} \cdot \frac{m^{\eta+1} - m^\eta}{\tilde{\gamma}_k^\eta} \right| \quad (8.4)$$

ergibt sich

$$100\% \cdot \left| \frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} \right| \cdot \left| \frac{m^{\eta+1} - m^\eta}{\tilde{\gamma}_k^\eta} \right| \leq 5\% \quad (8.5)$$

und daraus

$$\left| \frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} \right| \leq \frac{0.05}{m^{\eta+1} - m^\eta} \cdot |\tilde{\gamma}_k^\eta| \quad (8.6)$$

Somit lassen sich (8.2) und (8.6) nach [33] zum **Singularitätskriterium** zusammenfassen:

$$\left| \frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} \right| \leq \min \left( 10, \frac{0.05}{m^{\eta+1} - m^\eta} \cdot |\tilde{\gamma}_k^\eta| \right). \quad (8.7)$$

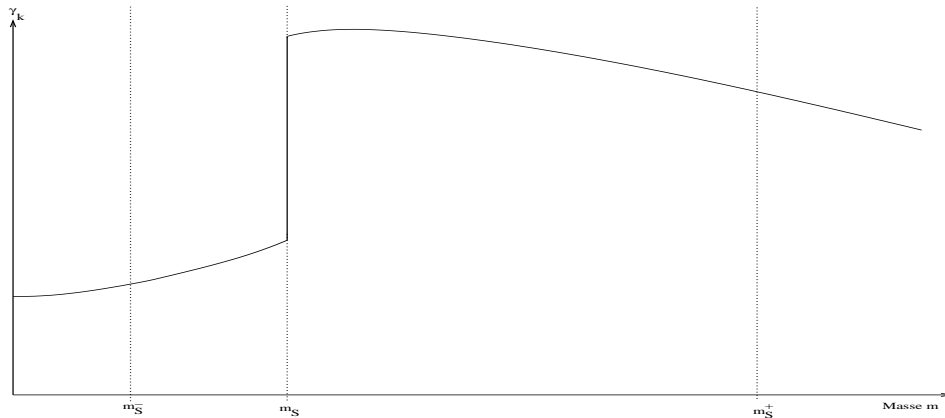


Abbildung 8.2: Singularitätsstelle  $m_s$  mit benachbarten Gitterpunkten  $m_s^-$  und  $m_s^+$

Da die Optimallösungen des Ersatzproblems (7.18) und (7.19) sich nur numerisch bestimmen lassen und infolgedessen nur an diskreten Gitterpunkten vorliegen, kann man nicht mit letzter Sicherheit feststellen,

- ob es sich bei den vorgenannten Anstiegen oder Abfällen um analytische oder effektive Singularitäten (Sprünge, Knickstellen) handelt und
- an welcher Stelle zwischen zwei Gitterpunkten sich diese analytischen Singularitäten genau befinden (Siehe Abbildung 8.2).

Der Abschnitt 8.1 zeigt die Erzeugung der Datenbasen für die jeweiligen Szenarien. Der Abschnitt 8.2 untersucht die Eigenschaften und Ursachen der numerische Singularitäten. Der Abschnitt 8.3

erläutert die Durchführung der Echtzeitapproximation bei Vorliegen von numerischen Singularitäten in der Datenbasis.

**Konventionelle Neuronale Netze** können gemäß des **Existenzsatzes der Neuronalen Netze** nur stetige und stetig differenzierbare Funktionen approximieren<sup>2</sup>. Numerische Singularitäten verursachen unakzeptabel hohe Approximationsfehler. Daher werden numerische Singularitäten bei einigen Autoren als Ausreißer [1] eingestuft und aus dem Trainingsdatensatz entfernt. Infolgedessen findet zwar im Bereich der Singularität eine Approximation statt, ohne jedoch den Wert des Ausreißers zu berücksichtigen. Da in dieser Arbeit jedoch die numerischen Singularitäten Berücksichtigung finden, werden hier keine Neuronale Netze zur Echtzeitapproximation eingesetzt.

Alternativ dazu faßt

- diese Arbeit die numerischen Singularitäten **nicht als Ausreißer** auf,
- sondern vergleicht im Abschnitt 8.2, angeregt durch [6], die Mengen der aktiven bzw. inaktiven UNB der Optimallösungen der beiden das jeweilige numerische Singularitätsintervall begrenzenden Gitterpunkte.  
Dieser Vergleich ergibt, daß
  - mindestens 0.8% der UNB ihren Status **beim Überqueren  $m_s^- \rightarrow m_s^+$  einer Singularitätsstelle  $m_s$**  ändern.

Die grafische Darstellung der numerischen Singularitätsintervalle erfolgt im Abschnitt 8.2.

Das Vorhandensein der Statuswechsel ist ein Indiz, jedoch noch kein Beweis dafür, daß die Veränderungen innerhalb der Mengen der aktiven und inaktiven UNB die Singularitäten verursachen.

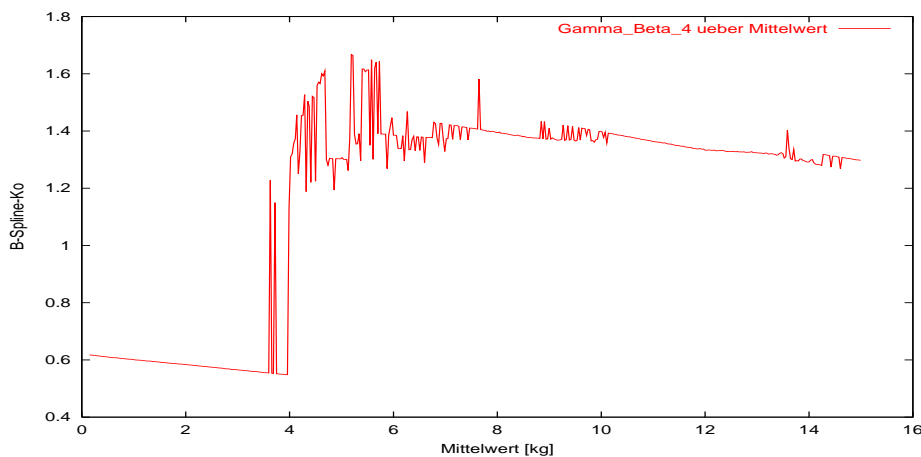


Abbildung 8.3: Szenario 5 -  $\gamma_{\beta_4}^*$  in Abhängigkeit von  $\bar{m}_1$  bei  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$  für  $k_t = 0.9$ ,  $k_e = 0.1$ ,  $t_0 = 0.0 \text{ sec}$ ,  $t_1 = 0.2 \text{ sec}$  und  $t_f = 1.35 \text{ sec}$

Gemäß Abbildung 8.3 weist das ab dem Korrekturzeitpunkt  $t_1$  zur Stufe 1<sup>3</sup> gehörige Szenario 5 für den Koeffizienten  $\gamma_{\beta_4}^*$  sehr viele Singularitäten in Richtung des Mittelwertes  $\bar{m}_1$  auf; die Stufe 0<sup>4</sup> hingegen zeigt gemäß Abbildung 8.4 in Richtung der Standardabweichung  $\sigma_0$  zwar eine deutliche Abhängigkeit von  $\sigma_0$ , jedoch keinerlei Singularitäten.

<sup>2</sup>Neuronale Netze zählen zu den Echtzeitapproximationsverfahren. Zuweilen werden Neuronale Netze irrtümlicherweise den Optimierungsverfahren zugeordnet. Dieser Irrtum beruht auf der Tatsache, daß die Trainingsalgorithmen der Neuronale Netze eine Optimierungsaufgabe lösen.

<sup>3</sup>Siehe Unterabschnitt 6.2.2

<sup>4</sup>Siehe Unterabschnitt 6.2.2

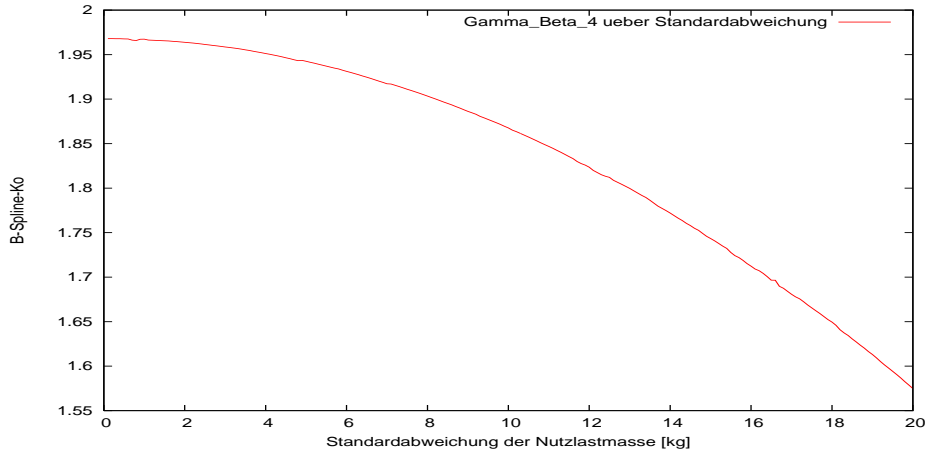


Abbildung 8.4: Koeffizient  $\gamma_{\beta_4}^*$  in Abhängigkeit von  $\sigma_0$  bei  $\bar{m}_0 = 10.0 \text{ kg}$  für  $k_t = 0.9$ ,  $k_e = 0.1$ ,  $t_0 = 0.0 \text{ sec}$  und  $t_f = 1.35 \text{ sec}$

**Außerhalb** der Singularitätsintervalle stehen zwei Verfahren für die Approximation zur Verfügung:

- **Approximationsverfahren 0-ter Ordnung** sowie das
- **Approximationsverfahren 1-ter Ordnung.**

Mit Hilfe des folgenden, am Beispiel des eindimensionalen Falles *veränderliche Nutzlastmasse* erläuterten **Entscheidungskriteriums für die Art der Approximation** wird festgelegt [32], ob ein Koeffizient  $\tilde{\gamma}_k^*(m)$ ,  $k = 1, \dots, K$  innerhalb eines Gitterintervalls  $m \in \{m^\eta, m^{\eta+1}\}$  mit dem Verfahren 0-ter oder dem Verfahren 1-ter Ordnung approximiert wird, wobei  $\tilde{\gamma}_k^g(m)$  den genäherten Koeffizienten bezeichnet.

Während das **Entscheidungskriterium für die Art der Approximation** festlegt, ob in einem Intervall ein Koeffizient  $\tilde{\gamma}_k^*$  nach dem Verfahren 0-ter oder 1-ter Ordnung approximiert wird und nur in stetigen Bereichen zur Anwendung kommt, sucht das zuvor vorgestellte **Singularitätskriterium** (8.7) nach **numerischen Singularitätsintervallen**, in denen dann statt des Approximationsverfahrens eine Ausweichstrategie verwendet wird (Siehe Abbildung 8.6 und Abschnitt 8.3.6).

- Das Approximationsverfahren 0-ter Ordnung lautet:

$$\tilde{\gamma}_k^g(m) := \tilde{\gamma}_k^\eta, \quad m^\eta \leq m \leq m^{\eta+1} \quad (8.8)$$

- Das Approximationsverfahren 1-ter Ordnung lautet:

$$\tilde{\gamma}_k^g(m) := \left( \tilde{\gamma}_k^\eta + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} \cdot (m - m^\eta) \right), \quad m^\eta \leq m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.9)$$

- Der Approximationsfehler des Verfahrens 0-ter Ordnung lautet (Siehe auch Abbildung 8.5):

$$e_0(m) := \tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^g(m) = \tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^\eta, \quad m^\eta \leq m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.10)$$

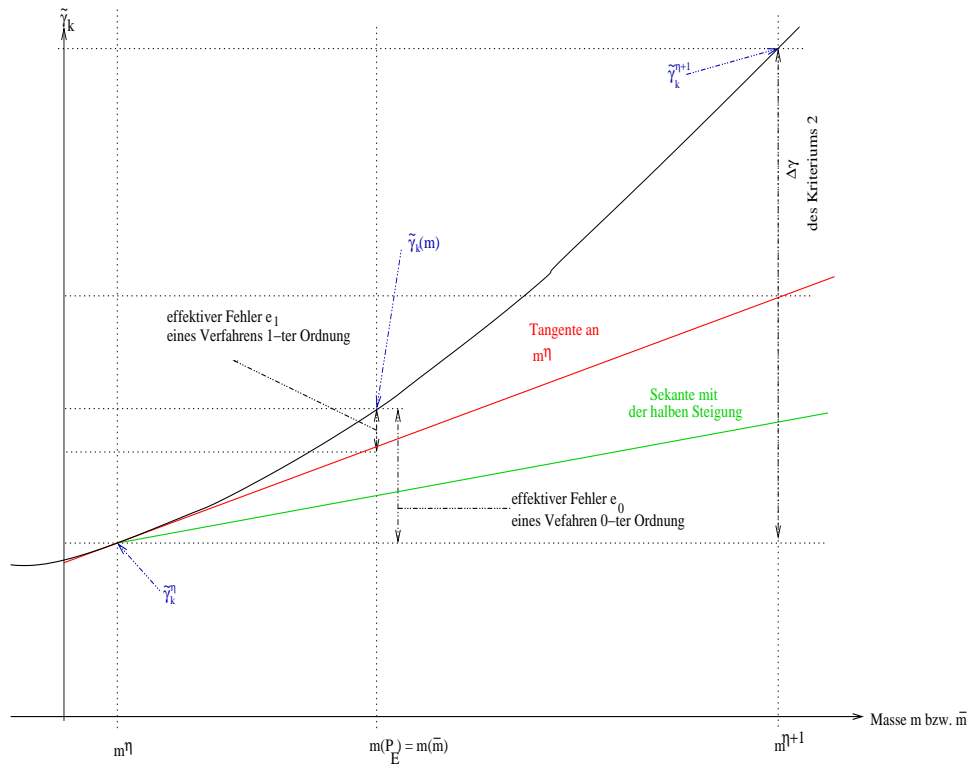


Abbildung 8.5: Approximationsmethoden und -fehler in der Datenbasis des Szenarios 2

- Der Approximationsfehler des Verfahrens 1-ter Ordnung lautet (Siehe auch Abbildung 8.5):

$$e_1(m) := \tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(m) - \left( \tilde{\gamma}_k^\eta + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} \cdot (m - m^\eta) \right), \quad m^\eta \leq m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.11)$$

Die im folgenden aufgeführten Formeln (8.13) bis (8.20) leiten her, unter welchen Umständen der Fehler 1-ter Ordnung  $e_1(m)$  geringer ist als der 0-ten Ordnung  $e_0(m)$ :

$$|e_1(m)| < |e_0(m)|, \quad m^\eta \leq m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.12)$$

Nach (8.10) und (8.11) ist

$$\begin{aligned} e_1(m) &= \tilde{\gamma}_k^*(m) - \left( \tilde{\gamma}_k^\eta + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} \cdot (m - m^\eta) \right) \\ &= \tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^\eta - \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} \cdot (m - m^\eta) \\ &= e_0(m) - b(m) \end{aligned} \quad (8.13)$$

mit

$$b(m) = \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} \cdot (m - m^\eta). \quad (8.14)$$

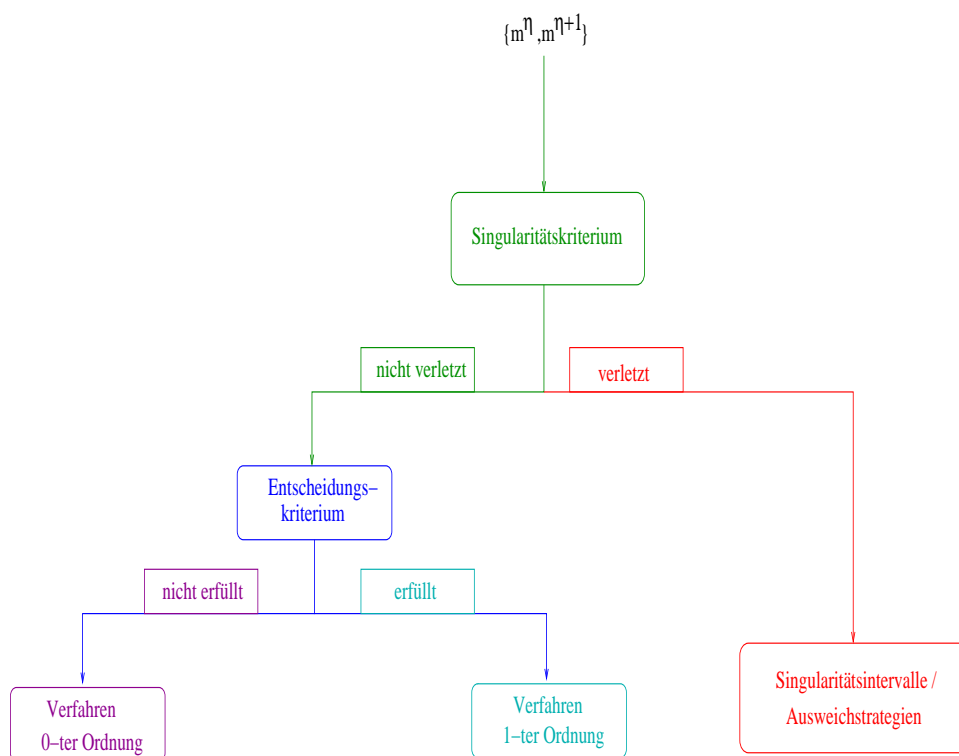


Abbildung 8.6: Abarbeitungsreihenfolge für Singularitäts- und Entscheidungskriterium

Damit ist (8.12) gleichwertig mit der Bedingung

$$|e_0(m) - b(m)| < |e_0(m)|, \quad m^n \leq m \leq m^{n+1}. \quad (8.15)$$

Durch Quadrieren von (8.15) erhält man die äquivalente Bedingung

$$\left(e_0(m) - b(m)\right)^2 < e_0^2(m). \quad (8.16)$$

Dies bedeutet aber

$$e_0^2(m) - 2 \cdot e_0(m) \cdot b(m) + b^2(m) < e_0^2(m) \quad (8.17)$$

und nach Termumstellung

$$b^2(m) < 2 \cdot e_0(m) \cdot b(m), \quad m^n \leq m \leq m^{n+1}. \quad (8.18)$$

Durch Einsetzen der rechten Seite von (8.14) in (8.18) folgt die gleichwertige Bedingung

$$\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m}\right)^2 \cdot (m - m^n)^2 < 2 \cdot e_0(m) \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} \cdot (m - m^n), \quad m^n \leq m \leq m^{n+1}. \quad (8.19)$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m}\right)^2 \cdot (m - m^\eta) < 2 \cdot e_0(m) \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} = 2 \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} \cdot \left(\tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^\eta\right), \quad m^\eta < m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.20)$$

Offensichtlich sind nun drei Fälle für  $|e_1(m)| < |e_0(m)|$  zu unterscheiden:

- Fall 1:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} = 0$   
In diesem Fall hat die Bedingung 8.20 keine Lösung. Es kommt das Verfahren 0-ter Ordnung zum Einsatz.
- Fall 2:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} > 0$  (Siehe Abbildung 8.7)  
In diesem Fall gilt

$$\frac{\tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m - m^\eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} > 0, \quad m^\eta < m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.21)$$

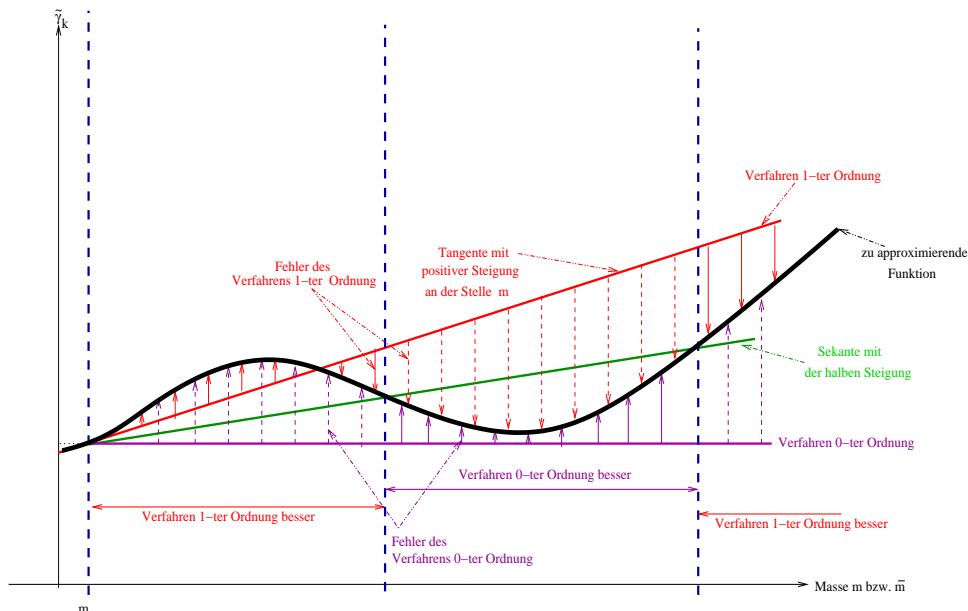


Abbildung 8.7: Fall 2 - Fehler der Approximationsverfahren 0-ter und 1-ter Ordnung bei positiver Steigung

- Fall 3:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} < 0$  (Siehe Abbildung 8.8)  
In diesem Fall gilt

$$\frac{\tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m - m^\eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} < 0, \quad m^\eta < m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.22)$$

Um Fehlentscheidungen aufgrund numerischer Ungenauigkeiten zu vermeiden, wird den Ungleichungen (8.21) und (8.22) auf der rechten Seite der Summand  $\epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m}$  hinzugefügt. Damit lauten die Fälle 1 bis 3:

- Fall 1:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} = 0$   
In diesem Fall hat die Bedingung 8.20 keine Lösung. Es kommt das Verfahren 0-ter Ordnung zum Einsatz.

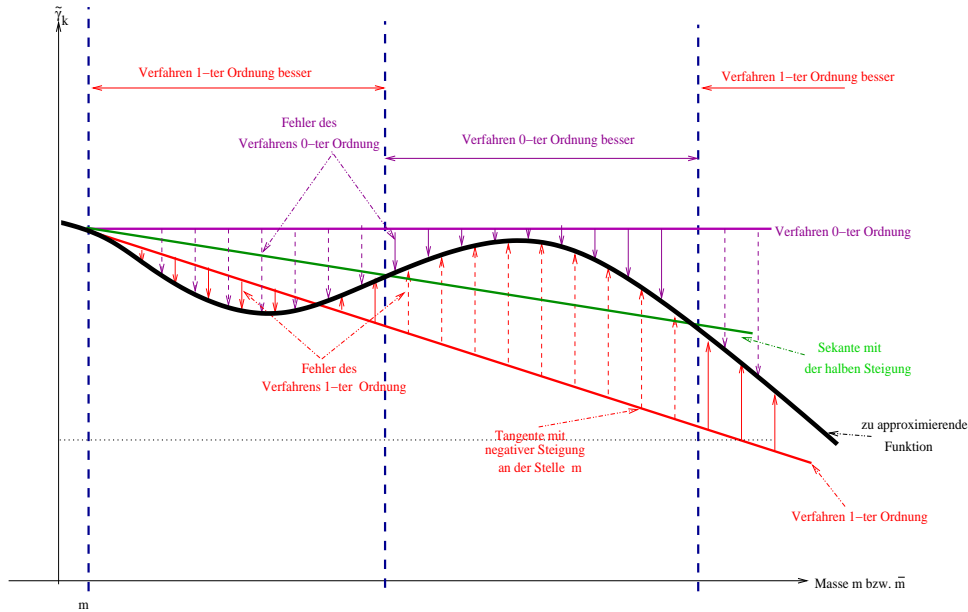


Abbildung 8.8: Fall 3 - Fehler der Approximationsverfahren 0-ter und 1-ter Ordnung bei negativer Steigung

- Fall 2:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} > 0$   
In diesem Fall gilt

$$\frac{\tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m - m^\eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} > \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m}, \quad m^\eta < m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.23)$$

- Fall 3:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} < 0$   
In diesem Fall gilt

$$\frac{\tilde{\gamma}_k^*(m) - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m - m^\eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} < \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m}, \quad m^\eta < m \leq m^{\eta+1}. \quad (8.24)$$

#### Entscheidungskriterium für die Art der Approximation:

Die Fälle (8.23) und (8.24) sind im ganzen Intervall  $(m^\eta, m^{\eta+1})$  zu überprüfen. Nun liegen die Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  aber nur an den Stellen  $m^\eta$  und  $m^{\eta+1}$  vor. Daher werden die Fälle (8.23) und (8.24) nur für  $\tilde{\gamma}_k^*(m) := \tilde{\gamma}_k^{\eta+1}$  überprüft:

Gilt für  $\tilde{\gamma}_k^*(m) := \tilde{\gamma}_k^{\eta+1}$  einer der vorstehenden Fälle 2 oder 3, so wird (8.23) bzw. (8.24) innerhalb des Intervalls  $(m^\eta, m^{\eta+1})$  für den Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k$  erfüllt und innerhalb dieses Intervalls kommt für diesen Koeffizienten das Verfahren 1-ter Ordnung zur Anwendung, ansonsten das Verfahren 0-ter Ordnung. Damit lauten die Fälle 1 bis 3:

- Fall 1:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} = 0$   
In diesem Fall hat die Bedingung 8.20 keine Lösung. Es kommt das Verfahren 0-ter Ordnung zum Einsatz.

- Fall 2:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} > 0$   
In diesem Fall gilt

$$\frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} > \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m}. \quad (8.25)$$

- Fall 3:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} < 0$   
In diesem Fall gilt

$$\frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} < \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m}. \quad (8.26)$$

Für den Faktor  $\epsilon$  wurde eine Parameterstudie mit den Werten 0.2, 0.4 und 0.5 durchgeführt. Es zeigten sich jedoch keinerlei Auswirkungen auf die in Kapitel 9 zur Beschreibung der Approximationseigenschaften eingesetzten Größen *absolute Sprunghöhe* und *maximale relative Sprunghöhe*. Daher wird im folgenden  $\epsilon := 0$  gesetzt. Somit nehmen die rechten Seiten von (8.25) und (8.26) den Wert 0 an. Somit ergeben sich die Fälle 1 bis 3 zu:

- Fall 1:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} = 0$   
In diesem Fall hat die Bedingung 8.20 keine Lösung. Es kommt das Verfahren 0-ter Ordnung zum Einsatz.

- Fall 2:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} > 0$   
In diesem Fall gilt

$$\frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} > 0. \quad (8.27)$$

- Fall 3:  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} < 0$   
In diesem Fall gilt

$$\frac{\tilde{\gamma}_k^{\eta+1} - \tilde{\gamma}_k^\eta}{m^{\eta+1} - m^\eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} < 0. \quad (8.28)$$

Die Funktionen  $\tilde{\gamma}_k^*$  sind nur an den Stellen  $m^\eta$ , d.h. den Gitterpunkten ( $\eta$ ), mit ihren Funktionswerten  $\tilde{\gamma}_k^\eta$  bekannt. Durch Anwendung des Entscheidungskriteriums auf die Funktionswerte  $\tilde{\gamma}_k^\eta$  an den Gitterpunkten  $\eta$  entstehen **außerhalb von Singularitätsintervallen** die stückweise stetigen, sich aus einer Abfolge von Sprung- und Rampenfunktionen zusammensetzenden Funktionen  $\tilde{\gamma}_k^g$  (Siehe Abbildung 8.9), wobei die Rampen die Tangenten der Funktion  $\tilde{\gamma}_k^*$  an den Stellen  $m^\eta$  darstellen.

#### Intervalle, in denen nur nach 0-ter Ordnung approximiert wird:

Nur im Szenario 2 und im Szenario 5 treten Intervalle auf, in denen nach Auswertung des Entscheidungskriteriums, d.h. der Formeln (8.27) und (8.28), die Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  in  $m$ - bzw.  $\bar{m}_0$ -Richtung ausschließlich nach dem Verfahren 0-ter Ordnung approximiert werden:

- Im Szenario 2 sind es die 10 hintereinanderliegenden Intervalle zwischen  $m = 10.96 \text{ kg}$  und  $m = 11.06 \text{ kg}$  (Siehe Abbildung 8.10),
- im Szenario 5 die 12 in Abbildung 8.11 gezeigten Intervalle.

Aufgrund des in Abschnitt 8.2 erläuterten oftmals ungünstigen Einflusses einer Singularität auf die Approximationsfehler werden in den Datenbasen des Abschnittes 8.1 Singularitätsintervalle gemäß Singularitätskriterium (8.7) festgelegt, in denen keine Approximation durchgeführt werden darf. Liegt ein effektiver Eingangsvektor in einem solchen Intervall, kommen die Ausweichstrategien des Abschnittes 8.3.6 zur Anwendung, um das jeweilige Gepäckstück dennoch zu seinem Ziel zu befördern. Singularitätsintervalle verkleinern somit den Bereich der Datenbasis, in dem die Echtzeitapproximation möglich ist.

Die in dieser Arbeit zum Einsatz kommenden **Ausweichstrategien** arbeiten nach **drei** verschiedenen **Prinzipien**:



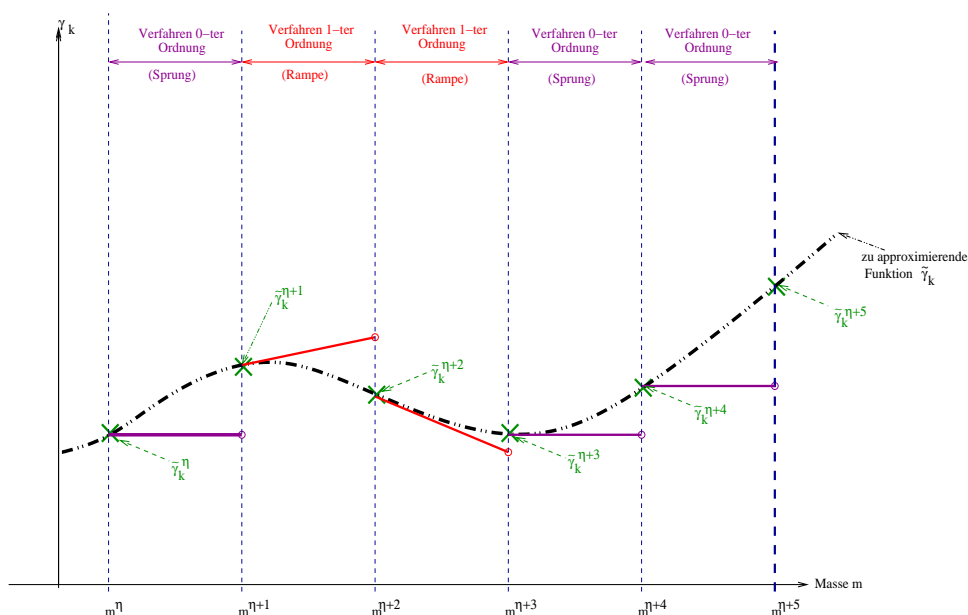


Abbildung 8.9: Außerhalb von Singularitätsintervallen: Funktion  $\tilde{\gamma}_k^g$  als Abfolge von Sprung- und Rampenfunktionen infolge der Anwendung des Entscheidungskriteriums auf  $\tilde{\gamma}_k^{\eta}$  an den Stellen  $m^{\eta}$

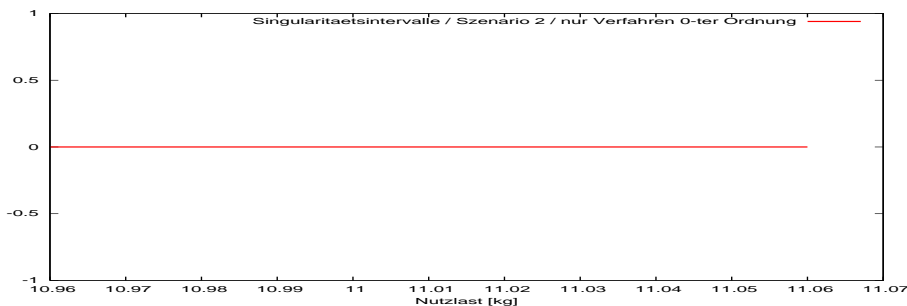


Abbildung 8.10: Szenario 2 - in den 10 hintereinanderliegenden Intervallen zwischen  $m = 10.96 \text{ kg}$  und  $m = 11.06 \text{ kg}$  werden nach Auswertung des Entscheidungskriteriums (8.27) und (8.28) die Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  in  $m$ -Richtung ausschließlich nach dem Verfahren 0-ter Ordnung approximiert.

- *Prinzip 1:*  
Da genügend Zeit zur Verfügung steht, wird mittels OSTP eine exakte Trajektorie berechnet. Approximationsfehler fallen nicht an. Das Szenario 2 verwendet das Prinzip 1.
- *Prinzip 2:*  
Es erfolgt kein Update der Trajektorie, die bisherige wird einfach weiterverwendet. Die Vorteile einer Trajektorienanpassung kommen nicht zum Tragen. Das Szenario 5 verwendet das Prinzip 2.
- *Prinzip 3:*  
Die bisherige Trajektorie wird so lange beibehalten, bis der Eingangsvektor außerhalb des Singularitätsintervalls liegt. Erst dann erfolgt der Übergang auf eine neue, besser angepasste

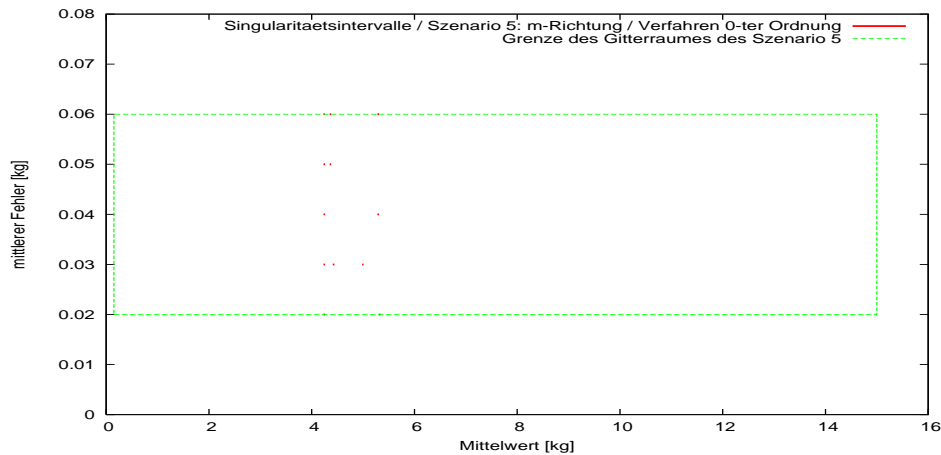


Abbildung 8.11: Szenario 5 - in den 12 Intervallen ( $\bar{m}_1 = 4.23 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 4.26 \text{ kg}$ ) mit jeweils  $\sigma_1 = 0.02 \text{ kg}, 0.03 \text{ kg}, \dots, 0.06 \text{ kg}$ , ( $\bar{m}_1 = 4.35 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 4.38 \text{ kg}$ ) mit  $\sigma_1 = 0.05 \text{ kg}, 0.06 \text{ kg}$ , ( $\bar{m}_1 = 4.41 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 4.44 \text{ kg}$ ) mit  $\sigma_1 = 0.03 \text{ kg}$ , ( $\bar{m}_1 = 4.98 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 5.01 \text{ kg}$ ) mit  $\sigma_1 = 0.03 \text{ kg}$ , ( $\bar{m}_1 = 5.28 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 5.31 \text{ kg}$ ) mit jeweils  $\sigma_0 = 0.04 \text{ kg}, 0.06 \text{ kg}$  und ( $\bar{m}_1 = 5.31 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 5.34 \text{ kg}$ ) mit  $\sigma_1 = 0.02 \text{ kg}$

Trajektorie. Das Szenario 4 verwendet das Prinzip 3.

Im Szenario 6 sind die *Prinzipien 1, 2 und 3* nicht einsetzbar, da weder genügend Zeit für die Berechnung einer neuen Trajektorie zum neuen Endpunkt mittels SQP vorhanden ist, noch eine alternative Trajektorie zum neuen Endpunkt bereitsteht. Daher muß im Szenario 6 zur Erfüllung der bestehenden Beförderungspflicht auch innerhalb der Singularitätsintervalle approximiert werden. Ein hoher Approximationsfehler ist vertretbar, da dieses Szenario im Falle einer Positionsungenauigkeit des Systems Kofferabtransport zum Einsatz kommt und somit nur auf einzelne Koffer angewendet wird.

Das Szenario 7 weist keinerlei Singularitäten auf. Daher gibt es für dieses Szenario auch keine Ausweichstrategie.

Numerische **Singularitätsintervalle** lassen sich auf zwei unterschiedliche Art und Weisen **konzipieren**:

- *Konzept 1*:  
Vergleich der  $\tilde{\gamma}^*$ -Koeffizienten benachbarter Gitterpunkte mittels des oben eingeführten Singularitätskriteriums. Bei Überschreiten einer vorab festgelegten absoluten oder prozentualen Differenz wird der Bereich zwischen den beiden Gitterpunkten zum numerischen Singularitätsintervall erklärt. Die Differenz muß der Nutzer so wählen, daß alle numerischen Singularitätsintervalle erfaßt werden, ohne daß zusätzliche und damit überflüssige Singularitätsintervalle anfallen. Das Konzept 1 wird in Abschnitt 8.3 weiter untersucht <sup>5</sup>.
- *Konzept 2*:  
Suche nach numerischen Singularitätsintervallen anhand des Auftretens der Statuswechsel. Hierbei wird ein Intervall immer dann als Singularitätsintervall ausgewiesen, wenn mehr als 0.8% der UNB ihren Status verändern.

Der Nutzer des **Konzeptes 1** muß und kann mittels der vorab festzulegenden Differenz den maximal zulässigen Approximationsfehler auswählen. Bei Festsetzung eines zu kleinen Approximationsfehlers jedoch werden Singularitätsintervalle an Stellen ausgewiesen, ohne daß dort eine numerische

<sup>5</sup>Siehe Kriterien 1 und 2 des Abschnittes 8.3

Singularität vorliegt. Den kleinen Approximationsfehler erkauft man sich mit der häufigeren und unnötigen Anwendung der Ausweichstrategien sowie den damit verbundenen Nachteilen

- zusätzlicher Rechenaufwand (*Prinzip 1*) oder
- Nichtrealisierung von Regelaufwandsersparnissen (*Prinzip 2*).

Wird der zulässige Approximationsfehler hingegen zu groß gewählt, werden numerische Singularitätsintervalle nicht erfaßt und in diesen dann verbotenerweise approximiert.

Im **Konzept 2** wird kein maximal zulässiger Approximationsfehler vorgegeben. Die 0.8%-Grenze erfaßt die numerischen Singularitätsintervalle zuverlässig. Die ausschließliche Ausweisung von numerischen Singularitätsintervallen mittels der 0.8%-Grenze beschränkt die Anzahl der Singularitätsintervalle auf das notwendige Minimum und liefert hinreichend kleine Approximationsfehler. Ferner erfolgt die Ausweisung der Singularitätsintervalle **unabhängig** vom angewandten **Approximationsverfahren**. Inwieweit das in dieser Arbeit aufgefundene Zusammenfallen der 0.8%-Grenze mit den numerischen Singularitäten bei anderen Optimierungsproblemen so auftritt und damit eine Übertragbarkeit vorliegt, ist nicht bekannt.

Da das Konzept 1 im Gegensatz zu Konzept 2 direkt auf andere Optimierungsprobleme anwendbar ist, findet in dieser Arbeit im weiteren **nur** das **Konzept 1** Anwendung und ist durch die o.g. Definitionen der numerischen Singularität, des zugehörigen numerischen Singularitätsintervalls und des Singularitätskriterium (8.7) umgesetzt.

#### **Gewichtung von Zeit- gegen Energieoptimalität in der Zielfunktion:**

Für die in dieser Arbeit verwendeten Trajektorien aller Szenarien wurden in der Zielfunktion (7.18)

- die Zeitoptimalität mit  $k_t = 0.9$  und
- die Energieoptimalität mit  $k_e = 0.1$

gewichtet. Während die Szenarien 1 bis 4 und 7 ihre Trajektorien bereits zum Zeitpunkt  $t_0 = 0.0 \text{ sec}$  (**Stufe 0**)<sup>6</sup> anpassen, geschieht dies in den Szenarien 5 und 6 am Zeitpunkt  $t_1$ , da die neuen Informationen in den Szenarien 5 und 6 auch erst am Zeitpunkt  $t_1$  (**Stufe 1**) zur Verfügung stehen.

- Der Korrekturzeitpunkt  $t_1$  wurde in den Szenarien 5 und 6 zu  $t_1 = 0.2 \text{ sec}$  gewählt. Der gewählte Korrekturzeitpunkt  $t_1 = 0.2 \text{ sec}$  liegt bei etwa einem Siebtel der Laufzeit und ist damit gemäß der Münchener Flughafengesellschaft eine realitätsnahe Angabe.

Die Gewichtung von  $k_t = 0.9 \text{ sec}$  für Zeit- und  $k_e = 0.1 \frac{1}{(Nm)^2 \text{ sec}}$  für Energieoptimalität in der Zielfunktion (7.18) stellt einerseits den geforderten Durchsatz von 15 Koffern pro Minute sicher und spart andererseits Energie. Des weiteren fällt die Anzahl der Singularitäten auf der Stufe 0 gering aus und hält sich auf der Stufe 1 in Grenzen.

#### **Wirkung eines früheren Korrekturzeitpunktes $t_1$ auf die Anzahl der Singularitäten:**

Zusätzlich wurde für die Szenario 5 und 6 (Stufe 1) der Korrekturzeitpunkt  $t_1 = 0.05 \text{ sec}$  untersucht. Durch die Vorverlegung des Korrekturzeitpunktes nahm die Anzahl der Singularitäten auf der Stufe 1 drastisch ab (Vergleiche Abbildung 8.12 mit 8.13). Um jedoch eine möglichst genaue Schätzung des unbekanntem Parameters Nutzlastmasse zu sicherzustellen, wird der Korrekturzeitpunkt  $t_1 = 0.2 \text{ sec}$  beibehalten.

Daraus läßt sich die Vermutung ableiten, daß mit steigender Anfangsgeschwindigkeit auf der Stufe 1 die Anzahl der Singularitäten ansteigt und ein möglichst früher Korrekturzeitpunkt die Anzahl der Singularitäten auf der Stufe 1 drastisch reduziert.

<sup>6</sup>Siehe Abbildung 6.1

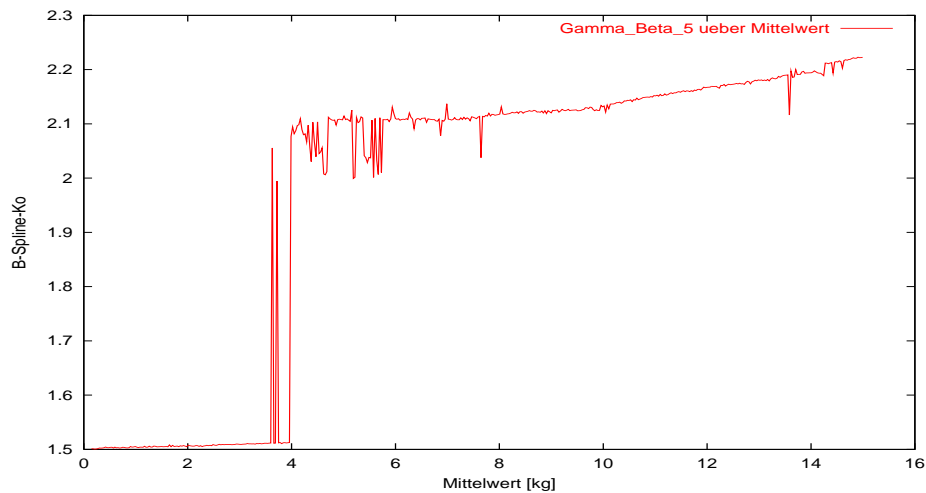


Abbildung 8.12: Szenario 5 -  $\gamma_{\beta_5}^*$  auf Stufe 1 in Abhängigkeit von  $\bar{m}_1$  bei  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$  für  $k_t = 0.9$ ,  $k_e = 0.1$ ,  $t_0 = 0.0 \text{ sec}$ ,  $t_1 = 0.2 \text{ sec}$  und  $t_f = 1.35 \text{ sec}$

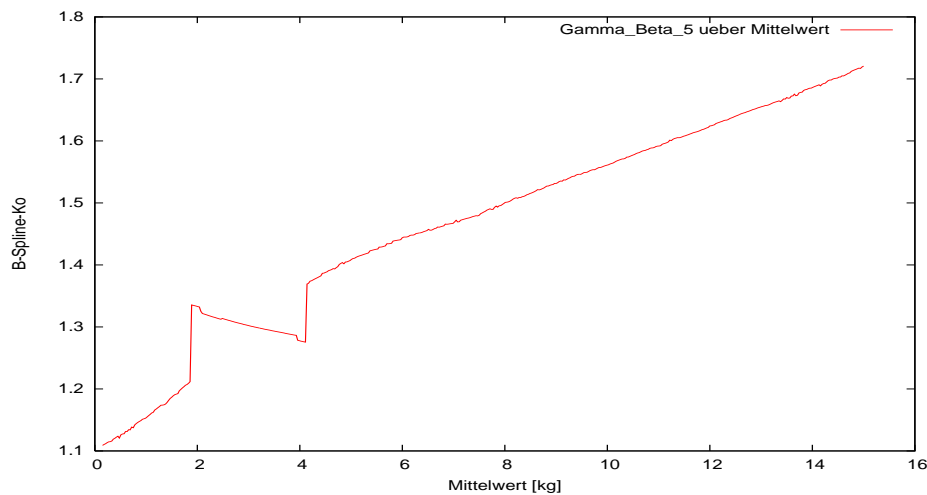


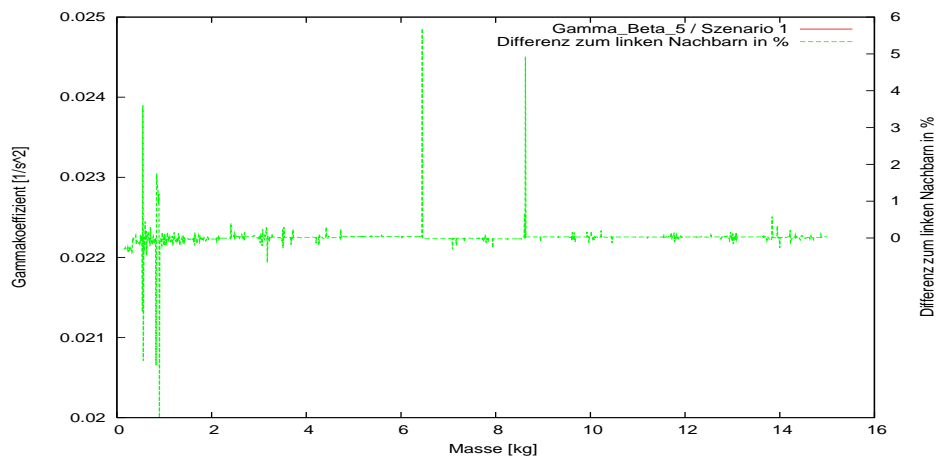
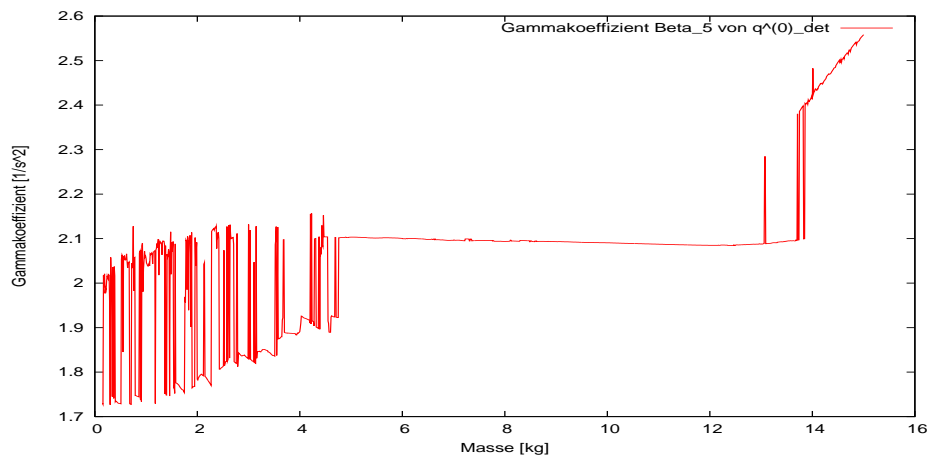
Abbildung 8.13: Szenario 5 -  $\gamma_{\beta_5}^*$  auf Stufe 1 in Abhängigkeit von  $\bar{m}_1$  bei  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$  für  $k_t = 0.9$ ,  $k_e = 0.1$ ,  $t_0 = 0.0 \text{ sec}$ ,  $t_1 = 0.05 \text{ sec}$  und  $t_f = 1.35 \text{ sec}$

### Wirkung einer Erhöhung von $k_t$ auf die Anzahl der Singularitäten:

Alternativ wurden Gitter mit  $k_t = 0.99$  und  $k_e = 0.01$  mit  $t_1 = 0.05 \text{ sec}$ , d.h. einer höher eingestuften Zeitoptimalität, errechnet und auf die Eignung des in dieser Arbeit eingesetzten Echtzeitapproximationsverfahrens im Hinblick auf diese Gitter geprüft. Die Anzahl der Singularitäten war sowohl auf der Stufe 0 (Szenarien 1 bis 4 und 7) als auch auf der Stufe 1 (Szenarien 5 und 6) derart erhöht (Vergleiche Abbildung 8.14 mit 8.15, 8.16 mit 8.17 und 8.13 mit 8.18), daß das Echtzeitapproximationsverfahren dieser Arbeit für diese Gitter ungeeignet ist.

In den Szenarien 2, 4 und 5 erhöht sich, wie der Vergleich der Abbildungen

- 8.14 mit 8.15,

Abbildung 8.14: Szenario 2 -  $\gamma_{\beta_5}^*$  in Abhängigkeit von  $m$  für  $k_t = 0.9$ ,  $k_e = 0.1$ Abbildung 8.15: Szenario 2 -  $\gamma_{\beta_5}^*$  in Abhängigkeit von  $m$  für  $k_t = 0.99$ ,  $k_e = 0.01$ 

- 8.16 mit 8.17 und
- 8.13 mit 8.18

zeigt, die Anzahl der Singularitäten durch die stärkere Gewichtung der Zeitoptimalität ( $k_t = 0.99$ ) massiv, wobei sich für das Szenario 5 die Laufzeit von 1,35 sec auf 1,25 sec verkürzt.

#### Taktzeiten:

Die kurzen Laufzeiten von 1.35 sec bzw. 1.25 sec der optimalen Robotertrajektorien ermöglichen Taktzeiten von 4 sec (Siehe auch Unterabschnitt 2.4.6). Es besteht Grund zu der Annahme, daß sich die Taktzeit von 4 sec durch den Einsatz modernerer und leistungsfähigerer Roboter wesentlich verkürzen lassen:

Beispielsweise erreicht der zur Zeit angebotene Palettierungsroboter KuKa KR180 Pa ohne Optimierung seiner Trajektorie sogar Taktzeiten von 2 sec [24].

Gemäß [55] beträgt die Taktzeit bei nicht optimalen Trajektorien 12 sec. Optimale Trajektorien dritteln demnach die Taktzeit, d.h. ein einzelner Roboter kann statt 300 Koffer pro Stunde nun 900

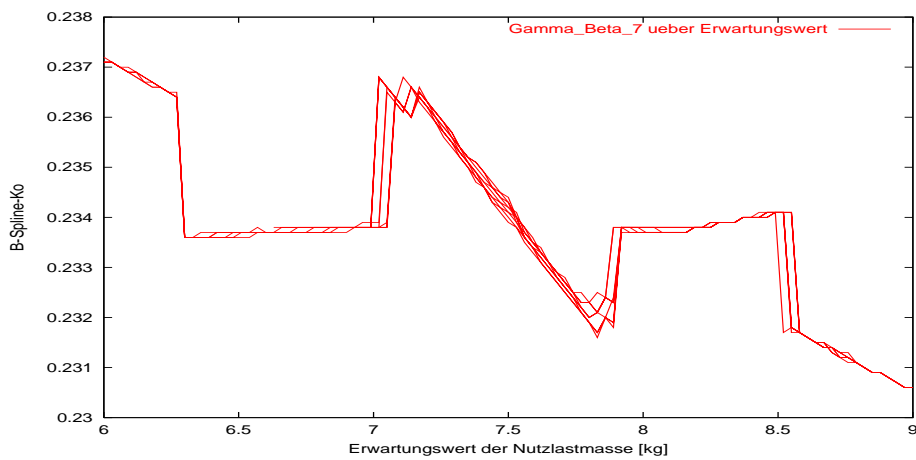


Abbildung 8.16: Szenario 4 -  $\gamma_{\beta_7}^*$  in Abhängigkeit von  $\bar{m}_0$  bei  $\sigma_0 = 1.5 \text{ kg} + \iota \cdot 0.1 \text{ kg}$ ,  $\iota = 0, 1, 2, \dots, 9$  für  $k_t = 0.9$ ,  $k_e = 0.1$

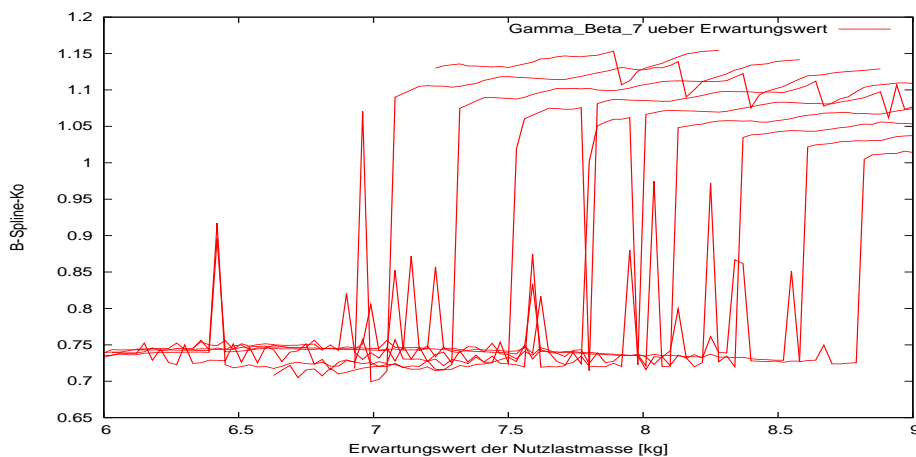


Abbildung 8.17: Szenario 4 -  $\gamma_{\beta_7}^*$  in Abhängigkeit von  $\bar{m}_0$  bei  $\sigma_0 = 1.5 \text{ kg} + \iota \cdot 0.1 \text{ kg}$ ,  $\iota = 0, 1, 2, \dots, 9$  für  $k_t = 0.99$ ,  $k_e = 0.01$

Koffer umschlagen. Somit braucht der Flughafenbetreiber bei Verwendung optimaler Trajektorien nur ein Drittel der ansonsten benötigten Roboter anzuschaffen.

#### Weitere Vorteile der stochastischen Optimierung:

- Aus den Abbildungen 8.19 und 8.20 geht hervor, daß die stochastisch-optimierte Trajektorien einen kleineren Energiebedarf aufweisen als deterministisch-optimale bei nur unwesentlich längerer Laufzeit.
- Aus den Abbildungen 8.20 und 8.21 geht hervor, daß mit zunehmendem Erwartungswert  $\bar{m}_0$  der Energiebedarf zunimmt, während mit zunehmender Standardabweichung  $\sigma_0$  der Energiebedarf sinkt.

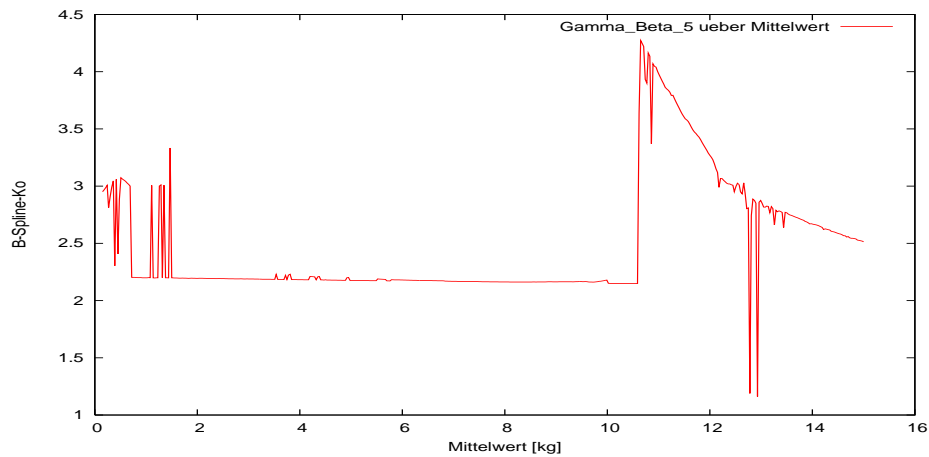


Abbildung 8.18: Szenario 5 -  $\gamma_{\beta_5}^*$  auf Stufe 1 in Abhängigkeit von  $\bar{m}_1$  bei  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$  für  $k_t = 0.99$ ,  $k_e = 0.01$ ,  $t_0 = 0.0 \text{ sec}$ ,  $t_1 = 0.05 \text{ sec}$  und  $t_f = 1.25 \text{ sec}$

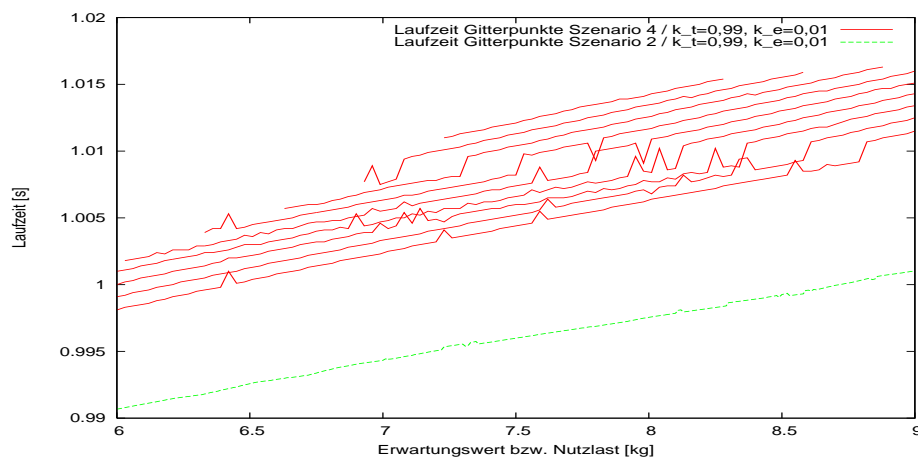


Abbildung 8.19: Szenario 2 und 4 - Laufzeit in Abhängigkeit von  $m$  und  $\bar{m}_0$  bei  $\sigma_0 = 1.5 \text{ kg} + \nu \cdot 0.1 \text{ kg}$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, 9$  für  $k_t = 0.99$ ,  $k_e = 0.01$

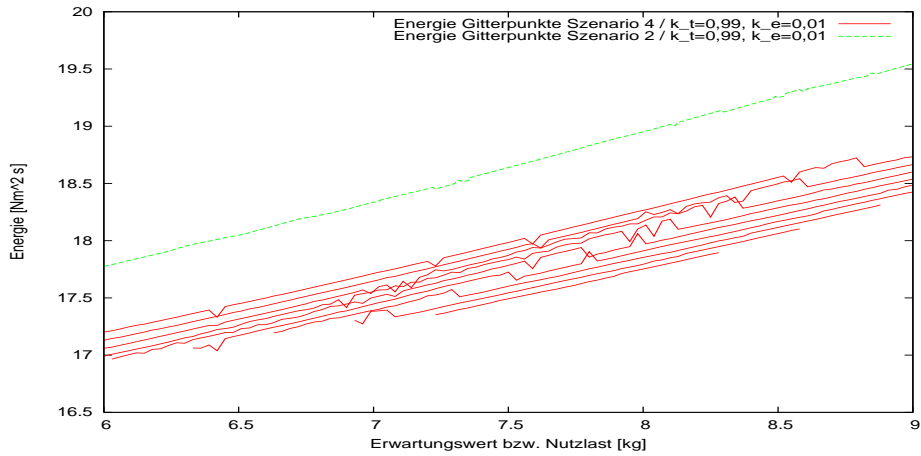


Abbildung 8.20: Szenario 2 und 4 - Energiebedarf in Abhängigkeit von  $m$  und  $\bar{m}_0$  bei  $\sigma_0 = 1.5 \text{ kg} + \iota \cdot 0.1 \text{ kg}$ ,  $\iota = 0, 1, 2, \dots, 9$  für  $k_t = 0.99$ ,  $k_e = 0.01$

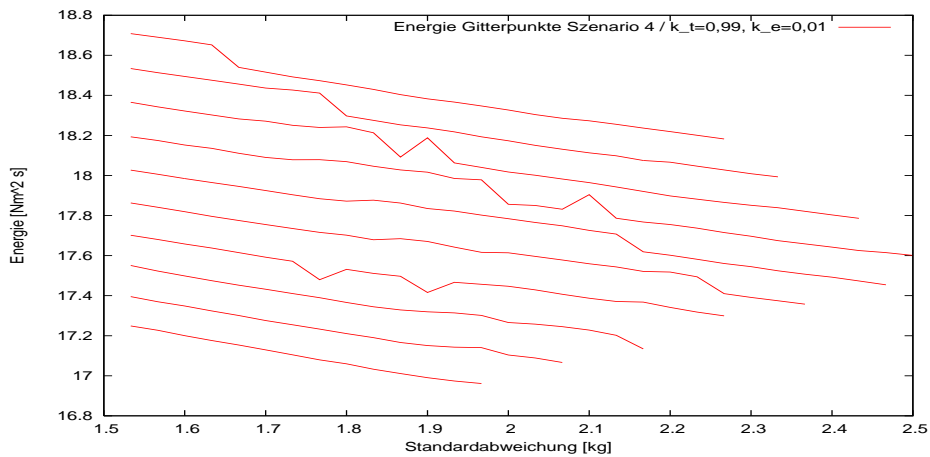


Abbildung 8.21: Szenario 4 - Energiebedarf in Abhängigkeit von  $\sigma_0$  bei  $\bar{m}_0 = 6.0 \text{ kg} + \iota \cdot 0.3 \text{ kg}$ ,  $\iota = 0, 1, 2, \dots, 9$  für  $k_t = 0.99$ ,  $k_e = 0.01$



## 8.1 Erzeugung der Datenbasen der Szenarien

Die Unterabschnitte 8.1.1, 8.1.2, 8.1.3 und 8.1.5 erläutern die Zusammensetzung der Eingangsvektoren  $\mathbf{p}_E$  szenarienweise.<sup>7</sup> Für die Anfangs- und Endgelenkwinkelstellung  $\theta_0$  und  $\theta_f$  werden **realitätsnahe** Annahmen getroffen. Die Lösungen  $\tilde{\gamma}^*$  liefert das in Abschnitt 13.4 dargestellte Verfahren der Sequentiellen Quadratischen Programmierung. Die ersten Ableitungen von  $\tilde{\gamma}^*$  nach den Komponenten der Eingangsvektoren berechnen sich mit Hilfe des impliziten Satzes der Funktionen.

Die benötigten Ableitungen  $\frac{\partial \tilde{\gamma}^*}{\partial \mathbf{p}_E}$  erhält man folgendermaßen:

Für die Lagrange-Funktion  $L = F + \chi^T \mathbf{g}$  des Optimierungsproblems

$$\min_{\tilde{\gamma}} F(\tilde{\gamma}, \mathbf{p}_E) \quad (8.29)$$

$$\mathbf{g}(s_J, \tilde{\gamma}, \mathbf{p}_E) \leq \mathbf{0}. \quad (8.30)$$

gilt gemäß (13.92) bis (13.93)

$$\begin{aligned} L_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^*, \chi^*) &= \mathbf{0} \\ L_{\chi_{aktiv}}(\tilde{\gamma}^*, \chi^*) &= \mathbf{g}_{aktiv} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Nun wird an der Stelle  $\mathbf{p}_E$  die totale Ableitung nach  $\mathbf{p}_E$  gebildet. Mit  $\mathbf{g}_{aktiv}^{\chi_{aktiv}} = \mathbf{0}$  ergibt sich:

$$L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E} + L_{\tilde{\gamma}\chi_{aktiv}} \cdot \frac{\partial \chi_{aktiv}}{\partial \mathbf{p}_E} + \frac{\partial L_{\tilde{\gamma}}}{\partial \mathbf{p}_E} = \mathbf{0} \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}}{\partial \tilde{\gamma}} \cdot \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E} + \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}}{\partial \mathbf{p}_E} = \mathbf{0}. \quad (8.33)$$

Gleichung (8.32) und (8.33) lassen sich mit  $L_{\tilde{\gamma}\chi_{aktiv}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}^T}{\partial \tilde{\gamma}}$  zu

$$\begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} & \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}^T}{\partial \tilde{\gamma}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}}{\partial \tilde{\gamma}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E} \\ \frac{\partial \chi_{aktiv}}{\partial \mathbf{p}_E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial L_{\tilde{\gamma}}}{\partial \mathbf{p}_E} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}}{\partial \mathbf{p}_E} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (8.34)$$

zusammenfassen.

Da die Matrix

$$\begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} & \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}^T}{\partial \tilde{\gamma}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}}{\partial \tilde{\gamma}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.35)$$

siehe auch [Büskens, S.77, Satz 4.3], aufgrund ihrer Regularität invertierbar ist, gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E} \\ \frac{\partial \chi_{aktiv}}{\partial \mathbf{p}_E} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} & \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}^T}{\partial \tilde{\gamma}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}}{\partial \tilde{\gamma}} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial L_{\tilde{\gamma}}}{\partial \mathbf{p}_E} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{aktiv}}{\partial \mathbf{p}_E} \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

Die gesuchten Ableitungen  $\frac{\partial \tilde{\gamma}^*}{\partial \mathbf{p}_E}$  liegen nun in (8.36) auf der linken Seite vor.

<sup>7</sup>Die Komponenten der Eingangsvektoren  $\mathbf{p}_E$  gehen szenarienabhängig in die Zielfunktionen und die jeweiligen Ungleichungsnebenbedingungen gemäß Abschnitt 7.3 ein.

### 8.1.1 Eingangsvektoren Szenario 1 und Datenbasis Szenario 2

Für das Szenario 1 und jeden Gitterpunkt der Datenbasis des Szenarios 2 sind die nachstehenden Komponenten des Eingangsvektors gleich:

- Anfangszeit  $t_0 = 0 [sec]$
- Anfangsgelenkwinkelstellung  $\theta_0 = (0.0, 0.785, 1.57)^T [rad]$
- Anfangsgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_0 = (0, 0, 0)^T [\frac{rad}{sec}]$
- Endgelenkwinkelstellung  $\theta_f = (2.35, 1.047, 0.785)^T [rad]$
- Endgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_f = (0.0, 0.0, 0.0)^T [\frac{rad}{sec}]$

Die Eingangsvektoren des Szenarios 1 und die der Gitterpunkte der Datenbasis des Szenarios 2 unterscheiden sich jedoch hinsichtlich der als realisiert angenommenen Nutzlastmasse  $m$ :

- Szenario 1:  
Das Szenario 1 kommt gemäß Abschnitt 2.3 bei der Abfertigung von Charterflügen zum Einsatz. Charterflüge befördern ausschließlich Touristen und damit Gepäck der Kategorie 1. Die realisierte Nutzlastmasse  $m$  wird wegen der Zugrundelegung des Manutec r3<sup>8</sup> zwischen 0.15 kg und 15.1 kg angenommen.
- Szenario 2:  
Das Szenario 2 befördert Gepäckstücke der Kategorien 1 und 3. Während die Kategorie 1 ausschließlich aus Touristen besteht, setzt sich die Kategorie 3 sowohl aus Touristen als auch Geschäftsleuten zusammen. Das Gitter der Datenbasis des Szenarios 2 erstreckt sich von 0.15 kg bis 15.1 kg und ist somit eindimensional. Der Gitterpunktabstand beträgt  $\Delta m = 0.01$  kg. Die Eingangsvektoren der Gitterpunkte des Szenarios 2 lauten somit:

$$\mathbf{p}_E^\eta = \begin{pmatrix} t_0 \\ m^\eta := 0.14 \text{ kg} + \eta \cdot 0.01 \text{ kg} \\ \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_f \end{pmatrix} \quad (8.37)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, 1496$ . Die Datenbasis des Szenarios 2 umfaßt somit 1496 Gitterpunkte.

Die zu  $\mathbf{p}_E^\eta$  gehörende Lösung  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E^\eta)$  erhält man durch Einsetzen von  $\mathbf{p}_E^\eta$  in Szenario 1. Dieses errechnet mittels OSTP dann  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E^\eta)$ . Daher **setzt** sich die **Datenbasis des Szenarios 2** aus **Lösungen des Szenarios 1** zusammen.

### 8.1.2 Eingangsvektoren Szenario 3 und Datenbasis Szenario 4

Für das Szenario 3 und jeden Gitterpunkt der Datenbasis des Szenarios 4 sind die nachstehenden Komponenten des Eingangsvektors gleich:

- Anfangszeit  $t_0 = 0 \text{ sec}$

---

<sup>8</sup>Siehe auch Unterabschnitt 2.4.6

- Anfangsgelenkwinkelstellung  $\theta_0 = (0.0, 0.785, 1.57)^T [rad]$
- Anfangsgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_0 = (0, 0, 0)^T \frac{rad}{sec}$
- Endgelenkwinkelstellung  $\theta_f = (2.35, 1.047, 0.785)^T [rad]$
- Endgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_f = (0.0, 0.0, 0.0)^T \frac{rad}{sec}$

Die Eingangsvektoren des Szenarios 3 und die der Gitterpunkte der Datenbasis des Szenarios 4 unterscheiden sich jedoch hinsichtlich des Erwartungswertes  $\bar{m}_0$  der Nutzlast und deren Standardabweichung  $\sigma_0$ :

- Szenario 3:  
Das Szenario 3 wird gemäß Abschnitt 2.3 zur Beförderung des Gepäcks der Kategorie 2 eingesetzt. Die Kategorie 2 beinhaltet ausschließlich Geschäftsreisende auf sog. Rennstrecken, z.B. Zürich-Frankfurt, und geht von den derzeitigen Bestimmungen für Handgepäck aus. Der Erwartungswert wird daher modellhaft zwischen 6.0 kg und 9.0 kg, die Standardabweichung zwecks Gewährleistung einer hohen Robustheit der Vorsteuerung zwischen 1.6 kg und 4.5 kg angenommen.
- Szenario 4:  
Das Szenario 4 wird gemäß Abschnitt 2.3 ebenfalls zur Beförderung des Gepäcks der Kategorie 2 eingesetzt. Das Gitter der Datenbasis des Szenarios 4 erstreckt sich in  $\bar{m}_0$ -Richtung von 6.0 kg bis 9.0 kg, in  $\sigma_0$ -Richtung von 1.6 kg bis 4.5 kg und ist damit zweidimensional. Der Gitterpunktabstand beträgt in  $\bar{m}_0$ -Richtung  $\Delta\bar{m}_0 = 0.03$  kg und in  $\sigma_0$ -Richtung  $\Delta\sigma_0 = 0.1$  kg. Die Eingangsvektoren der Gitterpunkte lauten somit:

$$\mathbf{p}_E^{\eta\iota} = \begin{pmatrix} t_0 \\ \bar{m}_0^\eta := 5.97 \text{ kg} + \eta \cdot 0.03 \text{ kg} \\ \sigma_0^\iota := 1.5 \text{ kg} + \iota \cdot 0.1 \text{ kg} \\ \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_f \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, 101$  und  $\iota = 1, 2, \dots, 30$ . Die Datenbasis des Szenarios 4 enthält somit  $101 \cdot 30 = 3030$  Gitterpunkte.

Die zu  $\mathbf{p}_E^{\eta\iota}$  gehörende Lösung  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E^{\eta\iota})$  erhält man durch Einsetzen von  $\mathbf{p}_E^{\eta\iota}$  in Szenario 3. Dieses errechnet mittels OSTP dann  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E^{\eta\iota})$ . Daher **setzt** sich die **Datenbasis des Szenarios 4** aus **Lösungen des Szenarios 3** zusammen.

### 8.1.3 Datenbasis des Szenarios 5

Für jeden Gitterpunkt sind die nachstehenden Komponenten des Eingangsvektors gleich:

- Anfangszeit  $t_1 = 0.20 \text{ sec}$ ,
- Anfangsgelenkwinkelstellung  $\theta_1 = \bar{\theta}_{0R}(t_1) = (0.104, 0.773, 1.742)^T [rad]$ ,
- Anfangsgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_1 = \dot{\bar{\theta}}_{0R}(t_1) = (1.36, -0.10, 1.87)^T \frac{rad}{sec}$ ,

- Endgelenkwinkelstellung  $\theta_f = (2.35, 1.047, 0.785)^T [rad]$ ,
- Endgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_f = (0.0, 0.0, 0.0)^T \frac{rad}{sec}$ .

Die Gitterpunkte unterscheiden sich jedoch hinsichtlich des Mittelwertes  $\bar{m}_1$  und des mittleren Fehlers  $\sigma_1$  des Mittelwertes. Der Parameterschätzer liefert Mittelwert und mittleren Fehler als Punktschätzung.

Das Szenario 5 wird gemäß Abschnitt 2.3 zur Beförderung des Gepäckes der Kategorien 1, 2 und 3 eingesetzt. Das Gitter erstreckt sich in  $\bar{m}_1$ -Richtung von 0.15 kg bis 15.0 kg, in  $\sigma_1$ -Richtung von 0.02 kg bis 0.06 kg und ist damit zweidimensional.

Der Gitterpunktabstand beträgt in  $\bar{m}_1$ -Richtung  $\Delta\bar{m}_1 = 0.03$  kg und in  $\sigma_1$ -Richtung  $\Delta\sigma_1 = 0.01$  kg. Modellhaft wird davon ausgegangen, daß zum Zeitpunkt  $t_1 = 0.20$  sec bereits eine **sehr gute Schätzung** der unbekanntes Nutzlastmasse  $m$  vorliegt und somit der mittlere Fehler  $\sigma_1$  klein ausfällt. Zur Ermittlung des Mittelwertes und des mittleren Fehlers kann z.B. die Maximum-Likelihood-Methode [12] eingesetzt werden, da diese erwartungstreu, konsistent, asymptotisch normal verteilt und effizient ist.

Die Eingangsvektoren der Gitterpunkte lauten somit:

$$\mathbf{p}_E^{\eta\iota} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \bar{m}_1^\eta := 0.12 \text{ kg} + \eta \cdot 0.03 \text{ kg} \\ \sigma_1^\iota := 0.01 \text{ kg} + \iota \cdot 0.01 \text{ kg} \\ \theta_1 := \bar{\theta}_{0R}(t_1) \\ \dot{\theta}_1 := \dot{\theta}_{0R}(t_1) \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_f \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, 496$  und  $\iota = 1, 2, \dots, 5$ . Die Datenbasis des Szenarios 5 besteht somit aus  $496 \cdot 5 = 2480$  Gitterpunkte.

#### 8.1.4 Datenbasis des Szenarios 6

Für jeden Gitterpunkt sind die nachstehenden Komponenten des Eingangsvektors gleich:

- Anfangszeit  $t_1 = 0.20$  sec,
- der Mittelwert  $\bar{m}_0 = 7.5$  kg der Punktschätzung,
- der mittlere Fehler  $\sigma_0 = 2.5$  kg des Mittelwertes,
- Anfangsgelenkwinkelstellung  $\theta_1 = \bar{\theta}_{0R}(t_1) = (0.104, 0.773, 1.742)^T [rad]$ ,
- Anfangsgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_{0R}(t_1) = (1.36, -0.10, 1.87)^T \frac{rad}{sec}$ ,
- Endgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_f = (0.0, 0.0, 0.0)^T \frac{rad}{sec}$ .

Die Gitterpunkte unterscheiden sich jedoch hinsichtlich der Endwinkelstellung  $\theta_f$ . Der Gitterpunktabstand beträgt  $\Delta\theta_{1f} = \Delta\theta_{2f} = \Delta\theta_{3f} = 0.001$  [rad].

Das Gitter für die Endgelenkwinkelstellungen erstreckt sich

- in Richtung des 1. Gelenkes von 2.345 bis 2.355 [rad],

- in Richtung des 2. Gelenkes von 1.042 bis 1.052 [rad],
- in Richtung des 3. Gelenkes von 0.780 bis 0.790 [rad]

und ist damit dreidimensional.

Die Eingangsvektoren der Gitterpunkte lauten somit:

$$\mathbf{p}_E^{\eta\iota\zeta} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \bar{m}_0 \\ \sigma_0 \\ \theta_1 := \bar{\theta}_{0R}(t_1) \\ \dot{\theta}_1 := \dot{\bar{\theta}}_{0R}(t_1) \\ \theta_f^{\eta\iota\zeta} = (2.344 + \eta \cdot 0.001, 1.041 + \iota \cdot 0.001, 0.779 + \zeta \cdot 0.001)^T [\text{rad}] \\ \dot{\theta}_f \end{pmatrix} \quad (8.40)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, 11$ ,  $\iota = 1, 2, \dots, 11$  und  $\zeta = 1, 2, \dots, 11$ . Die Datenbasis des Szenarios 6 setzt sich somit aus  $11^3 = 1331$  Gitterpunkten zusammen.

Im Arbeitsraum liegen die Endpunkte gemäß Gleichung (3.5) bis (3.7) in einem Quader:

- X-Koordinaten: [0.9764, 0.9773] [m],
- Y-Koordinaten: [0.9645, 0.9750] [m],
- Z-Koordinaten: [0.5877, 0.6086] [m].

Größere oder kleinere Änderungen des geplanten Endpunktes können sich in den Szenarien 6 und 7 durch verschiedene Störungen im System Kofferabtransport bzw. Änderungen des Betriebsablaufes ergeben. Diese Arbeit betrachtet den Fall kleiner Änderungen des ursprünglich geplanten Endpunktes, z.B. verursacht durch Positionierungsungenauigkeiten des Systems Kofferabtransport (Siehe auch Unterabschnitt 2.4.5).

Da alle Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{1N}^g$  einen anderen Endpunkt besitzen, entfernen sie sich zunehmend voneinander und fächern sich leicht auf, wie Abbildung 8.22 zeigt.

### 8.1.5 Datenbasis des Szenarios 7

Für jeden Gitterpunkt sind die nachstehenden Komponenten des Eingangsvektors gleich:

- Anfangszeit  $t_1 = 0.0 \text{ sec}$
- der Mittelwert  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$  der Punktschätzung
- der mittlere Fehler  $\sigma_0 = 2.5 \text{ kg}$  des Mittelwertes
- Anfangsgelenkwinkelstellung  $\theta_0 = (0.0, 0.785, 1.57)^T [\text{rad}]$
- Anfangsgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_0 = (0.0, 0.0, 0.0)^T \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
- Endgelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_f = (0.0, 0.0, 0.0)^T \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

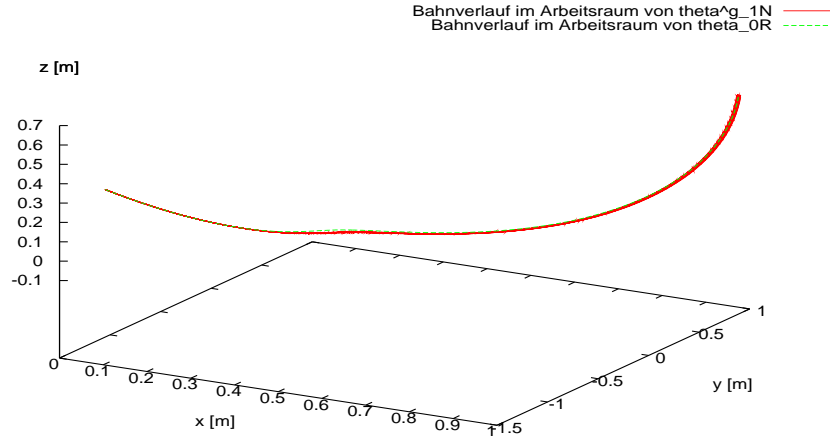


Abbildung 8.22: Szenario 6 - Solltrajektorien im Arbeitsraum für verschiedene Endpunkte  $\theta_f$

Die Gitterpunkte unterscheiden sich jedoch hinsichtlich der Endwinkelstellung  $\theta_f$ . Der Gitterpunktabstand beträgt  $\Delta\theta_{1f} = \Delta\theta_{2f} = \Delta\theta_{3f} = 0.001$  [rad].

Das Gitter für die Endgelenkwinkelstellungen erstreckt sich

- in Richtung des 1. Gelenkes von 2.345 bis 2.355 [rad],
- in Richtung des 2. Gelenkes von 1.042 bis 1.052 [rad],
- in Richtung des 3. Gelenkes von 0.780 bis 0.790 [rad]

und ist somit dreidimensional.

Die Eingangsvektoren der Gitterpunkte lauten somit:

$$\mathbf{p}_E^{\eta\iota\zeta} = \begin{pmatrix} t_0 \\ \bar{m}_0 \\ \bar{\sigma}_0 \\ \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_f^{\eta\iota\zeta} = (2.344 + \eta \cdot 0.001, 1.041 + \iota \cdot 0.001, 0.779 + \zeta \cdot 0.001)^T [\text{rad}] \\ \dot{\theta}_f \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

mit  $\eta = 1, 2, \dots, 11$ ,  $\iota = 1, 2, \dots, 11$  und  $\zeta = 1, 2, \dots, 11$ . Die Datenbasis des Szenarios 7 enthält somit  $11^3 = 1331$  Gitterpunkten.

Im Arbeitsraum liegen die Endpunkte in einem Quader:

- X-Koordinaten: [0.9764, 0.9773] [m],
- Y-Koordinaten: [0.9645, 0.9750] [m],

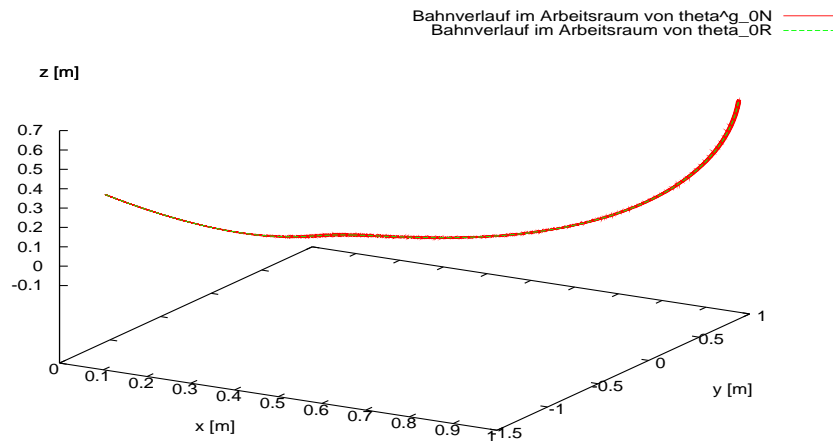


Abbildung 8.23: Szenario 7 - Solltrajektorien im Arbeitsraum für verschiedene Endpunkte  $\theta_f$

- $Z$ -Koordinaten:  $[0.5877, 0.6086]$  [m].

Alle geschätzten Referenztrajektorien beginnen am einheitlichen Anfangspunkt und enden in ihren jeweiligen, voneinander verschiedenen Endpunkten, so wie es die Gleichungsnebenbedingungen (6.2) und (6.3) verlangen. Da alle Referenztrajektorien  $\theta_{0N}^g$  einen anderen Endpunkt besitzen, entfernen sie sich zunehmend voneinander und fächern sich leicht auf, wie Abbildung 8.23 zeigt.

## 8.2 Eigenschaften und Ursachen der Singularitäten

Die Datenbasis besteht aus diskreten Gitterpunkten. Zwischen einigen Gitterpunkten treten steile, optisch dem Sprung  $1(t)$  gleichende Anstiege bzw. Abnahmen der Lösungen auf (Siehe u.a. Abbildungen 8.12 und 8.13). Diese Anstiege oder Abnahmen werden, wie bereits am Beginn des Kapitels 8 erwähnt, als numerische Singularitäten bezeichnet. Da die Lösung nur in den Gitterpunkten bekannt ist, kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob es sich bei der jeweiligen numerischen Singularität um eine analytische oder effektive Singularität, also einen Sprung oder einen Knick, handelt.

Je nach der Anzahl der Eingangsparameter  $\bar{m}$ ,  $\sigma$  und  $\theta_f$  treten analytische oder effektive Singularitäten in einzelnen Punkten (Abbildung 8.25), auf Linien (Abbildung 8.26) bzw. auf ganzen Flächen auf. Liegt eine numerische Singularität in einem durch Gitterpunkte bestimmten Intervall vor, wird dieser Bereich numerisches Singularitätsintervall genannt.

In dieser Arbeit treten ein- (Szenario 2), zwei- (Szenarien 4 und 5) und dreidimensionale (Szenarien 6 und 7) Singularitätsintervalle auf.

- *eindimensionales numerisches Singularitätsintervall im Szenario 2:*  
Liegt im Intervall  $[m^\eta, m^{\eta+1}]$  eine numerische Singularität vor, so stellt das offene Intervall  $]m^\eta, m^{\eta+1}[$  das zugehörige Singularitätsintervall dar (Siehe Abbildung 8.24).

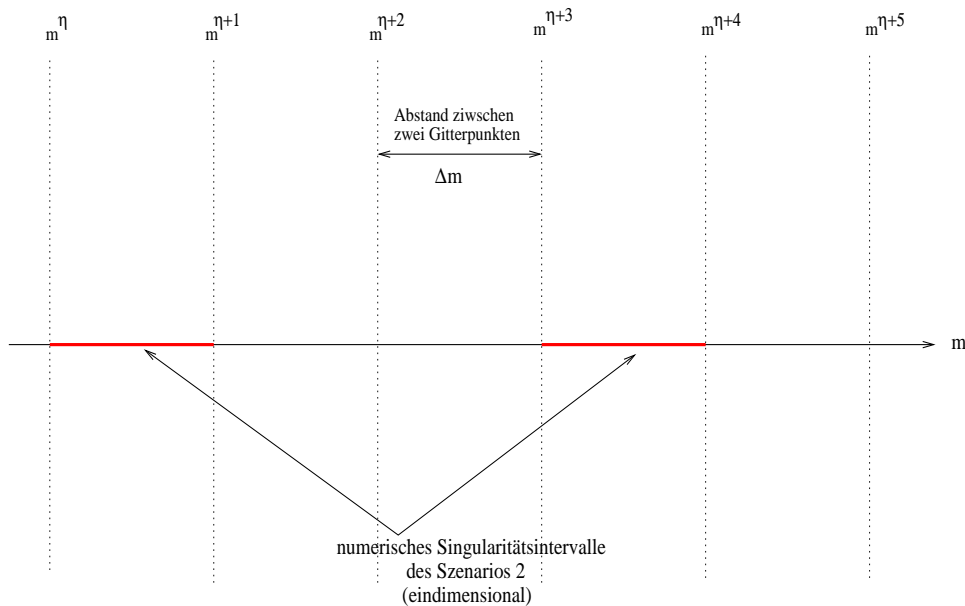


Abbildung 8.24: Eindimensionale Singularitätsintervalle (modellhaft)

Da die Lösung nur an diskreten Punkten vorliegt, ist die genaue Lage der effektiven Singularität nicht bekannt, sondern nur mit der Genauigkeit des Gitterpunktabstandes. Der Gitterpunktabstand der Datenbasen der Szenarien 1 bis 5 wurde solange verkleinert, bis keine neuen numerischen Singularitäten mehr auftraten.

Liegt nun ein eingehender Eingangsvektor in einem Singularitätsintervall, so kann nicht entschieden werden, ob er links oder rechts von der effektiven Singularität  $m_S$  liegt und infolgedessen nicht, ob der links oder rechts liegende Gitterpunkt zur Erstellung der Approximationslösung heranzuziehen



ist (Siehe Abbildung 8.27). Somit hat die Approximation innerhalb von Singularitätsintervallen zu unterbleiben.

Innerhalb von Singularitätsintervallen kommen die in Unterabschnitt 8.3.6 vorgestellten Ausweichstrategien zum Einsatz.

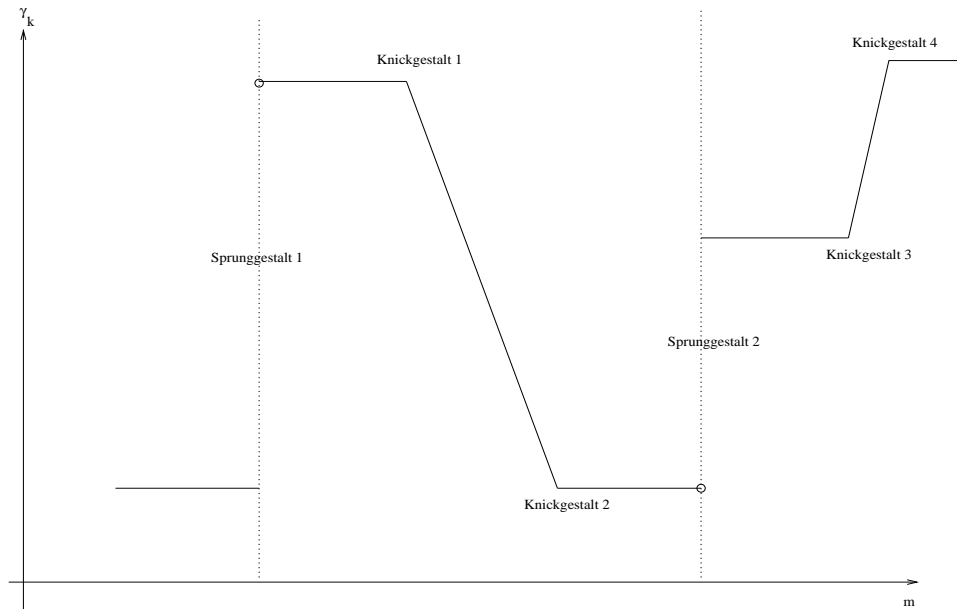


Abbildung 8.25: Gestalt von analytischen Singularitäten im eindimensionalen Gitter

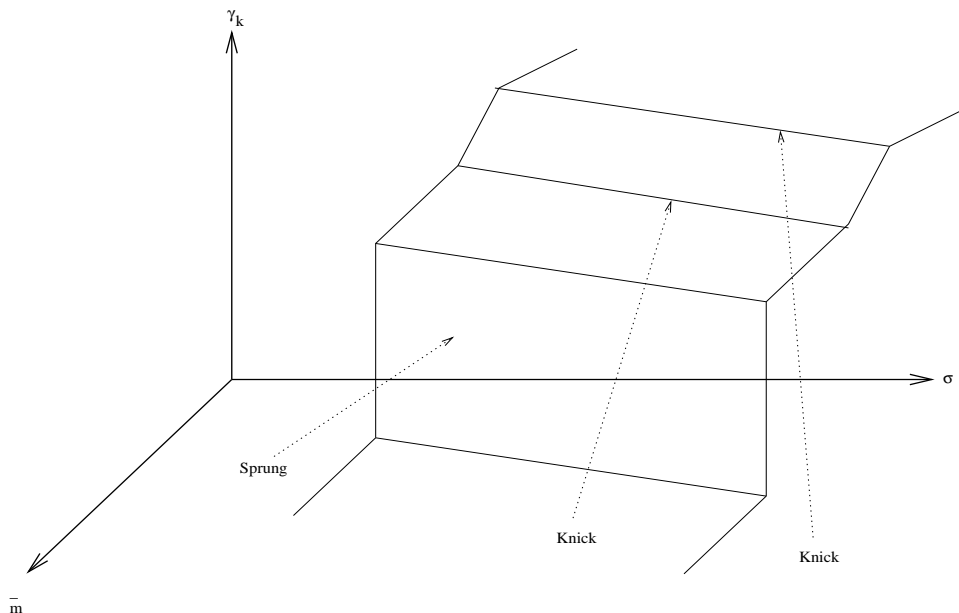


Abbildung 8.26: Singularitäten im zweidimensionalen Gitter

Die effektiven Singularitäten stehen im Zusammenhang mit Veränderungen der Menge der aktiven

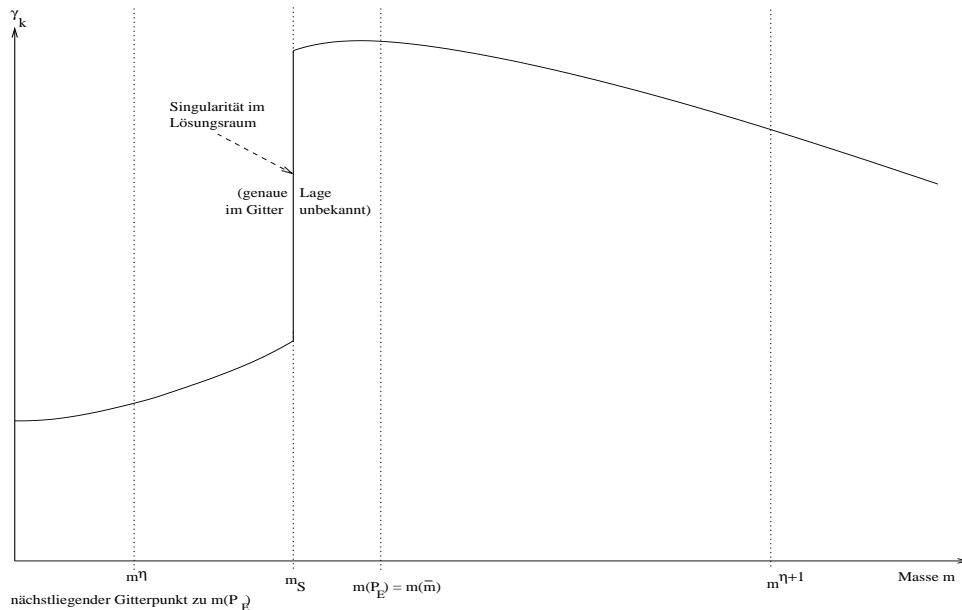


Abbildung 8.27: Eingangsvektor in einem Singularitätsintervall (Beispiel) - Da der Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  rechts von der effektiven Singularität  $m_S$  liegt, müßte zur Approximation  $m^{\eta+1}$  benutzt werden, obwohl  $m^\eta$  den nächstliegenden Gitterpunkt darstellt. Da im Anwendungsfall die genaue Lage der effektiven Singularität  $m_S$  jedoch nicht bekannt ist, kommen die Ausweichstrategien des Unterabschnittes 8.3.6 zum Einsatz

Ungleichungsnebenbedingungen (UNB); d.h. **der Typus der Optimallösung verändert sich:** Setzt man eine Optimallösung  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E)$

- in die Zielfunktion  $F$  ein, erhält man den Wert des Minimums;
- in den Vektor  $\mathbf{g}(\tilde{\gamma}^*, \mathbf{p}_E) \leq \mathbf{0}$  der Ungleichungsnebenbedingungen ein, so wird ein Teil seiner Komponenten den Wert 0 annehmen. Diese bilden die Menge  $\mathbf{g}_{aktiv} = \mathbf{0}$  der aktiven UNB. Die übrigen Ungleichungsnebenbedingungen nehmen Werte kleiner 0 an und bilden die Menge  $\mathbf{g}_{inaktiv} < \mathbf{0}$  der inaktiven UNB.

Werden nun die Komponenten des Eingangsvektors  $\mathbf{p}_E$  verändert, so liefert das Optimierungsverfahren eine andere Optimallösung, die dann, eingesetzt in die Zielfunktion  $F$  bzw. in den Vektor  $\mathbf{g}(\tilde{\gamma}^*, \mathbf{p}_E) \leq \mathbf{0}$  der Ungleichungsnebenbedingungen, zu einer abweichenden Menge  $\mathbf{g}_{aktiv} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{g}_{inaktiv} < \mathbf{0}$  führt. Infolge der Veränderung von  $\mathbf{p}_E$  können aktive Restriktionen inaktiv werden, d.h. ihr Wert erniedrigt sich auf einen Wert kleiner als 0, und inaktive Restriktionen aktiv werden, d.h. deren Wert erhöht sich auf 0. Die hier betrachteten Optimierungsprobleme weisen 3800 UNB<sup>9</sup> auf. Ihre Aufteilung in aktive und inaktive UNB zeigen die Abbildungen 8.28 und 8.29. Dabei liegt der Anteil der inaktiven UNB zwischen 83.2% und 84.8%, der der aktiven zwischen 15,2% und 16.8%.

Gemäß der Abbildungen (8.30), (8.31) und (8.33) bewirken Veränderungen der Komponenten des Eingangsvektors, daß inaktive UNB aktiv werden und aktive inaktiv. Die Abbildungen (8.30), (8.31) und (8.33) zeigen den prozentualen Anteil der UNB, die im Vergleich zum linken benachbarten Gitterpunkt ihren Aktivitätsstatus gewechselt haben.

<sup>9</sup>Siehe Abschnitt 7.3

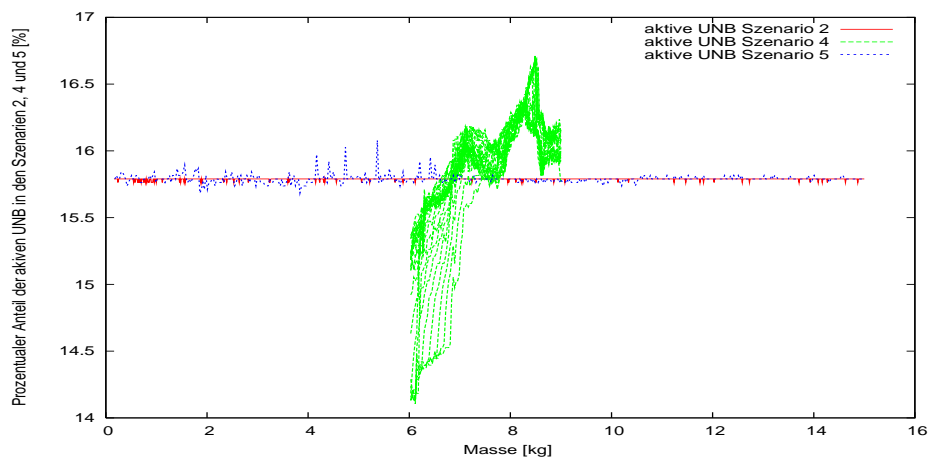


Abbildung 8.28: Szenarienweise prozentuale Darstellung der aktiven UNB

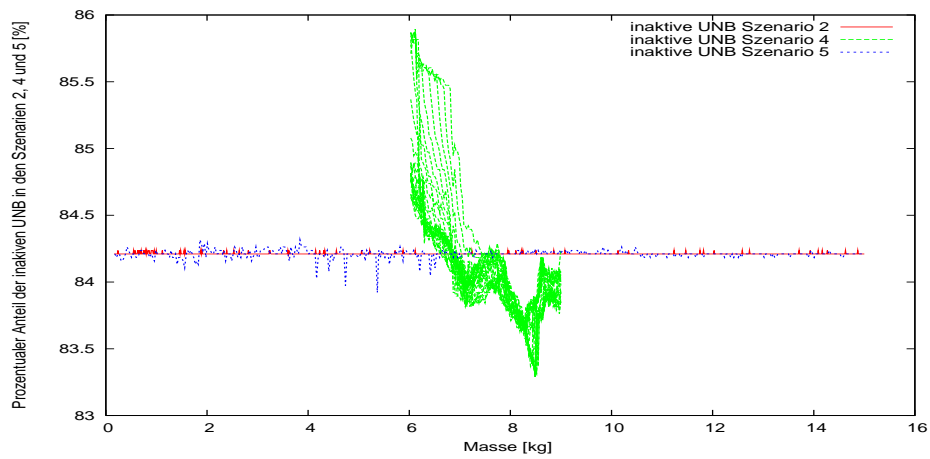


Abbildung 8.29: Szenarienweise prozentuale Darstellung der inaktiven UNB

### 8.2.1 Szenario 2: Numerische Singularitäten, Anzahl der Änderungen von aktiven/inaktiven UNB

Beispielhaft wird der zum geometrischen Pfad des 3. Gelenkes gehörende Koeffizient  $\gamma_{\theta_{37}}^*$  des Szenarios 2 in Abbildung 8.30<sup>10</sup> in Abhängigkeit von  $m$  dargestellt.

Der Koeffizient  $\gamma_{\theta_{37}}^*$  weist gemäß der Abbildung 8.30 an den Stellen  $0.54 \text{ kg}$ ,  $0.83 \text{ kg}$ ,  $0.90 \text{ kg}$ ,  $3.13 \text{ kg}$ ,  $6.45 \text{ kg}$ ,  $7.09 \text{ kg}$ ,  $7.94 \text{ kg}$  und  $8.63 \text{ kg}$  numerische Singularitäten auf. An diesen Stellen liegt der Prozentsatz der ihren Aktivitätsstatus wechselnden UNB im Vergleich zu den benachbarten Gitterpunkten deutlich höher:

- an der Stelle  $0.54 \text{ kg}$  bei 18.84%,
- an der Stelle  $0.83 \text{ kg}$  bei 1.16%,
- an der Stelle  $0.90 \text{ kg}$  bei 0.92%,
- an der Stelle  $3.13 \text{ kg}$  bei 1.10%,
- an der Stelle  $6.45 \text{ kg}$  bei 3.58%,
- an der Stelle  $7.09 \text{ kg}$  bei 1.95%,
- an der Stelle  $7.94 \text{ kg}$  bei 1.37%
- an der Stelle  $8.63 \text{ kg}$  bei 2.52% und
- an der Stelle  $13.84 \text{ kg}$  bei 0.84%.

*Bemerkung:*

Die Singularitäten  $0.54 \text{ kg}$ ,  $0.83 \text{ kg}$  und  $0.90 \text{ kg}$  sind für die Praxis nicht relevant, da derart leichte Gegenstände als Handgepäck an Bord gelangen.

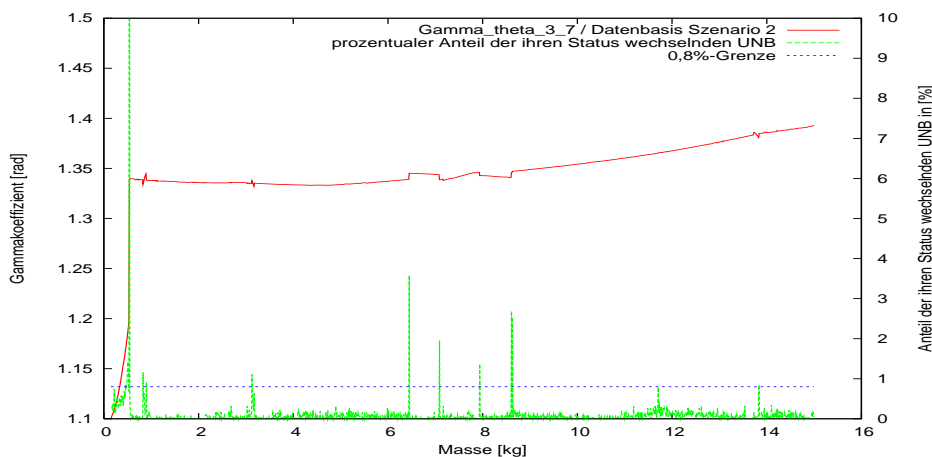


Abbildung 8.30: Szenario 2 - Koeffizient  $\gamma_{\theta_{37}}^*$  sowie prozentualer Anteil der ihren Status wechselnden UNB

Der **prozentuale** Anteil der ihren **Aktivitätsstatus** wechselnden UNB ist an den v.g. Singularitätsstellen **höher** als 0.8%.

<sup>10</sup>Somit gilt  $\sigma = 0$ .

### 8.2.2 Szenario 4: Numerische Singularitäten, Anzahl der Änderungen von aktiven/inaktiven UNB

Beispielhaft wird nun der zum Geschwindigkeitsprofil gehörende Koeffizient  $\gamma_{4\beta}^*$  (Abbildung 8.31) des Szenarios 4 in Abhängigkeit von  $\bar{m}_0$  dargestellt. Wie Abbildung 8.31 zeigt, weisen die Koeffizienten  $\gamma_{4\beta}^*$  vier kleine numerische Singularitäten auf, wobei die Lage der letzten drei sich mit änderndem  $\sigma_0$  verschiebt.

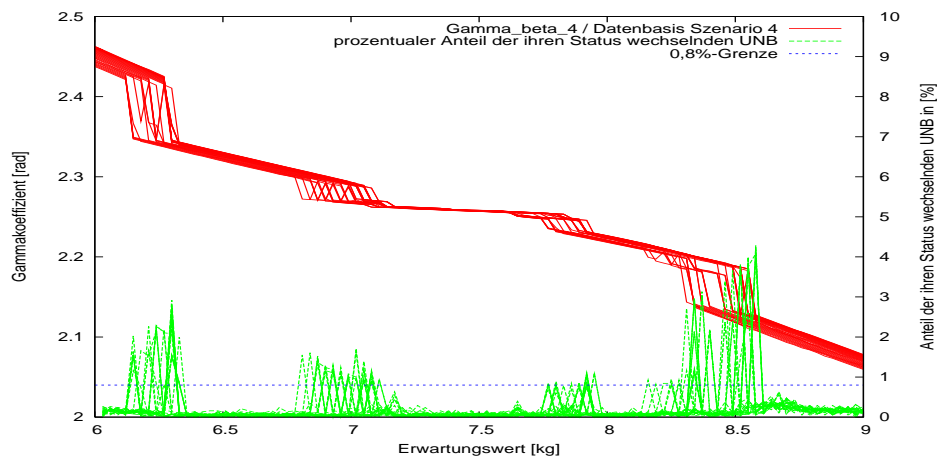


Abbildung 8.31: Szenario 4 - Koeffizient  $\gamma_{\beta_4}^*$  in Abhängigkeit vom Erwartungswert  $\bar{m}_0$  bei  $\sigma_0 = 1.5 \text{ kg} + \iota \cdot 0.3 \text{ kg}$ ,  $\iota = 1, 2, \dots, 10$  sowie prozentualer Anteil der ihren Status wechselnden UNB

Die Auswertung der Abbildung 8.31 ergibt für die Datenbasis des Szenarios 4 genau wie in Szenario 2, daß

- an der numerischen Singularitätsstellen der prozentuale Anteil der ihren Aktivitätsstatus wechselnden UNB größer oder gleich 0.8% ist.

### 8.2.3 Szenario 5: Numerische Singularitäten, Anzahl der Änderungen von aktiven/inaktiven UNB

Beispielhaft wird nun der zum Geschwindigkeitsprofil gehörende Koeffizient  $\gamma_{\beta_4}^*$  (Siehe Abbildungen 8.32) der Datenbasis des Szenarios 5 in Abhängigkeit von  $\bar{m}_1$  (rote Kurve) dargestellt, wobei der mittlere Fehler  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$  beträgt:

Die Abbildung 8.32 zeigt für den Koeffizienten  $\gamma_{\beta_4}^*$  vier Bereiche, in denen numerische Singularitäten auftreten:

- Bereich 1: ( $\bar{m}_1 = 3.63 \text{ kg}, \bar{m}_1 = 7.47 \text{ kg}$ ),
- Bereich 2: ( $\bar{m}_1 = 8.88 \text{ kg}, \bar{m}_1 = 10.14 \text{ kg}$ ),
- Bereich 3: ( $\bar{m}_1 = 13.59 \text{ kg}, \bar{m}_1 = 13.65 \text{ kg}$ ) und
- Bereich 4: ( $\bar{m}_1 = 14.28 \text{ kg}, \bar{m}_1 = 14.46 \text{ kg}$ ).

Parallel zu den Sprunghöhen von  $\gamma_{\beta_4}^*$  fallen die Differenzen der numerischen Singularitäten in den Bereichen 3 und 4 deutlich geringer aus als in den Bereichen 1 und 2. Abbildung 8.33 weist für die Stellen dieser vier Bereiche, an denen numerische Singularitäten auftreten, genau wie in den Szenarien 2 und 4 einen Anteil der ihren Status wechselnden UNB von über 0.8% (grüne Linie) aus.

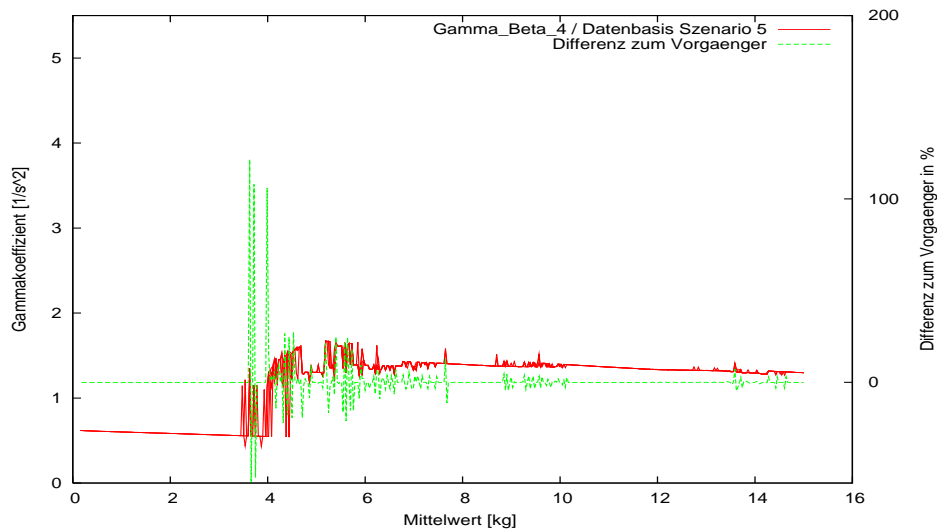


Abbildung 8.32: Szenario 5 - Koeffizient  $\gamma_{\beta_4}^*$  in Abhängigkeit von  $\bar{m}_1$  bei  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$  (rote Kurve) sowie prozentuale Differenz zum linken benachbarten Gitterpunkt der Datenbasis (grüne Kurve)

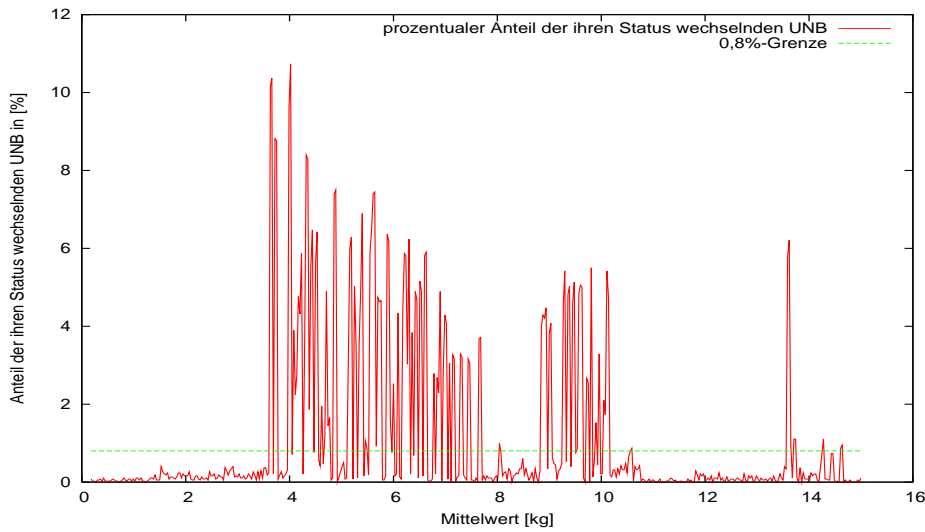


Abbildung 8.33: Szenario 5 - prozentualer Anteil der ihren Status wechselnden UNB in Abhängigkeit vom Mittelwert  $\bar{m}_1$  bei  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$

Die Abbildung 8.33 zeigt insgesamt den prozentualen Anteil der ihren Aktivitätsstatus wechselnden UNB (rote Kurve) bei der Optimallösung  $\gamma^* = \gamma^*(\bar{m}_1, \sigma_1 = 0.04 \text{ kg})$  in Abhängigkeit vom Mittelwert  $\bar{m}_1$  im Szenario 5. Es gibt 3800 Ungleichungsnebenbedingungen. Jede dieser Bedingungen kann aktiv bzw. inaktiv sein. Durch den Übergang von einem Gitterpunkt zum nächsten wechseln einige UNB ihren Aktivitätsstatus, d.h. die betreffenden wechseln von aktiv nach inaktiv oder umgekehrt. Die rote Kurve gibt den prozentualen Anteil der ihren Aktivitätsstatus wechselnden UNB bezogen auf 3800 UNB an.

#### Fazit für die Datenbasen der Szenarien 2, 4 und 5:

- Numerische Singularitäten fallen immer mit einem prozentualen Anteil der ihren Aktivitätsstatus wechselnden UNB von größer oder gleich 0.8% zusammen.

### 8.2.4 Koeffizienten in Abhängigkeit von der Standardabweichung

Beispielhaft werden nun die zum Geschwindigkeitsprofil gehörenden optimalen Koeffizienten  $\gamma_{\beta_4}^*$  (Abbildung 8.34) und  $\gamma_{\beta_3}^*$  (Abbildung 8.35) in Abhängigkeit von  $\sigma_0$  bei dem Erwartungswert  $\bar{m}_0 = 10.0 \text{ kg}$  auf der Stufe 0 dargestellt.

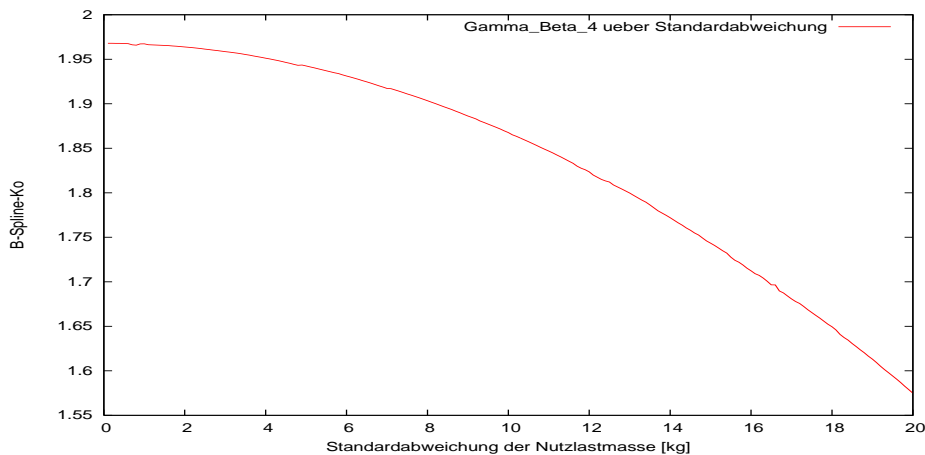


Abbildung 8.34: Abhängigkeit des optimalen  $\gamma_{\beta_4}^*$ -Koeffizienten von der Standardabweichung  $\sigma_0$  bei  $\bar{m}_0 = 10.0 \text{ kg}$

Wie die Abbildungen 8.34 und 8.35 zeigen, weist der Koeffizient  $\gamma_{\beta_4}^*$  einen sehr glatten Verlauf im Gegensatz zum Koeffizienten  $\gamma_{\beta_3}^*$  über  $\sigma_0$  auf.

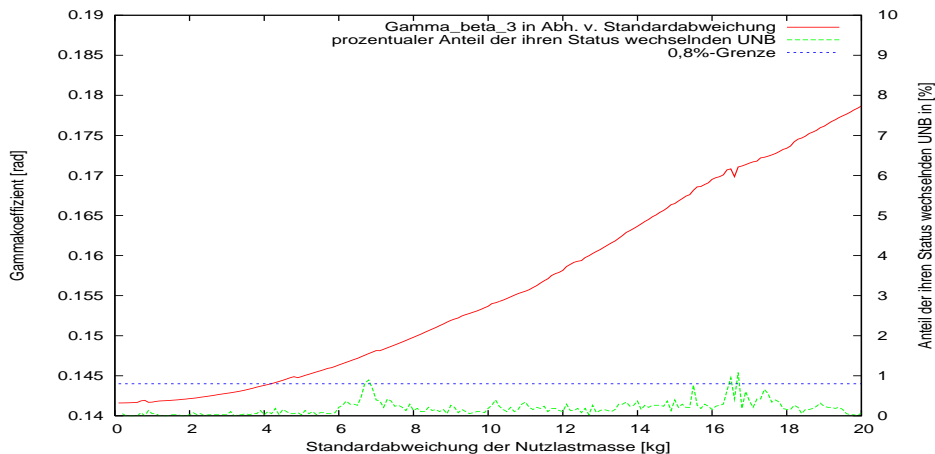


Abbildung 8.35: Abhängigkeit des optimalen  $\gamma_{\beta_3}^*$ -Koeffizienten von der Standardabweichung  $\sigma_0$  bei  $\bar{m}_0 = 10.0 \text{ kg}$

An den Stellen  $\sigma_0 = 16.5 \text{ kg}$  und  $\sigma_0 = 16.7 \text{ kg}$  weist der Koeffizient  $\gamma_{\beta_3}^*$  zwei numerische Singularitäten auf. An den beiden Singularitätsstellen wechseln mehr als 0.8% der Ungleichungsnebenbedingungen ihren Aktivitätsstatus.

Es zeigt sich, daß die **0.8%-Grenze** auch in **Richtung** der **Standardabweichung** gilt.



### 8.3 Erkennung numerischer Singularitäten

Die in der Einleitung des Kapitels 8 erfolgte Definition der numerischen Singularitäten und des zugehörigen Singularitätsintervalls mittels des **Singularitätskriteriums** (8.7) zielt auf den Ausschluß von Bereichen der Datenbasis ab, in denen ein niedriger Approximationsfehler nicht garantiert ist.

Diese Arbeit wendet abhängig vom **Entscheidungskriterium für die Art der Approximation** entweder ein Approximationsverfahren 0-ter Ordnung oder alternativ ein Approximationsverfahren 1-ter Ordnung an:

- Verfahren 0-ter Ordnung:

Geht ein Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  ( $= m$  bzw.  $\bar{m}$ ) ein, so wird der Koeffizient  $\tilde{\gamma}_k^\eta$ ,  $k = 1, \dots, K$  des nächstliegenden linken Gitterpunktes  $m^\eta$  als Näherungslösung herangezogen (Siehe Abbildung 8.5):

$$\tilde{\gamma}_k^g := \tilde{\gamma}_k^\eta \quad k = 1, \dots, K \quad (8.42)$$

- Verfahren 1-ter Ordnung:

Geht ein Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  ( $= m$  bzw.  $\bar{m}$ ) ein, so wird von dem Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k^\eta$ ,  $k = 1, \dots, K$  des nächstliegenden linken Gitterpunktes  $m^\eta$  aus eine nach dem ersten Glied abgebrochene Taylorreihe entwickelt, die dann als Näherungslösung herangezogen wird (Siehe Abbildung 8.5):

$$\tilde{\gamma}_k^g := \tilde{\gamma}_k^\eta + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^\eta}{\partial m} \cdot \left( m(\bar{m}) - m^\eta \right) \quad k = 1, \dots, K. \quad (8.43)$$

Aus den Koeffizienten  $\tilde{\gamma}^*$  werden über die Linearkombinationen das Geschwindigkeitsprofil  $\beta(s)$ , die Winkel  $\theta(s)$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}(s)$  gebildet. Da an der Stelle  $m$  bzw.  $\bar{m}$  anstatt von  $\tilde{\gamma}^*(m)$  bzw.  $\tilde{\gamma}^*(\bar{m})$  nun deren Approximationen  $\tilde{\gamma}^g$  verwendet werden, pflanzen sich die Approximationsfehler  $\Delta\tilde{\gamma}_{\tilde{k}}$  über die Linearkombinationen (7.1) in das Geschwindigkeitsprofil  $\beta(s)$ , die Winkel  $\theta(s)$  und die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}(s)$  fort und addieren sich auf. Die maximal zulässige Abweichung muß daher möglichst klein sein und wird hier gemäß Ungleichung (8.3) auf 5% festgelegt.

Das **Singularitätskriterium** (8.7) verhindert, daß in einem Intervall  $[m^\eta, m^{\eta+1}]$  die optimalen Koeffizienten  $\tilde{\gamma}^*$  gemäß (8.42) oder (8.43) approximiert werden, wenn in diesem Intervall eine Singularität der Lösungskurve zu erwarten ist und infolgedessen ein niedriger Approximationsfehler mit einem Verfahren 0-ter bzw. 1-ter Ordnung nicht erreicht werden kann. Ein Bereich, der das Singularitätskriterium verletzt, wird im folgenden als **Singularitätsintervall** bezeichnet. **In Singularitätsintervallen darf in der Regel nicht approximiert werden.**

Gemäß des Einleitungsteils des Kapitels 8 werden

- die Singularitäten mittels des **Singularitätskriteriums**

bestimmt.

*Hinweis:*

Die in den folgenden Unterkapiteln 8.3.1, 8.3.2, und 8.3.3 gezeigten Grafiken 8.36, 8.37 und 8.38 besitzen

- auf der linken Seite eine y-Achse zur Darstellung eines Koeffizienten mit optisch gut sichtbaren Singularitäten,
- auf der rechten Seite eine zweite y-Achse zur Angabe der Verletzung des Singularitätskriteriums in  $m$ - (Szenario 2),  $\bar{m}_0$ - (Szenario 4) bzw.  $\bar{m}_1$ -Richtung (Szenario 5).

Ein grünes Pluszeichen am Punkt  $(x = m, y = 0)$  bzw.  $(x = \bar{m}, y = 0)$  steht dafür, daß

- das Singularitätskriterium (8.7) an der Stelle  $m$  bzw.  $\bar{m}$  verletzt ist und
- an dieser Stelle ein Singularitätsintervall vorliegt.

### 8.3.1 Verletzungen am Beispiel des Szenario 2

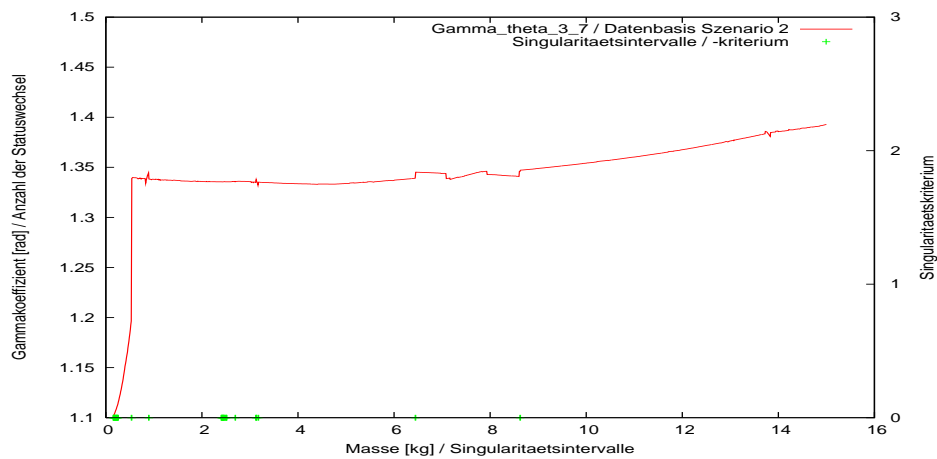


Abbildung 8.36: Koeffizient  $\gamma_{\theta_{3,7}}^*$  in Abhängigkeit von  $m$  sowie Singularitätsintervalle

Das Singularitätskriterium (8.7) erfaßt die numerische Singularitätsstellen  $0.54 \text{ kg}$ ,  $0.83 \text{ kg}$ ,  $3.13 \text{ kg}$ ,  $6.45 \text{ kg}$  und  $8.63 \text{ kg}$  (Abbildung 8.36). Insgesamt weist das Singularitätskriterium (8.7) 29 Singularitätsintervalle aus, die damit im Szenario 2 1.94% des Lösungsraumes für eine Approximation sperren.

## 8.3.2 Verletzungen am Beispiel des Szenario 4

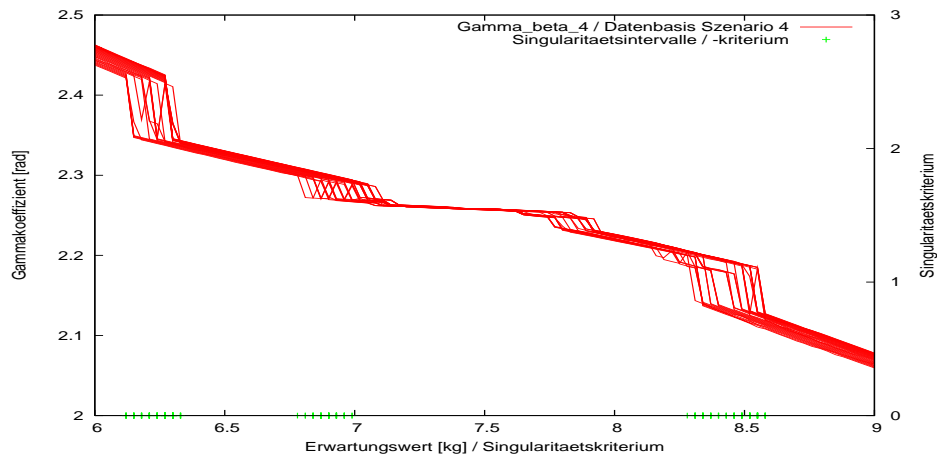


Abbildung 8.37: Koeffizient  $\gamma_{\beta_4}^*$  in Abhängigkeit von  $\bar{m}_0$  bei  $\sigma_0 = 1.5 \text{ kg} + \iota \cdot 0.3 \text{ kg}$ ,  $\iota = 1, 2, \dots, 10$  sowie Singulärtaetsintervalle

Das Singulärtaetskriterium (8.7) erkennt, wie die Abbildung 8.37 zeigt, drei Blöcke numerischer Singulärtaetsintervalle:

- $(\bar{m}_0 = 6.12 \text{ kg}, \bar{m}_0 = 6.33 \text{ kg})$ ,
- $(\bar{m}_0 = 6.81 \text{ kg}, \bar{m}_0 = 6.99 \text{ kg})$  und
- $(\bar{m}_0 = 8.31 \text{ kg}, \bar{m}_0 = 8.55 \text{ kg})$ .

Die sprunghaftigen Veränderungen in der Umgebung von  $\bar{m}_0 = 7.75 \text{ kg}$  verletzen das Singulärtaetskriterium (8.7) nicht.

Insgesamt weist das Singulärtaetskriterium 96 Singulärtaetsintervalle in Richtung des Parameter  $\bar{m}_0$  aus, die damit im Szenario 4 3.31% des Lösungsraumes für eine Approximation sperren.

### 8.3.3 Verletzungen am Beispiel des Szenario 5

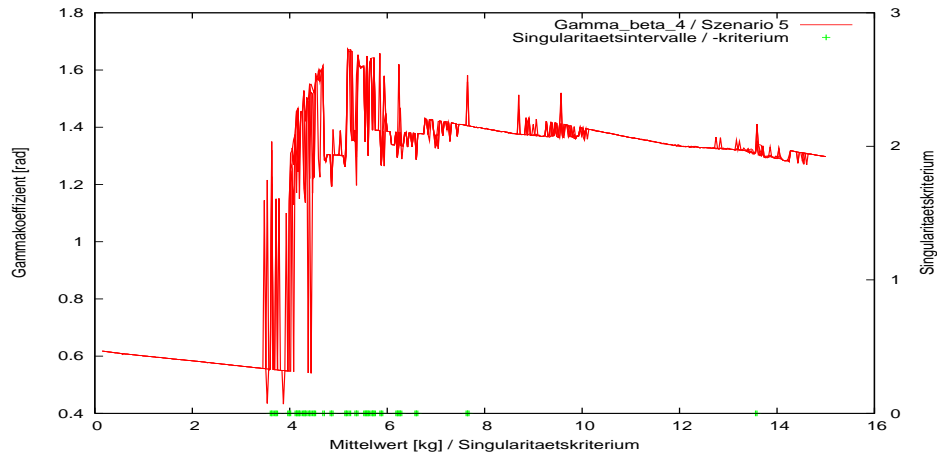


Abbildung 8.38: Koeffizient  $\gamma_{\beta_4}^*$  in Abhängigkeit vom Mittelwert  $\bar{m}_1$  bei  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$  sowie Singularkriterium

Die der Abbildung 8.38 gezeigten Verletzungen des Singularkriteriums (8.7) finden sich in der Abbildung 8.41 auf der Parallelen zur x-Achse, die durch  $\sigma_1 = 0.04 \text{ kg}$  verläuft.

Die Abbildung 8.38 zeigt für den Koeffizienten  $\gamma_{\beta_4}^*$  drei Bereiche, in denen numerische Singularitäten auftreten:

- Bereich 1: ( $\bar{m}_1 = 3.6 \text{ kg}, \bar{m}_1 = 6.9 \text{ kg}$ ),
- Bereich 2: ( $\bar{m}_1 = 7.62 \text{ kg}, \bar{m}_1 = 7.68 \text{ kg}$ ) und
- Bereich 3: ( $\bar{m}_1 = 13.56 \text{ kg}, \bar{m}_1 = 13.59 \text{ kg}$ ).

Die sprunghaften Veränderungen im Intervall ( $\bar{m}_1 = 8.5 \text{ kg}, \bar{m}_1 = 10.0 \text{ kg}$ ) verletzen das Singularkriterium (8.7) nicht.

Das Singularkriterium wird im Bereich 1 häufig, im Bereich 2 mehrfach und im Bereich 3 einmal verletzt. Insgesamt weist das Singularkriterium in Richtung des Mittelwertes  $\hat{m}_1$  mit  $\sigma_1$  als Parameter 223 Singularkriteriumsausfälle aus, die damit im Szenario 5 11.26% des Lösungsraumes für eine Approximation sperren.

*Bemerkung:*

*Eine Klassifizierung der numerischen Singularitäten anhand der prozentualen Differenzen ist nicht möglich, da die prozentualen Unterschiede von Koeffizient zu Koeffizient sehr unterschiedlich ausfallen.*

### 8.3.4 Verletzungen am Beispiel der Szenarien 6 und 7

Im Szenario 6 weist das Singularkriterium in  $\theta_{3f}$ -Richtung mit  $\theta_{1f}$  als Parameter 64 Singularkriteriumsausfälle aus, die damit im Szenario 2 6.4% des Lösungsraumes für eine Approximation sperren.

Im Szenario 7 weist das Singularkriterium keine Singularkriteriumsausfälle aus. Eine Approximation ist im gesamten Gitterraum möglich.

### 8.3.5 Verletzung des Singularitätskriteriums: Zusammenstellung

#### Anmerkung:

- Szenario 2:  
Der Gitterraum des Szenarios 2
  - ist eindimensional,
  - enthält 1496 Gitterpunkte, die 1495 *eindimensionale* Intervalle einschließen, und
  - erstreckt sich von  $m = 0.15 \text{ kg}$  bis  $m = 15.0 \text{ kg}$  (Siehe Abschnitt 8.1.1).
- Szenario 4:  
Der Gitterraum des Szenarios 4
  - ist zweidimensional,
  - enthält 3030 Gitterpunkte, die pro in  $\bar{m}_0$ -Richtung verlaufender Gitterlinie 100 Intervalle einschließen,
  - erstreckt sich in Richtung des Erwartungswertes von  $\bar{m}_0 = 6.0 \text{ kg}$  bis  $\bar{m}_0 = 9.0 \text{ kg}$  und in Richtung der Standardabweichung von  $\sigma_0 = 1.5 \text{ kg}$  bis  $\sigma_0 = 4.5 \text{ kg}$  (Siehe Abschnitt 8.1.2).
- Szenario 5:  
Der Gitterraum des Szenarios 5
  - ist zweidimensional,
  - enthält 2480 Gitterpunkte, die pro in  $\bar{m}_1$ -Richtung verlaufender Gitterlinie 495 Intervalle einschließen,
  - erstreckt sich in Richtung des Mittelwertes von  $\bar{m}_1 = 0.15 \text{ kg}$  bis  $\bar{m}_1 = 15.0 \text{ kg}$  und in Richtung des mittleren Fehlers von  $\sigma_1 = 0.02 \text{ kg}$  bis  $\sigma_1 = 0.06 \text{ kg}$  (Siehe Abschnitt 8.1.3).
- Szenarien 6 und 7:  
Die Gitterräume der Szenarien 6 und 7
  - sind dreidimensional,
  - enthalten jeweils 1331 Gitterpunkte, die pro in  $\theta_{3f}$ -Richtung verlaufender Gitterscheibe 110 Intervalle in  $\theta_{3f}$ -Richtung einschließen,
  - erstrecken sich
    - \* in Richtung der Endstellung des 1. Gelenkes von 2.345 bis 2.355 [rad],
    - \* in Richtung der Endstellung des 2. Gelenkes von 1.042 bis 1.052 [rad] und
    - \* in Richtung der Endstellung des 3. Gelenkes von 0.780 bis 0.790 [rad]
 (Siehe Abschnitte 8.1.4 und 8.1.5).

Die beiden folgenden Tabellen geben die Anzahl der Singularitätsintervalle des jeweiligen Szenarios an.

Szenario 2	Singularitätsintervalle
	29

Tabelle 8.1: Szenario 2 - Anzahl der Singularitätsintervalle aufgrund von Verletzungen des Singularitätskriteriums (8.7) Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die 1495 Intervalle in  $m$ -Richtung.

Szenario 4	Singularitätsintervalle
$\sigma_0 \in \{1.6 \text{ kg}, 1.7 \text{ kg}, \dots, 2.5 \text{ kg}\}$	2 (= 2%)
$\sigma_0 = 2.6 \text{ kg}$	3 (= 3%)
$\sigma_0 \in \{2.7 \text{ kg}, 2.8 \text{ kg}, \dots, 3.0 \text{ kg}\}$	3 (= 3%)
$\sigma_0 = 3.1 \text{ kg}$	6 (= 6%)
$\sigma_0 = 3.2 \text{ kg}$	4 (= 4%)
$\sigma_0 = 3.3 \text{ kg}$	2 (= 2%)
$\sigma_0 = 3.4 \text{ kg}$	3 (= 3%)
$\sigma_0 = 3.5 \text{ kg}$	5 (= 5%)
$\sigma_0 = 3.6 \text{ kg}$	4 (= 4%)
$\sigma_0 = 3.7 \text{ kg}$	4 (= 4%)
$\sigma_0 = 3.8 \text{ kg}$	5 (= 5%)
$\sigma_0 = 3.9 \text{ kg}$	4 (= 4%)
$\sigma_0 = 4.0 \text{ kg}$	4 (= 4%)
$\sigma_0 = 4.1 \text{ kg}$	5 (= 5%)
$\sigma_0 \in \{4.2 \text{ kg}, 4.3 \text{ kg}\}$	5 (= 5%)
$\sigma_0 \in \{4.4 \text{ kg}, 4.5 \text{ kg}\}$	3 (= 3%)
Summe:	96

Tabelle 8.2: Szenario 4 - Anzahl der Singularitätsintervalle aufgrund von Verletzungen des Singularitätskriteriums (8.7) in  $\bar{m}_0$ -Richtung mit  $\sigma_0$  als Parameter. Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die 100 in  $\bar{m}_0$ -Richtung verlaufenden Intervalle pro  $\sigma_0$ -Gitterlinie.

Szenario 5	Singularitätsintervalle
$\sigma_1 := 0.02 \text{ kg}$	40 (= 8.08%)
$\sigma_1 := 0.03 \text{ kg}$	28 (= 5.65%)
$\sigma_1 := 0.04 \text{ kg}$	31 (= 6.26%)
$\sigma_1 := 0.05 \text{ kg}$	18 (= 3.64%)
$\sigma_1 := 0.06 \text{ kg}$	26 (= 5.25%)
Summe:	223

Tabelle 8.3: Szenario 5 - Anzahl der Singularitätsintervalle aufgrund von Verletzungen des Singularitätskriteriums (8.7) in  $\bar{m}_1$ -Richtung mit  $\sigma_1$  als Parameter. Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die 495 in  $\bar{m}_1$ -Richtung verlaufenden Intervalle pro  $\sigma_1$ -Gitterlinie.

Szenario 6	Singularitätsintervalle
$\theta_{1f} := 2.345$	0 (= 0%)
$\theta_{1f} := 2.346$	3 (= 2.72%)
$\theta_{1f} := 2.347$	2 (= 1.81%)
$\theta_{1f} := 2.348$	2 (= 1.81%)
$\theta_{1f} := 2.349$	1 (= 0.91%)
$\theta_{1f} := 2.350$	7 (= 6.36%)
$\theta_{1f} := 2.351$	4 (= 3.63%)
$\theta_{1f} := 2.352$	7 (= 6.36%)
$\theta_{1f} := 2.353$	10 (= 9.1%)
$\theta_{1f} := 2.354$	13 (= 11.81%)
$\theta_{1f} := 2.355$	13 (= 13.63%)
Summe:	64

Tabelle 8.4: Szenario 6 - Anzahl der Singularitätsintervalle aufgrund von Verletzungen des Singularitätskriteriums (8.7) in  $\theta_{3f}$ -Richtung mit  $\theta_{1f}$  und  $\theta_{2f}$  als Parameter, wobei eine Addition die über  $\theta_{2f}$  erfolgt, so daß jeweils 11 Gitterlinien zu  $\theta_{1f}$ -Scheiben mit jeweils 110 Intervallen in  $\theta_{3f}$ -Richtung zusammengefaßt werden. Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die 110 in  $\theta_{3f}$ -Richtung verlaufenden Intervalle pro  $\theta_{1f}$ -Scheibe.

Die Abbildungen 8.39 bis 8.42 zeigen beispielhaft die Singularitätsintervalle der Szenarien 2, 4, 5 und 6.

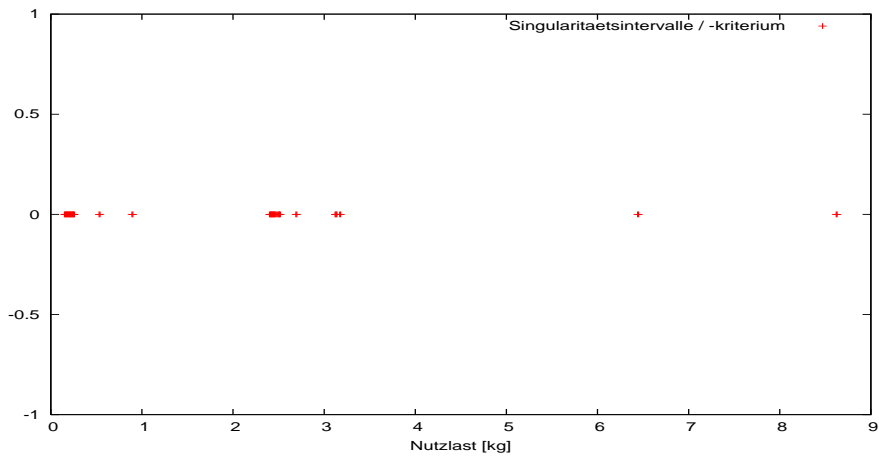


Abbildung 8.39: Szenario 2 - 29 Singularitätsintervalle gemäß des Singularitätskriteriums (8.7)

Die Abbildung 8.39 zeigt die 29 Singularitätsintervalle des Szenarios 2, die durch die Verletzung des Singularitätskriteriums (8.7) zustande kommen. Aufgrund des geringen Abstandes zwischen den Gitterpunkten mußten Kreuze zur Kennzeichnung der Intervalle verwendet werden.

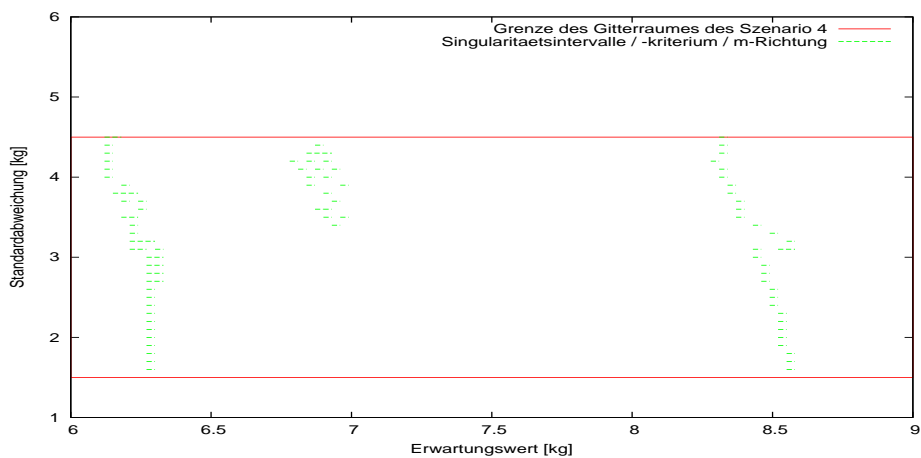


Abbildung 8.40: Szenario 4 - 96 Singularitätsintervalle gemäß des Singularitätskriteriums (8.7) in  $\bar{m}_0$ -Richtung mit  $\sigma_0$  als Parameter

Die Abbildung 8.40 zeigt die 96 Singularitätsintervalle des Szenarios 4 in  $\bar{m}_0$ -Richtung, die durch die Verletzung des Singularitätskriteriums (8.7) zustande kommen und sich in die drei Blöcke ( $\bar{m}_0 = 6.12 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 6.33 \text{ kg}$ ), ( $\bar{m}_0 = 6.81 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 6.99 \text{ kg}$ ) und ( $\bar{m}_0 = 8.31 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 8.55 \text{ kg}$ ) aufteilen.



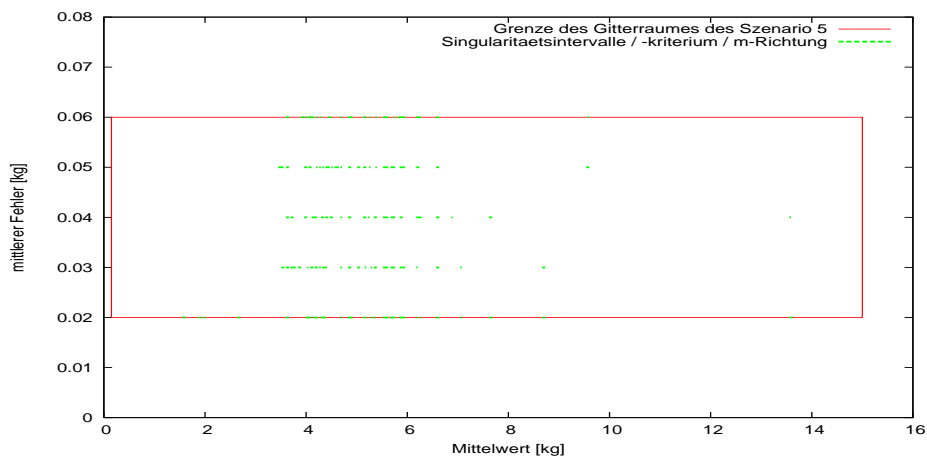


Abbildung 8.41: Szenario 5 - 223 Singularitätsintervalle gemäß des Singularitätskriteriums (8.7) in  $\bar{m}_1$ -Richtung mit  $\sigma_1$  als Parameter

Die Abbildung 8.41 zeigt die 223 Singularitätsintervalle des Szenarios 5 in  $\bar{m}_1$ -Richtung, die durch die Verletzung des Singularitätskriteriums (8.7) zustande kommen.

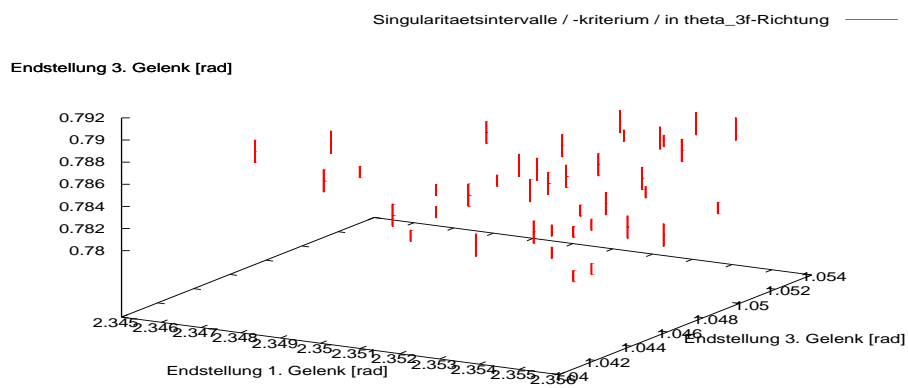


Abbildung 8.42: Szenario 6 - Singularitätsintervalle aufgrund von Verletzungen des Singularitätskriteriums (8.7) in  $\theta_{3f}$ -Richtung mit  $\theta_{1f}$  als Parameter

Die Abbildung 8.42 zeigt die 64 Singularitätsintervalle des Szenarios 6 in  $\theta_{3f}$ -Richtung, die durch Verletzung des Singularitätskriteriums (8.7) zustande kommen.

### 8.3.6 Approximation bei Verletzung des Singularitätskriteriums

Das Durchsuchen einer Datenbasis geschieht wie folgt:

- Die konkrete Ausgangssituation im Anwendungsfall wird als Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  dargestellt.
- Zu diesem wird aus der Datenbasis der Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  herausgesucht.

Ist das Singularitätskriterium (8.7) nicht verletzt, d.h.  $\mathbf{p}_E$  liegt **nicht** in einem **Singularitätsintervall**, ergibt sich  $\tilde{\gamma}_g$  gemäß Formel (8.42) bzw. (8.43). Die durch Anwendung des Singularitätskriteriums

- erzielten **absoluten Approximationsfehler** des **Lösungsraumes** zeigt das Unterkapitel 9.2,
- die sich daraus ergebenden **absoluten Approximationsfehler** des **Konfigurationsraumes** das Unterkapitel 9.3.

Das Unterkapitel 9.2 führt darüber hinaus den Nachweis, daß das Singularitätskriterium die Einhaltung der 5%-Grenze wirklich sicherstellt.

Liegt der Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  hingegen in einem **Singularitätsintervall**, kann **keine** neue Referenztrajektorie unter Rückgriff auf ein äquidistantes Gitter in Echtzeit approximiert werden<sup>11</sup>. Da jedoch in allen Szenarien Beförderungspflicht für das Gepäckstück besteht, wird zu deren Erfüllung innerhalb von Singularitätsintervallen folgendermaßen vorgegangen:

Szenario 2: Durch das Wiegen des Gepäckstückes am Eincheckschalter wird erkannt, daß dessen Masse in einem Singularitätsintervall liegt. Die Beförderungszeit bis zur Umschlagstation<sup>12</sup> nutzt der Steuerrechner zur Berechnung einer deterministischen, in Bezug auf die Masse optimalen Referenztrajektorie mittels SQP gemäß Szenario 1. Diese Referenztrajektorie<sup>13</sup> benötigt keinerlei Regelaufwand.

Somit läßt sich Szenario 2 bei Vorhandensein von Singularitätsintervallen nur in Kombination mit Szenario 1 verwenden, da im Szenario 2 **innerhalb** von Singularitätsintervallen **keines** der beiden Approximationsverfahren gemäß Formel (8.42) bzw. (8.43), sondern stattdessen eine **Rechnung** gemäß Szenario 1 ausgeführt wird. Innerhalb der Singularitätsvalle verwendet das Szenario 2 eine Ausweichstrategie gemäß *Prinzip 1*<sup>14</sup>.

Szenario 4: Da in einem Singularitätsintervall kein Update der  $\tilde{\gamma}$ -Koeffizienten möglich ist, werden die bisherige Vorsteuerung und Referenztrajektorie weiter verwendet, bis wieder Eingangsparameter erscheinen, bei denen die Approximationskriterien erfüllt sind und damit eine Anpassung der  $\gamma$ -Koeffizienten und damit der Führungsfunktion möglich ist.

Szenario 4 läßt sich bei Vorhandensein von Singularitätsintervallen nur in Kombination mit Szenario 3 verwenden. Somit wird im Szenario 4 innerhalb von **Singularitätsintervallen** **keines** der beiden Approximationsverfahren benutzt. Innerhalb der Singularitätsintervalle verwendet das Szenario 4 eine Ausweichstrategie gemäß *Prinzip 3*<sup>15</sup>.

<sup>11</sup>Daher ist eine Angabe des absoluten Approximationsfehlers innerhalb eines Singularitätsintervalls auch nicht sinnvoll.

<sup>12</sup>ca. 2-3 Minuten

<sup>13</sup>Durch Hinzufügen der mit SQP berechneten Referenztrajektorie zur Datenbasis verkleinert Szenario 2 selbsttätig die Ausdehnung der Singularitätsintervalle und verhält sich hinsichtlich der Singularitätsintervalle selbstlernend.

<sup>14</sup>Siehe Einleitungstext des Kapitels 8

<sup>15</sup>Siehe Einleitungstext des Kapitels 8

Szenario 5: Liegen Mittelwert  $\bar{m}_1$  und der mittlere Fehler  $\sigma_1$  in einem Singularitätsintervall, wird die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}$  bis zum Endpunkt beibehalten. Die Singularitätsintervalle gefährden daher nicht die Beförderungspflicht; eine Regelaufwandsersparnis kann in diesen Fällen jedoch nicht erzielt werden.

Somit wird im Szenario 5 innerhalb von **Singularitätsintervallen keines** der beiden Approximationsverfahren angewendet, sondern eine Ausweichstrategie gemäß *Prinzip 2*<sup>16</sup>.

Szenario 6: Innerhalb der Singularitätsintervalle des Szenarios 6 läßt sich keines der *Prinzipien 1 bis 3* einsetzen. Um der bestehenden Beförderungspflicht nachzukommen, wird gemäß Formel (8.42) bzw. (8.43) approximiert. Ein hoher Approximationsfehler ist vertretbar, da Szenario 6 nur bei Positionierungsungenauigkeiten des Systems Kofferabtransport und damit lediglich auf einzelne Koffer angewandt wird.

Szenario 7: Das Szenario 7 weist keine Singularitätsintervalle auf. Somit kommen hier keine Ausweichstrategien zum Einsatz.

---

<sup>16</sup>Siehe Einleitungstext des Kapitels 8

## 8.4 Durchführung der Echtzeitapproximation

Trifft nun im Betrieb des Roboters ein effektiver Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  am Steuerrechner ein, so wird in Abhängigkeit vom gültigen Szenario die zugehörige Datenbasis nach dem Gitterpunkt mit dem nächstliegenden Eingangsvektor durchsucht (Siehe Abb. 8.43).

Die Kriterien dafür lauten:

Szenario 2:

$$m^{\eta^\circ} = \arg \min_{(\eta) \in \mathcal{M}} \left| \frac{m^\eta - m}{\Delta m} \right| \quad (8.44)$$

mit  $\mathcal{M} = \{(\eta) : 1 \leq \eta \leq 1496\}$ .

Szenario 4:

$$(\bar{m}_0^{\eta^\circ}, \sigma_0^{\iota^\circ}) = \arg \min_{(\eta, \iota) \in \mathcal{M}} \left( \left| \frac{\bar{m}_0^\eta - \bar{m}_0}{\Delta \bar{m}_0} \right| + \left| \frac{\sigma_0^\iota - \sigma_0}{\Delta \sigma_0} \right| \right) \quad (8.45)$$

mit  $\mathcal{M} = \{(\eta, \iota) : 1 \leq \eta \leq 101, 1 \leq \iota \leq 30\}$ .

Szenario 5:

$$(\bar{m}_1^{\eta^\circ}, \sigma_1^{\iota^\circ}) = \arg \min_{(\eta, \iota) \in \mathcal{M}} \left( \left| \frac{\bar{m}_1^\eta - \bar{m}_1}{\Delta \bar{m}_N} \right| + \left| \frac{\sigma_1^\iota - \sigma_1}{\Delta \sigma_N} \right| \right) \quad (8.46)$$

mit  $\mathcal{M} = \{(\eta, \iota) : 1 \leq \eta \leq 496, 1 \leq \iota \leq 5\}$ .

Szenario 6:

$$(\theta_{1f}^{\eta^\circ}, \theta_{2f}^{\iota^\circ}, \theta_{3f}^{\zeta^\circ}) = \arg \min_{(\eta, \iota, \zeta) \in \mathcal{M}} \left( \left| \frac{\theta_{1f}^\eta - \theta_{1f}}{\Delta \theta_{1f}} \right| + \left| \frac{\theta_{2f}^\iota - \theta_{2f}}{\Delta \theta_{2f}} \right| + \left| \frac{\theta_{3f}^\zeta - \theta_{3f}}{\Delta \theta_{3f}} \right| \right) \quad (8.47)$$

mit  $\mathcal{M} = \{(\eta, \iota, \zeta) : 1 \leq \eta \leq 11, 1 \leq \iota \leq 11, 1 \leq \zeta \leq 11\}$ .

Szenario 7:

$$(\theta_{1f}^{\eta^\circ}, \theta_{2f}^{\iota^\circ}, \theta_{3f}^{\zeta^\circ}) = \arg \min_{(\eta, \iota, \zeta) \in \mathcal{M}} \left( \left| \frac{\theta_{1f}^\eta - \theta_{1f}}{\Delta \theta_{1f}} \right| + \left| \frac{\theta_{2f}^\iota - \theta_{2f}}{\Delta \theta_{2f}} \right| + \left| \frac{\theta_{3f}^\zeta - \theta_{3f}}{\Delta \theta_{3f}} \right| \right) \quad (8.48)$$

mit  $\mathcal{M} = \{(\eta, \iota, \zeta) : 1 \leq \eta \leq 11, 1 \leq \iota \leq 11, 1 \leq \zeta \leq 11\}$ .

Der Gitterpunkt mit dem zum effektiven Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  nächstliegenden Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ)}$  (Szenario 2),  $\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ)}$  (Szenarien 4 und 5) bzw.  $\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}$  enthält außer dem nächstliegenden Eingangsvektor noch die Optimallösung  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ)})$  (Szenario 2),  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ)})$  (Szenarien 4 und 5) bzw.  $\tilde{\gamma}^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)})$  (Szenarien 6 und 7) sowie die Jacobi-Matrix  $\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ)})$  (Szenario 2),  $\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ)})$  (Szenarien 4 und 5) bzw.  $\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)})$  (Szenarien 6 und 7). Anschließend muß geprüft werden, ob der eingegangene Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  innerhalb des Singularitätsintervalls des jeweiligen äquidistanten Gitters liegt. Der Vektor  $\tilde{\gamma}^*$  wird zur Berechnung des Geschwindigkeitsprofils  $\beta(s)$  und des geometrischen Pfades  $\theta(s)$  gemäß Formel (7.1) benötigt. Die Jacobi-Matrix  $\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E}$  verwendet das Verfahren 1-ter Ordnung in Formel (9.2) zur Approximation des Vektors  $\tilde{\gamma}^*$ .

- Liegt der effektive Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  **außerhalb** eines Singularitätsintervalls, ergibt sich  $\tilde{\gamma}_k^g$ ,  $k = 1, \dots, K$  gemäß (8.42) bzw. (8.43) folgendermaßen (Siehe auch Abbildung 8.44):

– Szenario 2:

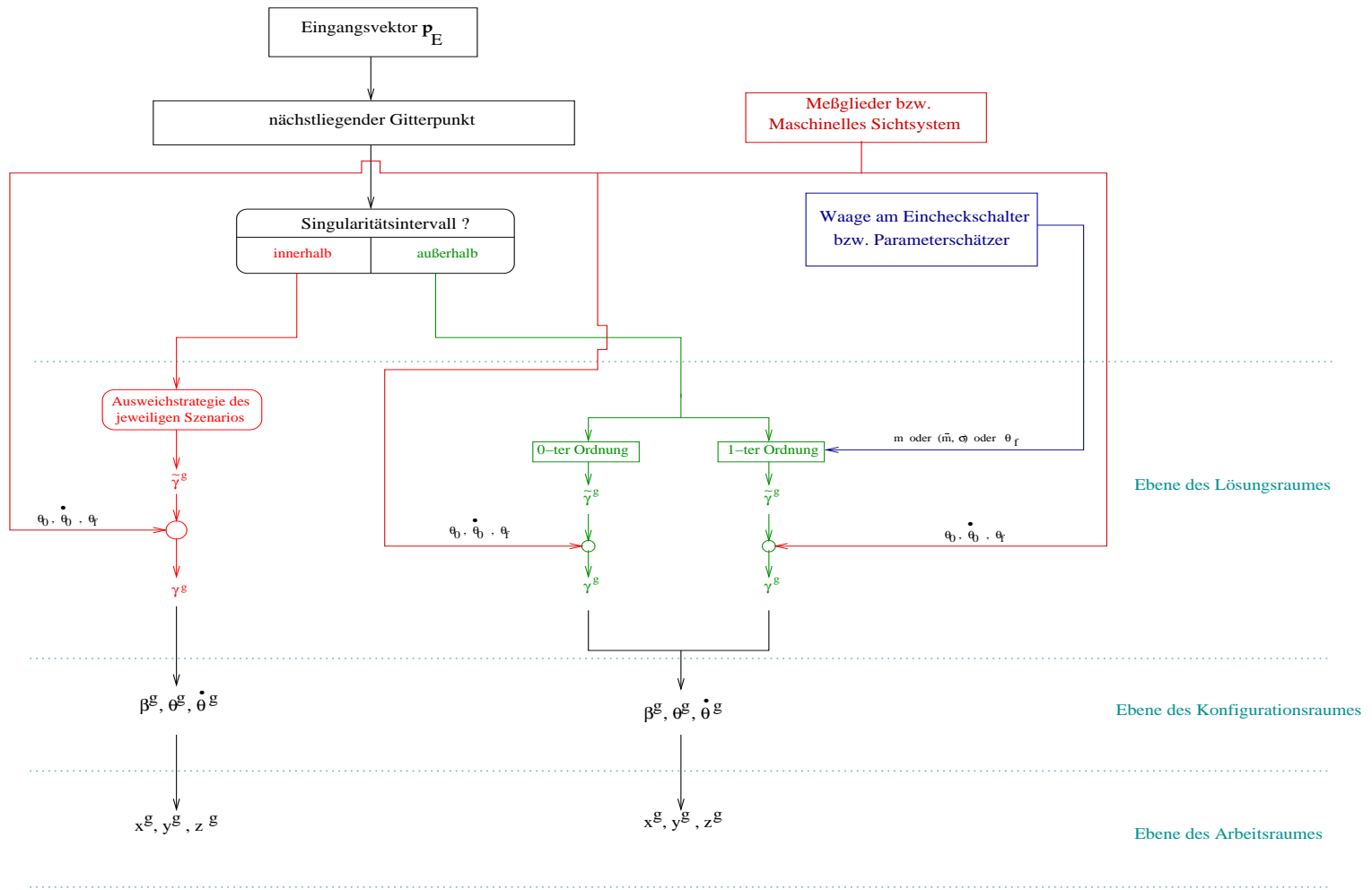


Abbildung 8.43: Ablauf der Echtzeitapproximation

\* Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ)}), k = 1, \dots, K \quad (8.49)$$

\* Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ)}) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ)}) \cdot (\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_E^{(\eta^\circ)}), k = 1, \dots, K. \quad (8.50)$$

– Szenario 4 und 5:

\* Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ)}), k = 1, \dots, K \quad (8.51)$$

\* Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ)}) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ)}) \cdot (\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ)}), k = 1, \dots, K. \quad (8.52)$$

– Szenario 6 und 7:

\* Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}) \quad (8.53)$$

\* Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}) \cdot (\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}), k = 1, \dots, K. \quad (8.54)$$

- Liegt der effektive Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  **innerhalb** eines Singularitätsintervalls, ergibt sich  $\tilde{\gamma}_g$  gemäß der im jeweiligen Szenario zur Anwendung kommenden Ausweichstrategie:

– Szenario 2:

Mittels SQP wird eine Trajektorie für den Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  berechnet (Siehe auch Abb. 8.45):

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E), k = 1, \dots, K. \quad (8.55)$$

– Szenario 4:

Die bisherige Referenztrajektorie wird beibehalten (Siehe auch Abb. 8.46):

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{alt}), k = 1, \dots, K. \quad (8.56)$$

– Szenario 5:

Die bisherige Referenztrajektorie wird beibehalten (Siehe auch Abb. 8.46):

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{0R}), k = 1, \dots, K \quad (8.57)$$

– Szenario 6:

Aufgrund der Ermangelung von Ausweichstrategien wird innerhalb der Singularitätsintervalle genauso vorgegangen wie außerhalb (Siehe auch Abb. 8.47):

\* Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}), k = 1, \dots, K \quad (8.58)$$

\* Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \mathbf{p}_E}(\mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}) \cdot (\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_E^{(\eta^\circ \iota^\circ \zeta^\circ)}), k = 1, \dots, K. \quad (8.59)$$

– Szenario 7:

Es existieren keine Singularitätsintervalle. Somit kommt auch keine Ausweichstrategie zum Einsatz.

Nachdem nun den Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_{k\beta}^g$ ,  $\tilde{\gamma}_{k\theta_1}^g$ ,  $\tilde{\gamma}_{k\theta_2}^g$  und  $\tilde{\gamma}_{k\theta_3}^g$  Werte zugewiesen sind, lautet der zur Bestimmung der Referenztrajektorie  $\tilde{\theta}_e^g(\tilde{s})$  benötigte Vektor  $\gamma^g$  somit

$$\gamma^g = \begin{pmatrix} (\gamma_{1\beta}, \tilde{\gamma}_{2\beta}^g, \dots, \tilde{\gamma}_{K-1\beta}^g, \gamma_{K\beta} := \beta_f = 0)^T \\ (\gamma_{1\theta_1}, \gamma_{2\theta_1}, \tilde{\gamma}_{3\theta_1}^g, \dots, \tilde{\gamma}_{K-1\theta_1}^g, \gamma_{K\theta_1} := \theta_{1f})^T \\ (\gamma_{1\theta_2}, \gamma_{2\theta_2}, \tilde{\gamma}_{3\theta_2}^g, \dots, \tilde{\gamma}_{K-1\theta_2}^g, \gamma_{K\theta_2} := \theta_{2f})^T \\ (\gamma_{1\theta_3}, \gamma_{2\theta_3}, \tilde{\gamma}_{3\theta_3}^g, \dots, \tilde{\gamma}_{K-1\theta_3}^g, \gamma_{K\theta_3} := \theta_{3f})^T \end{pmatrix}. \quad (8.60)$$

Jetzt erfolgt die Belegung der Koeffizienten  $\gamma_{1\beta}$ ,  $(\gamma_{1\theta_1}, \gamma_{1\theta_2}, \gamma_{1\theta_3})^T$  und  $(\gamma_{2\theta_1}, \gamma_{2\theta_2}, \gamma_{2\theta_3})^T$ :

- auf der Stufe 0 (Szenario 2, 4 und 7)

– wird gemäß (7.3)  $\gamma_{1\theta} = (\gamma_{1\theta_1}, \gamma_{1\theta_2}, \gamma_{1\theta_3})^T$  mit

$$\gamma_{1\theta} := \theta_0 \quad (8.61)$$

belegt,

– gemäß (7.11)  $\gamma_{1\beta}$

$$\gamma_{1\beta} := 0.1 \quad (8.62)$$

gesetzt und

–  $\gamma_{2\theta} = (\gamma_{2\theta_1}, \gamma_{2\theta_2}, \gamma_{2\theta_3})^T$  ergibt sich aus (7.13) für  $j = 0$  zu

$$\gamma_{2\theta} := \left( \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{\gamma_{1\beta}}} - \theta_0 \cdot B_1'(0) \right) \cdot \frac{1}{B_2'(0)}. \quad (8.63)$$

- auf der Stufe 1 (Szenario 5 und 6)

– wird gemäß (7.3)  $\gamma_{1\theta} = (\gamma_{1\theta_1}, \gamma_{1\theta_2}, \gamma_{1\theta_3})^T$  mit

$$\gamma_{1\theta} := \theta_1 \quad (8.64)$$

belegt,

– gemäß (7.12)  $\gamma_{1\beta}$

$$\gamma_{1\beta} := \tilde{\beta}(\tilde{s}_0 = 0) := \tilde{\beta}(s_1) \quad (8.65)$$

gesetzt und

–  $\gamma_{2\theta} = (\gamma_{2\theta_1}, \gamma_{2\theta_2}, \gamma_{2\theta_3})^T$  ergibt sich aus (7.13) für  $j = 1$  zu

$$\gamma_{2\theta} := \left( \frac{\dot{\theta}_1}{\sqrt{\gamma_{1\beta}}} \cdot \frac{s_f - s_1}{\tilde{s}_f - \tilde{s}_0} - \theta_1 \cdot B_1'(0) \right) \cdot \frac{1}{B_2'(0)}. \quad (8.66)$$

*Hinweis:*

Die Formeln (8.64), (8.65) und (8.66) kommen **nicht** im Szenario 5 innerhalb der Singularitätsintervalle, sondern nur außerhalb zum Einsatz, da innerhalb die bisherige Referenztrajektorie weiterverwendet wird. Im Szenario 6 werden die Formeln (8.64), (8.65) und (8.66) sowohl inner- als auch außerhalb der Singularitätsintervalle eingesetzt.

Die Gleichungen (8.61) und (8.63) zeigen die Kombination der nächstliegenden Referenztrajektorie der Datenbasis bzw. der Trajektorie gemäß Ausweichstrategie mit den Komponenten des Eingangsvektors  $\mathbf{p}_E$  am Schaltzeitpunkt  $t_0$ , die Gleichungen (8.64) bis (8.66) am Schaltzeitpunkt  $t_1$ .

Das Geschwindigkeitsprofil  $\beta^g(\tilde{s})$  und der geometrische Pfad  $\theta_e^g(\tilde{s})$  sind somit wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} \beta^g(\tilde{s}) \\ \theta_e^g(\tilde{s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^g B_k(\tilde{s}) \\ \sum_{k=1}^{K_{\theta_1}} \gamma_{k\theta_1}^g B_k(\tilde{s}) \\ \sum_{k=1}^{K_{\theta_2}} \gamma_{k\theta_2}^g B_k(\tilde{s}) \\ \sum_{k=1}^{K_{\theta_3}} \gamma_{k\theta_3}^g B_k(\tilde{s}) \end{pmatrix}. \quad (8.67)$$

Damit ist die einstufige approximative optimale stochastische Planung der neuen Robotertrajektorie abgeschlossen. Dieser Vorgang dauert auf einem PC mit einem 1.3 GHz Pentium 3-Prozessor weniger als 0.01 sec. Genauere Aussagen sind nicht möglich, da die Rechneruhr als kleinste Einheit hundertstel Sekunden ausgibt.



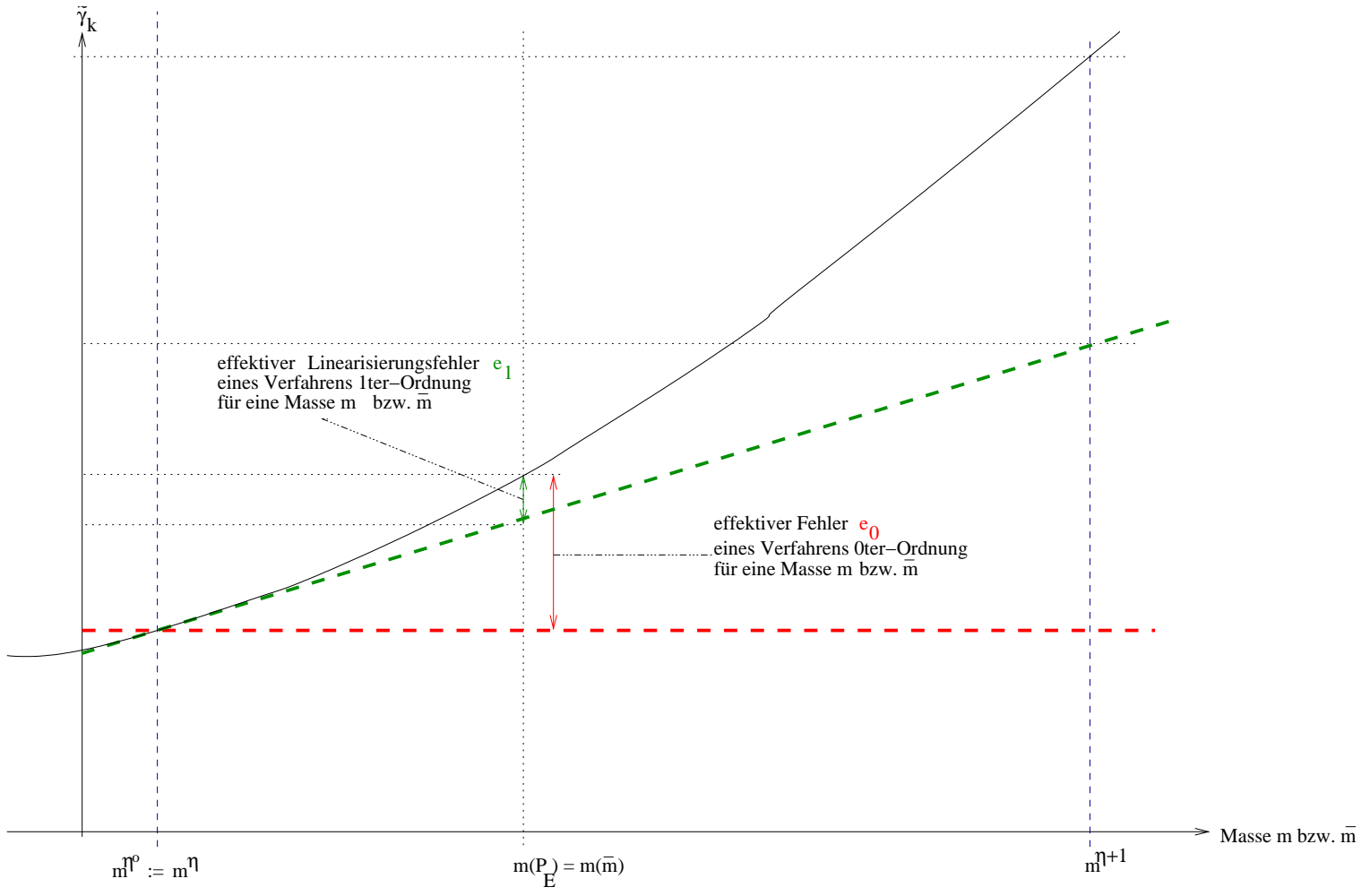


Abbildung 8.44: Szenario 2, 4 und 5 - Fehler  $e_0(m)$  und  $e_1(m)$  bzw.  $e_0(\bar{m})$  und  $e_1(\bar{m})$  außerhalb von Singularitätsintervallen

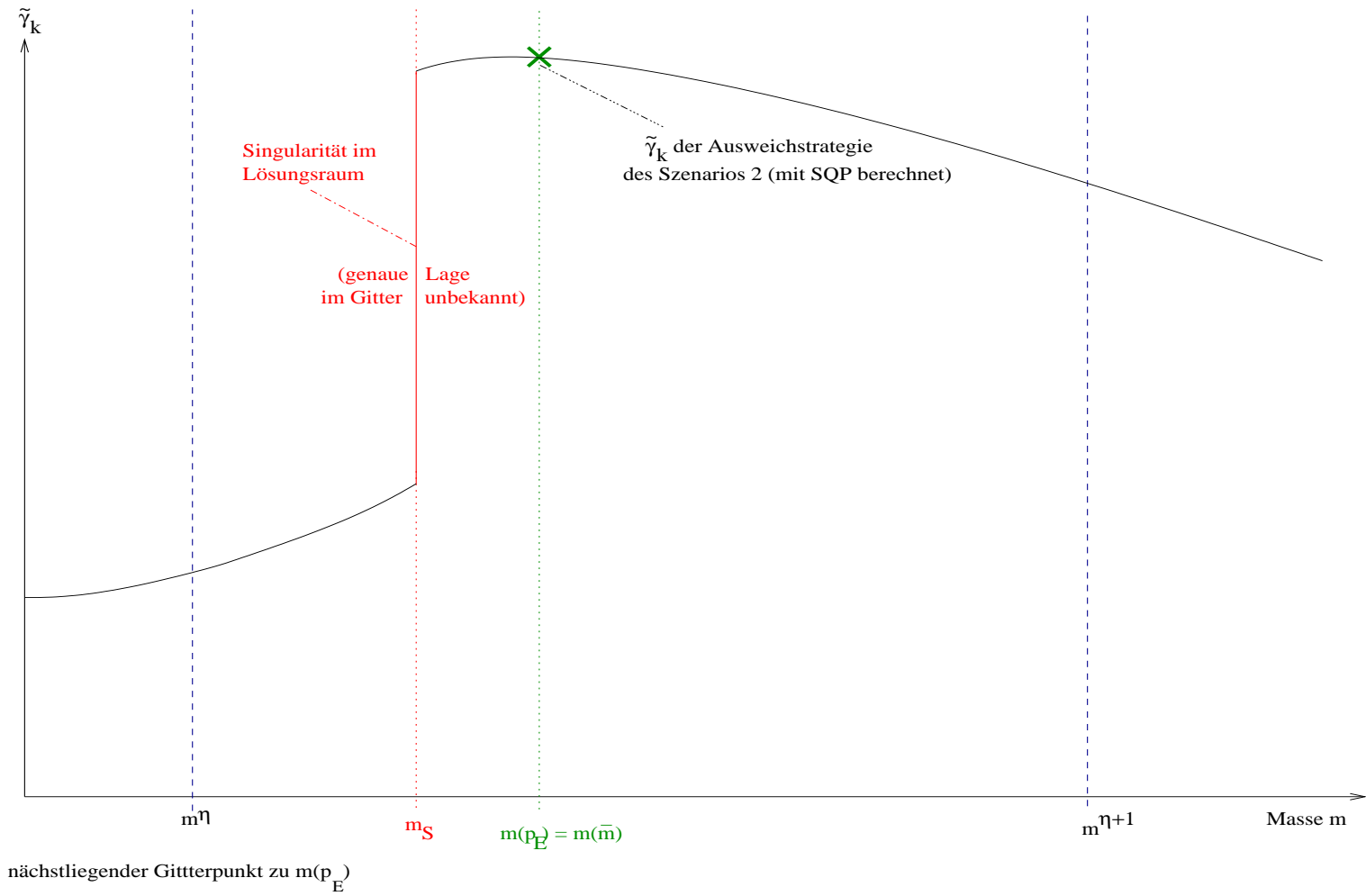


Abbildung 8.45: Szenario 2 - Fehler  $\Delta\gamma = 0$  innerhalb von Singularitätsintervallen

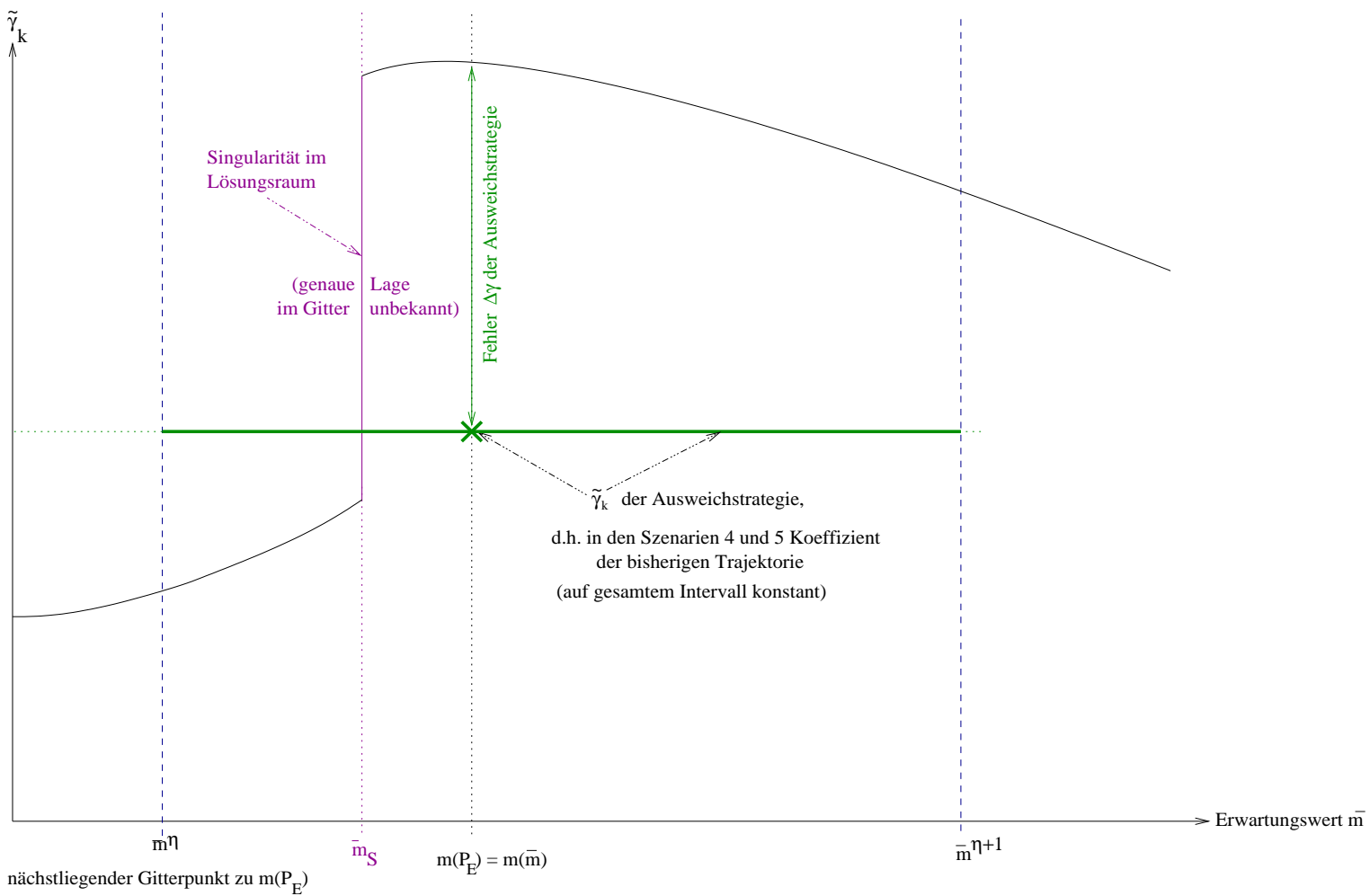


Abbildung 8.46: Szenario 4 und 5 - Fehler  $\Delta\gamma$  innerhalb von Singularitätsintervallen

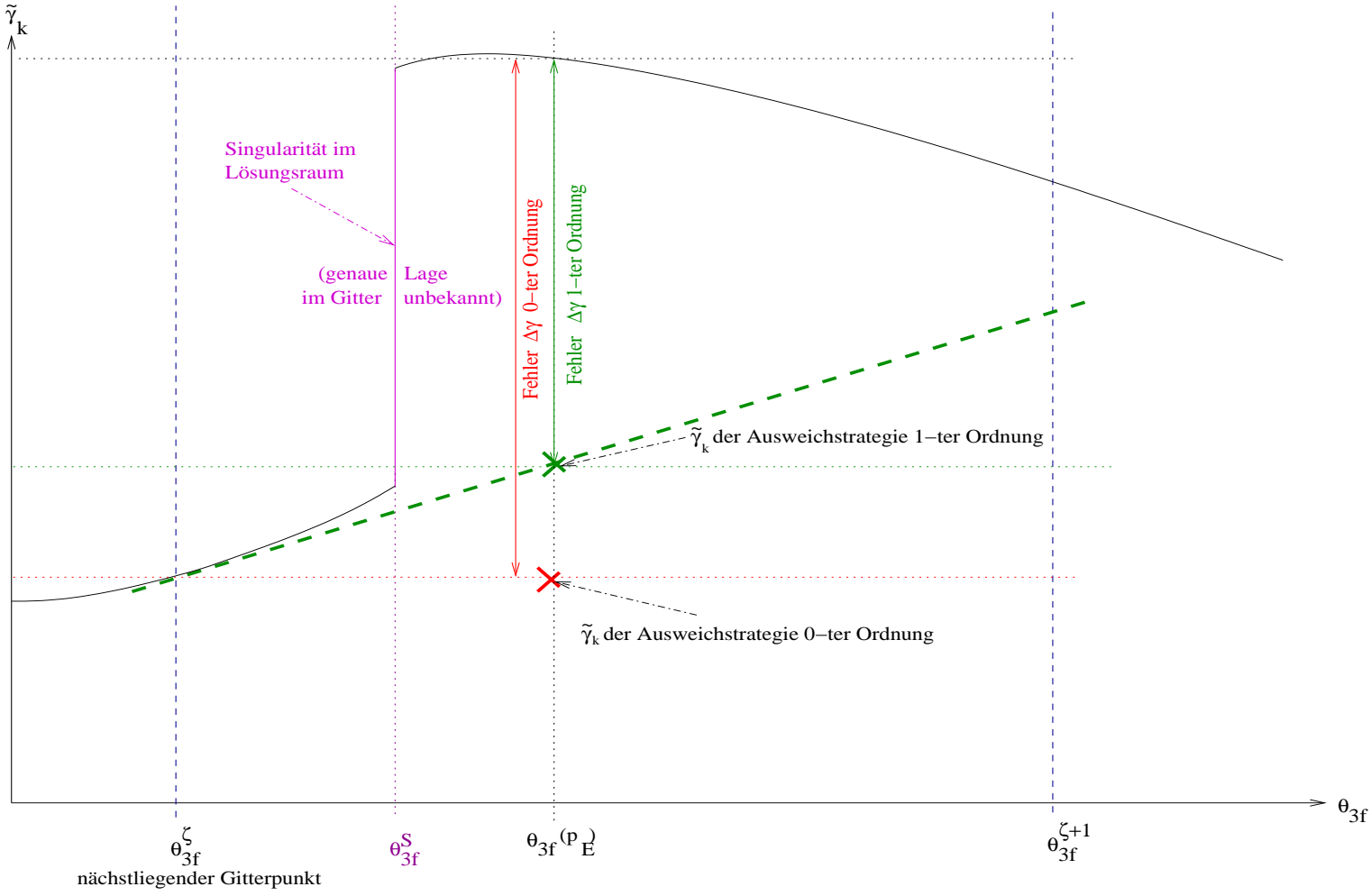


Abbildung 8.47: Szenario 6 - Fehler  $\Delta\gamma$  innerhalb von Singularitätsintervallen

## Kapitel 9

# Approximationseigenschaften

Wird eine Funktion z.B. mittels einer Taylorreihe approximiert, gibt das Restglied den Approximationsfehler an. Man weiß dann, das sich die wahren Werte in einem durch das Restglied beschriebenen Schlauch um die Taylorreihe herum aufhalten.

Im vorliegenden Fall ist die Funktion nur an den Gitterpunkten bekannt. Ebenfalls kann man nicht mit letzter Sicherheit sagen, ob die Funktion zwischen den Gitterpunkten stetig ist oder sogar eine Monotonie zeigt. Im Falle einer Monotonie stellen die Sprunghöhen eine obere Schranke für den Approximationsfehler dar.

Bei der hier vorliegenden Gitterapproximation wurde das Gitter solange verfeinert, bis der Arbeitsspeicher bei der Ausführung des Simulationsprogrammes SAGAF.f keine weiteren Gitterpunkte mehr aufnehmen konnte. Ein Ausführen des OSTP innerhalb von SAGAF.f ist aufgrund der vollständigen Belegung des Arbeitsspeichers mit der Datenbasis des jeweiligen Szenarios nicht möglich. Daher wird hier **nicht** der **Approximationsfehler** angegeben, sondern die Güte der Datenbasis ermittelt, indem der zu einem Gitterpunkt gehörende Funktionswert von seinem linken Nachbarn aus approximiert wird, sofern das Intervall nicht zu den Singularitätsintervallen gehört. Liegt hingegen zwischen den beiden Gitterpunkten eine Singularitätszone, kommt eine Ausweichstrategie zum Einsatz.

Der anschließende Vergleich von approximiertem Funktionswert und dem mit OSTP am rechten Gitterpunkt <sup>1</sup> vorab berechneten Funktionswert ergibt die **Sprunghöhe** am **rechten** Intervallrand (Siehe auch Abbildungen 9.3, 9.9 und 9.13).

Ziel dieses Kapitels ist es daher, für den Arbeitsraum

- die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta A^{max}$  der Norm des Positionsvektors  $\mathbf{x}^T = (x, y, z)^T$  des Werkzeugzentrierpunktes (WZP) und
- die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta \dot{A}^{max}$  der Norm des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\mathbf{x}}^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$  des Werkzeugzentrierpunktes (WZP)

als Maße der Gittergüte szenarienweise zu bestimmen.

*Hinweis:*

*In allen Szenarien sind die folgenden Voraussetzungen identisch:*

- die Gewichtungskoeffizienten  $k_t = 0.9 \text{ sec}$  für Zeit- und  $k_e = 0.1 \frac{1}{(Nm)^2 \text{ sec}}$  für Energieoptimalität,

---

<sup>1</sup>bei der Erstellung der Datenbasis

- die minimal zulässigen Gelenkwinkel  
 $\theta_{min} = (-170^\circ, -115^\circ, -164^\circ)^T = (-2.97, -2.01, -2.86)^T [\text{rad}]$ ,
- die maximal zulässigen Gelenkwinkel  
 $\theta_{max} = (170^\circ, 115^\circ, 164^\circ)^T = (2.97, 2.01, 2.86)^T [\text{rad}]$ ,
- die minimal zulässigen Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  
 $\dot{\theta}_{min} = (-172^\circ, -86^\circ, -298^\circ)^T \left[\frac{1}{\text{sec}}\right] = (-3.0, -1.5, -5.2)^T \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$ ,
- die maximal zulässigen Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  
 $\dot{\theta}_{max} = (172^\circ, 86^\circ, 298^\circ)^T \left[\frac{1}{\text{sec}}\right] = (3.0, 1.5, 5.2)^T \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$ ,
- die minimal zulässigen Antriebsmomente an der Getriebeabgangswelle  
 $\tau_{min} = (-1134.0, -1890.0, -540.0)^T [\text{Nm}]$  (Aufgrund von Gleichung (13.11) betragen die minimal zulässigen Steuerspannungen  $\mathbf{u}_{min} = (-7.5, -7.5, -7.5)^T [\text{V}]$ .),
- die maximal zulässigen Antriebsmomente an der Getriebeabgangswelle  
 $\tau_{max} = (1134.0, 1890.0, 540.0)^T [\text{Nm}]$  (Aufgrund von Gleichung (13.11) betragen die maximal zulässigen Steuerspannungen  $\mathbf{u}_{max} = (7.5, 7.5, 7.5)^T [\text{V}]$ .),
- die dynamischen Parameter des Roboters MANUTEC r3 gemäß Kapitel 4.

## 9.1 Sprunghöhen des Szenarios 2

In diesem Abschnitt werden für das Szenario 2 die Formeln zur Berechnung der Sprunghöhen sowie für die reale, eindimensionale Datenbasis dieses Szenarios die damit ermittelten Werte

- der maximalen relativen Sprunghöhe  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$ ,
- der absoluten Sprunghöhe  $\Delta \theta^{abs}$  des Gelenkwinkelverlaufes und
- der absoluten Sprunghöhe  $\Delta A^{abs}$  der Norm des Positionsvektors

angegeben.

Der Parameter  $m$  tritt als Variable mit dem Index  $\eta$  in der Form  $m^\eta$  auf.

Der Bestimmung der o.g. Sprunghöhen erfolgt gemäß Abbildung 9.1 in drei Schritten:

- Schritt 1: Ebene des Lösungsraumes - Sprunghöhen  $\Delta \tilde{\gamma}_k$  der Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k$ ,
- Schritt 2: Ebene des Konfigurationsraumes - Sprunghöhen  $\Delta \theta^{abs}$  und  $\Delta \dot{\theta}^{abs}$  des Zustandes <sup>2</sup>,
- Schritt 3: Ebene des Arbeitsraumes - Sprunghöhen  $\Delta A^{abs}$  und  $\Delta \dot{A}^{abs}$  der Norm des Positionsvektors des WZP und der Norm des Geschwindigkeitsvektors des WZP.

*Hinweis:*

In den Szenarien 4 und 5 liegt Zweidimensionalität, in den Szenarien 6 und 7 Dreidimensionalität vor. In den Abschnitten 9.2 bis 9.4 werden die zugehörigen Formeln analog entwickelt und die damit berechneten Werte der Sprunghöhen aufgeführt.

<sup>2</sup>Siehe auch Abbildung 2.17 und Unterabschnitt 2.4.2

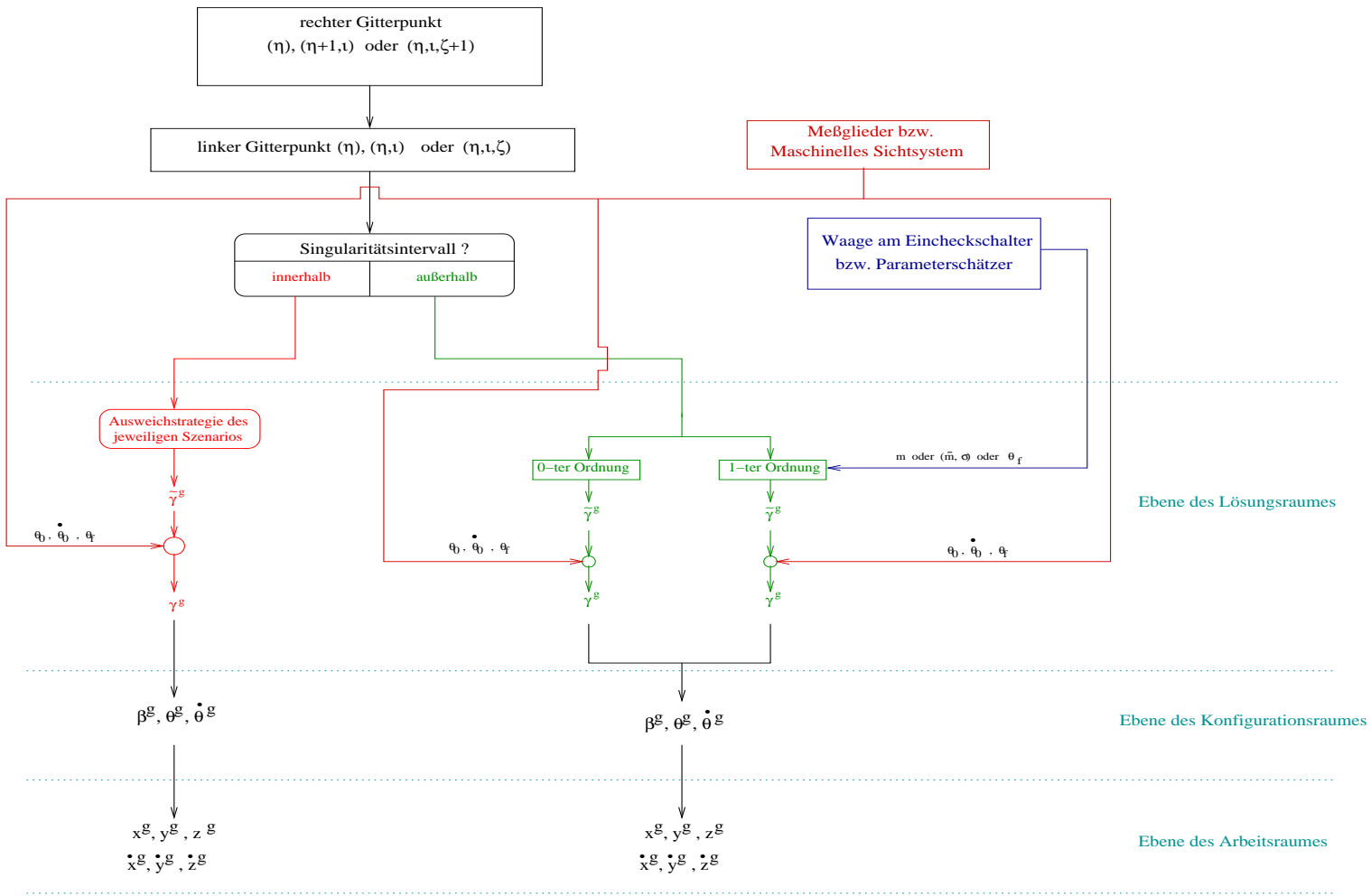


Abbildung 9.1: Ablauf der Echtzeitapproximation zur Bestimmung der absoluten Sprunghöhen  $\Delta A^{max}$  der Norm des Positionsvektors des WZP und  $\Delta \dot{A}^{max}$  der Norm des Geschwindigkeitsvektors des WZP

### 9.1.1 Schritt 1: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$ des Szenarios 2

Für ein Intervall wird das Singularitätskriterium überprüft. Aufgründdessen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Das Intervall  $\{m^\eta, m^{\eta+1}\}$  gehört **nicht** zu den Singularitätsintervallen. Die Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  werden im gesamten Intervall gemäß Entscheidungskriterium entweder durch das Verfahren 0-ter (8.8) bzw. 1-ter Ordnung (8.9) **approximiert** (Siehe Abbildung 9.2 und 9.3):

– Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g(m^{\eta+1}) = \tilde{\gamma}_k^*(m^\eta), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.1)$$

– Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g(m^{\eta+1}) = \tilde{\gamma}_k^*(m^\eta) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial m}(m^\eta) \cdot (m^{\eta+1} - m^\eta), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.2)$$

- Das Intervall  $\{m^\eta, m^{\eta+1}\}$  gehört **zu** den Singularitätsintervallen: Die Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  werden im gesamten Intervall durch eine Ausweichstrategie **approximiert**. Mittels SQP wird eine Trajektorie für den Eingangsvektor  $\mathbf{p}_E$  berechnet, d.h. am Gitterpunkt  $m^{\eta+1}$  erfolgt die Zuweisung (Siehe auch Abb. 9.4):

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}^{\eta+1}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (9.3)$$

Die Sprunghöhe ist somit 0.

Die **Differenz** zwischen den mit OSTP für den jeweiligen rechten Gitterpunkt errechneten Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k^\eta := \tilde{\gamma}_k^*(m^\eta)$  und den approximierten Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_k^g(m^\eta)$  wird hier als *Sprunghöhe*  $\Delta \tilde{\gamma}_k$ , bezeichnet (Siehe Abbildung 9.3):

$$\Delta \tilde{\gamma}_k(m^\eta) = |\tilde{\gamma}_k^\eta - \tilde{\gamma}_k^g(m^\eta)|, \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.4)$$

die folgende Quotientenbildung als *relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}_k$ :

$$\Delta_r \tilde{\gamma}_k(m^\eta) = \left| \frac{\tilde{\gamma}_k^\eta - \tilde{\gamma}_k^g(m^\eta)}{\tilde{\gamma}_k^\eta} \right|, \quad k = 1, \dots, K. \quad (9.5)$$

Durch eine Maximalwertbetrachtung für  $\Delta_r \tilde{\gamma}_k$  über  $k$  und die Nutzlastmasse  $m^\eta$  erhält man die *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$ :

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, m^\eta} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(m^\eta). \quad (9.6)$$

In Indexschreibweise formuliert lautet (9.6):

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \eta} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\eta). \quad (9.7)$$

Aus  $\tilde{\gamma}_k^\eta$  bzw.  $\tilde{\gamma}_k^g(m^\eta)$  entstehen mittels (8.61) bis (8.66) die im folgenden Schritt 2, beschrieben im Unterkapitel 9.1.2, benötigten Vektoren  $\gamma^\eta$  bzw.  $\gamma^g(m^\eta)$ .



*Werte der realen Datenbasis:*

Die Abbildung 9.5 zeigt die *relativen Sprunghöhen*  $\Delta_r \tilde{\gamma}_3(m)$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.6) die *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  enthält. Der Wert der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  dieses Szenarios beträgt 4.84% und liegt an der Stelle  $m = 3.15 \text{ kg}$ .

Die Abbildung 9.6 zeigt den Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}^g$  in der Umgebung der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$ . Die Lücken zwischen den Stellen  $3.12 \text{ kg} - 3.14 \text{ kg}$  und  $3.17 \text{ kg} - 3.18 \text{ kg}$  sind Singularitätsintervalle.

*Hinweis:*

*Die Bestimmung der maximalen relativen Sprunghöhe  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  dient gleichzeitig der Überprüfung der Funktionsfähigkeit des Sprungkriteriums (8.7).*

Wie aus der Abbildung 10.22 ersichtlich, zieht der Roboter sich bei seiner Drehung um die Hochachse, die mit der Achse des ersten Gelenkes zusammenfällt, zusammen. Daher weisen die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_2^\eta(t) := \dot{\theta}_2^*(t, m^\eta)$  und  $\dot{\theta}_3^\eta := \dot{\theta}_3^*(t, m^\eta)$  Nulldurchgänge auf (Siehe Abbildung 9.7 und 9.8).

Die Angabe von *maximalen relativen Sprunghöhen* für den Zustand  $(\theta, \dot{\theta})^T$  sowie die Norm des Positionsvektors des WZP und des Geschwindigkeitsvektors des WZP scheitert daran, daß in der Nähe dieser Nulldurchgänge für  $\dot{\theta}_2^\eta$  und  $\dot{\theta}_3^\eta$  zwar sehr kleine absolute Sprunghöhen auftreten, diese jedoch wegen der nahe 0 liegenden Bezugsgrößen im Nenner (d.h.  $\theta_2^\eta$  und  $\dot{\theta}_3^\eta$ ) zu exorbitant großen relativen Sprunghöhen führen. Daher erfolgt für den Konfigurationsraum jeweils die Angabe der *absoluten Sprunghöhen des Zustandes*. Da die Größen *Norm des Positionsvektors des WZP* und *Norm des Geschwindigkeitsvektors des WZP* Funktionen der Zustandsgrößen des Konfigurationsraumes sind, werden für diese ebenfalls nur *absoluten Sprunghöhen* angegeben.

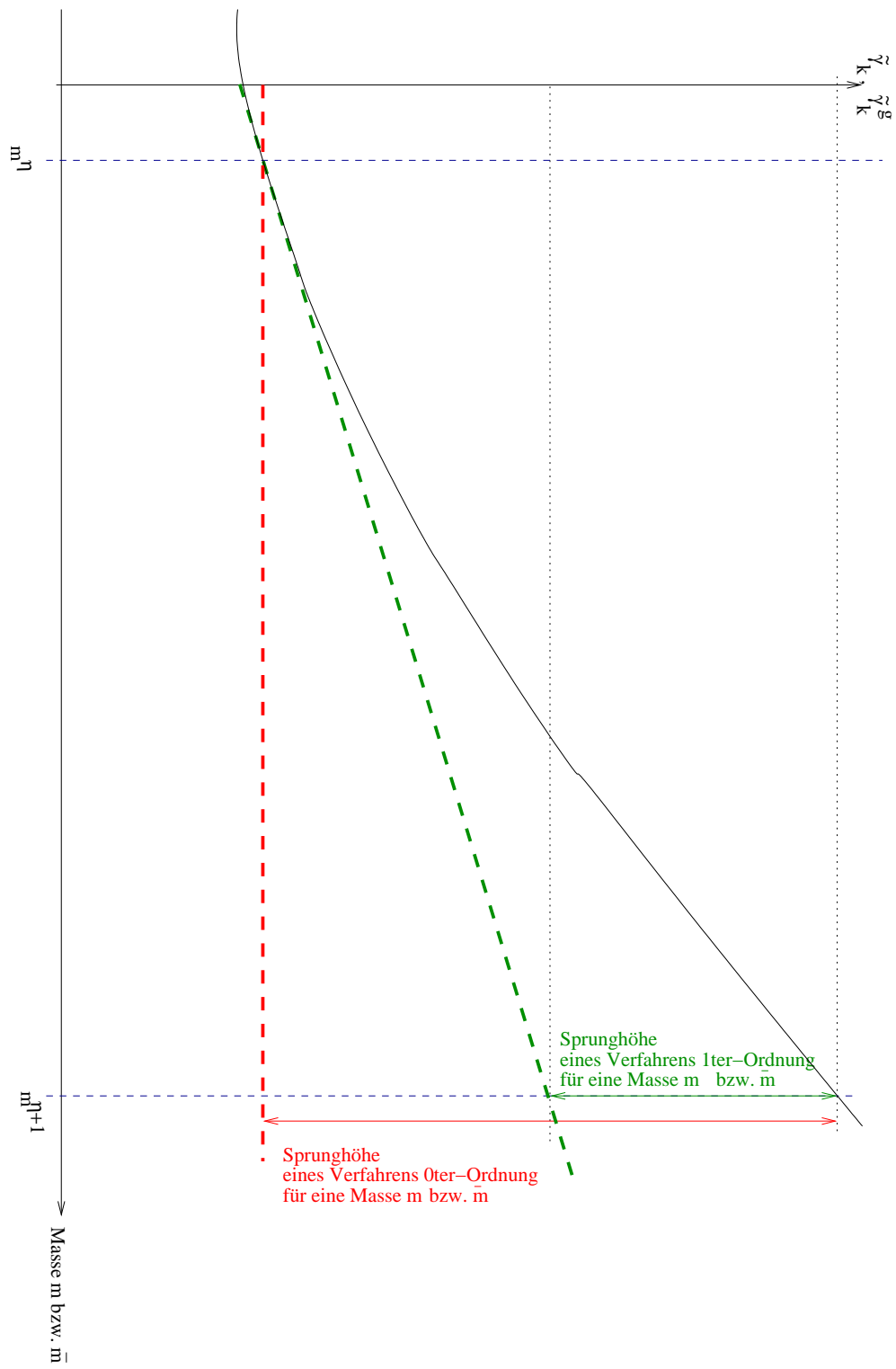


Abbildung 9.2: Szenario 2, 4 und 5 - Sprunghöhen  $\Delta\tilde{\gamma}_k$  außerhalb von Singularitätsintervallen

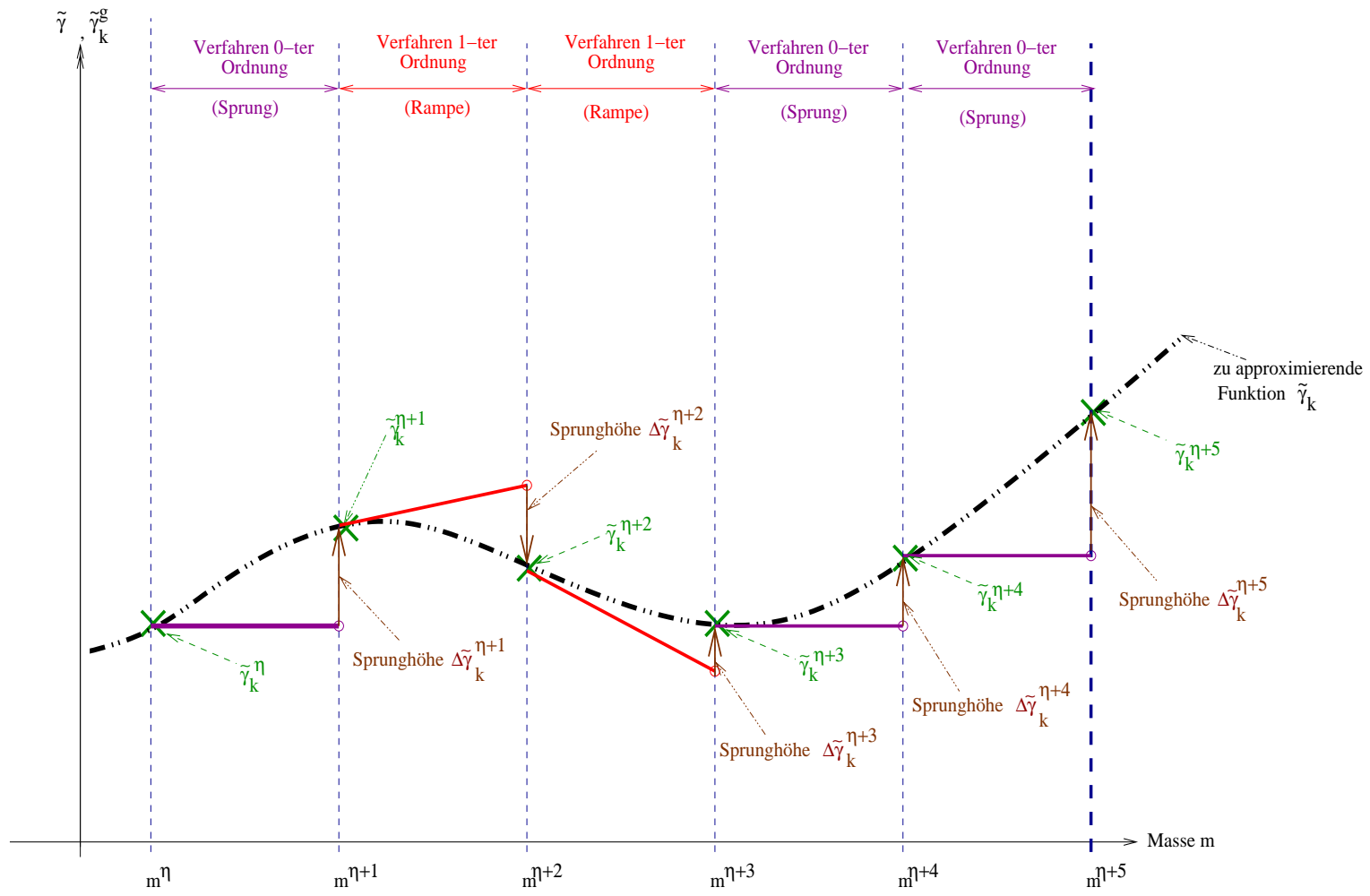


Abbildung 9.3: *Sprunghöhen*  $\Delta \tilde{\gamma}_k$  außerhalb von Singularitätsintervallen - Die Funktion  $\tilde{\gamma}_k^{\sigma}(m^{\eta})$  ist mit den Sprunghöhen  $\Delta \tilde{\gamma}_k^{\eta}$  an den Stellen  $m^{\eta}$  behaftet, da  $\tilde{\gamma}_k^{\sigma}(m^{\eta})$  eine Abfolge von Sprung- und Rampenfunktionen infolge der Anwendung des Entscheidungskriteriums auf  $\tilde{\gamma}_k^{\eta}$  an den Stellen  $m^{\eta}$  ist (**Prinzipskizze**).

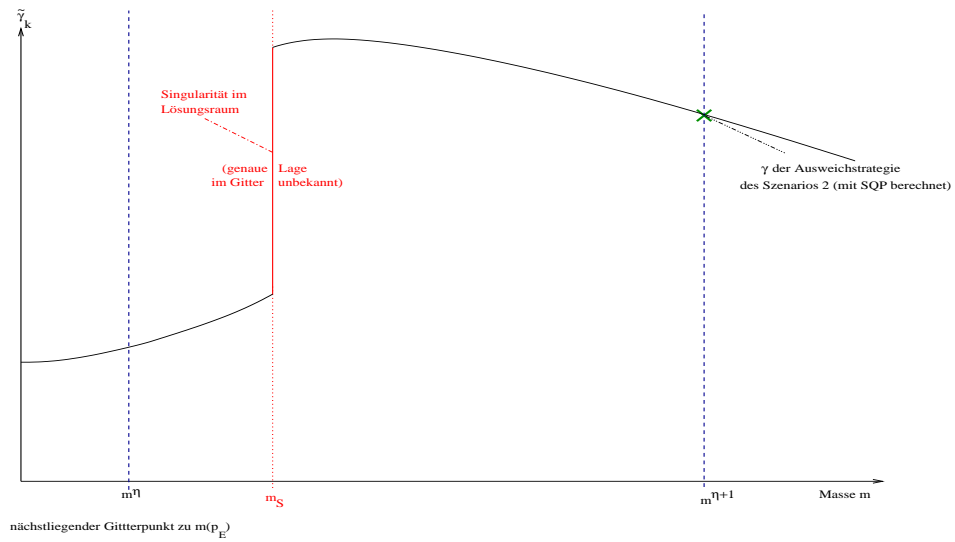


Abbildung 9.4: Szenario 2 - Fehler  $\Delta\gamma$  innerhalb von Singularitätsintervallen

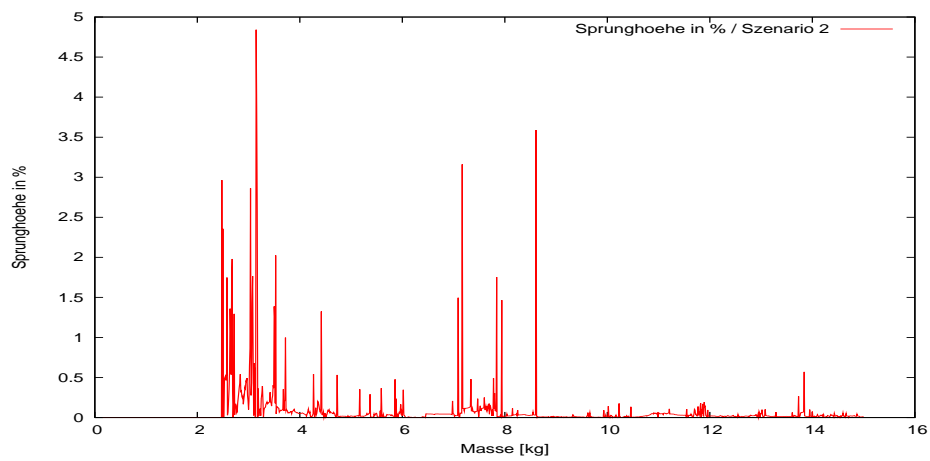


Abbildung 9.5: Szenario 2 - Sprunghöhen  $\Delta_r \tilde{\gamma}_3(m)$  (zum Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}$  gehörig)

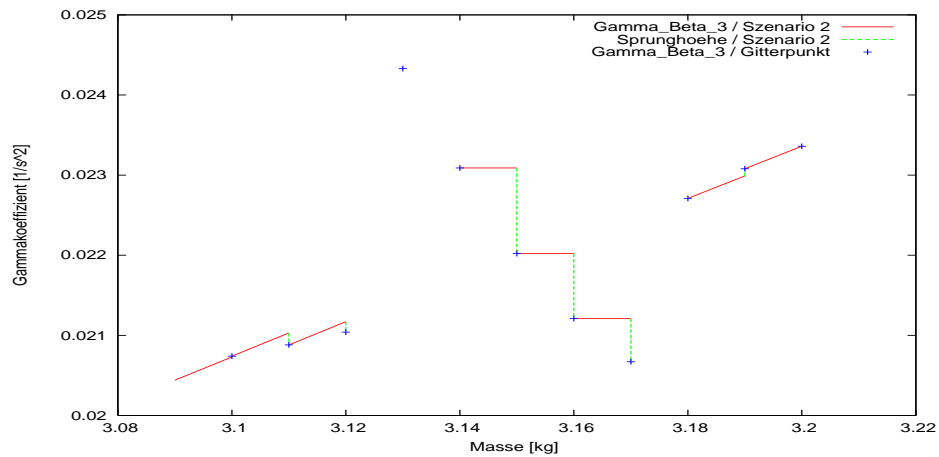


Abbildung 9.6: Szenario 2 - Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}^g$  in der Umgebung der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$ . Die maximale Sprunghöhe befindet sich an der Stelle  $m = 3.15$  kg.

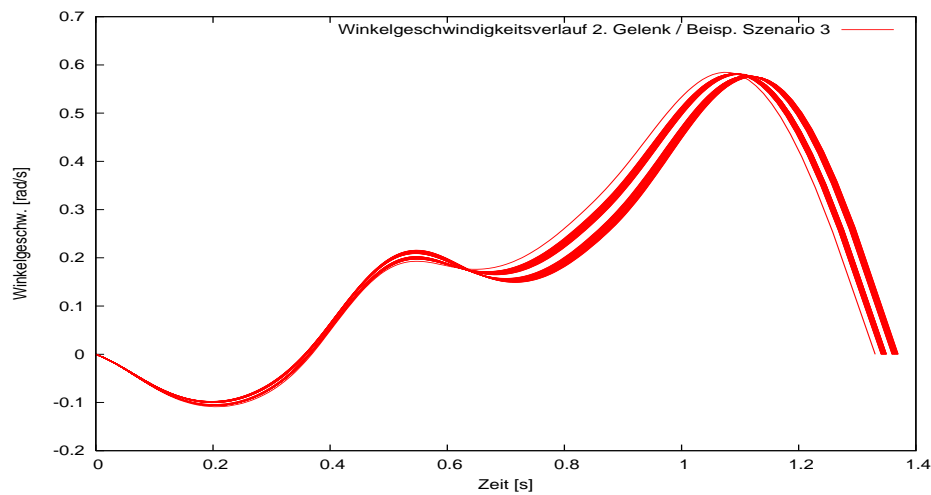


Abbildung 9.7: Sollverläufe der Gelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_{2_0}^n(t) := \dot{\theta}_{2_0}(t, \gamma^n)$

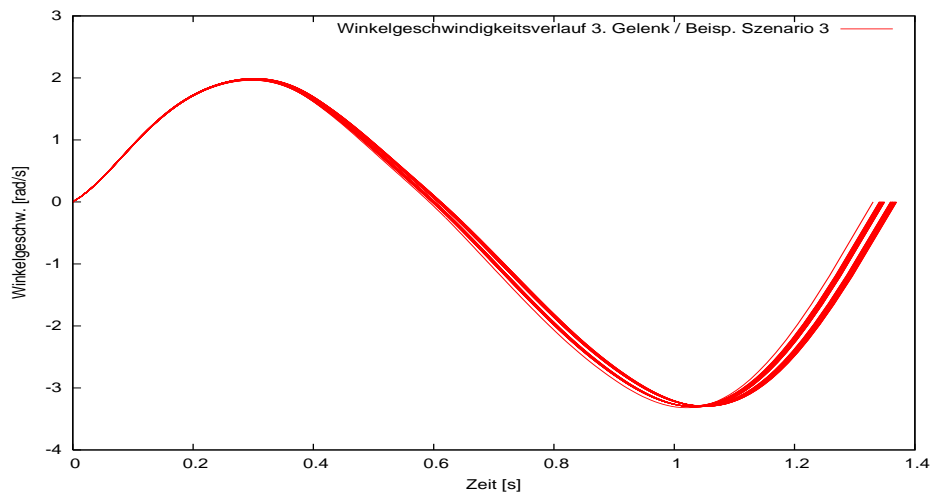


Abbildung 9.8: Sollverläufe der Gelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_{3_0}^\eta(t) := \dot{\theta}_{3_0}(t, \gamma^\eta)$

### 9.1.2 Schritt 2: Sprunghöhen des Zustandes des Szeaniros 2

Durch Einsetzen von  $\gamma^\eta$  bzw.  $\gamma^g(m^\eta)$  in (7.1) und (6.49) bis (6.51) erhält man die drei Gelenkwinkelverläufe  $\theta_i^\eta(t) := \theta_i(t, \gamma^\eta)$ ,  $i = 1, 2, 3$  bzw.  $\theta_i(t, \gamma^g(m^\eta))$ ,  $i = 1, 2, 3$  sowie die drei Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverläufe  $\dot{\theta}_i^\eta(t) := \dot{\theta}_i(t, \gamma^\eta)$ ,  $i = 1, 2, 3$  bzw.  $\dot{\theta}_i(t, \gamma^g(m^\eta))$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Die Differenzen zwischen den sich aufgrund von OSTP ergebenden und den aus dem Approximationsverfahren hervorgehenden Gelenkwinkel- und Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverläufen werden hier als

- *Sprunghöhe des Gelenkwinkelverlaufes*  $\Delta\theta_i(t)$  (Siehe Abbildung 9.9) und
- *Sprunghöhe des Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverlaufes*  $\Delta\dot{\theta}_i(t)$ ,

zusammenfassend als *Sprunghöhen des Zustandes*, bezeichnet:

$$\Delta\theta_i(t) = \Delta\theta_i(t, m^\eta) = |\theta_i^\eta(t) - \theta_i(t, \gamma^g(m^\eta))|, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.8)$$

$$\Delta\dot{\theta}_i(t) = \Delta\dot{\theta}_i(t, m^\eta) = |\dot{\theta}_i^\eta(t) - \dot{\theta}_i(t, \gamma^g(m^\eta))|, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.9)$$

die folgenden Quotientenbildungen als *relative Sprunghöhe*  $\Delta_r\theta_i(t)$  *des Gelenkwinkelverlaufes* und *relative Sprunghöhe*  $\Delta_r\dot{\theta}_i(t)$  *des Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverlaufes*:

$$\Delta_r\theta_i(t) = \Delta_r\theta_i(t, m^\eta) = \left| \frac{\theta_i^\eta(t) - \theta_i(t, \gamma^g(m^\eta))}{\theta_i^\eta(t)} \right|, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.10)$$

$$\Delta_r\dot{\theta}_i(t) = \Delta_r\dot{\theta}_i(t, m^\eta) = \left| \frac{\dot{\theta}_i^\eta(t) - \dot{\theta}_i(t, \gamma^g(m^\eta))}{\dot{\theta}_i^\eta(t)} \right|, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.11)$$

Durch eine Maximalwertbetrachtung für  $\Delta\theta_i(t)$  und  $\Delta\dot{\theta}_i(t)$  über die drei Gelenke  $i = 1, 2, 3$ , die Zeit  $t$  und den Parameter  $m$  erhält man die

- *absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelverlaufes*  $\Delta\theta^{abs}$

$$\Delta\theta^{abs} = \max_{i,t,m} \Delta\theta_i(m, t), \quad (9.12)$$

und die

- *absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverlaufes*  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$ :

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,m} \Delta\dot{\theta}_i(m, t), \quad (9.13)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

In Indexschreibweise formuliert lauten (9.12) und (9.13):

$$\Delta\theta^{abs} = \max_{i,t,\eta} \Delta\theta_i(\eta, t), \quad (9.14)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta} \Delta\dot{\theta}_i(\eta, t) \quad (9.15)$$

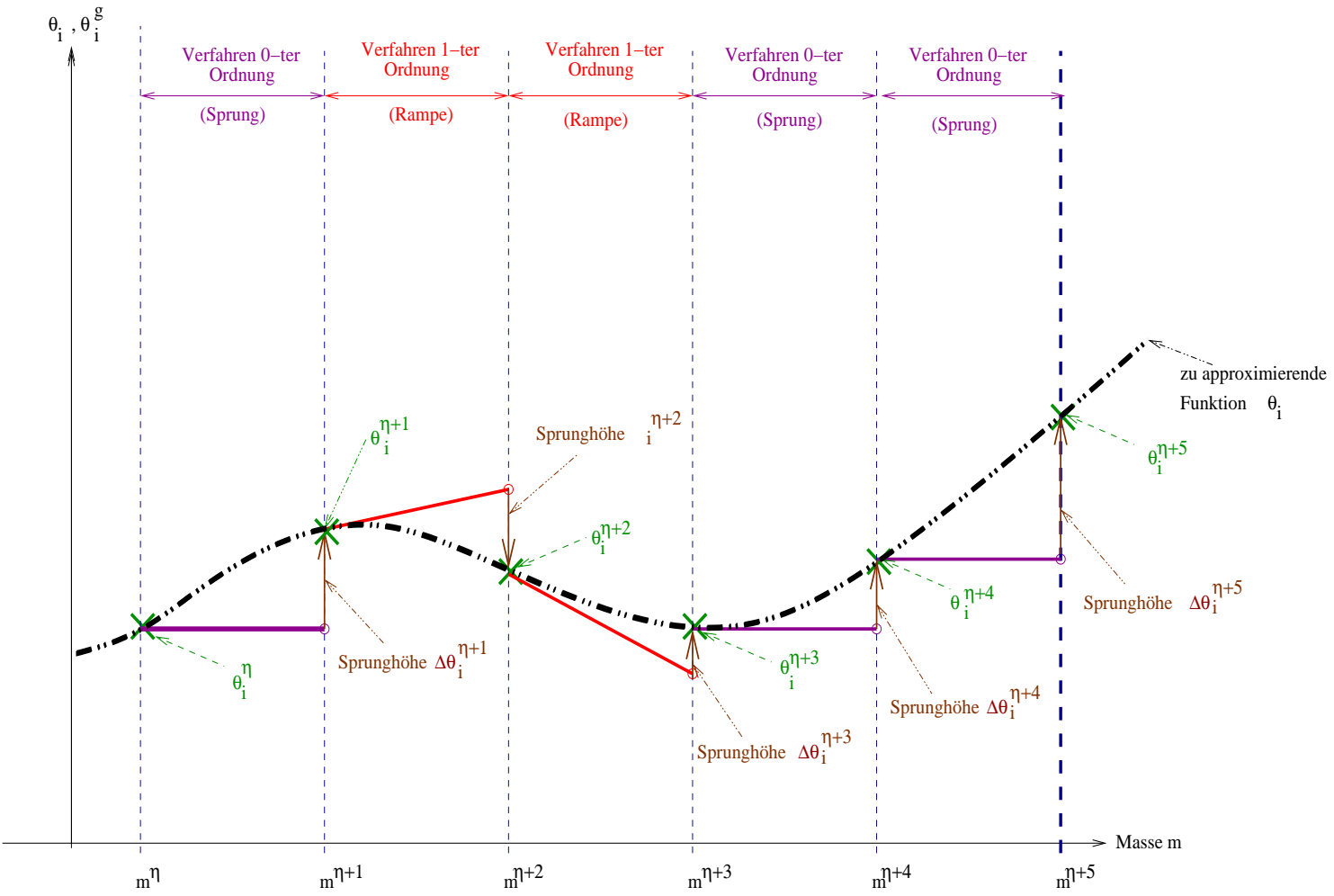


Abbildung 9.9: Sprunghöhe  $\Delta\theta_i(t, m)$  der Gelenkwinkel  $\theta_i(t, \gamma^g(m^\eta))$  (Primzipskizze)



mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

Setzt man die Stellen  $(i, t, m)$ , für die sich  $\Delta\theta^{abs}$  bzw.  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  ergeben, in (9.10) bzw. (9.11) ein, so erhält man die zugehörigen *relativen Sprunghöhen*.

*Werte der realen Datenbasis:*

Die Abbildung 9.10 zeigt die Zeitabhängigkeit der *Sprunghöhe*  $\Delta\theta_3(m = 7.09 \text{ kg}, t)$ , die gemäß Formel (9.12) die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta\theta^{abs}$  enthält.

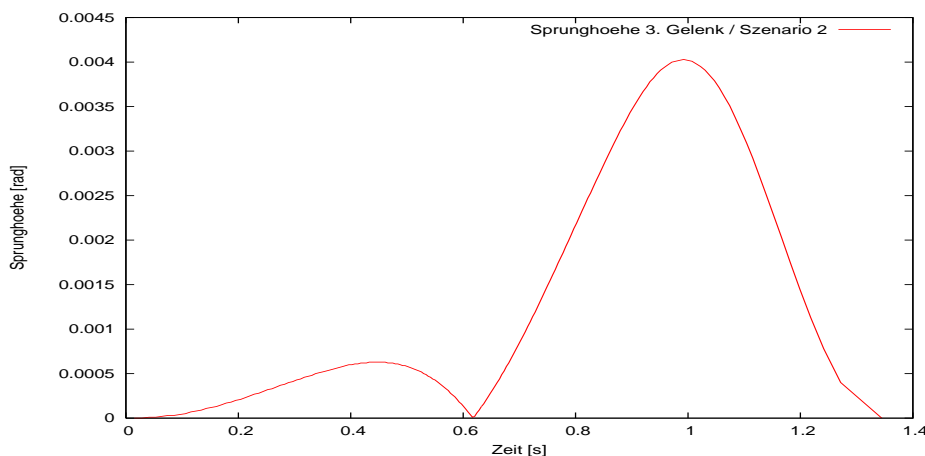


Abbildung 9.10: Szenario 2 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta\theta_3(m = 7.09 \text{ kg}, t)$  (zum 3. Gelenk gehörig)

Der Wert der *absoluten Sprunghöhe*  $\Delta\theta^{abs}$  dieses Szenarios beträgt  $0.004 \text{ rad}$  und liegt an der Stelle  $(m = 7.09 \text{ kg}, t = 0.97 \text{ sec})$ .

Die Abbildung 9.11 zeigt die *Sprunghöhen*  $\Delta\theta_3(m, t = 0.97 \text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\theta^{abs}$ .

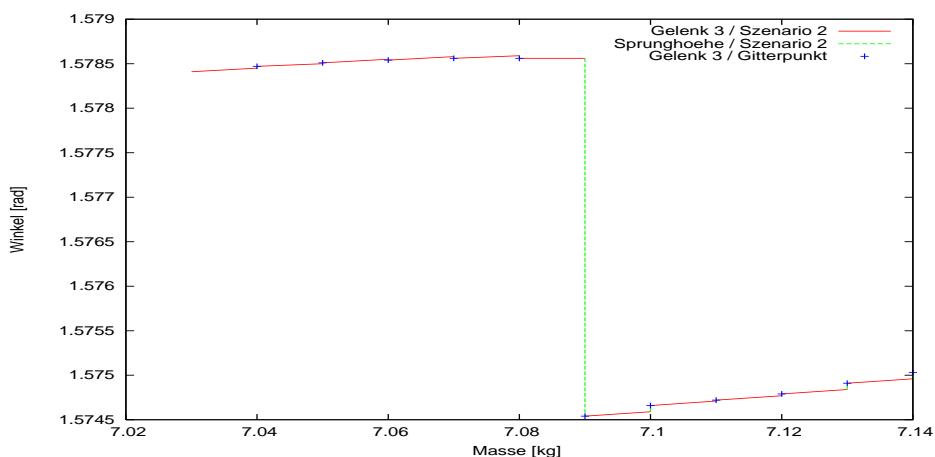


Abbildung 9.11: Szenario 2 - Sprunghöhen  $\Delta\theta_3(m, t = 0.97 \text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\theta^{abs}$

Die Abbildung 9.12 zeigt die Zeitabhängigkeit der *Sprunghöhe*  $\Delta\dot{\theta}_3(m = 7.09 \text{ kg}, t)$ , die gemäß Formel (9.13) die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  enthält. Der Wert der *absoluten Sprunghöhe*  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  dieses Szenarios beträgt  $0.012 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und liegt an der Stelle  $(m = 7.09 \text{ kg}, t = 0.81 \text{ sec})$ .

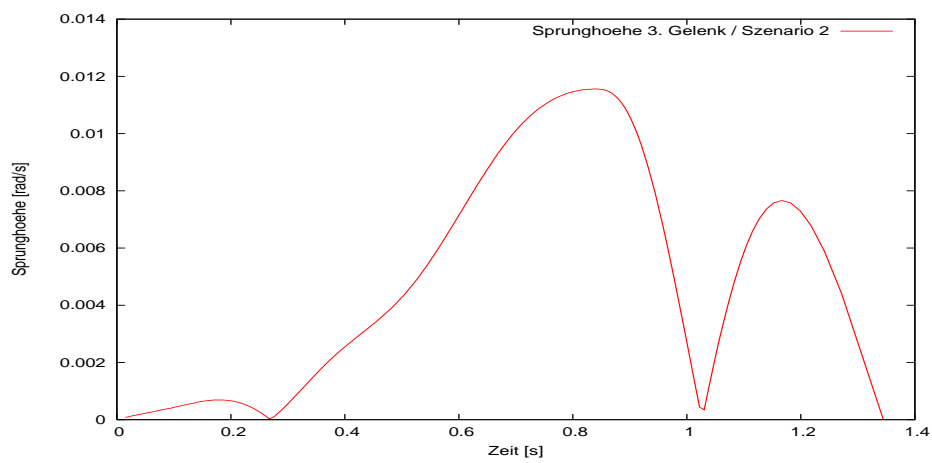


Abbildung 9.12: Szenario 2 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta\dot{\theta}_3(m = 7.09 \text{ kg}, t)$  (zum 3. Gelenk gehörig)

### 9.1.3 Schritt 3: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$ des Szeaniros 2

Durch Einsetzen von  $\theta^n(t)$ ,  $\dot{\theta}^n(t)$  und  $\ddot{\theta}^n(t)$  bzw.  $\theta(t, \gamma^g(m^n))$ ,  $\dot{\theta}(t, \gamma^g(m^n))$  und  $\ddot{\theta}(t, \gamma^g(m^n))$  in (3.5) bis (3.7) erhält man die Komponenten  $x^n(t) := x(t, \gamma^n)$  bzw.  $x(t, \gamma^g(m^n))$ ,  $y^n(t) := y(t, \gamma^n)$  bzw.  $y(t, \gamma^g(m^n))$  und  $z^n(t) := z(t, \gamma^n)$  bzw.  $z(t, \gamma^g(m^n))$  des Positionsvektors des WZP. Der Betrag des Verbindungsvektors zwischen den sich aufgrund von OSTP und des Approximationsverfahrens ergebenden Positionsvektoren wird hier als *Sprunghöhe*  $\Delta A(t)$  der Norm des Positionsvektors des WZP (Siehe Abbildung 9.13) bezeichnet. Diese ergibt sich zu

$$\Delta A(t) = \sqrt{\left(x(t, \gamma^n) - x(t, \gamma^g(m^n))\right)^2 + \left(y(t, \gamma^n) - y(t, \gamma^g(m^n))\right)^2 + \left(z(t, \gamma^n) - z(t, \gamma^g(m^n))\right)^2}, \quad (9.16)$$

die *Sprunghöhe*  $\Delta \dot{A}(t)$  der Norm des Geschwindigkeitsvektors des WZP zu

$$\Delta \dot{A}(t) = \sqrt{\left(\dot{x}(t, \gamma^n) - \dot{x}(t, \gamma^g(m^n))\right)^2 + \left(\dot{y}(t, \gamma^n) - \dot{y}(t, \gamma^g(m^n))\right)^2 + \left(\dot{z}(t, \gamma^n) - \dot{z}(t, \gamma^g(m^n))\right)^2}, \quad (9.17)$$

die *relative Sprunghöhe*  $\Delta_r A(t)$  der Norm des Positionsvektors des WZP zu

$$\Delta_r A(t) = \sqrt{\frac{\left(x(t, \gamma^n) - x(t, \gamma^g(m^n))\right)^2 + \left(y(t, \gamma^n) - y(t, \gamma^g(m^n))\right)^2 + \left(z(t, \gamma^n) - z(t, \gamma^g(m^n))\right)^2}{x^2(t, \gamma^n) + y^2(t, \gamma^n) + z^2(t, \gamma^n)}} \quad (9.18)$$

und die *relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \dot{A}(t)$  der Norm des Geschwindigkeitsvektors des WZP zu

$$\Delta_r \dot{A}(t) = \sqrt{\frac{\left(\dot{x}(t, \gamma^n) - \dot{x}(t, \gamma^g(m^n))\right)^2 + \left(\dot{y}(t, \gamma^n) - \dot{y}(t, \gamma^g(m^n))\right)^2 + \left(\dot{z}(t, \gamma^n) - \dot{z}(t, \gamma^g(m^n))\right)^2}{\dot{x}^2(t, \gamma^n) + \dot{y}^2(t, \gamma^n) + \dot{z}^2(t, \gamma^n)}}. \quad (9.19)$$

Abschließend erfolgt für  $\Delta A(t)$  und  $\Delta \dot{A}(t)$  eine Maximalwertbildung über die Zeit  $t$  und den Parameter  $m$  dieses Szenarios:

- absolute Sprunghöhe  $\Delta A^{abs}$  der Norm des Positionsvektors

$$\Delta A^{abs} = \max_{m,t} \Delta A(m, t), \quad (9.20)$$

- absolute Sprunghöhe  $\Delta \dot{A}^{abs}$  der Norm des Handgeschwindigkeitsvektors

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{m,t} \Delta \dot{A}(m, t) \quad (9.21)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

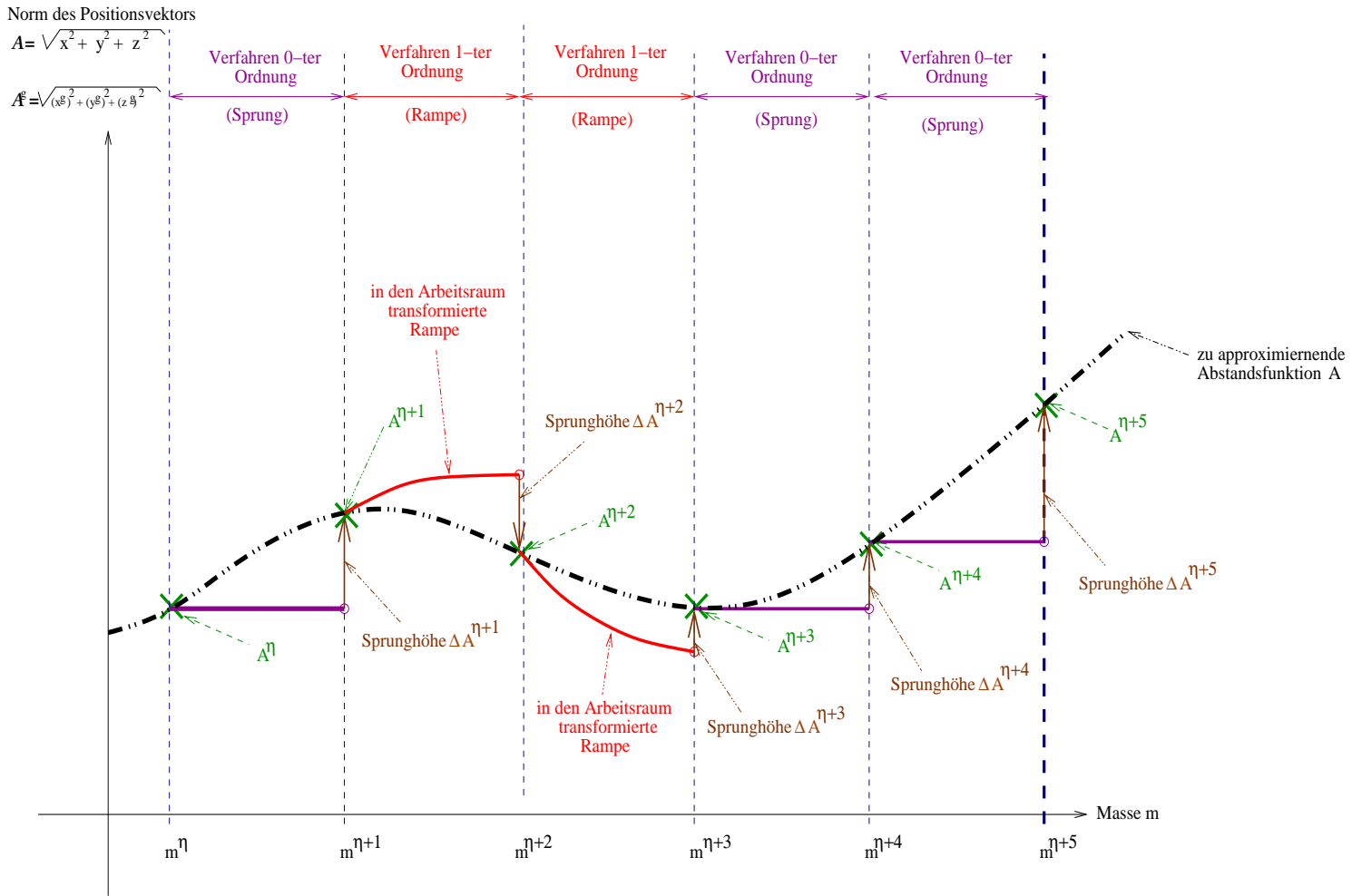


Abbildung 9.13: Absolute Sprunghöhe  $\Delta A(t)$  Norm des Positionsvektors des WZP (Prinzipskizze)

In Indexschreibweise formuliert lauten (9.20) und (9.21):

$$\Delta A^{abs} = \max_{i,t,\eta} \Delta A_i(\eta, t), \quad (9.22)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{i,t,\eta} \Delta \dot{A}_i(\eta, t) \quad (9.23)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

Setzt man die Stellen  $(t, m)$ , für die sich  $\Delta A^{abs}$  bzw.  $\Delta \dot{A}^{abs}$  ergeben, in (9.18) bzw. (9.19) ein, so erhält man die zugehörigen *relativen Sprunghöhen*.

*Werte der realen Datenbasis:*

Die Abbildung 9.14 zeigt die Norm  $\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$  des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes und den Verlauf der  $x(t)$ -,  $y(t)$ - und  $z(t)$ -Koordinate über der Zeit. Die maximale Entfernung des Werkzeugzentrierpunktes von der Roboterbasis liegt in diesem Szenario bei  $1.5\text{ m}$ .

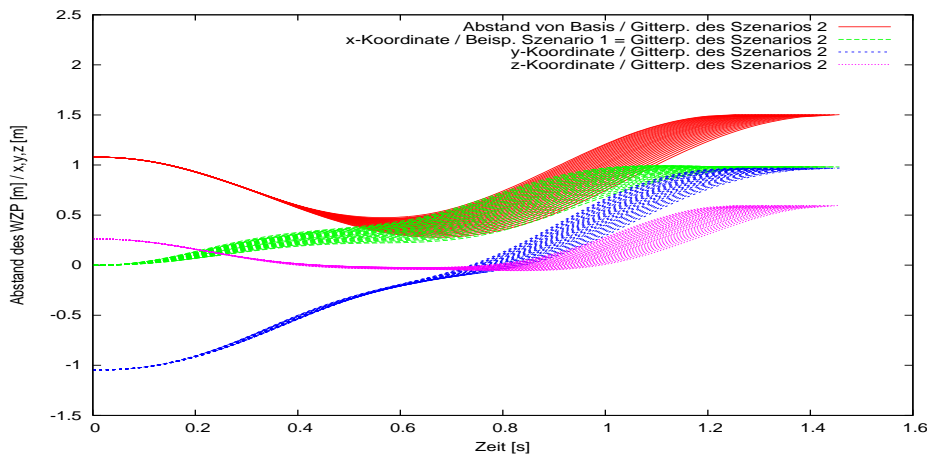


Abbildung 9.14: Szenario 2 - Norm des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes sowie seine Komponenten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  von mit SQP berechneten Trajektorien

Die Abbildung 9.15 zeigt die Zeitabhängigkeit der *Sprunghöhe*  $\Delta A(m = 7.09\text{ kg}, t)$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.20) die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta A^{abs}$  enthält, d.h. die größte Abweichung zwischen approximierten und mit OSTP berechneten Trajektorien bezüglich der Norm des Handpositionsvektors aufweist. Der Wert der *absoluten Sprunghöhe*  $\Delta A^{abs}$  dieses Szenarios beträgt  $0.0042\text{ m}$  und liegt an der Stelle  $(m = 7.09\text{ kg}, t = 0.96\text{ sec})$ .

Die Abbildung 9.16 zeigt die Geschwindigkeiten  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  und  $\dot{z}(t)$  entlang der Koordinatenachsen sowie die Norm  $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$  des Geschwindigkeitsvektors des Werkzeugzentrierpunktes. Wie aus Abbildung 9.16 ersichtlich ist die Handgeschwindigkeit bedingungsgemäß am Anfangs- und Endpunkt  $0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Die Abbildung 9.17 zeigt die Zeitabhängigkeit der *Sprunghöhe*  $\Delta \dot{A}(m = 7.09\text{ kg}, t)$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.21) die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta \dot{A}^{abs}$  enthält, d.h. die größte Abweichung zwischen approximierten und mit OSTP berechneten Trajektorien bezüglich der Norm des Handgeschwindigkeitsvektors aufweist. Der Wert der *absoluten Sprunghöhe*  $\Delta \dot{A}^{abs}$  dieses Szenarios beträgt  $0.015\frac{\text{m}}{\text{s}}$  und liegt an der Stelle  $(m = 7.09\text{ kg}, t = 0.8\text{ sec})$ .

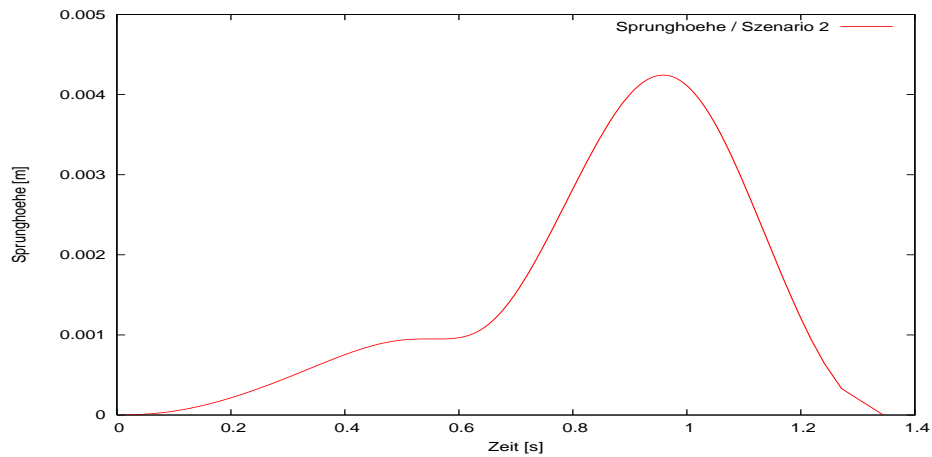


Abbildung 9.15: Szenario 2 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta A(m = 7.09 \text{ kg}, t)$

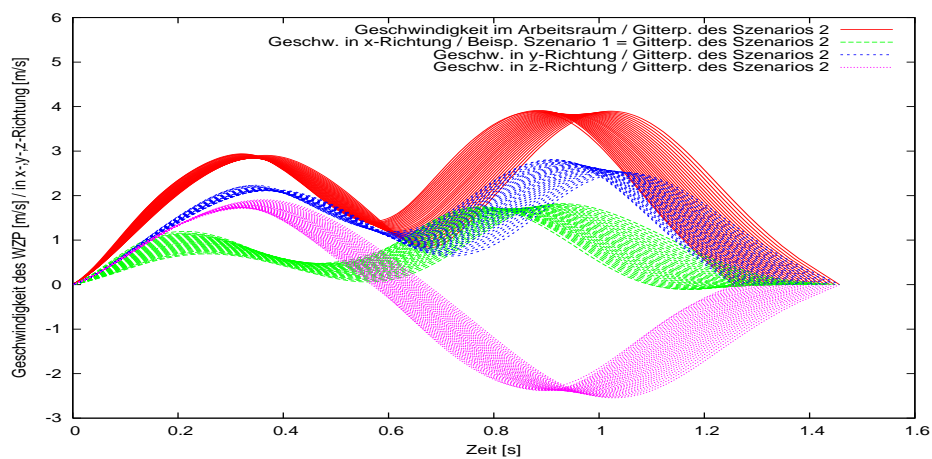


Abbildung 9.16: Szenario 2 - Norm des Geschwindigkeitsvektors und Geschwindigkeiten in x-, y- und z-Richtung von mit SQP berechneten Trajektorien

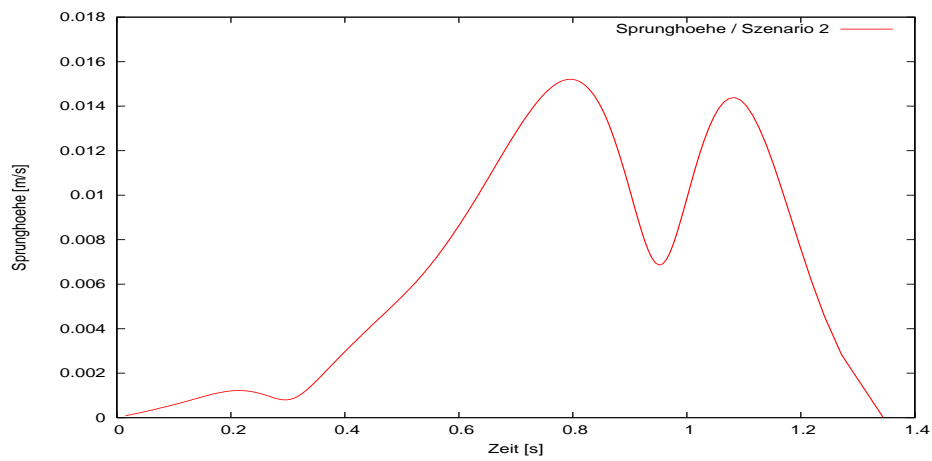


Abbildung 9.17: Szenario 2 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta \dot{A}(m = 7.09 \text{ kg}, t)$

## 9.2 Maximale relative Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$

Pro Szenario zeigt die folgende Tabelle jeweils

- die *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \gamma^{max}$

sowohl außer- als auch innerhalb der Singularitätsintervalle.

Szenarien:	außerhalb	innerhalb
<b>Szenario 2:</b>	4.84% ( $\Delta \tilde{\gamma}_{3\beta} = 0.011$ )	0.0% (0.0)
<b>Szenario 4:</b>	4.88% ( $\Delta \tilde{\gamma}_{3\beta} = 0.0055$ )	18.33% ( $\Delta \tilde{\gamma}_{3\beta} = 0.021$ )
<b>Szenario 5:</b>	4.90% ( $\Delta \tilde{\gamma}_{4\beta} = 0.066$ )	422.32% ( $\Delta \tilde{\gamma}_{4\beta} = 1.83$ )
<b>Szenario 6:</b>	4.69% ( $\Delta \tilde{\gamma}_{4\beta} = 0.063$ )	18.71% ( $\Delta \tilde{\gamma}_{4\beta} = 0.24$ )
<b>Szenario 7:</b>	2.42% ( $\Delta \tilde{\gamma}_{3\beta} = 0.0027$ )	keine

Tabelle 9.1: Maximale relative Sprunghöhen  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  außer- und innerhalb der Singularitätszonen; der Wert in den Klammern gibt den zugehörigen Absolutwert, d.h. den Wert des Zählers von (9.6) an.

Die maximale relative Sprunghöhe  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  tritt in allen Szenarien bei zum Geschwindigkeitsprofil  $\beta(s)$  bzw.  $\bar{\beta}(s)$  gehörenden Koeffizienten auf, in den Szenarien 2, 4 und 7 beim Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_{3\beta}$  sowie in den Szenarien 5 und 6 beim Koeffizienten  $\gamma_{4\beta}$ .

Die Werte der maximalen relativen Sprunghöhen  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  in den Singularitätszonen des Szenarios 4 sind 3.76-mal, die des Szenarios 5 86.19-mal und die des Szenarios 6 3.98-mal größer als die Werte der maximalen relativen Sprunghöhen  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  außerhalb der Singularitätszonen. Die Trajektorien der Ausweichstrategien stellen das Erreichen des Endpunktes sicher. Eine Berücksichtigung der am Zeitpunkt  $t_0$  bzw.  $t_1$  vorliegenden Informationen bei der Trajektorienplanung unterbleibt innerhalb der Singularitätszonen.

*Anmerkung:*

Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt die maximale relative Sprunghöhe  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  unter 5%. Das Sprungkriterium (8.7) greift demnach.



### 9.2.1 Szenario 4: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und Standardabweichung  $\sigma_0$ . Laufparameter ist jedoch nur der Erwartungswert  $\bar{m}_0$  der Nutzlastmasse. In Indexschreibweise ergeben sich die  $\tilde{\gamma}^g$  somit folgendermaßen:

- Das Intervall  $\{(\bar{m}_0^\eta, \sigma_0^\iota), (\bar{m}_0^{\eta+1}, \sigma_0^\iota)\}$  zählt **nicht** zu den **Singularitätsintervallen**:

– Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g(\bar{m}_0^{\eta+1}, \sigma_0^\iota) = \tilde{\gamma}_k^*(\bar{m}_0^\eta, \sigma_0^\iota), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.24)$$

– Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g(\bar{m}_0^{\eta+1}, \sigma_0^\iota) = \tilde{\gamma}_k^*(\bar{m}_0^\eta, \sigma_0^\iota) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \bar{m}_0}(\bar{m}_0^\eta, \sigma_0^\iota) \cdot (\bar{m}_0^{\eta+1} - \bar{m}_0^\eta), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.25)$$

- Das Intervall  $\{(\bar{m}_0^\eta, \sigma_0^\iota), (\bar{m}_0^{\eta+1}, \sigma_0^\iota)\}$  zählt zu den **Singularitätsintervallen**:

Die bisherige Referenztrajektorie wird beibehalten (Siehe auch Abb. 9.18):

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\bar{m}_0^{alt}, \sigma_0^{alt}), \quad k = 1, \dots, K. \quad (9.26)$$

Im Szenario 4 ist jedoch die bisherige Referenztrajektorie nicht vorhersagbar. Um eine obere Grenze angegeben zu können, wird die Trajektorie des vom zu betrachtenden Wertepaar  $(\bar{m}_0^{\eta+1}, \sigma_0^\iota)$  am weitesten entfernten Gitterpunktes der Datenbasis als bisherige herangezogen:

$$(\bar{m}_0^{alt}, \sigma_0^{alt}) = \arg \max \left( \left| \frac{\bar{m}_0^{\eta+1} - \bar{m}_0^1}{\Delta \bar{m}_0} \right| + \left| \frac{\sigma_0^\iota - \sigma_0^1}{\Delta \sigma_0} \right|, \left| \frac{\bar{m}_0^{\eta+1} - \bar{m}_0^{101}}{\Delta \bar{m}_0} \right| + \left| \frac{\sigma_0^\iota - \sigma_0^{30}}{\Delta \sigma_0} \right| \right) \quad (9.27)$$

Die Größe

- *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$

berechnet sich durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \bar{m}_0, \sigma_0} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\bar{m}_0, \sigma_0). \quad (9.28)$$

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \eta, \iota} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\eta, \iota). \quad (9.29)$$

Die Abbildung 9.19 zeigt die *relativen Sprunghöhen*  $\Delta_r \tilde{\gamma}_3(\bar{m}_0, \sigma_0 = 3.9 \text{ kg})$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.28) die *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  enthält. Der Wert der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  des Szenarios 4 beträgt außerhalb der Singularitätsintervalle 4.88%, innerhalb der Singularitätsintervalle 18.33%. Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  an der Stelle  $(\bar{m}_0 = 8.25 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.9 \text{ kg})$ , innerhalb an der Stelle  $(\bar{m}_0 = 8.55 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg})$ .

Die Abbildung 9.20 zeigt den Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}^g$  in der Umgebung der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  außerhalb der Singularitätsintervalle. Die Lücke zwischen den Stellen 8.34 kg und 8.37 kg ist ein Singularitätsintervall.

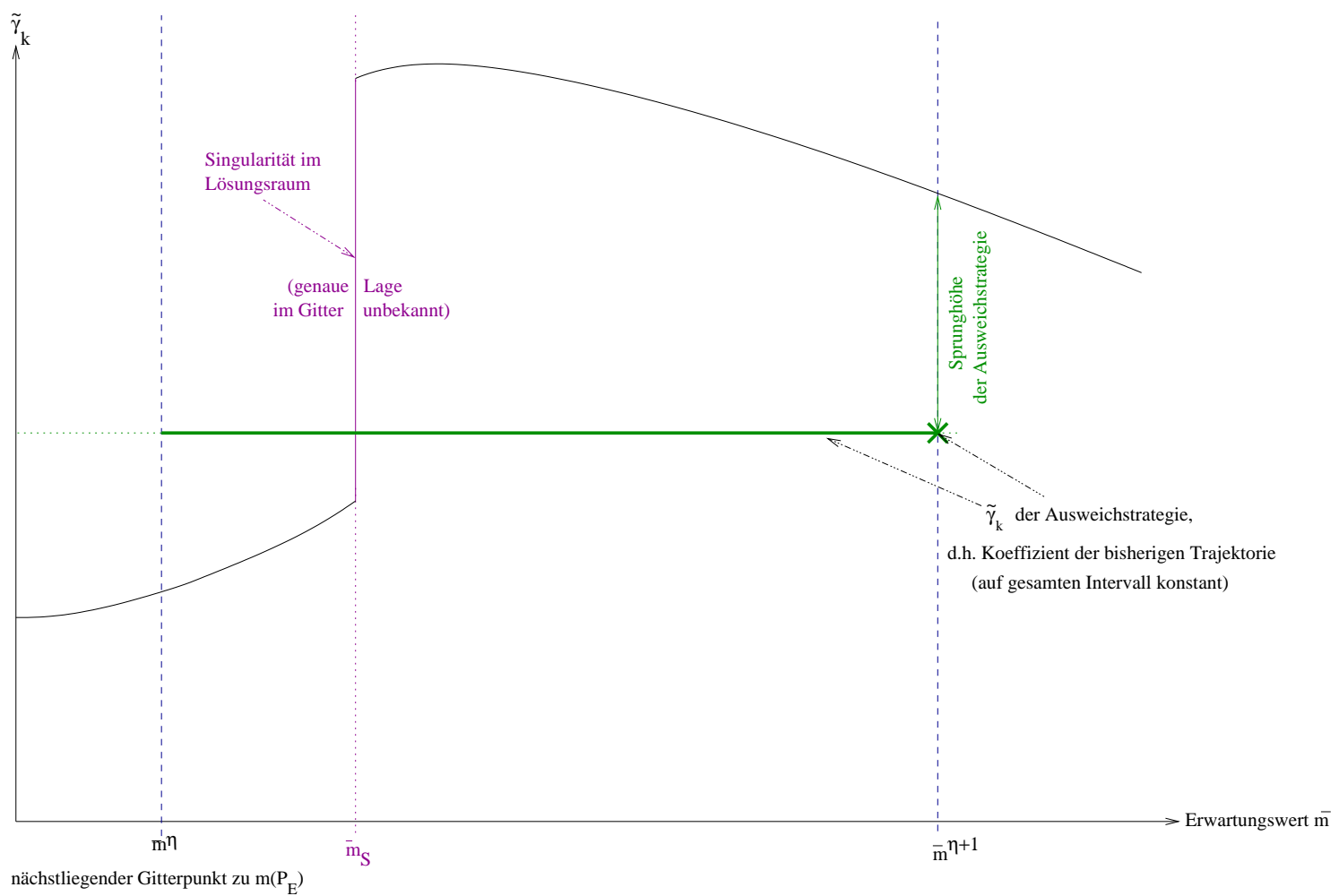


Abbildung 9.18: Szenario 4 - Sprunghöhe innerhalb von Singularitätsintervallen

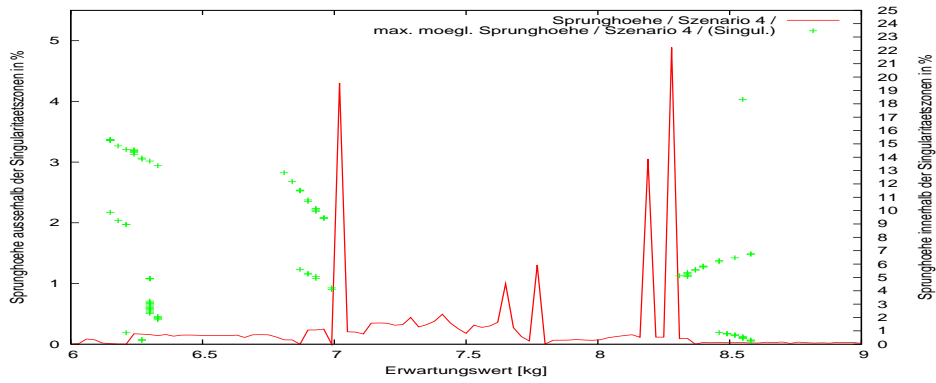


Abbildung 9.19: Szenario 4 - Sprunghöhen  $\Delta_r \tilde{\gamma}_3(\bar{m}_0, \sigma_0 = 3.9 \text{ kg})$  ausserhalb (links, rot) und innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (in beiden Fällen zum Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}$  gehörig)

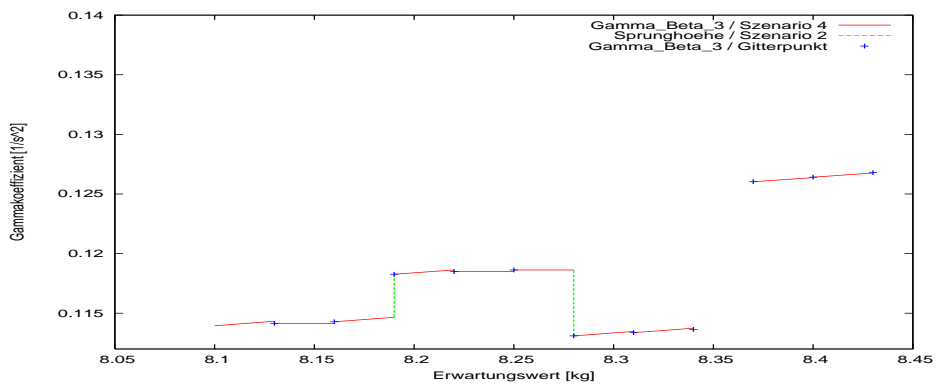


Abbildung 9.20: Szenario 4 - Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}^g$  in der Umgebung der maximalen relativen Sprunghöhe  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  ausserhalb der Singularitätsintervalle

### 9.2.2 Szenario 5: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Mittelwert  $\bar{m}_1$  und mittlerer Fehler  $\sigma_1$ . Laufparameter ist jedoch nur der Mittelwert  $\bar{m}_1$  der Nutzlastmasse. In Indexschreibweise ergeben sich die  $\tilde{\gamma}^g$  somit folgendermaßen:

- Das Intervall  $\{(\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota), (\bar{m}_1^{\eta+1}, \sigma_1^\iota)\}$  zählt **nicht** zu den **Singularitätsintervallen**:

– Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g(\bar{m}_1^{\eta+1}, \sigma_1^\iota) = \tilde{\gamma}_k^*(\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.30)$$

– Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}_k^g(\bar{m}_1^{\eta+1}, \sigma_1^\iota) = \tilde{\gamma}_k^*(\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \bar{m}_1}(\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota) \cdot (\bar{m}_1^{\eta+1} - \bar{m}_1^\eta) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \sigma_1}(\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota) \cdot (\sigma_1^{\iota+1} - \sigma_1^\iota), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.31)$$

- Das Intervall  $\{(\bar{m}_1^\eta, \sigma_1^\iota), (\bar{m}_1^{\eta+1}, \sigma_1^\iota)\}$  zählt zu den **Singularitätsintervallen**:

Die bisherige Referenztrajektorie wird beibehalten (Siehe auch Abb. 9.21):

$$\tilde{\gamma}_k^g = \tilde{\gamma}_k^*(\bar{m}_{0R}, \sigma_{0R}), \quad k = 1, \dots, K \quad (9.32)$$

Die Größe

- *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$

berechnet sich durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \bar{m}_1, \sigma_1} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\bar{m}_1, \sigma_1). \quad (9.33)$$

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \eta, \iota} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\eta, \iota). \quad (9.34)$$

Die Abbildung 9.22 zeigt die *relativen Sprunghöhen*  $\Delta_r \tilde{\gamma}_4(\bar{m}_1, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg})$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.33) die *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  enthält. Der Wert der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  des Szenarios 5 beträgt außerhalb der Singularitätsintervalle 4.90%, innerhalb der Singularitätsintervalle 422.32%. Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  an der Stelle  $(\bar{m}_1 = 7.32 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg})$ , innerhalb an der Stelle  $(\bar{m}_1 = 3.87 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg})$ .

Die Abbildung 9.23 zeigt den Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{4\beta}^g$  in der Umgebung der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  außerhalb der Singularitätsintervalle.

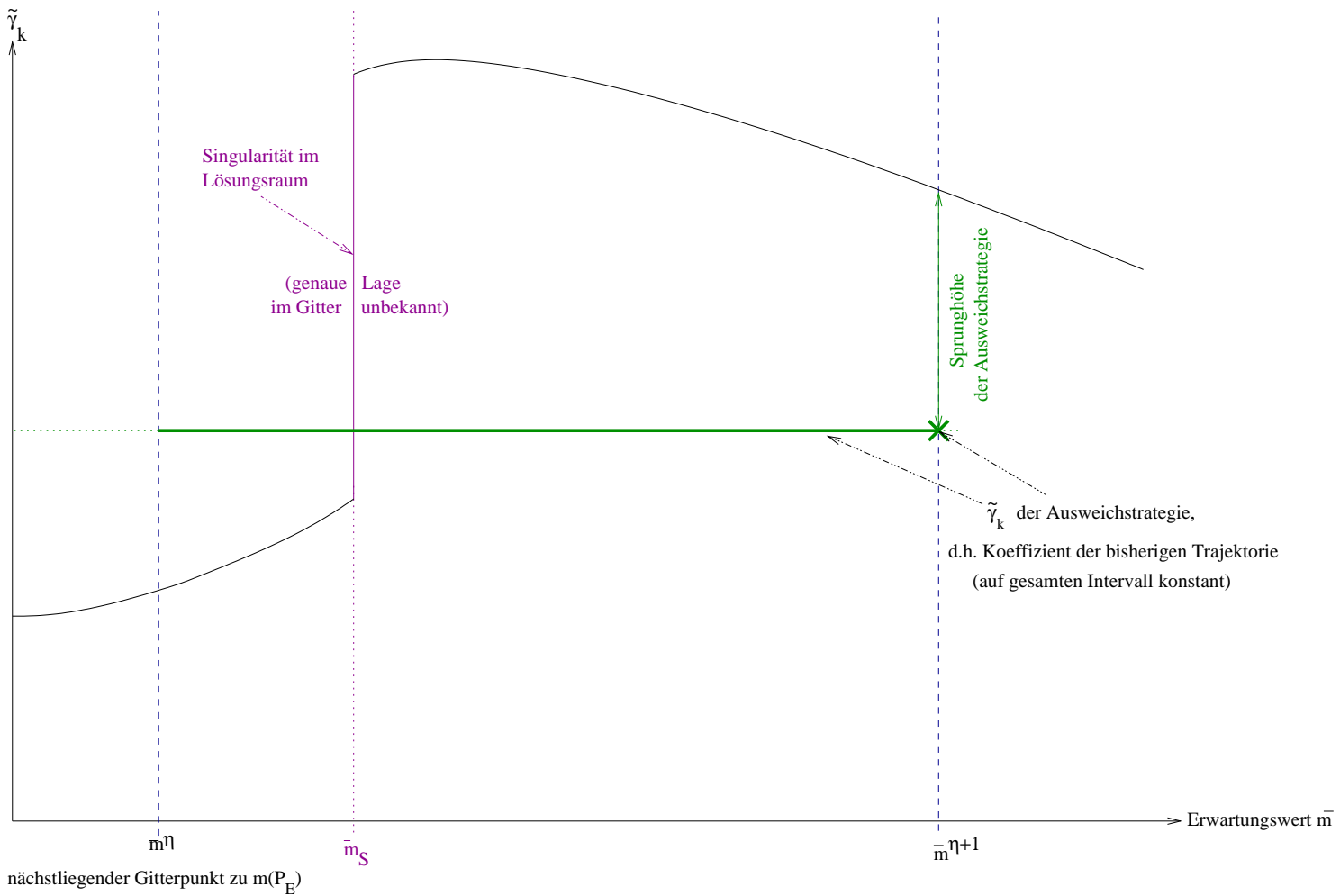


Abbildung 9.21: Szenario 5 - Sprunghöhe innerhalb von Singularitätsintervallen

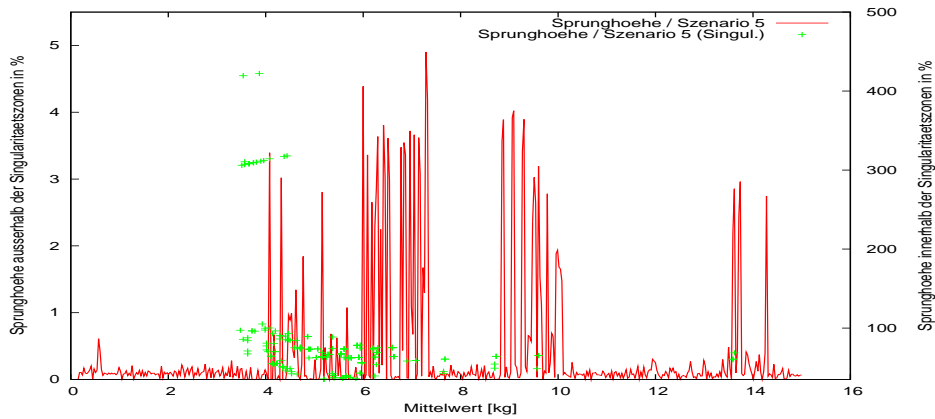


Abbildung 9.22: Szenario 5 - Sprunghöhen  $\Delta_r \tilde{\gamma}_4(\bar{m}_1, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg})$  ausserhalb (links, rot) und innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (in beiden Fällen zum Koeffizienten  $\gamma_{4\beta}$  gehörig)

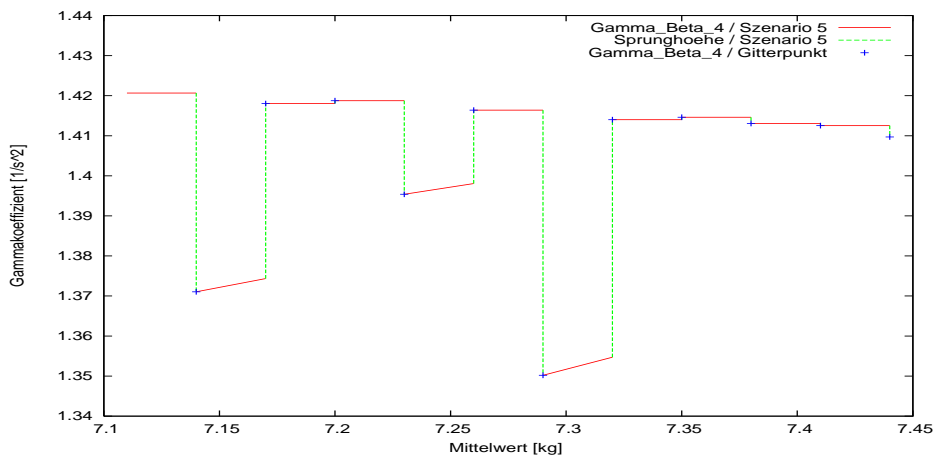


Abbildung 9.23: Szenario 5 - Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{4\beta}^g$  in der Umgebung der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  ausserhalb der Singularitätsintervalle

### 9.2.3 Szenario 6: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die drei Endgelenkwinkelstellungen  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$ . Laufparameter ist jedoch nur die Endgelenkwinkelstellung  $\theta_{3f}$  des dritten Gelenkes. In Indexschreibweise ergeben sich die  $\tilde{\gamma}^g$  somit folgendermaßen:

- Das Intervall  $\{(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^\zeta), (\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^{\zeta+1})\}$  zählt **nicht** zu den **Singularitätsintervallen**:

– Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}^g(\theta_f^{\nu \zeta+1}) = \tilde{\gamma}_k^*(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^\zeta), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.35)$$

– Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}^g(\theta_f^{\nu \zeta+1}) = \tilde{\gamma}_k^*(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^\zeta) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \theta_{3f}}(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^\zeta) \cdot (\theta_{3f}^{\zeta+1} - \theta_{3f}^\zeta), \quad k = 1, \dots, K. \quad (9.36)$$

- Das Intervall  $\{(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^\zeta), (\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^{\zeta+1})\}$  zählt zu den **Singularitätsintervallen**:

Aufgrund der Ermangelung von Ausweichstrategien wird innerhalb der Singularitätsintervalle genauso vorgegangen wie außerhalb (Siehe auch Abb. 8.47):

– Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}^g(\theta_f^{\nu \zeta+1}) = \tilde{\gamma}_k^*(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^\zeta), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.37)$$

– Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}^g(\theta_f^{\nu \zeta+1}) = \tilde{\gamma}_k^*(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^\zeta) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \theta_{3f}}(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\nu, \theta_{3f}^\zeta) \cdot (\theta_{3f}^{\zeta+1} - \theta_{3f}^\zeta), \quad k = 1, \dots, K. \quad (9.38)$$

Die Größe

- *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$

berechnet sich durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \theta_f} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\theta_f). \quad (9.39)$$

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \eta, \nu, \zeta} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\eta, \nu, \zeta). \quad (9.40)$$

Die Abbildung 9.25 zeigt die *relativen Sprunghöhen*  $\Delta_r \tilde{\gamma}_4(\theta_{1f} = 2.354, \theta_{2f} = 1.045, \theta_{3f})$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.39) die *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  enthält. Die *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  des Szenarios 6 beträgt außerhalb der Singularitätsintervalle 4.69%, innerhalb der Singularitätsintervalle 18.71%. Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  an der Stelle  $\theta_f = (2.354, 1.045, 0.785)^T \text{ rad}$ , innerhalb an der Stelle  $\theta_f = (2.354, 1.048, 0.79)^T \text{ rad}$ .

Die Abbildung 9.26 zeigt den Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{4\beta}^g$  in der Umgebung der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  außerhalb der Singularitätsintervalle.

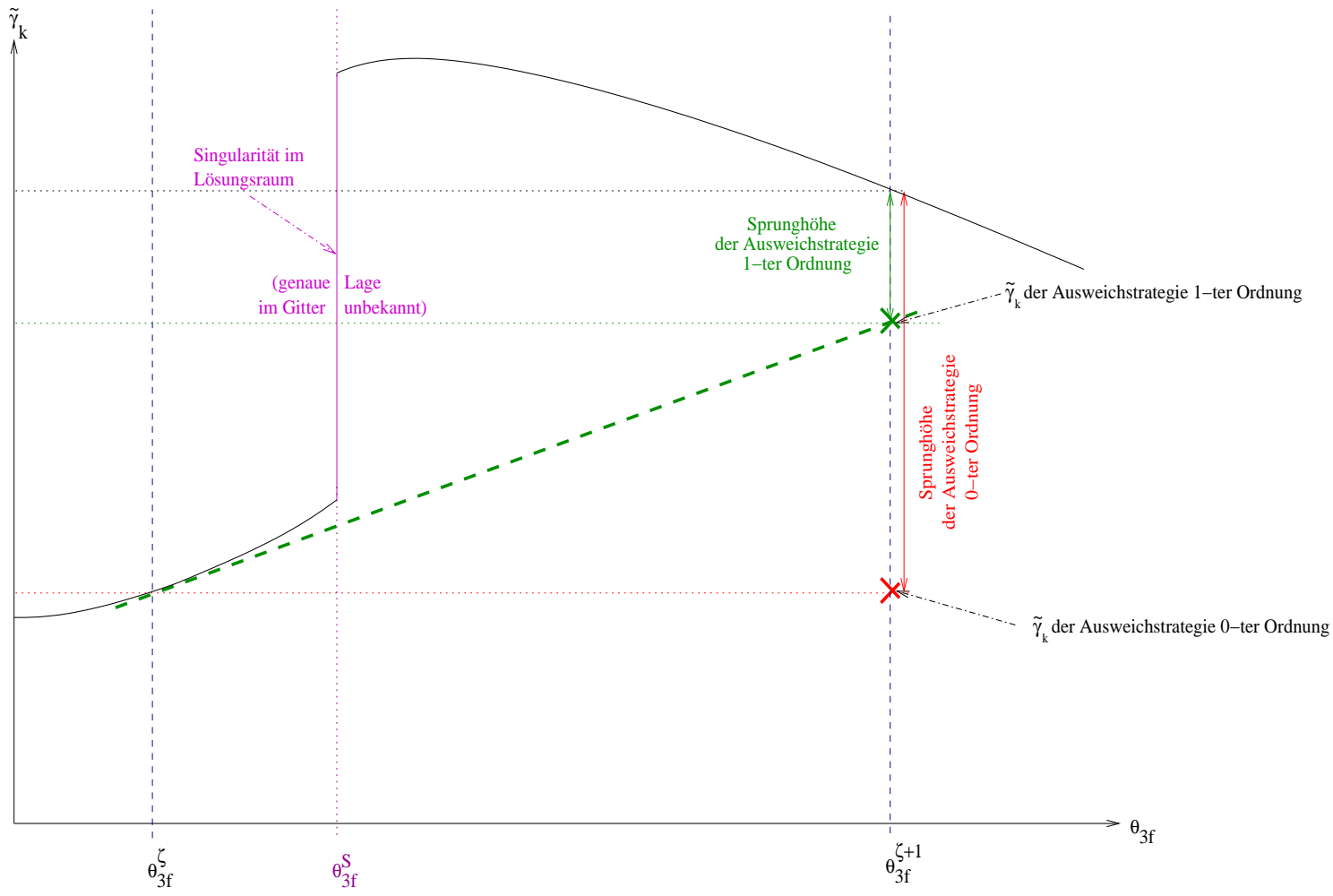


Abbildung 9.24: Szenario 6 - Sprunghöhen innerhalb von Singularitätsintervallen



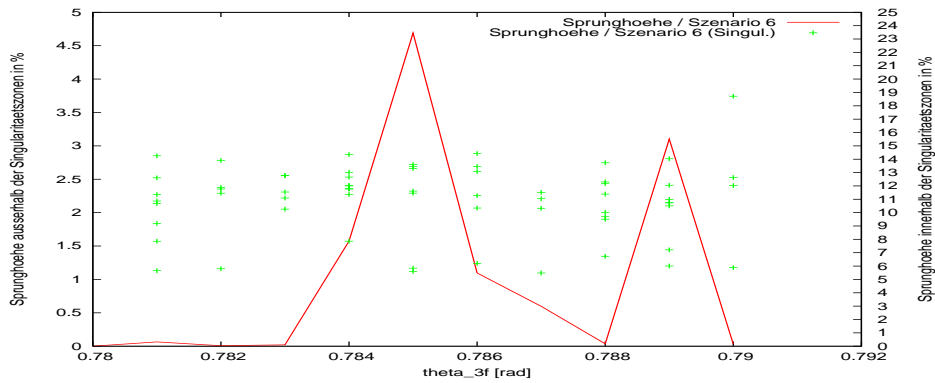


Abbildung 9.25: Szenario 6 - Sprunghöhen  $\Delta_r \tilde{\gamma}_4(\theta_{1f} = 2.354, \theta_{2f} = 1.045, \theta_{3f})$  außerhalb (links, rot) und innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (in beiden Fällen zum Koeffizienten  $\gamma_{4\beta}$  gehörig)

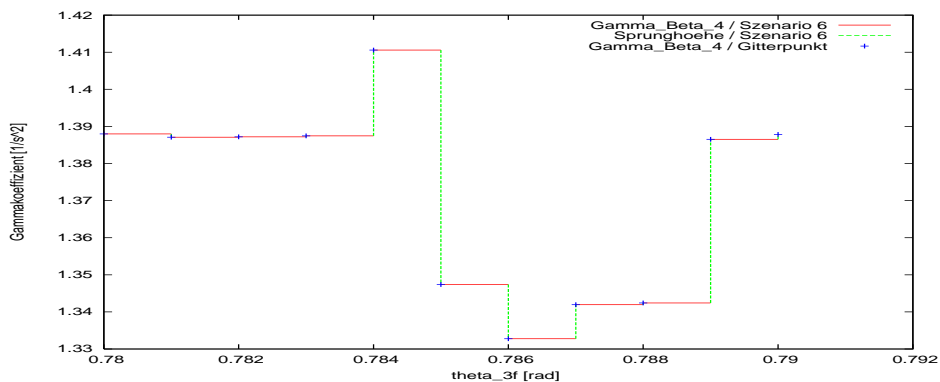


Abbildung 9.26: Szenario 6 - Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{4\beta}^g$  in der Umgebung der maximalen relativen Sprunghöhe  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  außerhalb der Singularitätsintervalle

### 9.2.4 Szenario 7: Sprunghöhen der Koeffizienten $\tilde{\gamma}_k$

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die drei Endgelenkwinkelstellungen  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$ . Laufparameter ist jedoch nur die Endgelenkwinkelstellung  $\theta_{3f}$  des dritten Gelenkes. Im Szenario 7 existieren **keine Singularitätsintervalle**. Somit kommt auch **keine Ausweichstrategie** zum Einsatz.

In Indexschreibweise ergeben sich die  $\tilde{\gamma}^g$  somit folgendermaßen:

- Verfahren 0-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}^g(\theta_f^{\eta, \zeta+1}) = \tilde{\gamma}_k^*(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\zeta, \theta_{3f}^\zeta), \quad k = 1, \dots, K, \quad (9.41)$$

- Verfahren 1-ter Ordnung:

$$\tilde{\gamma}^g(\theta_f^{\eta, \zeta+1}) = \tilde{\gamma}_k^*(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\zeta, \theta_{3f}^\zeta) + \frac{\partial \tilde{\gamma}_k^*}{\partial \theta_{3f}}(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\zeta, \theta_{3f}^\zeta) \cdot (\theta_{3f}^{\zeta+1} - \theta_{3f}^\zeta), \quad k = 1, \dots, K. \quad (9.42)$$

Die Größe

- *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$

berechnet sich durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \theta_f} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\theta_f). \quad (9.43)$$

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta_r \tilde{\gamma}^{max} = \max_{k, \eta, \zeta} \Delta_r \tilde{\gamma}_k(\eta, \zeta). \quad (9.44)$$

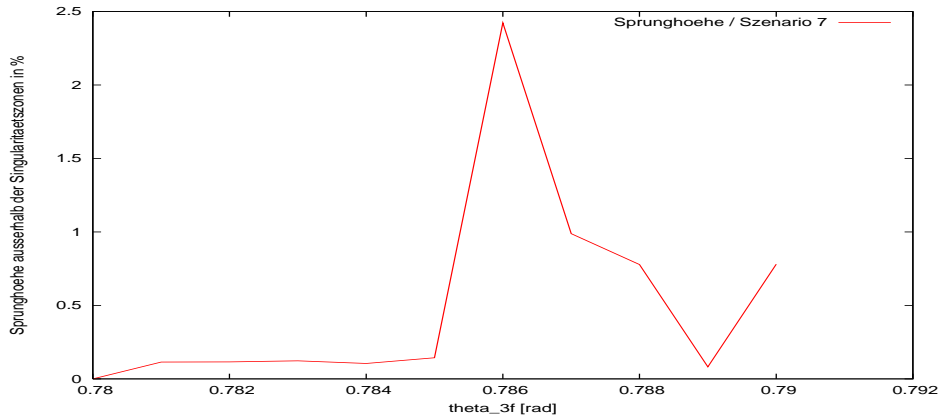


Abbildung 9.27: Szenario 7: Sprunghöhen  $\Delta_r \tilde{\gamma}_3(\theta_{1f} = 2.355, \theta_{2f} = 1.045, \theta_{3f})$  (in beiden Fällen zum Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}$  gehörig)

Die Abbildung 9.27 zeigt die *relativen Sprunghöhen*  $\Delta_r \tilde{\gamma}_3(\theta_{1f} = 2.355, \theta_{2f} = 1.045, \theta_{3f})$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.43) die *maximale relative Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  enthält. Der Wert der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$  des Szenarios 7 beträgt 2.42% und liegt an der Stelle  $\theta_f = (2.355, 1.045, 0.786)^T \text{ rad}$ .

Die Abbildung 9.28 zeigt den Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}^g$  in der Umgebung der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$ .

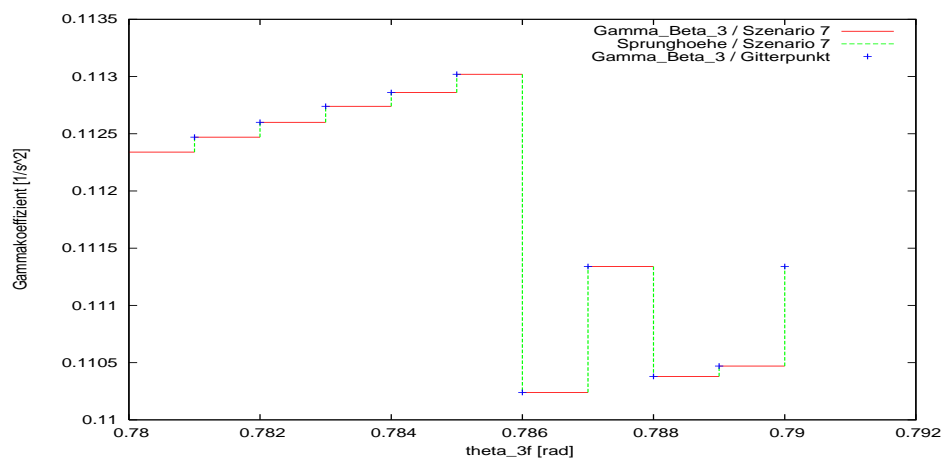


Abbildung 9.28: Szenario 7 - Verlauf des sich aus Sprüngen und Rampen zusammensetzenden Koeffizienten  $\gamma_{3\beta}^g$  in der Umgebung der *maximalen relativen Sprunghöhe*  $\Delta_r \tilde{\gamma}^{max}$

## 9.3 Absolute Sprunghöhen des Zustandes

Pro Szenario zeigen die folgenden Tabellen jeweils

- die absolute Sprunghöhe  $\Delta\theta^{abs}$  (Szenario 2) bzw.  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) des Gelenkwinkelverlaufes in [rad] sowie
- die absolute Sprunghöhe  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  (Szenario 2) bzw.  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) des Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverlaufes in [rad/s]

sowohl außer- als auch innerhalb der Singularitätsintervalle.

Szenarien:	außerhalb	innerhalb
<b>Szenario 2:</b>	$\Delta\theta^{abs} = 0.004$ [rad] (0,26%)	0.0 [rad] (0.0%)
<b>Szenario 4:</b>	$\Delta\theta^{abs} = 0.0046$ [rad] (0.29%)	$\Delta\theta^{abs} = 0.014$ [rad] (0.59%)
<b>Szenario 5:</b>	$\Delta\theta^{abs} = 0.011$ [rad] (0.67%)	$\Delta\theta^{abs} = 0.48$ [rad] (26.77%)
<b>Szenario 6:</b>	$\Delta\theta^{abs} = 0.008$ [rad] (0.54%)	$\Delta\theta^{abs} = 0.030$ [rad] (1.93%)
<b>Szenario 7:</b>	$\Delta\theta^{abs} = 0.0033$ [rad] (0.21%)	keine

Tabelle 9.2: Absolute Sprunghöhen  $\Delta\theta^{abs}$  (Szenario 2) bzw.  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) außer- und innerhalb der Singularitätszonen; die Prozentwerte in den Klammer geben die relativen Sprunghöhen nach einer Umrechnung mit (9.10) an.

Im Szenario 6 - innerhalb von Singularitätsintervallen tritt die absolute Sprunghöhe  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  am ersten Gelenk auf, in allen anderen Szenarien immer am dritten. Die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) in den Singularitätszonen des Szenarios 4 sind 3.04-mal, die des Szenarios 5 43.64-mal und die des Szenarios 6 3.75-mal größer als die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) außerhalb der Singularitätszonen. Die Trajektorien der Ausweichstrategien stellen das Erreichen des Endpunktes sicher. Eine Berücksichtigung der am Zeitpunkt  $t_0$  bzw.  $t_1$  vorliegenden Informationen bei der Trajektorienplanung unterbleibt innerhalb der Singularitätszonen.

Szenarien:	außerhalb	innerhalb
<b>Szenario 2:</b>	$\Delta\dot{\theta}^{abs} = 0.012$ [rad/s] (0,49%)	0.0 [rad/s] (0.0%)
<b>Szenario 4:</b>	$\Delta\dot{\theta}^{abs} = 0.014$ [rad/s] (0.6%)	$\Delta\dot{\theta}^{abs} = 0.077$ [rad/s] (3.27%)
<b>Szenario 5:</b>	$\Delta\dot{\theta}^{abs} = 0.033$ [rad/s] (1.64%)	$\Delta\dot{\theta}^{abs} = 1.26$ [rad/s] (89.57%)
<b>Szenario 6:</b>	$\Delta\dot{\theta}^{abs} = 0.028$ [rad/s] (1.65%)	$\Delta\dot{\theta}^{abs} = 0.1$ [rad/s] (6.1%)
<b>Szenario 7:</b>	$\Delta\dot{\theta}^{abs} = 0.0074$ [rad/s] (0.29%)	keine

Tabelle 9.3: Absolute Sprunghöhen  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  (Szenario 2) bzw.  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) außer- und innerhalb der Singularitätszonen; die Prozentwerte in den Klammer geben die relativen Sprunghöhen nach einer Umrechnung mit (9.11) an.

Die absolute Sprunghöhe  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  (Szenario 2) bzw.  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) tritt immer am dritten Gelenk auf. Die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) in den Singularitätszonen des Szenarios 4 sind 5.5-mal, die des Szenarios 5 38.18-mal und die des Szenarios 6 3.57-mal größer als die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  (Szenarien 4 bis 7) außerhalb der Singularitätszonen. Die Trajektorien der Ausweichstrategien stellen das Erreichen des Endpunktes sicher. Eine Berücksichtigung der am Zeitpunkt  $t_0$  bzw.  $t_1$  vorliegenden Informationen bei der Trajektorienplanung unterbleibt innerhalb der Singularitätszonen.

### 9.3.1 Szenario 4: Sprunghöhen des Zustandes

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und Standardabweichung  $\sigma_0$ .

Daher berechnen sich die Größen

- absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelverlaufes  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  und
- absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverlaufes  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$

durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta\bar{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\bar{m}_0,\sigma_0} \Delta\bar{\theta}_i(\bar{m}_0, \sigma_0, t), \quad (9.45)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\bar{m}_0,\sigma_0} \Delta\dot{\theta}_i(\bar{m}_0, \sigma_0, t) \quad (9.46)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta\bar{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta,\iota} \Delta\bar{\theta}_i(\eta, \iota, t), \quad (9.47)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta,\iota} \Delta\dot{\theta}_i(\eta, \iota, t) \quad (9.48)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

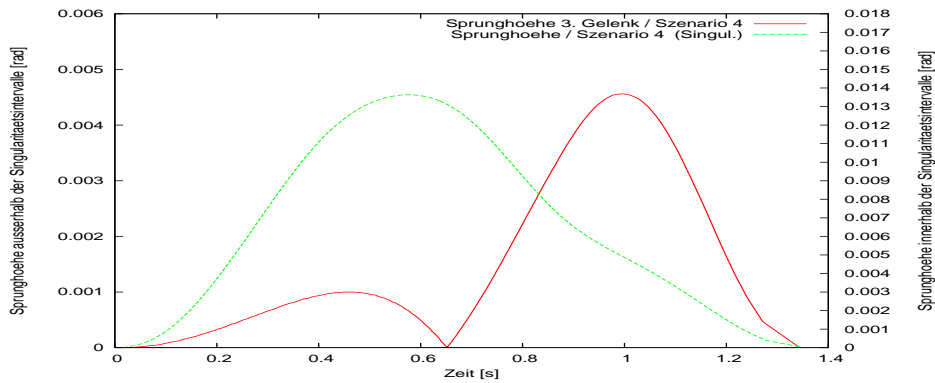


Abbildung 9.29: Szenario 4 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_0 = 7.02 \text{ kg}, \sigma_0 = 1.6 \text{ kg}, t)$  außerhalb (links, rot) und  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_0 = 8.58 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (zum 3. Gelenk gehörig)

Die Abbildung 9.29 zeigt die Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_0 = 7.02 \text{ kg}, \sigma_0 = 1.6 \text{ kg}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_0 = 8.58 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.47)

die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  enthalten. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  des Szenarios 4 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.0046\text{ rad}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.014\text{ rad}$ . Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  an der Stelle ( $\bar{m}_0 = 7.02\text{ kg}$ ,  $\sigma_0 = 1.6\text{ kg}$ ,  $t = 0.99\text{ sec}$ ), innerhalb an der Stelle ( $\bar{m}_0 = 8.58\text{ kg}$ ,  $\sigma_0 = 3.1\text{ kg}$ ,  $t = 0.58\text{ sec}$ ).

Die Abbildung 9.30 zeigt die *Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_0, \sigma_0 = 1.6\text{ kg}, t = 0.99\text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  außerhalb der Singularitätsintervalle.

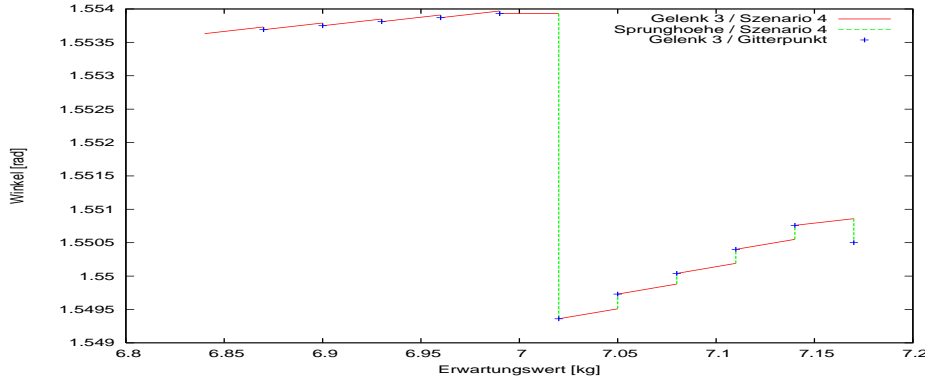


Abbildung 9.30: Szenario 4 - Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_0, \sigma_0 = 1.6\text{ kg}, t = 0.99\text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$

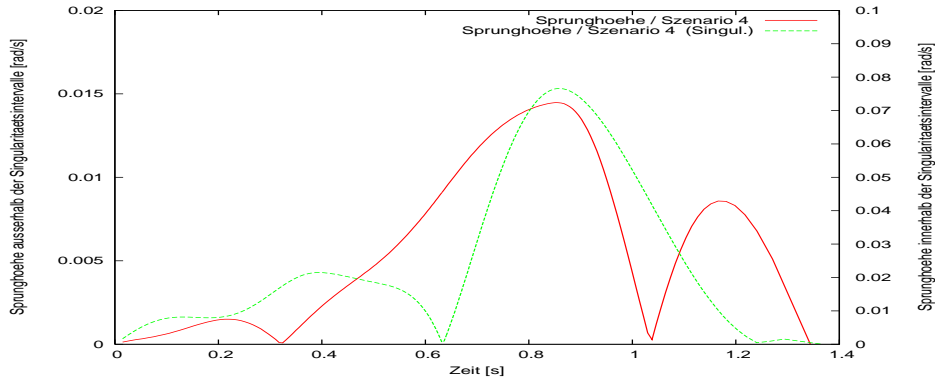


Abbildung 9.31: Szenario 4 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta\dot{\bar{\theta}}_3(\bar{m}_0 = 7.02\text{ kg}, \sigma_0 = 1.6\text{ kg}, t)$  außerhalb (links, rot) und  $\Delta\dot{\bar{\theta}}_3(\bar{m}_0 = 8.55\text{ kg}, \sigma_0 = 3.1\text{ kg}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (zum 3. Gelenk gehörig)

Die Abbildung 9.31 zeigt die Zeitabhängigkeit der beiden *Sprunghöhen*  $\Delta\dot{\bar{\theta}}_3(\bar{m}_0 = 7.02\text{ kg}, \sigma_0 = 1.6\text{ kg}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta\dot{\bar{\theta}}_3(\bar{m}_0 = 8.55\text{ kg}, \sigma_0 = 3.1\text{ kg}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.48) die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\dot{\bar{\theta}}^{abs}$  enthalten. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\dot{\bar{\theta}}^{abs}$  des Szenarios 4 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.014\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.077\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta\dot{\bar{\theta}}^{abs}$  an der Stelle ( $\bar{m}_0 = 7.02\text{ kg}$ ,  $\sigma_0 = 1.6\text{ kg}$ ,  $t = 0.86\text{ sec}$ ), innerhalb an der Stelle ( $\bar{m}_0 = 8.55\text{ kg}$ ,  $\sigma_0 = 3.1\text{ kg}$ ,  $t = 0.85\text{ sec}$ ).

### 9.3.2 Szenario 5: Sprunghöhen des Zustandes

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Mittelwert  $\bar{m}_1$  und mittlerer Fehler  $\sigma_1$ .

Daher berechnen sich die Größen

- absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelverlaufes  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  und
- absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverlaufes  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$

durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta\bar{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\bar{m}_1,\sigma_1} \Delta\bar{\theta}_i(\bar{m}_1, \sigma_1, t), \quad (9.49)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\bar{m}_1,\sigma_1} \Delta\dot{\theta}_i(\bar{m}_1, \sigma_1, t) \quad (9.50)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta\bar{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta,\iota} \Delta\bar{\theta}_i(\eta, \iota, t), \quad (9.51)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta,\iota} \Delta\dot{\theta}_i(\eta, \iota, t) \quad (9.52)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

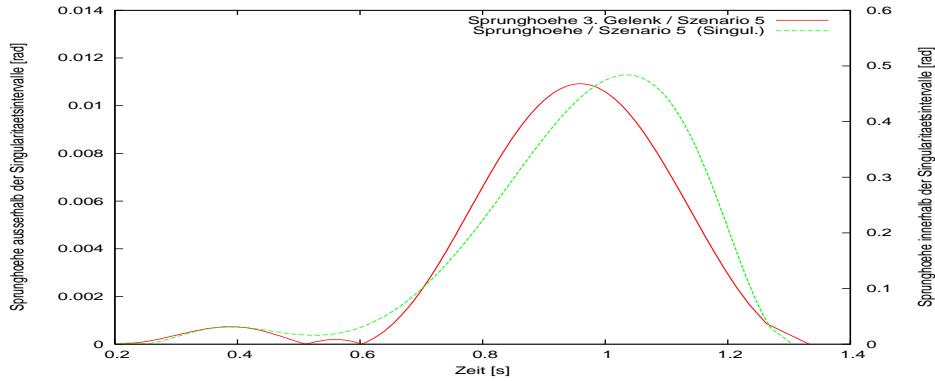


Abbildung 9.32: Szenario 5 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_1 = 7.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  außerhalb (links, rot) und  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (zum 3. Gelenk gehörig)

Die Abbildung 9.32 zeigt die Zeitabhängigkeit der beiden *Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_1 = 7.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.49) die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  enthalten. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  des Szenarios 5 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.011 \text{ rad}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.48 \text{ rad}$ . Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  an der Stelle ( $\bar{m}_1 = 7.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t = 0.96 \text{ sec}$ ), innerhalb an der Stelle ( $\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t = 1.04 \text{ sec}$ ).

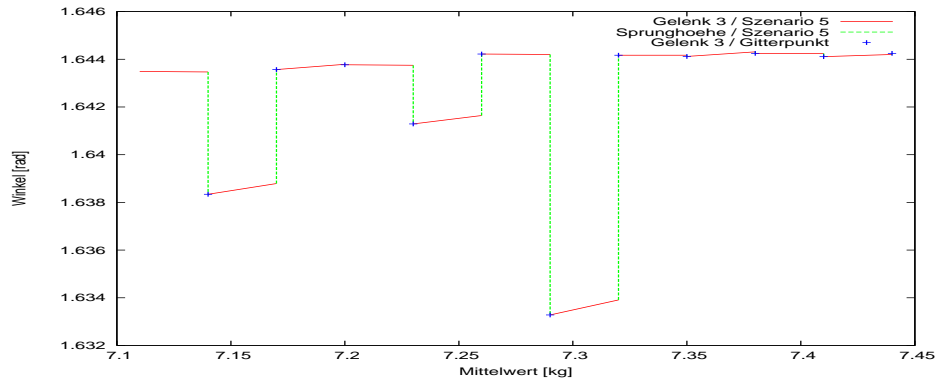


Abbildung 9.33: Szenario 5 - Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_1, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t = 0.96 \text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  außerhalb der Singularitätsintervalle

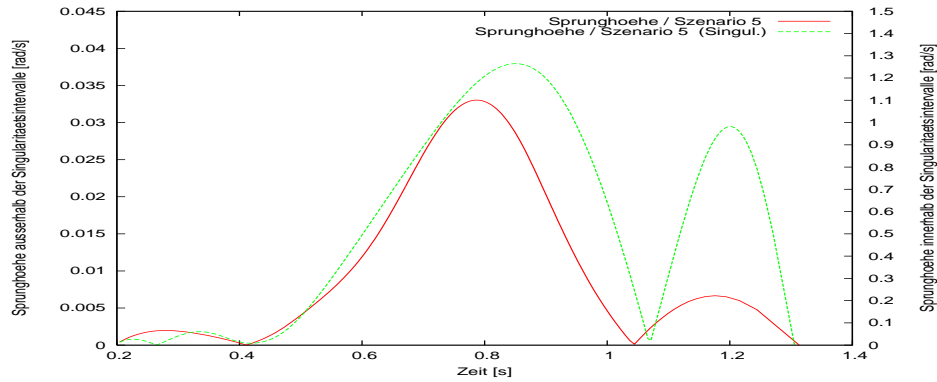


Abbildung 9.34: Szenario 5 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta\dot{\theta}_3(\bar{m}_1 = 4.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.06 \text{ kg}, t)$  außerhalb (links, rot) und  $\Delta\dot{\theta}_3(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (zum 3. Gelenk gehörig)

Die Abbildung 9.33 zeigt die *Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}_3(\bar{m}_1, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t = 0.96 \text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  außerhalb der Singularitätsintervalle.

Die Abbildung 9.34 zeigt die Zeitabhängigkeit der beiden *Sprunghöhen*  $\Delta\dot{\theta}_3(\bar{m}_1 = 4.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.06 \text{ kg}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta\dot{\theta}_3(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.50) die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  enthalten. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  des Szenarios 5 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.033 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $1.26 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$  an der Stelle  $(\bar{m}_1 = 4.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.06 \text{ kg}, t = 0.79 \text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t = 0.85 \text{ sec})$ .



### 9.3.3 Szenario 6: Sprunghöhen des Zustandes

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Endgelenkwinkelstellung  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$ .

Daher berechnen sich die Größen

- absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelverlaufes  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  und
- absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverlaufes  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$

durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta\bar{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\theta_f} \Delta\bar{\theta}_i(\theta_f, t), \quad (9.53)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\theta_f} \Delta\dot{\theta}_i(\theta_f, t) \quad (9.54)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta\bar{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta,\iota} \Delta\bar{\theta}_i(\eta, \iota, t), \quad (9.55)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta,\iota} \Delta\dot{\theta}_i(\eta, \iota, t) \quad (9.56)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

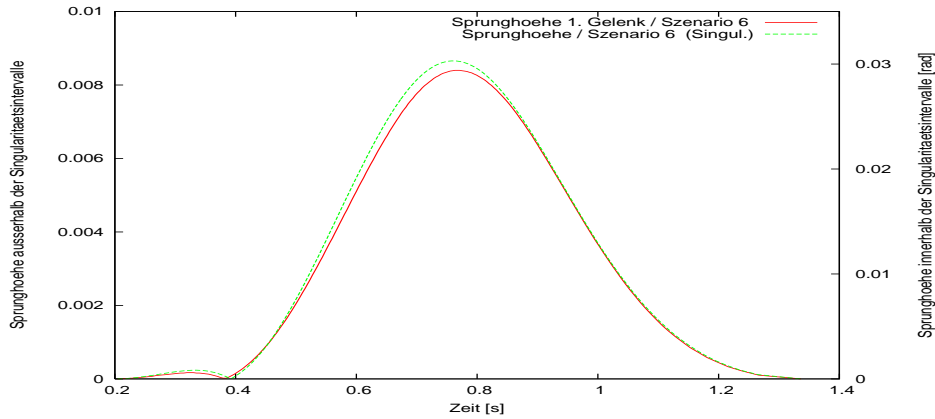


Abbildung 9.35: Szenario 6 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_1(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785 \text{ rad}, t)$  ausserhalb (links, rot) und  $\Delta\bar{\theta}_1(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79 \text{ rad}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (zum 1. Gelenk gehörig)

Die Zeitabhängigkeit der zwei Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_1(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785 \text{ rad}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta\bar{\theta}_1(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79 \text{ rad}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.53) die absoluten Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  enthalten, zeigt die Abbildung 9.35. Die Werte

der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  des Szenarios 6 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.008\text{ rad}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.03\text{ rad}$ . Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054\text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785\text{ rad}, t = 0.77\text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048\text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79\text{ rad}, t = 0.77\text{ sec})$ .

Die Abbildung 9.36 zeigt die *Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}_1(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054\text{ rad}, \theta_{3f}, t = 0.77\text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  außerhalb der Singularitätsintervalle.

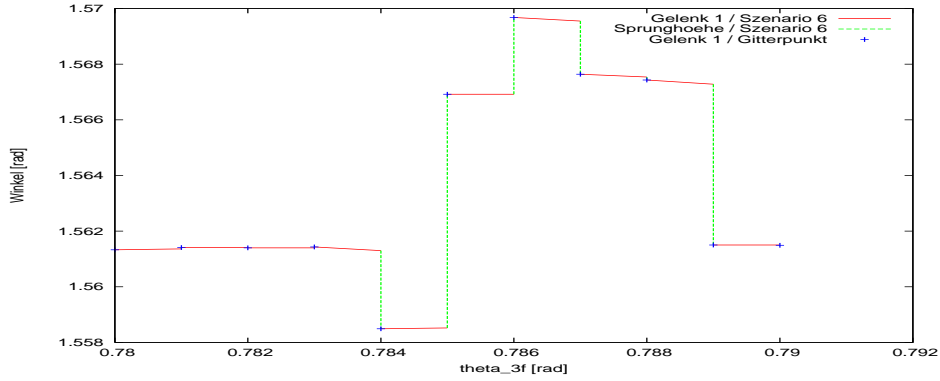


Abbildung 9.36: Szenario 6 - Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_1(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054\text{ rad}, \theta_{3f}, t = 0.77\text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  außerhalb der Singularitätsintervalle

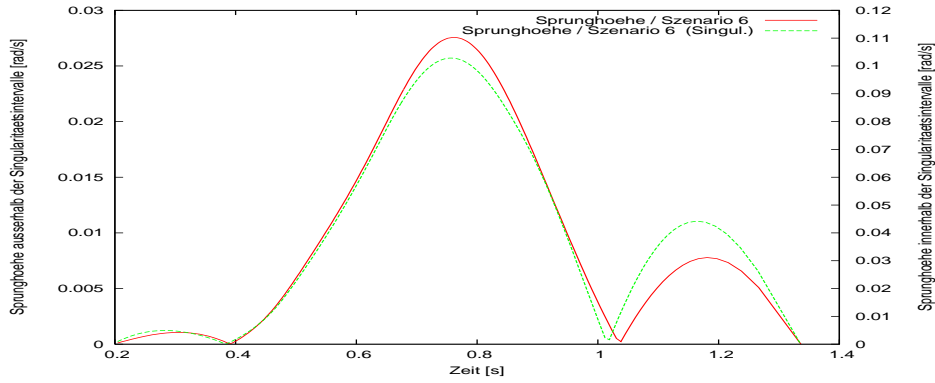


Abbildung 9.37: Szenario 6 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta\dot{\theta}_3(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054\text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785\text{ rad}, t)$  außerhalb (links, rot) und  $\Delta\dot{\theta}_3(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048\text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79\text{ rad}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle (zum 3. Gelenk gehörig)

Die Zeitabhängigkeit der zwei *Sprunghöhen*  $\Delta\dot{\theta}_3(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054\text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785\text{ rad}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta\dot{\theta}_3(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048\text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79\text{ rad}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.55) die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  enthalten, zeigt die Abbildung 9.37. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  des Szenarios 6 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.028\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054\text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785\text{ rad}, t = 0.76\text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.354\text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048\text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79\text{ rad}, t = 0.76\text{ sec})$ .

### 9.3.4 Szenario 7: Sprunghöhen des Zustandes

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Endgelenkwinkelstellung  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$ .

Daher berechnen sich die Größen

- absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelverlaufes  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  und
- absolute Sprunghöhe des Gelenkwinkelgeschwindigkeitsverlaufes  $\Delta\dot{\theta}^{abs}$ ,

durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta\bar{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\theta_f} \Delta\bar{\theta}_i(\theta_f, t), \quad (9.57)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\theta_f} \Delta\dot{\theta}_i(\theta_f, t) \quad (9.58)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta\bar{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta,\iota,\zeta} \Delta\bar{\theta}_i(\eta, \iota, \zeta, t), \quad (9.59)$$

$$\Delta\dot{\theta}^{abs} = \max_{i,t,\eta,\iota,\zeta} \Delta\dot{\theta}_i(\eta, \iota, \zeta, t) \quad (9.60)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

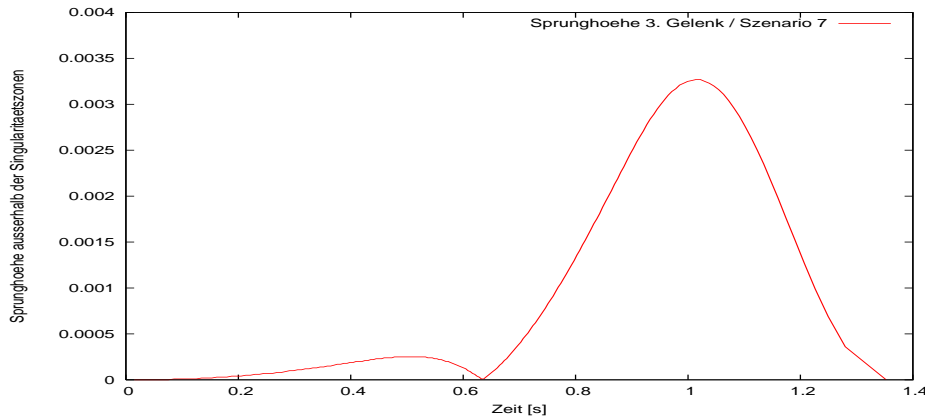


Abbildung 9.38: Szenario 7 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta\bar{\theta}_3(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t)$  (zum 3. Gelenk gehörig)

Die Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta\bar{\theta}_i(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t)$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.57) die absolute Sprunghöhe  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$  enthält, d.h. die größte Abweichung zwischen approximierten und mit OSTP berechneten Trajektorien bezüglich der Handposition im Arbeitsraum aufweist, zeigt die Abbildung 9.38. Der Wert der absoluten Sprunghöhe  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$

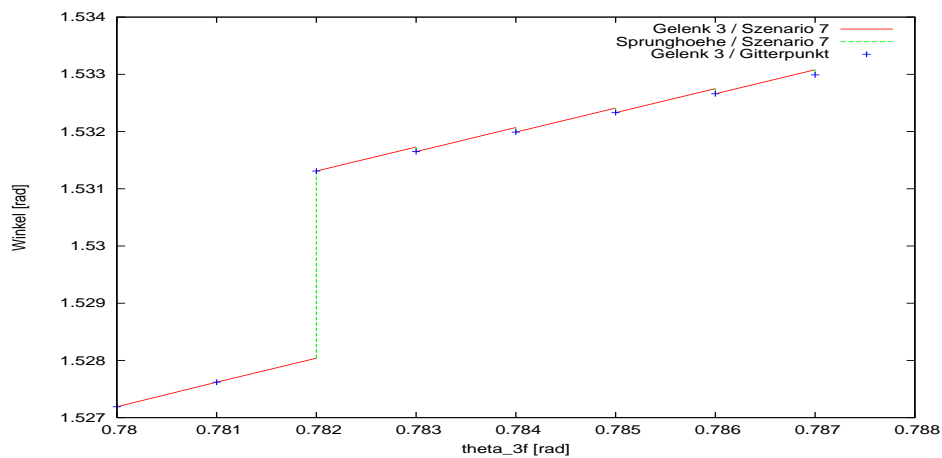


Abbildung 9.39: Szenario 7 - Sprunghöhen  $\Delta\bar{\theta}_3(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f}, t = 1.02 \text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$

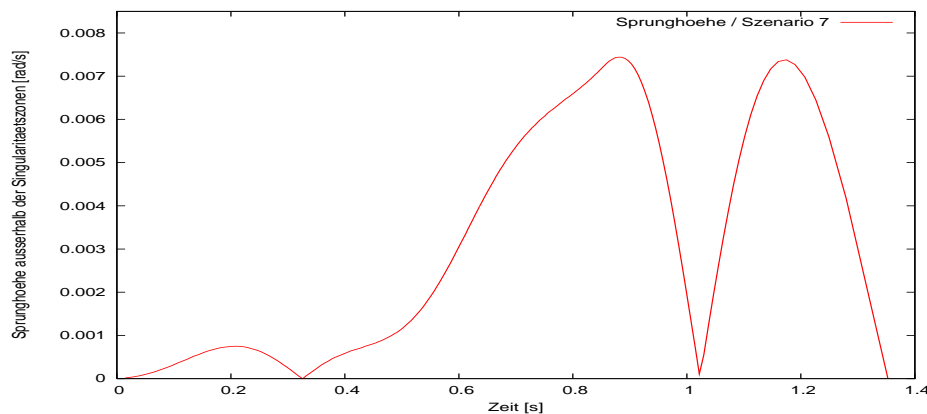


Abbildung 9.40: Szenario 7 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta\dot{\bar{\theta}}_3(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t)$  (zum 3. Gelenk gehörig)

des Szenarios 7 beträgt  $0.0033 \text{ rad}$  und liegt an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t = 1.02 \text{ sec})$ .

Die Abbildung 9.39 zeigt die *Sprunghöhen*  $\Delta\bar{\theta}_3(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f}, t = 1.02 \text{ sec})$  in der Umgebung von  $\Delta\bar{\theta}^{abs}$ .

Die Zeitabhängigkeit der *Sprunghöhe*  $\Delta\dot{\bar{\theta}}_i(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t)$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.58) die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta\dot{\bar{\theta}}^{abs}$  enthält, d.h. die größte Abweichung zwischen approximierten und mit OSTP berechneten Trajektorien bezüglich der Handgeschwindigkeit im Arbeitsraum aufweist, zeigt die Abbildung 9.40. Der Wert der *absoluten Sprunghöhe*  $\Delta\dot{\bar{\theta}}^{abs}$  des Szenarios 7 beträgt  $0.0074 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und liegt an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t = 0.89 \text{ sec})$ .

## 9.4 Absolute Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$

Pro Szenario zeigen die folgenden Tabellen jeweils

- die absolute Sprunghöhe  $\Delta A^{abs}$  der Norm des Positionsvektors  $\mathbf{x}^T = (x, y, z)^T$  des WZP in [m] sowie
- die absolute Sprunghöhe  $\Delta \dot{A}^{abs}$  der Norm des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\mathbf{x}}^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$  des WZP in [m/s]

sowohl außer- als auch innerhalb der Singularitätsintervalle.

Szenarien:	außerhalb	innerhalb
<b>Szenario 2:</b>	0.0042 [m] (0.46%)	0.0 [m] (0.0%)
<b>Szenario 4:</b>	0.0049 [m] (0.53%)	0.018 [m] (4.64%)
<b>Szenario 5:</b>	0.012 [m] (1.3%)	0.47 [m] (63.83%)
<b>Szenario 6:</b>	0.008 [m] (1.04%)	0.031 [m] (3.8%)
<b>Szenario 7:</b>	0.0033 [m] (0.34%)	keine

Tabelle 9.4: Absolute Sprunghöhen  $\Delta A^{abs}$  außer- und innerhalb der Singularitätszonen; die Prozentwerte in den Klammer geben die relativen Sprunghöhen nach einer Umrechnung mit (9.18) an.

Die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta A^{abs}$  in den Singularitätszonen des Szenarios 4 sind 3.67-mal, die des Szenarios 5 39.17-mal und die des Szenarios 6 3.875-mal größer als die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta A^{abs}$  außerhalb der Singularitätszonen. Die Trajektorien der Ausweichstrategien stellen das Erreichen des Endpunktes sicher. Eine Berücksichtigung der am Zeitpunkt  $t_0$  bzw.  $t_1$  vorliegenden Informationen bei der Trajektorienplanung unterbleibt innerhalb der Singularitätszonen.

Szenarien:	außerhalb	innerhalb
<b>Szenario 2:</b>	0.015 [m/s] (0.51%)	0.0 [m/s] (0.0%)
<b>Szenario 4:</b>	0.018 [m/s] (0.60%)	0.12 [m/s] (3.74%)
<b>Szenario 5:</b>	0.038 [m/s] (1.32%)	1.53 [m/s] (72.75%)
<b>Szenario 6:</b>	0.034 [m/s] (1.29%)	0.13 [m/s] (4.87%)
<b>Szenario 7:</b>	0.013 [m/s] (0.45%)	keine

Tabelle 9.5: Absolute Sprunghöhen  $\Delta \dot{A}^{abs}$  außer- und innerhalb der Singularitätszonen; die Prozentwerte in den Klammer geben die relativen Sprunghöhen nach einer Umrechnung mit (9.19) an.

Die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta \dot{A}^{abs}$  in den Singularitätszonen des Szenarios 4 sind 6.67-mal, die des Szenarios 5 40.26-mal und die des Szenarios 6 3.82-mal größer als die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta \dot{A}^{abs}$  außerhalb der Singularitätszonen. Die Trajektorien der Ausweichstrategien stellen das Erreichen des Endpunktes sicher. Eine Berücksichtigung der am Zeitpunkt  $t_0$  bzw.  $t_1$  vorliegenden Informationen bei der Trajektorienplanung unterbleibt innerhalb der Singularitätszonen.

*Hinweis:*

*Im folgenden werden die Begriffe Norm des Geschwindigkeitsvektors des WZP, Handgeschwindigkeit und Geschwindigkeit im Arbeitsraum äquivalent verwendet.*

### 9.4.1 Szenario 4: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und Standardabweichung  $\sigma_0$ .

Daher berechnen sich die Größen

- die absolute Sprunghöhe  $\Delta A^{abs}$  der Norm des Positionsvektors ,
- die absolute Sprunghöhe  $\Delta \dot{A}^{abs}$  der Norm des Handgeschwindigkeitsvektors ,

durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta A^{abs} = \max_{\bar{m}_0, \sigma_0, t} \Delta A(\bar{m}_0, \sigma_0, t), \quad (9.61)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{\bar{m}_0, \sigma_0, t} \Delta \dot{A}(\bar{m}_0, \sigma_0, t) \quad (9.62)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta A^{abs} = \max_{\eta, \iota, t} \Delta A(\bar{m}_0^\eta, \sigma_0^\iota, t), \quad (9.63)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{\eta, \iota, t} \Delta \dot{A}(\bar{m}_0^\eta, \sigma_0^\iota, t) \quad (9.64)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

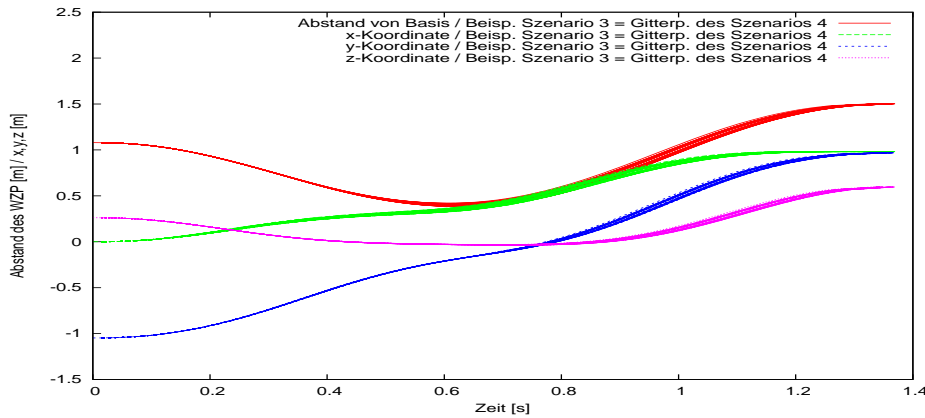


Abbildung 9.41: Szenario 4 - Norm des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes sowie seiner Komponenten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  von mit SQP berechneten Trajektorien (Gitterpunkte der Datenbasis)

Die Abbildung 9.41 zeigt die Norm  $\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$  des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes und den Verlauf der  $x(t)$ -,  $y(t)$ - und  $z(t)$ -Koordinate über der Zeit. Die maximale Entfernung des Werkzeugzentrierpunktes von der Roboterbasis liegt im Szenario 4 bei 1,5 m.

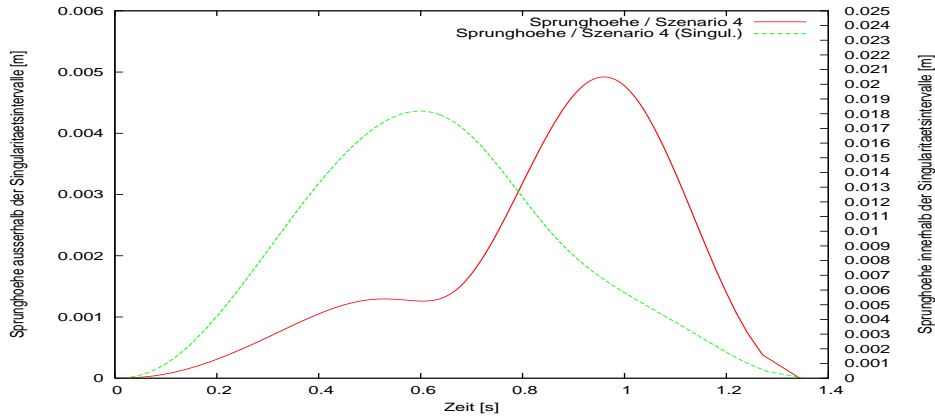


Abbildung 9.42: Szenario 4 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta A(\bar{m}_0 = 7.02 \text{ kg}, \sigma_0 = 1.6 \text{ kg}, t)$  außerhalb (links, rot) und  $\Delta A(\bar{m}_0 = 8.58 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle

Die Abbildung 9.42 zeigt die Zeitabhängigkeit der beiden *Sprunghöhen*  $\Delta A(\bar{m}_0 = 7.02 \text{ kg}, \sigma_0 = 1.6 \text{ kg}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta A(\bar{m}_0 = 8.58 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.61) die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta A^{abs}$  enthalten. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta A^{abs}$  des Szenarios 4 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.0049 \text{ m}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.018 \text{ m}$ . Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta A^{abs}$  an der Stelle  $(\bar{m}_0 = 7.02 \text{ kg}, \sigma_0 = 1.6 \text{ kg}, t = 0.96 \text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\bar{m}_0 = 8.58 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg}, t = 0.6 \text{ sec})$ .

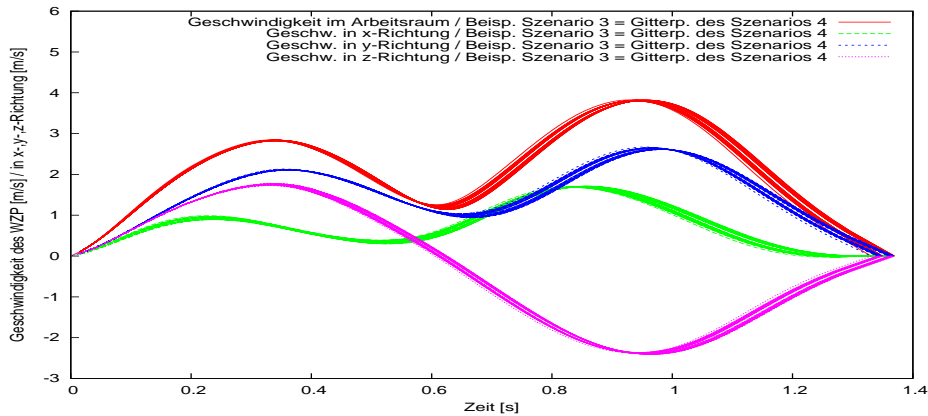


Abbildung 9.43: Szenario 4 - Norm des Geschwindigkeitsvektors und Geschwindigkeiten in x-, y- und z-Richtung von mit SQP berechneten Trajektorien (Gitterpunkte der Datenbasis)

Die Abbildung 9.43 zeigt die Geschwindigkeiten  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  und  $\dot{z}(t)$  entlang der Koordinatenachsen sowie die Norm  $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$  des Geschwindigkeitsvektors des Werkzeugzentrierpunktes. Wie aus Abbildung 9.43 ersichtlich ist die Handgeschwindigkeit bedingungsgemäß am Anfangs- und Endpunkt  $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Die Abbildung 9.44 zeigt die Zeitabhängigkeit der beiden *Sprunghöhen*  $\Delta \dot{A}(\bar{m}_0 = 7.02 \text{ kg}, \sigma_0 = 1.6 \text{ kg}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta \dot{A}(\bar{m}_0 = 8.55 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.64)

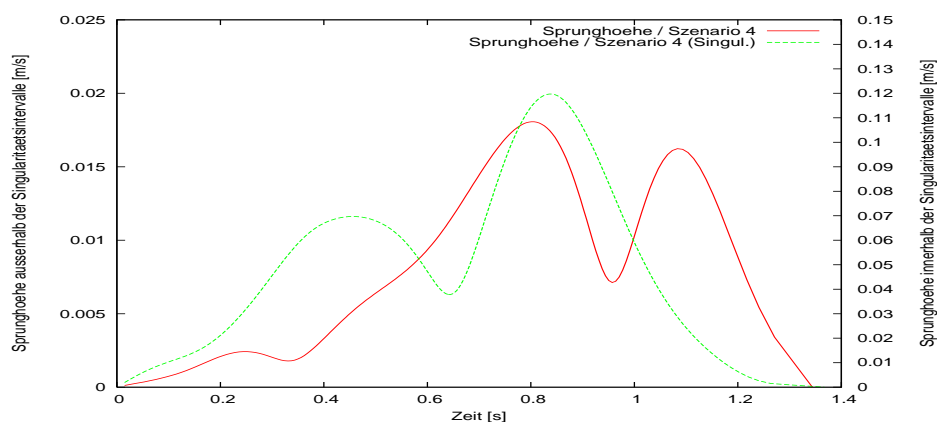


Abbildung 9.44: Szenario 4 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta \dot{A}(\bar{m}_0 = 7.02 \text{ kg}, \sigma_0 = 1.6 \text{ kg}, t)$  ausserhalb (links, rot) und  $\Delta \dot{A}(\bar{m}_0 = 8.55 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle

die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta \dot{A}^{abs}$  enthalten. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta \dot{A}^{abs}$  des Szenarios 4 betragen ausserhalb der Singularitätsintervalle  $0.018 \frac{m}{s}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.012 \frac{m}{s}$ . Ausserhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta \dot{A}^{abs}$  an der Stelle  $(\bar{m}_0 = 7.02 \text{ kg}, \sigma_0 = 1.6 \text{ kg}, t = 0.8 \text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\bar{m}_0 = 8.55 \text{ kg}, \sigma_0 = 3.1 \text{ kg}, t = 0.84 \text{ sec})$ .



### 9.4.2 Szenario 5: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Mittelwert  $\bar{m}_1$  und mittlerer Fehler  $\sigma_1$ .

Daher berechnen sich die Größen

- die absolute Sprunghöhe  $\Delta A^{abs}$  der Norm des Positionsvektors ,
- die absolute Sprunghöhe  $\Delta \dot{A}^{abs}$  der Norm des Handgeschwindigkeitsvektors ,

durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta A^{abs} = \max_{\bar{m}_1, \sigma_1, t} \Delta A(\bar{m}_1, \sigma_1, t), \quad (9.65)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{\bar{m}_1, \sigma_1, t} \Delta \dot{A}(\bar{m}_1, \sigma_1, t) \quad (9.66)$$

mit  $t_1 \leq t \leq t_f$ .

In Indexschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta A^{abs} = \max_{i, t, \eta, \iota} \Delta A_i(\eta, \iota, t), \quad (9.67)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{i, t, \eta, \iota} \Delta \dot{A}_i(\eta, \iota, t) \quad (9.68)$$

mit  $t_1 \leq t \leq t_f$ .

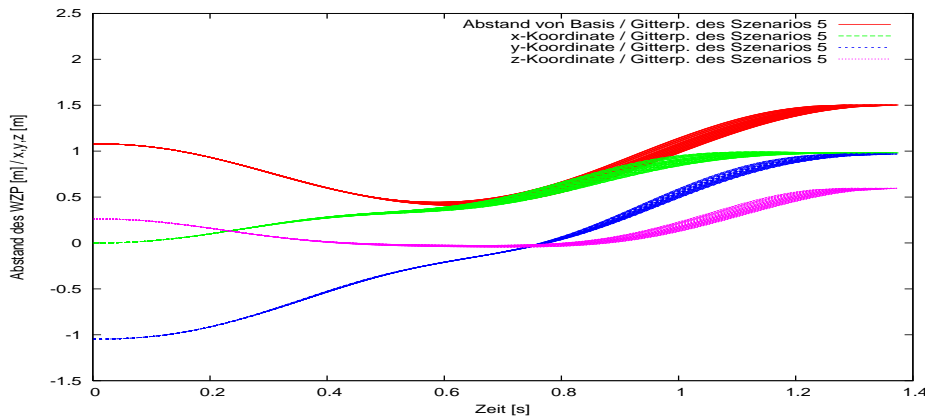


Abbildung 9.45: Szenario 5 - Norm des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes sowie seine Komponenten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  von mit SQP berechneten Trajektorien (Gitterpunkte der Datenbasis)

Die Abbildung 9.45 zeigt die Norm  $\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$  des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes und den Verlauf der  $x(t)$ -,  $y(t)$ - und  $z(t)$ -Koordinate über der Zeit. Die maximale Entfernung des Werkzeugzentrierpunktes von der Roboterbasis liegt im Szenario 5 bei 1.5 m.

Die Abbildung 9.46 zeigt die Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta A(\bar{m}_1 = 7.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta A(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.65)

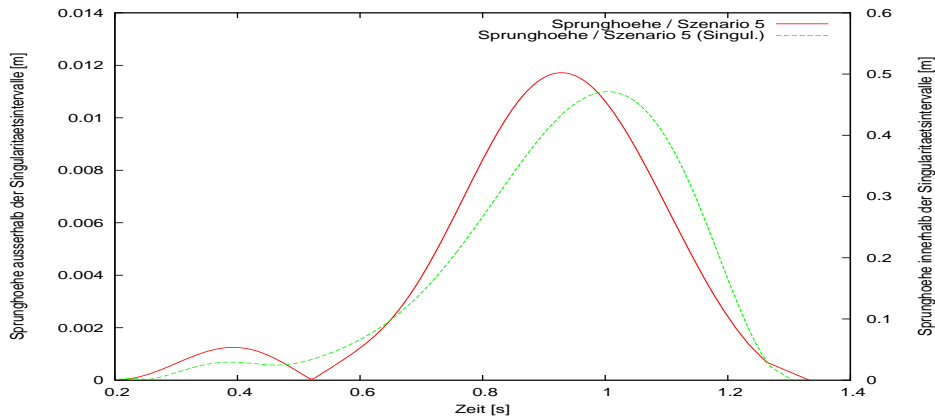


Abbildung 9.46: Szenario 5 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta A(\bar{m}_1 = 7.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  außerhalb (links, rot) und  $\Delta A(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle

die absoluten Sprunghöhen  $\Delta A^{abs}$  enthalten. Die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta A^{abs}$  des Szenarios 5 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.012 \text{ m}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.47 \text{ m}$ . Außerhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta A^{abs}$  an der Stelle  $(\bar{m}_1 = 7.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t = 0.93 \text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t = 1.0 \text{ sec})$ .

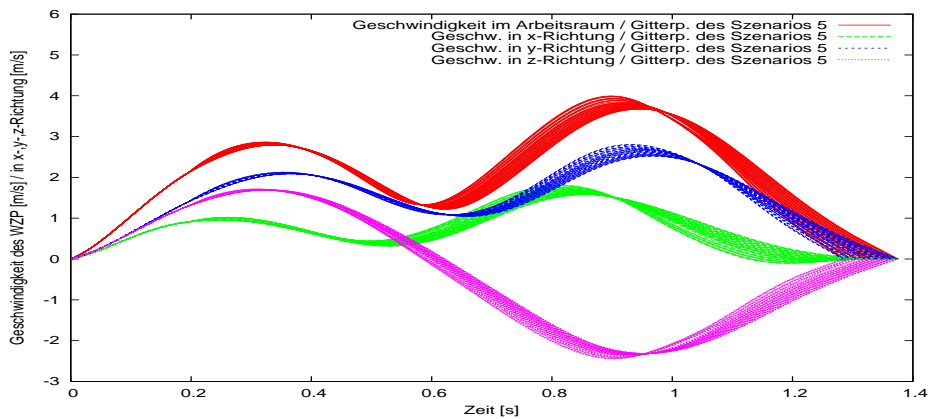


Abbildung 9.47: Szenario 5 - Norm des Handgeschwindigkeitsvektors und Geschwindigkeiten in x-, y- und z-Richtung von mit SQP berechneten Trajektorien (Gitterpunkte der Datenbasis)

Die Abbildung 9.47 zeigt die Geschwindigkeiten  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  und  $\dot{z}(t)$  entlang der Koordinatenachsen sowie die Norm  $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$  des Geschwindigkeitsvektors des Werkzeugzentrierpunktes. Wie aus Abbildung 9.47 ersichtlich ist die Handgeschwindigkeit bedingungsgemäß am Anfangs- und Endpunkt  $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Die Abbildung 9.48 zeigt die Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta \dot{A}(\bar{m}_1 = 4.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.06 \text{ kg}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta \dot{A}(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.66) die absoluten Sprunghöhen  $\Delta \dot{A}^{abs}$  enthalten. Die Werte der absoluten Sprunghöhen  $\Delta \dot{A}^{abs}$  des Szenarios 5 betragen außerhalb der Singularitätsintervalle  $0.038 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , innerhalb der Singularitätsinter-

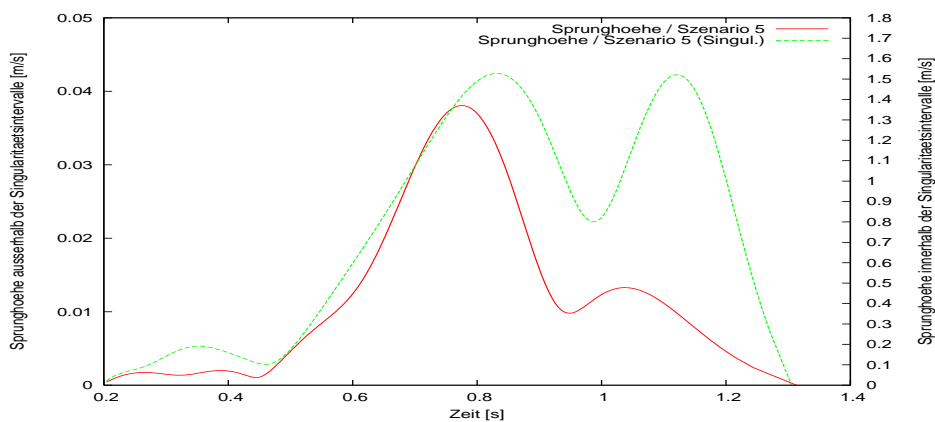


Abbildung 9.48: Szenario 5 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta\dot{A}(\bar{m}_1 = 4.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.06 \text{ kg}, t)$  ausserhalb (links, rot) und  $\Delta\dot{A}(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle

valle  $1.53 \frac{m}{s}$ . Ausserhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta\dot{A}^{abs}$  an der Stelle  $(\bar{m}_1 = 4.29 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.06 \text{ kg}, t = 0.77 \text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\bar{m}_1 = 3.54 \text{ kg}, \sigma_1 = 0.03 \text{ kg}, t = 0.83 \text{ sec})$ .

### 9.4.3 Szenario 6: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Endgelenkwinkelstellung  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$ .

Daher berechnen sich die Größen

- die absolute Sprunghöhe  $\Delta A^{abs}$  der Norm des Positionsvektors,
- die absolute Sprunghöhe  $\Delta \dot{A}^{abs}$  der Norm des Handgeschwindigkeitsvektors,

durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta A^{abs} = \max_{\theta_f, t} \Delta A(\theta_f, t), \quad (9.69)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{\theta_f, t} \Delta \dot{A}(\theta_f, t) \quad (9.70)$$

mit  $t_1 \leq t \leq t_f$ .

In Indeschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta A^{abs} = \max_{\eta, \iota, \zeta, t} \Delta A(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\iota, \theta_{3f}^\zeta, t), \quad (9.71)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{\eta, \iota, \zeta, t} \Delta \dot{A}(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\iota, \theta_{3f}^\zeta, t) \quad (9.72)$$

mit  $t_1 \leq t \leq t_f$ .

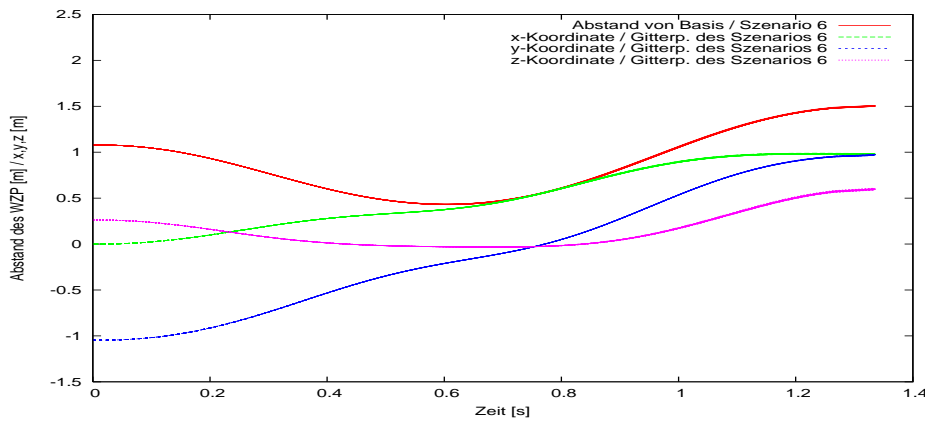


Abbildung 9.49: Szenario 6 - Norm des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes zur Roboterbasis sowie seiner Komponenten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  von mit SQP berechneten Trajektorien (Gitterpunkte der Datenbasis)

Die Abbildung 9.49 zeigt die Norm  $\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$  des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes und den Verlauf der  $x(t)$ -,  $y(t)$ - und  $z(t)$ -Koordinate über der Zeit. Die maximale Entfernung des Werkzeugzentrierpunktes von der Roboterbasis liegt im Szenario 6 bei 1.5 m. Die Trajektorien haben am Endpunkt leicht unterschiedliche Abstände zur Roboterbasis.

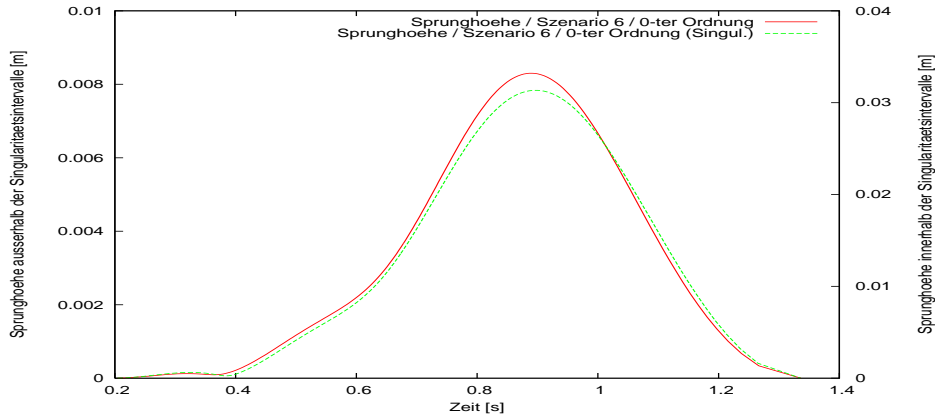


Abbildung 9.50: Szenario 6 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta A(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785 \text{ rad}, t)$  ausserhalb (links, rot) und  $\Delta A(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79 \text{ rad}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle

Die Zeitabhängigkeit der zwei *Sprunghöhen*  $\Delta A(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785 \text{ rad}, t)$  (außerhalb) und  $\Delta A(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79 \text{ rad}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.69) die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta A^{abs}$  enthalten, zeigt die Abbildung 9.50. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta A^{abs}$  des Szenarios 6 betragen ausserhalb der Singularitätsintervalle  $0.008 \text{ m}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.031 \text{ m}$ . Ausserhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\mathcal{T}^{abs}$  an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785 \text{ rad}, t = 0.896 \text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79 \text{ rad}, t = 0.9 \text{ sec})$ .

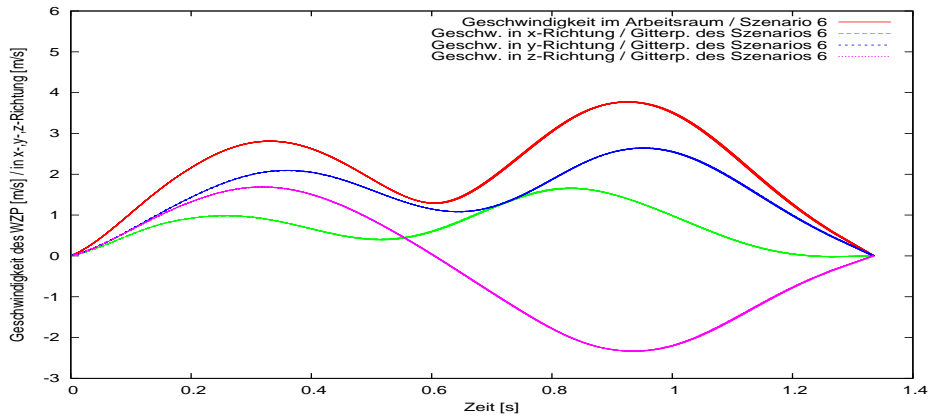


Abbildung 9.51: Szenario 6 - Norm des Geschwindigkeitsvektors und Geschwindigkeiten in x-, y- und z-Richtung von mit SQP berechneten Trajektorien (Gitterpunkte der Datenbasis)

Die Abbildung 9.51 zeigt die Geschwindigkeiten  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  und  $\dot{z}(t)$  entlang der Koordinatenachsen sowie die Norm  $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$  des Geschwindigkeitsvektors des Werkzeugzentrierpunktes. Wie aus Abbildung 9.51 ersichtlich ist die Handgeschwindigkeit bedingungsgemäß am Anfangs- und Endpunkt  $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Die Zeitabhängigkeit der zwei *Sprunghöhen*  $\Delta A(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785 \text{ rad}, t)$

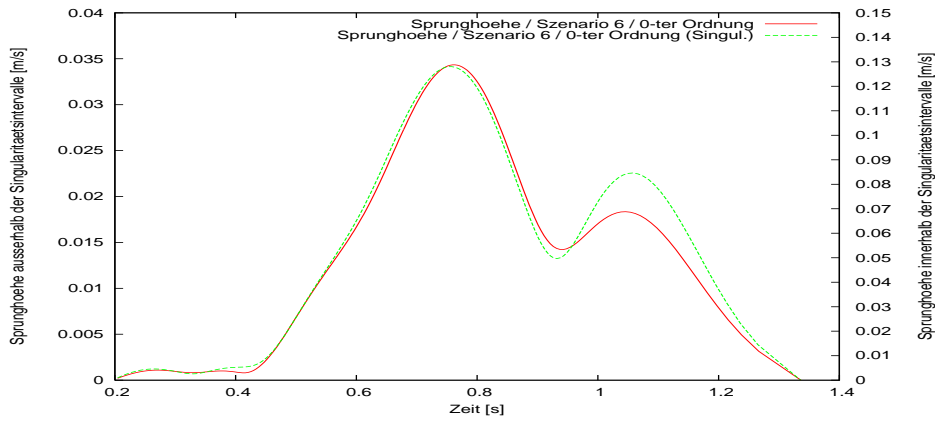


Abbildung 9.52: Szenario 6 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der beiden Sprunghöhen  $\Delta \dot{A}(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785 \text{ rad}, t)$  ausserhalb (links, rot) und  $\Delta \dot{A}(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79 \text{ rad}, t)$  innerhalb (rechts, grün) der Singularitätsintervalle

(außerhalb) und  $\Delta \dot{A}(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79 \text{ rad}, t)$  (innerhalb), die gemäß Formel (9.70) die *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta \dot{A}^{abs}$  enthalten, zeigt die Abbildung 9.52. Die Werte der *absoluten Sprunghöhen*  $\Delta \dot{A}^{abs}$  des Szenarios 6 betragen ausserhalb der Singularitätsintervalle  $0.034 \frac{m}{s}$ , innerhalb der Singularitätsintervalle  $0.13 \frac{m}{s}$ . Ausserhalb der Singularitätsintervalle liegt  $\Delta \dot{A}^{abs}$  an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.054 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.785 \text{ rad}, t = 0.76 \text{ sec})$ , innerhalb an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.354 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.79 \text{ rad}, t = 0.75 \text{ sec})$ .

#### 9.4.4 Szenario 7: Sprunghöhen $\Delta A^{abs}$ und $\Delta \dot{A}^{abs}$

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Endgelenkwinkelstellung  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$ .

Daher berechnen sich die Größen

- die absolute Sprunghöhe  $\Delta A^{abs}$  der Norm des Positionsvektors ,
- die absolute Sprunghöhe  $\Delta \dot{A}^{abs}$  der Norm des Handgeschwindigkeitsvektors,

durch folgende Maximalwertbetrachtung:

$$\Delta A^{abs} = \max_{\theta_f, t} \Delta A(\theta_f, t), \quad (9.73)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{\theta_f, t} \Delta \dot{A}(\theta_f, t) \quad (9.74)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

In Indeschreibweise formuliert lautet diese:

$$\Delta A^{abs} = \max_{\eta, \iota, \zeta, t} \Delta A(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\iota, \theta_{3f}^\zeta, t), \quad (9.75)$$

$$\Delta \dot{A}^{abs} = \max_{\eta, \iota, \zeta, t} \Delta \dot{A}(\theta_{1f}^\eta, \theta_{2f}^\iota, \theta_{3f}^\zeta, t) \quad (9.76)$$

mit  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

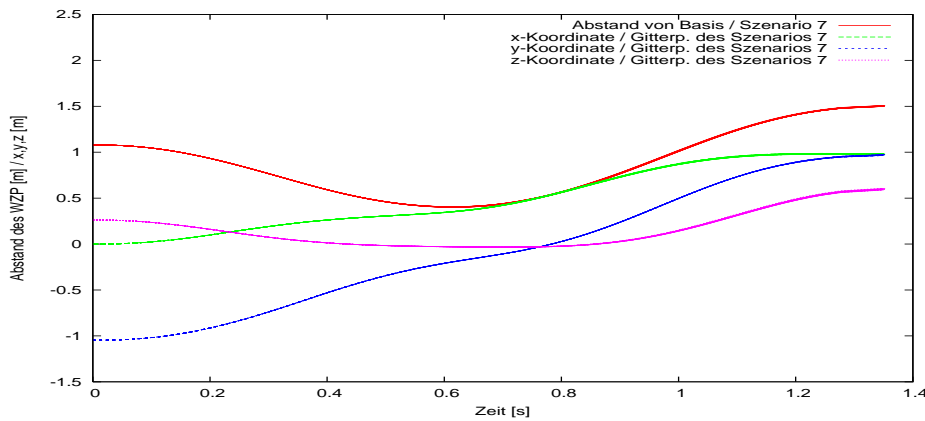


Abbildung 9.53: Szenario 7 - Norm des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes sowie seiner Komponenten  $x(t)$ -,  $y(t)$ - und  $z(t)$ -Koordinate über der Zeit von mit SQP berechneten Trajektorien (Gitterpunkte der Datenbasis)

Die Abbildung 9.53 zeigt die Norm  $\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$  des Positionsvektors des Werkzeugzentrierpunktes und den Verlauf der  $x(t)$ -,  $y(t)$ - und  $z(t)$ -Koordinate über der Zeit. Die maximale Entfernung des Werkzeugzentrierpunktes von der Roboterbasis liegt im Szenario 7 bei 1,5 m. Die Trajektorien haben am Endpunkt leicht unterschiedliche Abstände zur Roboterbasis.

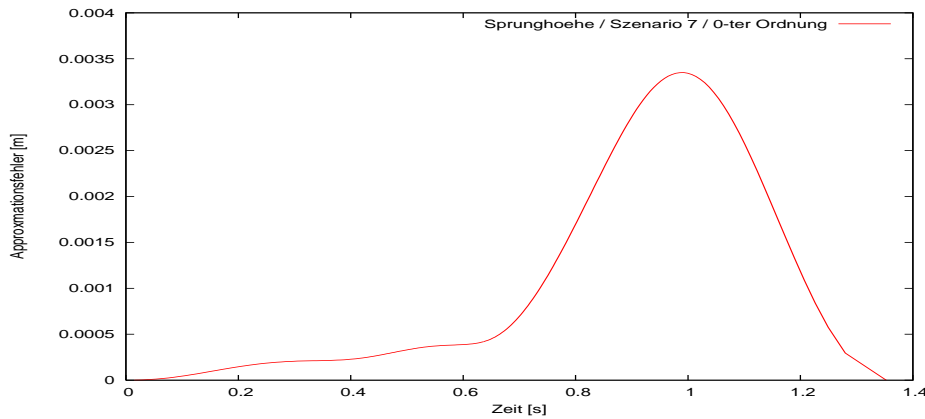


Abbildung 9.54: Szenario 7 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta A(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t)$

Die Zeitabhängigkeit der *Sprunghöhe*  $\Delta A(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t)$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.73) die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta A^{abs}$  enthält, d.h. die größte Abweichung zwischen approximierten und mit OSTP berechneten Trajektorien bezüglich der Norm des Positionsvektors aufweist, zeigt die Abbildung 9.54. Der Wert der *absoluten Sprunghöhe*  $\Delta A^{abs}$  des Szenarios 7 beträgt  $0.0033 \text{ m}$  und liegt an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t = 0.99 \text{ sec})$ .

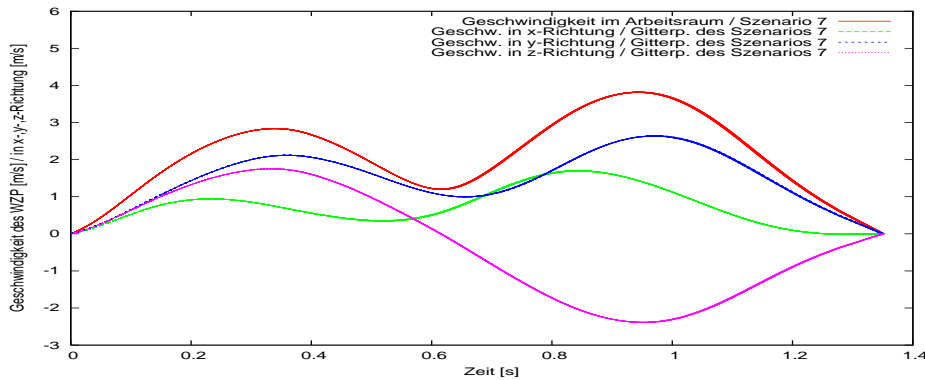


Abbildung 9.55: Szenario 7 - Norm des Geschwindigkeitsvektors und Geschwindigkeiten in x-, y- und z-Richtung von mit SQP berechneten Trajektorien (Gitterpunkte der Datenbasis)

Die Abbildung 9.55 zeigt die Geschwindigkeiten  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  und  $\dot{z}(t)$  entlang der Koordinatenachsen sowie die Norm  $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$  des Geschwindigkeitsvektors des Werkzeugzentrierpunktes. Wie aus Abbildung 9.55 ersichtlich ist die Handgeschwindigkeit bedingungsgemäß am Anfangs- und Endpunkt  $0 \frac{m}{s}$ .

Die Zeitabhängigkeit der *Sprunghöhe*  $\Delta \dot{A}(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t)$  der Trajektorie, die gemäß Formel (9.74) die *absolute Sprunghöhe*  $\Delta \dot{A}^{abs}$  enthält, d.h. die größte Abweichung zwischen approximierten und mit OSTP berechneten Trajektorien bezüglich der Norm des Handgeschwindigkeitsvektors aufweist, zeigt die Abbildung 9.56. Der Wert der *absoluten Sprunghöhe*  $\Delta \dot{A}^{abs}$  des Szenarios 7 beträgt  $0.013 \frac{m}{s}$  und liegt an der Stelle  $(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} =$



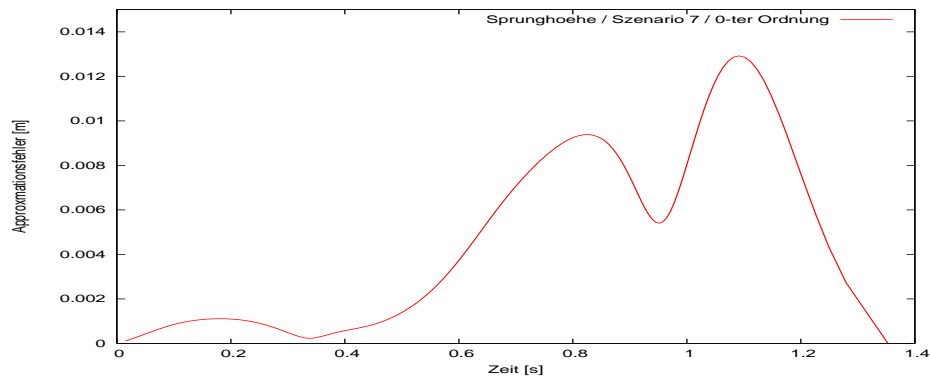


Abbildung 9.56: Szenario 7 - Darstellung der Zeitabhängigkeit der Sprunghöhe  $\Delta\dot{A}(\theta_{1f} = 2.355 \text{ rad}, \theta_{2f} = 1.048 \text{ rad}, \theta_{3f} = 0.782 \text{ rad}, t)$

$0.782 \text{ rad}, t = 1.09 \text{ sec}$ ).

# Kapitel 10

## Beispiele

Für jedes Szenario werden mehrere Beispiele gerechnet. In den Szenarien 1 bis 5 unterscheiden sich die Beispiele hinsichtlich der realisierten Nutzlastmasse. In den Szenarien 6 und 7 variieren die drei Endgelenkwinkelstellungen, während die Nutzlastmasse konstant bleibt.

Die Ergebnisse der Rechnung sind die Koeffizienten  $\gamma$  der B-Spline-Funktionen, welche gemäß Abschnitt 7.2 zum Geschwindigkeitsprofil und geometrischen Sollpfad im Konfigurationsraum verarbeitet werden. Aus diesen ergibt sich nach Unterabschnitt 6.2.1 der jeweilige Sollverlauf der Gelenkwinkel, der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten und der Gelenkwinkelbeschleunigungen. Über die dynamische Gleichung aus Abschnitt 4.4 erhält man den Verlauf der Steuerspannungen. Der Sollverlauf der Trajektorie im Arbeitsraum berechnet sich gemäß Abschnitt 3.2. Die Sollverläufe der Trajektorien im Arbeitsraum werden in jeweils einer Grafik dargestellt.

Für die Szenarien 1 und 3 werden mit OSTP berechnete Ergebnisse angegeben, für die Szenarien 2, 4, 5, 6 und 7 mittels Approximationsverfahren geschätzte. Im einzelnen zeigen die Abschnitte 10.2 (Szenario 1), 10.3 (Szenario 2), 10.4 (Szenario 3), 10.5 (Szenario 4), 10.6 (Szenario 5), 10.7 (Szenario 6) und 10.8 (Szenario 7)

- einerseits die Verläufe der Trajektorien im Arbeitsraum,
- andererseits der Gelenkwinkel und der Geschwindigkeitsprofile im Konfigurationsraum (Siehe Abbildung 9.1).

Für die Szenarien 3 und 5 wird zusätzlich der aufintegrierte Gesamtregelungsaufwand angegeben.

### 10.1 Regelaufwandsberechnung

Der Regelaufwand und der Gesamtregelaufwand ergeben sich in Abhängigkeit vom jeweiligen Szenario aus den folgenden Formeln:

- *Szenario 1*-Regelungsaufwand der einzelnen Gelenke:

$$\mathcal{R}_i(t, m, \theta_0(m_0)) = \int_0^t \Delta u_i^2(m, \theta_0(m_0)) dt \quad (10.1)$$

mit  $i = 1, 2, 3$ , wobei  $m$  die realisierte und  $m_0$  die zur Berechnung der deterministisch-optimalen Trajektorie  $\theta_0$  mit OSTP verwendete Masse ist. Stimmen  $m$  und  $m_0$  überein, fällt kein Regelungsaufwand an.

- *Szenario 2*-Regelungsaufwand der einzelnen Gelenke:

$$\mathcal{R}_i\left(t, m, \theta_0^g(m)\right) = \int_0^t \Delta u_i^2\left(m, \theta_0^g(m)\right) dt \quad (10.2)$$

mit  $i = 1, 2, 3$ , wobei  $m$  die realisierte und  $m_0$  die bei der Schätzung der Trajektorie  $\theta_0^g$  verwendete Masse ist. Stimmen  $m$  und  $m_0$  überein, fällt nahezu kein Regelungsaufwand an.

- *Szenario 3*-Regelungsaufwand der einzelnen Gelenke:

$$\mathcal{R}_i\left(t, m, \bar{\theta}_0\left(\bar{m}_0, \sigma_0\right)\right) = \int_0^t \Delta u_i^2\left(m, \bar{\theta}_0\left(\bar{m}_0, \sigma_0\right)\right) dt \quad (10.3)$$

mit  $i = 1, 2, 3$ , wobei  $m$  die realisierte Masse und  $\bar{m}_0$  bzw.  $\sigma_0$  der Erwartungswert bzw. die Standardabweichung sind, die zur Berechnung der stochastisch-optimalen Trajektorie  $\bar{\theta}_0$  mit OSTP verwendet werden.

- *Szenario 4*-Regelungsaufwand der einzelnen Gelenke:

$$\mathcal{R}_i\left(t, m, \bar{\theta}_0^g\left(\bar{m}_0, \sigma_0\right)\right) = \int_0^t \Delta u_i^2\left(m, \bar{\theta}_0^g\left(\bar{m}_0, \sigma_0\right)\right) dt \quad (10.4)$$

mit  $i = 1, 2, 3$ , wobei  $m$  die realisierte Masse und  $\bar{m}_0$  bzw.  $\sigma_0$  der Erwartungswert bzw. die Standardabweichung sind, die zur Schätzung der Trajektorie  $\bar{\theta}_0^g$  mit OSTP verwendet werden.

- *Szenario 5*-Regelungsaufwand der einzelnen Gelenke:

Das Szenario 5 verwendet bis zum Zeitpunkt  $t_1$  die stochastisch-optimale Trajektorie  $\bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}, \sigma_0 = 2.5 \text{ kg})$ . Der Regelungsaufwand ergibt sich zu:

$$\mathcal{R}_i\left(t, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) = \int_0^t \Delta u_i^2\left(m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) dt \quad (10.5)$$

mit  $i = 1, 2, 3$ .

Am Zeitpunkt  $t_1$  wird eine präzise Schätzung der realisierten Masse  $m$  in Form des Mittelwertes  $\bar{m}_1$  und des mittleren Fehlers  $\sigma_1$  zugeliefert. Mit diesen beiden Größen wird die Trajektorie  $\bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1, \sigma_1)$  geschätzt. Der Roboter geht am Zeitpunkt  $t_1$  auf diese neue Trajektorie über. Der Regelungsaufwand zwischen dem Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0 \text{ sec}$  und dem Zeitpunkt  $t \geq t_1$  ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i\left(t, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0) \rightarrow \bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1, \sigma_1)\right) &= \int_0^{t_1} \Delta u_i^2\left(m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) dt \\ &+ \int_{t_1}^t \Delta u_i^2\left(m, \bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1, \sigma_1)\right) dt \end{aligned} \quad (10.6)$$

mit  $i = 1, 2, 3$ . Stimmen  $m$  und  $\bar{m}_1$  überein, fällt nahezu kein Regelungsaufwand an.

Der Gesamtregelungsaufwand ergibt sich durch Aufaddierung des Regelungsaufwandes der einzelnen Gelenke:

- *Szenario 1*- Gesamtregelungsaufwand:

$$\mathcal{R}_{ge}\left(t, m, \theta_0(m)\right) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}_i\left(t, m, \theta_0(m)\right) \quad (10.7)$$

- *Szenario 2*- Gesamtregelungsaufwand:

$$\mathcal{R}_{ge}\left(t, m, \theta_0^g(m)\right) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}_i\left(t, m, \theta_0^g(m)\right) \quad (10.8)$$

- *Szenario 3*- Gesamtregelungsaufwand:

$$\mathcal{R}_{ge}\left(t, m, \bar{\theta}_0(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}_i\left(t, m, \bar{\theta}_0(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) \quad (10.9)$$

- *Szenario 4*- Gesamtregelungsaufwand:

$$\mathcal{R}_{ge}\left(t, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}_i\left(t, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) \quad (10.10)$$

- *Szenario 5*- Gesamtregelungsaufwand:

Im Szenario 5 sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- vor dem Korrekturzeitpunkt  $t_1$  errechnet sich der Aufwand durch Aufaddierung von (10.5):

$$\mathcal{R}_{ge}\left(t, m, \bar{\theta}_0^g(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}_i\left(t, m, \bar{\theta}_0^g(\bar{m}_0, \sigma_0)\right) \quad (10.11)$$

- nach dem Korrekturzeitpunkt  $t_1$  errechnet sich der Aufwand durch Aufaddierung von (10.6):

$$\mathcal{R}_{ge}\left(t, m, \bar{\theta}_{0R} \rightarrow \theta_1^g\right) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}_i\left(t, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0) \rightarrow \theta_1^g(\bar{m}_1, \sigma_1)\right) \quad (10.12)$$

Die Berechnung des Regelaufwandes erfolgt mittels der Gleichungen (13.46) bis (13.49).

*Hinweis:*

Die folgenden Grafiken wurden mit dem Programm **gnuplot** erstellt. Die durch **gnuplot** bewältigbare Datenmenge erwies sich als begrenzt, so daß außerhalb der Singularitätszonen nur jede fünfzigste Beispieltrajektorie abgebildet werden konnte. Infolgedessen weisen die Kurvenscharen manchmal Löcher auf.

## 10.2 Beispiele für Szenario 1

Veränderlich in diesem Abschnitt ist der Parameter Nutzlastmasse  $m$ . Es werden nur solche  $m$  behandelt, die außerhalb von Singularitätsintervallen liegen. Die Nutzlastmasse ist durch Wiegen am Eincheckschalter exakt bekannt.

### 10.2.1 Solltrajektorien im Arbeitsraum

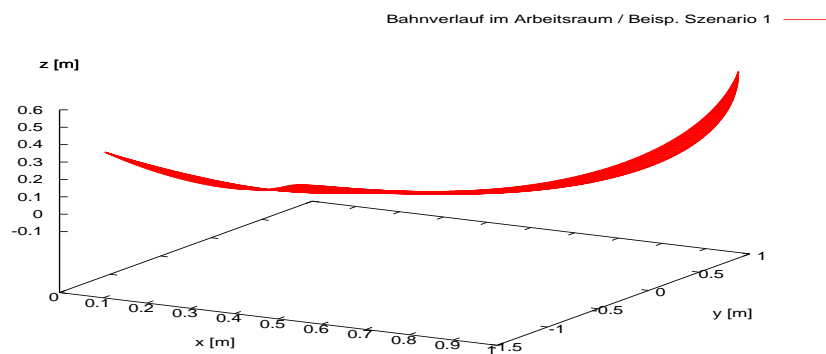


Abbildung 10.1: Szenario 1 - Solltrajektorien im Arbeitsraum

Die mit *OSTP* berechneten Trajektorien beginnen am einheitlichen Anfangspunkt und enden im einheitlichen Endpunkt, so wie es die Gleichungsnebenbedingungen (6.2) und (6.3) verlangen (Siehe Abbildung 10.1).

### 10.2.2 Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile

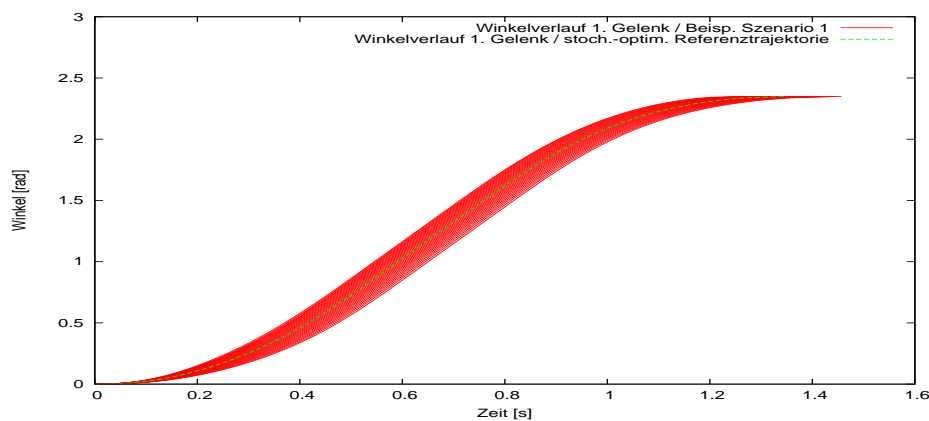


Abbildung 10.2: Szenario 1 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\theta_{1_0}^*(t)$ , zusätzlich Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{1_0}^*(t, \bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}, \sigma = 2.5 \text{ kg})$  einer stochastisch-optimalen Trajektorie

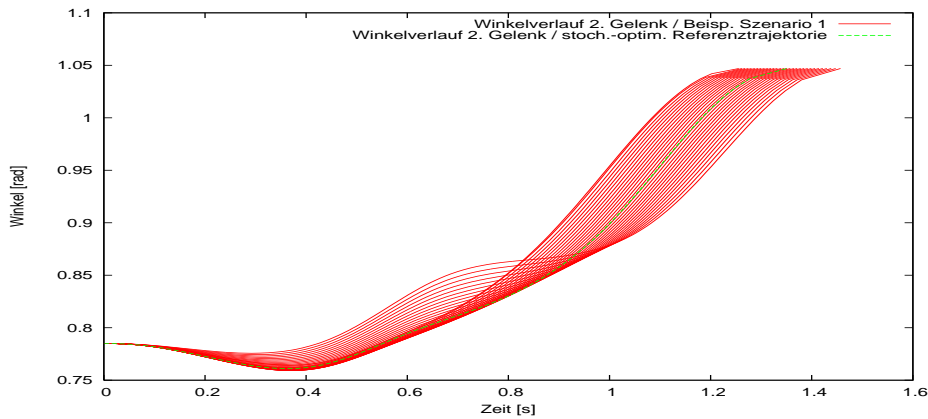


Abbildung 10.3: Szenario 1 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\theta_{2_0}^*(t)$ , zusätzlich Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{2_0}^*(t, \bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}, \sigma = 2.5 \text{ kg})$  einer stochastisch-optimalen Trajektorie

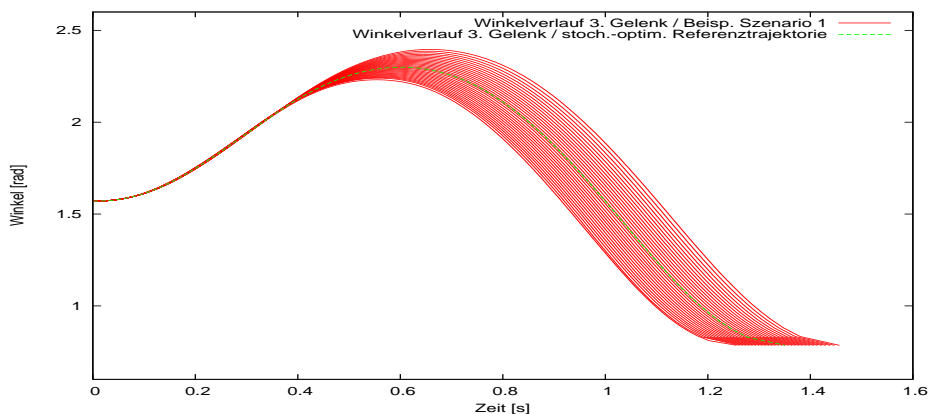


Abbildung 10.4: Szenario 1 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\theta_{3_0}^*(t)$ , zusätzlich Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{3_0}^*(t, \bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}, \sigma = 2.5 \text{ kg})$  einer stochastisch-optimalen Trajektorie

Die mit OSTP berechneten Führungsfunktionen beginnen an der vorgegebenen Startposition, enden an der vorgegebenen Endposition (Siehe Abbildungen 10.2, 10.3 und 10.4) und halten die Anfangs- und Endbedingungen (6.2) und (6.3) sowie die Ungleichungsnebenbedingungen (6.6) ein. D.h. alle Führungsfunktionen geben denselben Anfangs- und Endpunkt vor. Ferner kann man den Abbildungen 10.2, 10.3, 10.4 und 10.5 entnehmen, daß eine stochastisch-optimale Referenztrajektorie, die unter Einbeziehung des Erwartungswertes und der Standardabweichung der Verteilung geplant wird,

- etwa in der Mitte der deterministischen Trajektorienschär <sup>1</sup> verläuft,
- keine extremen Werte annimmt und
- somit einen ausgeglichenen Charakter aufweist.

<sup>1</sup>Eine deterministische Trajektorie ergibt sich, indem für gegebenes  $m$  die zu diesem Gewicht  $m$  optimale Trajektorie mittels OSTP bestimmt wird.

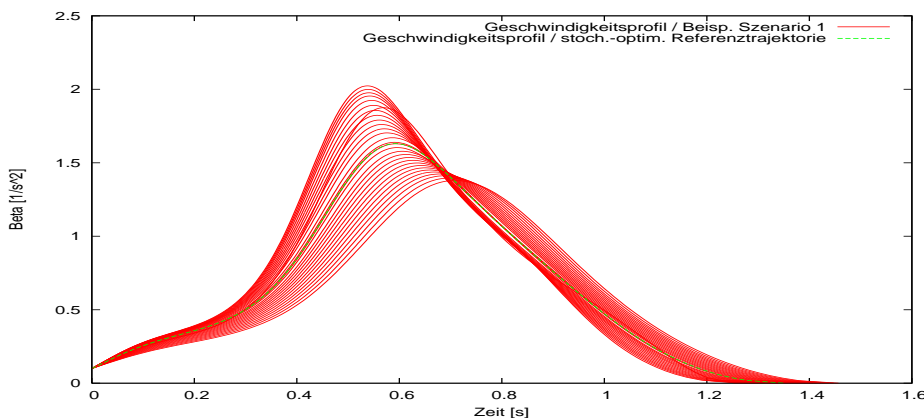


Abbildung 10.5: Szenario 1 - Verläufe der Geschwindigkeitsprofile  $\beta_0(t)$ , zusätzlich  $\bar{\beta}_0(t, \bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}, \sigma = 2.5 \text{ kg})$  einer stochastisch-optimalen Trajektorie

Die mit *OSTP* berechneten Geschwindigkeitsprofile weisen den vorgegebenen Startwert  $0.1 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  und den vorgegebenen Endwert  $0.0 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  auf (Siehe Abbildung 10.5). Ferner bewegen sich die Funktionen  $\beta_0$  wie gefordert ausschließlich im positiven Bereich.

*Zusammenfassung:* Das Vorhandensein des präzisen Wertes der Nutzlastmasse und die Verwendung einer damit geplanten Trajektorie als Führungsgröße ab dem Zeitpunkt  $t_0$  vermeidet Abweichungen und daher Regelaufwand vollständig.

### 10.2.3 Auswirkung des Nominalwertes auf die Trajektorien

Die drei folgenden Abbildungen 10.6, 10.7 und 10.8 zeigen den Verlauf des Geschwindigkeitsprofils  $\beta(s)$ , des Abstandes des Roboterhand von der Basis und der Gelenkwinkelgeschwindigkeit des 1. Gelenkes  $\theta_1^*(s)$  über dem Wegparameter  $s$  für  $m = 1.0 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 14 \text{ kg}$ .

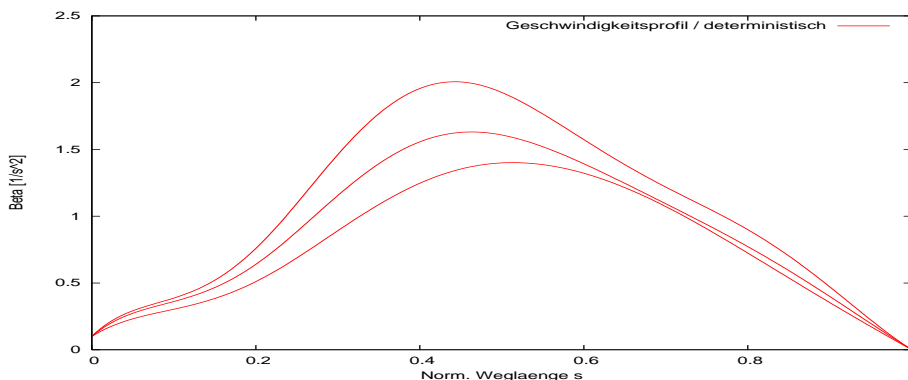


Abbildung 10.6: Deterministisch-optimales Geschwindigkeitsprofil  $\beta(s, m = 1 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 14 \text{ kg})$  für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

Mit steigendem Nominalwert  $m_0$  nehmen die Werte des Geschwindigkeitsprofils ab (in Abbildung 10.6 obere Linie für  $m = 1 \text{ kg}$ , mittlere für  $m = 7.5 \text{ kg}$ , untere Linie für  $m = 14 \text{ kg}$ ).

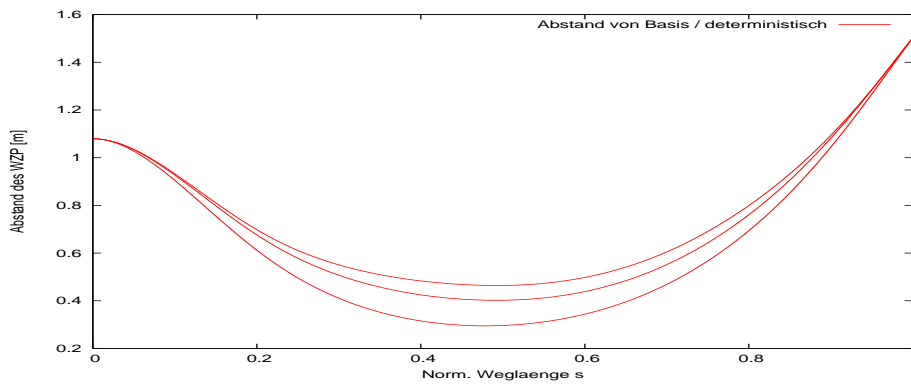


Abbildung 10.7: Deterministisch-optimaler Abstand der Hand von der Roboterbasis bei  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $7.5 \text{ kg}$ ,  $14 \text{ kg}$  für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

Mit steigendem Nominalwert  $m_0$  nimmt der Betrag des Abstandes der Hand von der Roboterbasis ab (in Abbildung 10.7 obere Linie für  $m = 1 \text{ kg}$ , mittlere für  $m = 7.5 \text{ kg}$ , untere Linie für  $m = 14 \text{ kg}$ ).

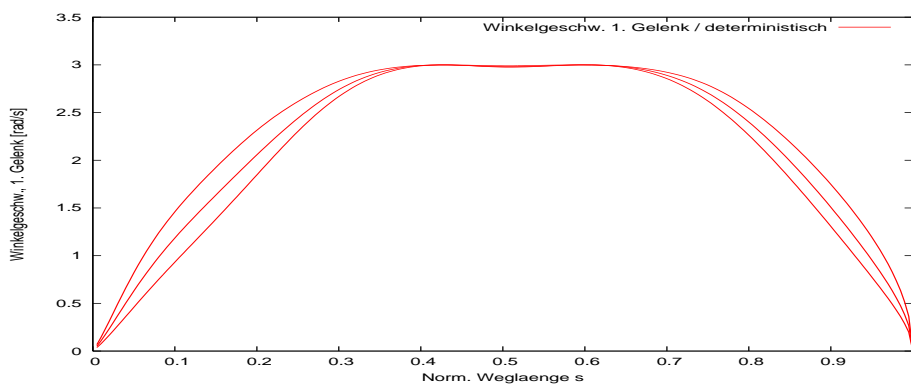


Abbildung 10.8: Verlauf der Gelenkwinkelgeschwindigkeit des 1. Gelenkes  $\dot{\theta}_1^*(s, m_0 = 1 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 14 \text{ kg})$  für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

Mit steigendem Nominalwert  $m_0$  nimmt die Gelenkwinkelgeschwindigkeit des 1. Gelenkes  $\dot{\theta}_1(s)$  ab (in Abbildung 10.8 obere Linie für  $m = 1 \text{ kg}$ , mittlere für  $m = 7.5 \text{ kg}$ , untere Linie für  $m = 14 \text{ kg}$ ).



## 10.3 Beispiele für Szenario 2

Veränderlich in diesem Abschnitt ist der Parameter Nutzlastmasse  $m$ . Es werden nur solche  $m$  behandelt, die außerhalb von Singularitätsintervallen liegen. Die Nutzlastmasse ist durch Wiegen am Eincheckschalter exakt bekannt.

### 10.3.1 Solltrajektorien im Arbeitsraum

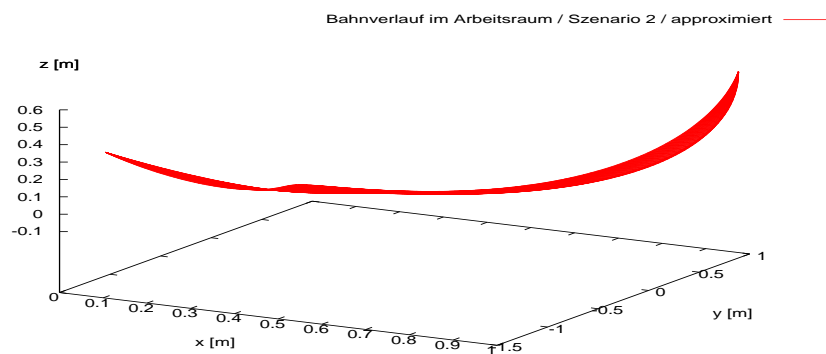


Abbildung 10.9: Szenario 2 - Solltrajektorien im Arbeitsraum zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Die Trajektorien zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) beginnen am einheitlichen Anfangspunkt und enden im einheitlichen Endpunkt, so wie es die Gleichungsnebenbedingungen (6.2) und (6.3) verlangen (Siehe Abbildung 10.9).

### 10.3.2 Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile

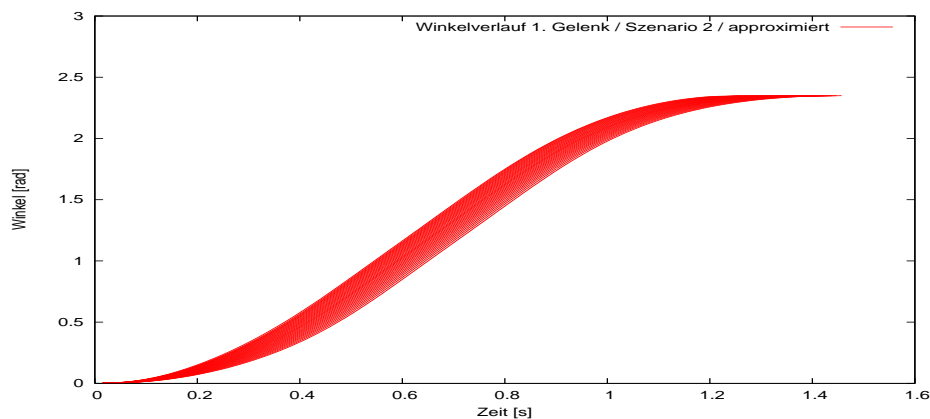


Abbildung 10.10: Szenario 2 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\theta_{1_0}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

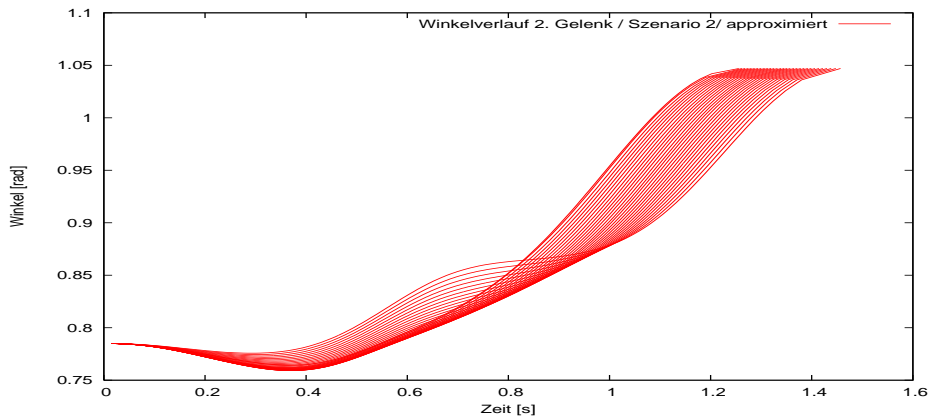


Abbildung 10.11: Szenario 2 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\theta_{2_0}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

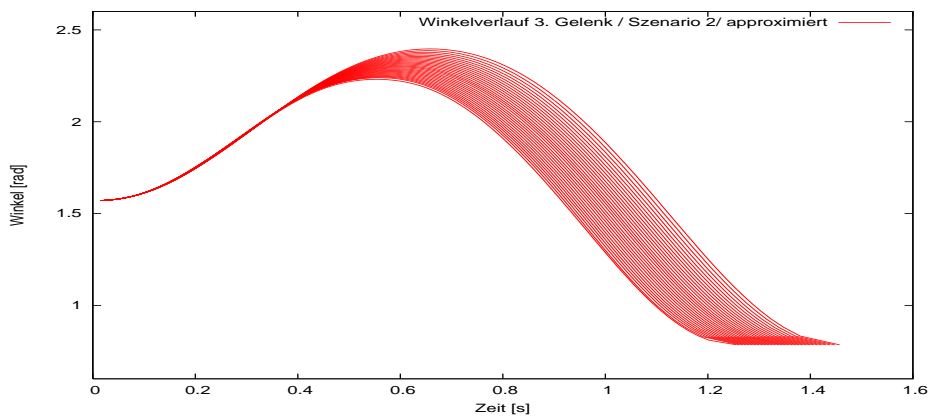


Abbildung 10.12: Szenario 2 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\theta_{3_0}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Die Führungsfunktionen zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) beginnen an der vorgegebenen Startposition, enden an der vorgegebenen Endposition (Siehe Abbildungen 10.10, 10.11 und 10.12) und halten die Anfangs- und Endbedingungen (6.2) und (6.3) sowie die Ungleichungsnebenbedingungen (6.6) ein. D.h. alle Führungsfunktionen geben denselben Anfangs- und Endpunkt vor.

Die Geschwindigkeitsprofile zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) weisen den vorgegebenen Startwert  $0.1 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  und den vorgegebenen Endwert  $0.0 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  auf (Siehe Abbildung 10.13). Ferner bewegen sich die Funktionen  $\beta_0$  wie gefordert ausschließlich im positiven Bereich.

*Zusammenfassung:* Durch das Vorhandensein des präzisen Wertes der Nutzlastmasse und die Verwendung einer damit geschätzten Trajektorie als Führungsgröße ab dem Zeitpunkt  $t_0$  fallen Abweichungen und Regelaufwand derart klein aus, daß diese unterhalb der Genauigkeit des Runge-Kutta-Integrators liegen. Daher ist der Unterschied zu Szenario 1 nicht angebar.

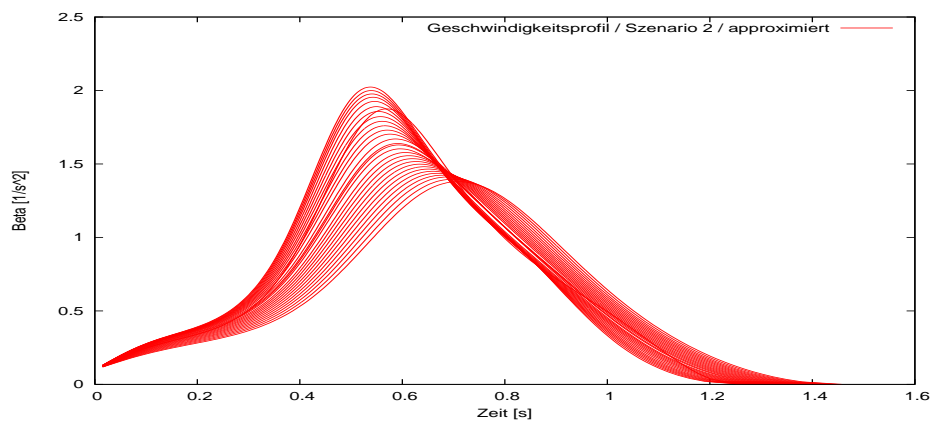


Abbildung 10.13: Szenario 2 - Verläufe der Geschwindigkeitsprofile  $\beta_0^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

## 10.4 Beispiele für Szenario 3

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und Standardabweichung  $\sigma_0$ . Es werden nur solche  $\bar{m}_0$  und  $\sigma_0$  behandelt, die außerhalb von Singularitätsintervallen liegen. Der Parameter Nutzlastmasse ist nur in Form einer stochastischen Verteilung bekannt, die durch den Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und die Standardabweichung  $\sigma_0$  angegeben wird.

### 10.4.1 Solltrajektorien im Arbeitsraum

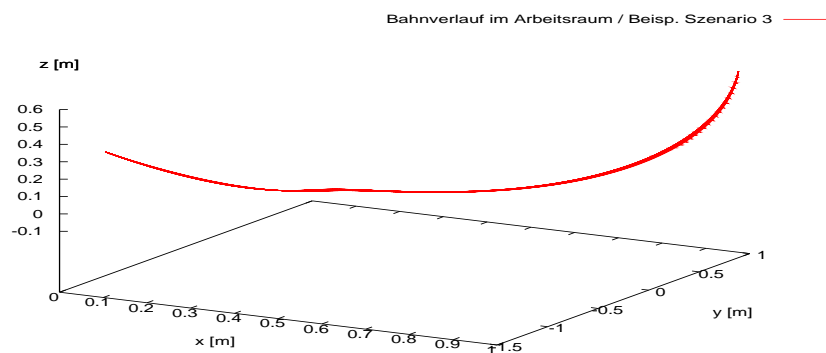


Abbildung 10.14: Szenario 3 - Solltrajektorien im Arbeitsraum

Die mit *OSTP errechneten* Referenztrajektorien beginnen am einheitlichen Anfangspunkt und enden im einheitlichen Endpunkt, so wie es die Gleichungsnebenbedingungen (6.2) und (6.3) verlangen (Siehe Abbildung 10.14).

### 10.4.2 Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile

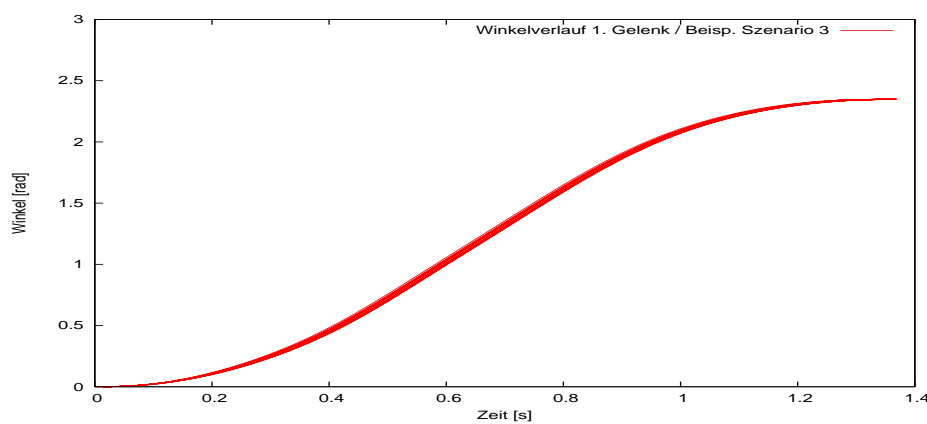


Abbildung 10.15: Szenario 3 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{10}^*(t)$

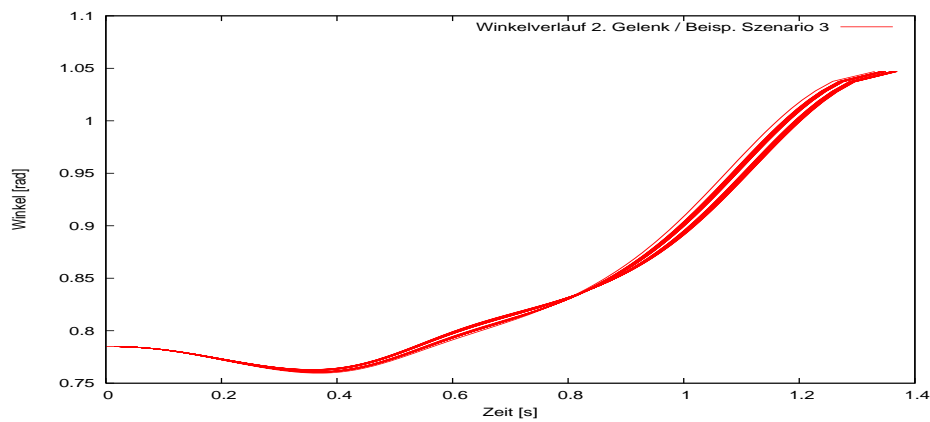


Abbildung 10.16: Szenario 3 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{2_0}^*(t)$

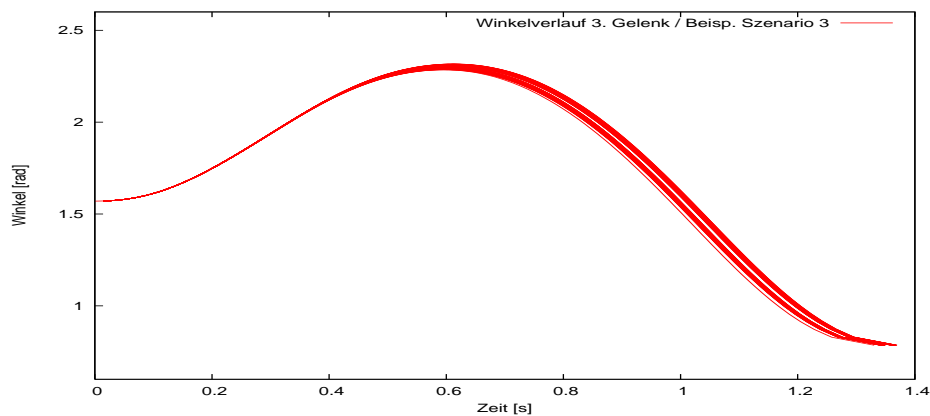
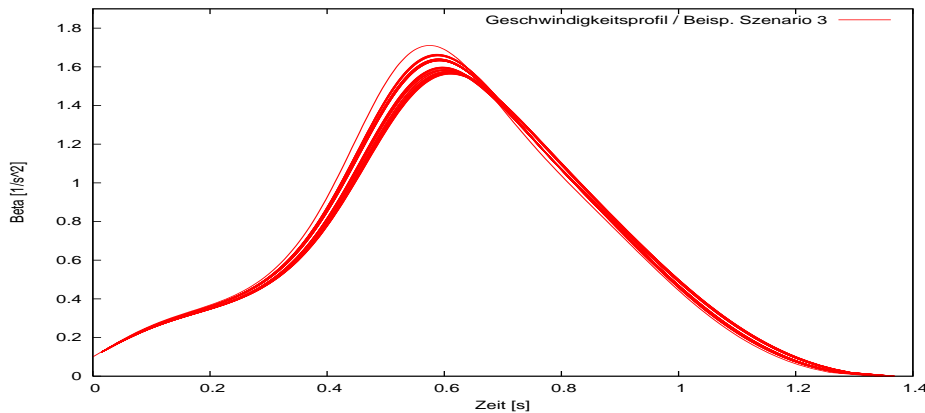


Abbildung 10.17: Szenario 3 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{3_0}^*(t)$

Die mit *OSTP* berechneten Führungsfunktionen beginnen an der vorgegebenen Startposition und enden an der vorgegebenen Endposition (Siehe Abbildungen 10.15, 10.16 und 10.17) und halten die Anfangs- und Endbedingungen (6.2) und (6.3) sowie die Ungleichungsnebenbedingungen (6.6) ein. D.h. alle Führungsfunktionen geben denselben Anfangs- und Endpunkt vor.

Die mit *OSTP* berechneten Geschwindigkeitsprofile weisen den vorgegebenen Startwert  $0.1 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  und den vorgegebenen Endwert  $0.0 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  (Siehe Abbildung 10.18) auf.

Ferner bewegen sich die Funktionen  $\bar{\beta}_0$  wie gefordert ausschließlich im positiven Bereich.

Abbildung 10.18: Szenario 3 - Verläufe der Geschwindigkeitsprofile  $\bar{\beta}_0^*(t)$ 

### 10.4.3 Robustheit stochastisch-optimaler Trajektorien

Als Maß für die Robustheit einer stochastisch-optimalen Trajektorie gegenüber einer deterministischen wird der geringere Regelaufwand für den Fall herangezogen, daß die realisierte Masse vom Erwartungswert der stochastischen Trajektorie bzw. vom Nominalwert der deterministischen abweicht. Wie in Abbildung 10.19 dargestellt, beträgt die durch die Verwendung stochastisch-optimaler Trajektorien erzielbare Regelaufwandsersparnis hier bis zu 14%. In den Szenarien 2 und 5 entsteht die Regelaufwandsersparnis durch die Vermeidung von Abweichungen, indem Trajektorien benutzt werden, die den zum Zeitpunkt  $t_0$  bzw.  $t_1$  zugehenden präziseren Informationen angepaßt sind. Hier hingegen bewirkt die Verwendung der stochastisch-optimalen Trajektorie die Herabsetzung des Regelaufwandes, indem bei der Optimierung die Wahrscheinlichkeitsverteilung der stochastischen Parameter berücksichtigt wird.

Zur Angabe des aufintegrierten Gesamtregelungsaufwandes müßte der Durchlauf jeder Trajektorie für eine Vielzahl von realisierten Massen simuliert werden. Aus Platzgründen erfolgt hier die Beschränkung auf drei deterministische Trajektorien mit den Nominalwerten  $m_0 = 5.0 \text{ kg}$ ,  $m_0 = 7.5 \text{ kg}$  und  $m_0 = 10.0 \text{ kg}$  und zwölf stochastisch-optimalen Trajektorien, die die Erwartungswerte  $\bar{m}_0 = 5.0 \text{ kg}$ ,  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$  und  $\bar{m}_0 = 10.0 \text{ kg}$  sowie die Standardabweichungen  $\sigma_0 = 5.0 \text{ kg}$ ,  $\sigma_0 = 10.0 \text{ kg}$ ,  $\sigma_0 = 15.0 \text{ kg}$  und  $\sigma_0 = 20.0 \text{ kg}$  aufweisen, wie in Abbildung 10.19 aufgeführt:

Der aufintegrierte Gesamtregelungsaufwand  $\mathcal{R}_{ge}(t, m, \bar{\theta}_0^*(\bar{m}_0, \sigma_0))$  der zwölf stochastisch-optimalen Trajektorien und der aufintegrierte Gesamtregelungsaufwand  $\mathcal{R}_{ge}(t, m, \theta^*(m_0))$  der drei deterministischen Trajektorien hängt für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  gemäß Abbildung 10.19 parabelförmig von der realisierten Masse ab. Stimmen Nominalwert bzw. Erwartungswert und realisierte Masse überein, beträgt der aufintegrierte Regelungsaufwand Null. Deshalb berühren die Parabeln an den Stellen  $5.0 \text{ kg}$ ,  $7.5 \text{ kg}$  und  $10.0 \text{ kg}$  die Nulllinie, d.h. es ist kein Regelungsaufwand zur Einhaltung der Referenztrajektorie erforderlich, da keine Abweichungen entstehen. Die Parabeln sind um die Stellen  $5.0 \text{ kg}$ ,  $7.5 \text{ kg}$  und  $10.0 \text{ kg}$  nahezu symmetrisch, d.h. der Abstand vom Erwartungswert bestimmen die Größe des benötigten Regelungsaufwandes. Mit zunehmender Standardabweichung  $\sigma_0$  nimmt der Regelaufwand ab (jeweils obere grün gestrichelte Linie für  $\sigma_0 = 5 \text{ kg}$ , jeweils untere grün gestrichelte Linie für  $\sigma_0 = 20 \text{ kg}$ ). Die Erhöhung der Unsicherheit  $\sigma_0$  bewirkt, daß der Roboter *vorsichtiger* (langsamer) fahren muß (Siehe Abbildung 10.25). Dadurch sind die Abweichungen von der Sollbahn kleiner, und der Regelungsaufwand sinkt.

Die stochastisch-optimalen Trajektorien mit einer Standardabweichung von  $\sigma_0 = 20 \text{ kg}$  benötigten im Falle einer abweichenden Nutzlast bis zu 14% weniger Regelungsaufwand als die deterministischen Trajektorien.

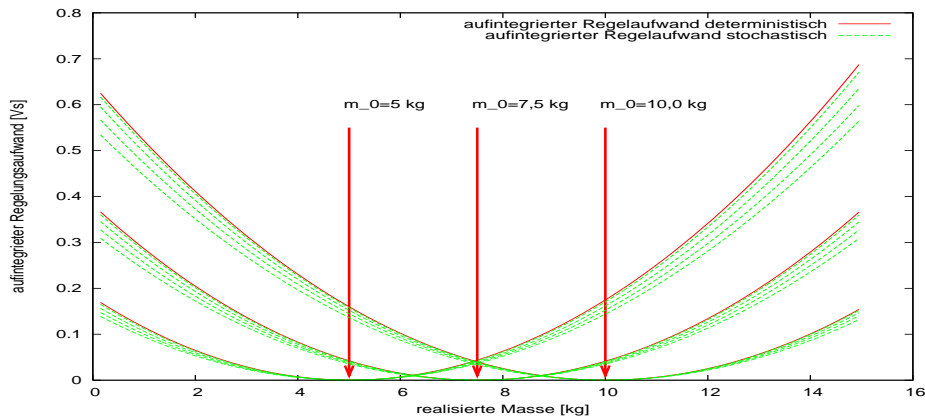


Abbildung 10.19: aufintegrierter Gesamtregelungsaufwand  $\mathcal{R}_{ge}(t, m, \theta^*(m_0 = 5.0 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 10 \text{ kg}))$  (rot) und  $\mathcal{R}_{ge}(t, m, \bar{\theta}_0^*(\bar{m}_0 = 5.0 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 10 \text{ kg}, \sigma_0 = 5 \text{ kg}, 10 \text{ kg}, 15 \text{ kg}, 20 \text{ kg}))$  (grün) für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$

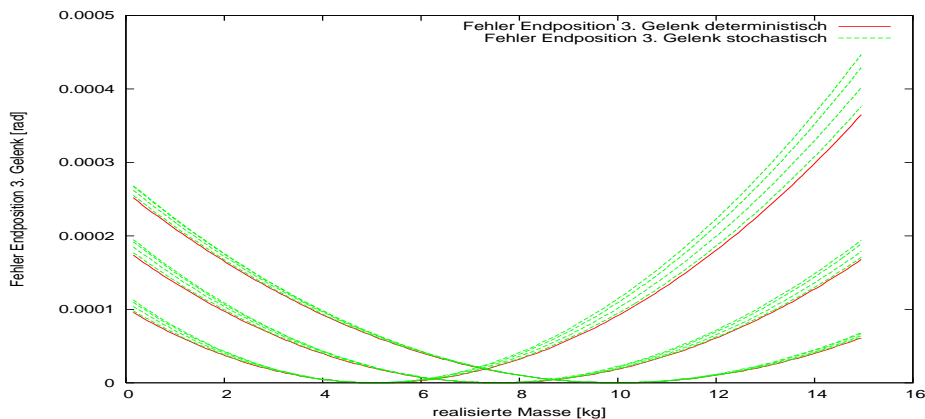


Abbildung 10.20: Fehler der Endgelenkwinkelstellung des dritten Gelenkes  $\Delta\theta_3(s_f, m_0 = 5.0 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 10 \text{ kg})$  (rot) und  $\Delta\bar{\theta}_3(s_f, \bar{m}_0 = 5.0 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 10 \text{ kg}, \sigma_0 = 5 \text{ kg}, 10 \text{ kg}, 15 \text{ kg}, 20 \text{ kg})$  (grün) für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$

Ferner sinkt der Fehler der Endgelenkwinkelstellung mit steigender Standardabweichung, wie die Abbildung 10.20 am Beispiel des dritten Gelenkes zeigt (jeweils obere grün gestrichelte Linie für  $\sigma_0 = 5 \text{ kg}$ , jeweils untere grün gestrichelte Linie für  $\sigma_0 = 20 \text{ kg}$ ). Dieser ist jedoch größer als der der deterministischen Trajektorie. Der geringere Regelungsaufwand der stochastisch-optimalen Trajektorie kann somit nur durch die geringeren Werte des Geschwindigkeitsprofils zustande kommen (Siehe Abbildung 10.24).

### 10.4.4 Auswirkung des Erwartungswertes auf die Trajektorien

Die drei folgenden Abbildungen 10.21, 10.22 und 10.23 zeigen den Verlauf des Geschwindigkeitsprofils  $\bar{\beta}(s)$ , des Abstandes des Roboterhand von der Basis und der Gelenkwinkelgeschwindigkeit des 1. Gelenkes  $\dot{\theta}_1^*(s)$  über dem Wegparameter  $s$  für  $\bar{m}_0 = 1.0 \text{ kg}$ ,  $7.5 \text{ kg}$ ,  $14 \text{ kg}$  und  $\sigma_0 = 5 \text{ kg}$ .

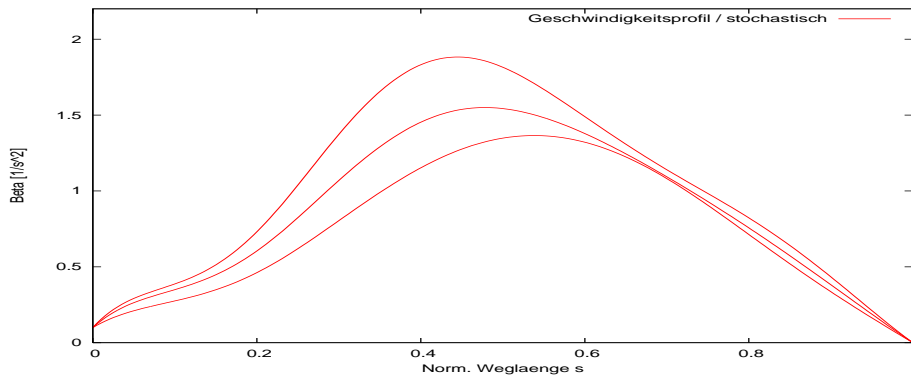


Abbildung 10.21: Stochastisch-optimale Geschwindigkeitsprofile  $\bar{\beta}(s, \bar{m}_0 = 1 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 14 \text{ kg}, \sigma = 5 \text{ kg})$  für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

Analog zu Unterabschnitt 10.2.3 nehmen mit steigendem Erwartungswert  $\bar{m}_0$  die Werte des Geschwindigkeitsprofils ab (obere Linie für  $\bar{m}_0 = 1 \text{ kg}$ , mittlere Linie für  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$ , untere Linie für  $\bar{m}_0 = 14 \text{ kg}$ ).

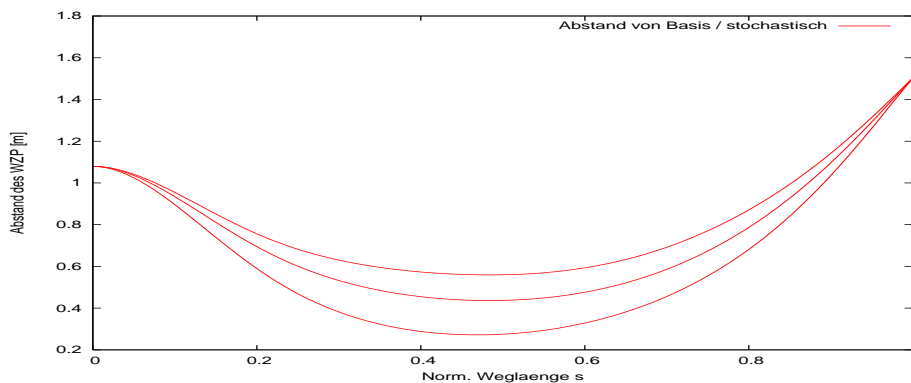


Abbildung 10.22: Stochastisch-optimaler Abstand der Hand von der Roboterbasis bei  $\bar{m}_0 = 1 \text{ kg}, 7.5 \text{ kg}, 14 \text{ kg}, \sigma = 5 \text{ kg}$  für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

Analog zu Unterabschnitt 10.2.3 nimmt mit steigendem Erwartungswert  $\bar{m}_0$  der Betrag des Abstandes der Hand von der Roboterbasis ab (obere Linie für  $\bar{m}_0 = 1 \text{ kg}$ , mittlere Linie für  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$ , untere Linie für  $\bar{m}_0 = 14 \text{ kg}$ ).

Analog zu Unterabschnitt 10.2.3 nimmt mit steigendem Erwartungswert  $\bar{m}_0$  die Gelenkwinkelgeschwindigkeit des 1. Gelenkes  $\dot{\theta}_1^*(s)$  ab (obere Linie für  $\bar{m}_0 = 1 \text{ kg}$ , mittlere Linie für  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$ , untere Linie für  $\bar{m}_0 = 14 \text{ kg}$ ).



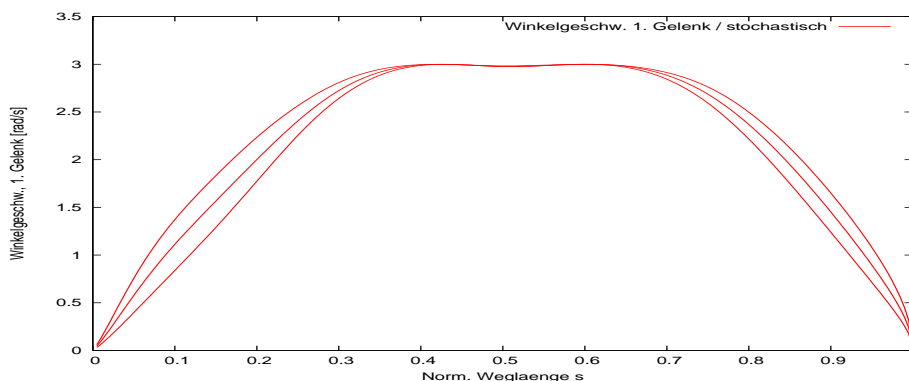


Abbildung 10.23: Verlauf der Gelenkwinkelgeschwindigkeit des 1. Gelenkes  $\dot{\theta}_1^*(s, \bar{m}_0 = 1\text{ kg}, 7.5\text{ kg}, 14\text{ kg}, \sigma = 5\text{ kg})$  für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

#### 10.4.5 Auswirkung der Standardabweichung auf die Trajektorien

Die drei folgenden Abbildungen 10.24, 10.25 und 10.26 zeigen den Verlauf des Geschwindigkeitsprofils, der Gelenkwinkelgeschwindigkeit des 1. Gelenkes sowie den Betrag der Handbeschleunigung über dem Wegparameter  $s$  für  $m_0 = \bar{m}_0 = 7.5\text{ kg}$  und  $\sigma_0 = 5\text{ kg}, 10\text{ kg}, 15\text{ kg}, 20\text{ kg}$ .

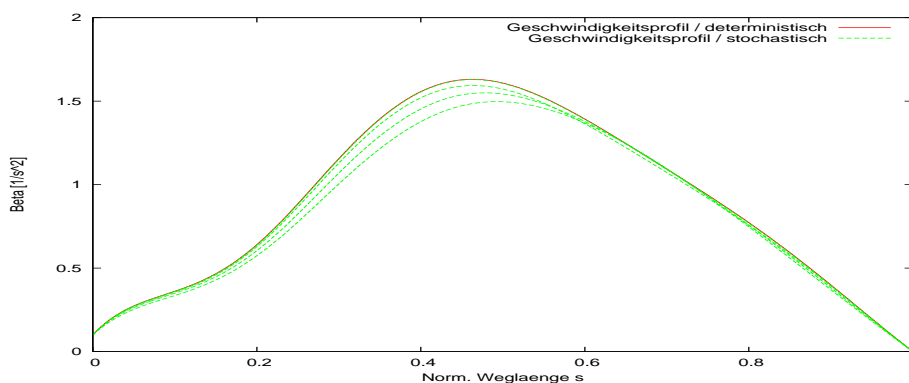


Abbildung 10.24: Optimales deterministisches Geschwindigkeitsprofil  $\beta(s, m_0 = 7.5\text{ kg})$  (rot) und stochastisch-optimale Geschwindigkeitsprofile  $\tilde{\beta}(s, \bar{m}_0 = 7.5\text{ kg}, \sigma = 5\text{ kg}, 10\text{ kg}, 15\text{ kg}, 20\text{ kg})$  (grün) für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

Mit steigender Standardabweichung  $\sigma$  nehmen die Werte des Geschwindigkeitsprofils ab (jeweils obere gestrichelte Linie für  $\sigma = 5\text{ kg}$ ; jeweils untere gestrichelte Linie für  $\sigma = 20\text{ kg}$ ). Die Werte des Geschwindigkeitsprofils  $\tilde{\beta}(s)$  der stochastischen Trajektorien sind geringer als die der deterministischen  $\beta(s)$ .

Mit steigender Standardabweichung  $\sigma$  nimmt die Gelenkwinkelgeschwindigkeit des 1. Gelenkes  $\dot{\theta}_1^*(s)$  ab (jeweils obere gestrichelte Linie für  $\sigma = 5\text{ kg}$ ; jeweils untere gestrichelte Linie für  $\sigma = 20\text{ kg}$ ). Die Werte der Gelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_1^*(s)$  der stochastischen Trajektorien sind geringer als die der deterministischen  $\dot{\theta}_1^*(s)$ .

Mit steigender Standardabweichung nimmt der Betrag der Handbeschleunigung ab (jeweils obere gestrichelte Linie für  $\sigma = 5\text{ kg}$ ; jeweils untere gestrichelte Linie für  $\sigma = 20\text{ kg}$ ). Der Betrag der

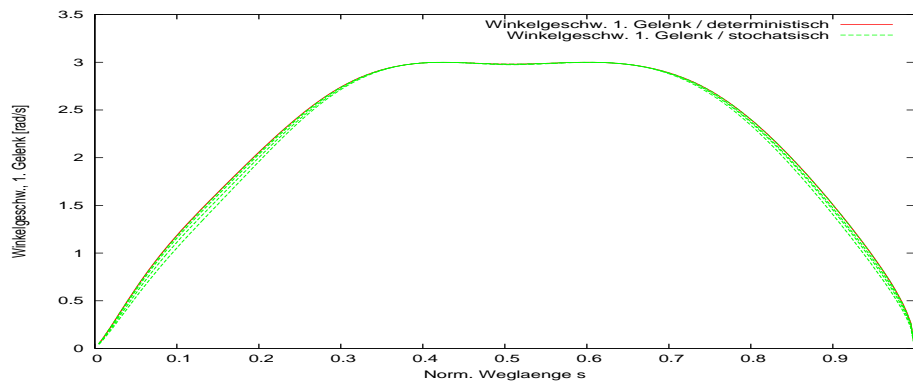


Abbildung 10.25: Optimales deterministisches Geschwindigkeitsprofil  $\dot{\theta}^*(s, m_0 = 7.5 \text{ kg})$  (rot) und stochastisch-optimale Geschwindigkeitsprofile  $\dot{\theta}^*(s, \bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}, \sigma = 5 \text{ kg}, 10 \text{ kg}, 15 \text{ kg}, 20 \text{ kg})$  (grün) für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

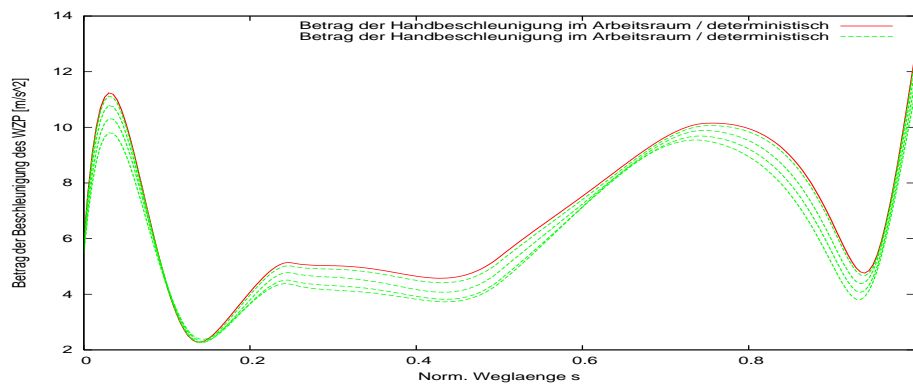


Abbildung 10.26: Optimale stochastische Handbeschleunigung bei  $m_0 = 7.5 \text{ kg}$  (rot) und stochastisch-optimale Handbeschleunigungen bei  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}, \sigma = 5 \text{ kg}, 10 \text{ kg}, 15 \text{ kg}, 20 \text{ kg}$  (grün) für  $k_t = 0.9$  und  $k_e = 0.1$  über  $s$

Handbeschleunigung der stochastischen Trajektorien ist geringer als der der deterministischen.

## 10.5 Beispiele für Szenario 4

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und Standardabweichung  $\sigma_0$ . Es werden nur solche  $\bar{m}_0$  und  $\sigma_0$  behandelt, die außerhalb von Singularitätsintervallen liegen. Der Parameter Nutzlastmasse ist nur in Form einer stochastischen Verteilung bekannt, die durch den Erwartungswert  $\bar{m}_0$  und die Standardabweichung  $\sigma_0$  angegeben wird.

### 10.5.1 Solltrajektorien im Arbeitsraum

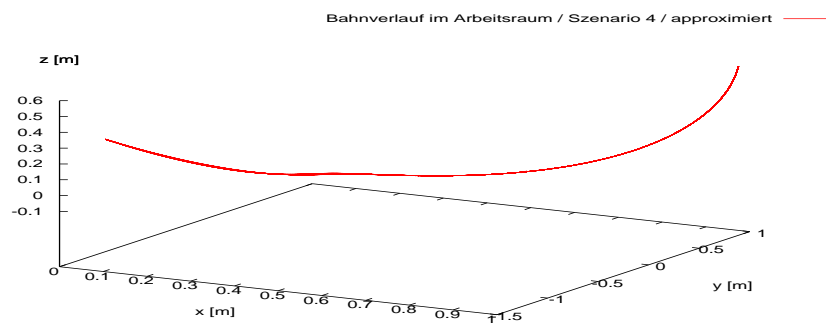


Abbildung 10.27: Szenario 4 - Solltrajektorien im Arbeitsraum zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Alle Referenztrajektorien zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) beginnen am einheitlichen Anfangspunkt und enden im einheitlichen Endpunkt, so wie es die Gleichungsnebenbedingungen (6.2) und (6.3) verlangen (Siehe Abbildung 10.27).

### 10.5.2 Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile

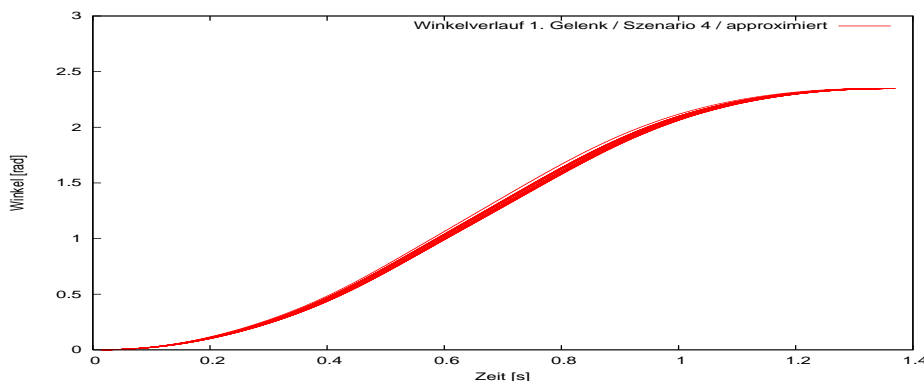


Abbildung 10.28: Szenario 4 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{1_0}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

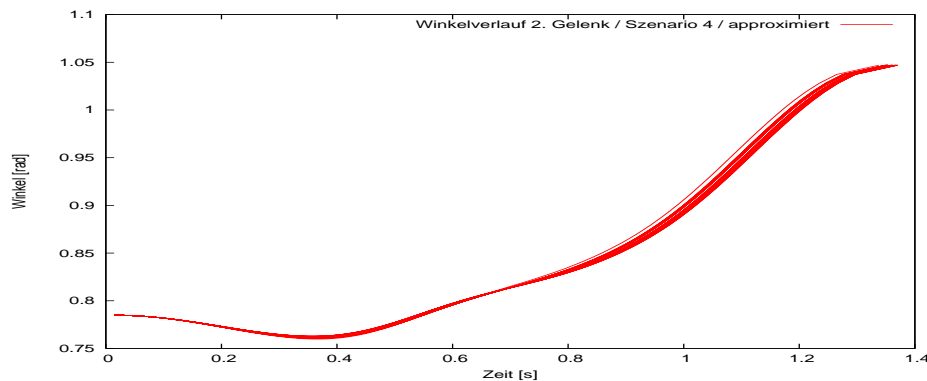


Abbildung 10.29: Szenario 4 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{20}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

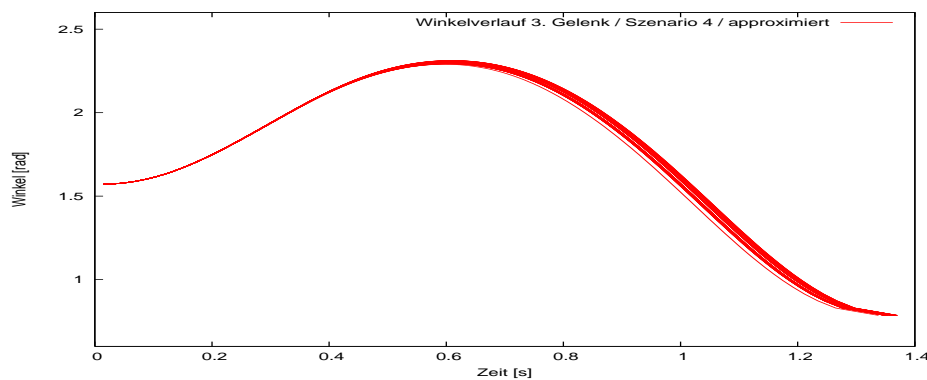


Abbildung 10.30: Szenario 4 - Sollverläufe der Gelenkwinkel  $\bar{\theta}_{30}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Die Führungsfunktionen zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) beginnen an der vorgegebenen Startposition und enden an der vorgegebenen Endposition (Siehe Abbildungen 10.28, 10.29 und 10.30) und halten die Anfangs- und Endbedingungen (6.2) und (6.3) sowie die Ungleichungsnebenbedingungen (6.6) ein. D.h. alle Führungsfunktionen geben denselben Anfangs- und Endpunkt vor.

Die Geschwindigkeitsprofile zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) weisen den vorgegebenen Startwert  $0.1 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  und den vorgegebenen Endwert  $0.0 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  (Siehe Abbildung 10.31) auf.

Ferner bewegen sich die Funktionen  $\bar{\beta}_0$  wie gefordert ausschließlich im positiven Bereich.

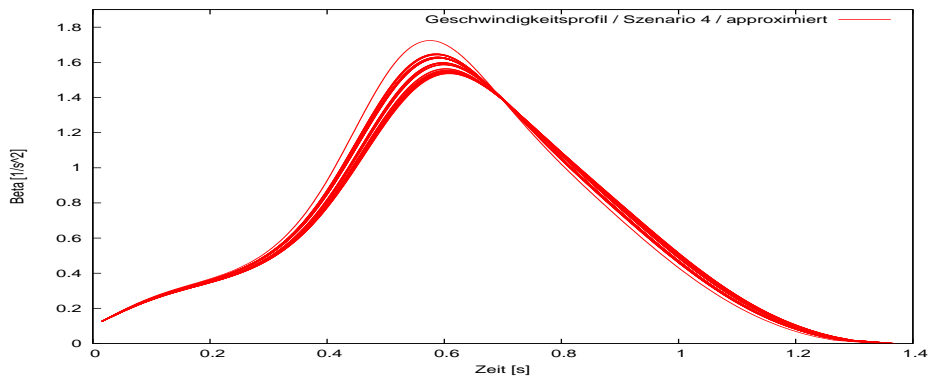


Abbildung 10.31: Szenario 4 - Verläufe der Geschwindigkeitsprofile  $\bar{\beta}_0^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

## 10.6 Beispiele für Szenario 5

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Mittelwert  $\bar{m}_1$  und mittlerer Fehler  $\sigma_1$ . Es werden nur solche  $\bar{m}_1$  und  $\sigma_1$  behandelt, die außerhalb von Singularitätsintervallen liegen. Die Nutzlastmasse ist am Zeitpunkt  $t_0$  nur in Form der Verteilung  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$  und  $\sigma_0 = 2.5 \text{ kg}$  bekannt. Am Zeitpunkt  $t_1 = 0.2 \text{ sec}$  geht eine präzise Schätzung der Nutzlastmasse in Form des Mittelwertes  $\bar{m}_1$  und des mittleren Fehlers  $\sigma_1$  zu.

Die folgenden Abbildungen enthalten die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}(t)$ <sup>2</sup> sowie die neuen Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_1^g(t)$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28). Die Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_1^g(t)$  beginnen am Schaltpunkt  $t_1 = 0.20 \text{ sec}$ . Sie zweigen dort von der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}(t)$  ab. Der Roboter geht am Zeitpunkt  $t_1$  auf die jeweilige neue Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_1^g(t)$  über. Zu Vergleichszwecken wird die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}(t)$  auch im Intervall  $[t_1, t_f]$  wiedergegeben, wobei der Roboter sich nach dem Zeitpunkt  $t_1$  allerdings bereits auf einer der Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_1^g(t)$  befindet.

### 10.6.1 Solltrajektorien im Arbeitsraum

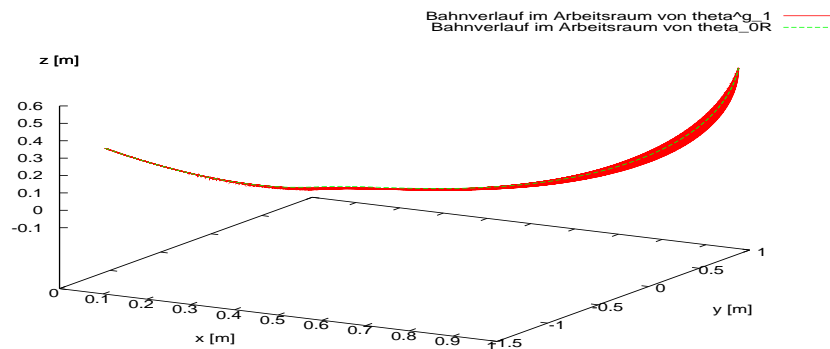


Abbildung 10.32: Szenario 5 - Solltrajektorien im Arbeitsraum zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Das Abzweigen der geschätzten Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_1^g$  ist deutlich zu erkennen. Alle Referenztrajektorien laufen an der vorgegebenen Endposition gemäß (6.3) wieder zusammen (Siehe Abbildung 10.32).

<sup>2</sup>Erwartungswert  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$ ,  $\sigma_0 = 2.5 \text{ kg}$

### 10.6.2 Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile

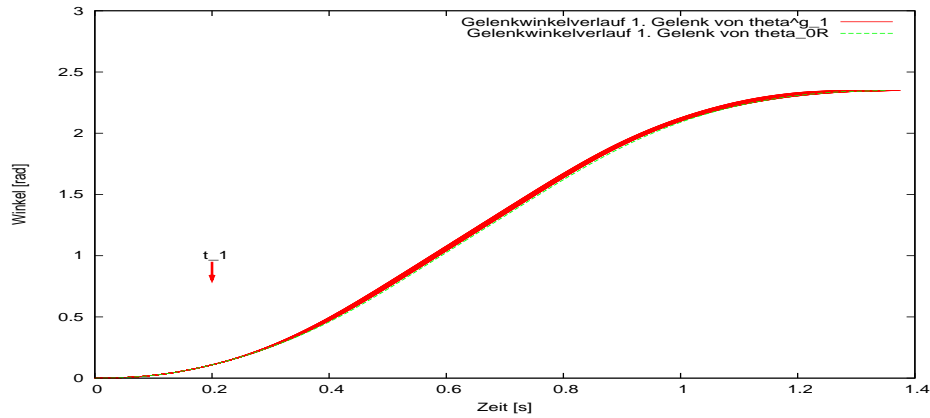


Abbildung 10.33: Szenario 5 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{10R}$  und  $\bar{\theta}_{11}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

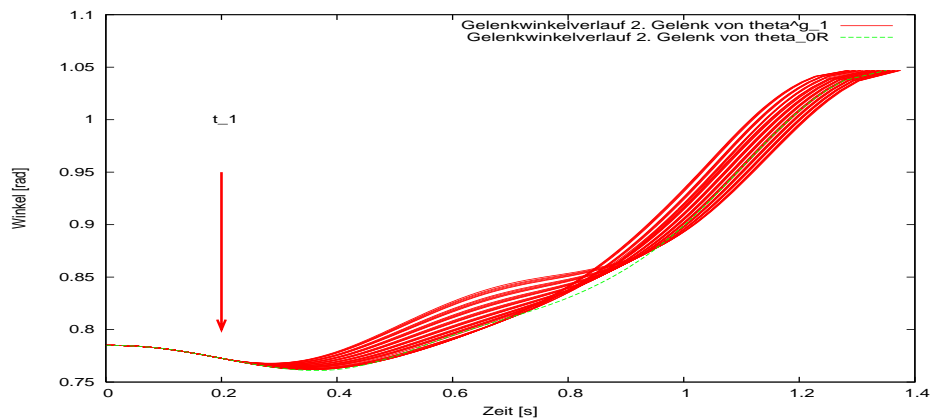


Abbildung 10.34: Szenario 5 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{20R}$  und  $\bar{\theta}_{21}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

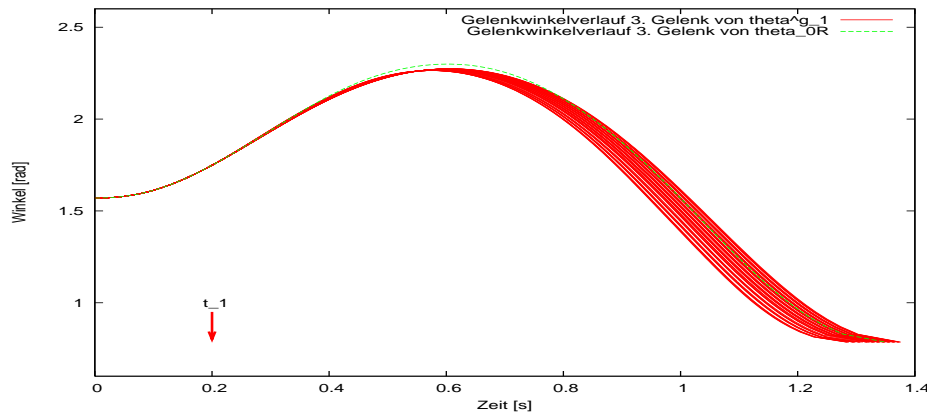


Abbildung 10.35: Szenario 5 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{30R}$  und  $\bar{\theta}_{31}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Die Führungsfunktionen  $\bar{\theta}_{10R}$ ,  $\bar{\theta}_{20R}$  und  $\bar{\theta}_{30R}$  sowie  $\bar{\theta}_{11}^g$ ,  $\bar{\theta}_{21}^g$  und  $\bar{\theta}_{31}^g$  (Siehe Abbildungen 10.33, 10.34 und 10.35) halten die Anfangs- und Endbedingungen (6.2) und (6.3) sowie die Ungleichungsnebenbedingungen (6.6) ein.

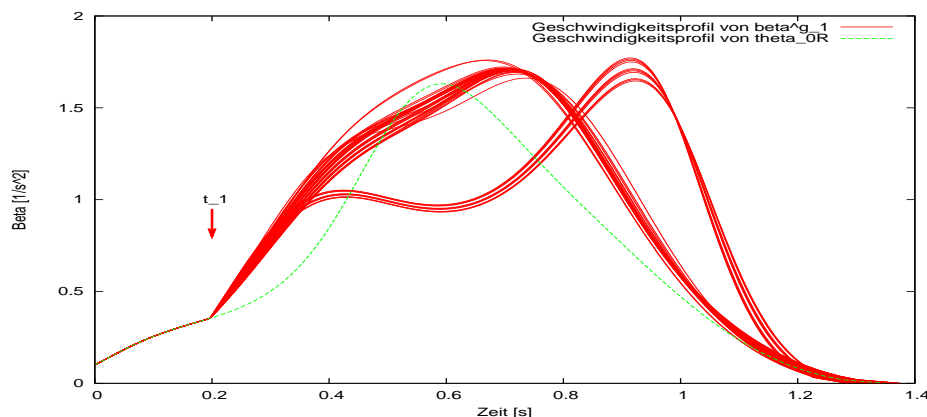


Abbildung 10.36: Szenario 5 - Verläufe des Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_1^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Das Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_{0R}$  weist den vorgegebenen Startwert  $0.1 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  und den vorgegebenen Endwert  $0.0 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  auf (Siehe Abbildung 10.36). Die Geschwindigkeitsprofile  $\bar{\beta}_1^g$  zweigen an der Stelle  $t_1 = 0.20 \text{ sec}$  vom Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_{0R}$  der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}$  ab und erreichen den vorgegebenen Endwert 0.0.

### 10.6.3 Aufintegrierter Gesamtregelungsaufwand

Die Abbildungen 10.37 und 10.38 zeigen den Regelungsaufwand für vier verschiedene Fälle, wobei die Abbildung 10.37 den zeitlichen Verlauf und die Abbildung 10.38 den Wert am Endpunkt  $t_f$  wiedergibt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.73% liegt die realisierte Nutzlast  $m$  im Intervall  $[\bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1; \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1]$ . Daher werden neben dem günstigsten Fall  $m = \bar{m}_1$  (Fall 2), auch die ungünstigsten Fälle  $m = \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1$  (Fall 3) und  $m = \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1$  (Fall 4) betrachtet.



- Fall 1:  
Am Zeitpunkt  $t_1$  wird nicht auf eine besser angepaßte Trajektorie übergegangen, sondern die bisherige beibehalten. Abbildung 10.37 gibt daher  $\mathcal{R}_{ge}\left(t, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0)\right)$  und Abbildung 10.38  $\mathcal{R}_{ge}\left(t_f, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0)\right)$  an.
- Fall 2:  
Am Zeitpunkt  $t_1$  wird auf eine besser angepaßte Trajektorie übergegangen. Der Mittelwert  $\bar{m}_1$  gibt die Nutzlastmasse korrekt wieder, d.h.  $\bar{m}_1 = m$ . Abbildung 10.37 gibt daher  $\mathcal{R}_{ge}\left(t, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0) \rightarrow \bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1 = m, \sigma_1)\right)$  und Abbildung 10.38  $\mathcal{R}_{ge}\left(t_f, m, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0) \rightarrow \bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1 = m, \sigma_1)\right)$  an.
- Fall 3:  
Die Nutzlastmasse hat den Wert  $m = \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1$ , d.h. der Mittelwert  $\bar{m}_1$  gibt die Nutzlastmasse nicht korrekt wieder. Abbildung 10.37 gibt daher  $\mathcal{R}_{ge}\left(t, m = \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0) \rightarrow \bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1, \sigma_1)\right)$  und Abbildung 10.38  $\mathcal{R}_{ge}\left(t_f, m = \bar{m}_1 - 3 \cdot \sigma_1, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0) \rightarrow \bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1, \sigma_1)\right)$  an.
- Fall 4: Die Nutzlastmasse hat den Wert  $m = \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1$ , d.h. der Mittelwert  $\bar{m}_1$  gibt die Nutzlastmasse nicht korrekt wieder. Abbildung 10.37 gibt daher  $\mathcal{R}_{ge}\left(t, m = \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0) \rightarrow \bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1, \sigma_1)\right)$  und Abbildung 10.38  $\mathcal{R}_{ge}\left(t_f, m = \bar{m}_1 + 3 \cdot \sigma_1, \bar{\theta}_{0R}(\bar{m}_0, \sigma_0) \rightarrow \bar{\theta}_1^g(\bar{m}_1, \sigma_1)\right)$  an.

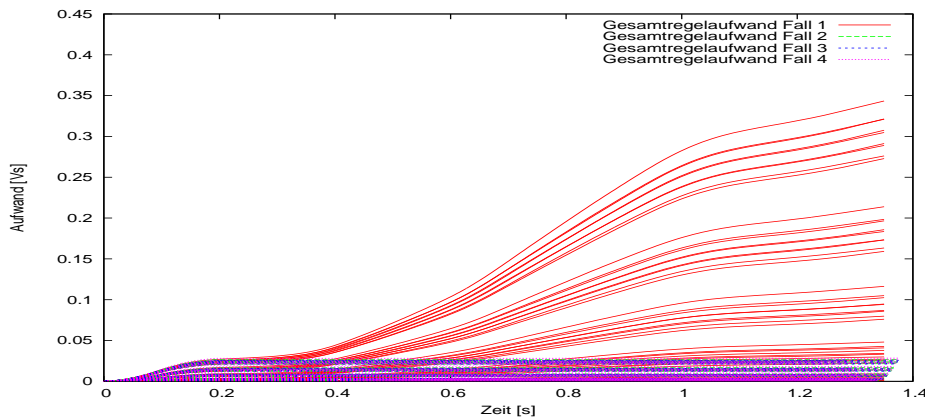


Abbildung 10.37: Szenario 5 - Aufintegrierter Gesamtregelungsaufwandes der Gelenke 1 bis 3 über der Zeit  $t$  mit der Nutzlast  $m$  als Parameter

Durch die präzise Schätzung der Nutzlastmasse und den Übergang auf eine damit approximierten Trajektorie am Zeitpunkt  $t_1 = 0,2 \text{ sec}$  liegen die Abweichungen und die Zunahme des Gesamtregelungsaufwandes der Fälle 2, 3 und 4 nach dem Korrekturzeitpunkt  $t_1$  unterhalb der Genauigkeit des Runge-Kutta-Integrators. Daher erscheinen die Kurven der Fälle 2, 3 und 4 in der Abbildung 10.37 ab dem Zeitpunkt  $t_1$  wie Parallelen zur x-Achse.

Da die Zunahme des Gesamtregelungsaufwandes der Fälle 2, 3 und 4 nach dem Korrekturzeitpunkt  $t_1$  unterhalb der Genauigkeit des Runge-Kutta-Integrators liegt, weist die Abbildung 10.38 für den günstigsten Fall  $\bar{m}_1 = m$  (Fall 2) und die beiden ungünstigsten Fälle  $m = \bar{m}_1 \pm 3 \cdot \sigma_1$  (Fall 3 und 4) keinen Unterschied aus (Siehe flache Parabel in Abb. 10.38).

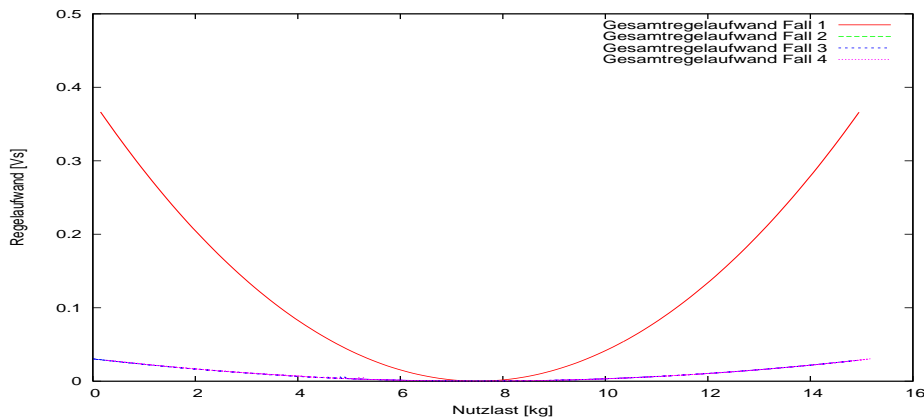


Abbildung 10.38: Szenario 5 - Summe des aufintegrierten Regelungsaufwandes der Gelenke 1 bis 3 über der Nutzlast  $m$  am Endzeitpunkt  $t_f$  für die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}$  sowie für die neue Trajektorie; die neue Trajektorie besteht aus dem geometrischen Pfad  $\bar{\theta}_1^g$  und dem Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_1^g$ . Der geometrische Pfad  $\bar{\theta}_1^g$  und das Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_1^g$  ergeben sich durch Einsetzen des Koeffizientenvektors  $\gamma^g$  in (8.67). Die Komponenten des Koeffizientenvektors  $\gamma^g$  erhält man in Abhängigkeit vom Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) aus (9.30) bzw. (9.31) sowie (8.64) bis (8.66).

Die rote Parabel in Abb. 10.38 zeigt den Gesamtregelungsaufwand der mit abweichenden Nutzlasten konfrontierten Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}$  am Zeitpunkt  $t_f$ .

## 10.7 Beispiele für Szenario 6 (Änderung des Endpunktes am Zeitpunkt $t_1$ )

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Endgelenkwinkelstellung  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$ . Es werden nur solche  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$  behandelt, die außerhalb von Singularitätsintervallen liegen.

Die folgenden Abbildungen enthalten die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}(t)$ <sup>3</sup> sowie die neuen Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{1N}^g(t)$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28). Die Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{1N}^g(t)$  beginnen am Schaltpunkt  $t_1 = 0.20 \text{ sec}$ . Sie zweigen dort von der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}(t)$  ab und laufen auf den jeweiligen neuen Endpunkt zu. Zu Vergleichszwecken wird die Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}(t)$  auch im Intervall  $[t_1, t_f]$  wiedergegeben. Da am Zeitpunkt  $t_1$  statt eines neuen Erwartungswertes und einer neuen Standardabweichung ein neuer Endpunkt vorgegeben wird, entfällt die Betrachtung der Reduzierung des Regelungsaufwandes.

### 10.7.1 Solltrajektorien im Arbeitsraum

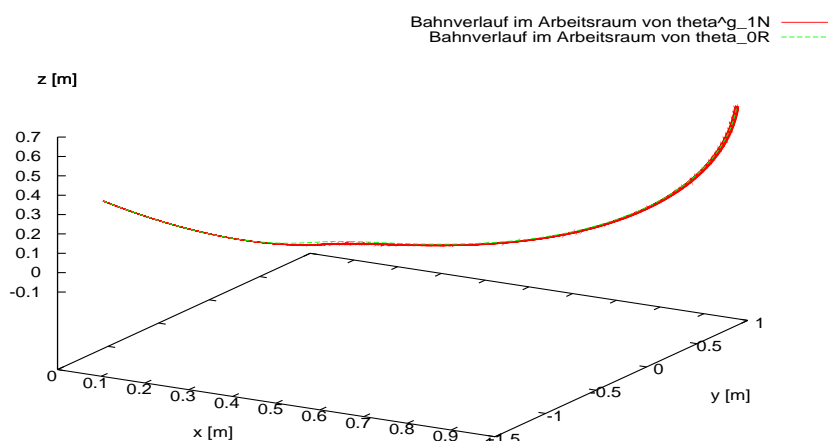


Abbildung 10.39: Szenario 6 - Solltrajektorien im Arbeitsraum zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Das Abzweigen der Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{1N}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) ist deutlich zu erkennen. Da alle Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{1N}^g$  einen anderen Endpunkt besitzen, entfernen sie sich zunehmend voneinander und fächern sich leicht auf (Siehe Abbildung 10.39).

<sup>3</sup>Erwartungswert  $\bar{m}_0 = 7.5 \text{ kg}$ ,  $\sigma_0 = 2.5 \text{ kg}$

### 10.7.2 Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile

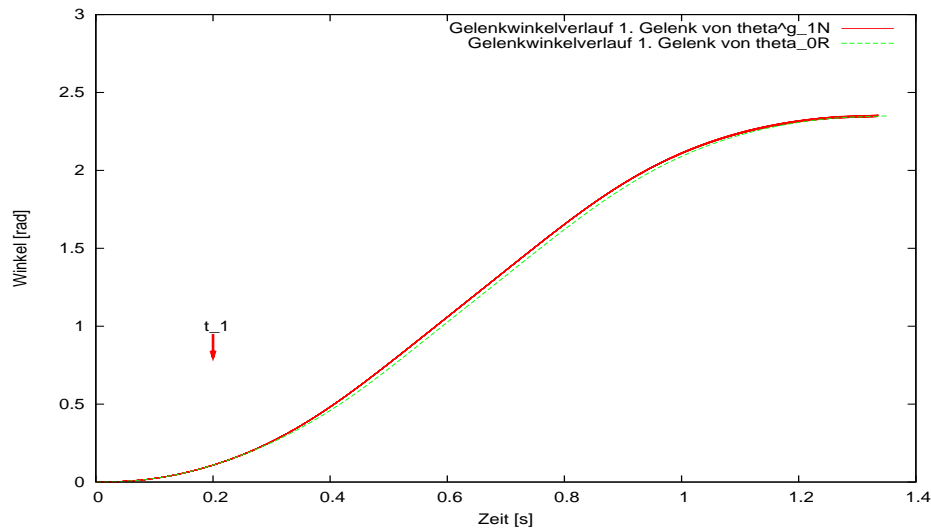


Abbildung 10.40: Szenario 6 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{11N}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

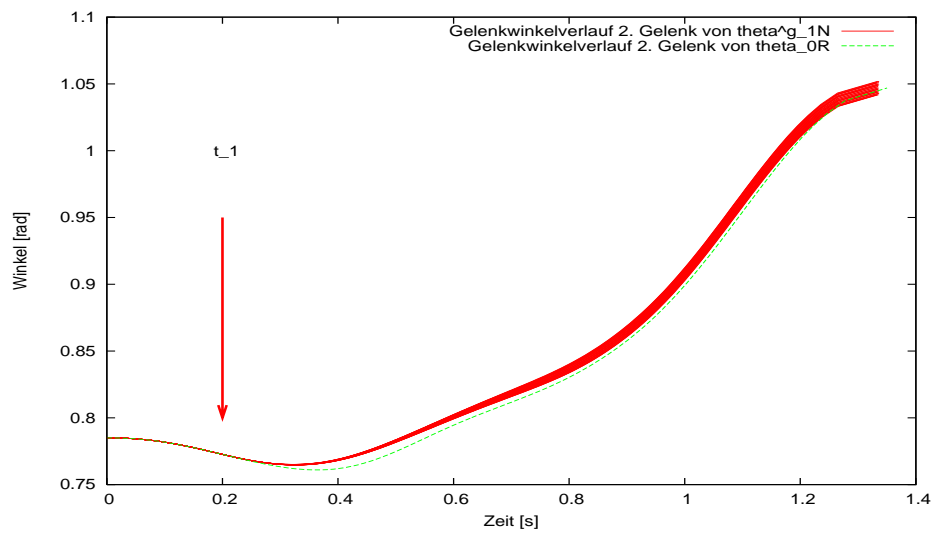


Abbildung 10.41: Szenario 6 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{21N}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

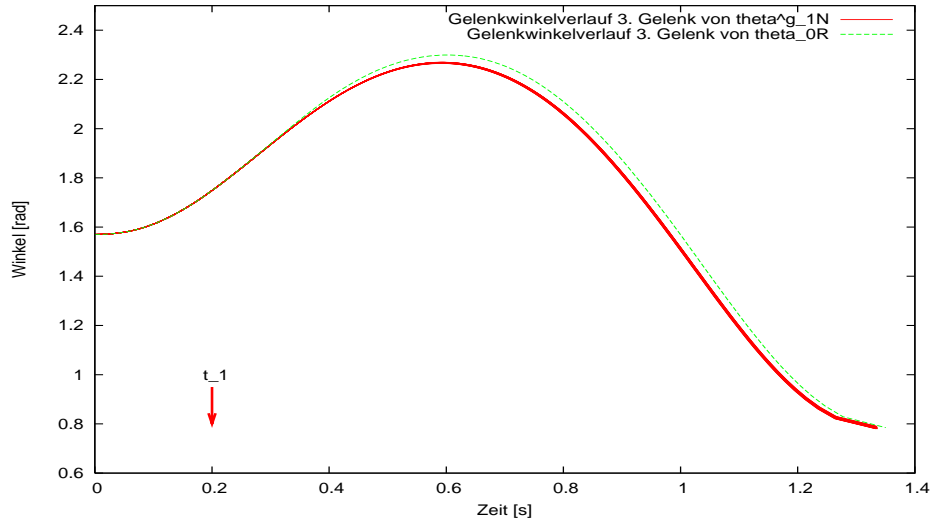


Abbildung 10.42: Szenario 6 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{3_{1N}}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Die Führungsfunktionen  $\bar{\theta}_{1_{0R}}$ ,  $\bar{\theta}_{2_{0R}}$  und  $\bar{\theta}_{3_{0R}}$  sowie  $\bar{\theta}_{1_{1N}}^g$ ,  $\bar{\theta}_{2_{1N}}^g$  und  $\bar{\theta}_{3_{1N}}^g$  halten die Anfangs- und Endbedingungen (6.2) und (6.3) (Siehe Abbildungen 10.40, 10.41 und 10.42) sowie die Ungleichungsnebenbedingungen (6.6) ein.

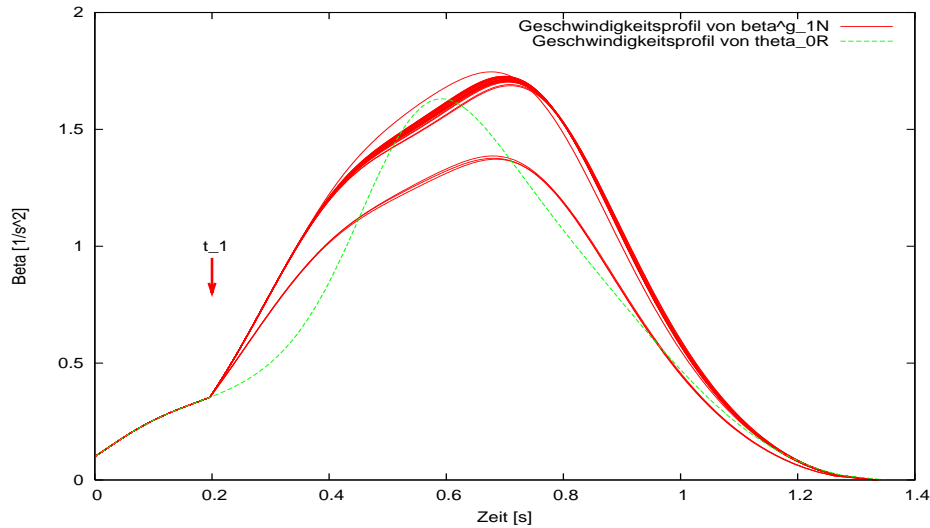


Abbildung 10.43: Szenario 6 - Verläufe des Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_{1_{1N}}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Das Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_{0R}$  weist den vorgegebenen Startwert  $0.1 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  und den vorgegebenen Endwert  $0.0 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  auf. Die Geschwindigkeitsprofile  $\bar{\beta}_{1_{1N}}^g$  zweigen an der Stelle  $t_1 = 0.20 \text{ sec}$  vom Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_{0R}$  der Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0R}$  ab und erreichen den vorgegebenen Endwert 0.0 (Siehe Abbildung 10.43).

## 10.8 Beispiele für Szenario 7 (Änderung des Endpunktes am Zeitpunkt $t_0$ )

Veränderlich in diesem Abschnitt sind die Parameter Endgelenkwinkelstellung  $\theta_{1f}$ ,  $\theta_{2f}$  und  $\theta_{3f}$ . Am Zeitpunkt  $t_0$  wird ein neuer Endpunkt vorgegeben. Das Echtzeitapproximationsverfahren stellt eine Referenztrajektorie  $\bar{\theta}_{0N}^g$  zu den  $\gamma_g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) bereit, die zu einem neuen Endpunkt führt.

Da am Zeitpunkt  $t_0$  statt eines neuen Erwartungswertes und einer neuen Standardabweichung ein neuer Endpunkt vorgegeben wird, entfällt die Betrachtung der Reduzierung des Regelungsaufwandes.

### 10.8.1 Solltrajektorien im Arbeitsraum

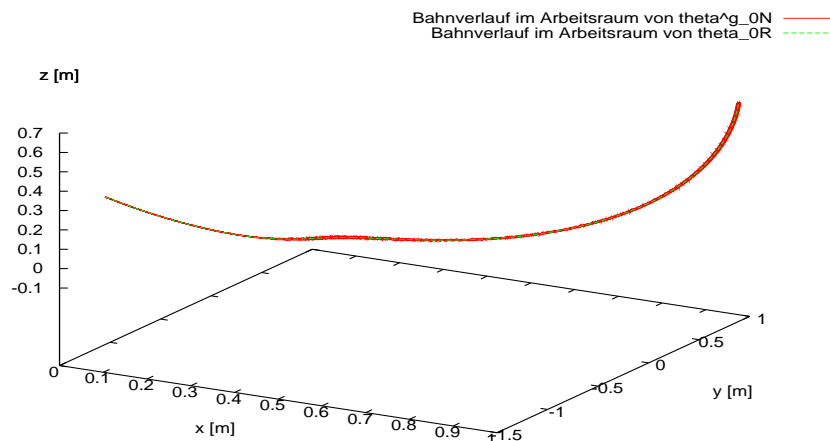


Abbildung 10.44: Szenario 7 - Solltrajektorien im Arbeitsraum zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Alle Referenztrajektorien zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) beginnen am einheitlichen Anfangspunkt und enden in ihren jeweiligen, voneinander verschiedenen Endpunkten, so wie es die Gleichungsnebenbedingungen (6.2) und (6.3) verlangen. Da alle Referenztrajektorien  $\bar{\theta}_{0N}^g$  einen anderen Endpunkt besitzen, entfernen sie sich zunehmend voneinander und fächern sich leicht auf (Siehe Abbildung 10.44).

### 10.8.2 Geometrische Pfade und Geschwindigkeitsprofile

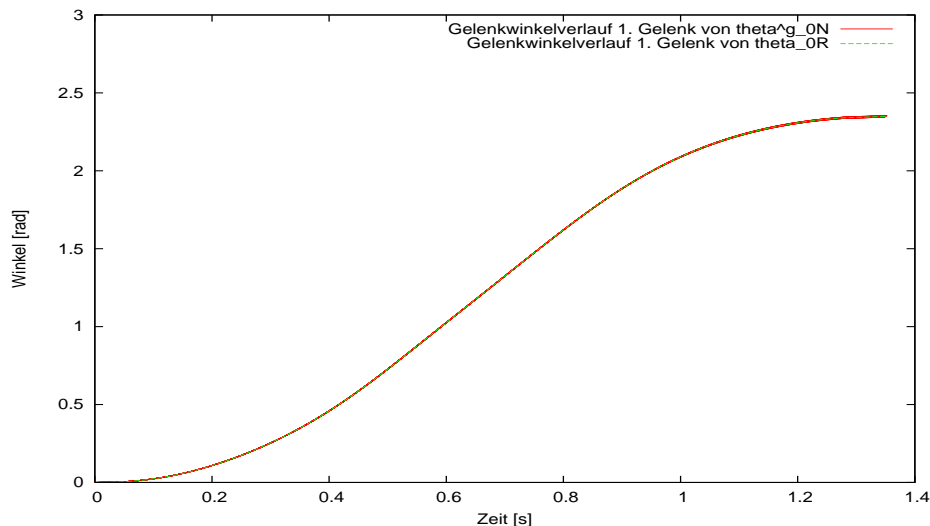


Abbildung 10.45: Szenario 7 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{10N}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

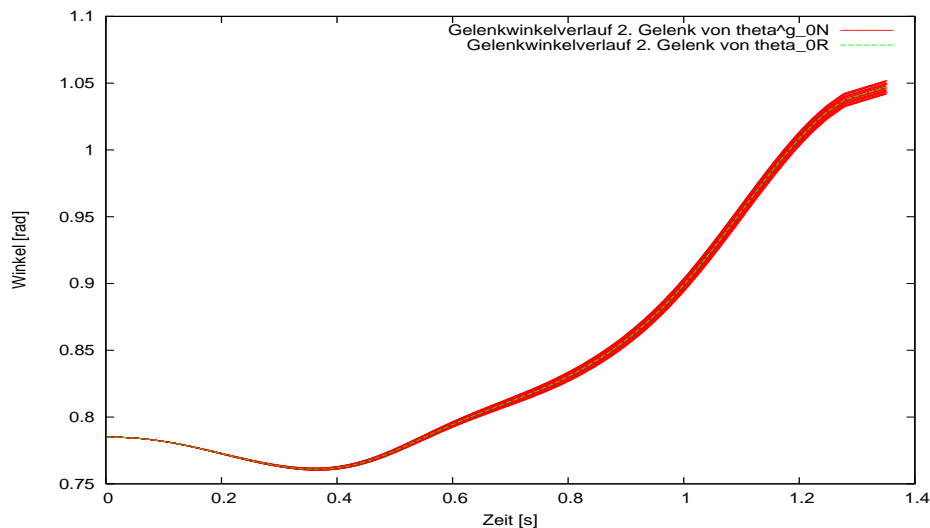


Abbildung 10.46: Szenario 7 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{20N}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Die Führungsfunktionen  $\bar{\theta}_{10N}^g$ ,  $\bar{\theta}_{20N}^g$ ,  $\bar{\theta}_{30N}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28) halten die Anfangs- und Endbedingungen (6.2) und (6.3) (Siehe Abbildungen 10.45, 10.46 und 10.47) sowie die Ungleichungsnebenbedingungen (6.6) ein. D.h. alle Führungsfunktionen beginnen an demselben Anfangspunkt und enden an unterschiedlichen Endpunkten.

Alle Geschwindigkeitsprofile weisen den vorgegebenen Startwert  $0.1 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  und den vorgegebenen

10.8. BEISPIELE FÜR SZENARIO 7 (ÄNDERUNG DES ENDPUNKTES AM ZEITPUNKT  $T_0$ ) 239

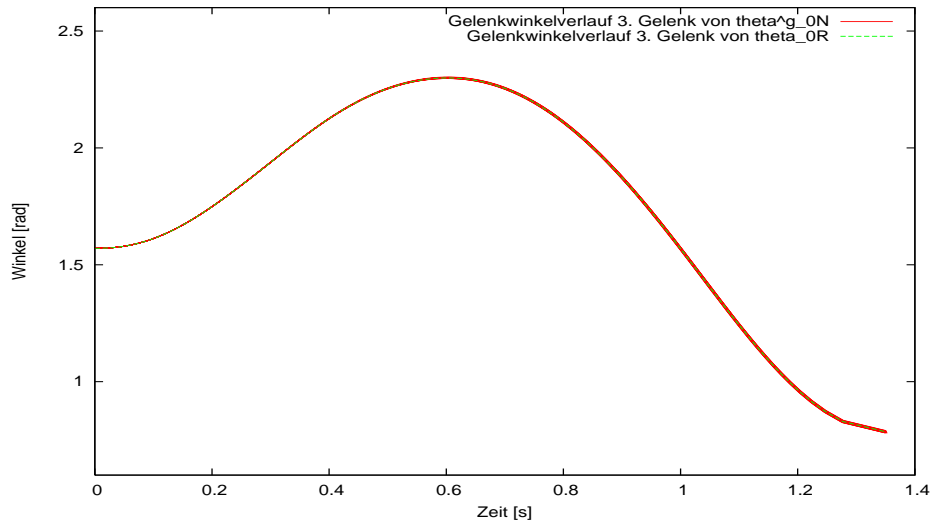


Abbildung 10.47: Szenario 7 - Sollverläufe des Gelenkwinkels  $\bar{\theta}_{30N}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

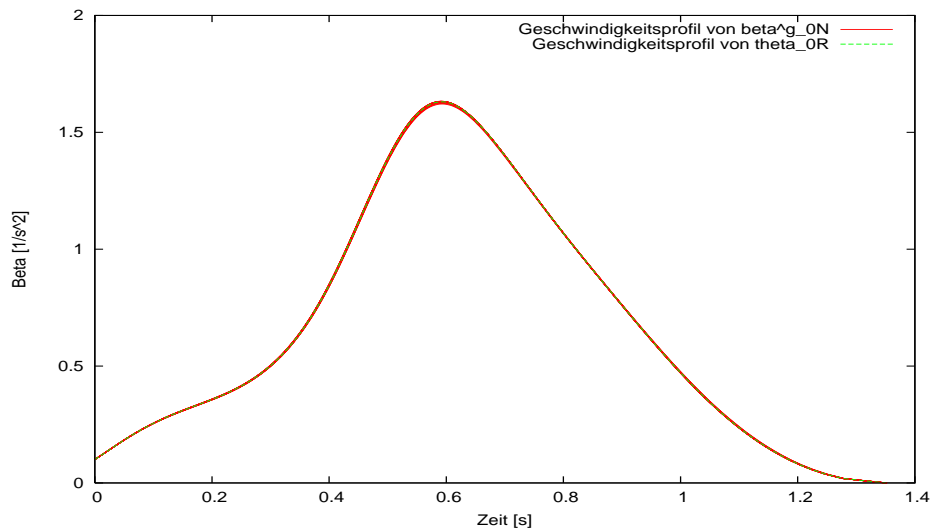


Abbildung 10.48: Szenario 7 - Verläufe des Geschwindigkeitsprofil  $\bar{\beta}_{0N}^g$  zu den  $\gamma^g$ -Werten an den Gitterpunkten gemäß Entscheidungskriterium (8.27) und (8.28)

Endwert  $0.0 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right]$  auf (Siehe Abbildung 10.48). Ferner bewegen sich die Funktionen  $\bar{\beta}_{0N}^g$  wie gefordert ausschließlich im positiven Bereich.



# Kapitel 11

## Abschließende Betrachtungen

### 11.1 Automatisierter Fluggepäckumschlag mit optimalen Trajektorien

Das am Eincheckschalter ermittelte Gewicht ist, wie eingangs beschrieben, im Gewichtsfeld des EDV-Datenfeldes *Baggage Service Message (BSM)* gespeichert. An der Umschlagstation wird über die Tag-ID das Gepäckstück identifiziert sowie auf die BSM zugegriffen und der Wert des Gewichtsfeldes der BSM dem Steuerrechner mitgeteilt. Im **Szenario 1** ruft der Steuerrechner die zuvor für die Masse des Gepäckstückes errechnete deterministische Referenztrajektorie ab, im **Szenario 2** hingegen schätzt der Steuerrechner für jedes Gepäckstück die optimale deterministische Referenztrajektorie in Echtzeit.

Die **Szenarien 3 und 4** wenden auf alle Gepäckstücke eine robust-optimale Referenztrajektorie an. Bei der Erstellung der robust-optimale Referenztrajektorie werden der Erwartungswert und die Standardabweichung der Masse der Gepäckstücke des jeweiligen Fluges berücksichtigt. Die Gepäckstückmassen gehorchen näherungsweise einer Gaußverteilung. Mittels der sog.  $3\sigma$ -Umgebung um den Erwartungswert fließen 99.73% aller auftretenden Fälle in die Trajektorienplanung ein. Das Szenario 3 arbeitet mit einer vorab berechneten Referenztrajektorie, das Szenario 4 mit einer geschätzten. Aus allen bis zum Verladebeginn eingegangenen Gepäckstücken werden Standardabweichung und Erwartungswert errechnet. Verändern die nach Verladebeginn hinzukommenden Gepäckstücke den Erwartungswert und die Standardabweichung des Fluges schätzt Szenario 4 in Echtzeit eine neue robust-optimale Referenztrajektorie.

Das **Szenario 5** fördert zunächst jedes Gepäckstück mit einer vor Inbetriebnahme errechneten robust-optimale Referenztrajektorie, der der Erwartungswert und die Standardabweichung der jeweiligen Gepäckkategorie zugrunde liegt. Der Erwartungswert der Gepäckkategorie 3 beträgt beispielsweise  $15\text{ kg}$ , die Standardabweichung  $5\text{ kg}$ . Damit erstreckt sich die  $3\sigma$ -Umgebung von  $0\text{ kg}$  bis  $30\text{ kg}$ . Gepäck leichter als  $0\text{ kg}$  kommt nicht vor, Gepäck über  $30\text{ kg}$  fällt unter Schwergesäck und wird auch weiterhin manuell umgeschlagen. Durch Vergleich von Soll- und Isttrajektorie stellt ein Parameterschätzer einen Mittelwert und einen mittleren Fehler der Masse des gerade geförderten Gepäckstückes bereit. Mit diesen beiden Werten wird von der aktuellen Betriebsposition ausgehend am Korrekturzeitpunkt für jedes Gepäckstück eine besser angepaßte Referenztrajektorie zum Endpunkt in Echtzeit geschätzt.

#### **Szenario 6:**

Im regulären Betrieb stellt das System Kofferabtransport bis zum Korrekturzeitpunkt die freie Endposition bereit. Kommt es beim Szenario 5 zu einer Positionierungsungenauigkeit des Systems

Kofferabtransport zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$ , z.B. infolge schwankenden Hydraulikdrucks, muß der gerade im Transport befindliche Koffer zu einer abweichenden Endposition verbracht werden. Dazu wird am Korrekturzeitpunkt  $t_1$  eine robust-optimale Vorsteuerung von der aktuellen Betriebsposition zum neuen, durch ein maschinelles Sichtsystem gemessenen Endpunkt geschätzt. Diese Vorsteuerung arbeitet mit dem Wertepaar Erwartungswert und Standardabweichung des Szenarios 5.

#### Szenario 7:

In den Szenarien 1 bis 4 muß die freie Endposition zum Zeitpunkt  $t_0$  bereitstehen. Kommt es zu einer Positionierungsungenauigkeit des Systems Kofferabtransport, wird in Echtzeit eine robust-optimale Vorsteuerung, vom Anfangspunkt ausgehend, zum neuen Endpunkt geschätzt.

Den Vorsteuerungen des Szenarios 7 liegt das aus Statistiken bekannte Wertepaar Erwartungswert und Standardabweichung der umzuschlagenden Gepäckkategorie zugrunde.

Alle diese Referenztrajektorien

- verbinden den vorgegebenen Anfangspunkt mit dem vorgegebenen Endpunkt,
- weisen am Anfangs- und Endpunkt die vorgegebenen Geschwindigkeiten auf,
- halten die zulässigen Gelenkwinkelstellungen und -geschwindigkeiten ein und
- überschreiten nicht die maximal bzw. minimal zulässigen Antriebsmomente
  - in den Szenarien 1 und 2 mit 100% Wahrscheinlichkeit und
  - in den Szenarien 3 bis 7 mit 99.73% Wahrscheinlichkeit.

Die Szenarien und die dazugehörigen Referenztrajektorien unterscheiden sich hinsichtlich der Regelaufwandsersparnis jedoch erheblich.

Die Eincheckschalter und Umschlagstationen<sup>1</sup> sind an allen Flughäfen funktionsgleich:

Alle Passagierflughäfen arbeiten nach den Vorgaben der IATA. Die Rechner der Eincheckschalter sind an das Intranet des Flughafens angeschlossen und nehmen über das Gateway des Flughafen-Intranets Verbindung mit dem Rechenzentrum (z.B. bei Lufthansa in Köln) der Luftfahrtgesellschaft auf, deren Flug gerade abgefertigt wird. Die Rechner der Eincheckschalter senden die Passagier- und Gepäckdaten an das Rechenzentrum der Luftfahrtgesellschaft. Dieses erstellt die ein-eindeutige Tag-ID sowie die zugehörige Baggage Service Message (BSM) und schickt beides an den Rechner des sendenden Eincheckschalters zurück, der dann den Gepäckaufkleber ausdruckt. Die Tag-ID ist als Strichcode auf dem Gepäckaufkleber vorhanden. Die Rechner der Umsteige- und Zielflughäfen erhalten Exemplare der Tag-ID und BSM. Über den mittels Laserscannerbrücke auslesbaren Strichcode des Gepäckaufklebers identifizieren die Start-, Umsteige- und Zielflughäfen das Gepäckstück eindeutig und greifen über ihr Intranet auf die zugehörige BSM zu. Um die anfallenden Datenströme zu bewältigen, verfügt jeder Flughafen über ein ausgebauten Intranet.

Unterschiede weisen hingegen die Anlagen auf, die das Gepäck von den Eincheckschaltern zu den Verladestationen bringen:

- Hier findet zum einen die dezentrale Methode (Siehe Abbildung 11.1) Anwendung, z.B. in Berlin-Tegel oder im Kölner Terminal I:  
Jedem Gate sind ein Eincheckschalter und eine Umschlagstation zugeordnet. Das Gepäck geht direkt vom Eincheckschalter zur Umschlagstation, da nur ein Förderband zwischen Eincheckschalter und Umschlagstation existiert. Es gibt keine die Eincheckschalter und Umschlagstationen untereinander verbindenden Förderbänder<sup>2</sup>. Infolgedessen kann der Flug nur durch

<sup>1</sup>Die Umschlagstationen dienen der Verladung des Gepäcks auf die Vorfeldfahrzeuge bzw. in die Frachtcontainer.

<sup>2</sup>Daher verfügen diese Flughäfen auch über keinerlei Frühgepäckspeicher.

einen Eincheckschalter terminalseitig und eine Umschlagstation flugfeldseitig, d.h. seriell, abgefertigt werden. Dieses serielle Vorgehen eignet sich aus Zeitgründen nur für Regionalflugzeuge ( $\leq 150$  Passagiere).

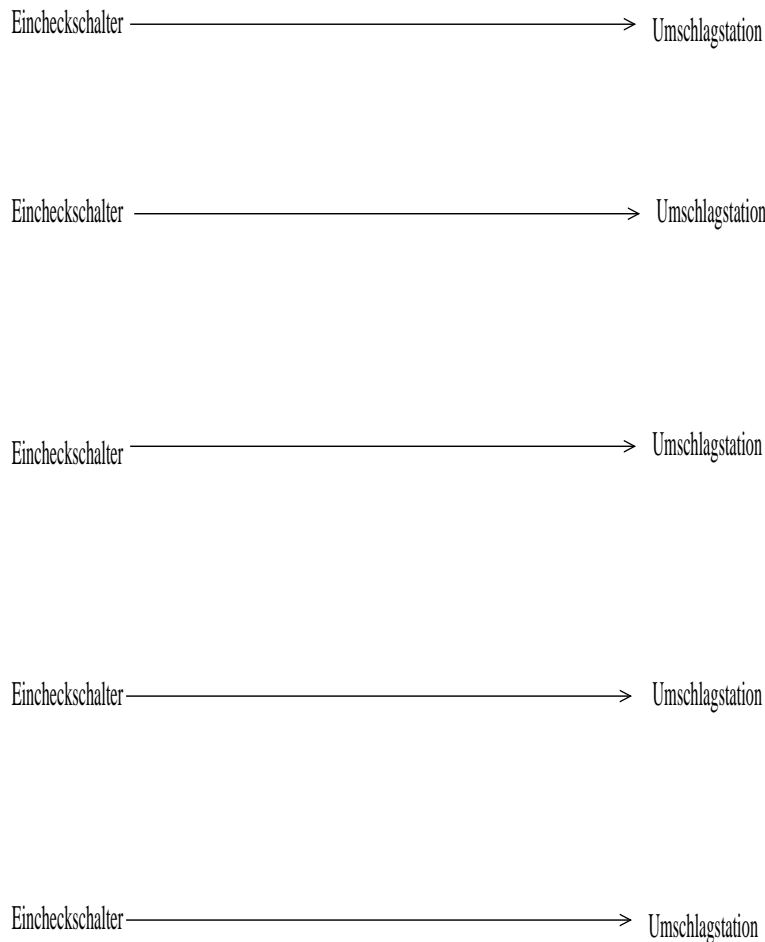


Abbildung 11.1: Dezentrale Methode

- Zum anderen wenden Flughäfen wie Frankfurt-Rhein-Main, München oder Zürich die zentrale Methode (Siehe Abbildung 11.2) an:  
Die Eincheckschalter geben das Gepäck an einen zentralen Sortierer ab. Dieser schleust das Gepäck zur jeweiligen Umschlagstation aus. Jedes Gepäckstück ist durch die ein-eindeutig zugeordnete, auf dem Aufkleber als Strichcode vermerkte Tag-ID mittels Scannerbrücke identifizierbar. Der zentrale Gepäcksortierer ermöglicht einen Flug terminalseitig durch mehrere Eincheckschalter und flugfeldseitig durch mehrere Umschlagstationen, d.h. parallel, abzufertigen. Dieses parallele Vorgehen ist bei Großraumflugzeugen wie dem A380 auch zwingend erforderlich, da die Bodenzeit sich ansonsten vervielfacht.

Für die in Kapitel 2 vorgestellten Szenarien spielt die Fördermethode des jeweiligen Flughafens keine Rolle. Die Szenarien 1 bis 7 sind so ausgelegt, daß Abänderungen der Gepäckförderanlage nur an den Umschlagstationen selbst in Form eines robotergerechten Umbaus zu erfolgen haben. Die einzelnen Szenarien unterscheiden sich jedoch hinsichtlich des Änderungsbedarfes bei der Behandlung der

### 11.1. AUTOMATISIERTER FLUGGEPÄCKUMSCHLAG MIT OPTIMALEN TRAJEKTORIEN<sup>243</sup>

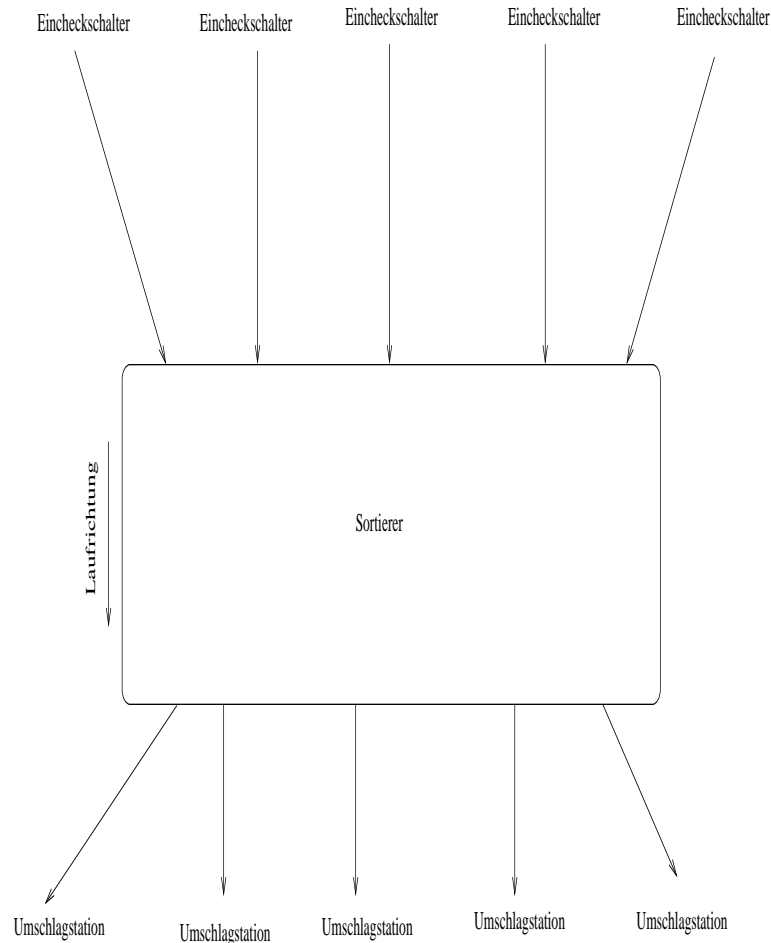


Abbildung 11.2: Zentrale Methode

Datenströme innerhalb des Intranets der Flughäfen, zwischen Umsteigeflughäfen sowie zwischen Flughäfen und den Rechenzentren der Luftfahrtgesellschaften.

Gemäß Unterabschnitt 2.4.6 ermöglichen alle seitens der Szenarien bereitgestellten Referenztrajektorien mit einem Manutec r3 eine Robotertaktzeit von 4 sec und damit den Umschlag von 15 Koffern pro Umschlagstation in der Minute.

Im **Szenario 1** errechnet OSTP für jedes Gepäckstück eine optimale deterministische Referenztrajektorie. Die die Getriebelebensdauer verkürzenden Wechsellasten infolge Regelaufwand treten somit nicht auf. Ein handelsüblicher Rechner mit 1.3 GHz-Pentium-III-Prozessor benötigt zum Errechnen einer Referenztrajektorie 30 sec. Das Szenario 1 fertigt nur Charterflüge auf Flughäfen mit Frühgepäckspeicher ab. Bei Charterflügen sind die Fluggäste bereits zwei Stunden vor Abflug anwesend. Das Gepäck lagert mindestens 90 Minuten im Frühgepäckspeicher. Somit stehen mindestens 90 Minuten zur Berechnung der Trajektorien zur Verfügung.

Die Berechnung der Referenztrajektorien kann durch einen virtuellen Großrechner vorgenommen

werden <sup>3</sup>. Das Intranet leitet die  $\gamma$ -Koeffizienten an den Steuerrechner des Roboters weiter <sup>4</sup>.

Das **Szenario 2** schätzt für jedes Gepäckstück eine optimale deterministische Referenztrajektorie unter Abstützung auf eine vorab errechnete Datenbasis. Ein handelsüblicher 1,3 GHz-Pentium III benötigt unter dem Betriebssystem S.u.S.E-Linux 8.2 <sup>5</sup> zur Schätzung einer solchen Referenztrajektorie weniger als 0.01 sec. Aufgrund der niedrigen Approximationsfehler des Schätzverfahrens ist kein Regelaufwand feststellbar.

Das Schätzen der Referenztrajektorien bewältigt ein einziger PC im Intranet des Flughafens. Ist eine Schätzung nicht möglich, da das Gewicht des Gepäcks in einem Singularitätsintervall der Datenbasis liegt, läßt der Schätzer während des ca. 3-minütigen Transportes vom Eincheckschalter zur Umschlagstation die optimale deterministische Referenztrajektorie mit OSTP durch den virtuellen Großrechner erstellen (Zeitbedarf  $\leq 30 \text{ min}$ ).

Um dem Roboter die gemäß Szenario 2 geschätzten oder gemäß Szenario 1 berechneten Koeffizienten mitteilen zu können, muß der Steuerrechner über das Intranet-Netzwerk des Flughafens ansprechbar sein, um die zugesandten  $\gamma$ -Koeffizienten verarbeiten können.

KuKa-Roboter verwenden als Steuerrechner handelsübliche Personalcomputer, die sich mittels Ethernet-Karte in das Intranet des Flughafens einbinden lassen. Die Steuerungsprogramme der Roboter erstellt dieses Unternehmen mit einer von der Siemens AG für die Roboterserie Manutec entwickelten Programmiersprache. Eine Verarbeitung von ankommenden Daten, z.B. Meßdaten,  $\gamma$ -Koeffizienten, aber auch die Einbindung eines Programmes wie OSTP, ist möglich. Die Integration eines KuKa-Roboters ins Intranet erfordert lediglich den Einbau einer handelsüblichen Ethernet-Karte und die Anwendung bereits vorhandener Software.

**Szenario 3 und 4** arbeiten mit einer auf aufeinanderfolgende Gepäckstücke angewandten robust-optimalen Referenztrajektorie. Diese wird nur dann gegen eine neue robust-optimale Referenztrajektorie ausgetauscht, wenn sich Erwartungswert und Standardabweichung des Fluges ändern. Die erzielbare Regelaufwandsersparnis ist jedoch deutlich geringer als in Szenario 1 und 2, dafür weisen die stochastisch-optimalen Trajektorien der Szenarien 3 und 4 einen geringeren Energiebedarf auf als die deterministisch-optimalen bei nur unwesentlich längerer Laufzeit.

Da die robust-optimalen Referenztrajektorien auf aufeinanderfolgende Gepäckstücke und damit mehrfach angewandt werden, ist es möglich, die  $\gamma$ -Koeffizienten von einem PC im Intranet schätzen bzw. durch einen virtuellen Großrechner mit OSTP erstellen zu lassen und diese dann manuell in den Steuerrechner des Roboters einzugeben. Damit können auch Roboter eingesetzt werden, die keine handelsüblichen Personalcomputer als Steuerrechner verwenden und sich, wenn überhaupt, nur über extra anzufertigende Hardwareschnittstellen in das Intranet einbinden lassen.

Da derzeit nur die Firma KuKa von handelsüblichen Personalcomputern gesteuerte Roboter anbietet, eröffnen Szenario 3 und 4 den Flughafenbetreibern die Möglichkeit, Roboter auch anderer Hersteller einzusetzen. Sobald für die Roboter dieser Hersteller handelsübliche Personalcomputer mit einer entsprechenden Programmiersprache marktverfügbar sind, eröffnet eine Nachrüstung der Roboter den Kunden die Möglichkeit, von Szenario 3 bzw. 4 auf ein anderes Szenario zu wechseln.

<sup>3</sup>In den heutigen hausinternen Netzwerken sind die Prozessoren der Personalcomputer im Schnitt nur zu 10% ausgelastet. Bei Verwendung des Betriebssystems Linux können diese freien Prozessorkapazitäten zu einem virtuellen parallelen Großrechner zusammengeschlossen werden. Auf diese Weise entfällt die Notwendigkeit zur Anschaffung neuer Rechner

<sup>4</sup>Auch die Verteilung des Gepäcks eines interkontinentalen A380-Fluges auf mehrere Regionalflugzeuge oder umgekehrt die Bündelung der Passagiere mehrerer Regionalflüge zu einem interkontinentalen A380-Flug führt nicht zu einer Erhöhung des Bedarfes an Rechenkapazität, sofern folgendermaßen vorgegangen wird: Die BSM weist viele ungenutzte Felder auf. In diesen lassen sich die seitens des Abflugflughafens errechneten  $\gamma$ -Koeffizienten abspeichern und stehen dann allen baugleichen Umschlagstationen an Umsteigeflughäfen zur Verfügung. Setzt ein Umsteigeflughafen einen anderen Roboter ein, so kopiert dieser Flughafen die BSM, berechnet oder schätzt während der Flugzeit für seinen Roboter optimale Referenztrajektorien und kopiert deren  $\gamma$ -Koeffizienten in die kopierte BSM.

<sup>5</sup>Das für diese Arbeit verwendete S.u.S.E-Linux 8.2 liest die Rechneruhr nur bis zu einer hundertstel Sekunde aus. Erst das seit Frühsommer 2004 verfügbare S.u.S.E-Linux 9.1 stellt auch tausendstel Sekunden bereit.

Das die Adaptive Stochastische Planung neuer Trajektorien (AOSTP) in einstufiger Form anwendende **Szenario 5** benötigt keinerlei Daten vom Eincheckschalter:

Jedes Gepäckstück wird zunächst mit einer robust-optimalen Referenztrajektorie gefördert. Durch Auswertung der Abweichungen von der Solltrajektorie liefert der Parameterschätzer einen Mittelwert und einen möglichst kleinen mittleren Fehler, mit denen die Datenbasis eine neue besser angepaßte Referenztrajektorie von der aktuellen Betriebsposition zum Endpunkt schätzt.

Nach dem Übergang auf diese neue, besser angepaßte Referenztrajektorie fällt so gut wie kein Regelungsaufwand mehr an. Da Verzögerungen des Datentransportes durch das Netzwerk zu vermeiden sind und Meßdaten vom Roboter abgegriffen werden müssen, ist jeder Steuerrechner mit einer Datenbasis und dem Parameterschätzerprogramm zu versehen. Da Datenbasis und Parameterschätzer als Subroutinen in das Steuerprogramm zu integrieren sind, ist eine Realisierung derzeit nur mit KuKa- bzw. den nicht mehr hergestellten Manutec-Robotern möglich.

Die **Szenarien 6 und 7** kommen nur dann zum Einsatz, wenn das System Kofferabtransport eine Positionsungenauigkeit aufweist. Da die Szenarien 6 und 7 Daten vom Maschinellen Sichtsystem benötigen, muß auch hier ein handelsüblicher PC als Steuerrechner bereitstehen. Damit können die Szenarien 6 und 7 derzeit wiederum nur auf KuKa-Robotern zum Einsatz kommen. Eine Regelaufwandsersparnis ist nicht erzielbar.

Im Gegensatz zu den Szenarien 1 bis 5 steuern die Trajektorien der Szenarien 6 und 7 neue, infolge von Positionierungsungenauigkeiten des Systems Kofferabführung zustande gekommene Endpositionen an.

*Fazit:*

*Die Szenarien 1, 2, 5, 6 und 7 lassen sich gegenwärtig ausschließlich mit KuKa-Produkten verwirklichen; Szenarien 3 und 4 eignen sich auch für die Roboter anderer Hersteller. Da Szenario 5 keinerlei Daten vom Eincheckschalter benötigt, erfordert es keine Änderung der Datenströme und kann somit sofort umgesetzt werden.*

Sobald die IATA die Nutzung der unbefüllten Felder der BSM mit  $\gamma$ -Koeffizienten erlaubt, ist Szenario 5 durch Szenario 2 ablösbar.

Ein gleichzeitiger Betrieb von Umschlagstationen mit nach verschiedenen Szenarien arbeitenden, gegebenenfalls sogar unterschiedlichen Robotern, z.B. während Umrüstungs- und Modernisierungsphasen, ist ebenfalls möglich.

Szenarien:	Szenario 1	Szenario 2	Szenario 3	Szenario 4	Szenario 5	Szenario 6	Szenario 7
<b>Erstell. d. Traj.:</b>	berechn.	gesch.	berechn.	gesch.	gesch.	gesch.	gesch.
<b>Stufe:</b>	0-te St.	0-te St.	0-te St.	0-te St.	1-te St.	1-te St.	0-te St.
<b>Individ. Trajekt.:</b>	ja	ja	nein	nein	ab erster St.	nein	nein
<b>Ausweichstrateg.:</b>	unnötig	Sz. 1	unnötig	Sz. 3	Referenztrajek.	keine	keine
<b>Regelaufwandsersp.:</b>	–	–	$\leq 14\%$	$\leq 14\%$	–	0%	0%
<b>Herstellerbindung</b>	KuKa	KuKa	keine	keine	KuKa	KuKa	KuKa
<b>Intranet nötig:</b>	ja	ja	nein	nein	nein	ja	ja
<b>autonom:</b>	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein
<b>Anfangspos.:</b>	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>Anfangsgeschw.:</b>	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>Endpos.:</b>	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>Endgeschw.:</b>	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>Gelenkwinkelrest.:</b>	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>Winkelgeschw.-rest.:</b>	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<b>Antriebsrestr.:</b>	100%	100%	99.73%	99.73%	99.73%	99.73%	99.73%
<b>Laufzeit [s]:</b>	1.349	1.349	1.350	1.350	1.334	1.334	1.35
<b>Energie <math>[(Nm)^2sec]</math>:</b>	8.691	8.691	8.720	8.720	8.784	8.821	8.72
<b>Zielfkt.-Wert:</b>	2.084	2.084	2.088	2.088	2.080	2.083	2.088

Tabelle 11.1: Wesentliche Eigenschaften der Szenarien und ihrer Referenztrajektorien; die Restriktionen für Anfangsposition und -geschwindigkeit, Endposition und -geschwindigkeit sowie Gelenkwinkel- und Winkelgeschwindigkeitsrestriktionen werden in allen Szenarien mit einer Wahrscheinlichkeit von 100% eingehalten, die Antriebsrestriktionen in den Szenarien 1 und 2 ebenfalls mit einer Wahrscheinlichkeit von 100% und in den Szenarien 3 bis 7 mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.73%. Den Angaben der Tabelle liegt der Roboter Manutec r3 zugrunde.





Investitionsrisiko. Ferner ist bei Inbetriebnahme des neuen Sortierers bereits mit den Planungen für den Bau der nächsten Anlage zu beginnen, die dann 10 Jahre später (hier 2015) in Betrieb geht.

- Erhöhung des Durchsatzes der vorhandenen Umschlagstationen:  
Die derzeit in Entwicklung befindlichen Gepäckroboter verdreifachen gemäß Abbildung 2.29 den Durchsatz der bislang noch mit Menschen betriebenen Umschlagstationen, Roboter mit optimalen Trajektorien steigern den Durchsatz sogar um das neunfache. Da die Umrüstung einer Umschlagstation von manuellem auf Roboterbetrieb in verkehrsarmen Zeiten, z.B. nachts erfolgen kann, ist es möglich, die Kapazität der vorhandenen Anlage sukzessive durch den Umbau einzelner Umschlagstationen, d.h. in kleinen Stufen vorzunehmen. Der Planungs- und Realisierungszeitraum schrumpft von ca. 10 Jahren auf ca. ein Jahr zusammen. Der stufenweise Ausbau bewirkt ferner das Entstehen von viel kleineren Überkapazitäten und verkürzt den Zeitraum bis zur Ausschöpfung der neu hinzugewonnenen Kapazität signifikant. Tritt die vorhergesagte Steigerung des Luftverkehrs nicht ein, lassen sich die überflüssig gewordenen Roboter einfach wieder verkaufen. Roboter mit nicht-optimalen Trajektorien ermöglichen den Betrieb der bisherigen Gepäckförderanlagen bis zum Jahr 2025, da diese eine Verdreifachung des Durchsatzes pro Umschlagstation bewirken. Steigt nach 2025 der Luftverkehr weiter, kann eine Erweiterung der Gepäckförderanlage vermieden werden, indem Roboter mit optimalen Trajektorien eingesetzt werden, da sich hierdurch eine nochmalige Verdreifachung des Durchsatzes pro Umschlagstation bzw. eine Verneunfachung gegenüber den heutigen manuellen Umschlagstationen erreichen läßt. Schafft man von vornherein Roboter mit optimalen Trajektorien an, verdreifacht sich der Zeitraum zwischen der Umrüstung einzelner Umschlagstationen. Man muß also bis 2025 nur ein Drittel der sonst benötigten Roboter anschaffen.

Derzeit wird weltweit auch der Neubau von Flughäfen geplant, so z.B. in Berlin-Schönefeld. Roboter ermöglichen bei Neubauprojekten, die Anzahl der Umschlagstationen drastisch zu reduzieren, also um den Faktor drei bei Robotern mit nicht-optimalen Trajektorien bzw. den Faktor neun bei Verwendung optimaler Trajektorien. Somit kann der Sortierer und das ihn umgebende Gebäude im gleichen Maß schrumpfen, wodurch die Bau- und anschließenden Betriebskosten signifikant sinken.

Derzeit wird mit dem Umschlag in die Gepäckcontainer bzw. auf die Vorfeldfahrzeuge 30 *min* vor Abflug begonnen (Siehe Abbildung 11.4); 25 *min* vor Abflug verlassen die ersten Gepäckcontainer bzw. Vorfeldfahrzeuge das Terminal und treffen 20 *min* vor Abflug am Flugzeug ein. Es folgen drei weitere Transporte, die das Terminal 20 *min*, 15 *min* bzw. 10 *min* vor Abflug verlassen und 15 *min*, 10 *min* und 5 *min* vor Abflug am Flugzeug eintreffen. Das Beladen des Flugzeuges beginnt 20 *min* vor Abflug. Das manuelle durchgeführte Beladen des Flugzeuges läßt sich nicht beschleunigen. Dazu müßte die Anzahl der Ladetore des Flugzeuges erhöht werden. Für die Abfertigung eines 600 Passagiere fassenden Airbus 380 benötigt man etwa 18 Umschlagstationen, da ein Arbeiter etwa 90 Koffer pro Stunde bewältigt, d.h. in den zur Verfügung stehenden 20 *min* also etwa 30 Gepäckstücke. Setzt man an den Umschlagstationen Roboter mit nicht-optimalen Trajektorien ein, sinkt die Anzahl der benötigten Umschlagstationen auf 6 ab; bei Verwendung optimaler Trajektorie sind nur noch 2 Umschlagstationen vonnöten. Reduziert man die Anzahl der Umschlagstationen nicht, verkürzt sich die Umschlagzeit auf ein Drittel, d.h. 6 *min* : 40 *Sekunden*; bei Verwendung nicht-optimaler Trajektorien; im Falle optimaler Trajektorien sogar auf ein Neuntel, d.h. auf 2 *min* : 13 *Sekunden*. Allerdings kommt es nun zur Überlappung der abgehenden Transporte zum Flugzeug, so daß es auf dem Vorfeld zu Wartezeiten für die Rollfeldfahrzeuge kommt.

Daher ist entweder die Anzahl der Umschlagstationen zu reduzieren oder die Umschlagzeit in vier gleiche Zeitscheiben mit einem Abstand von 5 *min* aufzuteilen (Siehe Abbildung 11.5). Im Falle von Robotern mit nicht-optimalen Trajektorien beträgt die Dauer jeder einzelnen Zeitscheibe 1 *min* : 40 *Sekunden*, bei Robotern mit optimalen Trajektorien 33 *Sekunden*. In den Pausen arbeiten die Roboter andere Flüge ab.

## 11.2. WIRTSCHAFTLICHER NUTZEN DES AUTOMATISIERTEN GEPÄCKUMSCHLAGES<sup>249</sup>

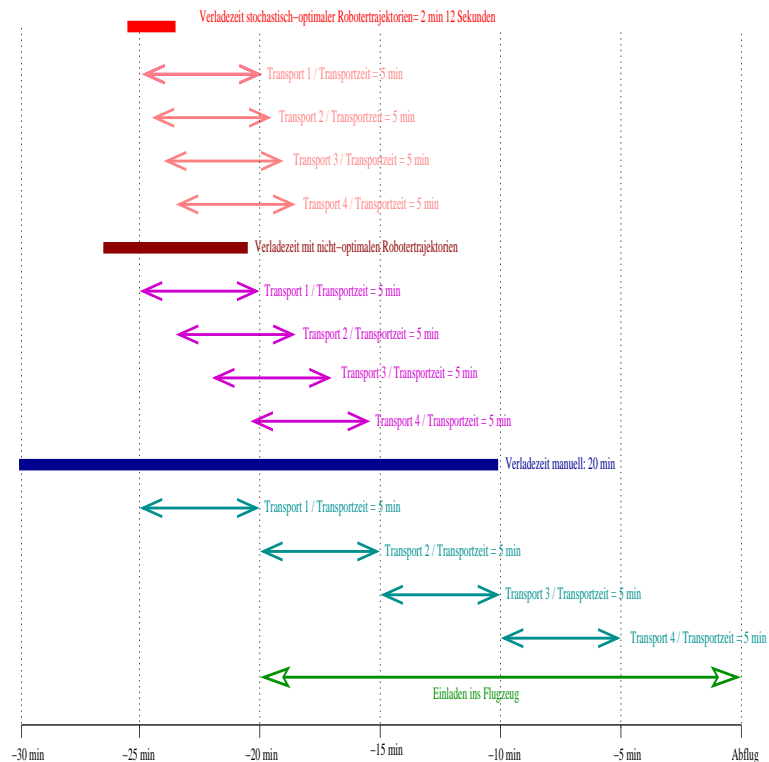


Abbildung 11.4: Verladezeiten Roboter mit stochastisch-optimalen Trajektorien und nicht-optimalen Trajektorien sowie manuell; die mit *Transport 1 bis 4* bezeichneten Doppelpfeile geben den Start- und Endzeitpunkt sowie die Fahrdauer der Vorfeldfahrzeuge von der Umschlagstation im Terminal zum Flugzeug an.

Die einzelnen Szenarien unterscheiden sich hinsichtlich

- Anschaffungskosten,
- Integrationskosten und
- Instandhaltungskosten.

In der Grafik sind die Anschaffungs-, Integrations- und Instandhaltungskosten nach drei Kategorie bewertet:

- hoch,
- mittel und
- niedrig.

Wie aus Grafik 11.6 ersichtlich weisen die Szenarien 1, 2, 5, 6 und 7 hohe Anschaffungskosten auf, da momentan nur Produkte der Firma KuKa zum Einsatz kommen können. Die Szenarien 3 und 4 lassen sich auch mit den Produkten anderer Hersteller realisieren. Daher sind die Anschaffungskosten der Szenarien 3 und 4 mit *mittel* bewertet.

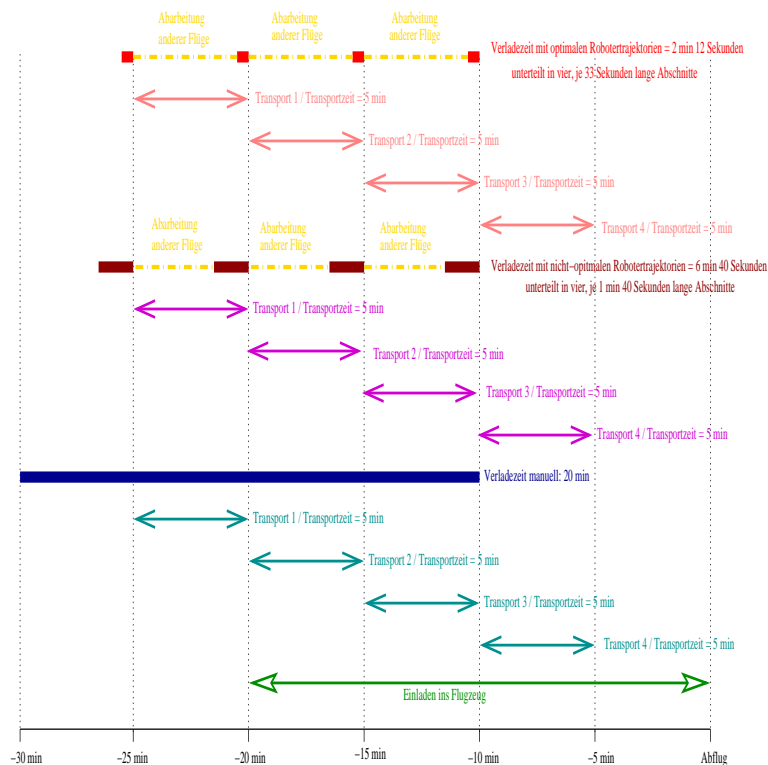


Abbildung 11.5: Verladeintervalle für Roboter mit optimalen Trajektorien und nicht-optimalen Trajektorien sowie manuell; die mit *Transport 1 bis 4* bezeichneten Doppelpfeile geben den Start- und Endzeitpunkt sowie die Fahrdauer der Vorfeldfahrzeuge von der Umschlagstation im Terminal zum Flugzeug an.

Die Integrationskosten der Szenarien 1 und 3 sind als *hoch* eingestuft, da zur Berechnung der Trajektorien Rechnerkapazität bereitgestellt werden muß. Im Falle der Szenarien 2, 4, 7 sind die Integrationskosten als *mittel* eingestuft, da die Steuerrechner der Roboter Gepäckdaten vom Flughafenintranet erhalten, jedoch seitens des Intranets im Unterschied zu den Szenarien 1 und 3 keine Trajektorien berechnet werden müssen. Diese schätzen die Steuerrechner in Echtzeit. Die Szenarien 5 und 6 kommen mit einem niedrigen Integrationsgrad aus, da diese Szenarien weder Trajektorien noch Daten aus dem Intranet beziehen.

Regelaufwand führt zu Wechsellasten der Robotergetriebe und verkürzt somit die Lebensdauer. Die Szenarien 1, 2 und 5 vermeiden Regelungsaufwand durch Verwendung von Trajektorien, die für die exakte Nutzlastmasse bzw. eine sehr gute Schätzung derselben optimiert sind. Daher sind die Instandhaltungskosten dieser Szenarien als *niedrig* bewertet. Die Szenarien 3, 4, 6 und 7 verwenden stochastisch-optimale Trajektorien. Diese reduzieren den Regelaufwand um bis zu 14%. Daher sind deren Instandhaltungskosten als *mittel* eingestuft.

11.2. WIRTSCHAFTLICHER NUTZEN DES AUTOMATISIERTEN GEPÄCKUMSCHLAGES 251

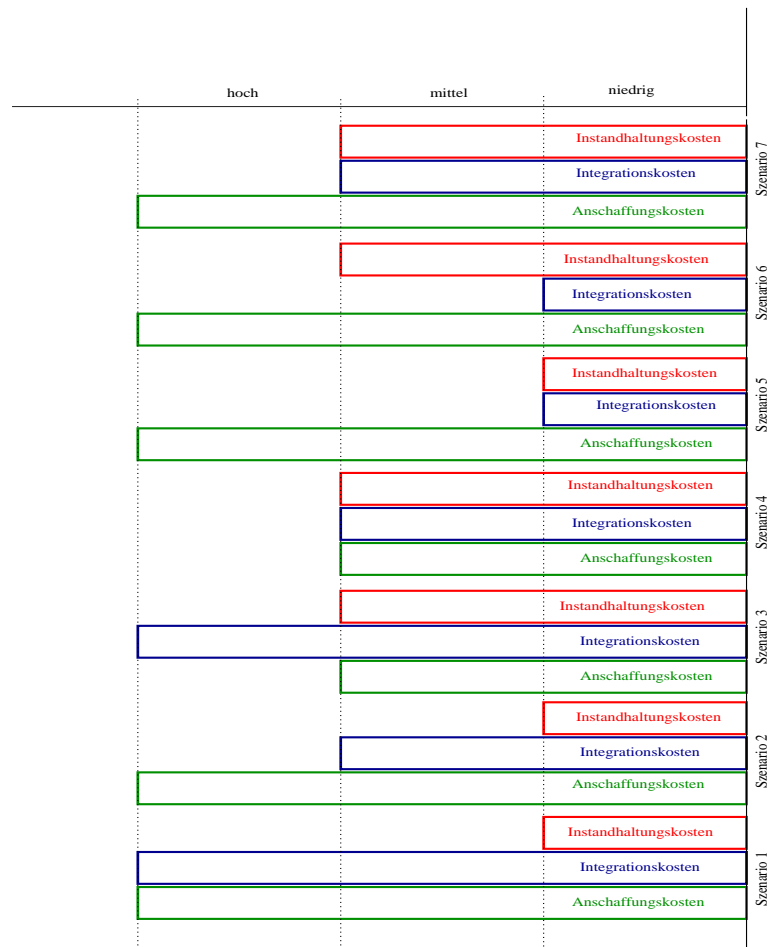


Abbildung 11.6: Anschaffungs-, Integrations- und Verladekosten im Vergleich

# Kapitel 12

## Zusammenfassung und Ausblick

### 12.1 Zusammenfassung

Ausgehend von dem Bedarf nach Automatisierung des Umschlages des abgehenden Fluggepäckes an den Umschlagstationen mittels handelsüblicher Industrieroboter werden fünf Realisierungsmöglichkeiten in Form von Szenarien untersucht.

Das Szenario 1 beinhaltet den einfachsten Fall, in dem vorausgesetzt wird, daß die exakte Masse jedes Gepäckstückes früh genug bekannt ist, so daß vor Beginn des Umschlages die jeweilige optimale Trajektorie rechnerisch bereitgestellt werden kann. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, Regelungsaufwand komplett zu vermeiden. Das Szenario erfordert jedoch die Befüllung des bislang ungenutzten Gewichtsfeldes in der Baggage Service Message (BSM) durch die den Eincheckvorgang vornehmende Luftverkehrsgesellschaft.

Im Szenario 2 werden die optimalen Trajektorien des Szenarios 1 in Echtzeit geschätzt, wodurch der Umschlag verzögerungsfrei erfolgt.

Die Szenarien 3 und 4 erfordern keine individuelle Kennzeichnung der Gepäckstücke im Gegensatz zu 1 und 2. Die Bereitstellung einer speziellen Trajektorie für jedes Gepäckstück ist ebenfalls nicht erforderlich. In Szenario 3 wird die auf alle Gepäckstücke eines Fluges anzuwendende Trajektorie für die ermittelte Verteilung errechnet, im Szenario 4 hingegen geschätzt. Ferner kann in Szenario 4 während des Verladevorganges wegen der Echtzeitfähigkeit des Approximationsverfahrens auf eine neue besser angepaßte Trajektorie umgeschaltet werden.

Das auf AOSTPC basierende Szenario 5 benötigt keinerlei Vorinformationen. Infolgedessen erfolgt der Gepäckumschlag verzugsfrei. Das Szenario benutzt eine Trajektorie, in die die Erfahrungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung von Fluggepäckstücken eingehen. Diese Trajektorie geht nach dem Anfahren des Roboters selbständig in eine für die Masse des jeweiligen Gepäckstückes in Echtzeit geschätzte optimale Trajektorie über, so daß ab dem Korrekturzeitpunkt kein bzw. nur noch ein signifikant verminderter Regelungsaufwand bis zum Erreichen der Endposition anfällt. In dieser Hinsicht sind diese neuen Trajektorien vergleichbar mit denen des Szenarios 2. Im Szenario 5 zeigt sich, daß durch die Anwendung von AOSTPC Regelaufwand nahezu vermieden werden kann, obwohl am Startpunkt die Masse des zu befördernden Gepäckstückes nur als stochastische Verteilung bekannt ist.

Die Notfallszenarien 6 und 7 stellen die Abfertigung eines Fluges bei Positionierungsungenauigkeiten des Eckumsetzers der Umschlagstation sicher. Das Szenario 6 dient dem Szenario 5, das Szenario 7 den Szenarien 1 bis 4 als Notfallszenario.

Die Echtzeitapproximation in den Szenarien 2, 4 und 5 erfolgt nicht mit Neuronalen Netzen, sondern durch Linearisierung um Gitterpunkte vorab berechneter Datenbasen. In den Datenbasen treten sog. Singularitäten auf, die mittels eines Kriteriums bestimmt werden. Zur Approximation zwischen

den Gitterpunkten der Datenbasen stehen ein Verfahren 0-ter und ein Verfahren 1-ter Ordnung bereit. Ein Entscheidungskriterium stellt sicher, daß im jeweiligen Gitterintervall das Verfahren mit dem niedrigeren Fehler zum Einsatz kommt. Anschließend werden Approximationseigenschaften der Datenbasen angegeben, zu jedem Szenario Beispiele gerechnet sowie abschließend grundsätzliche Betrachtungen zum Realisierungsaufwand der einzelnen Szenarien und des wirtschaftlichen Nutzens des mit optimalen Robotertrajektorien automatisierten Gepäckumschlages durchgeführt.

## 12.2 Ausblick

Da der Roboter MANUTEC r3 nicht mehr hergestellt wird, sollten sich weitere Arbeiten dieses Themenkreises auf das dynamische Modell eines aktuellen, marktgängigen Roboters abstützen. Eine Fortentwicklung der hier gezeigten *Einstufigen Approximativen Optimalen Stochastischen Planung neuer Robotertrajektorien in Echtzeit* könnte aus einer Einbeziehung der Trägheitsmomente der Nutzlastmasse und aller sechs Gelenke des Roboters in die Optimierungsrechnung bestehen. Ferner erscheint eine Bestimmung der Lage der Singularitäten bis auf Maschinengenauigkeit mittels Taylorglieder höherer Ordnung lohnenswert.

# Kapitel 13

## Anhang

### 13.1 Die Programme

Dieser Abschnitt dokumentiert die drei in dieser Arbeit eingesetzten Programme:

- Optimale Stochastische Trajektorienplanung Version 0.3 (**OSTP V0.3**),
- Simulation des Automatischen Gepäckumschlages Auf Flughäfen Version 0.1 **SAGAF V0.1** und
- **VERGLEICH V0.1**

#### 13.1.1 Das Programm OSTP V0.3

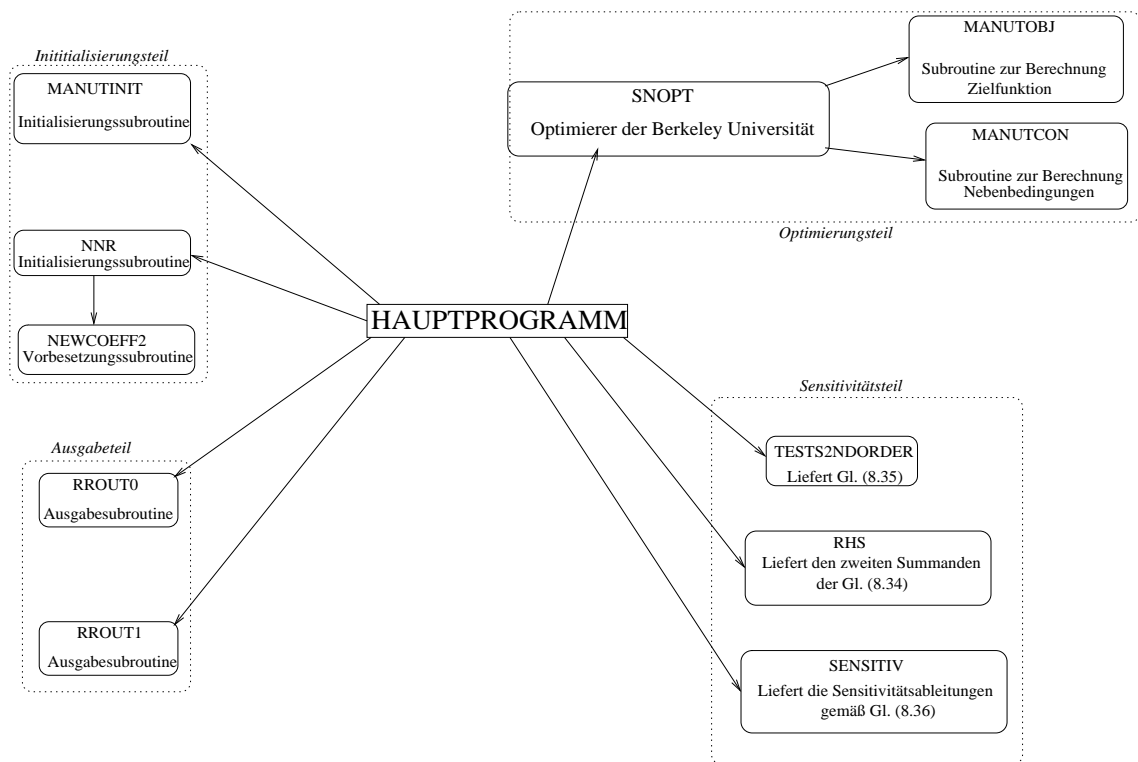
Die Version 0.3 des Programmes **OSTP** ist aus den in [1] enthaltenen Programmen **OSTP V0.2** und **SENSI V0.1** unter Verfolgung eines Gleichteilekonzeptes durch folgende Änderungen hervorgegangen:

- Die in [1] voneinander unabhängigen Programme **OSTP V0.2** und **SENSI V0.1** wurden zu einem Programm fusioniert.
- Das Hauptprogramm stellt die Eingangsvektoren der Szenarien 1 bis 7 als Punkte eines äquidistanten Gitters bereit. Die für die Ausgabe der Ergebnisse zuständigen Unterprogramme wurden angepaßt.
- Durch Vorbelegung der Koeffizienten  $\gamma_{2\theta}$  gemäß (7.13) entfallen im von **OSTP V0.3** mittels SNOPT gelösten Optimierungsproblem (7.18) und (7.19) die zu den Gleichungsnebenbedingungen gehörenden Anfangswinkelgeschwindigkeitsbedingungen (7.5). Infolgedessen enthält das Optimierungsproblem (7.18) und (7.19) im Unterschied zu **OSTP V0.2** keine Gleichungsnebenbedingungen mehr. Dies setzt die Rechenzeit herab. Die Vorbelegung der Koeffizienten  $\gamma_{2\theta}$  erforderte Änderungen in folgenden Programmteilen:
  - Die die Eingangsvariablen des SNOPT vor dessen erstmaligem Aufruf belegende Initialisierungssubroutine *MANUTINIT* wurde auf die durch die Vorbelegung der Koeffizienten  $\gamma_{2\theta}$  geringere Anzahl von Optimierungsvariablen und Nebenbedingungen <sup>1</sup> umgestellt.

---

<sup>1</sup>Wegfall der Gleichungsnebenbedingungen

- Zur Erstellung der Gitter wird der Optimierer SNOPT wiederholt aufgerufen. Die für die Belegung der Eingangsvariablen bei wiederholtem Aufruf zuständige Subroutine *NNR* wurde auf die geringere Anzahl von Optimierungsvariablen und Nebenbedingungen umgestellt. Die für die Vorbelegung der Optimierungsvariablen zuständige Subroutine *NEWCOEFF* wurde durch die Subroutine *NEWCOEFF2* ersetzt.
- Die für die Berechnung der Zielfunktion (7.18) zuständige und seitens SNOPT bei jedem Optimierungsschritt des SQP aufgerufene Subroutine *MANUTOBJ* wurde auf die geringere Anzahl von Optimierungsvariablen umgestellt.
- Die für die Berechnung der Nebenbedingungen (7.19) zuständige und seitens SNOPT bei jedem Optimierungsschritt des SQP aufgerufene Subroutine *MANUTCON* wurde auf die geringere Anzahl von Optimierungsvariablen und Nebenbedingungen umgestellt.

Abbildung 13.1: Programm **OSTP V0.3** und seine Teile

- Die Vorbelegung der Koeffizienten  $\gamma_{2\theta}$  gemäß (7.13) ermöglicht im Gegensatz zu **SENSI V0.1** die Berechnung der Sensitivitätsableitungen der Koeffizienten  $\tilde{\gamma}$  nach der in den Eingangsvektoren  $\mathbf{p}_E$  als Komponente enthaltenen Anfangswinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_j$  mit (8.36). Daher wurden die folgenden, aus dem Programm **SENSI V0.1** stammenden Subroutinen verändert:
  - *HESSU*, *HESSDQ1*, *HESSDQ2*, *HESSDQ3*, *HESSOBJ*,
  - *GRADU*, *GRADQ1*, *GRADQ2*, *GRADQ3*, *GRADDQ1*, *GRADDQ2*, *GRADDQ3*, *GRADOBJ*,
  - *RSHHESSU*, *RSHHESSOBJ*, *RHSJAC*, *RSHHESSDQ1*, *RSHHESSDQ2*, *RSHHESSDQ3*,
  - *PERSOL*, *SENSITIV*, *PERSOL*.



Die folgenden drei Subroutinen mußten komplett ersetzt werden:

– *RSHNESSDDQ1, RSHNESSDDQ2, RSHNESSDDQ3,*

- Belegt man die Koeffizienten  $\gamma_{K-1\theta}$  mit der Endwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_f$  in analoger Weise wie die Koeffizienten  $\gamma_{2\theta}$  mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_j$ , lassen sich auch Sensitivitätsableitungen der Koeffizienten  $\tilde{\gamma}$  nach der Endwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_f$  gemäß (8.36) bilden. Durch Abänderung der aus dem Programm **SENSI V0.1** stammenden Teile verfügt **OSTP V0.3** auch über diese Fähigkeit; diese kommt jedoch nicht zur Anwendung, da die Endgeschwindigkeit in allen sieben Szenarien stets 0 beträgt.

Für die Eingabedateien ergab sich kein Änderungsbedarf. Die Ausgabedateien des Programmes **OSTP V0.3** lauten:

- Beispiele des Szenarios 1 und Datenbasis des Szenarios 2: *OSTPM.sol,*
- Beispiele des Szenarios 3 und Datenbasis des Szenarios 4: *OSTPMDMLA.sol,*
- Datenbasis des Szenarios 5: *OSTPMDMLU.sol,*
- Datenbasis des Szenarios 6: *OSTPVEU.sol,*
- Datenbasis des Szenarios 7: *OSTPVEA.sol.*

Ein Datensatz der o.g. Ausgabedateien hat folgendes Format:

$n_p$   
 $s_j, s_f$   
 $\tilde{s}_0, \tilde{s}_f, k_t, k_e$   
 $M, L$   
 $\gamma_\beta$   
 $\gamma_{\theta_1}, \gamma_{\theta_2}, \gamma_{\theta_3}$   
 $Key_d$   
 $Key_r$   
 $\theta_{min_1}, \theta_{max_1}, \dot{\theta}_{min_1}, \dot{\theta}_{max_1}$   
 $\theta_{min_2}, \theta_{max_2}, \dot{\theta}_{min_2}, \dot{\theta}_{max_2}$   
 $\theta_{min_3}, \theta_{max_3}, \dot{\theta}_{min_3}, \dot{\theta}_{max_3}$   
 $\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mathbf{p}_E}$

### 13.1.2 Das Programm SAGAF V0.1

Die Ausgabedateien des Programmes **OSTP V0.3** sind die Eingabedateien des Programmes **SAGAF V0.1**. Das Programm simuliert mittels des seitens der Bell Labs kostenlos zur Verfügung gestellten Runge-Kutta-Integrators RKSUITE<sup>2</sup> die *effektiven Trajektorien* der Szenarien 1 bis 7.

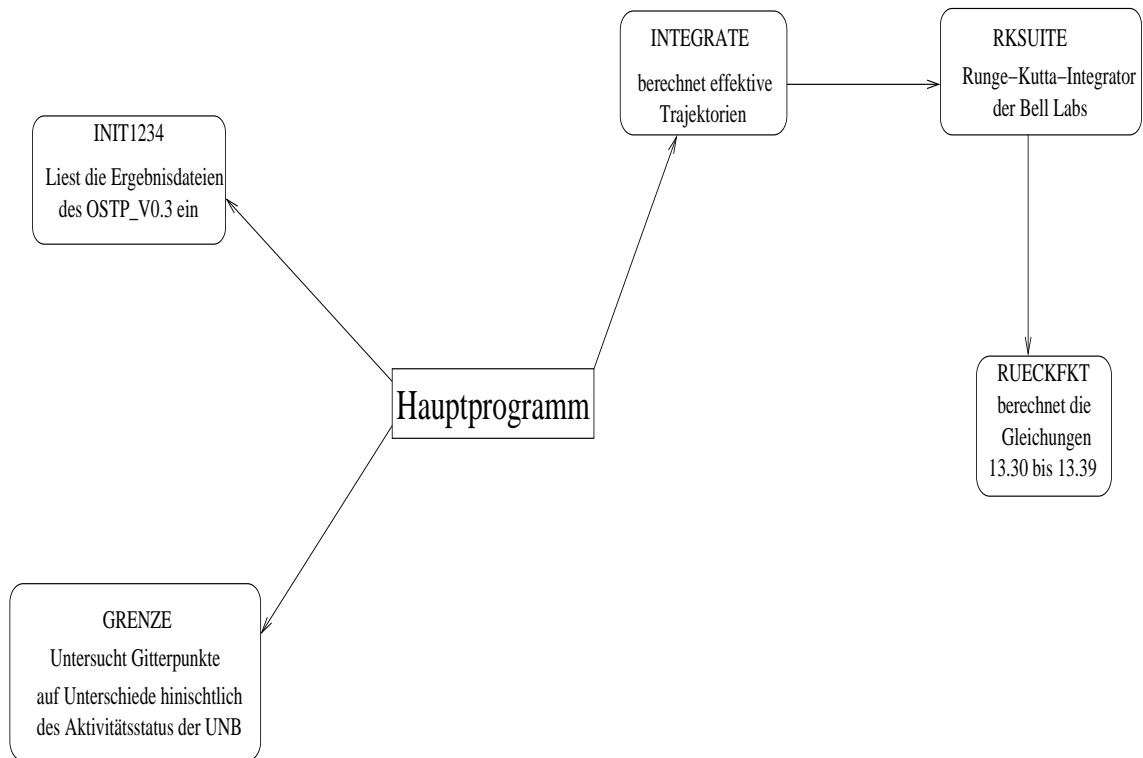
Ferner untersucht **SAGAF V0.1** die Gitterpunkte der Datenbasen auf Unterschiede hinsichtlich des Aktivitätsstatus der Ungleichungsnebenbedingungen.

Die Schätzung von Referenztrajektorien geschieht mittels (8.44) bis (8.59), die Berechnung des benötigten Regelaufwandes mit (11.2) bis (10.12).

Die Ausgabedateien des Programmes **SAGAF V0.1** lauten:

- ge.sit: Regelungsaufwand über der Laufzeit,

<sup>2</sup>Siehe auch Abschnitt 13.3

Abbildung 13.2: Programm **SAGAF V0.1** und seine Teile

- q1.sit, q2.sit, q3.sit: Gelenkwinkel über der Laufzeit,
- qd1.sit, qd2.sit, qd3.sit: Gelenkwinkelgeschwindigkeiten über der Laufzeit,
- qdd1.sit, qdd2.sit, qdd3.sit: Gelenkwinkelbeschleunigungen über der Laufzeit,
- u1.sit, u2.sit, u3.sit: Steuerspannung über der Laufzeit,
- xyz.sit: Verlauf der Trajektorie im Arbeitsraum .

Der in der vorausgehenden Aufzählung genannte Satz von Dateien existiert für jedes Szenario einmal.

### 13.1.3 Das Programm VERGLEICH V0.1

Die Ausgabedateien des Programmes **SAGAF V0.1** sind die Eingabedateien des Programmes **VERGLEICH V0.1**. Die in den Szenarien 3 bis 7 eingesetzten Gitter weisen eine Dimension größer 1 auf. Da Abbildungen mit drei Achsen sehr unübersichtlich sind, legt das Programm **VERGLEICH V0.1** Schnitte in die Ausgabedateien des Programmes **SAGAF V0.1**. Ferner berechnet es die prozentualen Abweichungen zwischen den mit SQP errechneten und den geschätzten Trajektorien. Die Ausgabedateien des Programmes **VERGLEICH V0.1** benutzen das im Lieferumfang des Betriebssystems Linux 8.2 enthaltene Programm gnuplot zur Anfertigung der in den Kapiteln 8, 9 und 10 gezeigten Grafiken.

## 13.2 Grundlagen der linearen Regelung

### 13.2.1 Proportionalregelung

Laplace-Darstellung:

$$\frac{y}{u_0} = G_{w_P} = \frac{G_{0_P}}{1 + G_{0_P}} = \frac{\kappa_P}{1 + \kappa_P} \quad (13.1)$$

### 13.2.2 Differentialregelung

Laplace-Darstellung:

$$\frac{y}{u_0} = G_{w_D} = \frac{G_{0_D}}{1 + G_{0_D}} = \frac{\kappa_D s}{1 + \kappa_D s} \quad (13.2)$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{\kappa_D} + u_0 \quad (13.3)$$

$$y(t) = -\frac{x_1}{\kappa_D} + u_0 \quad (13.4)$$

### 13.2.3 Integralregelung

Laplace-Darstellung:

$$\frac{y}{u_0} = G_{w_I} = \frac{G_{0_I}}{1 + G_{0_I}} = \frac{\frac{\kappa_I}{s}}{1 + \frac{\kappa_I}{s}} = \frac{\kappa_I}{s + \kappa_I} \quad (13.5)$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x}_1 = -\kappa_I \cdot x_1 + u_0(t) \quad (13.6)$$

$$y(t) = \kappa_I \cdot x_1 \quad (13.7)$$

### 13.2.4 Proportional-Integral-Differentialregelung (PID-Regelung)

Laplace-Darstellung:

$$\frac{y}{u_0} = G_{w_{PID}} = \frac{G_{0_P} + G_{0_D} + G_{0_I}}{1 + G_{0_P} + G_{0_D} + G_{0_I}} = \frac{s^2 \kappa_D + s \kappa_P + \kappa_I}{s^2 \kappa_D + s(1 + \kappa_P) + \kappa_I} \quad (13.8)$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\kappa_I}{\kappa_D} & -\frac{1+\kappa_P}{\kappa_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u_0 \quad (13.9)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\kappa_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u_0 \quad (13.10)$$

### 13.2.5 Der Regler des Roboters MANUTEC r3

Alle linearen Regler sind Kombinationen von Proportional-, Differential- und Integralreglern. Der Regler des MANUTEC r3 arbeitet wie folgt:

Die Drehzahlen der Gelenke des MANUTEC r3 werden einzeln und unabhängig voneinander geregelt. Das Motordrehmoment  $\xi_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, 6$  ist proportional der Steuerspannung  $u_i$ :

$$\xi_i = \frac{\tau_i}{\rho_i} = V_i u_i \quad (13.11)$$

Die Drehzahl des Motors  $\check{\theta}_{Ri}$  wird über inkrementale Winkelgeber gemessen. Diese erzeugen eine Spannung  $U_{Ti}$ . Zwischen  $\check{\theta}_{Ri}$  und  $U_{Ti}$  besteht die Beziehung:

$$U_{Ti} = W_i(s) \check{\theta}_{Ri} \quad (13.12)$$

umgestellt nach:

$$\check{\theta}_{Ri} = \frac{U_{Ti}}{W_i(s)} = \rho_i \check{\theta}_i \quad (13.13)$$

mit

$$W_i(s) = \frac{\kappa_T}{\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 2\frac{D_p}{\omega_p} s + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_e} + 1\right)}. \quad (13.14)$$

Die Steuerspannung  $u_i$  wird wie folgt dargestellt (*PID-T1*-Regler mit *PD-T1*-Glieder im Rückführzweig):

$$\begin{aligned} u_i = \frac{\xi_i}{V_i} &= \frac{\tau_i}{\rho_i V_i} = K_i \frac{s T_0 + 1}{s(s T_e + 1)} \left( \kappa_T \dot{\theta}_{Ri} - \frac{s T_a + 1}{s T_h + 1} U_{Ti} \right) \\ &= K_i \frac{s T_0 + 1}{s(s T_e + 1)} \left( \kappa_T \dot{\theta}_{Ri} - \frac{s T_a + 1}{s T_h + 1} W_i(s) \check{\theta}_{Ri} \right). \end{aligned} \quad (13.15)$$

Daraus ergibt sich:

$$\tau_i = \rho_i^2 V_i K_i \frac{s T_0 + 1}{s T_e + 1} \left[ \kappa_T \theta_i - \frac{s T_a + 1}{s T_h + 1} W_i(s) \check{\theta}_i \right]. \quad (13.16)$$

Mit der Regeldifferenz  $U_i$  *Differenz* ergibt sich:

$$U_{i\text{Differenz}} = [\kappa_T \dot{\theta}_{Ri\text{Soll}} - \frac{sT_a + 1}{sT_h + 1} U_{Ti}]. \quad (13.17)$$

Die Reglerparameter des Roboters MANUTEC r3 sind

- $\omega_p = 2014 \frac{1}{\text{sec}}$ : Eigenfrequenz des  $PT_2$ -Gliedes,
- $D_p = 0.294$ : Dämpfung des  $PT_2$ -Gliedes,
- $\omega_e = 1180 \frac{1}{\text{sec}}$ : Grenzfrequenz des  $PT_1$ -Gliedes,
- $\kappa_T = 0.03 \frac{\text{Vsec}}{\text{rad}}$ : Tachokonstante,
- $K_i = 34.08$ : Verstärkungsfaktor,
- $T_0 = 9.95 \cdot 10^{-3} \text{sec}$ : Zeitkonstante des Differentialgliedes in der Steuerstrecke,
- $T_e = 0.56 \cdot 10^{-3} \text{sec}$ : Zeitkonstante, entspricht dem Kehrwert der Grenzfrequenz des Differentialgliedes in der Steuerstrecke,
- $T_a = 40.0 \cdot 10^{-3} \text{sec}$ : Zeitkonstante des Differentialgliedes im Rückführzweig,
- $T_h = 20.2 \cdot 10^{-3} \text{sec}$ : Zeitkonstante, entspricht dem Kehrwert der Grenzfrequenz des Differentialgliedes im Rückführzweig,
- $V_i = -1.2 \frac{\text{Nm}}{\text{V}}$ : Drehmomentenkonstante.

Die Parameter sind für alle Gelenke gleich.

### 13.3 Prädiktion der Gelenkwinkel $\theta$ und -geschwindigkeiten $\dot{\theta}$

Im folgenden wird die in Kapitel 10 zum Einsatz kommende numerische Simulation der Gelenkwinkel  $\theta$  und der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}$  mit Hilfe eines Runge-Kutta-Integrators, bereitgestellt durch das Programmpaket RKSUITE, dargestellt.

Gesucht werden die Werte für die rechnerisch simulierten Gelenkwinkel

$$\theta(t_1, \theta_0, m) = \begin{pmatrix} \theta_1(t_1, \theta_0, m) \\ \theta_2(t_1, \theta_0, m) \\ \theta_3(t_1, \theta_0, m) \end{pmatrix} \quad (13.18)$$

und die rechnerisch simulierten Gelenkwinkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\theta}(t_1, \theta_0, m) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t_1, \theta_0, m) \\ \dot{\theta}_2(t_1, \theta_0, m) \\ \dot{\theta}_3(t_1, \theta_0, m) \end{pmatrix}. \quad (13.19)$$

Der Runge-Kutta-Integrator simuliert die Steuerstrecke in Abbildung 13.3.

Dazu wird die dynamischen Gleichung des Roboters (4.14) bis (4.16), ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, in zwei Schritten in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführt:

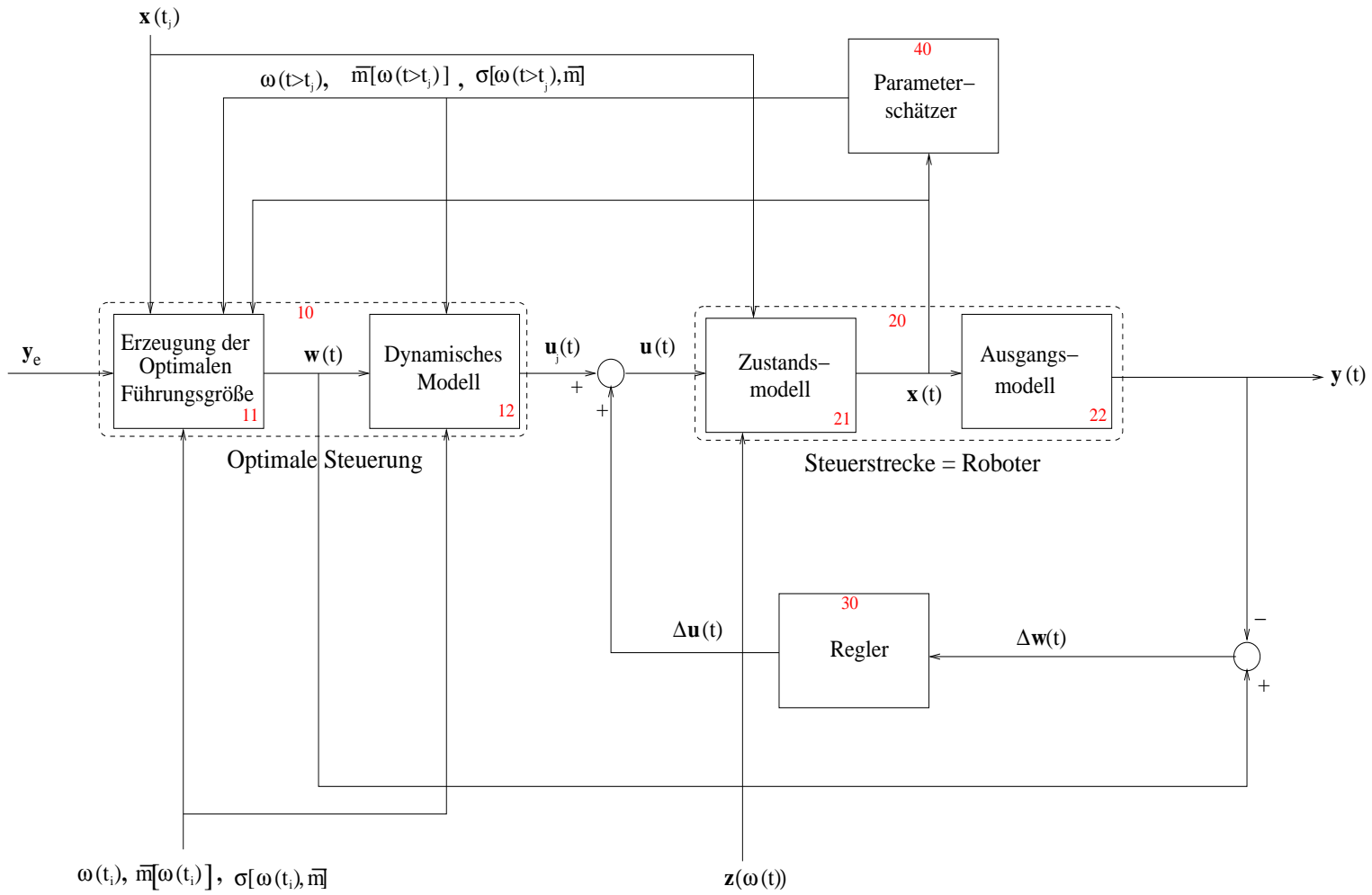


Abbildung 13.3: Steuerkette des Roboters MANUTECr3

- Im ersten Schritt werden die den Zustand bezeichnenden Variablen  $x_1$  bis  $x_6$  eingeführt (Gleichungen (13.20) bis (13.25)).
- Im zweiten Schritt wird das so entstandene Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit Hilfe der Cramer'schen Regel nach den ersten Ableitungen der Variablen  $x_1$  bis  $x_6$  umgestellt (Gleichungen (13.40) bis (13.45)).

Dieses umgestellte Differentialgleichungssystem 1. Ordnung ist mit einem Runge-Kutta-Integrator behandelbar. Als Startwerte zum Zeitpunkt  $t_0$  werden die Anfangsposition und die Anfangswinkelgeschwindigkeit ( $= 0$ ) vorgegeben. Die Ergebnisse der Runge-Kutta-Integration sind die Prädiktion der Gelenkwinkel  $\theta$  und der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}$  am Zeitpunkt  $t$  sowie ihrer Ableitungen nach der Nutzlastmasse. Es werden noch die Komponenten  $x_7, x_8, x_9, x_{10}$  zur Berechnung des Regelaufwandes hinzugefügt (Siehe auch Gleichungen (10.1) bis (10.12)).

1. Schritt:

$$x_1(t) = x_1(m, t) = \theta_1(t, \theta_0, m) \quad (13.20)$$

$$x_2(t) = x_2(m, t) = \dot{\theta}_1(t, \theta_0, m) \quad (13.21)$$

$$x_3(t) = x_3(m, t) = \theta_2(t, \theta_0, m) \quad (13.22)$$

$$x_4(t) = x_4(m, t) = \dot{\theta}_2(t, \theta_0, m) \quad (13.23)$$

$$x_5(t) = x_5(m, t) = \theta_3(t, \theta_0, m) \quad (13.24)$$

$$x_6(t) = x_6(m, t) = \dot{\theta}_3(t, \theta_0, m) \quad (13.25)$$

$$x_7(t) = \int_0^t \Delta u_1^2 dt \quad (13.26)$$

$$x_8(t) = \int_0^t \Delta u_2^2 dt \quad (13.27)$$

$$x_9(t) = \int_0^t \Delta u_3^2 dt \quad (13.28)$$

$$x_{10}(t) = \int_0^t \Delta u_1^2 + \Delta u_2^2 + \Delta u_3^2 dt \quad (13.29)$$

daraus folgt:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_1(m, t) = \dot{\theta}_1(t, \theta_0, m) \quad (13.30)$$

$$\dot{x}_2(t) = \dot{x}_2(m, t) = \ddot{\theta}_1(t, \theta_0, m) \quad (13.31)$$

$$\dot{x}_3(t) = \dot{x}_3(m, t) = \dot{\theta}_2(t, \theta_0, m) \quad (13.32)$$

$$\dot{x}_4(t) = \dot{x}_4(m, t) = \ddot{\theta}_2(t, \theta_0, m) \quad (13.33)$$

$$\dot{x}_5(t) = \dot{x}_5(m, t) = \dot{\theta}_3(t, \theta_0, m) \quad (13.34)$$

$$\dot{x}_6(t) = \dot{x}_6(m, t) = \ddot{\theta}_3(t, \theta_0, m) \quad (13.35)$$

$$\dot{x}_7(t) = \Delta u_1^2 \quad (13.36)$$

$$\dot{x}_8(t) = \Delta u_2^2 \quad (13.37)$$

$$\dot{x}_9(t) = \Delta u_3^2 \quad (13.38)$$

$$\dot{x}_{10}(t) = \Delta u_1^2 + \Delta u_2^2 + \Delta u_3^2 \quad (13.39)$$

2. Schritt: Somit ergibt sich die Zustandsgleichung zu

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (13.40)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{N}} \quad (13.41)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (13.42)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\mathcal{Z}_2}{\mathcal{N}} \quad (13.43)$$

$$\dot{x}_5 = x_6 \quad (13.44)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{\mathcal{Z}_3}{\mathcal{N}} \quad (13.45)$$

$$\dot{x}_7 = \Delta u_1^2 \quad (13.46)$$

$$\dot{x}_8 = \Delta u_2^2 \quad (13.47)$$

$$\dot{x}_9 = \Delta u_3^2 \quad (13.48)$$

$$\dot{x}_{10}(t) = \Delta u_1^2 + \Delta u_2^2 + \Delta u_3^2 \quad (13.49)$$

mit der Ausgabegleichung

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix} \quad (13.50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &= A \cdot (J_{22} \cdot J_{33} - J_{23}^2) - B \cdot (J_{12} \cdot J_{33} - J_{13} \cdot J_{23}) \\ &+ C \cdot (J_{12} \cdot J_{23} - J_{13} \cdot J_{22}) \end{aligned} \quad (13.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2 &= -A \cdot (J_{12} \cdot J_{33} - J_{23} \cdot J_{13}) + B \cdot (J_{11} \cdot J_{33} - J_{13}^2) \\ &- C \cdot (J_{11} \cdot J_{23} - J_{13} \cdot J_{12}) \end{aligned} \quad (13.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_3 &= A \cdot (J_{12} \cdot J_{23} - J_{22} \cdot J_{13}) - B \cdot (J_{11} \cdot J_{23} - J_{12} \cdot J_{13}) \\ &+ C \cdot (J_{11} \cdot J_{22} - J_{12}^2) \end{aligned} \quad (13.53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= J_{11} \cdot (J_{22} \cdot J_{33} - J_{23}^2) - J_{12} \cdot (J_{12} \cdot J_{33} - J_{13} \cdot J_{23}) \\ &+ J_{13} \cdot (J_{12} \cdot J_{23} - J_{13} \cdot J_{22}). \end{aligned} \quad (13.54)$$

Die Sollmomente ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \tau_1(t, \theta_0) &= J_{11} w_7 + J_{12} w_8 + J_{13} w_9 - 2\Gamma_1 w_4 w_5 - 2\Gamma_2 w_4 w_6 \\ &- \Gamma_3 (w_5)^2 - \Gamma_4 [2w_5 w_6 + (w_6)^2] \end{aligned} \quad (13.55)$$

$$\tau_2(t, \theta_0) = J_{12} w_7 + J_{22} w_8 + J_{23} w_9 + \Gamma_1 (w_4)^2$$



$$- \Gamma_5 [2 w_5 w_6 + (w_6)^2] - \chi_2 \quad (13.56)$$

$$\begin{aligned} \tau_3(t, \theta_0) &= J_{13} w_7 + J_{23} w_8 + J_{33} w_9 \\ &+ \Gamma_2 (w_4)^2 + \Gamma_5 (w_5)^2 - \chi_3, \end{aligned} \quad (13.57)$$

die Spannungen  $u_{0_i}$  (=Stellgrößen) zu

$$u_{0_i} = \frac{\tau_i}{\rho_i V_i} \quad (13.58)$$

mit  $i = 1, 2, 3$

und die Korrekturspannungen  $\Delta u_i$  zu:

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1(t) \\ \Delta u_2(t) \\ \Delta u_3(t) \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{u}(t) = \left( \nabla_{\theta} \mathbf{F} - \mathbf{M} \mathbf{K}_p \quad \nabla_{\theta} \mathbf{h} - \mathbf{M} \mathbf{K}_d \right) \begin{pmatrix} \Delta w(t) \\ \Delta \dot{w}(t) \end{pmatrix} \quad (13.59)$$

mit

$$\mathbf{K}_p = \begin{pmatrix} 34.08 & 0 & 0 \\ 0 & 34.08 & 0 \\ 0 & 0 & 34.08 \end{pmatrix}, \quad (13.60)$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{pmatrix} 0.89 & 0 & 0 \\ 0 & 1.12 & 0 \\ 0 & 0 & 1.34 \end{pmatrix} \quad (13.61)$$

und

$$\begin{pmatrix} \Delta w(t) \\ \Delta \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(t) - x_1(t) \\ w_2(t) - x_3(t) \\ w_3(t) - x_5(t) \\ w_4(t) - x_2(t) \\ w_5(t) - x_4(t) \\ w_6(t) - x_6(t) \end{pmatrix}. \quad (13.62)$$

Die Führungsgröße ist:

$$w_1 = \theta_1(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_1}} \gamma_{k \theta_1}^* B_k(s(t)) \quad (13.63)$$

$$w_2 = \theta_2(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_2}} \gamma_{k \theta_2}^* B_k(s(t)) \quad (13.64)$$

$$w_3 = \theta_3(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_3}} \gamma_{k \theta_3}^* B_k(s(t)) \quad (13.65)$$

$$w_4 = \dot{\theta}_1(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_1}} \gamma_{k\theta_1}^* B'_k(s(t)) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B_k(s(t))} \quad (13.66)$$

$$w_5 = \dot{\theta}_2(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_2}} \gamma_{k\theta_2}^* B'_k(s(t)) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B_k(s(t))} \quad (13.67)$$

$$w_6 = \dot{\theta}_3(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_3}} \gamma_{k\theta_3}^* B'_k(s(t)) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B_k(s(t))} \quad (13.68)$$

$$w_7 = \ddot{\theta}_1(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_1}} \gamma_{k\theta_1}^* B''_k(s(t)) \cdot \sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B_k(s(t)) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{K_{\theta_1}} \gamma_{k\theta_1}^* B'_k(s(t)) \cdot \sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B'_k(s(t)) \quad (13.69)$$

$$w_8 = \ddot{\theta}_2(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_2}} \gamma_{k\theta_2}^* B''_k(s(t)) \cdot \sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B_k(s(t)) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{K_{\theta_2}} \gamma_{k\theta_2}^* B'_k(s(t)) \cdot \sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B'_k(s(t)) \quad (13.70)$$

$$w_9 = \ddot{\theta}_3(\theta_0, s(t)) = \sum_{k=1}^{K_{\theta_3}} \gamma_{k\theta_3}^* B''_k(s(t)) \cdot \sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B_k(s(t)) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{K_{\theta_3}} \gamma_{k\theta_3}^* B'_k(s(t)) \cdot \sum_{k=1}^{K_\beta} \gamma_{k\beta}^* B'_k(s(t)) \quad (13.71)$$

Erläuterungen der von der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}$  abhängigen Größen:

- $J_{ij}$ ,
- $\Gamma_i$ ,
- $\chi_i$ ,

sowie der von der Führungsgröße  $\mathbf{w}$  abhängigen Größen

- $J$ ,
- $\Gamma$  und
- $\chi$

erfolgt untenstehend:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= I_{A1} + (\rho_1)^2 I_{R1} + (s_{3x})^2 m_{G3} + (s_{2x})^2 m_{G2} + I_{A233} \cos^2 \theta_2 + I_{A222} \sin^2 \theta_2 \\
&+ I_{A333} \cos^2(\theta_2 + \theta_3) + I_{A322} \sin^2(\theta_2 + \theta_3) + (s_{2z})^2 m_{G2} \sin^2 \theta_2 \\
&+ m_{G3} [a_3 \sin \theta_2 + s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3)]^2 \\
&+ m [a_3 \sin \theta_2 + a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3)]^2
\end{aligned} \tag{13.72}$$

$$\begin{aligned}
J_{12} &= [I_{A213} - s_{3x} a_3 m_{G3} - s_{2x} s_{2z} m_{G2}] \cos \theta_2 \\
&+ [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \cos(\theta_2 + \theta_3)
\end{aligned} \tag{13.73}$$

$$J_{13} = (I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}) \cos(\theta_2 + \theta_3) \tag{13.74}$$

$$\begin{aligned}
J_{22} &= I_{A311} + I_{A211} + (\rho_2)^2 I_{R2} + (s_{2z})^2 m_{G2} + [(s_{3z})^2 + (a_3)^2] m_{G3} \\
&+ [(a_4)^2 + (a_3)^2] m + 2 [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos \theta_3
\end{aligned} \tag{13.75}$$

$$\begin{aligned}
J_{23} &= I_{A311} + \rho_3 I_{R3} + (s_{3z})^2 m_{G3} + (a_4)^2 m \\
&+ [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos \theta_3
\end{aligned} \tag{13.76}$$

$$J_{33} = I_{A311} + (\rho_3)^2 I_{R3} + (s_{3z})^2 m_{G3} + (a_4)^2 m \tag{13.77}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= (I_{A233} - I_{A222} - (s_{2z})^2 m_{G2} - (a_3)^2 m_{G3} - (a_3)^2 m) \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
&- [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2) \\
&- [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
&+ [I_{A333} - I_{A322} - (s_{3z})^2 m_{G3} - (a_4)^2 m] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3)
\end{aligned} \tag{13.78}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= -[s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_2 \\
&+ (I_{A333} - I_{A322} - (s_{3z})^2 m_{G3} - (a_4)^2 m) \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3),
\end{aligned} \tag{13.79}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= [I_{A213} - s_{3x} a_3 m_{G3} - s_{2x} s_{2z} m_{G2}] \sin \theta_2 \\
&+ [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \sin(\theta_2 + \theta_3)
\end{aligned} \tag{13.80}$$

$$\Gamma_4 = [I_{A313} - s_{3x} s_{3z} m_{G3}] \sin(\theta_2 + \theta_3) \tag{13.81}$$

$$\Gamma_5 = [s_{3z} a_3 m_{G3} + a_4 a_3 m] \sin \theta_3 \tag{13.82}$$

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= s_{2z} \sin \theta_2 m_{G2} g + [s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin \theta_2] m_{G3} g \\
&+ [a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin \theta_2] m g
\end{aligned} \tag{13.83}$$

$$\chi_3 = s_{3z} \sin(\theta_2 + \theta_3) m_{G3} g + a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) m g. \tag{13.84}$$

Erläuterung der Abkürzungen:

$I_{A1}$  Trägheitsmoment des Armes 1 entlang der Gelenkachse 1 (entspricht  $I_{A133}$ ),

$I_{A2ij}$  Trägheitstensor des Armes 2,

$I_{A3ij}$  Trägheitstensor des Armes mit Hand,

$I_{Rk}$  Trägheitsmoment des Motors  $k$  entlang der Gelenkachse  $k$ ,

$m_{G2}$  Masse des Gesamtarmes 2,

$m_{G3}$  Masse des Gesamtarmes 3 inklusive der Hand,

$m$  Nutzlastmasse,

$(s_{2x}, s_{2y}, s_{2z})^T$  Koordinaten des Massenmittelpunktes des Gesamtarmes 2 im Koordinatensystem  $O_2$ ,

$(s_{3x}, s_{3y}, s_{3z})^T$  Koordinaten des Massenmittelpunktes des Gesamtarmes 3 im Koordinatensystem  $O_3$ ,

$a_3$  Länge des Ortsvektors vom Gelenk 2 zum Gelenk 3,

$a_4$  Länge des Ortsvektors vom Gelenk 3 zum Werkzeugzentrierpunkt (WZP) der Hand,

$\rho_k$  Untersetzungsverhältnis des Getriebes des Motors  $k$ ,

$g$  Gravitationskonstante.

Die zugehörigen Zahlenwerte finden sich in der nachstehenden Tabelle:

$I_{A1}$	$1.16kg\ m^2$	$I_{R1}$	$0.0013kg\ m^2$
$I_{A2_{11}}$	$2.58kg\ m^2$	$I_{R2}$	$0.0013kg\ m^2$
$I_{A2_{12}}$	$0.0kg\ m^2$	$I_{R3}$	$0.0013kg\ m^2$
$I_{A2_{13}}$	$-0.46kg\ m^2$	$m_{G2}$	$56.5kg$
$I_{A2_{22}}$	$2.73kg\ m^2$	$m_{G3}$	$60.3kg$
$I_{A2_{23}}$	$0.0kg\ m^2$	$s_{2x}$	$0.172m$
$I_{A2_{33}}$	$0.064kg\ m^2$	$s_{2y}$	$0.0m$
$I_{A3_{11}}$	$5.41kg\ m^2$	$s_{2z}$	$0.205m$
$I_{A3_{12}}$	$0.0kg\ m^2$	$s_{3x}$	$0.028m$
$I_{A3_{13}}$	$0.33kg\ m^2$	$s_{3y}$	$0.0m$
$I_{A3_{22}}$	$5.6kg\ m^2$	$s_{3z}$	$0.202m$
$I_{A3_{23}}$	$0.0kg\ m^2$	$a_3$	$0.5m$
$I_{A3_{33}}$	$0.39kg\ m^2$	$a_4$	$0.98m$
$\rho_1$	$-105.0$	$\rho_2$	$210.0$
$\rho_3$	$60.0$		

Tabelle 13.1: Dynamische Parameter des MANUTECr3

## 13.4 Grundlegende Funktionsweise der SQP

*Vorbemerkung:* Die Ausgangssituation an den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$  wird durch sog. Eingangsvektoren  $\mathbf{p}_E$  festgelegt. Deren genaue, szenarienabhängige Definition erfolgt in Abschnitt 8.1.

Mit Hilfe des Verfahrens der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP), in dieser Arbeit vom Programmpaket SNOPT bereitgestellt, wird für

$$\min_{\tilde{\gamma}} F(\tilde{\gamma}, \mathbf{p}_E) \quad (13.85)$$

$$\mathbf{g}(\tilde{\gamma}, \mathbf{p}_E) \leq \mathbf{0} \quad (13.86)$$

ein Vektor  $\tilde{\gamma}$  gesucht, der die Zielfunktion  $F$  unter Einhaltung der Nebenbedingungen  $g$  minimiert. Ein derartiges Minimum ist ein lokales Minimum, das in der Regel nicht mit dem globalen Minimum übereinstimmt. Dieses lokale Minimum ist im Vergleich zur Trajektorie mit festem geometrischen Pfad nach [48] bezüglich Zeit- oder Energieaufwand verbessert. Im folgenden werden einige, später benötigte Definitionen aufgeführt:

*Definition 13.1:*

Die Menge  $\mathbb{S} := \{\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^{4 \cdot (L+M-1)-11} : \mathbf{g}(\tilde{\gamma}) \leq \mathbf{0}\}$  wird als die Menge der zulässigen Punkte bezeichnet. Ein Punkt  $\tilde{\gamma} \in \mathbb{S}$  heißt dann ein zulässiger Punkt.

*Definition 13.2:*

Ein Punkt  $\tilde{\gamma}^* \in \mathbb{S}$  heißt lokales Minimum des Problems (13.85) bis (13.86), wenn eine Umgebung  $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^{4 \cdot (L+M-1)-11}$  von  $\tilde{\gamma}^*$  existiert mit

$$F(\tilde{\gamma}^*) \leq F(\tilde{\gamma}), \forall \tilde{\gamma} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{V}. \quad (13.87)$$

*Definition 13.3:*

Ein Punkt  $\tilde{\gamma}^* \in \mathbb{S}$  heißt strenges lokales Minimum des Problems (13.85) bis (13.86), wenn eine Umgebung  $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^{4 \cdot (L+M-1)-11}$  von  $\tilde{\gamma}^*$  existiert mit

$$F(\tilde{\gamma}^*) < F(\tilde{\gamma}), \forall \tilde{\gamma} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{V}, \tilde{\gamma} \neq \tilde{\gamma}^*. \quad (13.88)$$

*Definition 13.4:*

Ein Punkt  $\tilde{\gamma}^* \in \mathbb{S}$  heißt globales Minimum des Problems (13.85) bis (13.86), wenn

$$F(\tilde{\gamma}^*) \leq F(\tilde{\gamma}), \forall \tilde{\gamma} \in \mathbb{S}. \quad (13.89)$$

*Definition 13.5:*

Ein Punkt  $\tilde{\gamma}^* \in \mathbb{S}$  heißt strenges globales Minimum des Problems (13.85) bis (13.86), wenn

$$F(\tilde{\gamma}^*) < F(\tilde{\gamma}), \forall \tilde{\gamma} \in \mathbb{S}, \tilde{\gamma} \neq \tilde{\gamma}^*. \quad (13.90)$$

*Definition 13.6:*

- Ein zulässiger Punkt  $\tilde{\gamma}^* \in \mathbb{S}$  heißt regulär, wenn die Matrix aus den Ableitungen der aktiven Ungleichungsnebenbedingungen (UNB)  $\mathbf{g}_{aktiv}$

$$\nabla_{\tilde{\gamma}} \mathbf{g}_{aktiv}(\tilde{\gamma}^*)$$

für  $\tilde{\gamma}^* \in \mathbb{S}$  vollen Rang hat.

Setzt man  $\tilde{\gamma}^*$  in (7.1) ein, ergeben sich für die sieben Szenarien die geometrischen Pfade  $\theta_e$  und die Geschwindigkeitsprofile  $\beta$  der Trajektorien  $\theta_0$  (Szenario 1),  $\theta_0$  (Szenario 2),  $\bar{\theta}_0$  (Szenario 3),  $\bar{\theta}_0$  (Szenario 4),  $\bar{\theta}_1$  (Szenario 5),  $\bar{\theta}_{1N}$  (Szenario 6) und  $\bar{\theta}_{0N}$  (Szenario 7).

### 13.4.1 Kuhn-Tucker-Bedingungen: Notwendige Bedingungen 1. Ordnung

Nach [35] und [42] lauten die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung, auch als Kuhn-Tucker-Bedingungen bezeichnet, für ein lokales Minimum der Funktion (13.85) unter den UNB (13.86):

*Satz 13.1:*

$\tilde{\gamma}^* \in \mathbb{S}$  sei ein regulärer lokaler Optimalpunkt, dann existieren Lagrange-Multiplikatoren  $\chi^*$ , so daß für die Lagrange-Funktion

$$L(\tilde{\gamma}, \chi) = F(\tilde{\gamma}, \mathbf{p}_E) + \chi^T \cdot \mathbf{g}(\tilde{\gamma}, \mathbf{p}_E) \quad (13.91)$$

des Problems (13.85) bis (13.86) gilt:

$$\nabla_{\tilde{\gamma}} L = L_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^*, \chi^*) = F_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^*, \mathbf{p}_E) + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}^T(\tilde{\gamma}^*, \mathbf{p}_E) \cdot \chi^* = \mathbf{0} \quad (13.92)$$

$$\nabla L_{\tilde{\gamma}} = L_{\chi}(\tilde{\gamma}^*, \chi^*) = \mathbf{g}(\tilde{\gamma}^*, \mathbf{p}_E) \leq \mathbf{0} \quad (13.93)$$

$$\mathbf{g}^T(\tilde{\gamma}^*, \mathbf{p}_E) \chi^* = 0 \quad (13.94)$$

$$\chi^* \geq \mathbf{0} \quad (13.95)$$

*Folgerung 13.1:*

Wenn die UNB  $g_i(\tilde{\gamma}^*)$  inaktiv ist, d.h.  $g_i(\tilde{\gamma}^*) < 0$ , dann gilt  $\chi_i^* = 0$ .

*Definition 13.7:*

Die UNB  $g_i(\tilde{\gamma}^*)$  heißt gerade aktiv, wenn  $g_i(\tilde{\gamma}^*) = 0$  und  $\chi_i^* = 0$  ist.

*Definition 13.8:*

Die UNB  $g_i(\tilde{\gamma}^*)$  heißt strikt aktiv, wenn  $g_i(\tilde{\gamma}^*) = 0$  und  $\chi_i^* > 0$  ist.

### 13.4.2 Hinreichende Bedingungen 2. Ordnung

Nach [42] lauten die hinreichenden Bedingungen für lokale Minimalität:

*Satz 13.2:*

Es seien  $F, \mathbf{g}$  zweimal stetig differenzierbar und  $\tilde{\gamma}^* \in \mathbb{R}^{4 \cdot (L+M-1) - 11}$  ein zulässiger Punkt des Problems (13.85) bis (13.86). Hinreichend dafür, daß  $\tilde{\gamma}^*$  ein lokaler Minimalpunkt von (13.85) und (13.86) ist, ist die Existenz von Vektoren  $\chi^*$ , so daß (13.92) bis (13.95) gilt und weiter

(i)  $\nabla_{\tilde{\gamma}} \mathbf{g}_{aktiv}(\tilde{\gamma}^*)$  vollen Rang hat,

(ii) die Hessematrix  $\nabla_{\tilde{\gamma}}^2 L$  auf dem Teilraum  $\{\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^{4 \cdot (L+M-1) - 11} : \nabla \mathbf{g}_{aktiv}^T \tilde{\gamma} = \mathbf{0}\}$  positiv definit ist.

### 13.4.3 Algorithmus der Sequentiellen Quadratischen Programmierung

Der Algorithmus der Sequentiellen Quadratischen Programmierung arbeitet gemäß [42] und der Beschreibung des Programmpaketes SNOPT folgendermaßen:

- A Der Iterationsindex  $l$  wird 0 gesetzt. Für die  $4 \cdot (L + M - 1) - 11$  Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_{k\theta_1}$ ,  $\tilde{\gamma}_{k\theta_2}$ ,  $\tilde{\gamma}_{k\theta_3}$  und  $\tilde{\gamma}_{k\beta}$  des Startvektors  $\tilde{\gamma}_{(0)}$  werden zulässige Startwerte gewählt. Im vorliegenden Fall sind das die von Qu in [48] benutzten Startwerte der festgelegten Bahn. Die Menge  $A_{(l=0)} = (i | g_i(\tilde{\gamma}_{(0)}) = 0)$  der aktiven Nebenbedingungen wird festgelegt.
- B Das Problem (13.85) bis (13.86) wird gemäß des Unterkapitels 13.4.4 in ein Problem der Quadratischen Programmierung überführt. Die Lösung  $\delta\tilde{\gamma}_{(l)}$  dieses Problems ist die zulässige Suchrichtung des  $l$ -ten Iterationsschrittes.
- C Bestimmung der Schrittweite  $\alpha_{(l)}$  durch Lösen des folgenden eindimensionalen Problems:

$$\min_{\alpha_{(l)}} F(\tilde{\gamma}_{(l)} + \alpha_{(l)} \cdot \delta\tilde{\gamma}_{(l)}) \quad (13.96)$$

$$\mathbf{g}(\tilde{\gamma}_{(l)} + \alpha_{(l)} \cdot \delta\tilde{\gamma}_{(l)}) \leq \mathbf{0}. \quad (13.97)$$

Es wird  $\tilde{\gamma}_{(l+1)} = \tilde{\gamma}_{(l)} + \alpha_{(l)} \cdot \delta\tilde{\gamma}_{(l)}$  gesetzt und  $A_{(l+1)}$  durch Hinzufügen der UNB, die bei  $\tilde{\gamma}_{(l+1)}$  aktiv werden, zu  $A_{(l)}$  gebildet.

- D Wenn  $|F_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}_{(l+1)})|$  größer ist als die vorher festgelegte Schranke  $\epsilon$ , dann setze  $l = l + 1$  und gehe zu B.
- E Unter Nutzung der Bedingungen 1. Ordnung (13.92) werden die Kuhn-Tucker-Multiplikatoren  $\chi_{i_{(l+1)}} \forall i \in A_{(l+1)}$  berechnet. Wenn alle  $\chi_{i_{(l+1)}}, i \in A_{(l+1)}$  nicht negativ sind, ist durch Verlassen der aktiven UNB eine Verbesserung der Zielfunktion  $F$  nicht mehr möglich und **das Problem (13.85) bis (13.86) gelöst, und es wird**

$$\tilde{\gamma}^* := \tilde{\gamma}_{(l+1)} \quad (13.98)$$

**gesetzt.** Sonst gehe weiter zu F.

- F Entfernen aller  $\chi_{i_{(l+1)}}$  aus  $A_{(l+1)}$ , für die  $\chi_{i_{(l+1)}} \leq 0$ .
- G Setze  $l = l + 1$  und gehe zu B.

Da die Lagrange-Funktion  $L$  des Problems (13.85) bis (13.86) mindestens einmal über den Vektor  $(\tilde{\gamma}^T, \chi^T)^T$  stetig differenzierbar ist, konvergiert für jeden zulässigen Startpunkt  $\tilde{\gamma}_{(0)}$  die Lösung  $\tilde{\gamma}_{(l)}$  des obigen Verfahrens für  $l \rightarrow \infty$  gegen ein Minimum  $\tilde{\gamma}^*$ , das (13.92) bis (13.95) erfüllt.

#### 13.4.4 Berechnung der Suchrichtung

Die Gleichungen (13.92) bis (13.93) lassen sich folgendermaßen umschreiben:

$$\frac{\partial L(\tilde{\gamma}^*, \chi^*)}{\partial [\tilde{\gamma}^T, \chi^T]^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \tilde{\gamma}} \\ \frac{\partial L}{\partial \chi} \end{pmatrix} = \nabla L(\tilde{\gamma}^*, \chi^*) = \begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^*, \chi^*) = \mathbf{0} \\ L_{\chi}(\tilde{\gamma}^*, \chi^*) \leq \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (13.99)$$

(13.99) stellt ein System von Ungleichungen dar.

Zur Lösung dieses Systems aus Ungleichungen wird das Newton-Verfahren eingesetzt. Hierzu wird (13.99) in eine nach dem ersten Glied abgebrochene Taylor-Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}
\nabla L \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^{(l)} + \delta\tilde{\gamma}^{(l)} \\ \chi^{(l)} + \delta\chi^{(l)} \end{pmatrix} &= \nabla L + \frac{\partial \nabla L}{\partial [\tilde{\gamma}^T, \chi^T]^T} \cdot [\delta\tilde{\gamma}^{(l)T}, \delta\chi^{(l)T}]^T \\
&= \nabla L(\tilde{\gamma}^{(l)}, \chi^{(l)}) + H[L(\tilde{\gamma}^{(l)}, \chi^{(l)})] \cdot [\delta\tilde{\gamma}^{(l)T}, \delta\chi^{(l)T}]^T \\
&= \begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)}, \chi^{(l)}) \\ L_{\chi}(\tilde{\gamma}^{(l)}, \chi^{(l)}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial L_{\tilde{\gamma}}}{\partial \tilde{\gamma}} & \frac{\partial L_{\tilde{\gamma}}}{\partial \chi} \\ \frac{\partial L_{\chi}}{\partial \tilde{\gamma}} & \frac{\partial L_{\chi}}{\partial \chi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\tilde{\gamma}^{(l)} \\ \delta\chi^{(l)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}} \\ L_{\chi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} & \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}^T \\ \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\tilde{\gamma}^{(l)} \\ \delta\chi^{(l)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{\tilde{\gamma}} + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}^T \cdot \chi^{(l)} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} & \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}^T \\ \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\tilde{\gamma}^{(l)} \\ \delta\chi^{(l)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{\tilde{\gamma}} + L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}^T \cdot (\chi^{(l)} + \delta\chi^{(l)}) = 0 \\ \mathbf{g} + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}} \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} \leq 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{13.100}$$

Mit  $\chi_{QP} = \chi^{(l)} + \delta\chi^{(l)}$  ergibt sich (13.100) zu:

$$\begin{pmatrix} L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} \delta\tilde{\gamma}^{(l)} + F_{\tilde{\gamma}} + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}^T \chi_{QP} = 0 \\ \mathbf{g} + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}} \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} \leq 0 \end{pmatrix}. \tag{13.101}$$

$L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)}, \chi^{(l)})$ ,  $F_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)})$ ,  $\mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)})$  und  $\mathbf{g}(\tilde{\gamma}^{(l)})$  sind im Iterationsschritt  $l$  Konstanten und die Komponenten des Vektors  $\delta\tilde{\gamma}^{(l)}$  die gesuchten Variablen. Somit läßt sich (13.101) auch als notwendige Bedingung 1. Ordnung des folgenden Problems der Quadratischen Programmierung auffassen:

$$\text{Zielfunktion: } \min_{\delta\tilde{\gamma}^{(l)}} \left[ \frac{1}{2} \delta\tilde{\gamma}^{(l)T} \cdot L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)}, \chi^{(l)}) \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} + F_{\tilde{\gamma}}^T(\tilde{\gamma}^{(l)}) \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} + F(\tilde{\gamma}^{(l)}) \right] \tag{13.102}$$

$$\text{UNB: } \mathbf{g}(\tilde{\gamma}^{(l)}) + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)}) \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} \leq \mathbf{0} \tag{13.103}$$

Die  $19 \cdot n_p$  UNB werden durch sog. Schlupfvariablen auf GNB zurückgeführt. (13.103) geht in

$$\mathbf{g}(\tilde{\gamma}^{(l)}) + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)}) \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} + (z_1^2, z_2^2, \dots, z_{19 \cdot n_p}^2)^T = \mathbf{0} \tag{13.104}$$

und die zu (13.102) bis (13.104) gehörende Lagrangefunktion in

$$\begin{aligned}
L_{QP} &= \frac{1}{2} \delta\tilde{\gamma}^{(l)T} \cdot L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)}, \chi^{(l)}) \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} + F_{\tilde{\gamma}}^T(\tilde{\gamma}^{(l)}) \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} + F(\tilde{\gamma}^{(l)}) \\
&+ \chi_{QP}^T \cdot (\mathbf{g}(\tilde{\gamma}^{(l)}) + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}^{(l)}) \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)}) \\
&+ (z_1^2, z_2^2, \dots, z_{19 \cdot n_p}^2)^T
\end{aligned} \tag{13.105}$$

über.

Die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung lauten dann:

$$\frac{\partial L_{QP}}{\partial \tilde{\gamma}^{(l)}} = L_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}} \cdot \delta\tilde{\gamma}^{(l)} + F_{\tilde{\gamma}} + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}^T \cdot \chi_{QP} = \mathbf{0} \tag{13.106}$$



$$\frac{\partial L_{QP}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \chi_1 \cdot z_1 = 0 \\ 2 \cdot \chi_2 \cdot z_2 = 0 \\ \vdots \\ 2 \cdot \chi_{19 \cdot n_p} \cdot z_{19 \cdot n_p} = 0 \end{pmatrix} \quad (13.107)$$

$$\frac{\partial L_{QP}}{\partial \chi_{QP}} = \mathbf{g}(\tilde{\gamma}(l)) + \mathbf{g}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}(l)) \cdot \delta \tilde{\gamma}(l) + (z_1^2, z_2^2, \dots, z_{19 \cdot n_p}^2)^T = \mathbf{0}. \quad (13.108)$$

(13.106) bis (13.108) sind in dieser Arbeit ein lineares Gleichungssystem mit  $4 \cdot (L + M - 1) - 11 + 2 \cdot 19 \cdot n_p$  Gleichungen und  $4 \cdot (L + M - 1) - 11 + 2 \cdot 19 \cdot n_p$  Variablen, welches z. B. mit dem Gauß-Verfahren gelöst werden kann. Neben  $\mathbf{z}$  und  $\chi_{QP}$  fällt u. a. der in Schritt *C* des Verfahrens der Sequentiellen Quadratischen Programmierung benötigte Vektor der Suchrichtung  $\delta \tilde{\gamma}(l)$  an.

## 13.5 Vorschlag für mehrdimensionale Singularitätsintervalle

Vorschlag für das Szenario 4:

- Singularität in  $barm_0$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} \{\bar{m}_0^\eta; \bar{m}_0^{\eta+1}\} \\ \{\sigma_0^t - \frac{\Delta \sigma_0}{2}; \sigma_0^t + \frac{\Delta \sigma_0}{2}\} \end{pmatrix}$$

- Singularität in  $\bar{\sigma}_0$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} \{\bar{m}_0^\eta - \frac{\Delta \bar{m}_0}{2}; \bar{m}_0^\eta + \frac{\Delta \bar{m}_0}{2}\} \\ \{\sigma_0^t; \sigma_0^{t+1}\} \end{pmatrix}$$

Vorschlag für das Szenario 5:

- Singularität in  $barm_1$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} \{\bar{m}_1^\eta; \bar{m}_1^{\eta+1}\} \\ \{\sigma_1^t - \frac{\Delta \sigma_1}{2}; \sigma_1^t + \frac{\Delta \sigma_1}{2}\} \end{pmatrix}$$

- Singularität in  $\bar{\sigma}_1$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} \{\bar{m}_1^\eta - \frac{\Delta \bar{m}_1}{2}; \bar{m}_1^\eta + \frac{\Delta \bar{m}_1}{2}\} \\ \{\sigma_1^t; \sigma_1^{t+1}\} \end{pmatrix}$$

Vorschlag für die Szenarien 6 und 7:

- Singularität in  $\theta_{1f}$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} \{\theta_{1f}^\eta; \theta_{1f}^{\eta+1}\} \\ \{\theta_{2f}^\eta - \Delta\theta_{2f}; \theta_{2f}^\eta + \Delta\theta_{2f}\} \\ \{\theta_{3f}^\eta - \Delta\theta_{3f}; \theta_{3f}^\eta + \Delta\theta_{3f}\} \end{pmatrix}$$

- Singularität in  $\theta_{2f}$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} \{\theta_{1f}^\eta - \Delta\theta_{1f}; \theta_{1f}^{\eta+1} + \Delta\theta_{1f}\} \\ \{\theta_{2f}^\eta; \theta_{2f}^\eta\} \\ \{\theta_{3f}^\eta - \Delta\theta_{3f}; \theta_{3f}^\eta + \Delta\theta_{3f}\} \end{pmatrix}$$

- Singularität in  $\theta_{3f}$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} \{\theta_{1f}^\eta - \Delta\theta_{1f}; \theta_{1f}^{\eta+1} + \Delta\theta_{1f}\} \\ \{\theta_{2f}^\eta - \Delta\theta_{2f}; \theta_{2f}^\eta + \Delta\theta_{2f}\} \\ \{\theta_{3f}^\eta; \theta_{3f}^\eta\} \end{pmatrix}$$

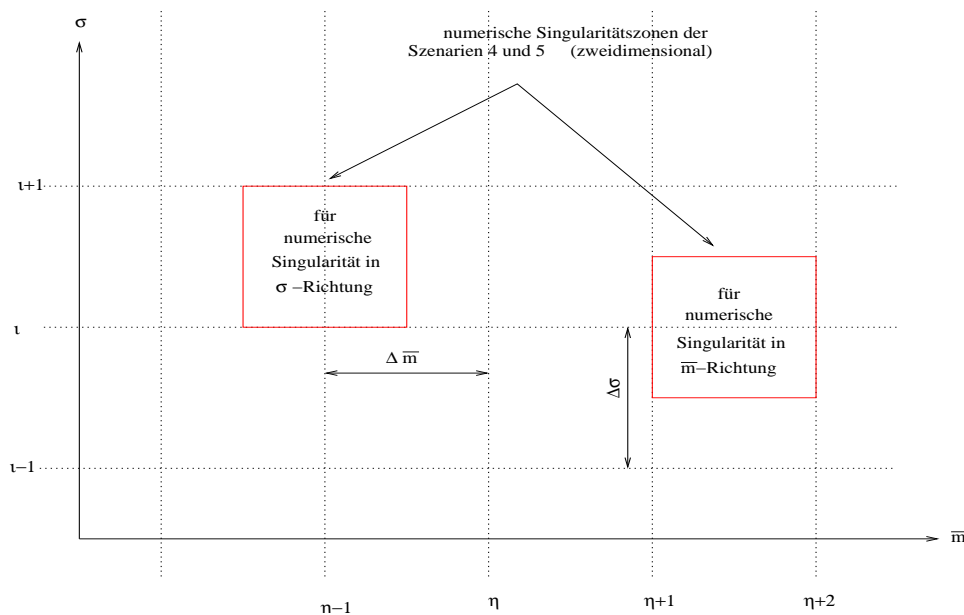


Abbildung 13.4: Zweidimensionales Singularitätsintervall

### 13.6 Zur Diskussion

Aus den Definitionen 13.7 und 13.8 wird ohne Beweis geschlossen, daß *gerade aktive* und *strikt aktive UNB* nicht gleichzeitig existieren können, d.h. alle aktiven **UNB** sind entweder *gerade aktiv* oder *strikt aktiv*. Dies drücken die folgenden Sätze aus:

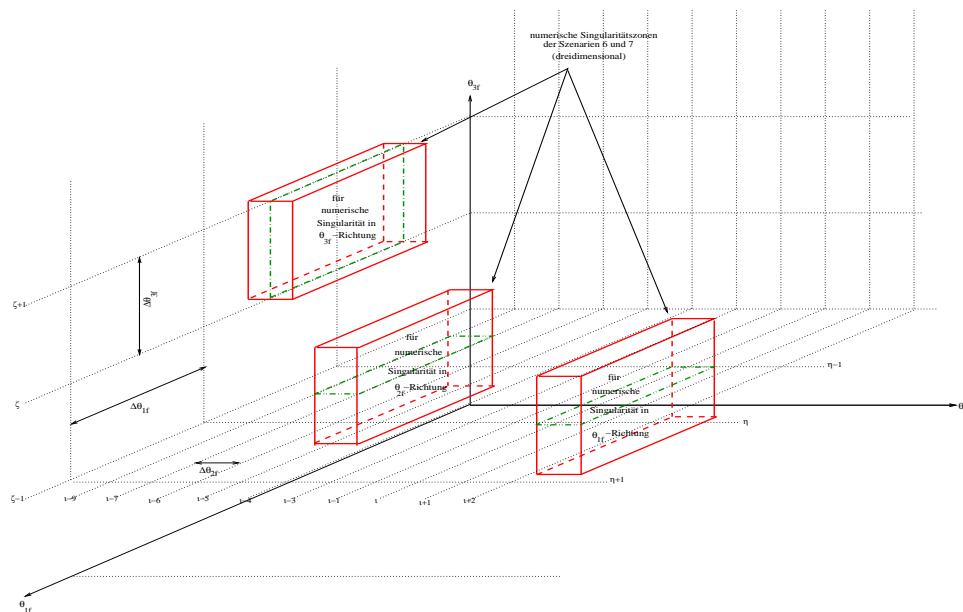


Abbildung 13.5: Deidimensionales Singularitätsintervall

*Satz 13.3:*

Genau dann, wenn *gerade aktive UNB* existieren, ist  $\gamma^*$  eine lokale Minimalstelle der Zielfunktion  $F$  selbst, d.h. die *gerade aktive UNB* kreuzt die Minimalstelle der Zielfunktion:  $\equiv F_{\gamma}(\gamma^*) = \mathbf{0}$ .

*Satz 13.4:*

Genau dann, wenn *gerade aktive UNB* existieren, gibt es keine *strikt aktiven UNB*, d.h. der die zugehörigen Kuhn-Tucker-Multiplikatoren enthaltene Vektor  $\chi_{aktiv}^*$  ist ein Nullvektor:  $\chi_{aktiv}^* = \mathbf{0}$ .

*Satz 13.3:*

Genau dann, wenn *gerade aktive UNB* existieren, schneiden auch alle **GNB** die Zielfunktion  $F$  an ihrer Minimalstelle selbst, d.h. der die Lagrange-Multiplikatoren enthaltene Vektor  $\lambda^*$  ist auch ein Nullvektor:  $\lambda^* = \mathbf{0}$ .

*Satz 13.5:*

Genau dann, wenn keine *gerade aktiven UNB* existieren, sind alle Komponenten des Vektors  $\lambda^*$  ungleich 0.

*Satz 13.6:*

Genau dann, wenn *strikt aktive UNB* vorhanden sind, sind alle Komponenten des Vektors  $\chi_{aktiv}^*$  größer 0:  $\chi_{aktiv}^* > \mathbf{0}$ .

# Literaturverzeichnis

- [1] Aurnhammer, A. *Optimale Stochastische Trajektorienplanung und Regelung von Industrierobotern* Universität der Bundeswehr München / LRT-1, 2005
- [2] Bertsekas, D. P.: *Nonlinear Programming*, Athena Sci., Belmont, Mass., 1995
- [3] Bobrow, J. E.; Dubowsky, S.; Gibson, J.S.: *Time-optimal Control of Robotic Manipulators*, Int. J. Robot. Res. 4(3), 1985, pp. 3-17
- [4] de Boor, C.: *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, New York, 1978
- [5] Brendlin: *Vorlesung Logistiksysteme auf Flughäfen / Institut für Fördertechnik und Logistiksysteme / Fakultät für Maschinenbau / Universität Karlsruhe, 2003*
- [6] Büskens, C.: *Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen* Inaugural-Dissertation, Münster 1998
- [7] Dickmanns, E.D.: *Systemanalyse und Regelkreissynthese*, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1985
- [8] Eiselt, H. A.; Pederzoli, G.; Sandblom, C.-L.: *Continuous Optimization Models*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987
- [9] Eschenauer, H.; Olhoff, N.: *Optimization methods in structural design*, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1983
- [10] Feldmann, D.: *Repetitorium der Ingenieur-Mathematik, Teil 1*, Feldmann-Verlag, Springe, 1991
- [11] Feldmann, D.: *Repetitorium der Ingenieur-Mathematik, Teil 2*, Feldmann-Verlag, Springe, 1989
- [12] Mühlbach, G.: *Repetitorium der Ingenieur-Mathematik, Teil 3*, Feldmann-Verlag, Springe, 1990
- [13] Fiacco, A.V. *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Programming* Academic Press, New York, 1983
- [14] Fletcher, R.: *Practical Methods of Optimization*, Wiley-Interscience, Chichester, 1996
- [15] Fu, K. S.; Gonzalez, R.C.; Lee, C.S.G.: *Robotics, Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, New York, 1987
- [16] Gill, P. E.; Murray, W., Wright, M. H.: *Practical Optimization*, Academic Press, 1981
- [17] Gill, P. E.; Murray, W.; Saunders, M. A.: *User's Guide for SNOPT 5.3: A FORTRAN Package for Large-Scale Nonlinear Programming*, University California/Stanford University, March, 1998
- [18] [www.grenzebach.com](http://www.grenzebach.com)

- [19] Hettich,R.; Zencke,P.: *Numerische Methoden der Approximation und semi-infiniten Optimierung*, B.G.Teubner, Stuttgart, 1982
- [20] Johanni, R.: *Optimale Bahnplanung bei Industrierobotern*, VDI Fortschrittberichte, Reihe 18, Nr. 51, Düsseldorf, 1988
- [21] Johanni, R.; Pfeiffer, F.: *Optimale Bahnplanung für Industrieroboter*, Robotersysteme 3, 1987, pp. 29-36
- [22] Marcel Dekker *Statistical Computing* The rational function on page 95 of Kennedy and Gentle, NY, 1980
- [23] [www.kuka-roboter.de/deutsch/index.html](http://www.kuka-roboter.de/deutsch/index.html); kuka control panel (kcp)
- [24] [www.kuka-roboter.com](http://www.kuka-roboter.com); 01.04.2002; CD Kartondruck AG
- [25] Loeve, M.: *Probability Theory I*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1977
- [26] [www.loedige.com](http://www.loedige.com)
- [27] Lunze, j.: *Regelungstechnik 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1999
- [28] Lunze, j.: *Regelungstechnik 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1997
- [29] Marti, K.: *Path Planning for Robots under Stochastic Uncertainty*, Optimization, 45, 1999, pp. 163-195
- [30] Marti, K.: *Robust Adaptive Control of Robots by Stochastic Optimization Methods*, Proceedings 2nd Int. Conf. on Engineering Computational Technology, 6-8 September 2000, Leuven, Belgium, Civil-Comp Press 2000.
- [31] Marti, K.: *Adaptive Optimal Stochastic Trajectory Planning and Control (AOSTPC)*., In K. Marti, Y. Ermoliev, G. Pflug (eds.): *Dynamik Stochastic Optimization* Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [32] Marti, K.: *Ein Kriterium für die Umschaltung zwischen Approximation 0. und 1. Ordnung*, *Manuskript*, Institut für Mathematik und Rechneranwendung, Universität der Bundeswehr München, Ende November 2005.
- [33] Marti, K.: *Persönliche Mitteilung*, Institut für Mathematik und Rechneranwendung, Universität der Bundeswehr München, Ende November 2005.
- [34] Marti, K.; Aurnhammer, A.: *Adaptive Stochastic Path Planning and Control (ASPPC)*. In: G. I. Schuëller, P. Kafka (eds.), *Safety and Reliability*, A. A. Balkeema, Rotterdam 1999, Volume 2, pp. 1609-1614.
- [35] Marti, K.; Groeger, D.: *Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung*, Physica/Springer-Verlag, Heidelberg-New York, 2000.
- [36] Marti, K.; Qu, S.: *Optimal Trajectory Planning for Robot Considering Stochastic Parameters and Disturbances*. In: K. Marti, P.Kall (eds.), *Stochastic Programming: Numerical Techniques and Engineering Application*, LNEMS, Vol. 423, Springer-Verlag, NewYork-Berlin-Heidelberg 1995, pp.268-288
- [37] Marti, K.; Qu, S.: *Optimal Trajectory Planning for Robot Considering Stochastic Parameters and Disturbances - Computation of an Efficient Open-Loop Strategy*, J. Intelligent and Robotic Systems 15, 1996, pp. 19-23

- [38] Marti, K.; Qu, S.: *Path Planning for Robots by Stochastic Optimization Methods*, J. Intelligent and Robotic Systems 22, 1998, pp. 117-127
- [39] Marti, K.; Qu, S.: *Adaptive stochastic path planning for robots - Real-time optimization by means of neural networks*. In: M. P. Polis et al. (eds.), *Systems Modeling and Optimization*, Chapman and Hall/CRC Research Notes on Mathematics, London, 1999, pp. 486-494
- [40] Marti, K.: *Adaptive Optimal Stochastic Trajectory Planning and Control (AOSTPC) for Robots* Federal Armed Forces University Munich (2001)
- [41] Marti, K.: *Stochastic Optimization Methods* Springer-Verlag, Berlin, 2004
- [42] Papageorgiou, M.: *Optimierung*, Oldenbourg, München, 1996
- [43] Paul, R. P.: *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*, MIT Press, Cambridge, 1981
- [44] Pfeiffer, F.; Johanni, R.: *A Concept for Manipulator Trajectory Planning*, IEEE J.Robot. Automat. RA-3(3), 1987, pp. 115-123
- [45] Pfeiffer, F.; Reithmeier, E.: *Roboterdynamik*, B.G.Teubner, Stuttgart, 1987
- [46] Polak, E.; Mayne, D. Q.: *An Algorithm for Optimization Problems with Functional Inequality Constraints*, IEEE Tran. Auto. Contr. Vol. AC-21 No.2, 1976, pp. 184-193
- [47] Prüfer *Reibungsanalyse und Identifikation von Dynamikparametern bei direktangetriebenen und getriebebehafteten Robotern* Shaker, Aachen, 1996
- [48] Qu, S.: *Optimale Bahnplanung für Roboter unter Berücksichtigung stochastischer Parameterschwankungen*, VDI Verlag, Düsseldorf, 1995
- [49] Qu, S.: *Stochastic Trajectory planning and its application for Robot Manutec r3*, In: K.Marti, P. Kall (eds.), *Stochastic Programming Methods and Technical Applications*, LNEMS, Vol. 458, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1998, pp. 382-393
- [50] Ritter, K.; Kredler C.: *Nichtlineare Optimierung*, Institute of Applied Mathematics and Statistics, University of Technology Munich, 1992
- [51] Rojas, R.: *Theorie der neuronalen Netze* Springer-Verlag, Berlin, 1996
- [52] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators* Springer-Verlag, Berlin, 2005
- [53] Schiller, Z.; Dubowsky, S.: *Robot Path Planning with Obstacles, Actuator, Gripper and Payload Constraints*, Int. J. Robot. Res. 8(6),1989, pp. 3-18
- [54] Schmit, L.A., Chang, K.J.: *Optimum Design Sensitivity Based on Approximation Concept and Dual Methods* International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 39-75, 1984
- [55] Schnoor, B.; Cottone, N.: *Robot Baggage Handling* www.kuka-roboter.de, 2003
- [56] Schraft, R.D.; Schmierer, G.: *Serviceroboter-Produkte-Szenarien-Visionen* Springer-Verlag, 1998
- [57] Schrüfer, E.: *Elektrische Meßtechnik* Hansa-Verlag, 5. Auflage, München, 1992
- [58] Schumaker, L. L.: *Spline Functions : Basic Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1981

- [59] Shin, K. G.; McKay, N. D.: *Minimum-time Control of Robotic Manipulator with Geometric Path Constraints*, IEEE Trans. Automat. Control AC-30(6), 1985, pp. 370-375
- [60] Sobieszczanski-Sobieski, J., Barthelemy, J.F., *Extrapolation of Optimum Designs Based on Sensitivity Derivatives* AIAA Journal, Vol.21, pp. 797-799, 1983
- [61] Stoer, J.; Bulirsch, R.: *Numerische Mathematik 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1993
- [62] Stoer, J.; Bulirsch, R.: *Numerische Mathematik 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [63] Dinges, H.; Rost, H.: *Prinzipien der Stochastik*, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1982
- [64] Szabo, I.: *Einführung in die Technische Mechanik* Springer-Verlag, Berlin, 1959
- [65] Szabo, I.: *Höhere Technische Mechanik* Springer-Verlag, Berlin, 1960
- [66] Gross, D.; Hauger, W.; Schnell, W.: *Technische Mechanik 1*, Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage 1992
- [67] Gross, D.; Hauger, W.; Schnell, W.: *Technische Mechanik 2*, Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage 1992
- [68] Gross, D.; Hauger, W.; Schnell, W.: *Technische Mechanik 3*, Springer-Verlag, Berlin, 3. Auflage 1990
- [69] , Tanner u. Co AG, Verpackungstechnik: *www.tannerag.ch*, Industriestrae 3, CH-5616 Meisterschwanden, 2004
- [70] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik Teil 1*, Teubner-Verlag, Stuttgart-Leipzig, 1996
- [71] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik Teil 2*, Teubner-Verlag, Stuttgart-Leipzig, 1995
- [72] Türk, S.: *Dynamische Robotermodelle am Beispiel des Manutec r3* Technischer Bericht 88-16, DFVLR, Institut für Dynamik der Flugsysteme, Oberpfaffenhoven, Juni 1988
- [73] Türk, S.: *Zur Modellierung der Dynamik von Robotern mit rotatorischen Gelenken*, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1990
- [74] Walter, W.: *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Springer-Verlag, 5. Auflage 1993
- [75] Wan, F. Y. M.: *Introduction to calculus of variations and its applications*, Chapman and Hall, New York, 1995