

# Zur mesomechanischen Modellierung von Beton und ihrer Anwendung zur makromechanischen Modellbildung

**Thomas Hartmann**

Von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktoringenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Thomas Apel  
1. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Norbert Gebbeken  
2. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Ulrich Häußler-Combe  
(Technische Universität Dresden)

Tag der Einreichung: 08. Juni 2009

Tag der Prüfung: 07. Oktober 2009



# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Modellbildung für Beton auf der Ebene der Mesomechanik und deren Anwendung zur Ableitung makromechanischer Werkstoffmodelle. Auf Basis eines mesomechanischen Modells werden die Materialparameter und -kenngrößen der für das Materialverhalten wesentlichen Bestandteile des Betons ermittelt. Diese dienen als Eingangsdaten für Werkstoffsimulationen, in denen aus dem komplexen Zusammenwirken der einzelnen Bestandteile auf die Eigenschaften des heterogenen Betons geschlossen werden kann. Damit können aufwendige und teure Versuche ergänzt und/oder ersetzt werden. Es werden Werkstoffsimulationen zur Bestimmung der Zustandsgleichung durchgeführt und aufbauend darauf eine Methode zur einfachen Abschätzung der Zustandsgleichungen unterschiedlicher Betone entwickelt. Zudem werden Festigkeitsversuche mit wechselnder Belastungsrichtung und unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten simuliert und ausgewertet. Aufbauend auf den dabei gewonnenen Erkenntnissen und funktionalen Zusammenhängen wird in dieser Arbeit ein neues Werkstoffmodell zur makromechanischen Materialbeschreibung von Beton unter quasi-statischen bis hochdynamischen Belastungen entwickelt. Das Werkstoffmodell wird in eine Hydrocode-Umgebung implementiert und validiert.

## Abstract

Subject of this thesis is the numerical modelling of concrete on the level of mesomechanics and its application to the development of macromechanical material models. On the basis of a mesomechanical model the material parameters of the main components constitutive for the material behaviour of concrete are determined. These parameters are applied as the input for material simulations in which the properties of the heterogeneous material concrete can be determined from the analysis of interaction of its components. These simulation are to complement and/or to substitute complex and costly experiments. Material simulations for the determination of the equation of state are conducted and a methodology for the simple assessment of the equation of state of different concrete types is developed. Furthermore, material strength tests with alternating loading direction and with different loading rate are simulated and analysed. Based on the findings and functional coherences gained from the material simulations a new material model for the macro-mechanical description of concrete under quasi-static up to high-dynamic loading is developed. This model is implemented in a hydrocode and is validated.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2006 bis 2009 im Rahmen meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Norbert Gebbeken für die Betreuung dieser Dissertation sowie für die Übernahme des Erstreferats. Herr Professor Gebbeken ermöglichte mir an seinem Lehrstuhl diese Arbeit und schuf die notwendigen wissenschaftlichen Rahmenbedingungen für ihr Gelingen.

Ich danke darüber hinaus Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Ulrich Häußler-Combe für die Übernahme des Korreferats und Herrn Professor Dr. rer. nat. habil. Thomas Apel für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsausschusses.

Ferner gilt mein Dank allen Kollegen am Institut für Mechanik und Statik. Ihre technische Unterstützung und die vielen fachlichen Diskussionen und Anregungen haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Insbesondere danke ich Herrn Eberhard Pfeiffer für seine bereitwillige Hilfe zu allen administrativen Fragen, Herrn Rainer Thiel für den IT-Support und Herrn Achim Pietzsch für die zahlreichen Anregungen zu meiner Forschung.

Neubiberg, im Oktober 2009

Thomas Hartmann

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	XIII
Symbolverzeichnis	XVII
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung . . . . .	3
1.3 Zielsetzung . . . . .	16
1.4 Aufbau der Arbeit . . . . .	17
<b>2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie</b>	<b>21</b>
2.1 Ausgewählte Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . .	22
2.2 Grundlagen der Materialtheorie . . . . .	29
<b>3 Grundlagen der Wellenausbreitung</b>	<b>35</b>
3.1 Allgemeines . . . . .	35
3.2 Arten von Wellen . . . . .	35
3.3 Die Zustandsgleichung (EoS) . . . . .	41
3.4 Störungen in der Wellenausbreitung . . . . .	46
<b>4 Grundlagen der Hydrocodes</b>	<b>49</b>
4.1 Allgemeines . . . . .	49
4.2 EULERSche und LAGRANGESche Betrachtungsweise . . . . .	50
4.3 Numerik der Hydrocodes . . . . .	52
4.4 Zusammenfassung . . . . .	66
<b>5 Mesomechanische Modellierung von Beton</b>	<b>67</b>
5.1 Skalierung üblicher Modelle für Betone . . . . .	67
5.2 Konzept der mesomechanischen Modellierung . . . . .	69
5.3 Bestandteile und Zusammensetzung von Beton . . . . .	70
5.4 Modellierung des Zuschlags . . . . .	73
5.5 Modellierung des Zementsteins . . . . .	77

5.6	Zusammenfassung . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Ermittlung der EoS aus Werkstoffsimulation</b>	<b>85</b>
6.1	Generierung des numerischen Modells . . . . .	85
6.2	Auswerteverfahren und Bestimmung des RVE . . . . .	89
6.3	Validierung der EoS-Bestimmung . . . . .	92
6.4	Numerische Studien . . . . .	96
6.5	Einfache Abschätzung der EoS des Betons . . . . .	108
6.6	Zusammenfassung . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Untersuchung von Festigkeit und Schädigung in Werkstoffsimula- tionen</b>	<b>113</b>
7.1	Allgemeines . . . . .	113
7.2	Modellbildung der Interfacial Transition Zone (ITZ) . . . . .	114
7.3	Numerische Simulation von Zug- und Druckversuchen . . . . .	124
7.4	Festigkeitsversuche mit wechselnder Lastrichtung . . . . .	139
7.5	Untersuchung des Zugbruchverhaltens bei unterschiedlichen Verzer- rungsraten . . . . .	156
7.6	Zusammenfassung und Folgerungen . . . . .	162
<b>8</b>	<b>Makromechanische Materialbeschreibung</b>	<b>165</b>
8.1	Allgemeines . . . . .	165
8.2	Dynamisches Werkstoffverhalten von Beton . . . . .	166
8.3	Bekannte Materialmodelle für Beton unter (hoch-)dynamischer Be- lastung . . . . .	172
8.4	Zustandsgleichung des neuen Modells . . . . .	182
8.5	Versagensfläche des neuen Modells . . . . .	183
8.6	Schädigungsmodell . . . . .	189
8.7	Degradation der Materialeigenschaften . . . . .	198
8.8	Zusammenfassung . . . . .	202
<b>9</b>	<b>Verifikation und Validierung des makromechanischen Modells</b>	<b>205</b>
9.1	Allgemeines . . . . .	205
9.2	Verifikation . . . . .	206
9.3	Validierung . . . . .	208
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>229</b>
10.1	Zusammenfassung . . . . .	229
10.2	Bewertung . . . . .	231
10.3	Ausblick . . . . .	232
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>235</b>
<b>A</b>	<b>Grundlegende Werkstoffmodelle</b>	<b>A-1</b>

---

<b>B</b>	<b>Betonrezepte und Stoffraumgleichungen</b>	<b>A-5</b>
<b>C</b>	<b>Materialparameter des Zementgels</b>	<b>A-11</b>
<b>D</b>	<b>Materialparameter und -kenngrößen</b>	<b>A-15</b>
D.1	Validierung der EoS-Bestimmung . . . . .	A-15
D.2	Einfluss des Festigkeitsmodells auf die Hugoniot-Daten . . . . .	A-15
D.3	Vergleich der EoS aus meso- und makromechanischer Simulation . . .	A-18
D.4	Simulation einaxialer Druck- und Zugversuche . . . . .	A-18
D.5	Simulation von Festigkeitsversuchen mit wechselnder Lastrichtung . .	A-20



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Einordnung unterschiedlicher Belastungen nach der Verzerrungsrate . . . . .	2
1.2	Modellbildung und Lösungsverfahren zur Berechnung realer Strukturen (nach [19]) . . . . .	5
1.3	Einaxiale Werkstoffprüfung mit statischer Belastung: a) Druckversuch; b) Zugversuch; c) Drei- und Vier-Punkt-Biegezugversuch . . . . .	8
1.4	Aufbau eines Split-Hopkinson-Pressure-Bar Tests (schematisch) . . . . .	8
1.5	Aufbau eines Planar-Platten-Impaktversuchs (nach [14]) . . . . .	9
1.6	Gegenüberstellung verschiedener Fließflächen im Deviator- und Meridianschnitt . . . . .	12
1.7	Microplane Theorie basierend auf der kinematischen Projektion (nach [160]) . . . . .	13
2.1	Kinematik des materiellen Punktkontinuums . . . . .	22
2.2	Differentielles Volumenelement mit Spannungsvektoren; links: CAUCHY-Spannungen, rechts: Aufspaltung in hydrostatischen und deviatorischen Anteil . . . . .	24
2.3	Assoziierte und VON MISES-äquivalente Fließregel im Deviator-(links) und Meridianschnitt (rechts) . . . . .	31
3.1	Wellenausbreitung in einem Halbraum bei lokaler Einwirkung (nach MEYERS 1994 [193]) . . . . .	36
3.2	Ausbreitung einer elastischen und einer plastischen Welle . . . . .	39
3.3	Entstehung einer Schockfront . . . . .	40
3.4	Zustandsgrößen vor und hinter einer Schockfront (schematisch) . . . . .	40
3.5	Grafische Darstellung einer Druck-Dichte-Energie-Beziehung . . . . .	41
3.6	Poröse HUGONIOT-EoS für Beton (schematisch) . . . . .	44
3.7	Schräg auf eine Grenzfläche zweier unterschiedlicher Medien treffende Longitudinalwelle (nach [193]) . . . . .	47
3.8	Wellenreflektion an einer freien Oberfläche eines Festkörpers; oben: Spannung, unten: Partikelgeschwindigkeit . . . . .	48
4.1	Impakt-Simulation; links: EULERSche Betrachtungsweise, rechts: LAGRANGESche Betrachtungsweise . . . . .	51

4.2	Nummerierungssyntax der Zellknoten mit Zuordnung der zu berechnenden Größen . . . . .	55
4.3	Mögliche Integrationspfade bei der Integralen-Differenzen-Methode in 2D . . . . .	56
4.4	Kontaktbereich zwischen Slave- und Masterelementen bei der Interaktion . . . . .	59
4.5	Deformation der Sprengstoff-Elemente bei einer Kontaktdetonation . . . . .	61
4.6	Entstehung von Boomerang- und Schleifen-Elementen in 2D . . . . .	62
4.7	”Hourglass”-Eigenform am Beispiel von Elementen (2D) und Zellen (3D) . . . . .	62
4.8	Druckverlauf hinter der Schockdiskontinuität (aus [232]); links: ohne künstliche Viskosität, rechts: mit künstlicher Viskosität . . . . .	65
5.1	Modellebenen zur Beschreibung einer realen Mikrostruktur . . . . .	68
5.2	Zerlegung des Betons in homogene Bestandteile (nach [233]) . . . . .	70
5.3	Beton; Größenverteilung der Poren (nach [274]) . . . . .	71
5.4	Beton; Regelsieblinien für Zuschläge mit einem Größtkorn von 8 mm (oben links), 16 mm (oben rechts) und 32 mm (unten) (aus: [73]) . . . . .	72
5.5	$U_s$ - $u_p$ -Beziehung von Granit; Experimente nach MARSH [187] und lineare Ausgleichsfunktion . . . . .	74
5.6	Druck-Fließspannungs-Beziehung von Granit; Experimente aus [246] und [200] mit trilinearer Ausgleichsfunktion . . . . .	76
5.7	Zusammensetzung des Zementmatrixvolumens in Abhängigkeit vom w/z-Wert [274] . . . . .	77
6.1	Schrittweise Generierung des mesomechanischen Rechenmodells . . . . .	86
6.2	Algorithmus zur Erzeugung des geometrischen Modells von Beton auf Ebene der Mesomechanik . . . . .	87
6.3	Definition der Randbedingungen zur Erzeugung einer longitudinalen Belastungswelle im Betonkörper . . . . .	88
6.4	Partikelgeschwindigkeit im Betonkörper A8 während der Simulation mit $u_p = 100$ m/s . . . . .	89
6.5	Zeitlicher Verlauf der Partikelgeschwindigkeit in einem Auswertepunkt . . . . .	90
6.6	Auswertung der Wellengeschwindigkeit über der Lauflänge . . . . .	90
6.7	Standardabweichung und Bestimmung des RVE . . . . .	91
6.8	Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten aus [203] . . . . .	93
6.9	Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten aus [166] und [203] . . . . .	94
6.10	Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten aus [165] für $d_{\max} = 16$ mm . . . . .	95
6.11	Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten aus [165] für $d_{\max} = 32$ mm . . . . .	95
6.12	Drei- und ”quasi-zweidimensionaler” Betonkörper . . . . .	97

6.13	Vergleich von 2-D und 3-D Berechnungen bei $u_p = 500$ m/s . . . . .	97
6.14	Vergleich des Partikelgeschwindigkeitsverlaufs in einem Auswertepunkt bei Verwendung unterschiedlicher Festigkeitsmodelle . . . . .	98
6.15	Vergleich der $U_s$ - $u_p$ -Beziehungen aus Werkstoffsimulation bei Verwendung unterschiedlicher Festigkeitsmodelle . . . . .	99
6.16	Werkstoffsimulation; absolute Streuung der Wellengeschwindigkeit bei unterschiedlicher Kornverteilung im Probekörper . . . . .	101
6.17	Werkstoffsimulation; Vergleich der Druck-Dichte-Beziehungen bei unterschiedlicher Kornverteilung im Probekörper . . . . .	102
6.18	Generierung eines mesomechanischen Stahlfaserbetonkörpers . . . . .	103
6.19	Stahlfaserbeton; Erweiterung des Algorithmus zur mesomechanischen Probekörpermodellierung . . . . .	104
6.20	Stahlfaserbeton; $U_s$ - $u_p$ -Beziehungen bei unterschiedlichen Stahlfasergehalten . . . . .	106
6.21	Stahlfaserbeton; Druck-Dichte-Kurven bei unterschiedlichen Stahlfasergehalten . . . . .	107
6.22	Stahlfaserbeton; Überlagerung der Druck-Dichte-Kurven für 0.0 Vol.-% und 3.0 Vol.-% Stahlfasergehalt . . . . .	108
6.23	Werkstoffsimulation; Vergleich der meso- und makromechanischen Simulationen zur Bestimmung der Zustandsgleichung . . . . .	109
6.24	Abschätzung der EoS-Parameter; Eingabe-Oberfläche des auf Kapitel 5 basierenden Programms . . . . .	111
7.1	Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme der Mikrostruktur in der Verbundzone [132] . . . . .	114
7.2	Qualitative Darstellung der Porosität und des Kompressionsmoduls in der ITZ . . . . .	116
7.3	Porosität der ITZ und des Matrixmaterials in Abhängigkeit von der Entfernung vom Zuschlag . . . . .	117
7.4	Relative Verbundzugfestigkeit unterschiedlicher Zuschläge bei variierendem w/z-Wert nach Versuchen aus [143] . . . . .	121
7.5	Numerisches Modell (3D) zur Simulation der KUPFER- Versuche in [161] . . . . .	126
7.6	3D-Simulation der einaxialen Versuche in [161]; links: Schädigung in einem Zugversuch, rechts: Schädigung in einem Druckversuch . . . . .	127
7.7	3D-Simulation der einaxialen Versuche in [161]; links: Spannungs-Dehnungs-Diagramm, rechts: Spannungs-Stauchungs-Diagramm . . . . .	128
7.8	Vergleich zweier Probekörper mit gleicher Sieblinie und unterschiedlicher Diskretisierung . . . . .	129
7.9	Geometrisches Modell (2D) zur Simulation der KUPFER-Versuche in [161] . . . . .	132
7.10	Simulation der einaxialen Zugversuche in [161]; Spannungs-Dehnungs-Diagramm . . . . .	133

7.11 Simulation der einaxialen Zugversuche in [161]; Evolution der numerischen Schädigung . . . . .	134
7.12 Simulation der einaxialen Druckversuche in [161]; Spannungs-Stauchungs-Diagramm . . . . .	135
7.13 Simulation der einaxialen Druckversuche in [161]; Evolution der numerischen Schädigung . . . . .	137
7.14 Simulation der einaxialen Druckversuche in [161]; numerische Schädigung und effektive Verzerrungen bei $t = 50$ ms . . . . .	138
7.15 Simulation einaxialer Druckversuche, effektive Verzerrungen im Bruchzustand; links: Lasteinleitung ohne Behinderung der Querverzerrung, rechts: mit Behinderung der Querverzerrung . . . . .	139
7.16 Betonprobekörper, einaxialer Zugversuch; relative Zugfestigkeit bei unterschiedlichen Zuschlagsgrößen [4] . . . . .	140
7.17 Zugfestigkeitsverlust bei unterschiedlichen Zuschlagskorngrößen und verschiedenen Vorbelastungen [4] . . . . .	141
7.18 Zugfestigkeitsverlust bei mehraxialer Vorbelastung; Daten aus [247] .	142
7.19 Druck-Zug-Versuch; Aufbau des numerischen Modells . . . . .	143
7.20 Druck-Zug-Versuch; Ermittlung der Lastzeiten für unterschiedliche Belastungsstufen . . . . .	144
7.21 Druck-Zug-Versuch; Simulation der Versuche in [4]; Spannung $\sigma_y$ über der Zeit bei $d = 12$ mm . . . . .	145
7.22 Druck-Zug-Versuch; Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Versuchen in [4] . . . . .	146
7.23 Druck-Zug-Versuch; Zugfestigkeitsverlust infolge Vorbelastung bei verschiedenem Grobzuschlagsanteil . . . . .	148
7.24 Druck-Zug-Versuch; Zeitlicher Verlauf der Axialspannungen $\sigma_y$ während der Simulationen mit unterschiedlichen Vorbelastungen . . .	148
7.25 Druck-Zug-Versuch; Zugfestigkeitsverlust infolge verschiedener Vorbelastungen bei $a_{agg} = 0.54$ . . . . .	149
7.26 Druck-Zug-Versuch; Duktilitätszunahme infolge Druckbelastung; Auswerteverfahren am Beispiel $l_{pre} = 76\%$ . . . . .	150
7.27 Druck-Zug-Versuch; Duktilitätszunahme infolge unterschiedlicher Vorbelastungen . . . . .	150
7.28 Druck-Zug-Versuch; aus Simulationsdaten ermittelte $a_{agg}$ -TSL-Beziehungen (7.17) . . . . .	152
7.29 Druck-Zug-Versuch; aus Simulationsdaten ermittelte $l_{pre}$ -TSL-Beziehung (7.18) . . . . .	153
7.30 Druck-Zug-Versuch; Vergleich der aus Simulationen entwickelten $l_{pre}$ -TSL-Beziehung (7.20) mit Experimentaldaten aus [247] . . . . .	155
7.31 Druck-Zug-Versuch; aus Simulationsdaten ermittelter Zusammenhang zwischen Vorbelastung und relativer Duktilität (Gleichung (7.21))	156
7.32 Numerisches Modell zur Simulation der Biegezugversuche . . . . .	157
7.33 Verzerrungsrate im Querschnitt bei Biegezugbelastung . . . . .	158

7.34	Biegezugversuche bei unterschiedlicher Belastungsgeschwindigkeit; numerische Schädigungsbilder . . . . .	160
7.35	Biegezugversuche, numerische Schädigungsevolution; a) bei $u = 1.0$ m/s, b) bei $u = 5.0$ m/s . . . . .	161
8.1	Dynamische Druckfestigkeitssteigerung von Beton in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate (BISCHOFF & PERRY [35]) . . . . .	168
8.2	Dynamische Druckfestigkeitssteigerung; Gegenüberstellung verschiedener Steigerungsfunktionen mit den Mittelwerten der Versuchsdaten aus [35] . . . . .	169
8.3	Dynamische Zugfestigkeitssteigerung von Beton in Abhängigkeit von der Dehnrate (SCHULER ET AL. [248]) . . . . .	170
8.4	Dynamische Zugfestigkeitssteigerung; Gegenüberstellung verschiedener Steigerungsfunktionen mit den Mittelwerten der Versuchsdaten aus [248] . . . . .	171
8.5	Darstellung der Grenzflächen des K & C Modells nach [209] . . . . .	173
8.6	Darstellung der Grenzflächen des RHT Modells [233] . . . . .	176
8.7	Schematischer Aufbau des SCHULER Schädigungsmodells (aus [247]) . . . . .	177
8.8	Darstellung der Grenzfläche des RGGP Modells [106] . . . . .	178
8.9	Schematische Darstellung der Versagensfläche $Y_{max}$ für Beton; links: Meridianschnitt, rechts: Deviatorschnitt . . . . .	184
8.10	Aufweitung der Versagensfläche infolge dynamischer Festigkeitssteigerung; rot: vereinfachte Umsetzung, grün: kontinuumsmechanisch korrekte Umsetzung . . . . .	186
8.11	Aufweitung der elastischen Grenzfläche $Y_{el}$ bis zur Versagensfläche $Y_{max}$ . . . . .	188
8.12	Steifigkeitsverlust bei plastischer Verfestigung; zyklischer Druckversuch nach [253] . . . . .	188
8.13	Aufbau des erweiterten Schädigungsmodells . . . . .	192
8.14	Bestimmung unterschiedlicher Verzerrungszustände aus zyklischem Druckversuch (nach [253]) . . . . .	193
8.15	Auswertung der mehraxialen Versuche von KUPFER [161]; effektive Verzerrungen bei Maximallast . . . . .	195
8.16	Schädigungsevolution im Entwicklungsgesetz der Druckschädigung nach RUPPERT [238] . . . . .	197
8.17	Degradation der Steifigkeiten und Festigkeiten nach [58]; links: elastoplastisch entfestigend, Mitte: elastisch brechend, rechts: plastisch brechend . . . . .	199
8.18	Degradation der Festigkeiten . . . . .	200
9.1	Verifikation des Werkstoffgesetzes: Modellaufbau und Diskretisierung . . . . .	206
9.2	Betonzugversuch; Verifikation des Werkstoffgesetzes: Spannungs-Dehnungs-Diagramm bei einaxialer Zugbelastung . . . . .	207

9.3	Verifikation des Werkstoffgesetzes: Spannungs-Verzerrungs-Diagramm bei einaxialer Druckbelastung . . . . .	207
9.4	Validierung des Werkstoffgesetzes: Modellaufbau und Diskretisierung der Detonationssimulationen . . . . .	210
9.5	Schnittbild durch einen Versuchskörper: Definition der Schädigungsbereiche und -abmessungen . . . . .	211
9.6	Schädigungsbild aus der numerischen Simulation einer Kontaktdetonation auf eine Betonplatte mit AUTODYN . . . . .	212
9.7	Bestimmung der Schädigungsabmessungen aus numerischen Schädigungsbildern . . . . .	212
9.8	Bewegungsrichtung der Netzknoten unterhalb der Ladung; links: kein Durchbruch, rechts: Durchbruch . . . . .	213
9.9	Abschätzung der Abplatzungsabmessungen aus den effektiven Verzerrungen . . . . .	214
9.10	Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S2/P7 . . . . .	215
9.11	Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S2/P8 . . . . .	215
9.12	Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S2/P9 . . . . .	216
9.13	Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S3/P1 . . . . .	216
9.14	Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S3/P2 . . . . .	217
9.15	Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S3/P3 . . . . .	217
9.16	Zusammenfassung der experimentell und numerisch bestimmten Schädigungsabmessungen bei Variation der Plattendicke . . . . .	221
9.17	Zusammenfassung der experimentell und numerisch bestimmten Schädigungsabmessungen bei Variation der Ladungsmenge . . . . .	222
9.18	Validierung des Werkstoffgesetzes: Modellaufbau und Diskretisierung der Penetrationssimulationen . . . . .	224
9.19	Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-11/3 . . . . .	226
9.20	Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-12/4 . . . . .	226
9.21	Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-09/1 . . . . .	226
9.22	Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-10/2 . . . . .	227
9.23	Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-14/5 . . . . .	227
9.24	Zusammenfassung der experimentell und numerisch bestimmten Eindringtiefen . . . . .	228
A.1	Änderung der Fließfläche im Deviatorschnitt nach OTTOSEN, schematisch [56] . . . . .	A-3

---

B.1	Walzkurven zur Bestimmung des w/z-Wertes aus [71] . . . . .	A-6
B.2	Wasseranspruch des Betons nach [267] . . . . .	A-6
D.1	Grafische Darstellung der verwendeten Festigkeitsmodelle . . . . .	A-17



# Tabellenverzeichnis

2.1	Bilanzsatz der Massenerhaltung . . . . .	26
2.2	Bilanzsatz der Impulserhaltung . . . . .	27
2.3	Bilanzsatz der Energieerhaltung . . . . .	27
2.4	Invarianten der Hauptspannungen . . . . .	28
2.5	Invarianten der Hauptverzerrungen . . . . .	28
2.6	Definition der effektiven Spannungen und des LODE-Winkels . . . . .	29
3.1	Ausbreitungsgeschwindigkeiten unterschiedlicher Wellen . . . . .	38
3.2	RANKINE-HUGONIOT-Gleichungen . . . . .	40
3.3	Zustandsgleichungen für Voll-Materialien . . . . .	43
3.4	Bedingungen für eine Funktion $\alpha = g(p)$ . . . . .	46
3.5	Relative Spannungen der reflektierten und transmittierten Wellen für unterschiedliche Impedanzverhältnisse . . . . .	48
5.1	Beton, Dichten der Bestandteile . . . . .	73
5.2	Granit, Parameter und Werte der Zustandsgleichung . . . . .	75
5.3	Parameter der DRUCKER-PRAGER Fließfunktion für Granit . . . . .	76
5.4	Chemische Hauptbestandteile des hydratisierten Zementgels (aus [127])	80
5.5	Volumenanteile der Einzelverbindungen im Zementgel . . . . .	80
5.6	Materialparameter des RHT-Modells zur Beschreibung des Zementsteins . . . . .	84
6.1	Repräsentative Probekörperlängen und Abmessungen der untersuchten Probekörper . . . . .	92
6.2	Zusammensetzung und Eigenschaften des untersuchten Betons [166] .	93
6.3	Werkstoffsimulation; Einfluss unterschiedlicher Kornverteilung auf die Wellengeschwindigkeit . . . . .	101
6.4	Parameter und Werte der MIE-GRÜNEISEN-Zustandsgleichung für Stahl (nach [147]) . . . . .	105
6.5	Parameter des JC Festigkeitsmodells für Stahl (nach [147]) . . . . .	105
7.1	Einflußfaktoren auf die Verbundzone zwischen Zuschlag und Matrix .	115
7.2	Zusammenfassung der Materialkennwerte der ITZ . . . . .	123

7.3	Materialparameter des RHT-Modells zur Beschreibung der Interfacial Transition Zone . . . . .	124
7.4	Druck-Zug-Versuch; Vergleich des Zugfestigkeitsverlustes (TSL) aus Experiment [4] und Simulation . . . . .	146
7.5	Standardabweichung der Simulationsergebnisse bei Variation des Parameters $r$ der Funktion $f(a_{agg})$ . . . . .	152
7.6	Maximale Verzerrungsraten bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten $u$ . . . . .	158
8.1	Formulierungen der ratenabhängigen Verfestigung bei Druckbelastung	167
8.2	Aktuelle Materialmodelle für Beton unter hochdynamischer Belastung	181
8.3	Materialparameter der Versagensfläche . . . . .	185
8.4	Schädigungskriterien . . . . .	191
8.5	Parameter des Schädigungsmodells . . . . .	198
8.6	Parameter des Degradationsmodells . . . . .	202
9.1	Charakteristische Parameter und Kennwerte der experimentell untersuchten Betonplatten . . . . .	209
9.2	Schädigungsabmessungen der Betonplatten aus den Versuchen der WTD 52 . . . . .	218
9.3	Vergleich der Kraterschädigungen und Durchbruchdurchmesser aus Simulation und Experiment . . . . .	218
9.4	Vergleich der Abplatzungsschädigungen aus Simulation und Experiment	220
9.5	Charakteristische Parameter der Penetrationsversuche . . . . .	223
9.6	Vergleich der Eindringtiefen aus Simulation und Experiment . . . . .	225
A.1	Fließflächenformulierungen . . . . .	A-4
B.1	Materialdichten der Betonbestandteile . . . . .	A-6
B.2	Volumenanteile der Bestandteile im Frischbeton B-A8 . . . . .	A-7
B.3	Verteilung der Kornfraktionen im Beton B-A8 . . . . .	A-7
B.4	Volumenanteile der Bestandteile im Zementstein ZS-A8 . . . . .	A-8
B.5	Betonrezept für Beton C 40/50 mit Regelsieblinien nach DIN 1045 [73]	A-8
B.6	Volumenanteile der Kornfraktionen in $1 \text{ m}^3$ des betrachteten Betons .	A-9
B.7	Zusammensetzung des Zementsteins des betrachteten Betons . . . . .	A-9
C.1	Chemische Hauptbestandteile des hydratisierten Zementgels ([127]) .	A-11
C.2	Einzeldichten und Wellengeschwindigkeiten der Hauptphasenbestandteile des Zementgels . . . . .	A-12
C.3	Volumenanteile der Einzelverbindungen im Zementgel . . . . .	A-13
D.1	Parameter der Zustandsgleichung des in [166] dokumentierten Zementsteins . . . . .	A-15

---

D.2	Parameter des Festigkeitsmodells des in [166] dokumentierten Zementsteins . . . . .	A-16
D.3	Materialparameter der in Abschnitt 6.4.2 verwendeten Festigkeitsmodelle . . . . .	A-16
D.4	Parameter der $p$ - $\alpha$ -Zustandsgleichung zur Beschreibung des Zementsteins . . . . .	A-18
D.5	Parameter der Zustandsgleichung des Zementsteins (ZS) und der ITZ des Betons aus [161] . . . . .	A-19
D.6	Parameter des Festigkeitsmodells des Zementsteins (ZS) und der ITZ des Betons aus [161] . . . . .	A-19
D.7	Parameter des Festigkeitsmodells der ITZ des Betons aus [161] nach Anpassung an das geometrische Modell . . . . .	A-19
D.8	Parameter der Zustandsgleichung des Zementsteins (ZS) und der ITZ des Betons aus [4] . . . . .	A-20
D.9	Parameter des Festigkeitsmodells des Zementsteins (ZS) und der ITZ des Betons aus [4] . . . . .	A-20



# Symbolverzeichnis

## Arabische Buchstaben

$a, b, c_c, c_t, d$	Bruchflächenparameter im RGGP-Modell
$a_{agg}$	Grobzuschlagsanteil im Beton (projiziert auf die Querschnittsfläche)
$a_{iy}, a_i, a_{if}$	Fließflächenparameter im K&C-Modell (für $i=0,1,2$ )
$A$	Bruchflächenparameter im RHT-Modell
	Verfestigungsparameter im JC-Modell
$A_i, B_i, B_j, S_i, T_k$	Formparameter
$A_{ik}$	ALMANSISCHER Verzerrungstensor
$A_{ij}^K$	Kugeltensor (sphärischer Anteil) eines Tensors $A_{ij}$
$A_{ij}^D$	Deviatortensor (deviatorischer Anteil) eines Tensors $A_{ij}$
$A_{trans}$	Bruchflächenparameter im HPG-Modell
$B$	Verzerrungsratenparameter im JC-Modell
$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_t, \mathcal{B}_{t+\Delta t}$	Materieller Körper in der Referenz-, Momentan- und Nachbarkonfiguration
$c^{el}, c^{pl}$	Elastische und plastische Wellengeschwindigkeit
$c_L$	Geschwindigkeit einer Longitudinalwelle
$c_T$	Geschwindigkeit einer Transversalwelle
$c_R$	Geschwindigkeit einer Rayleighwelle
$c_B$	Kompressionswellengeschwindigkeit
$c_{por}$	Poröse Schallgeschwindigkeit
$c_{gran}$	Wellengeschwindigkeit des vollständig kompaktierten Materials
$c_1, c_2$	HORDIJK-REINHARDT-Parameter
$C$	Fließspannung im JC-Modell
$C_L, C_Q$	Dämpfungskonstanten
$C_{ijkl}$	Steifigkeitsmatix (Tensor vierter Stufe)
$d$	Durchmesser

$D$	Schädigungsvariable
$D_{comp}$	Schädigungsvariable für Kompaktion
$D_{shear}$	Schädigungsvariable für Gestaltänderung
$D_{\varepsilon}^+, D_{\varepsilon}^-, D_{\varepsilon}^p$	Schädigungsparameter im HPG-Modell
$e$	Spezifische innere Energie
$\bar{e}, \bar{e}^+$	Innere Energie vor und hinter der Diskontinuitätsfläche
$e_i$	Kartesische Basisvektoren (für $i=1,2,3$ )
$E$	Elastizitätsmodul
	Innere Energie (Abschnitt 2.2.3)
	Fließflächenexponent im HPG-Modell
$E^3$	EUKLIDISCHER Vektorraum
$\Delta E$	Änderung der inneren Energie
$f_{duct}$	Duktilitätsfaktor
$f_c$	Einachsige Druckfestigkeit
$f_{cc}$	Zweiachsige Druckfestigkeit
$f_{hard}$	Verfestigungsfaktor
$f_i$	Volmuneanteil des Materials $i$
$f_s$	Einachsige Schubfestigkeit
$f_t$	Einachsige Zugfestigkeit
$f_{ttt}$	Dreiachsige Zugfestigkeit
$F$	Kraft
$F_x, F_y, F_z$	Kräfte in x-, y- und z-Richtung
$g(\sigma)$	Funktion des plastischen Potentials
$G$	Schubmodul
$G_{ik}$	GREENScher Verzerrungstensor
$G_f$	Bruchenergie
$I_i$	Invarianten des Spannungstensors $\sigma_{ij}$ (für $i=1,2,3$ )
$I'_i$	Invarianten des Verzerrungstensors $\varepsilon_{ij}$ (für $i=1,2,3$ )
$I_m := c \cdot \rho$	Impedanz eines Materials
$J_i$	Invarianten des Spannungsdeviators ${}^D\sigma_{ij} = s_{ij}$ (für $i=1,2,3$ )
$J'_i$	Invarianten des Verzerrungsdeviators ${}^D\varepsilon_{ij}$ (für $i=1,2,3$ )
$k$	Oberflächensteifigkeit
$K$	Kompressionsmodul
$l$	Länge
$l_{pre}$	Druckvorbelastung
$L$	Longitudinalwellenmodul

$L_{ik}$	Geschwindigkeitsgradient
$m$	Masse
	Thermischer Entfestigungsexponent im JC-Modell
$M$	Fließflächenparameter im HPG-Modell
$M^*$	Elastischer Modul
$n$	Verfestigungsexponent im JC-Modell
$N$	Kompaktionsexponent der $p$ - $\alpha$ Zustandsgleichung
	Fließflächenexponent im RHT-Modell
$o$	Porosität
$p$	Hydrostatischer Druck
$p_0$	Ausgangsdruck
$p^*$	Auf $f_c$ normierter hydrostatischer Druck
$\bar{p}, \bar{p}^+$	Hydrostatischer Druck vor und hinter der Diskontinuitätsfläche
$p_{HEL}$	HUGONIOT Elastic Limit des hydrostatischen Drucks
$P$	Materieller Punkt eines Körpers
	LEGENDRE-Polynom
$P_i$	Zustandsgröße eines Materials
$q$	Künstliche Viskosität
$q_i$	Hourglass-Geschwindigkeit
$\dot{q}_i$	Hourglass-Beschleunigung
$Q$	Wärmeenergie
	Meridianparameter im RHT-Modell
$Q^i$	Dämpfungskräfte (für $i=1,2,3$ )
$r$	Radius
$r_1$	Meridianverhältnis
$s_{ij}$	Deviatorspannungen
$S$	Entropie
	Steigung der $U_s$ - $u_p$ -Beziehung
$t, \Delta t$	Zeit, Zeitschritt
$T_s$	Schmelztemperatur
$u$	Verschiebungsgeschwindigkeit
$\mathbf{u}_t$	Verschiebungsvektor von der Momentan- in die Nachbar- konfiguration
$U_s$	Schockwellengeschwindigkeit
$u_p$	Partikelgeschwindigkeit

$\bar{u}_p, \underline{u}_p$	Partikelgeschwindigkeit vor und hinter der Diskontinuitätsfläche
$v$	Geschwindigkeit
$V$	Volumen
$\dot{V}$	Volumenänderungsgeschwindigkeit
$W$	Arbeit
$W^{pl}$	Plastische Arbeit
$W_{ik}$	Schiefsymmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten $L_{ik}$
$x$	Ortskoordinaten
$\mathbf{X}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+\Delta t}$	Ortsvektor der Referenz-, Momentan- und Nachbarkonfiguration
$Y, Y^0$	Materialspezifische einachsige Fließspannung
$z, g, w, b, l$	Zement-, Zuschlag-, Wasser-, Zusatzstoff- und Luftgehalt des Betons in der Stoffraumgleichung

### Griechische Buchstaben

$\alpha = g(p, e)$	Porositätsfunktion
$\alpha_p$	Porositätsparameter
$\gamma$	Schubverzerrung (Gleitung)
	Schädigungsparameter im HPG-Modell
$\Gamma$	GRÜNEISEN-Koeffizient
$\Gamma_{\alpha k}^i$	Hourglass-Vektor (für $i=1,2,3$ )
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\varepsilon$	Einaxiale Gesamtverzerrung
$\dot{\varepsilon}$	Verzerrungsrate
$\varepsilon_{eff, u}$	Effektive Verzerrung bei Bruchlast
$\varepsilon_i$	Einaxiale Verzerrung (für $i=1,2,3$ )
$\varepsilon_{u, min}$	Einaxiale Verzerrung bei maximaler Zugspannung
$\varepsilon_V$	Volumenverzerrung
$\varepsilon_{el}, \varepsilon_{pl}$	Elastische und plastische Verzerrung
$\varepsilon_{pl}^f$	Plastische Verzerrungsreserve nach Bruch des Betons
$\eta$	Gaskonstante
$\lambda, \mu$	LAMÉsche Konstanten
$\lambda_L$	LAGRANGE Multiplier
$d\lambda$	Proportionalitätsfaktor
$\mu = \frac{\Delta V}{V}$	Kompression eines Werkstoffs
$\mu_{gran}$	Kompaktionsvermögen eines Werkstoffs

---

$\nu$	Querkontraktionszahl
$\xi$	Gewichtungsfaktor
$\rho$	Materialdichte
$\rho_0$	Anfangsdichte
$\rho_{crush}$	Materialdichte bei $p_{HEL}$
$\rho_{ref}$	Referenzdichte, Dichte des vollständig kompaktierten Materials nach Entlastung
$\rho^-, \rho^+$	Materialdichte vor und hinter der Diskontinuitätsfläche
$\sigma$	Einaxiale Spannung
	Standardabweichung
$\sigma_{eff}$	Effektive Spannung
$\sigma_i$	Hauptspannungen (für $i=1,2,3$ )
$\sigma_{ij}$	CAUCHYSche Spannungstensor (für $i,j=1,2,3$ )
$\dot{\sigma}_{ij}$	JAUMANNsche Spannungsrate (für $i,j=1,2,3$ )
$\sigma_I, \sigma_R, \sigma_T$	Spannungen der einfallenden, reflektierten und transmittierten Welle
$\sigma_{HEL}$	HUGONIOT Elastic Limit der einaxialen Spannung
$\sigma_Y$	Fließspannung
$\tau$	Schubspannung
$\theta$	Lode–Winkel
$\vartheta$	Absolute Temperatur
$\varphi_i$	Einfalls-/Ausfallswinkel beim Auftreffen einer elastischen Welle auf die Grenzfläche unterschiedlicher Materialien
$\Phi$	Funktion der Nichteindringung (LAGRANGE-Multiplier-Methode)



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Beton ist einer der wichtigsten Baustoffe unserer Zeit. Bereits im antiken Rom wurden Vorgänger des heutigen Betons verwendet, die sich durch ihre hohe Druckfestigkeit auszeichneten. Das sogenannte "Opus Caementitium" ermöglichte die Konstruktion großer römischer Projekte wie beispielsweise der Aquädukte. Viele Betonbauwerke der damaligen Zeit sind heute noch erhalten.

Die Entwicklung moderner Betone begann Ende des 18. / Anfang des 19. Jahrhunderts infolge der Erfindung erster moderner Zemente, wie z.B. der des Portlandzements durch den englischen Maurer JOSEPH ASPDIN im Jahre 1824. Seitdem wurde der Werkstoff Beton in vielerlei Hinsicht weiterentwickelt und ist heute einer der bei der Errichtung moderner Bauwerke meistverwendeten Werkstoffe. Die Weiterentwicklung und Verbesserung des Betons stehen dabei auch heute noch im Fokus aktueller Forschung.

Nicht zuletzt vor dem Hintergrund der in den letzten Jahren gestiegenen Gefahr von terroristischen Anschlägen ergeben sich bei der Planung moderner Infrastruktur zunehmend spezielle Sicherheitsanforderungen. Beton (in Form von Stahl- oder Stahlfaserbeton) stellt auch dabei eines der meistverwendeten Materialien für Schutzkonstruktionen dar. Dies erfordert, teilweise auch über die Materialbeschreibung unter statischer Belastung hinaus, die Berücksichtigung des Materialverhaltens des Betons unter dynamischer und hochdynamischer Belastung bei der Dimensionierung bzw. Berechnung gefährdeter Bauteile und Strukturen.

Die Belastungen lassen sich dabei anhand der Beanspruchungsgeschwindigkeit untergliedern, wobei als Kriterium dafür in der Regel die Verzerrungsrate  $\dot{\epsilon}$ , die dimensionslose Längenänderung über die Zeit, verwendet wird. Mit dieser Kenngröße lassen sich insbesondere dynamische Beanspruchungen charakterisieren. Zur allgemeinen Übersicht ordnet Abbildung 1.1 unterschiedliche Belastungen nach der Verzerrungsrate ein und klassifiziert das Materialverhalten von Festkörpern.

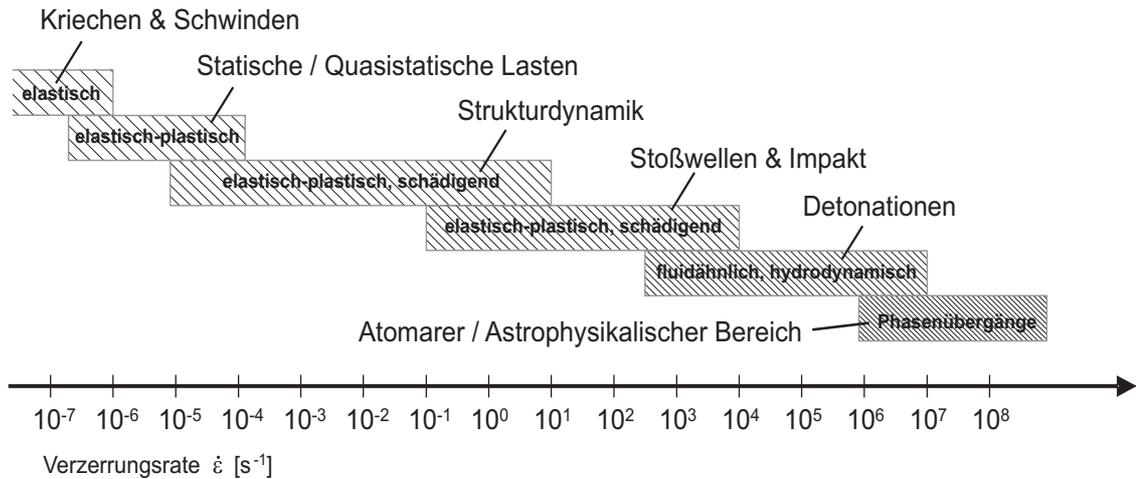


Abbildung 1.1: Einordnung unterschiedlicher Belastungen nach der Verzerrungsrate

Bei der Bemessung von Bauteilen und Strukturen ist jedoch neben der Kenntnis der Art und Größe der Einwirkungen gleichermaßen die Kenntnis des Bauteilverhaltens und des Bauteilwiderstandes erforderlich. Dabei ist die realitätsnahe mathematisch-physikalische Beschreibung der Steifigkeit und der Festigkeit eines Werkstoffs eine wesentliche Grundlage für die Bestimmung des Materialverhaltens sowie der Tragfähigkeit.

Diese Beschreibung beschäftigt die Wissenschaft daher seit nunmehr mehreren 100 Jahren. Schon LEONARDO DA VINCI (1452-1519) und GALILEO GALILEI (1564-1642) versuchten, die Festigkeiten von Materialien mathematisch zu erfassen, und seit der Veröffentlichung des bekannten Festigkeitsmodells von MOHR-COULOMB im Jahre 1900 [199] wurden eine Vielzahl von Experimenten zur Untersuchung der Materialfestigkeiten unter verschiedensten Spannungszuständen durchgeführt. Dabei wurden erhebliche Fortschritte erzielt und eine Vielzahl von Modellen - unter anderem für Beton - wurden aufgestellt. Jedoch ist bisher keines dieser Modelle in der Lage, das Materialverhalten in seiner Gesamtheit hinreichend genau abzubilden [292].

Die bisherige Entwicklung hat gezeigt, dass mit zunehmender Realitätsnähe der Materialmodelle auch deren Komplexität steigt (vgl. [106]). Einhergehend mit dieser Komplexitätszunahme verbesserte sich auch die Leistungsfähigkeit der numerischen Berechnungsverfahren, wodurch auch die Anwendbarkeit der Modelle in der Praxis gewährleistet werden konnte. Ein jedoch bis heute vorherrschendes Problem ist, dass die Werkstoffparameter für diese komplexen Modelle zum Teil nur in äußerst aufwendigen Versuchen und teilweise nur mit unzureichender Genauigkeit bestimmt werden können. Letzteres trifft in besonderem Maße auf den heterogenen Werkstoff Beton zu, dessen Materialkennwerte aufgrund des komplexen Zusammenwirkens von Zuschlägen und Zementleim selbst innerhalb einer Versuchsreihe stark variieren

können.

Versuche zur Bestimmung der Materialeigenschaften und -kennwerte wie Festigkeiten oder Bruchverzerrung unter (hoch-)dynamischer Belastung sind dabei noch komplexer und kostenintensiver, als solche zur Bestimmung unter statische Belastung. Insbesondere im Bereich der numerischen Modellbildung stellt dieses, sich aus der Heterogenität ergebende physikalisch nichtlineare Materialverhalten des Werkstoffs Beton auch heute noch eine Herausforderung dar.

In Anbetracht seiner Heterogenität stellt sich jedoch die Frage, warum der Werkstoff Beton bei der numerischen Modellbildung in der Regel als homogenes Material betrachtet wird. Während bei numerischen Simulationen in der Praxis beispielsweise der Bewehrungsstahl mit Durchmessern  $\geq 6$  mm explizit dargestellt wird, werden Zuschläge mit Durchmessern bis zu 32 mm im Beton homogenisiert.

Die Motivation zur vorliegenden Arbeit ergibt sich daher aus der Suche nach einer Möglichkeit, den Werkstoff Beton in seinen Hauptbestandteilen diskret zu modellieren und die Materialeigenschaften unterschiedlicher Betone anhand von Werkstoffsimulationen abzuschätzen. Dadurch könnte die Anzahl der erforderlichen aufwendigen und teuren Versuche verringert werden.

Zudem sind auch die Schädigungsprozesse im Beton unter Kurzzeitbelastungen bislang nur unzureichend erforscht. Auch hier könnten derartige numerische Simulationen weitere Aufschlüsse geben, da diese ein "Hineinsehen" in einen Probekörper ermöglichen, das mit derzeitigen Testmethoden nur sehr bedingt möglich ist.

Um die komplexen Wechselwirkungen der einzelnen Bestandteile des heterogenen Betons in numerischen Simulationen zu untersuchen, müssen im Bereich der Materialbeschreibung jedoch zunächst, wie im folgenden Abschnitt zum Stand der Forschung dargestellt werden wird, die erforderlichen Grundlagen geschaffen werden.

## 1.2 Stand der Forschung

Zur Einordnung der dieser Arbeit zugrunde liegenden Problemstellung in die Gesamthematik wird im Folgenden der Stand der wissenschaftlichen Forschungsarbeit in den Bereichen

- numerische Methoden,
- experimentelle Methoden,
- Werkstoffmodellierung und
- Werkstoffsimulation

dargestellt. Der Schwerpunkt wird dabei auf die Werkstoffmodellierung gelegt, da diese bei den Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit eine übergeordnete Stellung einnimmt.

### 1.2.1 Numerische Methoden

Um das Verhalten einer Struktur unter gegebenen Belastungen bzw. Randbedingungen berechnen zu können, ist es zunächst erforderlich, ein physikalisch-mathematisches Modell des Problems zu erstellen. Dieser Abstraktionsprozess setzt jedoch, wie von KRÄTZIG und BAŞAR in [158] deutlich hervorgehoben, *”komplexe Kenntnisse und Erfahrungen”* voraus, da jede Art der Modellbildung eine zumindest teilweise Idealisierung der Wirklichkeit zur Folge hat.

Nach der Erstellung eines mechanisch-physikalischen Modells und dessen mathematischer Formulierung folgt im nächsten Schritt die Lösung des mathematischen Problems.

Bis in die 50er Jahre des letzten Jahrhunderts waren dabei ausschließlich analytische Lösungen der den Modellen zugrunde liegenden Gleichungen möglich. Erst mit der Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung und deren Einzug in das Ingenieurwesen war auch eine Näherungslösung auf Grundlage der numerischen Mathematik möglich. Dabei wird der Modellraum eines physikalischen Problems sowohl örtlich als auch zeitlich in eine endliche Anzahl begrenzter Einheiten zerlegt (diskretisiert). Daher werden diese Verfahren als *”Finite Methoden”* bezeichnet.

Abbildung 1.2 stellt die Umsetzung eines realen Problems in ein mathematisch-physikalisches Modell sowie die möglichen Lösungsmethoden schematisch dar.

Die derzeit zur Strukturanalyse am häufigsten verwendeten Lösungsverfahren sind:

- Finite Elemente Methode,
- Finite Differenzen Methode,
- Randelementmethode sowie
- netzfreie Methoden.

Die Finite Elemente Methode (Finite Element Method, FEM) entspricht im Grunde der Vorgehensweise des bekannten RITZschen Verfahrens [236] zur Lösung von Variationsproblemen. Sie wurde jedoch ursprünglich als formalisierte Deformationsmethode entwickelt [136]. In der FEM wird der Verlauf einer unbekanntem Größe in einem Element durch Ansatzfunktionen angenähert. Die Parameter dieser Ansatzfunktionen sind dabei aus den Randbedingungen zu ermitteln.

Die Verschiebungen an den Knotenpunkten werden, unter Berücksichtigung der Kompatibilität zwischen den Elementen, aus dem Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften am Element bestimmt. Dabei werden Kraft- und Verschiebungsgrößen in jedem Element mittels einer Steifigkeitsmatrix verknüpft.

Einer der wesentlichen Vorteile der FEM ist, dass meist mit einem, im Vergleich zu anderen Verfahren, geringeren Diskretisierungsgrad schneller genauere Lösungen erzielt werden können. Die FEM eignet sich daher, bei entsprechender Wahl der Ansatzfunktionen, gut zur Berechnung von Bauteilen und baulichen Strukturen.

Eine umfassende Darstellung der Finite Elemente Methode geben u.a. [19], [153], [155] und [299].

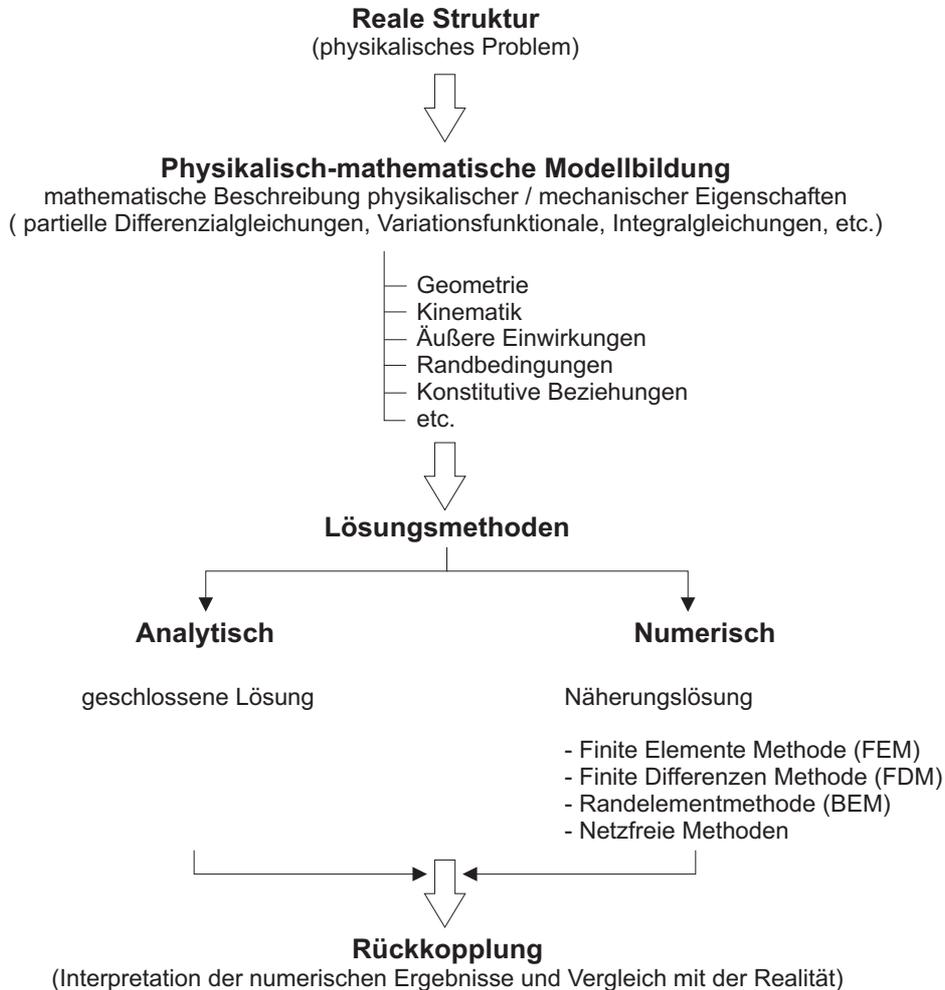


Abbildung 1.2: Modellbildung und Lösungsverfahren zur Berechnung realer Strukturen (nach [19])

Erste Formulierungen zur Diskretisierung von Differentialgleichungen mittels der Methode finiter Differenzen (Finite Difference Method, FDM) finden sich bereits in BROOK TAYLOR's Hauptwerk " *Methodus incrementorum directa et inversa* " aus dem Jahre 1715. Bis heute ist die Finite-Differenzen-Methode das einfachste numerische Verfahren zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Durch die Diskretisierung können die Differentialquotienten an den diskreten Punkten durch Differenzenquotienten genähert werden. Dabei wird, je nach Richtung der verwendeten Differenzen, zwischen drei grundsätzlichen Verfahren unterschieden:

- Vorwärtsdifferenzenquotient (upwind scheme)
- Rückwärtsdifferenzenquotient (downwind scheme)
- Methode der zentrale Differenzen (central difference method)

Die Genauigkeit der Lösung lässt sich dabei einerseits über die Feinheit des Netzes und andererseits über die Ordnung der Reihenentwicklung steuern. Eine Näherung zweiter Ordnung ist jedoch häufig ausreichend.

Finite-Differenzen-Verfahren sind aufgrund der einfachen Grundidee und einfachen Implementierung weit verbreitet. Die in den Bilanzgleichungen enthaltenen differentiellen Ableitungen werden direkt durch Differenzenquotienten approximiert. Die strukturierten Rastergitter sind für die diskrete Approximation jedoch von Nachteil, da damit komplexe Geometrien nur schwer nachgebildet werden können. Bei nicht-orthogonalen Gittern ergeben sich dagegen zusätzlich gemischte Terme in den Finite-Differenzen-Gleichungen, die zu einem deutlich erhöhten Rechenaufwand führen. Zudem ist im Vergleich zur FEM eine feinere Vernetzung zum Erhalt der Genauigkeit erforderlich. Die Methode der Finiten Differenzen ist dennoch gut zur Berechnung von Bauteilen und baulichen Strukturen geeignet. Ausführliche Beschreibungen der Finite-Differenzen-Verfahren finden sich beispielsweise in [69], [138] und [186].

Die Randelementmethode (Boundary Element Method, BEM) ist ein Verfahren zur Lösung von Anfangs- und Randwertproblemen mit partiellen Differentialgleichungen. Zur Berechnung einer Struktur werden lediglich die Oberflächen bzw. einzelne Gebiete diskretisiert. Dementsprechend werden auch die gesuchten Zustandsgrößen nur an den entsprechenden Flächen bestimmt. Die Vorteile der BEM liegen in der im Vergleich zu anderen Verfahren geringen Anzahl an Freiheitsgraden und der Möglichkeit, ein Randwertproblem auch ohne Kenntnis der Fundamentallösung zu lösen.

Die BEM eignet sich daher insbesondere bei Kontaktproblemen in Halbräumen sowie Problemen der Elektrostatik und der Wärmeleitung. Zur Berechnung von Zustandsgrößen innerhalb eines Bauteils ist sie dagegen nur bedingt geeignet. Eine ausführliche Beschreibung der Randelementmethode sowie ihrer Anwendung findet sich beispielsweise in [21], [89] und [273].

Die bisher dargestellten numerischen Lösungsverfahren beruhen auf einer Vernetzung der zu untersuchenden Struktur. Eine Gruppe noch relativ junger Verfahren sind die netzfreien Methoden (Meshfree Methods), die eine Lösung der partiellen Differentialgleichungen an diskreten Orten berechnen, ohne diese als Knotenpunkte eines Netzes zu betrachten. Eines der bekanntesten dieser Verfahren ist die Methode der Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) [135]. Das Verfahren ähnelt dabei grundsätzlich der FEM, jedoch wird die Anzahl und Gesamtheit der Nachbarstellen, über die approximiert wird, nicht von vornherein festgelegt und kann sich im Laufe

der Berechnung ändern [136]. Anzahl und Gewichtung der zur Berechnung an einem Punkt ("Partikel") herangezogenen wechselwirkenden Nachbarstellen werden dabei von der Wichtungs- oder Kernelfunktion bestimmt, die in einem festgelegten Radius um den betrachteten Punkt auf Null abklingt. Die Methode der SPH ermöglicht so eine gute Approximation von starken Dichteänderungen und eignet sich daher besonders zur Berechnung von Fragmentierungsprozessen in spröden Werkstoffen.

Das Verfahren zeigt jedoch in Teilbereichen auch erhebliche Schwächen. So ergeben sich beispielsweise an freien Oberflächen oft Instabilitäten und starke unidirektionale Verzerrungen können zu Problemen bei der Bestimmung der Nachbarstellen führen. Eine detaillierte Darstellung der SPH und ihrer Anwendung geben z.B. HIERMAIER in [136] und LIU & LIU in [177].

Weitere Beispiele für netzfreie Verfahren sind die Diffuse Element Method (DEM) [204] und die Methode der Moving-Least-Square (MLS) [173], auf der weitere Ansätze wie beispielsweise die elementfreien GALERKIN Methoden ([24], [27], [168]) oder die netzfreien lokalen PETROV-GALERKIN-Methoden ([241]) beruhen.

Einen Überblick über den weiten Bereich der derzeit verwendeten netzfreien Methoden geben z.B. BELYTSCHKO und CHEN in [26].

### 1.2.2 Experimentelle Methoden der Werkstoffprüfung

Die Bestimmung der werkstoffspezifischen Eigenschaften, die u.a. auch als Eingangsgrößen für numerische Modelle verwendet werden, erfolgt üblicher Weise anhand experimenteller Prüfmethode. Dabei lässt sich, je nach der durch die Einwirkung hervorgerufenen Verzerrungsrate, zwischen statischen und dynamischen Werkstofftests unterscheiden.

Zu den "klassischen" statischen Werkstofftests für Beton gehören die in der Normung geregelten einaxialen Druckversuche [74] sowie Zug- und Biegezugversuche [75]. Diese Versuche können mit vergleichsweise einfachen Versuchsaufbauten durchgeführt werden. Abbildung 1.3 stellt die einaxialen Werkstofftests für (Stahl-)Beton schematisch dar. Zu den statischen Materialprüfungen zählen auch mehraxiale Druck- bzw. Zugversuche. Im Bereich der triaxialen Materialprüfung sind jedoch bereits komplizierte und teure Prüfmaschinen erforderlich. Zudem stellen derartige Versuche hohe Anforderungen an den Versuchsaufbau und die Messtechnik. Dabei erreichen die derzeit modernsten Versuchsanlagen einen hydrostatischen Druck von bis zu 1 GPa und eine Axialspannung von bis zu 2 GPa [46].

Zur dynamischen Werkstoffprüfung von Beton stehen heute, neben einfachen Methoden wie z.B. Pendelschlagversuchen, weitere Prüfverfahren zur Verfügung, die die Werkstoffcharakterisierung auch unter sehr hohen Drücken und Verzerrungsraten ermöglichen. Die wichtigsten dieser Verfahren sind die sogenannten Split-Hopkinson-Pressure-Bar (SHPB) Tests und Planar-Platten-Impaktversuche.

Der Split-Hopkinson-Pressure-Bar wurde ursprünglich zur Untersuchung der dynamischen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen unter Kompression entwickelt. Die Grundidee dabei ist, aus den bei Durchlaufen einer Welle durch einem Körper trans-

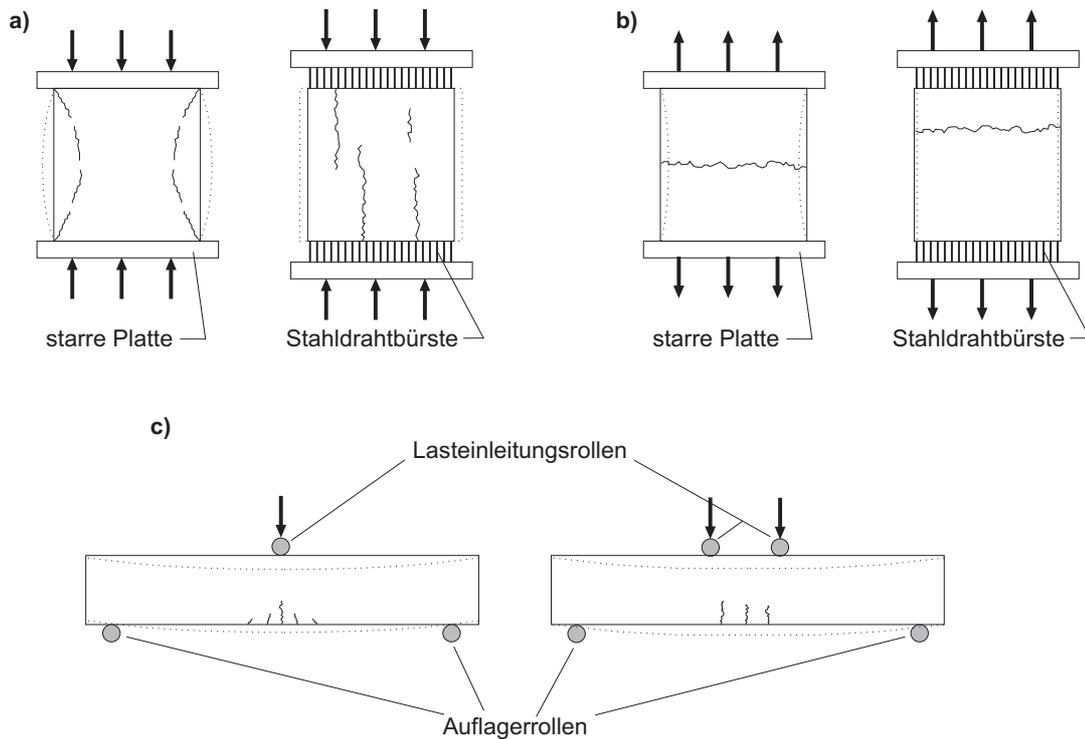


Abbildung 1.3: Einaxiale Werkstoffprüfung mit statischer Belastung: a) Druckversuch; b) Zugversuch; c) Drei- und Vier-Punkt-Biegezugversuch

mittierten und reflektierten Wellen auf dessen mechanische Eigenschaften zu schließen (vgl. z.B. [136]). Dazu wird ein Probekörper zwischen zwei mit Dehnmessstreifen (DMS) versehenen (Metall-)Stäben mit bekannten Materialeigenschaften und -kennwerten angeordnet (siehe Abbildung 1.4). In den Eingabestab wird, beispielsweise mittels eines Projektils, eine Stoßwelle eingeleitet. Diese Stoßwelle wird (teilweise) in den Probekörper und schließlich in den Ausgabestab transmittiert und im Dämpfungsstab absorbiert. Aus den in den DMS gemessenen Verzerrungen können dann die Spannungen und Verzerrungen im Probekörper errechnet werden. Die dazu erforderlichen funktionalen Zusammenhänge werden hier nicht explizit dargestellt, sind aber z.B. in [193] ausführlich beschrieben.

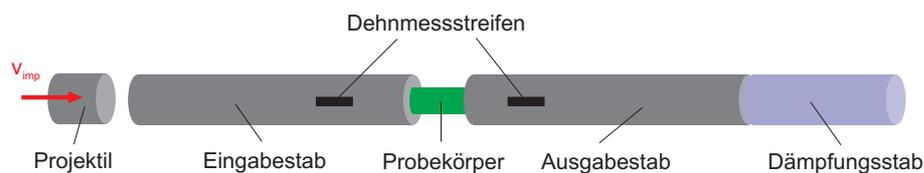


Abbildung 1.4: Aufbau eines Split-Hopkinson-Pressure-Bar Tests (schematisch)

Derzeit können mittels SHPB Tests Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen bei Verzerrungsraten von bis zu  $\dot{\epsilon} = 10^4$  bestimmt werden. Zudem wurde der SHPB bis heute mehrfach weiterentwickelt und modifiziert, so dass heute auch Zug-, Torsionsbelastungen sowie Kombinationen dieser Belastungen eingeleitet werden können [136]. Umfangreiche Beschreibungen dieser Apparaturen geben beispielsweise [105], [193] und [206].

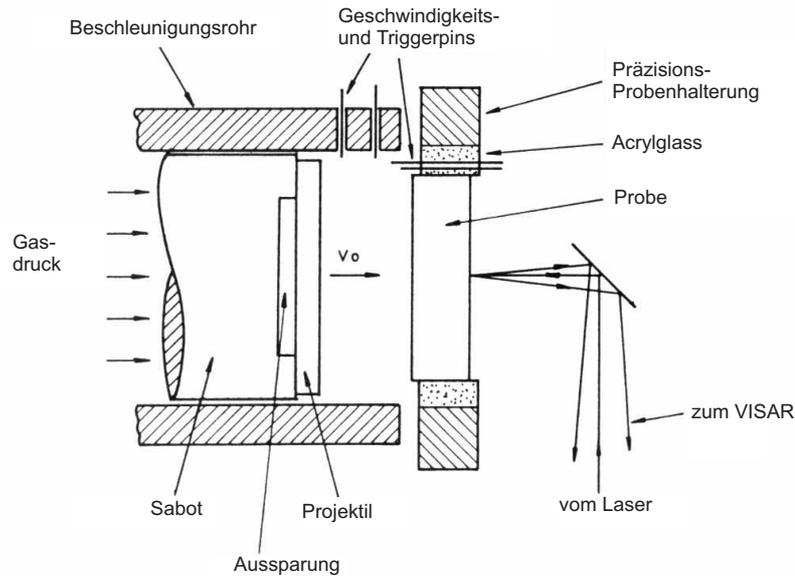


Abbildung 1.5: Aufbau eines Planar-Platten-Impaktversuchs (nach [14])

Eine weitere wichtige Methode zur dynamischen Werkstoffprüfung ist der sogenannte Planar-Platten-Impaktversuch (Flyer-Plate-Impact-Test). Mit derartigen Versuchen lässt sich das Materialverhalten bei Verzerrungsraten bis zu  $10^6 \text{ s}^{-1}$  untersuchen. Dabei wird das zu untersuchende Material, das auf einen Träger (Sabot) montiert ist, beschleunigt und trifft auf eine Zielplatte mit bekannten Materialeigenschaften und -kennwerten (siehe Abbildung 1.5). Bei Auftreffen des Projektils wird eine ebene Spannungswelle in das Ziel eingekoppelt. Diese Spannungswelle durchläuft die Zielplatte und wird an deren Rückseite reflektiert. Durch Mehrfachreflexionen und Wellenüberlagerungen können dabei erhebliche Drücke (je nach Art der Beschleunigung des Sabots - mittels Gasdruck, konventionellen oder nuklearen Sprengsätzen - bis zu 10 TPa [136]) erzeugt werden. Die Geschwindigkeit der freien Oberfläche der Zielplatte wird während des Experiments mit einem VISAR-Laserinterferometer (VISAR = Velocity Interferometer System for Any Reflector [18]) gemessen und aufgezeichnet. Das so bestimmte Geschwindigkeitsprofil ermöglicht Rückschlüsse auf

Spannungen und Verzerrungen bzw. auf Druck und Dichte des Probenmaterials. Das Prinzip der Planar-Platten-Impaktversuche ist beispielsweise in [14], [136], [203] und [233] ausführlich beschrieben.

### 1.2.3 Werkstoffmodellierung

Ende des 19. Jahrhunderts gab es drei grundsätzliche Theorien zur Beschreibung der Materialfestigkeit. Die erste unterscheidet nicht zwischen Druck-, Zug- oder Schubbeanspruchung, sondern bezieht sich lediglich auf die Hauptnormalspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ . Sie besagt, dass das Fließen eintritt, sobald eine der Hauptspannungen die im einaxialen Zug- bzw. Druckversuch gemessene Fließspannung  $\sigma_Y$  erreicht. Als Entwickler dieser Theorie gilt RANKINE, der sie 1858 in [227] veröffentlichte.

Die zweite Theorie geht davon aus, dass ein Material zu versagen beginnt, wenn die Verzerrung die im einfachen Zugversuch bestimmte "Fließverzerrung" erreicht. Diese Theorie der maximalen Verzerrung wurde von namhaften Wissenschaftlern wie beispielsweise DE SAINT-VENANT 1870 in [239] vertreten.

Die dritte zur damaligen Zeit verbreitete Theorie stammt von TRESCA aus dem Jahr 1864 [269]. Sie geht von der Annahme aus, dass ein Metall bei einer vom hydrostatischen Spannungszustand unabhängigen konstanten Schubspannung  $\tau$  zu fließen beginnt. TRESCA's Materialtheorie ist somit die Grundlage vieler der heute gültigen und anerkannten Festigkeitsmodelle. Ein weiterer Vertreter dieser Theorie war beispielsweise GUEST 1900 in [107].

Weitere Ansätze aus dieser Zeit, die sich mit einem Maximum der Verformungsenergie befassen, stammen von BELTRAMI 1885 [25] und MAXWELL, dessen Überlegungen nicht veröffentlicht und erst später bekannt wurden (vgl. [268]).

Ein wichtiger Schritt gelang 1900 OTTO MOHR [199], der in einer Verallgemeinerung der TRESCA-Theorie die maximale Schubspannung abhängig vom hydrostatischen Druck formulierte. Da sich MOHR's Idee auf Überlegungen von COULOMB zurückführen lässt (vgl. [87]), wurde sie später als MOHR-COULOMBSche Festigkeitshypothese bekannt.

MOHR's Hypothese deckte sich jedoch nicht mit den Experimentaldaten aus Versuchen mit spröden Materialien (vgl. [39], [151] und [275]). Daher wurden im Folgenden eine Vielzahl materialspezifischer Fließhypothesen, wie beispielsweise der 1913 in [198] publizierte VON MISES-Fließzylinder für Metall, aufgestellt. Die Anschaulichkeit der Materialtheorien verbesserte sich zudem mit der Einführung der Formulierung im Hauptspannungsraum durch HAIGH [115] und WESTERGAARD 1920 [284] deutlich.

Einen ausführlichen Überblick über die Materialtheorien bis 1930 geben FROMM 1931 in [87] und TIMOSHENKO 1953 in [268].

Die grundlegenden Materialtheorien für Beton und betonartige Werkstoffe wurden zunächst von Modellen zur Beschreibung von Böden und Fels abgeleitet. Eines der

bekanntesten dieser Materialmodelle ist das von DRUCKER & PRAGER 1952 [77]. Bei diesem Modell mit linearem Zusammenhang zwischen Druck- und Fließspannung ( $Y$ ) wird  $Y$  zu Null, wenn die dreiaxiale Zugfestigkeit HTL ("Hydrostatic Tensile Limit") erreicht wird. Die Steigung der sich im Meridianschnitt darstellenden Geraden, die aufgrund der ursprünglichen Entwicklung des Modells für Erdreich auch Reibungswinkel  $\alpha$  genannt wird, ist dabei materialabhängig.

Auf die reine Beschreibung des Betonverhaltens ausgerichtete Weiterentwicklungen veröffentlichten beispielsweise BRESLER und PISTER 1955 [41], BUYUKOZTURK ET AL. 1971 [45] und WU 1974 [287], die sowohl die Form des Zusammenhangs zwischen hydrostatischem Druck und Fließgrenze, als auch die Form der Fließfläche im Deviatorschnitt variierten.

Eine weitere Besonderheit weist die 1975 publizierte Formulierung nach WILLAM-WARNKE [286] auf. Sie stützt sich auf die Annahme, dass bei porösen Werkstoffen plastisches Fließen auch unter reinem hydrostatischem Druck möglich ist. Mit Erreichen eines charakteristischen Drucks beginnt sich die Fließfläche zur Hydrostate hin zu schließen, so dass ein im Hauptspannungsraum geschlossener Fließkörper entsteht. Derartige Formulierungen werden auch als "Kappen-Modelle" oder "Cap-Models" bezeichnet.

Mit der Weiterentwicklung der Kappen-Modelle beschäftigten sich unter anderem GUPTA und SEAMAN 1979 [112], LADE und KIM 1995 [164] und HIBBIT ET AL. 1995 [134]. Ein sehr fortschrittliches Kappen-Modell für Beton (vgl. [233]) von MURRAY und LEWIS [201] wird in LS-DYNA [178] verwendet.

Moderne Kappen-Modelle, wie beispielsweise auch das von ERHART 2004 [82] oder von HUBER 2006 [144], bieten den Vorteil einer geschlossenen Formulierung des volumetrischen und deviatorischen Materialverhaltens in nur einer konstitutiven Beschreibung. Zusammen mit einer assoziativen Fließregel und einer vom plastischen Verzerrungszustand abhängigen Bewegung der Kappe im Spannungsraum lässt sich sogar das Phänomen der Hysterese abbilden. Jedoch konnte diese Annahme bezüglich des triaxialen Werkstoffverhaltens bis heute experimentell nicht nachgewiesen werden. Zudem ist die Anwendung dieser Modelle auf Stoßbeanspruchung hinsichtlich der Bestimmung der Materialparameter deutlich komplexer als bei Modellen ohne Kappe.

1977 stellte OTTOSEN ([212] und [213]) die Theorie auf, dass die dritte Invariante  $J_3$  bzw. der LODE-Winkel  $\theta$  mit steigendem hydrostatischem Druck einen zunehmend geringeren, und schließlich keinen Einfluß mehr haben. OTTOSENS Fließfläche geht daher im Deviatorschnitt kontinuierlich von einer Dreiecksform (ähnlich RANKINE) in eine Kreisform über. Eine derartige Änderung der Fließfläche kann beispielsweise für Beton damit erklärt werden, dass sich das Material zunächst spröde und mit steigender Kompaktion zunehmend duktil verhält. Ein tatsächliches derartiges Verhalten konnte bisher jedoch noch nicht nachgewiesen werden (vgl. z.B. [129]).

Im Zuge der Entwicklung von Materialbeschreibungen wurden verstärkt weitere Phänomene wie plastische und verzerrungsratenabhängige Verfestigung, Schädigung

und Entfestigung untersucht und in Materialmodelle implementiert. Die Berücksichtigung der Verzerrungsratenabhängigkeit ermöglicht dabei die Anwendung der Modelle auch bei dynamischen Belastungen. Ansätze dazu lieferten beispielsweise HSIEH ET AL. 1982 [142], YANG ET AL. 1983 [290] & DE BOER, DESENKAMP 1989 [38] und LABBANE ET AL. 1993 [163]. Die grundlegenden mathematischen Formulierungen dieser und anderer Materialmodelle sind in [292] übersichtlich zusammen gefasst. Richtungsweisend war ebenfalls das (Einflächen-) Betonmodell von HOLMQUIST, JOHNSON und COOK ( HJC, ) [140]. Zwar ist dieses Model unabhängig von der dritten Invarianten  $J_3$  formuliert und kann somit das für Druck- und Zugbeanspruchungen unterschiedliche Verhalten des Betons nicht abbilden, jedoch stellte es einen hervorragenden Ausgangspunkt für weitere Entwicklungen dar (vgl. [266] und [252]) und findet auch heute noch Anwendung.

Abbildung 1.6 stellt einige wesentliche dieser Materialmodelle schematisch im Spannungsraum dar. Eine Kurzbeschreibung dieser Modelle findet sich in Anhang A.

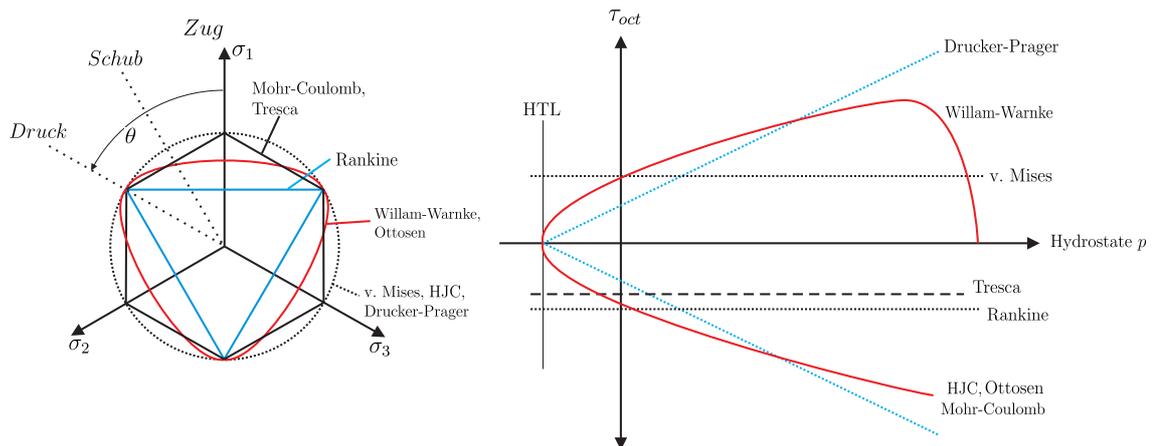


Abbildung 1.6: Gegenüberstellung verschiedener Fließflächen im Deviator- und Meridianschnitt

Weitere Modelle für Beton unter dynamischen Lasten stammen z.B von OCKERT 1997 [210] (basierend auf einer Formulierung nach OTTOSEN), von PLOTZITZA 2002 [221], dessen Modell auf einer im Verzerrungsraum formulierten Bruchfläche nach HSIEH, TING & CHEN [142] und einem Schädigungsmodell nach SCHMIDT-HURTIENNE [245] basiert, sowie von LARCHER, dessen elementfreies GALERKIN-Verfahren (basierend auf dem Stoffgesetz von OCKERT) eine diskrete Rissabbildung ermöglicht.

Spezielle Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Schalen entwickelten beispielsweise HAUFE 2001 [121] und SUANNO ET AL. 2003 [260].

Einen grundlegend anderen Weg, der hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt sei, wählten BAZANT [20] und OZBOLT [214] 1992. Ihr so genanntes "Microplane Model" projiziert bei der numerischen Berechnung die Verzerrungen auf Mikroebenen und berechnet dort die Spannungen mittels vereinfachter konstitutiver Gleichungen. Die dort unter Einhaltung der Plastizitäts- und Bruchbedingungen bestimmten Spannungen werden schließlich unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit in die Kraftgrößen des jeweiligen Elements zurück gerechnet (vgl. Abbildung 1.7). Der Hauptvorteil dieses Modells liegt dabei in der Einfachheit der konstitutiven Gleichungen. Nachteile sind jedoch die Komplexität des Modells und der erhöhte Rechenaufwand (vgl. [233]). Zudem ist die Anwendbarkeit des Modells bei hochdynamischen Lastenwirkungen bisher noch unklar. Für statische und quasi-statische Belastungen zeigt das zuletzt von LEUKART [172] in 2005 entwickelte Microplane Modell jedoch gute Ergebnisse.

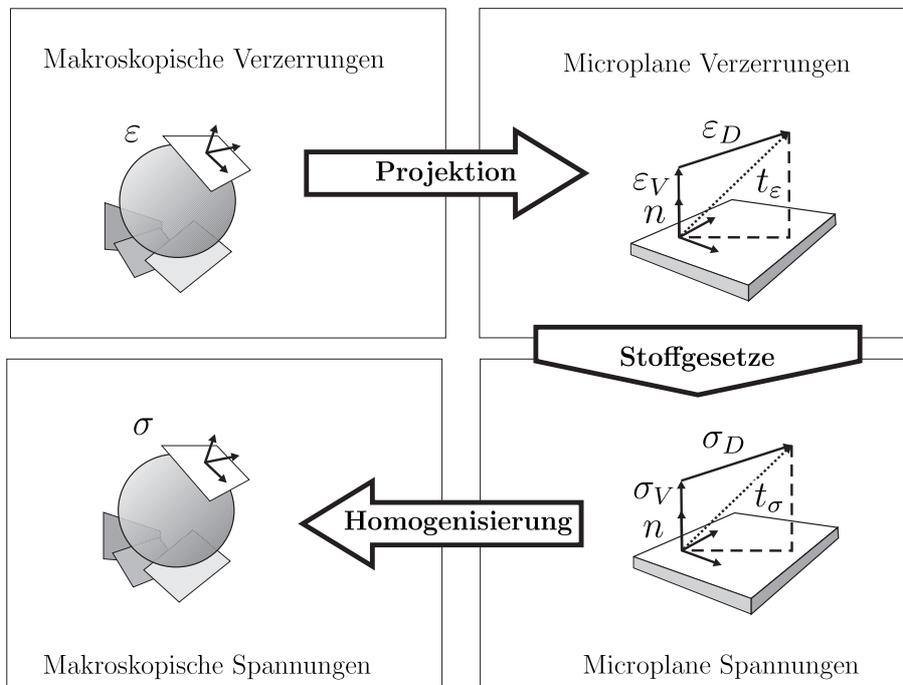


Abbildung 1.7: Microplane Theorie basierend auf der kinematischen Projektion (nach [160])

Möglich wurden die Entwicklungen in der Materialtheorie vor allem durch die Fortschritte in der Versuchstechnik und die Veröffentlichung umfangreicher Experimentaldaten. In diesem Zusammenhang sind unter anderem zu nennen: RICHART 1928 [231], BALMER 1949 [17], BRESLER und PISTER 1958 [40], KUPFER ET AL. 1969 [162], MILLS & ZIMMERMAN 1970 [197], LAUNAY & GACHON 1971 [169] und TASUJI ET AL. 1978 [265].

Weitere Fortschritte gelangen GERSTLE und ASCHL 1980 [98], MICHELIS 1985 [195] und 1987 [196] und WANG ET AL. [279] aus dem selben Jahr. Neuere Modelle stützen sich auch auf Daten von GRADY 1988-1995 [102], [100], [101], EIBL 1989 [80], SONG ET AL. 1991 [256], GUO und WANG 1991 [110] und die Zusammenstellungen von ZHOU 1995 [296] und SONG und ZHAO 1996 [255]. Im Bereich der Ratenabhängigkeit lieferten insbesondere BISCHOFF in [34] und BACHMANN in [15] ausführliche Zusammenstellungen veröffentlichter Versuchsdaten.

Einer der derzeitigen Forschungsschwerpunkte liegt im Bereich der Schädigung und hierbei insbesondere in der Beschreibung der Rissbildung und des Risswachstums. Die zahlreichen Veröffentlichungen zu diesem Thema allein im Jahr 2006, wie beispielsweise von BIAN ET AL. [33], SANCHO ET AL. [240], WU ET AL. [288], YU & RUIZ [288] und ZHOU ET AL. [294], um nur einige zu nennen, bekräftigen diese Aussage. Die meisten dieser Rissmodelle wurden jedoch auf Grundlage der linear elastischen Bruchmechanik (z.B. [86], [114]) und für die Anwendung in Finite-Element-Programmen entwickelt. Im Bereich der Materialmodellierung in Hydrocode-Umgebungen besteht dagegen noch deutlicher Forschungsbedarf. Die in den derzeit zur Verfügung stehenden Hydrocode-Materialmodellen implementierten Schädigungsformulierungen für Beton bilden entweder das Materialverhalten bei niedrigen (z.B. [190]) oder bei hohen Verzerrungsraten (z.B. [233], [106], [185] und [216]) ab. Dies ist jedoch problematisch, da bei typischen (hoch-)dynamischen Belastungsszenarien (z.B. Detonation oder Impakt) sowohl hohe als auch niedrige Verzerrungsraten beobachtet werden können.

Die derzeit wichtigsten Hydrocode-Materialmodelle für Beton unter hochdynamischer Beanspruchung sowie deren individuellen Stärken und Schwächen werden in Rahmen der Entwicklung des makromechanischen Materialmodells in Kapitel 8 ausführlich beschrieben.

#### 1.2.4 Werkstoffsimulation

Das Verfahren der Werkstoffsimulation, d.h. der Vorhersage der Materialeigenschaften eines Werkstoffs durch die Modellierung von Gefüge und Eigenschaften seiner Bestandteile sowie durch Simulation ihres Zusammenwirkens, ist ein noch relativ junger, jedoch aufstrebender Teilbereich der Materialwissenschaften. Insbesondere für den Werkstoff Beton gibt es hier bislang nur wenige Ansätze.

Dabei liegt der Fokus der bisher veröffentlichten meso- und mikromechanischen Untersuchungen auf der realitätsnahen Beschreibung der Rissevolution unter statischer Belastung auf Basis der Finite Element Methode. Beispiele hierfür sind die Arbeiten von CABALLERO ET AL. [47], [48], GRASSL & REMPLING [104] sowie von UNGER ET AL. [272]. Hier zeigt insbesondere die Arbeit von HÄFNER ET AL. [133] sehr fortschrittliche Ansätze im Bereich der geometrischen Modellierung.

Interessant sind dabei auch die so genannten Multi-Skalen-Modelle, bei denen der Werkstoff auf unterschiedlichen Modellierungsebenen abgebildet wird. Multi-Skalen-

Modelle werden eingesetzt, um beispielsweise das Schädigungsverhalten an diskreten Stellen einer Struktur genauer zu betrachten oder um aus Untersuchungen auf einem hohen Diskretisierungsniveau (z.B. Mikroebene) das Verhalten des Materials auf der jeweils nächstniedrigeren Diskretisierungsebene (z.B. Mesoebene) zu prognostizieren. Beispiele dafür geben u.a. CUSATIS ET AL. in [68] und LEPENIES in [171].

Ein richtungsweisender Ansatz zur (hoch-)dynamischen Werkstoffsimulation stammt aus dem Jahr 2000. In [233] zeigte RIEDEL erstmalig die Möglichkeit der Bestimmung der Zustandsgleichung aus Werkstoffsimulationen in einer Hydrocode-Umgebung. RIEDEL entwickelte dabei ein Verfahren zur Simulation und Auswertung ebener Wellen in einem auf mesomechanischer Ebene modellierten numerischen Probekörper. Wie in der vorliegenden Arbeit noch gezeigt werden wird, wurden jedoch im Rahmen der Werkstoffmodellierung der Einzelkomponenten in [233] einige Annahmen getroffen, die zu ungenauen bis hin zu fehlerhaften Ergebnissen führen können. So konnte bisher lediglich gezeigt werden, dass die numerischen Ergebnisse innerhalb der zu erwartenden Schranken der beiden modellierten Komponenten des Betons liegen (vgl. [233], [234]).

Im Jahr 2008, parallel zur Entstehung dieser Arbeit, veröffentlichten ZHOU und HAO numerische Untersuchungen zur Schädigungsevolution in Beton unter dynamischer Spaltzugbelastung [295]. In ihren Untersuchungen auf mesomechanischer Modellenebene bildeten sie die Verbundzone zwischen Zuschlägen und Zementmatrix explizit ab. Zwar beschränkten sich diese Untersuchungen aufgrund einiger Vereinfachungen (z.B. einer sehr groben Diskretisierung) auf die qualitative Betrachtung der Schädigungsevolution im Beton, jedoch basiert die Arbeit von ZHOU und HAO auf der selben Grundidee, auf der auch ein Teil dieser Arbeit aufbaut.

Ein deutlicher Schwachpunkt in der Arbeit von ZHOU und HAO liegt allerdings, neben der relativ groben Diskretisierung, in der "künstlichen" Materialbeschreibung der Einzelkomponenten. In [295] wurde das verwendete Modell lediglich durch Parametervariation an die den Untersuchungen zugrunde liegenden Experimente angepasst. Ein auf einer breiten Datenbasis beruhendes Materialmodell zur Beschreibung der Zementsteinmatrix und der Verbundzone wurde nicht entwickelt. Die Veröffentlichung von ZHOU und HAO stellt dennoch den aktuellen Stand der Forschung auf dem Gebiet der mesomechanischen Modellierung von Beton unter dynamischer Belastung dar, was zugleich die Vielzahl der noch offenen Fragen und möglichen Forschungsrichtungen zeigt.

Jedoch ergeben sich auch Einschränkungen. Grundsätzlich ist zur Werkstoffsimulation von Beton eine, im Verhältnis zur bisher üblichen homogenen Betrachtung, sehr feine Auflösung der Struktur des Betons mit entsprechender Modellbildung für die Einzelbestandteile erforderlich. Dieser hohe örtliche Diskretisierungsgrad begrenzt jedoch die Anwendbarkeit der Werkstoffsimulation in zweierlei Hinsicht. Einerseits ist die Anzahl der in vielen Codes verarbeitbaren Elemente derzeit noch begrenzt (32-Bit-Systeme), weshalb nur Körper mit kleinen Abmessungen untersucht werden können. Andererseits führen, wie im Abschnitt 4.3 gezeigt werden wird, geringe Ele-

mentgrößen zu erheblichen Rechenzeiten. Daher kann, wenn die Rechenzeit in einem vertretbaren Rahmen gehalten werden soll, der Elementierungsgrad nicht beliebig gesteigert werden.

Es ist jedoch zu erwarten, dass diese Einschränkungen aufgrund der Entwicklung von 64-Bit-System basierten Codes und der Weiterentwicklung der Parallelisierung der Berechnungen in näherer Zukunft an Bedeutung verlieren werden.

### 1.3 Zielsetzung

Aus den vorangegangenen Ausführungen wird deutlich, dass im Bereich der Werkstoffsimulation von Beton unter Kurzzeitbelastungen noch grundlegender Forschungsbedarf besteht. Dies betrifft insbesondere die Modellbildung zur realitätsnahen Beschreibung der Einzelkomponenten des Betons. Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist daher die Entwicklung konstitutiver Beziehungen für die Einzelkomponenten, da diese die Voraussetzung für die numerische Simulation der komplexen Wechselwirkungen der einzelnen Bestandteile des heterogenen Betons darstellen.

Aufbauend darauf soll in mesomechanischen Werkstoffsimulationen die Materialantwort des Betons auf unterschiedliche Belastungen untersucht werden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es zudem, die Ergebnisse der Werkstoffsimulationen in den Kontext der makromechanischen Materialbeschreibung zu stellen. Dementsprechend sollen nicht nur die Werkstoffsimulationen selbst, sondern insbesondere auch ihre Anwendung zur Entwicklung neuer Abschätzungsmethoden bzw. eines neuen verbesserten Materialgesetzes zur Beschreibung des Betons auf makromechanischer Modellebene dargestellt werden.

Insgesamt wird dabei Wert auf eine möglichst umfassende Darstellung der Grundlagen der verwendeten Modelle und Simulationsverfahren gelegt.

Die wesentlichen Themenbereiche der Arbeit bilden:

- die Modellbildung der Einzelkomponenten des Betons auf mesomechanischer Modellebene,
- mesomechanische Werkstoffsimulationen zur Bestimmung der Zustandsgleichung und Entwicklung einer Abschätzungsmethode auf Makroebene,
- mesomechanische Werkstoffsimulationen zur Untersuchung der Materialfestigkeit und des Bruchverhaltens sowie aufbauend darauf
- die Entwicklung eines neuen makromechanischen Materialmodells für Beton unter (hoch-)dynamischer Belastung und dessen Validierung.

Die wirklichkeitsnahe Modellierung der Einzelkomponenten des Betons erfordert eine eingehende Betrachtung der jeweiligen Materialien. Daher muss im Rahmen der

Modellbildung auch deren Struktur auf Mikroebene mit einbezogen werden. Die Modellbildung ist zudem im Rahmen der mesomechanischen Werkstoffsimulationen zur Bestimmung der Zustandsgleichung anhand von makroskopischen Experimentaldaten (Versuche am heterogenen Werkstoff Beton) zu überprüfen. Dynamisches Festigkeitsverhalten stellt grundsätzlich eine Erweiterung der statischen Festigkeitseigenschaften dar. Realistische Ergebnisse bei der Untersuchung dynamischer Prozesse sind folglich nur dann zu erwarten, wenn auch die Eigenschaften bzw. das Verhalten des Betons bei statischer Beanspruchung abgebildet werden können. Bei den mesomechanischen Werkstoffsimulationen zur Untersuchung der Materialfestigkeit und des Bruchverhaltens wird daher besonderer Wert auf das Modellverhalten unter statischer Belastung gelegt. Die Entwicklung eines neuen makromechanischen Materialmodells für Beton soll sowohl die in den Werkstoffsimulationen gewonnenen Erkenntnisse und die daraus abgeleiteten Forderungen an ein derartiges Modell umsetzen als auch Schwachstellen bekannter Materialmodelle beseitigen. Dies erfordert zusätzlich eine eingehende Betrachtung der derzeit gebräuchlichen konstitutiven Formulierungen für Beton. Besonderes Augenmerk liegt zudem darauf, das neue Modell zu verifizieren und anhand unterschiedlicher Problemstellungen zu validieren.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in zehn Kapitel gegliedert.

In Kapitel 2 werden zunächst die kontinuumsmechanischen Grundlagen erläutert, da diese die Basis der Beschreibung des mechanischen Werkstoffverhaltens darstellen. Das Kapitel umfasst die wesentlichen Teilbereiche der Beschreibung der kinematischen Beziehungen, der relevanten Spannungstensoren sowie der grundlegenden Erhaltungsgleichungen und der Invarianten. Zudem wird eine Einführung in die Materialtheorie gegeben. Dabei werden die Kopplung von Spannungen mit Verzerrungen in Stoffgleichungen sowie Grundbegriffe der Plastizität erläutert. Abschließend werden die relevanten thermodynamischen Grundlagen von Deformationsprozessen beschrieben.

Zum Verständnis der Prozesse bei (hoch-)dynamischer Belastung von Festkörpern werden in Kapitel 3 die grundlegenden Phänomene und Gleichungen zur Beschreibung der Wellenfortpflanzung beschrieben. Neben den Zusammenhängen zwischen Materialsteifigkeiten und Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit werden insbesondere die zur Lösung der fundamentalen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie erforderliche Zustandsgleichung erläutert. Dabei werden die relevanten Unterschiede zwischen den Formulierungen dieser Gleichung für homogene Stoffe und für poröse Medien wie Beton dargestellt. Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Beschreibung der Transmissionen, Reflektionen und Refraktionen beim

Auftreffen einer Welle auf eine Kontaktfläche unterschiedlicher Medien, da diese teilweise entscheidende Auswirkungen auf das Schädigungsverhalten von Beton haben.

Kapitel 4 stellt die wichtigsten Grundlagen eines Hydrocodes, anhand dessen die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modelle berechnet und konstitutivem Beziehungen implementiert werden, umfassend dar. Hierzu gehören die zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen der Erhaltungsgleichungen verwendeten Methoden zur zeitlichen und räumlichen Diskretisierung, die Integrationsalgorithmen sowie Betrachtungen zur Stabilität der numerischen Lösung. Dabei stellen Letztere eine Grundlage zur Beurteilung der Genauigkeit des numerischen Simulationsverfahrens dar.

In Kapitel 5 wird zunächst das Konzept der Mesomechanik näher betrachtet. Dabei werden die unterschiedlichen Skalierungen von Beton erläutert und die Mesomechanik gegenüber der Mikromechanik einerseits und der Makromechanik andererseits abgegrenzt. Den Schwerpunkt dieses Kapitels bildet die anschließende Modellbildung für die Komponenten Zuschlag und Zementstein. Hierzu ist insbesondere für den Zementstein eine Betrachtung der Zusammensetzung und Eigenschaften bis auf Mikroebene erforderlich. Diese detaillierte Betrachtung ermöglicht eine gegenüber bisherigen Modellen deutlich verbesserte Materialbeschreibung.

Diese Materialbeschreibung stellt den Ausgangspunkt für Werkstoffsimulationen zur Bestimmung der Zustandsgleichung in Kapitel 6 dar. In diesem Kapitel wird zunächst das zur Erzeugung der numerischen Probekörper eigens entwickelte Programm vorgestellt und dessen Funktionsweise erläutert. Anschließend werden das Simulations- und Auswerteverfahren beschrieben und anhand der Simulation mehrerer Versuchsreihen validiert. In weiterführenden numerischen Studien werden mögliche Vereinfachungen sowie Einflussfaktoren auf das numerische Ergebnis untersucht. Zudem wird die Werkstoffsimulation zur Bestimmung der Zustandsgleichung von Stahlfaserbeton betrachtet, was eine weitere wesentliche Neuerung darstellt. Aufbauend darauf wird die in Kapitel 5 entwickelte Methode zur Abschätzung der Materialparameter der Komponente Zementstein zur homogenisierten Beschreibung des Betons angewandt. Dabei wird anhand umfangreicher Simulationsreihen gezeigt, dass mit dieser Methode die Zustandsgleichung des homogenisierten Betons, deren Bestimmung bisher nur in aufwendigen Experimenten oder numerischen Simulationen möglich ist, auf einer einfachen theoretischen Basis in guter Näherung abgeschätzt werden kann.

In Kapitel 7 wird die mesomechanische Modellierung des Betons um eine weitere Komponente, die Verbundzone zwischen Zuschlag und Zementstein, erweitert. Dazu werden, als Ergebnis einer umfassenden Literaturrecherche, die mechanischen Eigenschaften der Verbundzone abgeleitet und das Werkstoffmodell des

Zementsteins an diese Eigenschaften angepasst. Aufbauend auf den Ergebnissen umfangreicher Voruntersuchungen werden anschließend Zug- und Druckversuche unter quasi-statischer Belastung nachsimuliert und ausgewertet. In einem weiteren Schritt wird aus Werkstoffsimulationen mit wechselnder Lastrichtung eine Funktion zur Beschreibung der Entfestigung auf makromechanischer Ebene entwickelt. Vergleichende numerische Untersuchungen des Schädigungsprozesses in Beton bei unterschiedlichen Verzerrungsraten schließen dieses Kapitel ab.

Die Umsetzung der in den vorangegangenen Kapiteln gewonnenen Erkenntnisse in ein neues makromechanisches Materialmodell für Beton ist Inhalt des Kapitels 8. Dazu werden zunächst die aktuellen Materialmodelle für Beton unter hochdynamischer Belastung näher betrachtet und Schwachstellen dieser Modelle identifiziert. Anschließend werden die stoffabhängigen konstitutiven Beziehungen des Kontinuums dargestellt. Dies umfasst, die Entwicklung eines Drei-Invarianten-Drei-Flächen-Modells mit plastischer Verfestigung, Verzerrungsratenabhängigkeit und Schädigung sowie die Degradation der Festigkeiten und der Steifigkeit.

Kapitel 9 zeigt die Verifikation und Validierung des in eine Hydrocode-Umgebung implementierten neuen Werkstoffmodells. Zur Verdeutlichung des breiten Anwendungsbereichs erfolgt die Validierung des Modells sowohl an Versuchsreihen mit Kontaktdetonationen als auch an einer Serie von Beschussversuchen auf massige Betonziele. Der Simulationsaufbau wird detailliert beschrieben und die Ergebnisse werden kritisch diskutiert.

Das Kapitel 10 fasst die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse abschließend zusammen und gibt einen Ausblick auf die Vielzahl weiterer möglicher Anwendungen der mesomechanischen Werkstoffsimulation von Beton.



# Kapitel 2

## Grundlagen der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

Ein Kontinuum (lat. continuum: "Das Zusammenhängende") ist ein Objekt, welches keine Risse, Brüche, Löcher, Hohlräume oder ähnliches innerhalb seiner Grenzen besitzt, sich also überall kontinuierlich fortsetzt. In der Kontinuumsmechanik wird vom mikroskopischen Aufbau der Materie, also zum Beispiel der Gitterstruktur kristalliner Festkörper und der molekularen Struktur von Flüssigkeiten, abgesehen und der Untersuchungsgegenstand als ein Kontinuum angenähert.

Bei der strukturmechanischen Problembearbeitung ist die vorwiegende Zielsetzung, Aussagen zum Verformungsverhalten sowie zur Lastverteilung und -abtragung in Bauteilen im End- bzw. Gleichgewichtszustand unter beliebigen Belastungsarten zu erhalten. Im Bereich der Impact- und Detonationssimulation - also im Bereich hochdynamischer Belastungen - ist es darüber hinaus erforderlich, die Strukturdeformation zeitlich aufgelöst und unter Einbeziehung von Phänomenen der Wellenausbreitung zu betrachten (vgl. [136]). Zur Beschreibung der physikalischen Gleichgewichtsbedingungen werden im ersten Teil dieses Kapitels zunächst die kinematischen Grundlagen erläutert. Anschließend werden die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie betrachtet, deren Erfüllung eine Voraussetzung der korrekten Beschreibung aller physikalischen Vorgänge darstellt. Zudem werden die zur Formulierung von Materialgesetzen in Hydrocodes erforderliche Aufspaltung der Spannungs- und Verzerrungstensoren sowie deren Invarianten beschrieben.

Der zweite Teil des Kapitels beschäftigt sich mit ausgewählten Aspekten der Materialtheorie. Dabei werden, aufbauend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen, die Kopplung von Spannungen und Verzerrungen in Stoffgleichungen, plastisches Materialverhalten sowie die mit Deformationsprozessen verbundene Thermodynamik betrachtet.

Umfassende Beschreibungen der Grundlagen der Kontinuumsmechanik geben bei-

spielsweise ALTENBACH in [7], BECKER und BÜRGER in [22], BETTEN in [32], HAUPT in [122] sowie PONTER und HAYHURST in [222]. Grundlagen der Materialtheorie finden sich u.a. bei CHEN in [55] und [58], bei HAUPT in [122], bei KALISZKY in [150] sowie bei LION in [176].

## 2.1 Ausgewählte Grundlagen der Kontinuumsmechanik

### 2.1.1 Kinematik

Die Basis der Beschreibung der Bewegung eines Körpers  $\mathcal{B}$  und dessen materieller Punkte  $P$  im EUKLIDISCHEN Vektorraum  $E^3$  bildet ein kartesisches Koordinatensystem mit den orthogonalen Basisvektoren  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$ . Die Lage jedes materiellen Punktes  $P$  des Körpers wird zu jedem Zeitpunkt  $t$  durch einen Ortsvektor

$$x = \mathbf{X}(P, t) \quad (2.1)$$

eindeutig bestimmt.

Dabei werden zwei für die Betrachtungen wesentliche Konfigurationen (Zustände) des Systems unterschieden: die Referenz- und die Momentankonfiguration. Abbildung 2.1 stellt dies grafisch dar.

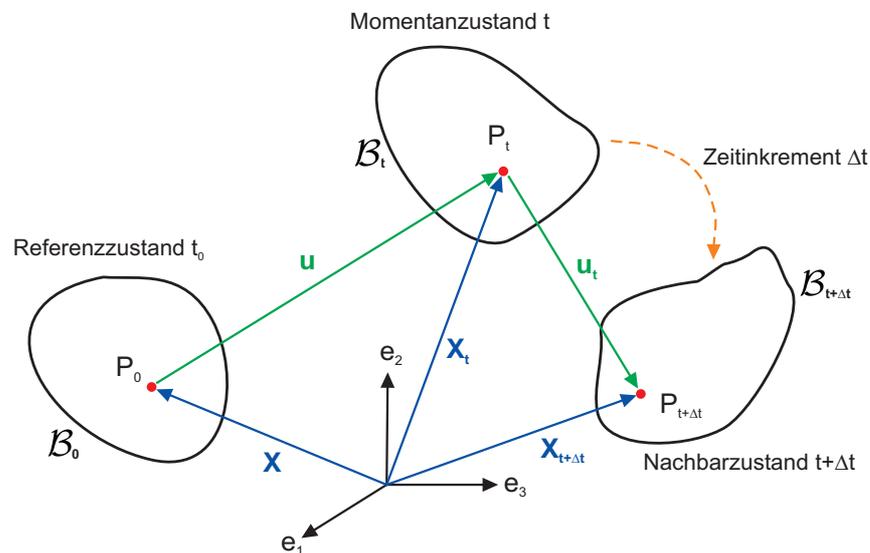


Abbildung 2.1: Kinematik des materiellen Punktkontinuums

Der Vektor  $u$  beschreibt dabei die Verschiebung eines Punktes.

Im Gegensatz zur "klassischen" Kontinuumsmechanik, in der sich die Beschreibung der Deformation auf die Referenzkonfiguration bezieht, erfolgt diese Beschreibung

in den im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Hydrocodes jeweils anhand der inkrementellen Verschiebung  $\mathbf{u}_t$  von der Momentan- in die Nachbarkonfiguration.

Je nach Betrachtungsweise, aus Sicht der Referenzkonfiguration oder der Momentankonfiguration, können zwei unterschiedliche Verzerrungstensoren  $G_{ik}$  und  $A_{ik}$  bestimmt werden, die die Deformation beschreiben:

$$G_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial {}^0x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial u_l}{\partial {}^0x_k} \right) \quad \text{und} \quad (2.2)$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial {}^tx_k} + \frac{\partial u_k}{\partial {}^tx_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial {}^tx_i} \frac{\partial u_l}{\partial {}^tx_k} \right) . \quad (2.3)$$

Dabei wird der Tensor  $G_{ik}$  als GREENScher und  $A_{ik}$  als ALMANSIScher Verzerrungstensor bezeichnet. Beide Verzerrungstensoren lassen sich anhand des so genannten Deformationsgradienten  $F$  in einander überführen.

Da sich der GREENSche Verzerrungstensor auf die Koordinaten  ${}^0x$ , also auf die Koordinaten zum Zeitpunkt  $t = 0$  (Referenzkonfiguration) bezieht, wird er in der Literatur auch als LAGRANGEScher Verzerrungstensor bezeichnet, wohingegen der ALMANSISche, aufgrund seines Bezuges auf die momentanen Koordinaten  ${}^tx$  (Momentankonfiguration), auch EULERScher Verzerrungstensor genannt wird.

Auf die explizite Herleitung dieser Verzerrungstensoren sowie des Deformationsgradienten wird an dieser Stelle verzichtet. Sie ist jedoch beispielsweise in [32], [122] und [136] ausführlich dargestellt.

Sowohl die LAGRANGESche als auch die EULERSche Formulierung werden im Rahmen dieser Arbeit verwendet. Ihre spezielle Eignung für unterschiedliche Problemstellungen wird in Abschnitt 4.2 näher erläutert.

## 2.1.2 Spannungen und Gleichgewichtsbedingungen

Auf einen Körper können räumlich verteilte Volumenkräfte, bzw. an seiner Oberfläche verteilte Flächen- oder Einzellasten einwirken. Dadurch werden im Inneren des Körpers Spannungen hervorgerufen, welche ihrerseits den Beanspruchungszustand charakterisieren.

Die Beschreibung der Spannungen im Rahmen dieser Arbeit erfolgt anhand des so genannten CAUCHYSchen Spannungstensors, dessen Elemente den parallel zu den Koordinatenachsen zerlegten Spannungsvektoren entsprechen. Abbildung 2.2 zeigt links ein differentielles Volumenelement mit den zugeordneten CAUCHY-Spannungen.

Da sich aus dem Gleichgewicht im klassischen Kontinuum die Gleichheit paarweise zugeordneter Schubspannungen ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) ergibt (BOLZMANN-Axiom), ist der

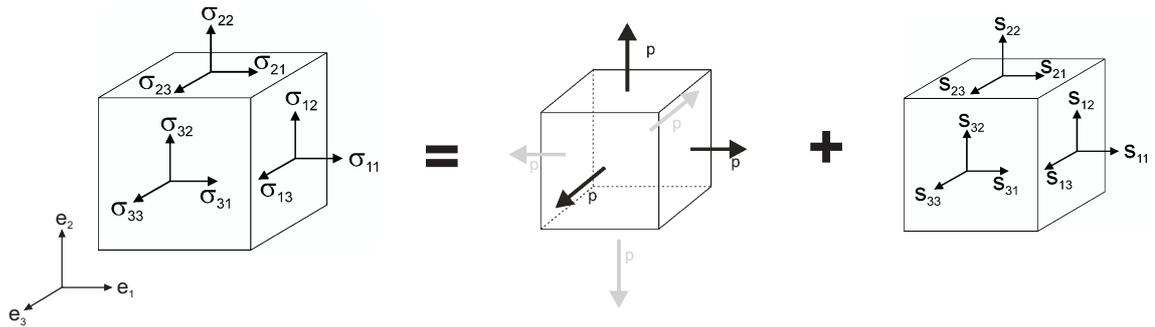


Abbildung 2.2: Differenzielles Volumenelement mit Spannungsvektoren; links: CAUCHY-Spannungen, rechts: Aufspaltung in hydrostatischen und deviatorischen Anteil

CAUCHYsche Spannungstensor folglich symmetrisch (zur Herleitung siehe z.B. [51], [262] und [278]).

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) \quad (2.4)$$

Da der CAUCHYsche Spannungstensor die Spannungen im Inneren eines Kontinuums bezogen auf den Momentanquerschnitt beschreibt, ist er im Gegensatz zu den auf den Ausgangsquerschnitt bezogenen Nennspannungen ein "wahrer" Spannungstensor in EULERSchen Koordinaten.

Analog zu den unterschiedlichen Verzerrungstensen sind auch verschiedene Definitionen für Spannungstensen möglich. Weitere Spannungstensen sind der erste und zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor, deren Herleitung beispielsweise in [7], [122], [136] und [222] beschrieben ist. Diese Spannungstensen bilden die Spannungen in der Momentankonfiguration mit Bezug auf den Referenzzustand ab. Analog der in Abschnitt 2.1.1 erläuterten Berechnung der Deformationen erfolgt auch die Berechnung der Spannungen in Hydrocodes nicht mit Bezug auf die Referenzkonfiguration, sondern lediglich vom Momentanzustand  $t$  auf einen Nachbarzustand  $t + \Delta t$ . Daher werden in Hydrocodes, wie auch im Rahmen dieser Arbeit, CAUCHY-Spannungen verwendet.

Um trotz des fehlenden Bezugs der Momentankonfiguration zur Referenzkonfiguration die Objektivität (Unabhängigkeit von der Starrkörperbewegung) der physikalischen Größen zu gewährleisten, werden die Spannungen durch der Zeitintegration der Spannungsrate  $\dot{\sigma}_{ij}$  ermittelt:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \dot{\sigma}_{ij}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (2.5)$$

Dabei ist die aus den schiefsymmetrischen Anteilen des Geschwindigkeitsgradienten  $L_{ik}$  (siehe z.B. [7], [122], [208]) bestimmte JAUMANNsche Spannungsrate (vgl. [51], [278]) die gängigste Form für Spannungsmaße in Hydrocodes [106].

Das in Gleichung (2.5) verwendete Halbschrittverfahren wird in Abschnitt 4.3.6 näher erläutert.

Neben den hier dargestellten Verzerrungs- und Spannungstensoren existieren noch eine Reihe weiterer Formulierungen, die jedoch über den Umfang dieser kurzen Zusammenfassung hinausgehen. Eine übersichtliche Zusammenstellung weiterer verschiedener Spannungs- und Verzerrungstensoren findet sich beispielsweise in PONTNER und HAYHURST [222].

### 2.1.3 Aufspaltung der Spannungs- und Verzerrungstensoren

Der CAUCHYSche Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  lässt sich, wie jeder Tensor 2. Stufe, in einen sphärischen und einen deviatorischen Anteil aufspalten.

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}}_{\text{sphärischer Anteil}} + \underbrace{s_{ij}}_{\text{deviatorischer Anteil}} . \quad (2.6)$$

Der als Kugeltensor bezeichnete sphärische Anteil repräsentiert dabei die durch den hydrostatischen Druck  $p$  hervorgerufenen Spannungen, für die gilt:

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = -\sigma_m . \quad (2.7)$$

Das negative Vorzeichen der Spannungen in Gleichung (2.7) resultiert auf der in der Mechanik getroffenen Übereinkunft, dass Druckspannungen negativ und der Druck  $p$  positiv definiert sind. Die Aufspaltung des CAUCHYSchen Spannungstensors in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil ist in Abbildung 2.2 grafisch dargestellt.

Eine entsprechende Aufspaltung des Verzerrungstensors führt zu einem Kugeltensor, der die reine Volumenverzerrung beschreibt, sowie einem Deviator, der die reine Gestaltänderung abbildet.

Da diese Aufspaltung des Spannungs- und Verzerrungstensors und die damit verbundene getrennte Berechnung der hydrostatischen und deviatorischen Spannungen und Verzerrungen für Hydrocodes typisch ist, ist sie für die Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit von besonderer Bedeutung.

### 2.1.4 Erhaltungsgleichungen

Die grundlegenden Erhaltungsgleichungen der Physik postulieren, dass bei allen Prozessen oder Wechselwirkungen in einem abgeschlossenen System bestimmte physikalische Größen, Erhaltungsgrößen genannt, konstant bleiben. Die entsprechenden Bilanzsätze sind sowohl global für einen Körper als auch differentiell für

jedes infinitesimale Element eines Kontinuums gültig und werden im Folgenden kurz erläutert. Sie werden dabei in LAGRANGEScher und EULERScher Formulierung dargestellt.

Der Unterschied zwischen LAGRANGEScher und EULERScher Formulierungen besteht in der Definition der Ableitungen  $d$  und  $\partial$ :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.8)$$

wobei  $\frac{\partial}{\partial t}$  die zeitliche Ableitung und  $u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  die örtliche Ableitung darstellen. Letztere wird auch *konvektiver Anteil* genannt, der in der EULERSchen Formulierung explizit berücksichtigt wird.

### Erhaltung der Masse

Es gibt zwar keinen allgemein gültigen Erhaltungssatz, der besagt, dass in allen Prozessen die Summe der Massen der beteiligten Partikel erhalten bleibt, jedoch kann bei den hier behandelten Problemstellungen, die aufgrund der auftretenden Geschwindigkeiten und Temperaturen vom Anwendungsbereich relativistischer Rechnung weit entfernt sind, von der Erhaltung der Masse ausgegangen werden.

Unter dieser Voraussetzung kann die Erhaltung der Masse während des Deformationsvorgangs formuliert werden:

Tabelle 2.1: Bilanzsatz der Massenerhaltung

EULER		LAGRANGE	
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$	(2.9)	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$	(2.10)
mit:		$\rho = \text{Dichte}$	
		$u_i = \text{Geschwindigkeit}$	

### Erhaltung des Impulses

Der Impulserhaltungssatz gilt als einer der wichtigsten Erhaltungssätze der Physik und ist sowohl in der klassischen Physik (bzw. klassischen Mechanik) als auch in der relativistischen Rechnung gültig. Der Bilanzsatz der Impulserhaltung kann wie folgt formuliert werden:

Tabelle 2.2: Bilanzsatz der Impulserhaltung

EULER	LAGRANGE
$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.11)$	$\frac{du_i}{dt} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.12)$
mit:	$F_i =$ äußere Kräfte $\sigma_{ij} =$ CAUCHY-Spannungen

### Erhaltung der Energie

Die Erhaltung der Energie ergibt sich aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, der in Abschnitt 2.2.3 noch näher beschrieben wird. Er besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Gesamtenergie bei allen Prozessen stets konstant ist. Es ist somit in einem solchen System weder möglich Energie zu erzeugen, noch sie zu vernichten. Daher gilt:

Tabelle 2.3: Bilanzsatz der Energieerhaltung

EULER	LAGRANGE
$\frac{\partial e}{\partial t} + u_i \frac{\partial e}{\partial x_i} = \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.14)$	$\frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.13)$
mit:	$e =$ innere Energie $p =$ hydrostatischer Druck $\dot{\epsilon}_{ij} =$ Verzerrungsgeschwindigkeit

Eine ausführliche und anschauliche Darstellung der in Hydrocodes verwendeten Formulierungen der Erhaltungsgleichungen findet sich beispielsweise in [29] und [81] sowie eine übersichtliche Zusammenstellung in [90].

### 2.1.5 Hauptspannungen und Invarianten

Für jeden Spannungszustand lassen sich durch eine Hauptachsentransformation 3 zueinander orthogonale Flächen finden, in denen keine Schubspannungen auftreten. Diese Flächen bilden den Hauptspannungsraum (auch HAIGH-WESTERGAARD-Raum ([56]) genannt). Die auf diese Hauptspannungsflächen wirkenden Normalspan-

nungen heißen Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ . Die Indizes 1, 2 und 3 werden dabei in der Regel so gewählt, dass  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (vgl. [276]) gilt.

Die Hauptspannungen sowie auch analog die Hauptverzerrungen sind die Eigenwerte des jeweiligen Spannungs- bzw. Verzerrungstensors.

Die Lösung der Bestimmungsgleichung der Hauptspannungen  $\sigma_i$

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 + I_2 \sigma_i - I_3 = 0 \quad , \quad (2.15)$$

ergibt die drei Hauptinvarianten  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  des Spannungstensors bzw. analog die Invarianten  $I'_1$ ,  $I'_2$  und  $I'_3$  des Verzerrungstensors (vgl. z.B. [122],[137] und [150]). Die Invarianten des Spannungs- und Verzerrungstensors sind, neben ihrer besonderen Anschaulichkeit, für die Anwendung in Hydrocodes (Kapitel 4) sowie insbesondere für die spätere Beschreibung von Fließ- und Bruchgrenzen im Rahmen der numerischen Modellbildung von erheblicher Bedeutung.

Tabelle 2.4 und 2.5 stellen diese unter Berücksichtigung der Aufspaltung der Tensoren (Abschnitt 2.1.3) zusammenfassend dar.

Tabelle 2.4: Invarianten der Hauptspannungen

Spannungstensor		Spannungsdeviator	
$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	(2.16)	$J_1 = {}^D\sigma_1 + {}^D\sigma_2 + {}^D\sigma_3$	(2.17)
$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1$	(2.18)	$J_2 = \frac{1}{2} ({}^D\sigma_1^2 + {}^D\sigma_2^2 + {}^D\sigma_3^2)$	(2.19)
$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$	(2.20)	$J_3 = {}^D\sigma_1 \cdot {}^D\sigma_2 \cdot {}^D\sigma_3$	(2.21)

Tabelle 2.5: Invarianten der Hauptverzerrungen

Verzerrungstensor		Verzerrungsdeviator	
$I'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$	(2.22)	$J'_1 = {}^D\varepsilon_1 + {}^D\varepsilon_2 + {}^D\varepsilon_3$	(2.23)
$I'_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1$	(2.24)	$J'_2 = \frac{1}{2} ({}^D\varepsilon_1^2 + {}^D\varepsilon_2^2 + {}^D\varepsilon_3^2)$	(2.25)
$I'_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3$	(2.26)	$J'_3 = {}^D\varepsilon_1 \cdot {}^D\varepsilon_2 \cdot {}^D\varepsilon_3$	(2.27)

Die Spannungszustände können anhand der Invarianten im Hauptspannungsraum auf unterschiedliche Weise formuliert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Beschreibung der Spannungen anhand des aus der Invarianten  $I_1$  abgeleiteten hydrostatischen Drucks  $p$ , der aus  $J_2$  bestimmten effektiven (Deviator-)Spannungen  $\sigma_{eff}$  und des aus  $J_3$  ermittelten Ähnlichkeits- oder LODE-Winkels  $\theta$  verwendet. Die

entsprechenden funktionalen Zusammenhänge sind, ohne weitere Herleitung, in Tabelle 2.6 zusammengefasst.

Weitere Möglichkeiten der Beschreibung der Spannungen im Hauptspannungsraum, wie beispielsweise anhand mittlerer Spannungen oder Oktaederspannungen, sind u.a. in [233] und [238] dargestellt.

Tabelle 2.6: Definition der effektiven Spannungen und des LODE-Winkels

hydrostatischer Druck	$p = -\frac{1}{3} I_1$	(2.28)
effektive Spannungen	$\sigma_{eff} = \sqrt{3 J_2}$	(2.29)
LODE-Winkel	$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}} \quad \text{mit } 0 \leq \theta \leq 60$	(2.30)
	$\cos \theta = \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)}{2 \sqrt{J_2^3}}$	(2.31)

## 2.2 Grundlagen der Materialtheorie

### 2.2.1 Kopplung von Spannungen und Verzerrungen in Stoffgleichungen

Die in den vorausgegangenen Abschnitten erläuterten Verzerrungs- und Spannungstensoren können in konstitutiven Gleichungen mit einander verknüpft werden.

Im allgemeinen Fall eines anisotropen Materials sind die neun Spannungskomponenten  $\sigma_{ij}$  von einander unabhängig mit den neun Verzerrungskomponenten  $\varepsilon_{kl}$  verknüpft. Ein Tensor  $C_{ijkl}$  zur Beschreibung dieser Verknüpfung besitzt somit 81 unabhängige Elemente.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.32)$$

Die 81 unabhängigen Gleichungen in (2.32) lassen sich jedoch durch Anwendung des in Abschnitt 2.1.2 erwähnten BOLZMANN-Axioms auf 36 Gleichungen (jeweils sechs unabhängige Spannungen und Verzerrungen) reduzieren.

Zudem kann durch Formulierung des elastischen Potentials

$$W^{pl} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \quad (2.33)$$

und dessen Ableitung nach den Verzerrungen nachgewiesen werden, dass die Steifigkeitsmatrix symmetrisch ist (ausführlich z.B. in [32]). Somit reduziert sich die

Steifigkeitsmatrix auf 21, und bei Berücksichtigung eines richtungsunabhängigen (isotropen) Materialverhaltens auf nur zwei unabhängige Komponenten.

Unter Verwendung der Ingenieurparameter  $E$  (Elastizitätsmodul) bzw.  $G$  (Schubmodul) und der Querkontraktionszahl  $\nu$  ergibt sich für ein isotropes Material die folgende, gegenüber der allgemeinen Formulierung stark vereinfachte Stoffgleichung:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.34)$$

mit den so genannten LAMÉschen Konstanten:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (2.35)$$

Bei Aufspaltung des Spannungs- und Verzerrungstensors entsprechend Abschnitt 2.1.3 ergibt sich aus Gleichung (2.34) der Zusammenhang zwischen hydrostatischem Druck  $p$  und den Volumenverzerrungen  $\varepsilon_{kk}$  anhand des Kompressionsmodul  $K$  zu

$$p = K \varepsilon_{kk} \quad \text{mit} \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu . \quad (2.36)$$

Die Verknüpfung des Spannungstensors  $s_{ij}$  mit den deviatorischen Verzerrungen lässt sich ebenfalls aus Gleichung (2.34) ableiten:

$$s_{ij} = 2 G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) = 2 \mu^D \varepsilon_{ij} . \quad (2.37)$$

Ausführliche Herleitungen der konstitutiven Beziehungen von Spannungen und Verzerrungen finden sich z.B. in [32], [150] und [238].

## 2.2.2 Plastizität

Unter Plastizität versteht man die Eigenschaft fester Stoffe sich unter einer Krafteinwirkung zu verformen (zu fließen) und diese Form nach Wegfall der Einwirkung beizubehalten.

Die klassische Plastizitätstheorie basiert auf der Aufspaltung des Verzerrungsinkrements  $d\varepsilon_{ij}$  in einen elastischen (Index  $e$ ) und einen plastischen (Index  $pl$ ) Anteil.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{pl} \quad (2.38)$$

Dabei wird der elastische Anteil durch ein elastisches Stoffgesetz bestimmt (siehe Abschnitt 2.2.1). Plastische Verzerrungen stellen sich ein, wenn der Spannungszustand eine so genannte *Fließgrenze* erreicht.

Das Verhalten des Materials bei weiterer Beanspruchung nach Erreichen der Fließgrenze wird in einer *Fließregel* beschrieben.

Plastisches Materialverhalten kann anhand der Funktion des plastischen Potentials  $g(\sigma)$ ,

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.39)$$

dargestellt werden, wobei  $d\lambda$  einen (positiven) Proportionalitätsfaktor beschreibt, der nur bei plastischen Verzerrungen auftritt (vgl. z.B. [57]). Der Vektor  $d\varepsilon_{ij}^{pl}$  in Gleichung (2.40) steht dabei senkrecht auf der Fläche des plastischen Potentials.

Wird die Fläche des plastischen Potentials durch eine Fließfunktion oder Fließfläche  $f$  beschrieben ( $g = f$ ), ergibt sich

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.40)$$

wobei das plastische Verzerrungsinkrement eine Normale zur Fließfläche ist. Eine derartige Definition wird als "assozierte" Fließregel bezeichnet, da sie mit der Fließfläche verbunden bzw. assoziiert ist (vgl. [238]).

Die unter den übrigen ("nichtassozierten") Fließregeln am häufigsten verwendete Formulierung ist die so genannte VON MISES-*äquivalente* Fließregel, bei der der Vektor des plastischen Verzerrungsinkrements senkrecht auf der Hydrostaten steht. Abbildung 2.3 zeigt eine schematische Darstellung einer assoziierten Fließregel sowie, exemplarisch für die nichtassozierten Fließregeln, der VON MISES-*äquivalenten* Formulierung.

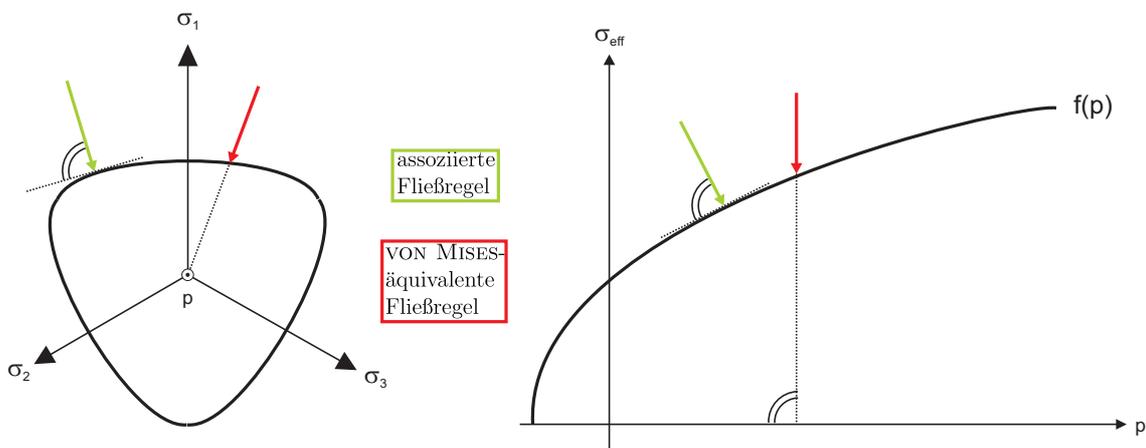


Abbildung 2.3: Assoziierte und VON MISES-äquivalente Fließregel im Deviator- (links) und Meridianschnitt (rechts)

Die Vor- und Nachteile bzw. Problematiken der verschiedenen Fließregeln werden hier nicht näher erörtert. Sie werden jedoch in [37], [57], [76] und [202] diskutiert.

Das effektive plastische Verzerrungsinkrement wird aus der Differenz der in einem Zeitschritt bestimmten (theoretischen) effektiven Spannung  $\sigma_{eff}$  und der aus der Fließfunktion ermittelten Fließspannung  $\sigma_Y$  bestimmt. In Verbindung mit dem Schubmodul  $G$  gilt:

$$\Delta\varepsilon_{eff}^{pl} = \frac{\sigma_{eff} - \sigma_Y}{3G} \quad \text{für} \quad \sigma_{eff} - \sigma_Y > 0 \quad . \quad (2.41)$$

Die effektive plastische Verzerrung ergibt sich schließlich durch Integration der Inkremente über die Zeit:

$$\varepsilon_{eff}^{pl} = \int_{(t)} \Delta\varepsilon_{eff}^{pl} dt \quad . \quad (2.42)$$

In der Anwendung der Plastizitätstheorie ist es vor allem erforderlich, ein Kriterium für diejenigen Spannungszustände  $\sigma_{ij}$  zu definieren, bei denen plastische (irreversible) Verformungen auftreten. Dieses Kriterium ist die bereits angesprochene Fließgrenze.

Grundsätzlich hat sich, nicht zuletzt aus Gründen der physikalischen Interpretierbarkeit, die grafische Darstellung der dreidimensionalen Fließfläche als Schnitte in der Deviatorebene (Deviatorschnitte) und senkrecht zur Deviatorebene entlang der Hydrostaten (Meridianschnitte) als günstig erwiesen (vgl. Abbildung 2.3). Diese getrennte Form der grafischen Darstellung wird auch im Rahmen dieser Arbeit verwendet.

### 2.2.3 Thermodynamik der Deformation

*”Die Theorie der Plastizität ist auf rein mechanischer Grundlage entwickelt worden, und man kann sie im Wesentlichen auch heute noch formulieren, ohne thermodynamische Begriffe zu verwenden.”* Dieser Satz aus dem Jahr 1970 stammt von Hans Ziegler [297] und ist bis heute gültig. Jedoch ist eine vollständige Beschreibung der Vorgänge bei der Deformation ohne Berücksichtigung thermodynamischer Prozesse, wie auch von Ziegler festgestellt, nicht möglich.

Im Folgenden werden daher die für die Materialmodellierung relevanten Grundlagen der Thermodynamik der Deformation kurz dargestellt.

Detaillierte Herleitungen sowie weiterführende Literatur zur Thermodynamik der Deformation finden sich z.B. in [22], [122], [123], [254] und [297].

Allgemein lässt sich die innere Energie eines Körpers  $\mathcal{B}$  als Integral des Dichtefeldes  $\rho(x)$  und des Feldes der spezifischen inneren Energie (innere Energie pro Masseneinheit)  $e(x)$  formulieren.

$$E = \int_{\mathcal{B}} \rho(x) e(x) dV \quad . \quad (2.43)$$

Da sich diese Betrachtungen auf ein geschlossenes System beziehen, ist somit ein Energietransport über die Grenzen des Systems hinaus nicht möglich (adiabates System). Daraus folgt, dass die innere Energie des Systems zwar in Wärme bzw. Arbeit und umgekehrt umgewandelt werden, jedoch deren Summe nicht zu- oder abnehmen kann.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik postuliert somit die in Abschnitt 2.1.4 formulierte Energieerhaltung.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik definiert eine Zustandsgröße  $S$  (Entropie) und eine für alle Systeme stets positive Funktion der Temperatur  $\Theta(\vartheta)$ , sodass beim Übergang von einem Gleichgewichtszustand 1 auf einen Gleichgewichtszustand 2 grundsätzlich gilt:

$$\Theta(\vartheta_2) \cdot \Delta S \geq \Delta Q = \Delta E - \Delta W . \quad (2.44)$$

In einem adiabatischen System bedeutet dies, dass die Entropie bei keinem Prozess abnehmen kann.

$$\Delta S \geq 0 , \quad (2.45)$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für ideale (reversible) Prozesse gültig ist. Derartige Prozesse treten in der Natur jedoch nur als Grenzfälle auf.

Bezogen auf die plastische Deformation lässt sich, wie beispielsweise in [22] und [297] gezeigt wird, ableiten, dass dieses Dissipationspostulat des 2. Hauptsatzes, nach dem die Dissipationsleistung nicht negativ sein darf,

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \geq 0 , \quad (2.46)$$

erfüllt ist, solange der Ursprung des Spannungsraums innerhalb der Fließfläche liegt. Ein "Rückwärtsfließen" ist unter dieser Voraussetzung somit ausgeschlossen.

Der im Rahmen dieser Arbeit verwendete Hydrocode AUTODYN vernachlässigt die zeitliche Entropieänderung und geht von adiabatischen bzw. isentropen Vorgängen aus (vgl. [53]).

Die im Bereich der Detonations- und Impaktvorgänge relevanten Prozesse spielen sich im Bereich weniger Millisekunden ab. Temperaturbedingte Änderungen der Materialeigenschaften wie beispielsweise der Festigkeiten oder der Wellengeschwindigkeit infolge eines Wärmeflusses sind daher nicht zu erwarten und werden vernachlässigt.

Da die Entropie als konstante Größe postuliert, und somit per se  $dS = 0$  für jeden Zeitschritt  $\Delta t$  angenommen wird, erfolgt eine explizite Berechnung der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung (siehe z.B. [122] und [137]) nicht. Die verwendeten Materialgleichungen berücksichtigen die Entropie folglich auch nicht als Zustandsgröße.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die mechanischen und thermischen Effekte bei der Bewegung des Kontinuums noch von weiteren Erscheinungen, wie beispielsweise elektrischen Effekten oder Strahlung, begleitet sein können, die jedoch bei der Anwendung der Theorie in der Mechanik in der Regel vernachlässigt werden können (vgl. [22]) und auch hier vernachlässigt werden.

# Kapitel 3

## Grundlagen der Wellenausbreitung

### 3.1 Allgemeines

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der numerischen Simulation sowohl statischer als auch (hoch-)dynamischer Belastungen von Beton. Dabei werden, gegenüber statischen Belastungen, (hoch-)dynamische Beanspruchungen in einem Material von zusätzlichen Phänomenen begleitet, deren Grundlagen in diesem Kapitel dargestellt werden.

Hochdynamische Einwirkungen sind charakterisiert durch hohe Belastungsgeschwindigkeiten, hohe Verzerrungsraten, hohe Spannungsspitzen und eine kurze Belastungsdauer. Eine allgemein gültige Definition, ab wann eine Belastung als hochdynamisch gilt, gibt es jedoch nicht. Belastungen dieser Art auf ein Medium, egal ob Gas, Fluid oder Feststoff, werden in der Regel von Phänomenen der Wellenausbreitung begleitet. Es laufen Spannungswellen durch das Medium, die die eingetragene Energie transportieren. Die Wellenausbreitung stellt daher eine wesentliche Grundlage der in einem Material zu beschreibenden Effekte infolge hochdynamischer Einwirkung dar.

Eine umfangreiche Einführung in die Thematik der Wellenausbreitung geben beispielsweise MEYERS in [193] und ZUKAS in [303]. Übersichtliche Zusammenfassungen liefern HIERMAIER in [136] und OCKERT in [210]. Darüber hinaus geben die von BERSHADER und HANSON zusammengestellten Beiträge in [31] umfangreiche Informationen zu den mit Schockwellen verbundenen Phänomenen.

### 3.2 Arten von Wellen

Wellen in einem Medium können unterschiedlicher Gestalt sein. Bei lokaler Einwirkung treten, wie in Abbildung 3.1 dargestellt, Oberflächenwellen (RAYLEIGH-

Wellen), Längswellen (*Longitudinalwellen*) und Scherwellen (*Transversalwellen*) auf. Darüber hinaus sind, je nach System und Medium, auch Kompressionswellen, Grenzflächenwellen (Schichtwellen zwischen zwei Medien) und Biegungswellen (beispielsweise bei Balken und Platten) möglich. Je nach Art der Welle pflanzt sich diese mit unterschiedlicher Geschwindigkeit in einem Medium fort.

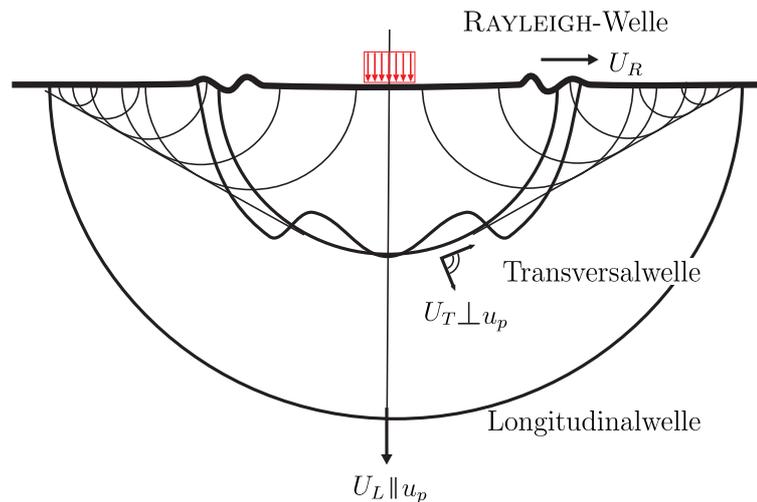


Abbildung 3.1: Wellenausbreitung in einem Halbraum bei lokaler Einwirkung (nach MEYERS 1994 [193])

Ein weiteres Unterscheidungskriterium für Wellen ist die Art der von ihr hervorgerufenen Verformung. So lassen sich, innerhalb einer Wellenart, aufgrund ihres unterschiedlichen Verhaltens elastische und plastische Wellen sowie die Sonderform der Schockwellen unterscheiden.

Im Folgenden werden die genannten Wellenarten sowie weitere mit ihnen verbundene Phänomene näher betrachtet.

### 3.2.1 Elastische Wellen

Im Fall elastischer Longitudinalwellen bewegt sich die Welle mit der Wellengeschwindigkeit  $c_L$  parallel zu den Partikeln mit der Partikelgeschwindigkeit  $u_p$ .

Im allgemeinen dreiaxialen Fall ergibt sich die Longitudinalwellengeschwindigkeit in Abhängigkeit von den in der Kontinuumsmechanik üblichen und aus Abschnitt 2.2.1 bekannten LAMÉschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  zu

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (3.1)$$

beziehungsweise im vereinfachten einaxialen Fall mit Querkontraktion  $\nu = 0$ , beispielsweise in einem dünnen Stab, zu

$$c_{LS} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.2)$$

Im Gegensatz zu den Longitudinalwellen bewegen sich Transversalwellen senkrecht zur Partikelbewegung. Für die Geschwindigkeit von Transversalwellen gilt:

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (3.3)$$

Aus dem Vergleich mit Gleichung (3.1) wird deutlich, dass sich Transversalwellen allgemein langsamer ausbreiten als Longitudinalwellen. Die Ausbreitung einer reinen Transversalwelle in einem Medium erfolgt dabei ohne volumetrische Verzerrung.

Im Gegensatz dazu rufen Kompressionswellen volumetrische Verzerrungen hervor. Kompressionswellen breiten sich mit der Geschwindigkeit

$$c_B = \sqrt{\frac{2 \mu (1 - \nu)}{3 (1 - 2\nu) \rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (3.4)$$

aus, wobei  $K$  den Kompressionsmodul des Mediums beschreibt.

In einem Kontinuum können lediglich Longitudinal-, Transversal- und Kompressionswellen auftreten. An einer Oberfläche bzw. an Grenzen zu anderen Medien oder Materialien dagegen kann es zu weiteren Wellenphänomenen kommen.

Die so genannten RAYLEIGH-Wellen verlaufen entlang einer freien Oberfläche. Für ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit gibt es derzeit lediglich empirische Formeln wie beispielsweise die von GRAFF in [103]:

$$c_R = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu} \cdot c_T. \quad (3.5)$$

Zwar bewegen sich RAYLEIGH-Wellen somit im Vergleich zu den zuvor genannten Wellenarten relativ langsam, jedoch nimmt ihre Amplitude und damit ihre Energie nur mit dem Faktor  $1/r$  ab. Die Amplitude von elastischen Raumwellen dagegen verringert sich mit dem Faktor  $1/r^2$ .

Ebenso wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinal-, Scher- und Kompressionswellen ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer RAYLEIGH-Wellen in einem homogenen Halbraum nicht von der Frequenz abhängig und somit nicht dispersiv.

Weitere Wellenarten, wie beispielsweise Grenzflächenwellen (LOVE-Wellen), werden hier nicht näher betrachtet, da sie für die vorliegende Arbeit nicht von Bedeutung

sind.

Tabelle 3.1 fasst die Wellengeschwindigkeiten  $c$  (in der Literatur auch häufig mit  $U$  bezeichnet) der für diese Arbeit wesentlichen Wellenarten nochmals zusammen. Da hinsichtlich der Aufspaltung der Spannungen und Verzerrungen in einen sphärischen und einen deviatorischen Anteil bei der Anwendung von Hydrocodes eine Beschreibung der Materialeigenschaften unter Verwendung des Kompressions- und Schubmoduls häufig von Vorteil ist, werden die Wellengeschwindigkeiten in Tabelle 3.1 in Abhängigkeit von  $G$  und  $K$  dargestellt.

Die differentielle Herleitung der einzelnen Wellengeschwindigkeiten finden sich in den Veröffentlichungen der eingangs erwähnten Autoren.

Tabelle 3.1: Ausbreitungsgeschwindigkeiten unterschiedlicher Wellen

Wellenart	Ausbreitungsgeschwindigkeit
Longitudinalwelle im dünnen Stab	$c_{LS} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{9KG}{\rho(3K+G)}}$
Longitudinalwelle im ausgedehnten Festkörper	$c_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{(K+\frac{4}{3}G)}{\rho}}$
Transversalwellen im Festkörper	$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$
Kompressionswellen	$c_B = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$

### 3.2.2 Plastische Wellen

Übersteigen die durch eine Welle in einem Material hervorgerufenen Spannungen die Grenze des elastischen Verformungsverhaltens, so entsteht eine plastische Welle. Grundsätzlich kann diese plastische Welle analog den elastischen Wellen behandelt werden. Entsprechend gilt exemplarisch für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer plastischen Longitudinalwelle:

$$c_L^{pl} = \sqrt{\frac{d\sigma_V}{d\varepsilon_V}} \quad . \quad (3.6)$$

Bei vielen Materialien, wie auch bei Beton, zeigt sich jedoch, dass das Differential  $\frac{d\sigma_V}{d\varepsilon_V}$  der volumetrischen Spannung (Druck) und der Volumenverzerrung nicht mehr über den gesamten Bereich konstant ist (vgl. Abbildung 3.2).

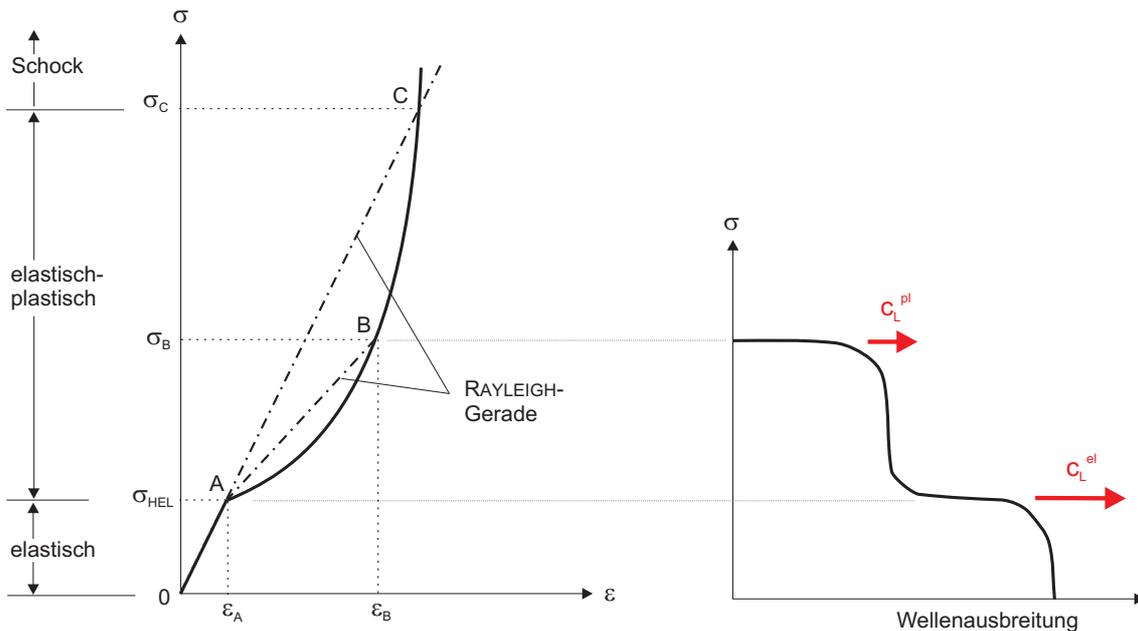


Abbildung 3.2: Ausbreitung einer elastischen und einer plastischen Welle

Im Bereich niedriger Drücke oberhalb des HEL, des so genannten "Hugoniot Elastic Limit" (kurz HEL), und unterhalb von Punkt C bewegt sich die plastische Welle somit langsamer als die elastische. Eine elastische Welle wird daher in diesem Zusammenhang auch als "elastischer Vorläufer" oder "precursor" bezeichnet. Die elastische Welle entfernt sich aufgrund ihrer höheren Geschwindigkeit zunehmend von der plastischen. Dieses Verhalten wird als normale Dispersion bezeichnet. Gleiches gilt auch für Transversalwellen, deren plastische Wellengeschwindigkeit sich analog Gleichung (3.6) zu

$$c_T^{pl} = \sqrt{\frac{d\tau}{d\gamma}} \quad (3.7)$$

ergibt.

### 3.2.3 Schockwellen

Im Bereich höherer Drücke, oberhalb des Punktes C in Abbildung 3.2, oder im Falle einer durchgängig konkaven Spannungs-Verzerrungs-Beziehung wird die Geschwindigkeit der plastischen Welle größer als die der elastischen und die plastische Welle überholt den elastischen Vorläufer. Dabei bildet sich eine Schockfront mit der Geschwindigkeit  $U_S$  (siehe Abbildung 3.3).

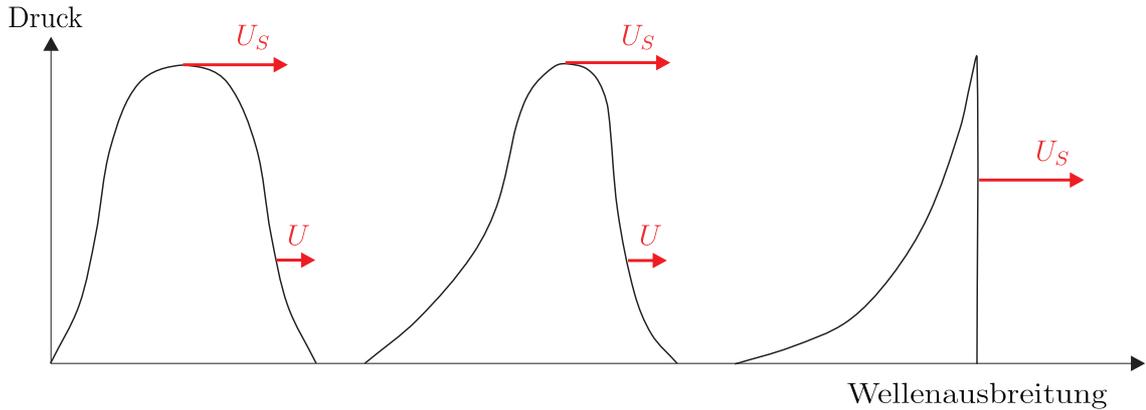


Abbildung 3.3: Entstehung einer Schockfront

Mathematisch kann diese Schockfront als Diskontinuität in den Verläufen der Zustandsgrößen Druck  $p$ , Dichte  $\rho$ , spezifische innere Energie  $e$  und Partikelgeschwindigkeit  $u_p$  gedeutet werden.

Abbildung 3.4 stellt diese Diskontinuität für den Fall einer eindimensionalen Longitudinalwelle schematisch dar. Dabei beschreibt der Index 0 die Größen vor und der Index 1 die Größen hinter der Schockfront.

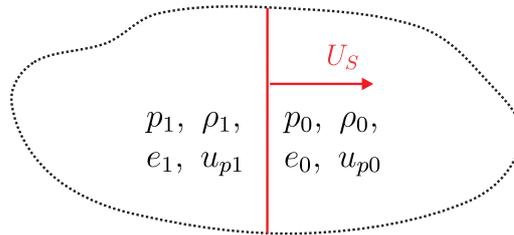


Abbildung 3.4: Zustandsgrößen vor und hinter einer Schockfront (schematisch)

Mit den dargestellten Größen lassen sich die Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie über die Schockfront bilanzieren. Diese Bilanzgleichungen werden in der Literatur auch als "RANKINE-HUGONIOT-Gleichungen" [194] oder als "RANKINE-HUGONIOTSche Sprungbedingung" [154] bezeichnet.

Tabelle 3.2: RANKINE-HUGONIOT-Gleichungen

Massenerhaltung	$\rho_1 (U_S - u_{p1}) = \rho_0 (U_S - u_{p0})$	(3.8)
Impulserhaltung	$\rho_1 (U_S - u_{p1})^2 + p_1 = \rho_0 (U_S - u_{p0})^2 + p_0$	(3.9)
Energieerhaltung	$e_1 + \frac{1}{2} (U_S - u_{p1})^2 = e_0 + \frac{1}{2} (U_S - u_{p0})^2$	(3.10)

Sind die Zustandsgrößen des Materials vor Durchlauf der Schockwelle bekannt, so verbleiben fünf Unbekannte ( $p_1, \rho_1, e_1, u_{p1}$  und  $U_S$ ), zu deren Bestimmung lediglich drei Gleichungen ((3.8) bis (3.10) in Tabelle 3.2) zur Verfügung stehen. Um die Beziehungen in Abhängigkeit nur einer Unbekannten auszudrücken, ist somit eine weitere Bestimmungsgleichung erforderlich.

### 3.3 Die Zustandsgleichung (EoS)

Die zur Beschreibung der Zustandsgrößen an der Schockfront fehlende Bestimmungsgleichung ist die so genannte "Equation of State" (EoS), eine Zustandsgleichung, die Druck  $p$ , Dichte  $\rho$  bzw. Volumen  $V$  und Energie  $e$  in Beziehung setzt. Eine vollständige EoS ist somit eine Funktion im  $p$ - $V$ - $e$ -Raum, die alle möglichen Zustände des Materials abbildet.

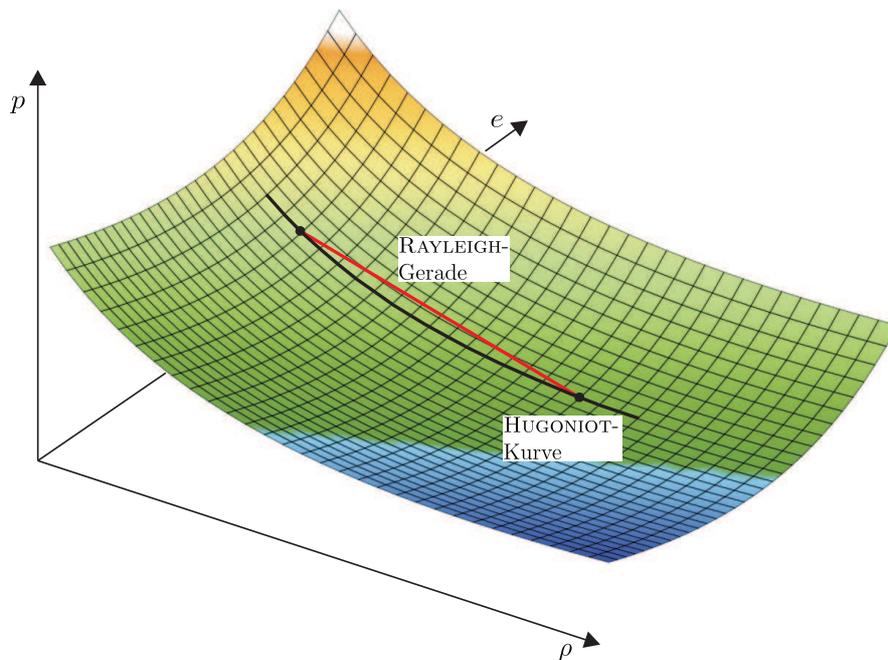


Abbildung 3.5: Grafische Darstellung einer Druck-Dichte-Energie-Beziehung

Die in Abbildung 3.5 schematisch dargestellte EoS im  $p$ - $V$ - $e$ -Raum zeigt exemplarisch eine Druck-Dichte-Energie-Beziehung für ein Metall.

Es ist wichtig zu bemerken, dass die EoS bzw. die HUGONIOT-Kurve lediglich Anfangs- und Endzustände repräsentieren. Das heißt, die Zustände "springen" entlang der so genannten RAYLEIGH-Geraden (vgl. Abbildung 3.5) von einem Punkt der EoS zum anderen. Die zwischen Ausgangs- und Endpunkt liegenden Punkte der

Fläche bzw. Kurve werden dabei nicht durchlaufen. Daher muss zur Bestimmung der Funktion jeder Punkt einzeln experimentell bestimmt werden.

Zur Bestimmung eines HUGONIOT-Punktes wird, beispielsweise mittels eines "Flyer Plate Impact Tests" (siehe Abschnitt 1.2.2), durch Bestimmung des momentanen Drucks und der zugehörigen Schockwellengeschwindigkeit bei bekannter Ausgangsdichte  $\rho_0$  ein Wert für  $\rho$  bzw.  $V$  ermittelt. Zusätzlich ist bei nicht adiabatischen Prozessen die Messung der Temperatur erforderlich, um die innere Energie, zumindest näherungsweise, zu bestimmen. Da die Dimension der Energie bzw. der Temperatur messtechnisch jedoch nur schwer zu erfassen ist, wird diese oftmals vernachlässigt. Wie aus Abbildung 3.5 deutlich wird, ist dies insofern möglich, als es unter der in Abschnitt 2.2.3 begründeten Annahme eines adiabatischen und somit isentropen Prozesses für jede konstante Temperatur eine spezielle Kurve in der Druck-Dichte-Ebene gibt. Diese Kurve wird als HUGONIOT-Kurve oder HUGONIOT-EoS bezeichnet. Die meisten HUGONIOT-Kurven beziehen sich auf eine Temperatur von 20°C. Ausgehend von dieser Vereinfachung lässt sich die EoS wie folgt herleiten: befindet sich das Material vor Durchlauf der Schockfront im Ruhezustand ( $u_{p0} = 0$ ), was der hier betrachteten Problemstellung entspricht, ergibt sich aus der Umformung von Gleichung (3.8)

$$u_p = U_S - \frac{\rho_0 U_S}{\rho}, \quad (3.11)$$

wobei zur Darstellung des Funktions-Charakters nur noch die Ausgangsgrößen mit Index 0 indiziert sind. In Verbindung mit der Impulsbilanz in Gleichung (3.9) folgt der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte, bzw. zwischen Druck und Volumen:

$$1 - \frac{p}{\rho_0 U_S^2} = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0}. \quad (3.12)$$

### 3.3.1 Formulierung für homogene Stoffe

Die Formulierung der Zustandsgleichung ist vom Verhalten des zu untersuchenden Materials unter Schockbelastung abhängig. Dabei sind viele unterschiedliche Formulierungen möglich - sowohl analytische als auch Tabellenform. Aufgrund der gleichzeitigen Lösung von EoS und Energiebilanz sind in Hydrocodes jedoch nur bestimmte Formen praktikabel (vgl. [285]).

Tabelle 3.3 fasst die gebräuchlichsten Zustandsgleichungen für homogene Stoffe zusammen. Darin werden, der hier behandelten Problematik entsprechend, nur Zustandsgleichungen dargestellt, die Schockzustände innerhalb eines Aggregatzustandes abbilden. Phasenübergänge werden nicht betrachtet.

Die Tabelle gibt lediglich einen Überblick und ist keineswegs vollständig. Eine detaillierte Beschreibung der hier aufgeführten sowie weiterer Zustandsgleichungen und deren Kombinationen können den Theorie-Handbüchern der Hydrocodes, wie beispielsweise CAVEAT [1], AUTODYN [53], LS-DYNA [178], HEMP [250], etc., und den Veröffentlichungen der Entwickler entnommen werden.

Tabelle 3.3: Zustandsgleichungen für Voll-Materialien

Bezeichnung	Mathematische Formulierung	Parameter
EoS für ideales Gas	$p = (\eta - 1) \rho e$	$\eta = \text{Gaskonstante}$
Linear	$p = K \mu$	$K = \text{Kompressionsmodul}$ $\mu = (\rho/\rho_0) - 1$
Abschnittsweise linear	$p = A_i + B_i \rho$	$A_i, B_i = \text{Formparameter}$ für alle $\rho \in [\rho_i; \rho_{i+1}]$
MIE-GRÜNEISEN	$p = p_\Gamma(V) + \frac{\Gamma(V)}{V} [e - e_\Gamma(V)]$	$\Gamma = V \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_V$
Polynomial (Druck/Zug)	$p = A_1 \mu + A_2 \mu^2 + A_3 \mu^3 + (B_0 + B_1 \mu) \rho_0 e$ $p = T_1 \mu + T_2 \mu^2 + B_0 \rho_0 e$	$A_i, B_j, T_k = \text{Formparameter}$ (Druck/Zug)
Schock	$U_S = c_B + S_1 u_p + S_2 u_p^2$	$S_i = \text{Formparameter}$

### 3.3.2 Formulierung für poröse Stoffe

Neben ihrer Notwendigkeit zur Lösung der RANKINE-HUGONIOT-Gleichungen erfüllt die Zustandsgleichung bei porösen Materialien noch eine weitere Funktion. Da in der klassischen Plastizitätstheorie hydrostatischer Druck kein Fließen hervorruft, kann ohne eine spezielle Druck-Dichte-Beziehung das nichtlineare Kompaktionsverhalten spröder poröser Werkstoffe, wie beispielsweise Beton, das sich mit Erreichen des Porenkollapsdrucks im Material einstellt, nicht abgebildet werden.

Dieses Verhalten kann in der Zustandsgleichung beschrieben werden. Abbildung 3.6 zeigt schematisch eine poröse HUGONIOT-EoS, wie sie im Rahmen dieser Arbeit für Beton und betonartige Werkstoffe verwendet wird. Die Zustände, die das Material dabei annehmen kann, lassen sich in drei charakteristische Bereiche unterteilen:

1. elastisch verformt,
2. kompaktiert,
3. granular.

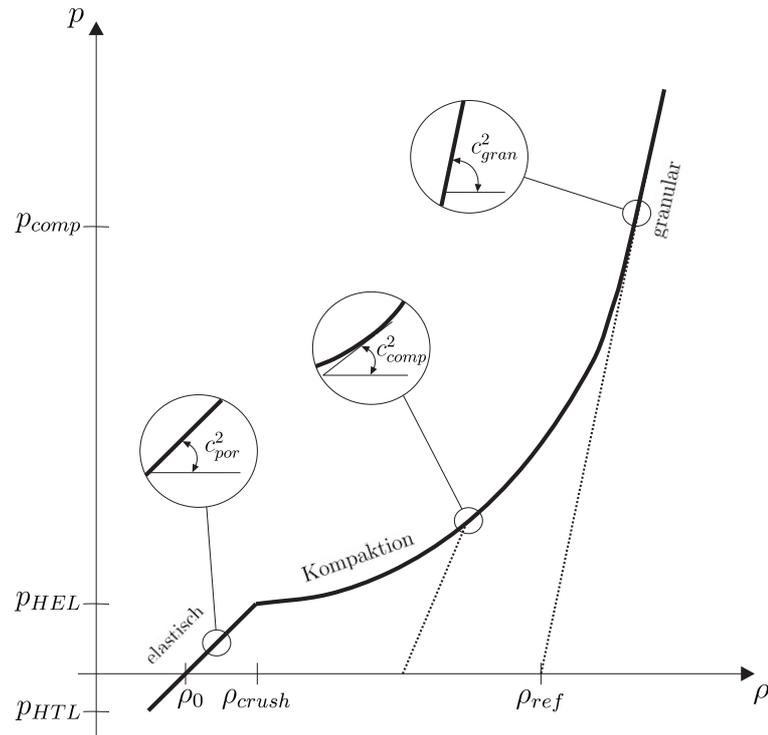


Abbildung 3.6: Poröse HUGONIOT-EoS für Beton (schematisch)

**Bereich 1:**

Der Beton verhält sich zwischen dem "Hydrostatic Tensile Limit" (HTL) und dem "Hugoniot-Elastic-Limit" (HEL) ( $\hat{=}$  Porenkollapsdruck) bei  $\rho_{crush}$  zunächst linear elastisch. Die Steigung dieses elastischen Astes beträgt

$$c_{por}^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{K}{\rho_0}, \quad (3.13)$$

wobei  $c_{por}^2$  dem Quadrat der elastischen Kompressionswellengeschwindigkeit entspricht.

Wird der Beton in diesem Zustand entlastet, so stellt sich wieder die Ausgangsdichte  $\rho_0$  ein.

**Bereich 2:**

Mit Überschreiten des Drucks am HEL ( $p_{HEL}$ ) beginnt der Beton zu kompaktieren. Die Poren beginnen zu kollabieren und es stellen sich irreversible (plastische) Verformungen ein. Dabei ist die Steifigkeit zunächst deutlich geringer als im elastischen Bereich, steigt dann jedoch mit zunehmender Kompaktion kontinuierlich an, bis die Steifigkeit des vollständig kompaktierten Betons  $c_{gran}^2$  erreicht ist.

Wird der Beton während der Kompaktion entlastet, so stellt sich aufgrund der

plastischen Verformung eine höhere Dichte als die Ausgangsdichte ( $\rho > \rho_0$ ) ein.

### Bereich 3:

Nach Erreichen der vollständigen Kompaktion befindet sich der Beton in einer Art granularem Zustand. Er ist sozusagen "pulverisiert" und somit vollständig zerstört. Da in diesem Zustand keine wesentlichen Steifigkeitsänderungen mehr eintreten, wird die Steigung der Funktion nach Überschreiten von  $p_{comp}$  als konstant mit  $c_{gran}^2$  angenommen.

Wird der Beton im vollständig kompaktierten Zustand entlastet, so liegt der Beton in granular verdichteter Form mit der als Referenzdichte bezeichneten Dichte  $\rho_{ref}$  vor. Diese Referenzdichte beschreibt zugleich, bezogen auf die Ausgangsdichte, das Kompaktionsvermögen  $\mu_{gran}$  des Betons:

$$\mu_{gran} = \frac{\rho_{ref} - \rho_0}{\rho_0} . \quad (3.14)$$

Zur mathematischen Beschreibung der in Abbildung 3.6 dargestellten Zustandsgleichung für poröse Materialien werden in der Materialbibliothek des Hydrocodes AUTODYN [53] zwei Varianten zur Verfügung gestellt.

Die EoS "Porous" bildet den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte abschnittsweise linear ab, wobei die korrespondierenden Druck-Dichte-Paare durch den Nutzer einzugeben sind. Diese Formulierung ist vergleichbar einer MIE-GRÜNEISEN EoS mit  $\Gamma = 0$  (vgl. Tab. 3.3). Folglich vernachlässigt diese Formulierung die Druckerhöhung infolge Energieabsorption, welche jedoch bei porösen Werkstoffen durchaus signifikant sein kann ([53]). Daher ist dieses Modell zwar für niedrige Drücke anwendbar, führt jedoch bei hohen Drücken, wie sie bei einer Kontaktdetonation erreicht werden, zu zunehmenden Abweichungen vom theoretischen Materialverhalten.

Die zweite Variante, die ursprünglich von HERRMANN 1969 [130] entwickelte P- $\alpha$  EoS, unterliegt diesen Einschränkungen nicht. Sie basiert auf einer um den Kompaktionsbereich erweiterten Zustandsgleichung der Form  $p = f(\frac{V}{\alpha}, e)$ . Dabei kann für  $f$  jede der in Abschnitt 3.3.1 angesprochenen Zustandsgleichungen verwendet werden. Die Funktion  $\alpha = g(p, e)$  beschreibt die Porosität des Materials im jeweiligen Zustand und wird im vollständig kompaktierten Zustand zu 1. Zwar reichen die zur Verfügung stehenden Daten in der Regel nicht aus, um die gesamte Funktion  $g$  darzustellen, jedoch liegt der entscheidende Bereich der Funktion bei Schockbeanspruchung auf oder zumindest nahe der HUGONIOT-Kurve. Da auf der HUGONIOT-Kurve Druck und innere Energie durch die RANKINE-HUGONIOT-Gleichungen mit einander verknüpft sind, ist die Energie implizit berücksichtigt, wenn  $\alpha$  lediglich als Funktion des Drucks ausgedrückt wird ( $\alpha = g(p)$ ). Dabei muss  $g$  im plastischen Bereich ( $p \geq p_{HEL}$ ) folgende Bedingungen erfüllen:

Tabelle 3.4: Bedingungen für eine Funktion  $\alpha = g(p)$ 

$p = p_{HEL}$	$\alpha = \alpha_p$	$\frac{d\alpha}{dp} = \alpha'_p$
$p_{HEL} < p < p_{comp}$	$\alpha_p > \alpha > 1$	$\frac{d\alpha}{dp} < 0$
$p = p_{comp}$	$\alpha = 1$	$\frac{d\alpha}{dp} = 0$

Eine mögliche Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, ist die von BUTCHER & KARNES [44] für poröses Eisen entwickelte Formulierung:

$$\alpha = 1 + (\alpha_p - 1) \left[ \frac{p_{comp} - p}{p_{comp} - p_{HEL}} \right]^N . \quad (3.15)$$

Der Kompaktionsexponent  $N$  in Gleichung (3.15) kann dabei variiert werden, so dass auch das Verhalten anderer Materialien abgebildet werden kann. AUTODYN [53] verwendet diese Funktion in der von Carroll & Holt [52] erweiterten Form

$$p = \frac{1}{\alpha} f \left( \frac{V}{\alpha}, e \right) . \quad (3.16)$$

Die  $p$ - $\alpha$ -Formulierung scheint physikalisch sinnvoll, da das Material über den gesamten Betrachtungsbereich mit der Zustandsgleichung  $f(V, e)$  des vollständig kompaktierten Materials beschrieben wird, wobei das Materialverhalten während der Kompaktion durch eine "Streckung" der Funktion  $f$  mit dem Faktor  $1/\alpha$  abgebildet wird.

### 3.4 Störungen in der Wellenausbreitung

Trifft eine Welle auf eine Grenzfläche, so wird ihre Ausbreitung gestört. Das Verhalten der Welle hängt dabei wesentlich von dem hinter der Grenzfläche vorliegenden Material ab. Je nach Beschaffenheit des Materials hinter der Grenzfläche wird die Welle reflektiert bzw. transmittiert. Entscheidend dafür sind die Impedanzen  $I_m$

$$I_m = c \cdot \rho = \sqrt{\frac{M^*}{\rho}} \cdot \rho = \sqrt{M^* \cdot \rho} \quad (3.17)$$

der Materialien beiderseits der Grenzfläche. Dabei beschreiben  $c$  die jeweilige Wellengeschwindigkeit und  $M^*$  den entsprechenden elastischen Modul gemäß Tabelle 3.1.

Abbildung 3.7 zeigt die schematische Darstellung einer schräg auf eine Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Materialien auftreffenden Longitudinalwelle. Für

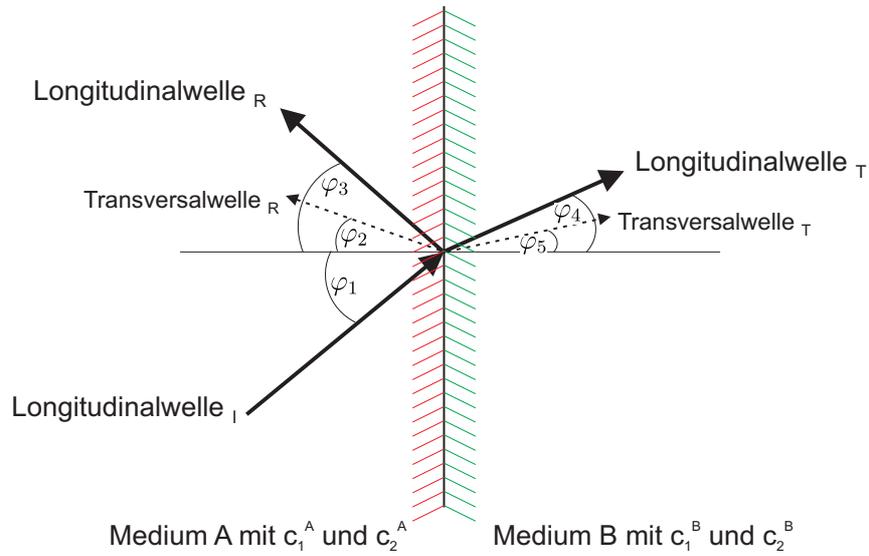


Abbildung 3.7: Schräg auf eine Grenzfläche zweier unterschiedlicher Medien treffende Longitudinalwelle (nach [193])

das Verhältnis der in der Abbildung dargestellten Winkel  $\varphi$  und der Wellengeschwindigkeiten  $c$  gilt das sogenannte Gesetz nach SNELL (z.B. in [126]):

$$\frac{\sin \varphi_1}{c_1^A} = \frac{\sin \varphi_2}{c_2^A} = \frac{\sin \varphi_3}{c_1^A} = \frac{\sin \varphi_4}{c_1^B} = \frac{\sin \varphi_5}{c_2^B}, \quad (3.18)$$

wobei die hochgestellten Indizes  $A$  und  $B$  das jeweilige Medium bezeichnen.

An der Grenzfläche müssen aufgrund der Impulserhaltung sowohl die Spannungen als auch die Partikelgeschwindigkeiten auf beiden Seiten gleich groß sein. Daraus ergibt sich ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Spannungen der reflektierten bzw. transmittierten Wellen, der Spannung der einfallenden Welle und den Impedanzen:

$$\sigma_R = \left( \frac{\rho^B c^B - \rho^A c^A}{\rho^B c^B + \rho^A c^A} \right) \cdot \sigma_I = \left( \frac{I_m^B - I_m^A}{I_m^B + I_m^A} \right) \cdot \sigma_I \quad (3.19)$$

$$\sigma_T = \left( \frac{2 \cdot \rho^B c^B}{\rho^B c^B + \rho^A c^A} \right) \cdot \sigma_I = \left( \frac{2 \cdot I_m^B}{I_m^B + I_m^A} \right) \cdot \sigma_I . \quad (3.20)$$

Aus den Gleichungen wird deutlich, dass bei der Reflexion einer Welle, je nach Impedanzunterschied, ein Vorzeichenwechsel der Spannung möglich ist. Ist die Impedanz im Medium  $A$  größer als im Medium  $B$ , so wird eine einfallende Druckwelle zu einer Zugwelle reflektiert und umgekehrt. Die transmittierte Welle dagegen behält immer ihr Vorzeichen.

Im Sonderfall des Auftreffens einer Festkörperwelle auf eine freie Oberfläche ( $I_m^A \gg$

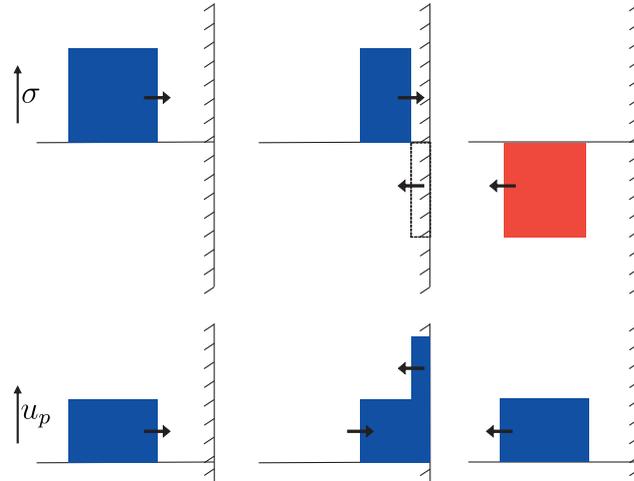


Abbildung 3.8: Wellenreflexion an einer freien Oberfläche eines Festkörpers; oben: Spannung, unten: Partikelgeschwindigkeit

$I_m^B$ ) wird die einfallende Welle vollständig reflektiert, wobei es zu einer Umkehr der Belastung kommt. Abbildung 3.8 stellt diesen Vorgang schematisch dar.

In Abbildung 3.8 ist erkennbar, wie sich die Spannungen der einfallenden und der reflektierten Wellen während der Reflexion überlagern und sich gegenseitig aufheben. Die reflektierte Welle wirkt sich daher nicht direkt an der freien Oberfläche sondern erst im Inneren des Festkörpers aus.

Die Partikelgeschwindigkeit dagegen verdoppelt sich während der Überlagerung, da sich zwar die Laufrichtung der Welle umkehrt, jedoch die Orientierung der Geschwindigkeitsvektoren gleich bleibt.

Tabelle 3.5: Relative Spannungen der reflektierten und transmittierten Wellen für unterschiedliche Impedanzverhältnisse

$I_m^A/I_m^B$	$\infty$	2.0	1	0.5	0
$\sigma_R/\sigma_I$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\cong 1$
$\sigma_T/\sigma_I$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\cong 2$

In Tabelle 3.5 sind abschließend die Spannungen der reflektierten und transmittierten Wellen nach Gleichung (3.19) und (3.20), bezogen auf die Spannung der einfallenden Welle  $\sigma_I$ , für unterschiedliche Impedanzverhältnisse zusammengestellt. Die Theorie der Wellenreflexion und -transmission ist u.a. in [193], [235] sowie [301] und [303] ausführlich beschrieben. Eine übersichtliche Zusammenfassung gibt auch GREULICH in [106].

# Kapitel 4

## Grundlagen der Hydrocodes

### 4.1 Allgemeines

”Hydrocodes” sind Computerprogramme, die die Problematik der Wellenfortpflanzung in einem Medium behandeln und Spannungen, Verzerrungen, Geschwindigkeiten, etc. als Funktion der Zeit und des Ortes berechnen. Sie werden daher in der Literatur auch als ”Wave-Propagation-Codes” bezeichnet (vgl. z.B. [11]). Die ersten Hydrocodes entstanden in den 50er Jahren. Ursprünglich für den militärischen Bereich und zur Simulation von hydrodynamischen Prozessen entwickelt, hat sich der Anwendungsbereich in den letzten zwei Jahrzehnten erheblich erweitert. Dies wurde möglich durch die Implementierung von Werkstoffgleichungen zur Beschreibung von Festigkeiten und der gleichzeitigen Entwicklung immer leistungsfähigerer Computer. Heute sind verschiedenste Hydrocodes auf dem Markt erhältlich. Die Grundprinzipien der Problembehandlung sind jedoch in nahezu allen Hydrocodes gleich.

Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten und dargestellten Simulationen wird der kommerzielle Hydrocode AUTODYN [53] verwendet. Die Funktionsweise eines Hydrocodes sowie dessen Anwendungsgrenzen stellen daher eine wichtige Grundlage zum Verständnis dieser Arbeit dar. Im Folgenden werden einige ausgewählte Grundlagen der Hydrocode-Simulationsverfahren erläutert. Ausführliche Beschreibungen geben beispielsweise ANDERSON in [11], BENSON in [29] und ZUKAS in [300].

Allen Hydrocodes ist gemeinsam, dass sie auf der Lösung der fundamentalen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie basieren. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu den mittlerweile weit verbreiteten Finite Element Programmen, die hauptsächlich auf den Arbeitsprinzipien und der Lösung des Kräftegleichgewichts aufbauen.

Da auch in Hydrocodes eine direkte Lösung der partiellen Differentialgleichungen der Bilanzsätze nicht möglich ist, werden diese mit numerischen Verfahren (explizit und/oder implizit) genähert. Dazu wird das ”Problem” örtlich und zeitlich diskre-

tisiert und schrittweise aufgelöst.

Der hier beschriebene Code AUTODYN bedient sich zur Lösung der Erhaltungsgleichungen der Methode der finiten Differenzen mit expliziter Zeitintegration. Er verwendet eine geometrisch nichtlineare Beschreibung der Verzerrungen und ermöglicht die Verwendung nichtlinearer Materialgesetze. Darüber hinaus ist es möglich, über eine Programm-Schnittstelle eigene Festigkeits- und Schädigungsmodelle sowie Zustandsgleichungen zu implementieren. Auf die numerischen Lösungsalgorithmen hat der Nutzer jedoch weder Zugriff, noch können eigene Algorithmen implementiert werden.

## 4.2 Eulersche und Lagrangesche Betrachtungsweise

Bei der Verwendung von Hydrocodes gibt es im Wesentlichen zwei fundamentale Betrachtungsweisen: eine raumfeste, EULERSche, und eine materialgebundene, LAGRANGESche. Die in den jeweiligen Betrachtungsweisen formulierten Gleichungen unterscheiden sich sowohl in ihrer mathematischen Formulierung als auch in der Art ihrer numerischen Lösungen (vgl. Abschnitt 2.1.4).

Zur Diskretisierung eines Problems wird zunächst ein Gitter von Punkten auf den zu betrachtenden Geometrien erzeugt. Durch das Verbinden benachbarter Punkte mit geraden, meist orthogonalen Linien entsteht ein Netz, dessen Elemente als Zellen bezeichnet werden.

In der EULERSchen Betrachtungsweise werden, zeitlich inkrementiert, Druck, Dichte, Geschwindigkeit, etc. an den festen Punkten des Gitters bestimmt. Die Gitterpunkte und entsprechend die Zellgrenzen bleiben dabei im zeitlichen Verlauf räumlich fest. Masse, Impuls und Energie "strömen" über die Zellgrenzen hinweg von Zelle zu Zelle. Anhand der sich am Ende eines Zeitschritts ergebenden Differenz zwischen Zustrom und Abfluss der entsprechenden Größen wird dann die jeweilige neue Größe (Masse, Dichte, Druck, Energie, etc.) berechnet. Form und Volumen der einzelnen Zellen bleiben in der EULERSchen Formulierung folglich fest in Raum und Zeit.

In der LAGRANGESchen Betrachtungsweise dagegen, sind die Gitterpunkte fest mit den zu betrachtenden Geometrien verbunden und bewegen sich mit der entsprechenden Geschwindigkeit des Materials im Raum. Die zu bestimmenden Größen werden von Zeitschritt zu Zeitschritt an den einzelnen Gitterpunkten berechnet. Dabei können sich die Punkte, in einem globalen Koordinatensystem betrachtet, relativ zu einander verschieben und Masse, Impuls und Energie werden mit der Bewegung der Materialpartikel im Raum transportiert. Form, Volumen und räumliche Position der Zellen sind somit veränderlich über die Zeit, die Masse der

einzelnen Zellen bleibt jedoch konstant.

Abbildung 4.1 zeigt exemplarisch den Impakt eines Aluminium-Zylinders auf Beton in EULERScher und LAGRANGEScher Betrachtungsweise.

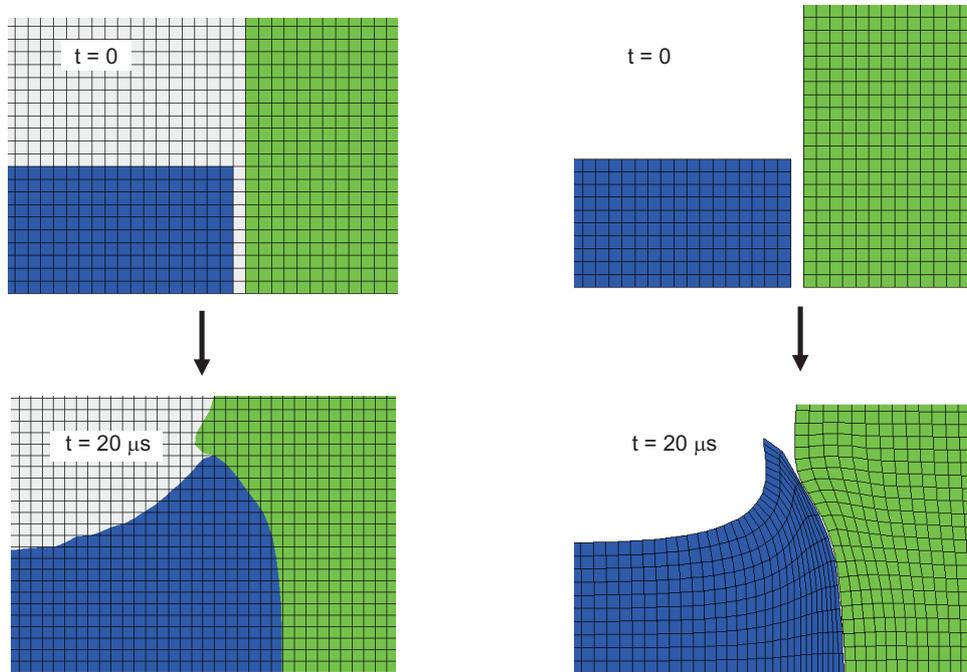


Abbildung 4.1: Impakt-Simulation; links: EULERSche Betrachtungsweise, rechts: LAGRANGESche Betrachtungsweise

Jede dieser zwei Formulierungen hat Vor-, aber auch Nachteile. Die EULERSche Formulierung eignet sich aufgrund ihrer Fähigkeit, mehrere Materialien innerhalb einer Zelle abzubilden und den Fluss von Masse, Impuls und Energie über die Zellegrenzen hinweg, gut zur Berechnung von hydrodynamischen Vorgängen wie Diffusion, turbulente Strömungen und Zustände sehr hohen Drucks. Die numerische Approximation der Erhaltungsgleichungen in den "gemischten" und Rand-Zellen ist jedoch weniger exakt als in den übrigen Zellen, was zu Schwierigkeiten bei der Formulierung von Randbedingungen und der Genauigkeit führt (vgl. [11]). Zudem sind für eine, der LAGRANGESchen Formulierung entsprechende, räumliche Auflösung deutlich mehr Gitternetzpunkte und somit auch eine erhöhte Rechenzeit erforderlich. Darüber hinaus "kennt" eine EULER-Zelle nur den Momentanzustand des Materials, nicht jedoch dessen Historie.

Die LAGRANGESche Formulierung dagegen erlaubt es, die Vergangenheit einer Zelle zu speichern und ermöglicht somit beispielsweise eine Akkumulation plastischer Verzerrungen in einem Versagensmodell. Ein weiterer Vorteil liegt in den expliziten Materialgrenzen, was die Abbildung von Reibungs- und anderen Kontakteffekten ermöglicht. Ein Nachteil ist jedoch, dass bei stark deformierten Zellen erhebliche

numerische Probleme auftreten können. Einerseits wird der Zeitschritt  $\Delta t$  aufgrund stark komprimierter Zellen extrem klein, andererseits können Zellen in sich selbst geschoben werden, was unter Umständen zu einer negativen Masse führt. In beiden Fällen bricht die Berechnung ab.

Neben diesen beiden "klassischen" gibt es noch andere Formulierungen, die hier jedoch nicht genauer betrachtet werden sollen. Weitere Formulierungen sind beispielsweise in [8] und [29] beschrieben.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Wahl einer Formulierung abhängig von der jeweiligen Problemstellung und den damit verbundenen Randbedingungen ist. Eine grundsätzliche Aussage darüber, welche Formulierung die "bessere" ist, ist somit nicht möglich, jedoch liegt für die hier vornehmlich behandelte Strukturanalyse von Betonwerkstoffen der Fokus auf der LAGRANGESchen Formulierung.

### 4.3 Numerik der Hydrocodes

Bei der Verwendung von Hydrocodes ist, wie bei allen numerischen Simulationsverfahren, ein gewisses Hintergrundwissen bezüglich der zugrunde liegenden numerischen Näherungsverfahren erforderlich, um die Genauigkeit und die Verwendbarkeit des Ergebnisses einer Simulation abschätzen zu können. Die wichtigsten Grundlagen der im verwendeten Hydrocode AUTODYN implementierten numerischen Methoden und Algorithmen sind daher im Folgenden dargestellt. Diese Zusammenfassung ist jedoch keineswegs vollständig und beschreibt nicht alle Hydrocodes. Sie dient lediglich dazu, einen Überblick zu geben. Für eine umfassende Beschreibung der Numerik der Hydrocodes wird daher auf die ausführliche Abhandlung von BENSON in [29] verwiesen.

#### 4.3.1 Zeitliche Diskretisierung

Die meisten der derzeit verwendeten Methoden zur Lösung instationärer hydrodynamischer Probleme sind explizit. Die Lösung für den Zeitpunkt  $t^{n+1}$  wird direkt, ohne iterativen Prozess, aus der Lösung zum Zeitpunkt  $t^n$  berechnet. Der Zeitschritt zwischen  $t^n$  und  $t^{n+1}$  wird dabei mit  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  notiert.

Explizite Verfahren sind dadurch gekennzeichnet, dass sich die Lösung einer Funktion  $f$  zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  aus ihrem Wert zum Zeitpunkt  $t^n$  bzw. ihren Ableitungen zu diesem Zeitpunkt berechnet. Dies sei am Beispiel einer Näherung erster Ordnung gezeigt.

$$f(t^{n+1}) = f(t^n) + \frac{\partial f(t^n)}{\partial t} \Delta t . \quad (4.1)$$

Die Genauigkeit lässt sich erhöhen, wenn anstelle des gesamten Zeitschritts in Halbschritten  $\frac{1}{2}\Delta t$  voran gegangen wird und Zwischenwerte zum Zeitpunkt  $t^{n+1/2}$  berechnet werden.

$$f(t^{n+1}) = f(t^n) + \frac{\partial f(t^{n+1/2})}{\partial t} \Delta t, \quad f(t^{n+1/2}) = f(t^n) + \frac{1}{2} \frac{\partial f(t^n)}{\partial t} \Delta t \quad (4.2)$$

Mit dieser auch als "time centering" bekannten Methode lässt sich die Näherung auf eine Genauigkeit zweiter Ordnung verbessern.

Bei impliziten Verfahren dagegen findet sich die gesuchte Größe bzw. ihre Ableitung auf beiden Seiten der Gleichung. Sie kann daher nur implizit durch ein iteratives Verfahren wie beispielsweise dem EULER- oder RUNGE-KUTTA-Verfahren (siehe z.B. [10]) bestimmt werden.

$$f(t^{n+1}) = f(t^n) + \frac{\partial f(t^{n+1})}{\partial t} \Delta t. \quad (4.3)$$

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Verfahren liegt, neben dem Rechenaufwand, in der Genauigkeit der Lösung. Zwar liefern implizite Verfahren bei der Wahl eines geeigneten Abbruchkriteriums eine genauere Lösung, jedoch sind sie aufgrund der erforderlichen Iteration auch deutlich aufwendiger.

Da sich explizite Verfahren als hinreichend genau erwiesen haben (vgl. [106]), werden diese in den meisten Codes verwendet.

Die Größe des Zeitschritts  $\Delta t$  ist dabei, neben der Genauigkeit, von erheblicher Bedeutung für die numerische Stabilität. Sie ist in der Regel abhängig von der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  und der kleinsten Zellengröße des Netzes  $\Delta x_{min}$ . Der Zeitschritt wird bei jedem Berechnungsgang so gewählt, dass die kleinste Zelle des Netzes von einer Schockwelle innerhalb eines Zeitinkrements nicht vollständig durchlaufen wird. Diese Bedingung für die Wahl des Zeitschritts wird als COURANT-FRIEDRICHS-LEVY (CFL) Kriterium bezeichnet.

$$\Delta t_1 \leq \frac{\Delta x_{min}}{c} \quad (4.4)$$

Das CFL-Kriterium [65] kann zwar bei stark komprimierten Zellen zu sehr kleinen Zeitschritten und somit zu erheblichem Rechenaufwand führen, jedoch ist es für eine stabile Lösung zwingend erforderlich (vgl. [283]).

AUTODYN [53] verwendet zusätzlich zwei weitere Kriterien zur Bestimmung des Zeitschritts  $\Delta t$ , die sich aus der künstlichen Viskosität zur Dämpfung der Oszillation nach der Schock-Diskontinuität (siehe Abschnitt 4.3.6) ergeben:

$$\Delta t_2 \leq \frac{1}{\left[ 4 C_Q^2 \left| \frac{\dot{V}}{V} \right| \right]} \quad (4.5)$$

und

$$\Delta t_3 \leq \frac{\Delta x_{min}}{2 C_L c}, \quad (4.6)$$

wobei  $C_Q$  und  $C_L$  Dämpfungskonstanten sind.

Als Zeitschritt  $\Delta t$  wird schließlich als das Minimum der drei Zeitschritte  $\Delta t_i$  und einem zusätzlichen Sicherheitsfaktor  $0 < k \leq 1$  bestimmt:

$$\Delta t = k \cdot \min(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3). \quad (4.7)$$

### 4.3.2 Räumliche Diskretisierung und Lösungsverfahren

Zur räumliche Diskretisierung der zu untersuchenden Geometrien wird das betrachtete Gebiet in eine endliche (finite) Zahl von Gitterpunkten zerlegt. Diese Zerlegung erfolgt, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, durch eine Vernetzung der Struktur. Die Bezeichnung der Punkte erfolgt dabei aufsteigend in logischer Reihenfolge entlang der i-, j- und k-Linien.

Die Ableitungen an den Gitterpunkten werden dann anhand der Methode der Finiten Differenzen approximiert. Die partiellen Differentialgleichungen werden so, wie in Abschnitt 1.2 erläutert, in ein System von Differenzengleichungen umformuliert und können mittels verschiedener Algorithmen gelöst werden.

Gleichungen (4.8) bis (4.10) zeigen die erste, zweite und gemischte Ableitung einer Funktion  $f$  in der Methode der zentralen Differenzen.

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \quad (4.8)$$

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (4.9)$$

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4 h k} + O(h^2, k^2) \quad (4.10)$$

mit:

$$h = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_{i-1}) \quad \text{mittlere Netzweite in x-Richtung}$$

$$k = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_{i-1}) \quad \text{mittlere Netzweite in y-Richtung}$$

$$O(h^2) \quad \text{Ordnung des Abbruchfehlers}$$

Das sich dabei ergebende Gleichungssystem kann somit unter Hinzunahme der Randbedingungen über den gesamten Körper gelöst werden.

Die für jeden Zeitschritt, also in jedem Berechnungszyklus zu bestimmenden Größen der durch die Vernetzung entstandenen Zellen werden, je nach Art der Größe, in den Knotenpunkten bzw. in der Zellmitte bestimmt. Äußere Kräfte sowie Verschiebungen und deren zeitliche Ableitungen sind dabei auf die Knoten bezogen, wohingegen die Zellgrößen Druck, Dichte, Masse, Spannungen, Energie und Temperatur im Zellmittelpunkt zusammengefasst und dort aus den umgebenden "Knotengrößen" berechnet werden. Abbildung 4.2 zeigt exemplarisch eine Zelle mit der Nummerierungssyntax und den zu berechnenden Größen.

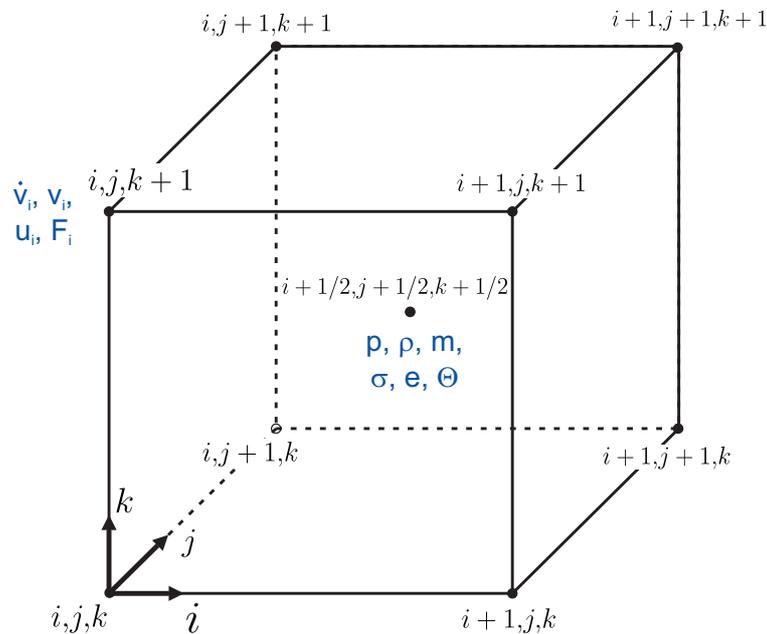


Abbildung 4.2: Nummerierungssyntax der Zellknoten mit Zuordnung der zu berechnenden Größen

Für die Verknüpfung der zeitabhängigen Variablen mit den Knotenpunkten gibt es eine Reihe spezifischer Rechenschemata, die, wie in Abschnitt 4.3.1 beschrieben, in explizite (z.B. Leapfrog-Schema [258], LAX-WENDROFF-Schema [170]) und implizite Verfahren (z.B. PREISSMANN-Schema [224]) eingeteilt werden können (siehe auch [69], [138]).

### 4.3.3 Integrationsalgorithmus

Die numerische Integration basiert im Wesentlichen auf dem GREENSchen Theorem, das es erlaubt, ein Volumenintegral einer Zelle in ein Oberflächenintegral zu überführen (vgl. z.B. [70] und [83]). Zusammen mit der aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung entwickelten numerischen Integration ist es somit möglich, dieses Oberflächenintegral entlang der durch die Gitterpunkte definierten Kanten der Zelle durch diskrete Summen abzubilden [85].

Zur Bestimmung von Zustandsgrößen, die direkt von einer anderen Zustandsgröße abhängen, gibt es drei unterschiedliche Integrationspfade. Diese möglichen Integrationspfade sind in Abbildung 4.3 in der vereinfachten zweidimensionalen Darstellung illustriert. Die Wahl des Pfades ist dabei abhängig davon, ob die zu integrierenden Größen in einem Gitterpunkt oder in der Zell- bzw. Elementmitte berechnet wird. Grundsätzlich sind die Integrationspfade A und B zur Bestimmung der Zustandsgrößen in den Gitterpunkten und Pfad C für die Integration von Größen in der Zell- bzw. Elementmitte geeignet. Der Hydrocode AUTODYN verwendet die Integrationspfade A und C [53].

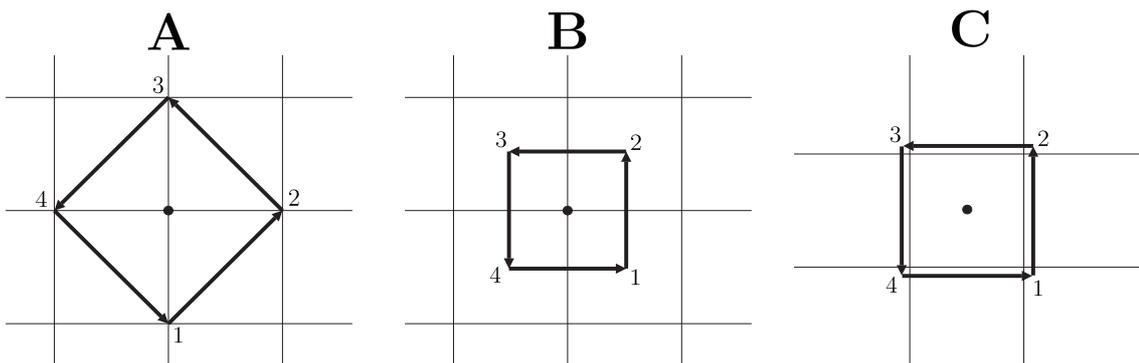


Abbildung 4.3: Mögliche Integrationspfade bei der Integralen-Differenzen-Methode in 2D

Eine ausführliche Herleitung und Beschreibung der Integralsätze findet sich in [205]. Des weiteren geben BENSON in [29] und DAVIS in [69] einen detaillierten Überblick über numerische Näherungsmethoden.

### 4.3.4 Berechnungszyklus

Für jeden Zeitschritt  $\Delta t$  werden die Zustandsgrößen für jede Zelle bzw. für jeden Punkt des Gitternetzes berechnet. Dabei wird in der hier im Vordergrund stehenden LAGRANGESchen Formulierung der im Folgenden beschriebene Algorithmus verwendet.

**Schritt 1:**

Anhand des in Abschnitt 4.3.1 beschriebenen Verfahrens wird der inkrementelle Zeitschritt  $\Delta t$  errechnet.

**Schritt 2:**

Aus der Masse  $m$  und den Knotenkräften  $F$  werden die Knotenbeschleunigungen  $\dot{v}$  errechnet ( $\dot{v} = F/m$ ). Die Knotenkräfte werden dabei unter Zuhilfenahme des GREENSchen Theorems aus den räumlichen Ableitungen der Spannungen  $\sigma$  bzw. aus den Randbedingungen bestimmt. Die einem Knoten zugeordnete Masse ergibt sich anteilig aus den, im dreidimensionalen Fall acht, angrenzenden Zellen. In AUTODYN [53] ist diese Massenverteilung ungewichtet.

**Schritt 3:**

Aus den errechneten Knotenbeschleunigungen  $\dot{v}$  werden mittels Integration über die Zeit die Knotengeschwindigkeiten  $v$  bestimmt.

**Schritt 4:**

Durch eine weitere Integration über die Zeit werden aus den Knotengeschwindigkeiten  $v$  die Knotenverschiebungen  $u$  berechnet.

**Schritt 5:**

Anhand der Knotenverschiebungen  $u$  der Zelle wird direkt das Zellvolumen  $V$  bestimmt. Zudem lässt sich aus den Knotengeschwindigkeiten der Geschwindigkeitsfluss über die jeweiligen Zellränder ermitteln, anhand derer die Verzerrungsgeschwindigkeiten (Verzerrungsraten)  $\dot{\epsilon}$  der Zellen errechnet werden.

**Schritt 6:**

Aus dem Volumen und der aufgrund der Massenerhaltung konstanten Masse  $m$  wird die Materialdichte  $\rho$  innerhalb der Zelle bestimmt.

**Schritt 7:**

Mittels der in Abschnitt 3.3 erläuterten Zustandsgleichung, die den Zusammenhang von Druck, Dichte und Energie beschreibt, ergibt sich aus der im vorhergehenden Schritt berechneten Dichte  $\rho$  und der im letzten Berechnungszyklus errechneten "alten" Energie  $e$  der hydrostatische Druck  $p$ .

**Schritt 8:**

Aus der Änderung des Zellvolumens  $V$  und der Geschwindigkeit dieser Änderung  $\dot{V}$  wird die in Abschnitt 4.3.6 näher beschriebene künstliche Viskosität  $q$  berechnet.

**Schritt 9:**

Die Spannungen  $\sigma$  werden anhand der Spannungen zu Beginn des Zyklus und deren Änderungen, welche aus der JAUMANNschen Spannungsrate unter Berücksichtigung

des materialspezifischen Festigkeitsmodells ermittelt werden, fortgeschrieben. In diesem Schritt können in AUTODYN anstelle der im Programm vorhandenen Festigkeitsmodelle auch die eingangs erwähnten nutzereigenen Material- und Schädigungsmodelle mittels einer Programmschnittstelle in den Berechnungszyklus implementiert und verwendet werden. Detaillierte Angaben dazu finden sich in [54].

#### Schritt 10:

Die innere Energie  $e$  wird um die im Zeitschritt  $\Delta t$  geleistete mechanische Arbeit korrigiert.

Damit ist der Berechnungszyklus abgeschlossen und ein neuer Zeitschritt  $\Delta t$  kann bestimmt werden. Der Algorithmus wird solange wiederholt, bis ein bestimmtes Abbruchkriterium erreicht ist. Dies kann beispielsweise das Erreichen einer Gesamtzeit  $t_{end}$  oder eine bestimmte Anzahl durchlaufener Zyklen sein.

### 4.3.5 Kontaktalgorithmen

Kontaktalgorithmen werden verwendet, um bei einer Interaktion die gegenseitige Durchdringung freier Oberflächen, beispielsweise von Sprengstoff und Beton, in einer LAGRANGESchen Berechnung zu verhindern. In EULER-Codes dagegen sind keine Kontaktalgorithmen notwendig, da die Materialinteraktion implizit in den gemischten Zellen behandelt wird.

Der Kontaktalgorithmus besteht grundsätzlich aus drei Phasen:

1. Kontaktsuche,
2. Bestimmung der Kontakt- und Lösebedingungen,
3. Ermittlung der Kontaktkräfte.

Während die Verfahren zur Kontaktsuche und der Bestimmung der Kontakt- und Lösebedingungen zwar aus numerischer Sicht interessant, jedoch für die Beschreibung der Mechanik von untergeordneter Bedeutung sind, wird im Folgenden lediglich auf die Ermittlung der Kontaktkräfte näher eingegangen. Zu Kontakt- und Lösebedingungen siehe beispielsweise [72] und [188].

Zur Beschreibung des Kontakts zweier Körper werden die interagierenden Oberflächen zunächst in "Master" und "Slave" eingeteilt. Welcher der beiden Körper dabei als Master und welcher als Slave definiert wird, ist ohne Bedeutung.

Für die Behandlung der beim Kontakt zu übertragenden Kräfte gibt es zwei grundlegende Ansätze. Der erste berechnet eine Kopplungskraft zwischen den beiden Oberflächen und setzt diese als Kraft-Randbedingung an der Master-Oberfläche an. Der zweite Ansatz "verschmilzt" Master- und Slave-Oberflächen und bildet die Massen, Spannungen, etc. auf der Master-Oberfläche ab.

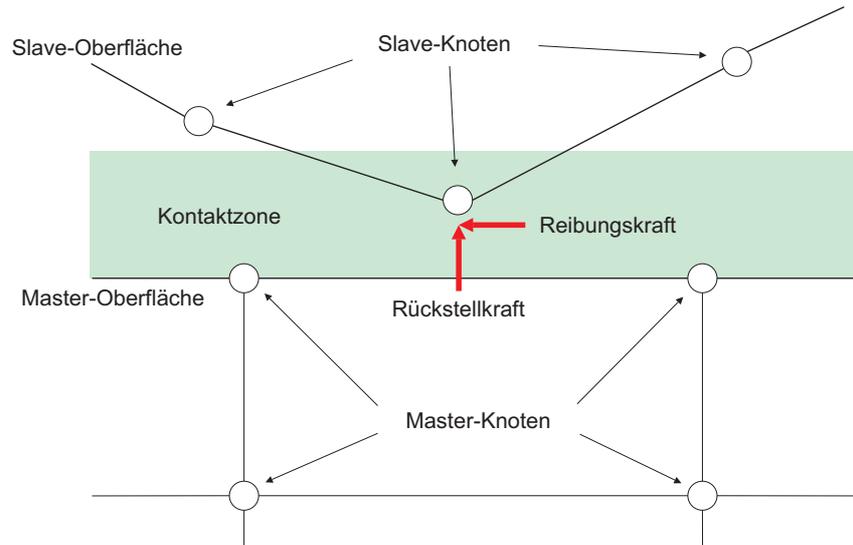


Abbildung 4.4: Kontaktbereich zwischen Slave- und Masterelementen bei der Interaktion

Abbildung 4.4 zeigt zwei in Kontakt tretende Oberflächen. Die in die Kontaktzone eintretenden Knoten der Slave Oberfläche sollen nun durch eine der Kontaktkraft entsprechenden Rückstellkraft aus der Kontaktzone zurück gebracht werden. Der Übersichtlichkeit halber sei dies für die zweidimensionale Interaktion eines Slave-Knoten mit einem durch zwei Master-Knoten definierten Segment der Master-Oberfläche dargestellt. Betrachtet man zunächst nur die Kräfte  $F$  normal zur Master-Oberfläche, ergibt sich für die Verteilung einer im Slave-Knoten konzentrierten Kraft  $F^s$  auf die Master-Knoten  $F^m$

$$F_1^m = -(1 - \xi)F^s \quad \text{und} \quad F_2^m = -\xi F^s \quad (4.11)$$

mit: 
$$\xi = \frac{x_s - x_1^m}{x_2^m - x_1^m}.$$

Die in AUTODYN verwendeten, und daher im Folgenden näher beschriebenen, Methoden zur Bestimmung der Kraft am Slave-Knoten sind die so genannte "Penalty"-Methode und die "LAGRANGE-Multiplier"-Methode. Dabei werden für den nächsten Zeitschritt eine Geschwindigkeits- bzw. eine Verschiebungsrandbedingung eingeführt.

Die vom Ansatz her einfachste Methode ist die Penalty-Methode. Anstatt die Kontaktbedingung exakt abzubilden, wird eine der Eindringkraft entsprechende Rückstellkraft auf den Slave-Knoten aufgebracht:

$$F^s = -k y^s \quad (4.12)$$

Je höher die Oberflächensteifigkeit  $k$  gewählt wird, desto besser wird die exakte Kontaktbedingung abgebildet. Da ein hoher Wert für  $k$  nach BENSON 1992 [29] den stabilen Zeitschritt verringert, wurden verschiedenen Bedingungen für  $k$  eingeführt, die an dieser Stelle nicht weiter erläutert werden sollen. Zudem führt die Konzentration der Kräfte in den Knoten zu einer gewissen Netzabhängigkeit, was unter Umständen einen erheblichen Nachteil darstellt.

Die LAGRANGE-Multiplier-Methode führt zusätzliche Bedingungsgleichungen für die Verschiebung ein, die simultan mit den Bewegungsgleichungen gelöst werden müssen. Mit Hilfe dieser Bedingungsgleichungen wird die Zwangsbedingung der Nichteindringung exakt erfüllt. Für das dargestellte einfache Beispiel ergibt sich:

$$\Phi = x^s - [(1 - \xi)x_1^m + \xi x_2^m] = 0 . \quad (4.13)$$

Die auf einen der beteiligten Knoten  $i$  wirkende Kraft  $F^i$  ist dann definiert durch:

$$F^i = \lambda_L \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (4.14)$$

mit:  $\lambda_L$  LAGRANGE-Multiplikator (-Multiplier).

Das Einsetzen von Gleichung (4.14) in (4.11) zeigt, dass auch mit dieser Bedingung die Impulserhaltung erfüllt wird.

Auf analoge Weise können auch Reibungskräfte zwischen zwei interagierenden Körpern errechnet werden, was insbesondere bei Problemstellungen mit Penetration von Interesse sein kann.

Eine ausführliche Beschreibung verschiedener Kontaktalgorithmen geben u.a. BELYTSCHKO & NEAL [28], BENSON [29] und HALLQUIST ET AL. [117].

### 4.3.6 Verformung und Stabilität

Wie bereits kurz erwähnt, kann eine starke Deformation der Elemente in einem LAGRANGE-Netz zu numerischen Instabilitäten und im Extremfall zu unphysikalischen Ergebnissen oder zum Abbruch der Berechnung führen. Gleiches gilt jedoch auch für andere Bereiche der Numerik von Hydrocodes. In diesem Abschnitt werden daher die folgenden, ausgewählten Problematiken und deren Lösungen genauer erläutert:

1. Behandlung stark deformierter Elemente,
2. "Hourglass"-Eigenformen als Sonderfall der Deformation,
3. Stabilität der expliziten Zeitintegration,
4. Oszillation an der Schockfront.

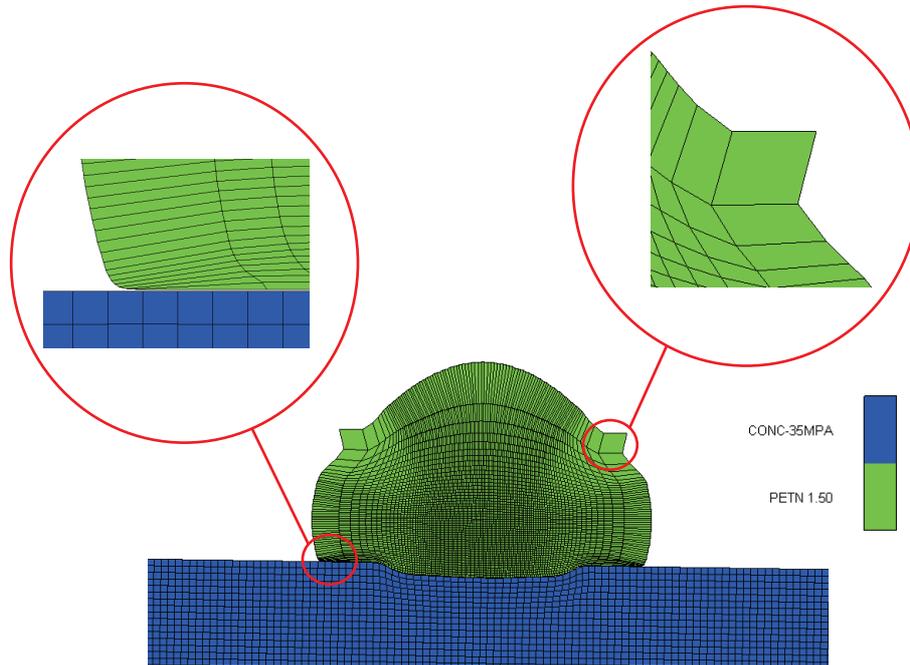


Abbildung 4.5: Deformation der Sprengstoff-Elemente bei einer Kontaktdetonation

### Zu 1:

Bei Impact, aber insbesondere bei Detonationssimulationen werden die LAGRANGE-Gitter, sowohl durch Kompaktion als auch durch starke Ausdehnung, erheblich verformt. Abbildung 4.5 verdeutlicht dies anhand einer simulierten Kontaktdetonation an einer Betonplatte.

Aufgrund der Ausbreitung der Detonationsschwaden im Sprengstoffmodell entstehen im Randbereich erhebliche Verzerrungen, die jedoch in der Regel numerisch kaum Schwierigkeiten verursachen. Anders ist es im Kontaktbereich zum Beton. Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Rückstellkräfte, die einen in die Kontaktzone eingetretenen Knoten zurücksetzen, können ein Element derart verformen, dass sogenannte "Boomerang"- oder "Schleifen"-Elemente entstehen. Zu diesen Phänomenen kommt es, wenn ein Knoten (beispielsweise Knoten 2 des in Abbildung 4.6 dargestellten Elements) deutlich stärker beschleunigt wird als die übrigen Knoten und deshalb "durchschlägt". Bei der Berechnung des Elementvolumens mittels der JACOBI-Determinante ergibt sich dann, rein rechnerisch, ein negatives Elementvolumen bzw. eine negative Masse, was zum Abbruch der Berechnung führt.

Um in diesem Fall eine stabile Lösung zu gewährleisten und den Abbruch der Simulation zu verhindern, werden derart deformierte Elemente häufig aus der Berechnung entfernt ("erodiert"). Ein solches Vorgehen ist jedoch grundsätzlich nicht physikalisch begründbar. Zwar wird die Masse der Zelle auf die angrenzenden Elementknoten verteilt und bleibt somit, wie auch die übrigen Knotengrößen im System

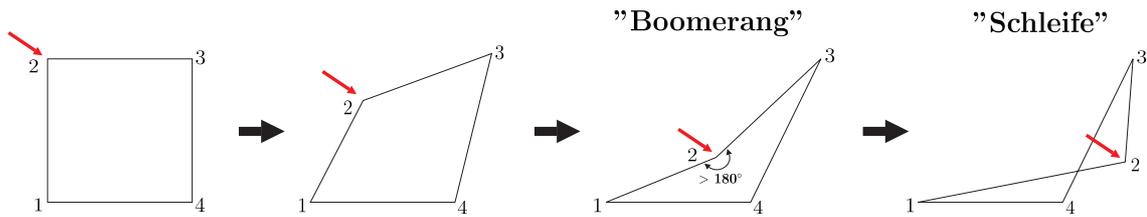


Abbildung 4.6: Entstehung von Boomerang- und Schleifen-Elementen in 2D

erhalten, jedoch gehen die im Zellmittelpunkt berechneten Größen, insbesondere die innere Energie, bei der Erosion verloren.

Dieses Vorgehen ist unter Umständen zugunsten einer stabilen Lösung dennoch akzeptabel, wenn dadurch das Ergebnis nicht erheblich verfälscht wird. Als Maß dieser Verfälschung ist dabei die Summe der aus dem System entnommenen inneren Energie zu sehen.

In den meisten derartigen Simulationen liegt das Hauptaugenmerk jedoch darauf, eine Aussage über das Verhalten des Betonwerkstoffs zu erhalten. Erosion am Sprengstoff wird daher zugelassen, solange sich der Energieverlust des Systems unterhalb einer gewissen Schranke von in der Regel maximal 5% bewegt. Bei dieser Grenze handelt es sich allerdings lediglich um einen Erfahrungswert, der nicht durch dokumentierte Konvergenzstudien abgesichert ist.

### Zu 2:

Eine besondere Form der Deformation von Elementen bzw. Zellen ist die so genannte "Hourglass"-Eigenform. Die Bezeichnung ist, wie aus Abbildung 4.7 ersichtlich, abgeleitet von der Ähnlichkeit zu einer Sanduhr. Bei dieser Form der Verzerrung ergibt sich keine Änderung des Volumens und somit, da sich die Länge der Diagonalen nicht ändert, letztlich keine resultierenden Spannungen und keine Änderung der Energie, obwohl deutlich erkennbar Verformungsarbeit verrichtet wurde.

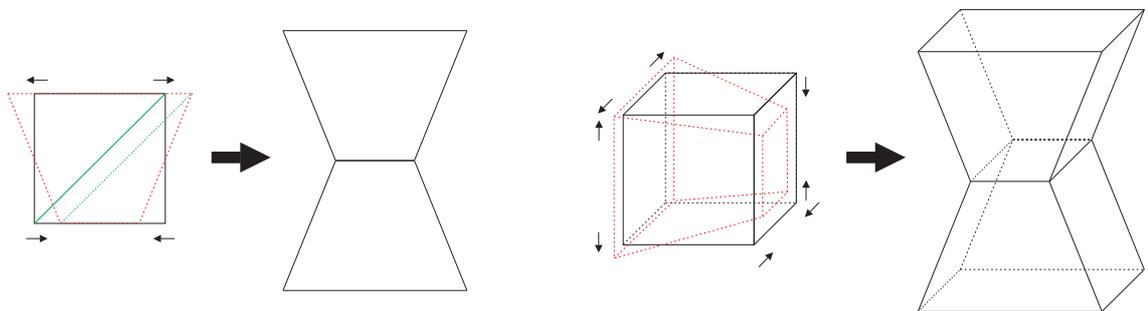


Abbildung 4.7: "Hourglass"-Eigenform am Beispiel von Elementen (2D) und Zellen (3D)

Zur Unterdrückung der "Hourglass"-Eigenformen können die Gleichungen der Impulserhaltung um entweder einen viskosen oder einen Steifigkeits-Term erweitert werden. In Hydrocodes werden üblicher Weise viskose Terme verwendet.

Dazu werden zunächst durch das Vektorprodukt der "Hourglass"-Vektoren  $\Gamma^i$ , deren Formulierung z.B. in [29] ausführlich beschrieben ist, und den Geschwindigkeitsvektoren die "Hourglass"-Geschwindigkeiten  $q_i$  bestimmt:

$$q_i = \Gamma_{\alpha k}^i v_{\alpha k} \quad . \quad (4.15)$$

Die resultierenden Dämpfungskräfte  $Q^i$  werden schließlich als Funktion der "Hourglass"-Beschleunigung  $\dot{q}_i$ , also der Ableitung der "Hourglass"-Geschwindigkeiten nach der Zeit berechnet. Der Hydrocode AUTODYN [53] verwendet dazu die Formulierung

$$Q^i = -C_H \frac{m}{16 \Delta t} \dot{q}_i \quad , \quad (4.16)$$

wobei  $C_H$  den Viskositätskoeffizienten beschreibt.

Weitere mögliche Formulierungen werden beispielsweise in [29], [82], [178] und [230] dargestellt.

### Zu 3:

Wie bereits in Abschnitt 4.3.1 angesprochen, ist die Größe des Zeitschritts  $\Delta t$  von erheblicher Bedeutung für die numerische Stabilität. Für eine stabile Lösung muss sicher gestellt sein, dass eine (Schock)Welle keine der Zellen durchlaufen kann, ohne dass während des Durchlaufens mindestens einmal die Erhaltungsgleichungen gelöst worden sind. Dies wird durch das CFL-Kriterium sichergestellt.

Ein weiteres entscheidendes Stabilitätskriterium ist zudem die Konvergenz der TAYLOR-Reihenentwicklung. Die Schwingung der Glieder muss mit höherer Ordnung der Ableitungen abklingen, so dass die Näherung gegen das exakte Ergebnis konvergiert. Eine Besonderheit zeigt sich bei der Berechnung der Spannungen  $\sigma$ . Um die Spannungen mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung zu bestimmen, werden die Verzerungsrate und die Spannungsrate für den Zwischenschritt  $t^{n+1/2}$  bestimmt. Entsprechend wird auch die Spannung zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  über  $t^{n+1/2}$  berechnet:

$$\sigma_{ij}^{n+1/2} = \sigma_{ij}^n - \frac{1}{2} \Delta t W_{ik} \sigma_{kj}^n + \frac{1}{2} \Delta t \sigma_{ik}^n W_{kj}^{n+1/2} \quad . \quad (4.17)$$

Dabei bezeichnet  $W_{ik}$  den schiefsymmetrischen Anteilen des Geschwindigkeitsgradienten  $L_{ik}$  (vgl. Abschnitt 2.1.2). Aus der Spannungsrate berechnet sich das Spannungsinkrement

$$\Delta \sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \quad , \quad (4.18)$$

und als Zwischenwert zum Zeitpunkt  $t^{n+1/2}$  ergibt sich:

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{n+1/2} + \Delta \sigma_{ij} \quad . \quad (4.19)$$

Somit kann der zweite Schritt der Halb-Schritt-Rotation durchgeführt und die Spannung zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  bestimmt werden.

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^* - \frac{1}{2} \Delta t W_{ik} \sigma_{kj}^* + \frac{1}{2} \Delta t \sigma_{ik}^* W_{kj}^{n+1/2}. \quad (4.20)$$

Bei dieser Halb-Schritt-Rotation kann es vorkommen, dass die Spannungen nach dem zweiten Halbschritt nicht exakt auf der Fließfläche liegen. Zwar ist der Fehler nur zweiter Ordnung, jedoch kann er unter Umständen einen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis haben.

Der Fehler kann bereinigt werden, indem in Gleichung (4.17) anstelle des halben der volle Zeitschritt ( $\Delta t$  statt  $\frac{1}{2} \Delta t$ ) verwendet wird. BENSON [29] bezeichnet diese Methode, die auch im Hydrocode AUTODYN [53] Anwendung findet, als "*sloppy centering*".

#### Zu 4:

Die mathematische Idealisierung einer Schockwelle ist ein Sprung in Druck, Dichte, Geschwindigkeit und innerer Energie. Die Schockfront kann sich zwar beim Durchlauf durch einen Körper, aufgrund von Effekten wie beispielsweise Porenkollaps (vgl. [191]), verbreitern, jedoch erfordern diese Sprünge der Zustandsgrößen dennoch eine besondere Behandlung bei der Berechnung mittels finiter Differenzen in Hydrocodes.

Während in EULER-Verfahren die Lösung des RIEMANN-Problems ([293]) direkt zwischen den benachbarten Elementen bzw. Zellen möglich ist, kommt es bei der Verwendung von LAGRANGE-Verfahren hinter der Schockfront zu teilweise starken Oszillationen der Knotengeschwindigkeiten und somit des Drucks in den numerischen Ergebnissen (siehe Abbildung 4.8 links).

Es wurden mehrere Versuche unternommen, diese Oszillation physikalisch zu interpretieren, z.B. durch RICHTMYER & MORTON [232] und POTTER [223], jedoch hat sich keine dieser Interpretationen als "richtig" durchgesetzt.

Unabhängig von einer physikalischen Interpretation dieses Phänomens, muss die sich in der Oszillation manifestierende Energie numerisch in der inneren Energie berücksichtigt werden. Um dies zu erreichen, wird die Impulserhaltungsgleichung um einen viskosen Term der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \quad (4.21)$$

erweitert, wobei  $\mu$  der Viskositäts-Koeffizient ist. Dadurch wird die Schockfront über mehrere (in der Regel 4 bis 6) Zellen "verschmiert" und die Oszillation verschwindet (siehe Abbildung 4.8 rechts).

Im Hydrocode AUTODYN [53] wird, wie auch in anderen Hydrocodes, das Differential des Drucks direkt um eine künstliche Viskosität  $q$  erweitert:

$$\left( \frac{\partial p + q}{\partial x_i} \right). \quad (4.22)$$

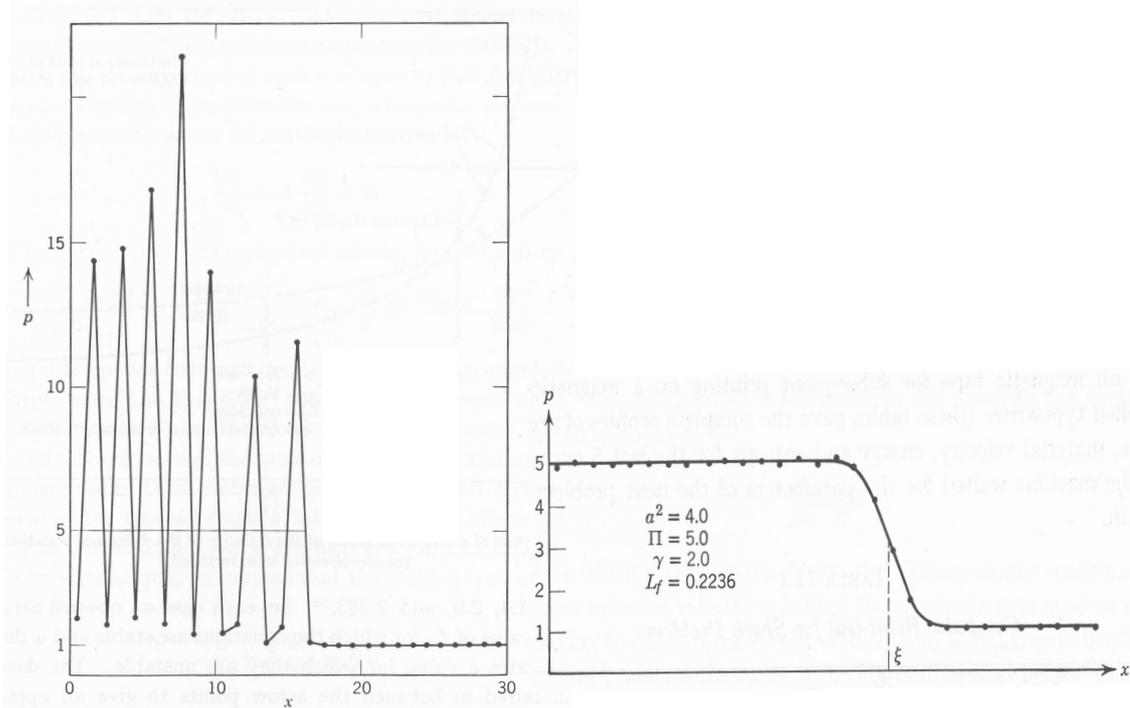


Abbildung 4.8: Druckverlauf hinter der Schockdiskontinuität (aus [232]); links: ohne künstliche Viskosität, rechts: mit künstlicher Viskosität

Die künstliche Viskosität  $q$  setzt sich dabei aus einem ursprünglich von VON NEUMANN & RICHTMYER [207] entwickelten quadratischen und einem, später zur weiteren Dämpfung hinzugefügten, linearen Anteil zusammen. Da Schockfronten nur im Bereich der Kompression auftreten, wird die künstliche Viskosität nur dort verwendet. Im Falle von Relaxation ergibt sich  $q$  zu Null:

$$\text{Kompression:} \quad q = C_Q^2 \rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + C_L c \rho \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.23)$$

$$\text{Relaxation:} \quad q = 0, \quad (4.24)$$

wobei  $C_Q$  und  $C_L$  in Gleichung (4.23) die quadratische bzw. lineare Dämpfungskonstante in der Dimension einer Länge und  $c$  die Schockwellengeschwindigkeit darstellen.

Zwar ist dieser quasi "künstliche Eingriff" nicht unumstritten (vgl. z.B. [65] und [261]), jedoch konnten mit künstlicher Viskosität bisher gute Ergebnisse erzielt werden, was ihre weitere Verwendung rechtfertigt.

Neuere Erkenntnisse in diesem Bereich finden sich beispielsweise in [49] und [174].

## 4.4 Zusammenfassung

Hydrocodes sind leistungsstarke Werkzeuge zur Simulation hochdynamischer, instationärer Vorgänge in Materialien aller Art. Grundsätzlich sind sie jedoch auch zur Simulation statischer Belastungen geeignet. Zusammenfassend muss allerdings festgestellt werden, dass die in Hydrocodes verwendeten numerischen Verfahren weder uneingeschränkt genau noch grundsätzlich in ihrer Lösung stabil sind. Um einerseits eine stabile Lösung zu erzeugen und andererseits gleichzeitig eine Verfälschung der Simulationsergebnisse zu vermeiden und eine realitätsnahe Abbildung zu gewährleisten, sind vereinzelt unphysikalische Eingriffe von außen notwendig. Grundsätzlich gilt es jedoch, diese Eingriffe so weit wie möglich zu reduzieren.

Die in diesem Kapitel erläuterten numerischen Verfahren und die damit verbundenen Probleme der Hydrocodes stellen jedoch nur einige ausgewählte Aspekte dar. Einen ausführlichen Einblick in die Numerik der Hydrocodes, deren Probleme und mögliche Lösungsansätze geben BENSON in [29] und, in einer zusammengefassten Form, ANDERSON in [11]. Eine übersichtliche Einführung in die Thematik der Hydrocodes findet sich auch in COLLINS 2002 [61] und eine kritische Betrachtung der Verlässlichkeit von Hydrocode Simulationen geben GEBBEKEN und RUPPERT in [97].

# Kapitel 5

## Mesomechanische Modellierung von Beton

### 5.1 Skalierung üblicher Modelle für Betone

*Hetrogenität (auch: Inhomogenität) bezeichnet die Uneinheitlichkeit der Elemente einer Menge hinsichtlich eines oder mehrerer Merkmale. Heterogenität ist die Abhängigkeit einer Eigenschaft innerhalb eines Systems vom Ort. In einem heterogenen System können sich die Eigenschaften an Grenzflächen sprunghaft ändern bzw. von Individuum zu Individuum stark unterscheiden.*

Diese Definition von Heterogenität aus dem BROCKHAUS LEXIKON [277] beschreibt auch den Werkstoff Beton, mit dem sich diese Arbeit beschäftigt. Je nach Anwendungsbereich kann dessen Heterogenität in Modellen unterschiedlich abgebildet werden. Die Modellbildung für Beton ist auf drei unterschiedlichen, grundlegenden Modellebenen möglich, die im Folgenden kurz erläutert werden:

- Makromechanik,
- Mesomechanik und
- Mikromechanik.

Im Rahmen der makromechanischen Modellbildung (vgl. Abbildung 5.1, unten) werden die Komponenten des Materials sowie deren mechanische Eigenschaften über den Probekörper verschmiert. Der Werkstoff wird als homogen, kontinuierlich und isotrop betrachtet. Das Materialverhalten der einzelnen Bestandteile des Betons wird dabei nicht explizit betrachtet. Das Material kann so mit einer einzigen Beschreibung im Rahmen der Elastizitäts-, Plastizitäts- und / oder Viskositätstheorie abgebildet werden. Zwar kann dabei das komplexe Zusammenwirken der einzelnen Bestandteile eines Materials nicht direkt dargestellt werden, jedoch ermöglicht die makromechanische Modellebene die Verwendung einfacher geometrischer Modelle, was zu einem vergleichsweise geringen Berechnungsaufwand führt.

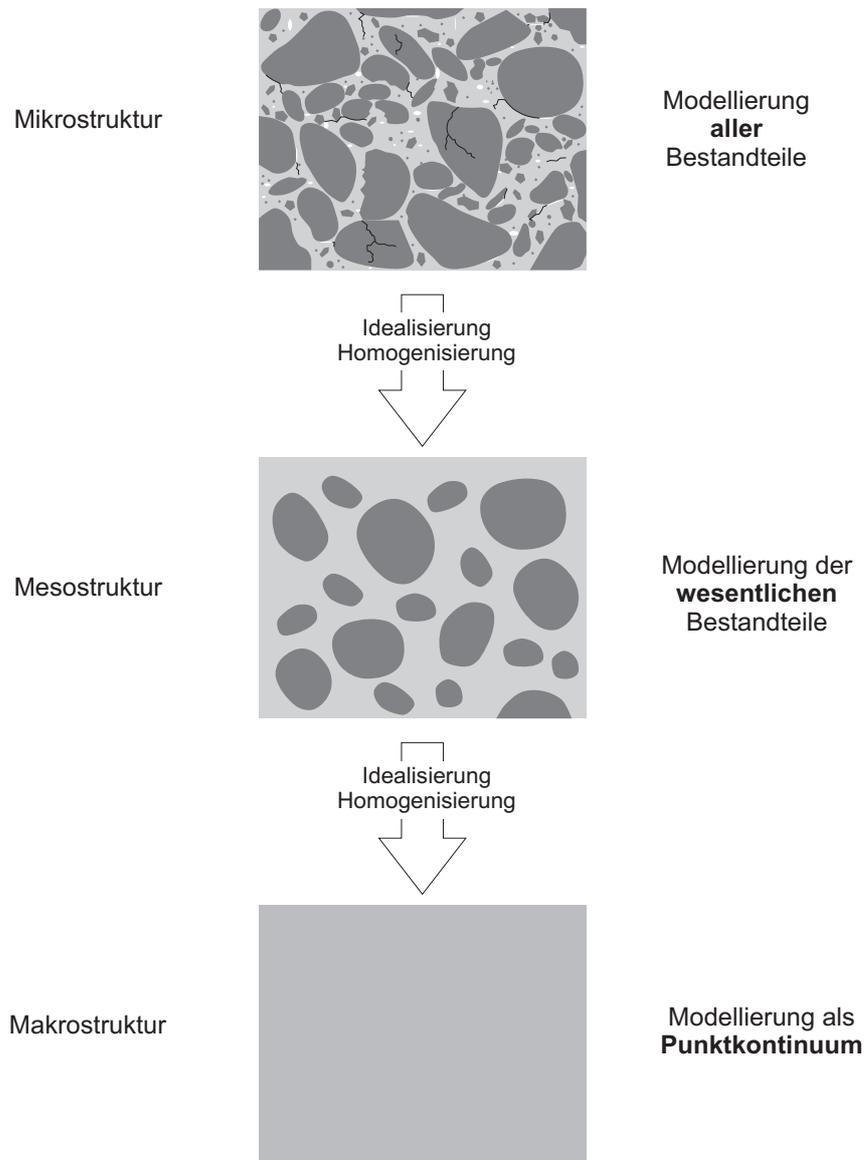


Abbildung 5.1: Modellebenen zur Beschreibung einer realen Mikrostruktur

Bei der mikromechanischen Modellbildung wird dagegen von der Feinstruktur des Werkstoffes ausgegangen (vgl. Abbildung 5.1, oben). Ziel dabei ist es, die reale Struktur im Inneren des Werkstoffes möglichst genau abzubilden. Dabei werden alle Bestandteile des Materials bis auf mikroskopische, teilweise sogar bis auf molekulare Ebene explizit modelliert und beschrieben. Um beispielsweise die Struktur eines Betonwerkstoffes auf Ebene der Mikromechanik abzubilden, sind die mikroskopischen kristallinen Strukturen der einzelnen Zuschlagskörner und der Zementmatrix sowie Poren und Risse explizit zu beschreiben. Eine derart feine Auflösung der räumlichen

Struktur führt jedoch bereits bei kleinen Geometrien zu einer erheblichen Anzahl an Knotenpunkten und ist in im Bauwesen üblichen Maßstäben selbst mit moderner Rechnerinfrastruktur nicht zu bewältigen. Die Abbildung eines Materials auf dieser Modellebene ermöglicht jedoch eine detaillierte numerische Untersuchung des Zusammenwirkens der einzelnen mikroskopischen Bestandteile, aus der dann das Verhalten größerer Strukturen abgeleitet werden kann.

Eine Mittelebene zwischen den mikro- und makromechanischen Modellebenen bietet die Mesomechanik. Dabei werden, unter Anwendung einer bestimmten Größenskala, nur die wesentlichen Bestandteile der Mikrostruktur explizit abgebildet. Diese werden einzeln als homogen und kontinuierlich betrachtet. Ihre Interaktion wird über entsprechende Randbedingungen oder anhand einfacher Diskontinuitäten beschrieben. Die mesomechanische Modellebene vereint dabei eine teilweise Abbildung des Zusammenwirkens der einzelnen Bestandteile eines Materials mit der Möglichkeit, auch makroskopische Probekörper numerisch zu untersuchen. Sie ist deshalb insbesondere zur Modellierung stark heterogener Materialien geeignet.

Die im Folgenden dargestellte Modellierung von Beton erfolgt daher auf der Ebene der Mesomechanik.

## 5.2 Konzept der mesomechanischen Modellierung

Zur Abbildung des heterogenen Werkstoffs Beton in einem mesomechanischen Modell wird die reale Mikrostruktur, wie im vorhergehenden Abschnitt erläutert, in ihre zur Abbildung des physikalischen Verhaltens relevanten Hauptbestandteile zerlegt. Zur Untersuchung der Zustandsgleichung sind dies:

- Material 1: Grobzuschlag,
- Material 2: Zementstein.

Zur Veranschaulichung ist diese Zerlegung in Abbildung 5.2 grafisch dargestellt. Der Grobzuschlag fasst hier alle Zuschlagskörner mit einem Durchmesser  $d \geq 1$  mm zusammen. Der Zementstein (auch Zementmatrix) ist die homogenisierte, kontinuierliche Beschreibung aller Bestandteile, die kleiner als 1 mm sind. Dazu gehören der Zementleim, die Poren und deren Inhalt sowie der feinkörnige Zuschlag mit einem Durchmesser  $d < 1$  mm. Die wesentlichen Vorteile dieser Aufteilung sind:

1. eine sinnvolle Auflösung der Feinstruktur des stark inhomogenen Werkstoffs Beton und
2. die Beschreibung der einzelnen Materialien als homogene kontinuierliche Werkstoffe, deren Parameter durch Standardmethoden bestimmt werden können.

Dieser Ansatz scheint zudem sinnvoll, da bei einer in Schockwellensimulationen üblichen Elementierung im Millimeter-Bereich diese Bestandteile gerade noch abgebildet werden können.

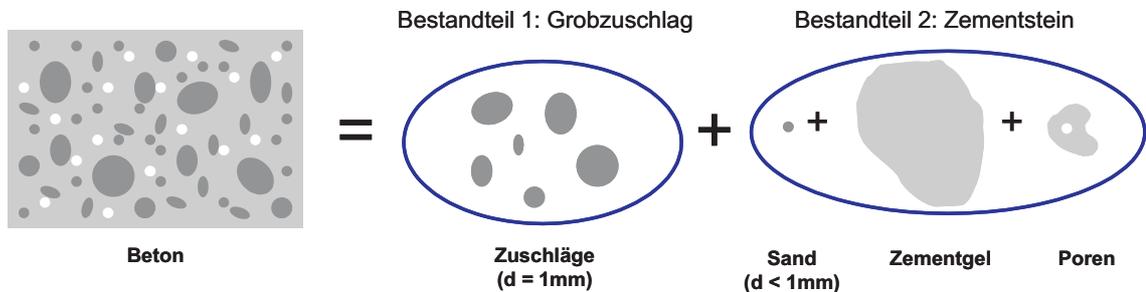


Abbildung 5.2: Zerlegung des Betons in homogene Bestandteile (nach [233])

Im Folgenden werden daher die Ermittlung der Werte der Materialparameter des Zementsteins und des Zuschlags beschrieben. Dazu werden zunächst einige betontechnologische Grundlagen zusammengefasst. Anschließend werden die Betonmischungen vorgestellt, die im Rahmen der Werkstoffsimulation modelliert und untersucht werden sollen. Danach werden die Materialparameter und -kenngrößen der einzelnen Betonkomponenten zur Beschreibung des Betons in einem mesomechanischen Modell ermittelt. Dabei wird auf eine allgemeine Darstellung geachtet, um die Anwendbarkeit auf beliebige Betonmischungen zu gewährleisten. Schließlich werden die Werte der Parameter für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Betone bestimmt und zusammengefasst. Diese Werte sind die Eingangsdaten für das mesomechanische Modell in Kapitel 6.

### 5.3 Bestandteile und Zusammensetzung von Beton

Nach DIN 1045 [73] ist Beton [...] ein künstlicher Stein, der aus einem Gemisch von Zement (gegebenenfalls auch Mischbinder), Betonzuschlag und Wasser - gegebenenfalls auch mit Betonzusatzmitteln und Betonzusatzstoffen (Betonzusätzen) - durch Erhärten des Zementleims (Zement-Wasser-Gemisch) entsteht.

Beton ist dementsprechend ein Mehr-Phasen-System, das im Wesentlichen aus Zementleim und Zuschlägen besteht. Dazu kommen, wie in Abbildung 5.3 dargestellt, Luftporen in der Größe von  $10^{-2}$  bis 5 mm sowie im ausgehärteten Zustand Kapillarporen ( $d = 10^{-5}$  bis  $10^{-2}$  mm) und Gelporen ( $d = 10^{-4}$  bis  $10^{-5}$  mm). Der Luftporengehalt beträgt im Allgemeinen bei normalem, gut verdichtetem Beton etwa 1 bis 2 Volumenprozent.

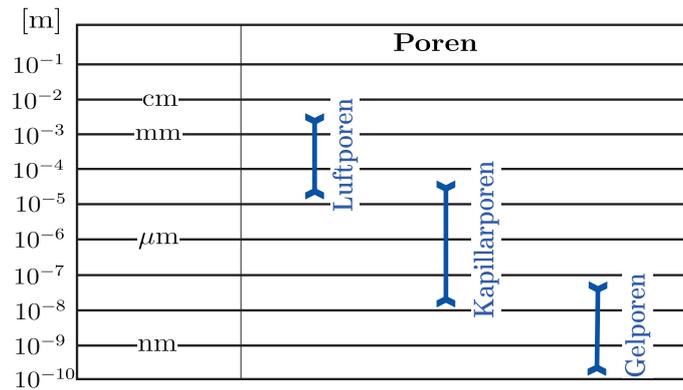


Abbildung 5.3: Beton; Größenverteilung der Poren (nach [274])

Durch die Zugabe von Betonzusätzen können die Eigenschaften des Betons, wie beispielsweise die Hydratationszeit, die Fließfähigkeit oder die Säurebeständigkeit, beeinflusst werden. Eine Vielzahl möglicher Zusätze sowie die Regelungen für deren Verwendung sind z.B. in [218] beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit werden jedoch lediglich Betone ohne Zusätze behandelt.

Das Verhältnis des Zementgehalts zur Wassermenge wird durch den Wasser-Zement-Wert ( $w/z$ -Wert) beschrieben. Ein höherer  $w/z$ -Wert verbessert zwar die Konsistenz und damit die Verarbeitbarkeit des Frischbetons, führt jedoch zu einer erhöhten Porosität und wirkt sich somit negativ auf die Festigkeit des erhärteten Betons aus. Zur Herstellung von Beton werden im Allgemeinen Zementleime mit einem  $w/z$ -Wert zwischen 0.40 und 0.70 verwendet (vgl. [274]). Für die im Folgenden exemplarisch zu untersuchenden Betone wird, mit Ausnahme der zur Validierung herangezogenen Betonmischungen, die Festigkeitsklasse C40/50 gewählt. Da die Festigkeit des Betons und dessen  $w/z$ -Wert durch die sogenannten WALZ-Kurven (siehe Anhang B) mit einander verknüpft sind, ergibt sich für die betrachteten Betone ein  $w/z$ -Wert von 0.51 bei Verwendung eines Zements CEM II 42,5 N.

Der neben dem Zementleim zweite Hauptbestandteil des Betons ist der Zuschlag. Als Zuschlagsmaterial der zu untersuchenden Betone wird Granit gewählt, da dieses Gestein ein häufiger Bestandteil von in Europa als Zuschlag verwendetem (Fluss-)Kies ist. Zudem stellt dessen primärer Bestandteil Quarz auch einen Hauptbestandteil der Erdkruste dar [12] und ist daher ebenfalls in den meisten natürlichen Betonzuschlägen zu erwarten.

Die Abstufung der Korngrößen des Zuschlags ist wichtig für die Verteilung der Zuschlagskörner im Beton. Sie ist in der DIN 1045 durch so genannte Regelsieblinien in Abhängigkeit vom Größtkorndurchmesser vorgegeben (vgl. Abbildung 5.4). Die "unterkörnigen" Sieblinien U8 bis U32 stellen in der Praxis eher eine Ausnahme dar und werden daher nicht weiter betrachtet. Anhand der übrigen Sieblinien mit einem

Größtkorndurchmesser von 8 mm bis 32 mm werden Betonmischungen entworfen, deren Materialdaten im folgenden Abschnitt ermittelt werden. Die Bezeichnung der einzelnen Betonmischungen folgt dabei der Syntax: B - <Sieblinie>.

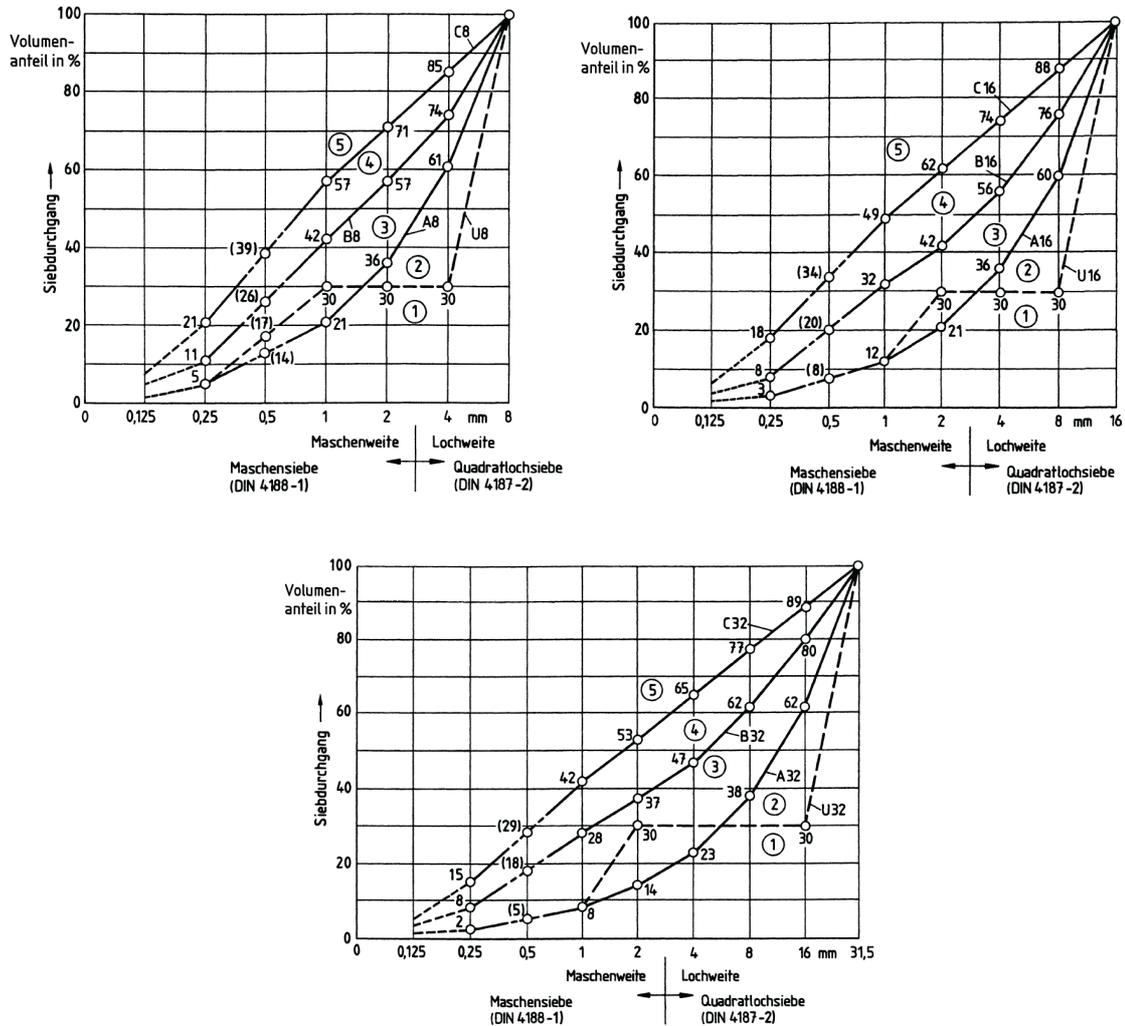


Abbildung 5.4: Beton; Regelsieblinien für Zuschläge mit einem Größtkorn von 8 mm (oben links), 16 mm (oben rechts) und 32 mm (unten) (aus: [73])

Der Frischbeton besteht, wie eingangs erläutert, aus Zement, Zuschlag, Wasser, Betonzusätzen und Luftporen. Aus diesen Bestandteilen wird die Zusammensetzung des Betons anhand der Stoffraumgleichung errechnet:

$$1000(dm^3/m^3) = \frac{z}{\rho_z} + \frac{g}{\rho_g} + \frac{w}{\rho_w} + \frac{b}{\rho_b} + l \quad (5.1)$$

mit $z, g, w$ und $b$	Zementgehalt, Zuschlagsmenge, Wassergehalt und Betonzusatzmenge in $[\text{kg}/\text{m}^3]$ bezogen auf den verdichteten Frischbeton,
$\rho_z, \rho_g, \rho_w$ und $\rho_b$	Reindichte des Zements, Korndichte des Zuschlags, Dichte des Wassers und Dichte des Betonzusatzes in $[\text{kg}/\text{m}^3]$ und
$l$	Luftporenvolumen in einem Kubikmeter verdichteten Frischbeton in $[\text{dm}^3/\text{m}^3]$ .

Da keine Betonzusätze betrachtet werden, gilt  $b = 0$ . Die zugrunde gelegten Materialdichten sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Tabelle 5.1: Beton, Dichten der Bestandteile

Bestandteil	Dichte $[\text{g}/\text{cm}^3]$	Quelle
Zement	3.10	[131]
Wasser	1.00	[243]
Zuschlag	2.63	[187]
Luft	0.0012	[159]

Die Vorgehensweise zum Entwurf der Betonmischungen sowie die Volumenanteile der Einzelbestandteile bzw. Komponenten sind in Anhang B ausführlich beschrieben und für die Betone B-A8 bis B-C32 zusammenfassend dargestellt.

## 5.4 Modellierung des Zuschlags

Als Zuschlagsmaterial wurde, wie bereits in Abschnitt 5.3 erläutert, die Gesteinsart Granit gewählt. Dessen Materialbeschreibung erfolgt entsprechend der in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Aufspaltung in volumetrisches und deviatorisches Materialverhalten. Dabei wird zur Beschreibung des volumetrischen Materialverhaltens die MIE-GRÜNEISEN- Zustandsgleichung verwendet. Die Beschreibung des deviatorischen Materialverhaltens erfolgt mittels einer abschnittsweise linearen DRUCKER-PRAGER Fließfunktion. Die zur Bestimmung der Materialparameter erforderlichen Daten werden aus der Literatur entnommen.

Die mechanischen Eigenschaften des Gesteins können aufgrund der Inhomogenität oder innerer Fehlstellen teilweise erheblich variieren (vgl. z.B. [233]). Daher spiegeln die aus der Literatur entnommenen Materialkennwerte und somit auch die daraus bestimmten Parameter lediglich ein Mittel der Eigenschaften eines Granits wider.

### 5.4.1 Zustandsgleichung des Zuschlags

1980 führte MARSH [187] eine ausführliche Untersuchung der HUGONIOT-Daten unterschiedlicher Materialien durch. Dabei wurden unter anderem auch die Eigenschaften von Granit (Westerly, Rhode Island) untersucht. Die von MARSH aus einer Vielzahl von Quellen ermittelten Daten werden hier als Grundlage der Beschreibung des volumetrischen Materialverhaltens herangezogen.

Die Kompressionswellengeschwindigkeit  $c_B$  kann aus der Longitudinalwellengeschwindigkeit  $c_L$  und der Transversalwellengeschwindigkeit  $c_T$  anhand der Gleichung

$$c_B = \sqrt{c_L^2 - \frac{4}{3}c_T^2} \quad (5.2)$$

bestimmt werden. Sie ergibt sich für Granit zu  $c_B = 3750$  m/s.

Abbildung 5.5 zeigt die Versuchsergebnisse aus [187] und die anhand der Methode der kleinsten Fehlerquadrate vom Autor ermittelte Ausgleichsfunktion. Die Steigung  $S$  der Wellengeschwindigkeits-Partikelgeschwindigkeits-Beziehung ( $U_s$ - $u_p$ -Beziehung) ergibt sich darin zu 1.142.

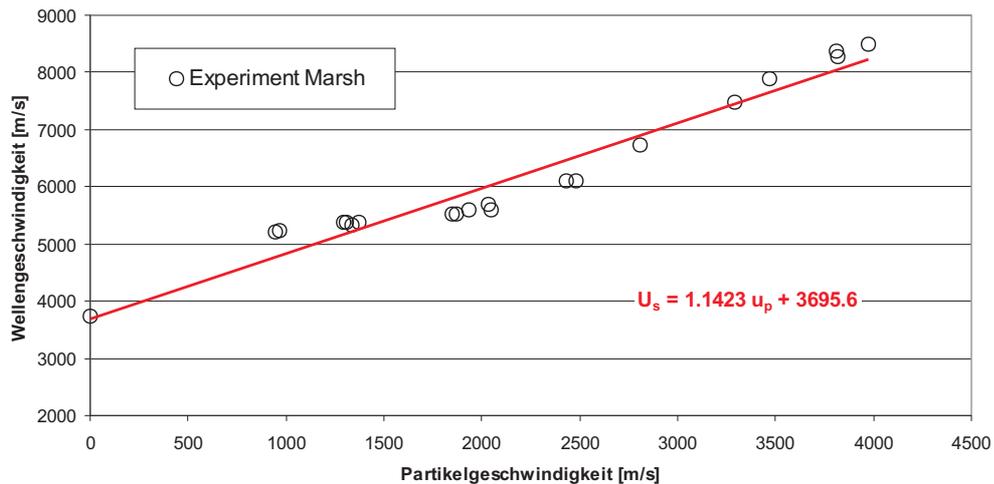


Abbildung 5.5:  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung von Granit; Experimente nach MARSH [187] und lineare Ausgleichsfunktion

Unter Anwendung der Näherung nach DUGDALE und MACDONALD [79] zur Abschätzung des GRÜNEISENparameters  $\Gamma$ ,

$$\Gamma \cong 2S - 1, \quad (5.3)$$

können aus dieser Beziehung alle Parameter der MIE-GRÜNEISEN-Zustandsgleichung abgeleitet werden. Tabelle 5.2 fasst die Parameter der Zustandsgleichung des Granits und die ermittelten Werte zusammen.

Tabelle 5.2: Granit, Parameter und Werte der Zustandsgleichung

Parameter	Wert	Einheit	Quelle
Dichte $\rho$	2.63	[g/cm <sup>3</sup> ]	[187]
Kompressionswellengeschwindigkeit $c_B$	3750	[m/s]	[187], Gl.(5.2)
Steigung $S$	1.142	[-]	[187], Abb. 5.5
GRÜNEISENparameter $\Gamma$	1.285	[-]	[79], Abb. 5.5

### 5.4.2 Festigkeitsmodell des Zuschlags

Das Festigkeitsverhalten des Granits wird zunächst durch eine abschnittsweise lineare Fließfunktion nach DRUCKER-PRAGER [77] abgebildet. Diese vergleichsweise einfache Formulierung scheint für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen ausreichend, da die (Druck-, Zug- und Schub-) Festigkeiten des Granits die des Zementsteins um ein Mehrfaches übersteigen. Somit ist im Rahmen der mesomechanischen Werkstoffsimulation weder eine plastische Deformation noch eine Materialschädigung des Granits zu erwarten.

Die Ermittlung der Druck-Fließspannungs-Paare basiert auf den Ergebnissen der von SCHOCK ET AL. 1973 [246] und MORROW & LOCKNER [200] an Granodiorit, einem mit Granit eng verwandten Gestein, durchgeführten Versuchen. Abbildung 5.6 zeigt die Ergebnisse dieser Versuche sowie die an die Ergebnisse angepasste trilineare Ausgleichsfunktion. Da Granit bei hydrostatischen Drücken unter 100 MPa nur eine marginale verzerrungsrateabhängige Festigkeitssteigerung zeigt [113], wird der Einfluss der Verzerrungsrate bei der Beschreibung der deviatorischen Festigkeit des Granits vernachlässigt.

Der Schubmodul  $G$  wird aufgrund der breiteren in der Literatur verfügbaren Datenbasis aus dem Elastizitätsmodul  $E$  und der POISSON-Zahl  $\nu$  mittels der Gleichung

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5.4)$$

bestimmt.

Die POISSON-Zahl für Granit variiert in der Literatur zwischen 0.26 und 0.29 (vgl. z.B. [3], [59] und [125]). Da, wie beispielsweise in [43] beschrieben, die POISSON-Zahl von Gestein mit steigendem Druck zunimmt, diese Zunahme im numerischen Modell jedoch nicht berücksichtigt wird, wird sie hier ausgleichend mit 0.28 angenommen. Die in der Literatur angegebenen Elastizitätsmoduln unterliegen einer, je nach Herkunftsort des Granits, erheblichen Streuung. Daher werden, um die Konsistenz der gewählten Parameter zu gewährleisten, die in den Versuchen von SCHOCK ET AL.

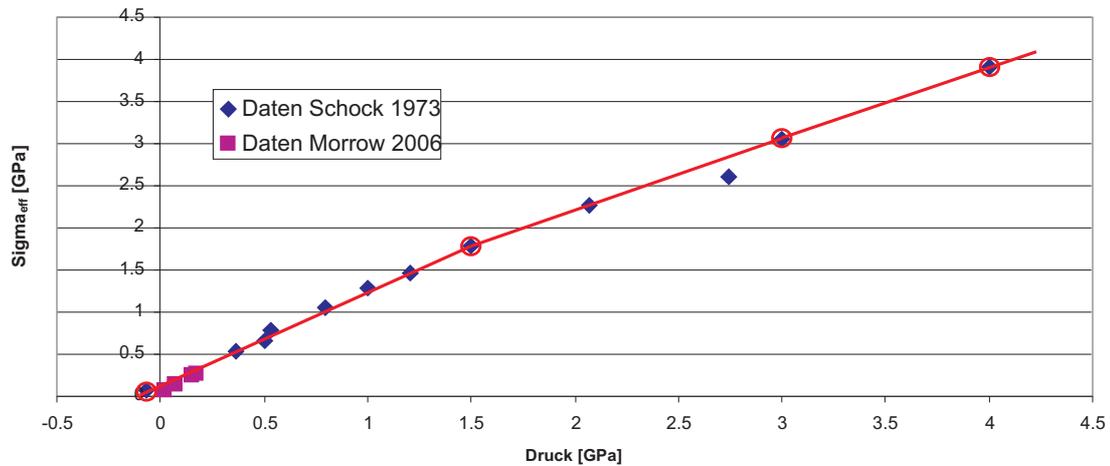


Abbildung 5.6: Druck-Fließspannungs-Beziehung von Granit; Experimente aus [246] und [200] mit trilinearer Ausgleichsfunktion

( $E = 80$  GPa) und MORROW & LOCKNER ( $E = 75$  GPa) ermittelten Elastizitätsmoduln als Mittelwert mit  $E = 77.5$  GPa übernommen.

Der mittlere Schubmodul des Granits ergibt sich somit, unter Anwendung von Gleichung (5.4), zu  $G = 30.3$  GPa.

Die Parameter der DRUCKER-PRAGER Fließfunktion zur Beschreibung des deviatorischen Materialverhaltens des Granits sind in Tabelle 5.3 zusammenfassend dargestellt.

Tabelle 5.3: Parameter der DRUCKER-PRAGER Fließfunktion für Granit

Parameter	Wert	Einheit	Quelle
Schubmodul $G$	30.3	[GPa]	[59], [125], [246], [200]
Druck #1	-0.15	[GPa]	[246], [200], Abb. 5.6
Druck #2	1.5	[GPa]	”
Druck #3	3.0	[GPa]	”
Druck #4	4.0	[GPa]	”
Fließspannung #1	0.0	[GPa]	[246], [200], Abb. 5.6
Fließspannung #2	1.79	[GPa]	”
Fließspannung #3	3.06	[GPa]	”
Fließspannung #4	3.91	[GPa]	”

## 5.5 Modellierung des Zementsteins

### 5.5.1 Zustandsgleichung des Zementsteins

Zementstein ist gemäß der Definition in Abschnitt 5.2 die Homogenisierung der Werkstoffe Zementleim (mit Poren) und aller Zuschläge mit einem Durchmesser  $d \leq 1$  mm. Das volumetrische Materialverhalten dieses porösen Komposits soll durch eine  $p$ - $\alpha$ -Zustandsgleichung mit polynomialem Ansatz beschrieben werden.

Zur Bestimmung der zur Beschreibung des Materialverhaltens mit dieser Zustandsgleichung notwendigen Werkstoffdaten ist es erforderlich, den Bestandteil Zementstein in seine Unterbestandteile zu zerlegen, und diese einzeln zu betrachten.

Der Zementleim selbst besteht aus Zementgel (Feststoff), Gelporen (gefüllt mit physikalisch gebundenem Wasser), Kapillarporen (je nach Sättigungsgrad gefüllt mit freiem Wasser oder Luft) und Luftporen. Die Zusammensetzung des Zementleims ist dabei, wie in Abbildung 5.7 dargestellt, abhängig vom w/z-Wert.

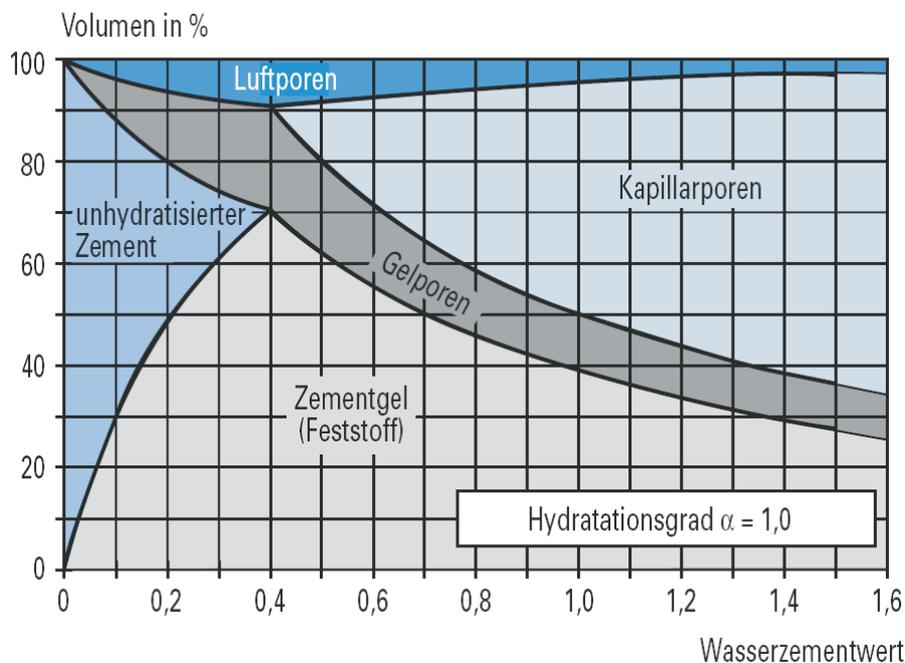


Abbildung 5.7: Zusammensetzung des Zementmatrixvolumens in Abhängigkeit vom w/z-Wert [274]

Zur Bestimmung der Materialeigenschaften des Komposits Zementstein aus seinen Einzelbestandteilen verwendet RIEDEL in seiner Arbeit [233] eine auf den Massenanteilen basierte HUGONIOT-Mischregel. Diese ist jedoch nur bedingt geeignet, da ein Material mit hoher Dichte das Materialverhalten des Komposits bestimmt, selbst wenn es nur ein geringes Volumen im Komposit einnimmt. Diese Problematik lässt

sich anhand eines kurzen Beispiels verdeutlichen: ein Körper aus Porenbeton hätte unter Verwendung einer massenbasierten Mischregel aufgrund der im Vergleich zum Beton äußerst geringen Masse der Lufteinschlüsse nahezu die gleiche poröse Dichte oder Wellengeschwindigkeit wie ein Körper ohne Poren. Dies entspricht jedoch nicht der Realität. Eine auf den Massenanteilen der Komponenten basierte HUGONIOT-Mischregel kann daher, je nach Dichteunterschied der Komponenten, zu erheblichen Fehlern bei der Abschätzung der Compositeigenschaften führen.

Eine Alternative bietet die Anwendung einer auf den Volumenanteilen der Einzelkomponenten basierte Mischregel (vgl. z.B. [251]):

$$P_{mix} = \sum f_i \cdot P_i \quad (5.5)$$

mit	$P_{mix}$	Zustandsgröße des Komposits,
	$f_i$	Volumenanteil der Komponente $i$ und
	$P_i$	Zustandsgröße der Komponente $i$ .

Die Bestimmung der porösen Dichte eines beliebigen Zementsteins kann mittels einer volumetrischen Mischregel erfolgen. Dabei wird im Rahmen dieser Arbeit davon ausgegangen, dass die vorhandenen Kapillarporen zu jeweils 50% mit Wasser (w) und Luft (l) gefüllt sind. Das Verhältnis zwischen Wasser und Luft kann jedoch bei bekannter Saturierung des Betons angepasst werden. Es ergibt sich:

$$\rho_{zs} = f_s \cdot \rho_s + f_{zG} \cdot \rho_{zG} + f_{GP} \cdot \rho_w + 0.5 \cdot f_{KP} \cdot (\rho_w + \rho_l) + f_{LP} \cdot \rho_l \quad (5.6)$$

Dabei bezeichnen die Indizes  $S$  Sand,  $ZG$  Zementgel,  $GP$  Gelporen,  $KP$  Kapillarporen und  $LP$  Luftporen.

Die zur Anwendung der Gleichung (5.6) erforderlichen Volumenanteile  $f$  der Bestandteile können der Stoffraumgleichung entnommen bzw. aus dem Diagramm in Abbildung 5.7 abgelesen werden. Dabei wird das Schwinden des Betons infolge Hydratation und Trocknung ( $\sim 10^{-3}$  Vol.-%) vernachlässigt.

Die meisten dieser Materialdichten sind aus der Literatur bekannt bzw. sind in einfachen Experimenten zu ermitteln. Lediglich die Dichte des Zementgels kann nicht direkt bestimmt werden. Sie wird daher aus dem in [271] dokumentierten Zementleim (ZL) mit w/z = 0.35 und der experimentell bestimmten Dichte  $\rho_{ZL} = 2.0 \text{ g/cm}^3$  durch Rückrechnung aus Gleichung (5.6) zu  $\rho_{zG} = 2.44 \text{ g/cm}^3$  bestimmt.

Anhand der selben Vorgehensweise mit einer volumetrischen Mischregel kann auch die poröse Wellengeschwindigkeit  $c_B$  ermittelt werden:

$$c_{B,ZS} = f_s \cdot c_{B,S} + f_{zG} \cdot c_{B,zG} + f_{GP} \cdot c_{B,w} + 0.5 \cdot f_{KP} \cdot (c_{B,w} + c_{B,l}) + f_{LP} \cdot c_{B,l} \quad (5.7)$$

Auch hier wird mittels Rückrechnung des in [233] experimentell bestimmten Wertes für den Zementstein  $c_{B,ZS} = 3283$  m/s die Wellengeschwindigkeit im Zementgel  $c_{B,ZG}$  bestimmt. Sie ergibt sich zu 3217 m/s.

Die übrigen zur Beschreibung des Materialverhaltens des Zementstein mit einer  $p$ - $\alpha$ -Zustandsgleichung notwendigen Materialkennwerte werden aus in der Literatur verfügbaren Experimentaldaten abgeleitet.

So wird der Druck am HUGONIOT-Elastic-Limit (HEL) aus den Versuchen von TSEMBELIS ET AL. [271] mit  $p_{HEL} = 0.3$  GPa übernommen. Dabei wird davon ausgegangen, dass der w/z-Wert des Betons zwischen 0.4 und 0.7 und der Sandanteil im Zementstein nur einen geringen Einfluss auf den Druck am HEL haben und dieser somit als konstant angenommen werden kann.

Auch der zur vollständigen Kompaktion des Zementsteins erforderliche Druck  $p_{comp}$  wird als unabhängig vom w/z-Wert und Sandanteil angenommen.  $p_{comp}$  und der Kompaktionsexponent  $N$  werden daher aus den Ergebnissen der umfangreichen Versuche von HALL, CHHABILDAS und REINHART [116] zu  $p_{comp} = 5$  GPa und  $N = 3$  festgelegt.

Bei der Kompaktion des Zementsteins kollabieren nicht nur die im Material vorhandenen Poren, sondern es wird auch die kristalline Struktur des Zementleims zerstört. Zur Abschätzung der Eigenschaften des vollständig kompaktierten Materials werden daher die Bestandteile des Zementleims genauer betrachtet.

Nach HEMPEL [127] besteht hydratisierter Zement (ohne physikalisch gebundenes Wasser und Poren) aus den in Tabelle 5.4 dargestellten Hauptbestandteilen. Dabei bezeichnen:

- $C \rightarrow CaO$  (Calciumoxid)
- $S \rightarrow SiO_2$  (Siliciumdioxid)
- $A \rightarrow Al_2O_3$  (Aluminiumoxid, Korund)
- $F \rightarrow Fe_2O_3$  (Eisen(III)oxid, Hämatit)

Die übrigen Reaktionsprodukte (0.9 Vol.-%) werden vernachlässigt.

Aus den Volumenanteilen der Phasen im Zementgel und den Dichten der Einzelverbindungen können deren volumetrische Anteile im Zementgel und schließlich im Zementleim und Zementstein bestimmt werden. Die Volumenanteile der Einzelverbindungen im Zementgel sind in Tabelle 5.5 zusammengefasst. Das dabei verwendete Berechnungsverfahren ist in Anhang C detailliert dargestellt.

Aus den in Tabelle 5.5 dargestellten Volumenanteilen ergeben sich für das Zementgel die kompaktierte Dichte  $\rho_{ref,ZG}$  zu  $3.004$  g/cm<sup>3</sup> und die Wellengeschwindigkeit  $c_{B,ZG,comp}$  zu  $3726.9$  m/s.

Tabelle 5.4: Chemische Hauptbestandteile des hydratisierten Zementgels (aus [127])

Phase	Bezeichnung	Vol.-%
$C_3S_2$	Calciumsilikat	44.8
$C_4A$	Tetracalciumaluminat	5.8
$C_3A \cdot CaSO_4$	Tricalciumaluminat- Calciumsulfat	16.8
$C_6AF$	Calciumaluminoferrit	7.8
$Ca(OH)_2$	Calciumhydroxid	22.3
$Mg(OH)_2$	Magnesiumhydroxid	1.6

Tabelle 5.5: Volumenanteile der Einzelverbindungen im Zementgel

Phase	Anteile der Einzelverbindungen in Vol.-%						
	$CaO$	$SiO_2$	$Al_2O_3$	$Fe_2O_3$	$CaSO_4$	$Ca(OH)_2$	$Mg(OH)_2$
$C_3S_2$	24.24	20.56					
$C_4A$	4.42		1.38				
$C_3A \cdot CaSO_4$	9.33		3.87		3.60		
$C_6AF$	6.09		1.27	0.44			
$Ca(OH)_2$						22.3	
$Mg(OH)_2$							1.6
<b>Summe</b>	<b>44.08</b>	<b>20.56</b>	<b>6.52</b>	<b>0.44</b>	<b>3.60</b>	<b>22.3</b>	<b>1.6</b>

Während die Luft während der Kompaktion aus den Poren entweicht, nehmen Zuschlag und Wasser bei anschließender Entlastung ihr ursprüngliches Volumen wieder ein. Es gilt somit für die Abschätzung der Dichte  $\rho_{ref,ZS}$  des Zementsteins:

$$\rho_{ref,ZS} = (f_S \cdot \rho_S + f_{ZG,comp} \cdot \rho_{ref,ZG} + f_{GP} \cdot \rho_w + 0.5 \cdot f_{KP} \cdot \rho_w) / \sum f_i, \quad (5.8)$$

wobei sich der Volumenanteil  $f_{ZG,comp}$  aus der Multiplikation des porösen Volumenanteils mit dem Verhältnis der porösen und der kompaktierten Dichte des

Zementgels ergibt.

$$f_{ZG,comp} = f_{ZG} \cdot \frac{\rho_{ZG}}{\rho_{ZG,comp}} = f_{ZG} \cdot 0.812 \quad (5.9)$$

Analog zur Dichte wird auch die Wellengeschwindigkeit  $c_{B,ZS,comp}$  des kompaktierten Zementsteins bestimmt:

$$c_{B,ZS,comp} = (f_S \cdot c_{B,S} + f_{ZG,comp} \cdot c_{B,ZG,comp} + f_{GP} \cdot c_{B,w} + 0.5 \cdot f_{KP} \cdot c_{B,w}) / \Sigma f_i . \quad (5.10)$$

Die Steigung der  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung des Zementgels  $S_{ZG}$  kann aufgrund fehlender Daten nicht aus dem Materialverhalten aller Einzelbestandteile abgeleitet werden. Sie wird daher durch die durch die Beziehungen der Hauptbestandteile Calciumoxid ( $S_{CaO}$ ) und Siliciumdioxid ( $S_{SiO_2}$ ) im Verhältnis 2:1 (siehe Tabelle 5.5) angenähert. Nach MARSH [187] gilt  $S_{CaO} = 1.120$  und  $S_{SiO_2} = 1.776$ . Die Steigung  $S$  der  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung für das Zementgel wird somit näherungsweise zu  $S_{ZG} = 1.339$  bestimmt. Für den Zementstein gilt entsprechend:

$$S_{ZS} = (f_S \cdot S_S + f_{ZG,comp} \cdot S_{ZG} + f_{GP} \cdot S_w + 0.5 \cdot f_{KP} \cdot S_w) / \Sigma f_i . \quad (5.11)$$

Nach RIEDEL [233] können die Wellengeschwindigkeit  $c_{B,comp}$ , die Steigung  $S$  der  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung und der GRÜNEISENparameter  $\Gamma$  in guter Näherung in die Koeffizienten der polynomialen Zustandsgleichung überführt werden. Angewandt auf den kompaktierten Zementstein gilt:

$$\begin{aligned} A_1 &= T_1 = \rho_{ref,ZS} \cdot c_{B,ZS,comp}^2 \\ A_2 &= \rho_{ref,ZS} \cdot c_{B,ZS,comp}^2 \cdot [1 + S_{ZS} \cdot (S_{ZS} - 1)] \\ A_3 &= \rho_{ref,ZS} \cdot c_{B,ZS,comp}^2 \cdot [2 \cdot (S_{ZS} - 1) + 3 \cdot (S_{ZS} - 1)^2] \\ B_0 &= B_1 = \Gamma , \end{aligned} \quad (5.12)$$

wobei zur Abschätzung des GRÜNEISENparameters  $\Gamma$  die Näherung nach DUGDALE und MACDONALD [79] in Gleichung (5.3) herangezogen wird.

Da unter hydrostatischer Zugbelastung vereinfachend von einem linearen Materialverhalten ausgegangen wird, wird der Koeffizient des Gliedes zweiter Ordnung  $T_2 = 0$  gesetzt.

### 5.5.2 Festigkeitsmodell des Zementsteins

Zur Beschreibung des deviatorischen Materialverhaltens des Zementsteins wird auf das Materialmodell RHT-Concrete zurückgegriffen. Dieses in AUTODYN [53] implementierte Modell bietet derzeit einerseits die höchste Flexibilität in der Anpassung an ähnliche Materialien und berücksichtigt zudem Effekte wie die Abhängigkeit der Fließspannung von Verzerrungsraten und dem LODE-Winkel  $\theta$ . Zur Anpassung des Modells werden zunächst aus in der Literatur vorhandenen Versuchsergebnissen die erforderlichen Materialkenngrößen ermittelt und anschließend die Parameter der Fließfunktion iterativ ermittelt.

#### Einachsige Druckfestigkeit

In den Versuchen von CIACCIO & ZERBINO [99] und GUINEA ET AL. [108] schwankt das Verhältnis der einachsigen Druckfestigkeit  $f_c$  des Zementsteins (Zementleim und Sand bis  $d = 2$  mm) zu der des Betons zwischen 1.1 und 1.3. Zur Bestimmung der Fließfunktion wird daher der Mittelwert von 1.2 angenommen:

$$f_{c,\text{Zementstein}} = 1.2 \cdot f_{c,\text{Beton}} . \quad (5.13)$$

#### Zweiachsige Druckfestigkeit

Da sich in der recherchierten Literatur keine Daten zur zweiachsigen Druckfestigkeit von Zementstein finden, wird auf die in [109] von GUO zusammengestellten Versuchsergebnisse für Beton zurückgegriffen. Dort ergibt sich für die zweiachsige Druckfestigkeit  $f_{cc}$  die Beziehung:

$$f_{cc} = 1.16 \cdot f_c . \quad (5.14)$$

Diese Beziehung wird für den Zementstein übernommen.

#### Einachsige Zugfestigkeit

Bei der Betrachtung der relativen einachsigen Zugfestigkeit  $f_t/f_c$  zeigen die Versuche in [99] und [108] zwar eine gewisse Streuung, jedoch liegen die Ergebnisse noch im Bereich von  $\pm 10$  % um den Mittelwert von 0.063. Zur Abschätzung des Verhältnisses der Zugfestigkeit zur Druckfestigkeit wird daher

$$f_{t,\text{Zementstein}} = 0.063 \cdot f_{c,\text{Zementstein}} \quad (5.15)$$

angenommen.

#### Dreiachsige Zugfestigkeit

Die dreiachsige Zugfestigkeit  $f_{ttt}$  beschreibt das "Hydrostatic-Tensile-Limit" (HTL) der Fließfunktion. Sie beträgt nach ZHOU [296] für Beton etwa das 0.9-fache der einachsigen Zugfestigkeit. Dieser Verhältniswert wird für den Zementstein übernommen.

$$f_{ttt,\text{Zementstein}} = 0.9 \cdot f_{t,\text{Zementstein}} \quad (5.16)$$

### Einachsige Schubfestigkeit

Die Abschätzung der mittleren Schubfestigkeit  $f_s$  des Zementsteins basiert auf den Experimentaldaten von KÝLYC, YASAR und CELIK [152]. Bei der Auswertung der Daten zeigt sich, dass die Abhängigkeit der relativen Schubfestigkeit ( $f_s/f_c$ ) vom w/z-Wert mit steigendem w/z-Wert deutlich abnimmt. Die für w/z = 0.4 bestimmte relative Festigkeit

$$f_{s,\text{Zementstein}} = 0.32 \cdot f_{c,\text{Zementstein}} \quad (5.17)$$

wird daher für den Bereich w/z > 0.4 übernommen.

### Schubmodul

Der Schubmodul  $G$  des Zementsteins kann direkt aus dem Kompressionsmodul  $K$  ermittelt werden. Dieser ergibt sich aus der in Abschnitt 5.5.1 bestimmten porösen Wellengeschwindigkeit  $c_{B,\text{por}}$  und der Dichte  $\rho_{\text{por}}$  ( $K = c_{B,\text{por}}^2 \cdot \rho_{\text{por}}$ ). Dabei wird eine Querkontraktionszahl  $\nu$  von 0.2 zugrunde gelegt.

$$G = \frac{3 K (1 - 2\nu)}{2 (1 + \nu)} = 0.75 \cdot K \quad (5.18)$$

Eine weitere Möglichkeit der Abschätzung ist die Bestimmung des Schubmoduls des Zementsteins aus dem Elastizitätsmodul des Betons. Die Versuchsergebnisse von CIACCIO & ZERBINO [99] und GUINEA ET AL. [108] zeigen für den Zementstein einen durchgängig niedrigeren Elastizitätsmodul als für Beton. Im Mittel ergibt sich ein Verhältnis von 0.84. In Verbindung mit Gleichung (5.4) ist somit auch folgende, aufgrund der Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls des Betons vom Zuschlag jedoch nur grobe, Abschätzung für den Schubmodul möglich:

$$G_{\text{Zementstein}} = \frac{0.84 \cdot E_{\text{Beton}}}{2(1 + 0.2)} = 0.35 \cdot E_{\text{Beton}} \quad (5.19)$$

Als Ausgangswert für diese Bestimmung des Schubmoduls des Zementsteins kann, sofern keine genaueren Daten vorliegen, der mittlere Elastizitätsmodul nach DIN 1045-1 [73] dienen. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wird der Schubmodul des Zementsteins nach Gleichung (5.18) ermittelt.

Da im Festigkeitsmodell "RHT-Concrete" zwischen den Werten HTL,  $f_t$ ,  $f_s$  und  $f_c$  linear interpoliert wird, stehen für die Bestimmung der Fließfunktion lediglich die ein- und zweiachsige Druckfestigkeit zur Verfügung. Die zwei Parameter  $A$  und  $N$  der Fließfunktion können mittels MATHCAD [189] iterativ bestimmt werden. Das Programm verwendet dazu nacheinander das Gradientenverfahren, die LEVENBERG-MARQUARDT-Methode und die Quasi-NEWTON-Methode bis ein Ergebnis (Konvergenztoleranz 0.001) erreicht ist.

Die übrigen Parameter, wie beispielsweise der Meridianverhältnisparameter  $Q$  nach WILLAM-WARNKE [286] und der Parameter zur Beschreibung des druckabhängigen

Tabelle 5.6: Materialparameter des RHT-Modells zur Beschreibung des Zementsteins

Parameter	Wert	Einheit	Quelle
Schubmodul $G$	18.1 - 21.9	[GPa]	Tab. D.4, Gl. (5.18)
Druckfestigkeit $f_c$	0.06	[GPa]	[99], [108], Gl. (5.13)
rel. Zugfestigkeit $f_t/f_c$	0.063	[-]	[99], [108], Gl. (5.15)
rel. Schubfestigkeit $f_s/f_c$	0.32	[-]	[152], Gl. (5.17)
Fließflächenparameter $A$	2.124	[-]	<i>Iteration</i> [189]
Fließflächenexponent $N$	0.825	[-]	<i>Iteration</i> [189]
Meridianverhältnis $Q$	0.68	[-]	[233]
Übergangsparameter spröde/duktil	0.01	[-]	[233]

Übergangs von sprödem zu duktilem Materialverhalten bleiben unverändert. Die Modellparameter des Zementsteins der exemplarisch betrachteten Betone C40/50 sind in Tabelle 5.6 zusammengefasst.

## 5.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst das den weiteren Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit zugrunde liegende Konzept der Mesomechanik dargestellt und erläutert. Aufbauend darauf wurden die Materialeigenschaften und -parameter der für die Werkstoffsimulationen in Kapitel 6 wesentlichen Komponenten des Betons - Zuschlag und Zementstein - ermittelt. Dabei wurde, im Gegensatz zu bekannten Ansätzen, eine volumenbasierte Mischregel zur Homogenisierung des Zementsteins verwendet. Zudem wurden die Zusammensetzung und Eigenschaften des Zementsteins teilweise bis auf Mikroebene betrachtet.

Die in diesem Kapitel dargestellte Materialbeschreibung der Hauptkomponenten des Betons bildet eine wesentliche Grundlage der weiteren Untersuchungen. Die zur Modellbildung verwendete volumenbasierte Mischregel sowie die durchgeführten detaillierten Betrachtungen ermöglichen dabei, wie im Folgenden gezeigt werden wird, eine gegenüber bisherigen Modellen deutlich verbesserte Materialbeschreibung.

# Kapitel 6

## Ermittlung der EoS aus Werkstoffsimulation

### 6.1 Generierung des numerischen Modells

Eine wesentliche Voraussetzung, um aus numerischen Simulationen realitätsnahe Ergebnisse zu erhalten, ist ein geometrisches Modell, das alle wichtigen Eigenschaften und Randbedingungen des Systems möglichst korrekt erfasst. Im Fall der Modellierung von Beton betrifft dieser Forderung vor allem die Verteilung des Grobzuschlags im Körper sowie die Einhaltung der vorgegebenen Sieblinie.

Zur Modellierung der numerisch untersuchten Betonproben wird zunächst in einem im Rahmen dieser Arbeit eigens dafür entwickelten externen Programm ein FE-Netz mit kubischen Elementen generiert. Dieses Netz wird entsprechend der gewählten Sieblinie mit den Bestandteilen Zementstein und Zuschlag per Zufallsgenerator gefüllt. Dabei geht das Programm wie folgt vor:

1. Zuerst wird ein dreidimensionaler Körper mit den gewünschten Abmessungen und der gewünschten Netzfeinheit (hier 0.5 mm) erzeugt. Dieser wird im ersten Schritt komplett mit dem Material Zementstein gefüllt.
2. Im "Programmkern" werden die Zuschlagskörner (beginnend mit der größten Korngruppe) entsprechend der vorgegebenen Sieblinie erzeugt und anhand von zufällig bestimmten Kornmittelpunkten in der Zementmatrix verteilt. Dabei wird sicher gestellt, dass sich die einzelnen Körner nicht überschneiden. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis das erforderliche Zuschlagsvolumen im Körper verteilt ist.
3. Im letzten Schritt wird eine Ausgabedatei geschrieben, die anschließend in den Hydrocode AUTODYN importiert werden kann.

Die drei Schritte zur mesomechanischen Modellierung der Betonprobe sind in Abbildung 6.1 am Beispiel der Sieblinie A8 schematisch dargestellt.

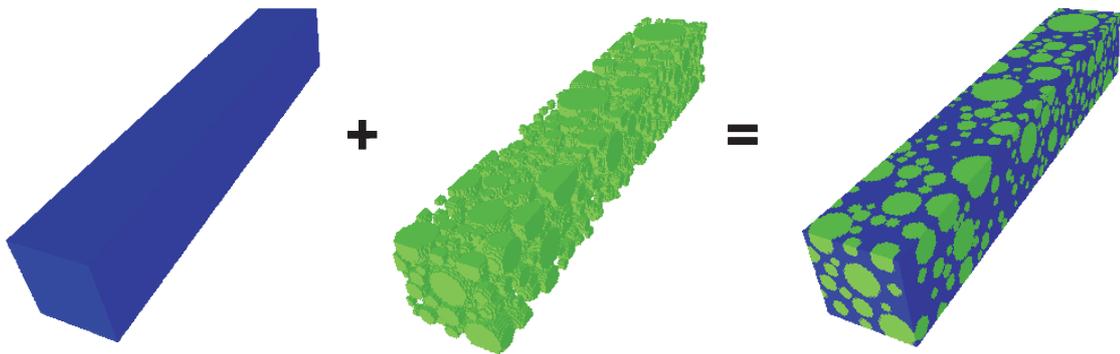


Abbildung 6.1: Schrittweise Generierung des mesomechanischen Rechenmodells

Eine Erzeugung absolut zufälliger Zahlen ist mittels computergestützter Zufallsgeneratoren nicht möglich. Zur Realisierung einer möglichst zufälligen Kornverteilung ist daher eine Kombination aus zufälliger Wahl eines Kornmittelpunktes im Körper und zufälliger Verschiebung desselben erforderlich.

Bei der Generierung eines repräsentativen Ausschnitts des betrachteten Betons liegt zudem besonderes Augenmerk auf der genauen Abbildung der Sieblinie. Dazu wird im Programm der Durchmesser des jeweils letzten Kornes einer Kornfraktion nicht zufällig, sondern iterativ bestimmt. Damit wird verhindert, dass die Erzeugung eines großen Kornes bei geringem Restvolumen zu einer Überkörnigkeit führt. Die Grenzen der Korngruppen sind dabei in der Eingabe frei wählbar.

Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, je nach Problemstellung, abgeschnittene Zuschlagskörner am Rand der Probe zuzulassen (vgl. Abbildung 6.1) oder zu verhindern.

Der funktionale Ablauf des Programms in Form eines Strukturdiagramms ist in Abbildung 6.2 dargestellt.

Die numerische Beschreibung des generierten Betonkörpers wird als LS-DYNA-Datei (.k) ausgegeben. Diese beinhaltet die Beschreibung der durch ihre Nummerierung und Koordinaten definierten Knoten sowie der durch die zugewiesenen Knoten und Werkstoffe definierten Elemente. Da diese Datei in einem weiteren Schritt im Hydrocode importiert wird, muss die Nummerierung der Knoten und Elemente mit AUTODYN kompatibel sein. Dazu wurden die Gleichungen aus [23] zugrunde gelegt. Eine in AUTODYN importierte LS-DYNA-Datei kann nur in einem LAGRANGE-Netz mit einem Unstructured Solver gelöst werden. Unstructured heißt, dass die Knoten und Elemente des FE-Netzes nicht mit den Indizes  $i, j$  und  $k$  sondern mit ihren absoluten Koordinaten  $x, y$  und  $z$  definiert werden. Diese Besonderheit wurde im Rahmen der Programmierung berücksichtigt.

Ziel der in diesem Kapitel durchgeführten Werkstoffsimulation ist es, zum einen die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $U_s$  im mesomechanisch modellierten Beton

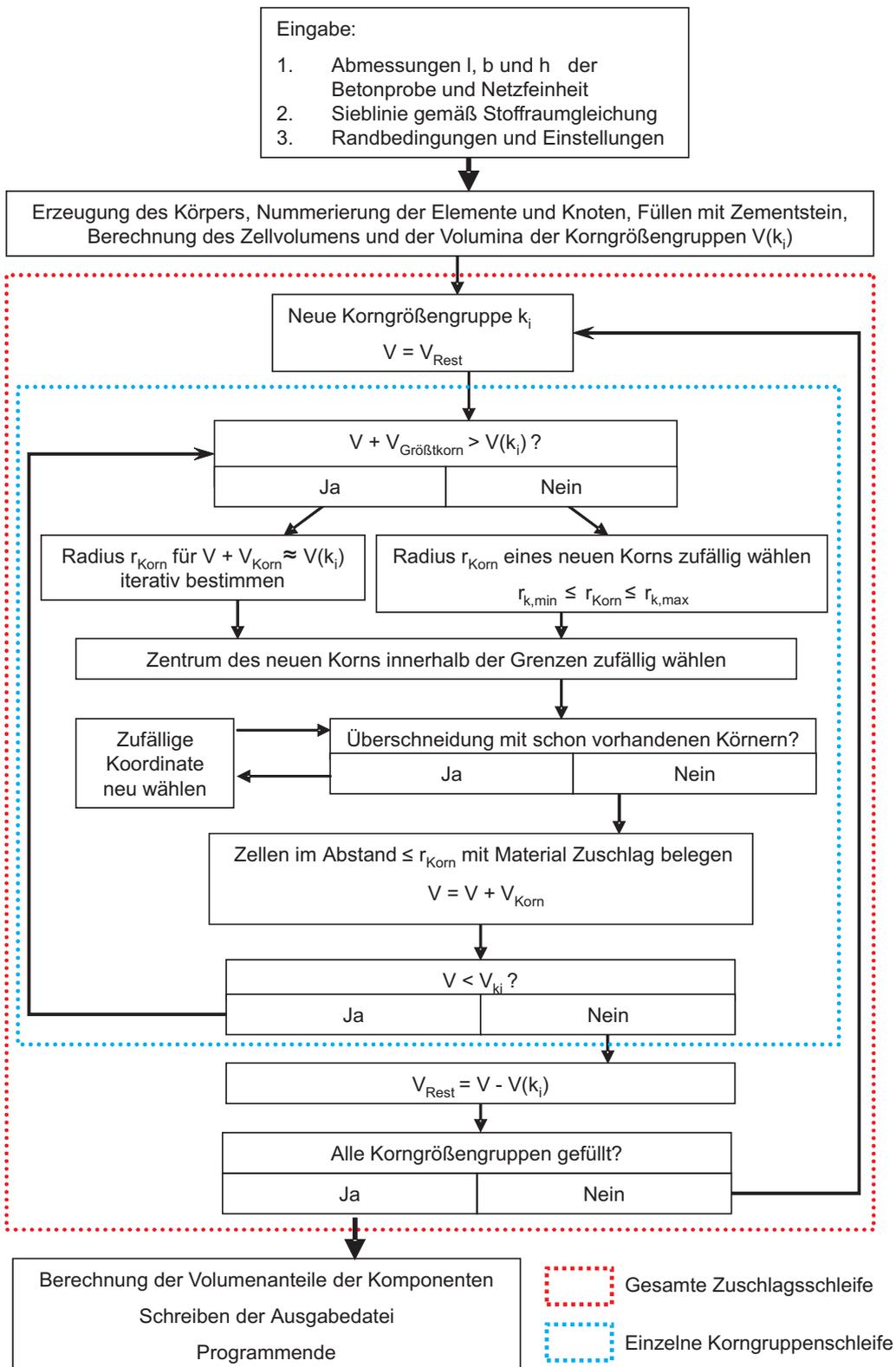


Abbildung 6.2: Algorithmus zur Erzeugung des geometrischen Modells von Beton auf Ebene der Mesomechanik

zu berechnen und zum anderen Druck-Dichte-Paare (Hugoniot-Punkte) zur Bestimmung der Zustandsgleichung für unterschiedliche Betone zu ermitteln. Dazu werden, dem Ansatz von RIEDEL [233] folgend, durch unterschiedliche Partikelgeschwindigkeitsrandbedingungen  $u_p$  in  $x$ -Richtung verschiedene longitudinale Wellen im Betonkörper erzeugt. Diese Geschwindigkeitsrandbedingung wird den drei ersten  $y$ - $z$ -Knotenscheiben zugewiesen, damit sich die Partikelgeschwindigkeit konstant durch den gesamten numerischen Probekörper ausbreitet. Um einen dreidimensionalen Spannungszustand, jedoch nur einen eindimensionalen Verzerrungszustand im Betonkörper zu erzeugen, wird die Partikelbewegung senkrecht zu den freien Oberflächen in  $y$ - und  $z$ -Richtung künstlich verhindert (siehe Abbildung 6.3). Diese Randbedingungen werden an vordefinierten Gruppen von Knoten zugewiesen. Bei Partikelgeschwindigkeiten, bei denen sich eine elastische Vorläuferwelle (vgl. Abschnitt 3.2.2) ausbildet, wird diese an der freien Rückseite des Körpers in Längsrichtung reflektiert und verfälscht damit die Auswertung der Bereiche unmittelbar am Ende des Körpers. Um dies zu verhindern, wird der Körper über den Auswertungsbereich hinaus ausgedehnt, um einen ausreichenden Auslauf für die elastische Welle zu gewährleisten.

Schließlich werden im Körper, gleichmäßig in Längs- und Querrichtung verteilt, bis zu 500 Auswertepunkte (Gauges) gesetzt, in denen der zeitliche Verlauf der Partikelgeschwindigkeit, des Drucks und der Dichte ausgegeben werden kann. Diese Gauges sind so positioniert, dass in jedem Querschnitt in verschiedenen Entfernungen  $L$  von der Geschwindigkeitsrandbedingung  $u_p$  mehrere Messergebnisse ausgegeben werden, die durch Mittelwertbildung zu einem einzigen Wert homogenisiert werden können. Die Positionen der Gauges sollten dabei entfernt von den Randbedingungen sein, um die Randeinflüsse zu minimieren.

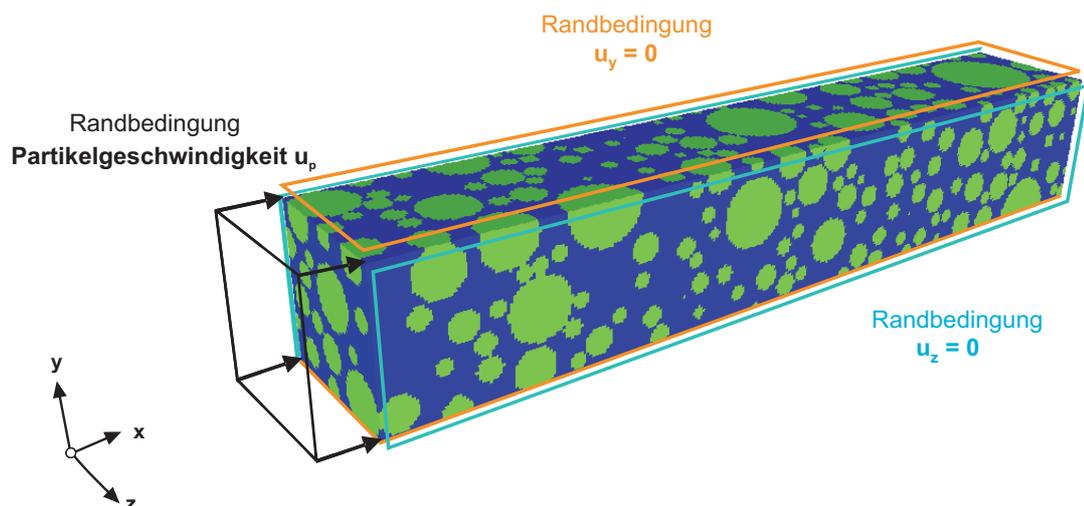


Abbildung 6.3: Definition der Randbedingungen zur Erzeugung einer longitudinalen Belastungswelle im Betonkörper

## 6.2 Auswerteverfahren und Bestimmung des RVE

Im Folgenden wird das Verfahren zur Auswertung der mesomechanischen Werkstoffsimulationen zusammenfassend am Beispiel des Betons A8 dargestellt. Eine ausführliche Beschreibung des Vorgehens findet sich in [233].

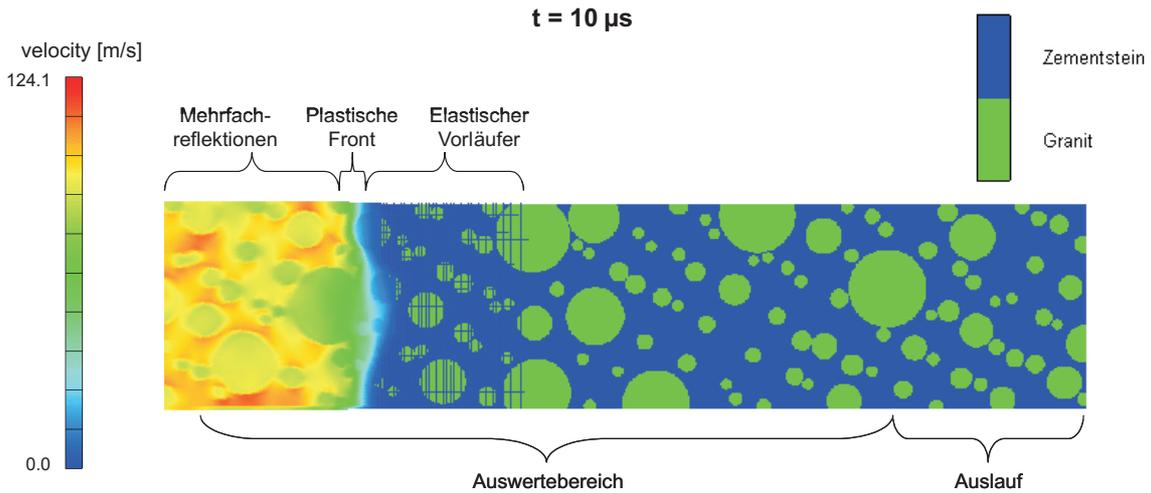


Abbildung 6.4: Partikelgeschwindigkeit im Betonkörper A8 während der Simulation mit  $u_p = 100$  m/s

In Abbildung 6.4 ist exemplarisch eine Momentaufnahme aus der Simulation des Betons B-A8 mit einer Geschwindigkeitsrandbedingung  $u_p=100$  m/s dargestellt. Darin wird deutlich, dass die Partikelgeschwindigkeit, u.a. aufgrund von Trägheitseffekten, nicht sprunghaft von 0 auf  $u_p$ , sondern innerhalb der plastischen Front in einem Intervall  $[t_a; t_e]$  ansteigt. Als Ankunftszeit der Welle in einer Zelle wird daher der Zeitpunkt  $t$  angenommen, in dem die Partikelgeschwindigkeit in dieser Zelle die Hälfte der Geschwindigkeitsrandbedingung ( $u_p/2$ ) übersteigt. Der dazugehörige Punkt im Geschwindigkeitsprofil wird Triggerpunkt genannt (vgl. Abbildung 6.5). Die Wellengeschwindigkeit ergibt sich dann aus dem Abstand einer beliebigen Zelle im Auswertungsbereich zu einer gewählten Referenzzelle geteilt durch die Differenz der Ankunftszeiten der Welle in beiden Zellen:

$$U_{s,i} = \frac{x_i - x_{ref}}{t_i - t_{ref}} . \quad (6.1)$$

Nach der Auswertung der Wellengeschwindigkeit in allen Punkten ergibt sich, wie exemplarisch in Abbildung 6.6 dargestellt, ein Profil der Wellengeschwindigkeit über die Länge des Probekörpers. Darin ist zu erkennen, dass die Wellengeschwindigkeit nach einer bestimmten Lauflänge gegen einen festen Wert konvergiert.

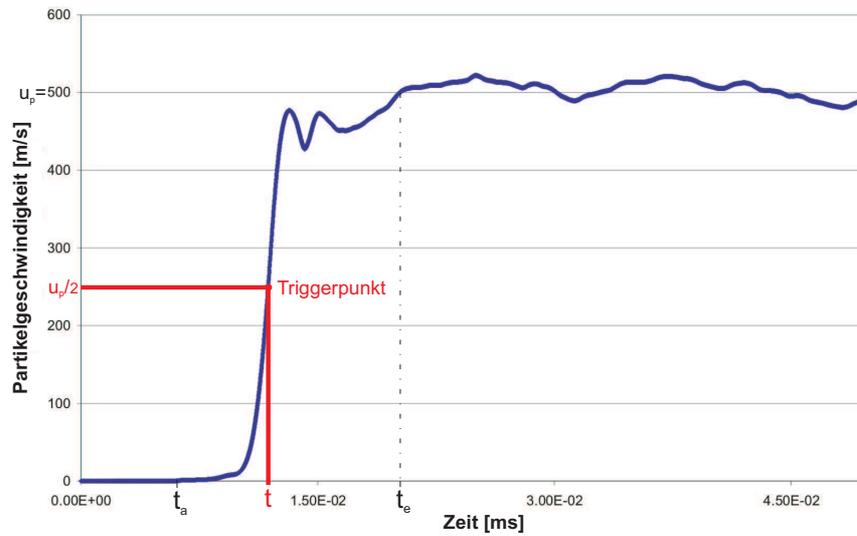


Abbildung 6.5: Zeitlicher Verlauf der Partikelgeschwindigkeit in einem Auswertepunkt

Die Starke Streuung der Werte im Anfangsbereich ist auf die Heterogenität der Probe zurückzuführen: im Zuschlag bewegt sich die Welle aufgrund der höheren elastischen Moduln schneller als im Zementstein. Dieser Effekt klingt infolge der zufälligen Verteilung der Zuschläge jedoch schnell ab und beschränkt sich auf ein Grundrauschen, das darauf zurückzuführen ist, dass die Auswertepunkte in unterschiedlichen Materialien liegen.

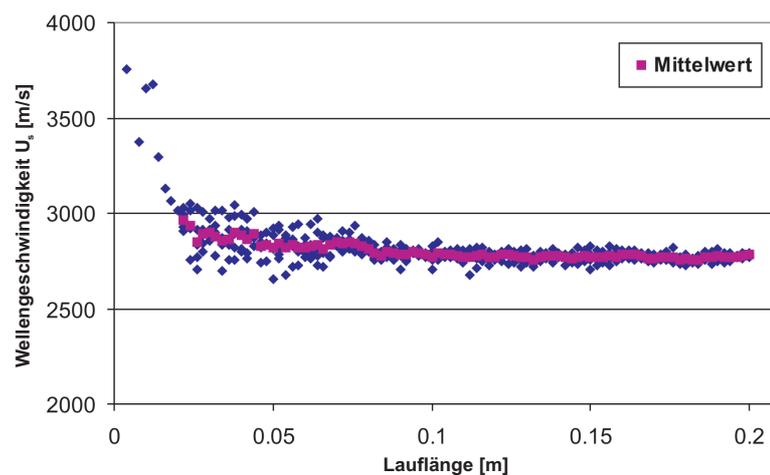


Abbildung 6.6: Auswertung der Wellengeschwindigkeit über der Lauflänge

Um die ermittelten Daten vom mesomechanischen Maßstab zum makromechanischen Maßstab zu überführen, muss die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckwelle in den Querschnitten homogenisiert werden. Dazu wird in jedem Querschnitt der Mittelwert der errechneten Wellengeschwindigkeiten gebildet. Das Ergebnis dieser homogenisierten Auswertung ist ebenfalls in Abbildung 6.6 dargestellt. Darin zeigt sich eine deutliche Reduzierung der Oszillation des Verlaufs der Wellengeschwindigkeit über die Länge.

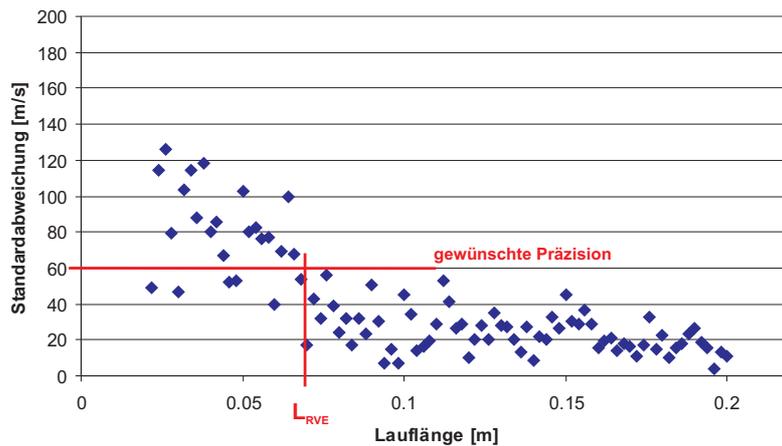


Abbildung 6.7: Standardabweichung und Bestimmung des RVE

Als Maß für die Streuung dient die Standardabweichung. Abbildung 6.7 zeigt den Verlauf der Standardabweichung für  $U_s$  über die Lauflänge des Körpers. Darin ist erkennbar, dass die Standardabweichung kontinuierlich mit der Lauflänge abnimmt. Das repräsentative Volumenelement (RVE) kann somit anhand der jeweils festzulegenden Präzision bestimmt werden. Dies bedeutet, dass die Länge des Körpers  $L$  mindestens so groß sein muss, dass die Standardabweichung innerhalb der festgelegten Streuung (Präzision) liegt. So ergibt sich für den Beton A8 mit einer geforderten Präzision von  $\pm 60$  m/s die in Abbildung 6.7 dargestellte Länge  $L_{RVE} = 70$  mm. Die Mindestlängen der Probekörper der übrigen Betone ergeben sich analog. Tabelle 6.1 fasst die Mindestlängen und die verwendeten Abmessungen der Probekörper für die Simulation von Betonen mit unterschiedlichen Sieblinien zusammen.

Die Auswertung der Druck-Dichte-Beziehung erfolgt analog zur  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung. Abweichend davon werden jedoch der Druck und die Dichte erst nach einer Zeit von  $5 \mu\text{s}$  nach dem ersten Druckanstieg berücksichtigt. Dies ist notwendig, um die elastische Vorläuferwelle aus der Berechnung zu eliminieren. Anschließend werden in jedem Auswertepunkt Druck und Dichte über die Zeit gemittelt und schließlich der Mittelwert aller Auswertepunkte gebildet. Das auf diese Weise bestimmte Druck-Dichte-Paar stellt somit einen Punkt der HUGONIOT-Kurve dar.

Tabelle 6.1: Repräsentative Probekörperlängen und Abmessungen der untersuchten Probekörper

Sieblinie	$L_{RVE}$ [mm]	L/B/H Probekörper [mm]	Anzahl Gauges
A8, B8, C8	70	120 / 20 / 20	400
A16, B16, C16	120	240 / 40 / 40	400
A32, B32, C32	245	480 / 80 / 80	500

Da eine händische Auswertung aufgrund der enormen Datenmenge kaum noch möglich ist, erfolgt die Auswertung automatisiert in einer Microsoft Excel Umgebung. Die in Excel verarbeitbare Datenmenge ist jedoch auf ca. 64000 Datenpunkte pro Gauge begrenzt. Bei den Simulationen der Betone mit Größtkorn  $d = 32\text{mm}$  werden die Werte in den Gauges daher nur alle 10 Berechnungsschritte gespeichert. Eine Einschränkung der Genauigkeit ist dadurch aufgrund der extrem kleinen Zeitschritte ( $\sim 10^{-6} \mu\text{s}$ ) jedoch nicht zu erwarten.

### 6.3 Validierung der EoS-Bestimmung aus Werkstoffsimulation

Zur Validierung des in Kapitel 5 sowie in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels beschriebenen Ansatzes zur Bestimmung der EoS von Beton werden in diesem Abschnitt die Simulationsergebnisse mit Experimentaldaten verglichen. Dabei wird auf die Versuchsergebnisse der Wehrtechnischen Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik 52 (WTD 52) [166] und des Ernst-Mach-Instituts für Kurzzeitdynamik (EMI) [203] zurückgegriffen. Diese Daten eignen sich besonders zur Validierung der Werkstoffsimulation, da für beide Versuchsreihen der gleiche Beton verwendet und dessen genaue Zusammensetzung dokumentiert wurde. Zudem ergänzen sich die in "fullscale"-Tests mittels Anspannung ermittelten Daten der WTD 52 und die in "Planar-Impakt-Untersuchungen" durch das EMI bestimmten Daten, so dass der gesamte Bereich von niedrigen bis sehr hohen Drücken bzw. Partikelgeschwindigkeiten abgedeckt wird.

Versuchsaufbau und -durchführung sind detailliert in den Berichten der WTD 52 bzw. des EMI beschrieben und in [92] zusammengefasst. Der für die Versuchsreihen verwendete Beton wurde nach den in Tabelle 6.2 zusammengestellten Vorgaben hergestellt.

Die genaue Sieblinie des Zuschlags ist in [166] zwar nicht beschrieben, jedoch entspricht die angegebene Korngruppenverteilung näherungsweise der Sieblinie B 8, die daher der Bestimmung der Eingangsparameter zugrunde gelegt wird. Die Eigenschaften des Zuschlags sind in [166] ebenfalls nicht spezifiziert. Die dokumentierte Zusammensetzung erlaubt jedoch eine Berechnung der Dichte aus der Stoffraum-

gleichung (5.1). Die Dichte des Zuschlags ergibt sich dabei zu  $2.68 \text{ g/cm}^3$ . Die experimentell bestimmte und dokumentierte Würfeldruckfestigkeit des Betons lag im Mittel bei  $50.27 \text{ N/mm}^2$ .

Tabelle 6.2: Zusammensetzung und Eigenschaften des untersuchten Betons [166]

Festigkeitsklasse	B 35
Konsistenzbereich	KP
Größtkorn	8 [mm]
Zementart	PZ 35
Wassergehalt	205 [kg/m <sup>3</sup> ]
Zementgehalt	450 [kg/m <sup>3</sup> ]
w/z-Wert	0.45
Korngruppenverteilung	0/4 → 75 [Vol.-%] 4/8 → 25 [Vol.-%]

Die Bestimmung der Eingangsparameter zur Beschreibung des Zementsteins in der mesomechanischen Werkstoffsimulation erfolgt anhand der Gleichungen (5.6) bis (5.18). Die sich daraus ergebenden Parameter der Zustandsgleichung sind in Tabelle D.1, die Parameter des Festigkeitsmodells in Tabelle D.2 in Anhang D.1 zusammengestellt. Die Modellierung des Zuschlags erfolgt, mit Ausnahme der Dichte, anhand der in Abschnitt 5.4 dargestellten Materialbeschreibung.

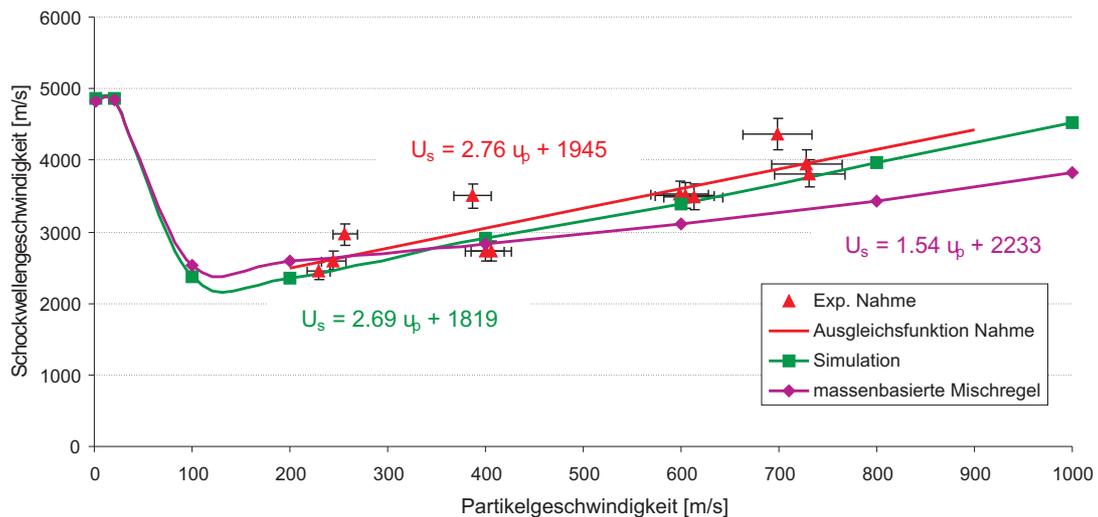


Abbildung 6.8: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten aus [203]

Die in den Simulationen ermittelten  $U_s$ - $u_p$ -Daten werden zunächst mit den Versuchen von NAHME [203] verglichen. Simulation und Experiment sind in Abbildung 6.8 gegenübergestellt und zeigen eine gute Übereinstimmung.

Auf Basis seiner Versuche bestimmte NAHME, anhand der Methode der kleinsten Fehlerquadrate, die lineare Ausgleichsfunktion zu  $U_s = S \cdot u_p + C = 2.76 \cdot u_p + 1945$  m/s. Die aus den Simulationen ermittelten Werte liegen zwar tendenziell im unteren Bereich der Experimentaldaten, jedoch noch innerhalb des experimentellen Streubereichs. Die ebenfalls mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate aus den Simulationsergebnissen bestimmte lineare  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung ergibt sich zu  $U_s = 2.69 \cdot u_p + 1819$  m/s und zeigt somit eine Abweichung der Steigung  $S$  zwischen Experiment und Simulation von lediglich 2.5 %. Zur Einordnung dieses Ergebnisses ist in Abbildung 6.8 zusätzlich das Ergebnis einer Simulationsreihe unter Verwendung einer massenbasierten HUGONIOT-Mischregel nach dem Ansatz von RIEDEL dargestellt. Dieser Ansatz liefert eine deutlich niedrigere Steigung  $S$  als im Experiment bzw. bei der Verwendung des im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Ansatzes. Die Abweichung zu der von NAHME bestimmten Ausgleichsfunktion beträgt hier 44 %.

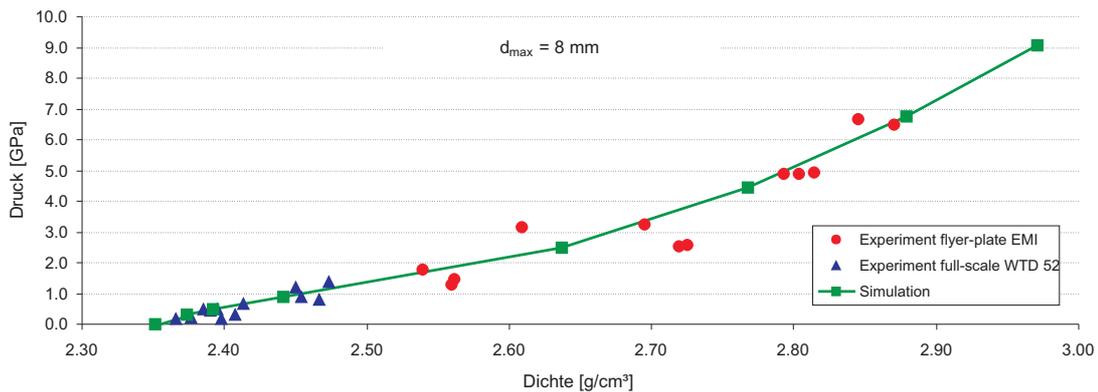


Abbildung 6.9: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten aus [166] und [203]

Um den vergleichbaren Datenbereich zu erweitern, wurden bei den Simulationen zusätzlich der Druck und die Dichte in den jeweiligen Auswertepunkten erfasst und über den gesamten Probekörper homogenisiert. Diese Daten können zur Kontrolle sowohl den Daten von NAHME als auch den in den Experimenten der WTD 52 [166] bestimmten Werten gegenübergestellt werden. Die im Experiment und in der Simulation bestimmten Druck-Dichte-Paare sind in Abbildung 6.9 zusammengefasst. Simulation und Experiment zeigen dabei ebenfalls eine gute Übereinstimmung. Die in der Simulation ermittelten Werte liegen durchgängig im mittleren Bereich der Versuchsdaten und geben diese somit gut wieder.

Zur weiteren Überprüfung des Verfahrens wurden zwei weitere durch die WTD 52 in Anspannungsversuchen untersuchte und in [165] dokumentierte Betone mit Größtkorn  $d_{\max} = 16$  mm und  $d_{\max} = 32$  mm simuliert. Der Versuchsaufbau im Experiment sowie die Parameterermittlung für die Simulation erfolgten dabei analog den bereits dargestellten Untersuchungen. Die Versuchs- und Simulationsergebnisse sind in Abbildung 6.10 und 6.11 gegenübergestellt.

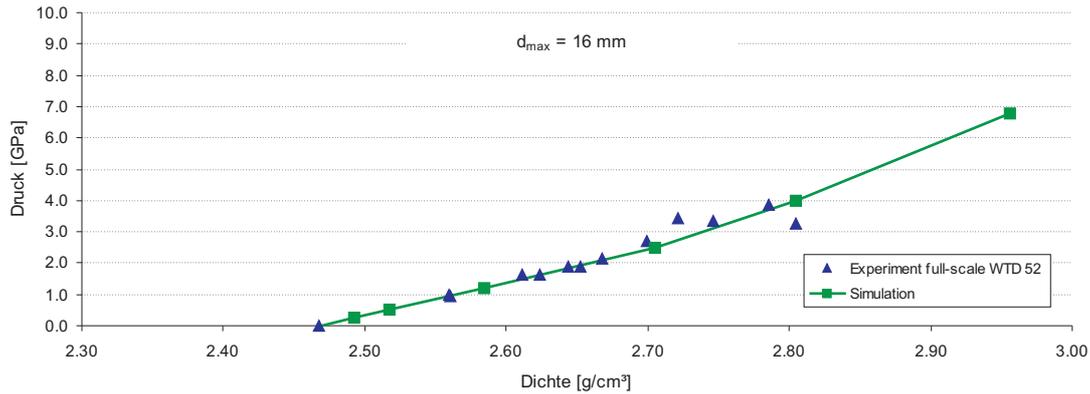


Abbildung 6.10: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten aus [165] für  $d_{\max} = 16$  mm

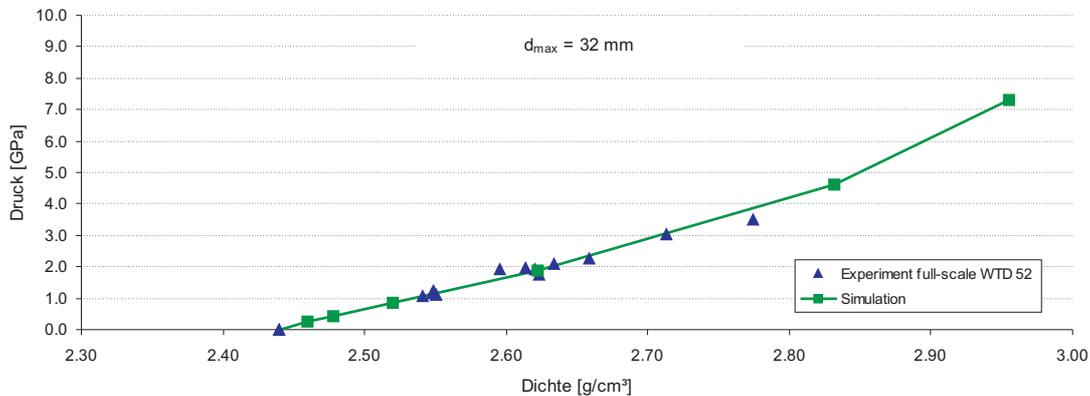


Abbildung 6.11: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten aus [165] für  $d_{\max} = 32$  mm

Auch hier bilden die Simulationen die Experimentaldaten mit guter Übereinstimmung ab. Dies bestätigt einerseits die Qualität der Abschätzung der Materialparameter bzw. Eingangsgrößen für die numerische Simulation und zeigt

andererseits die Anwendbarkeit des mesomechanischen Modells auf Betone unterschiedlicher Zusammensetzungen.

Dieses Ergebnis kann insofern als deutlicher Fortschritt gewertet werden, als RIEDEL unter Anwendung einer massenbasierten HUGONIOT-Mischregel bisher lediglich zeigen konnte, dass die Ergebnisse seiner mesomechanischen "Direktsimulation" des Betons innerhalb der Schranken des Zuschlags und des Zementsteins (vgl. [233]) bzw. innerhalb des Datenbereichs unterschiedlicher Betone (vgl. [234]) liegen.

Der in den Abschnitten 5.4 und 5.5 verwendete, auf einer volumetrischen Mischregel basierende Ansatz zur Ermittlung der Eingangsparameter scheint jedoch darüber hinaus geeignet, die HUGONIOT-Daten mittels Werkstoffsimulation auch für spezielle Betonmischungen zu bestimmen.

## 6.4 Numerische Studien

In diesem Abschnitt werden die für die mesomechanische Werkstoffsimulation relevanten Einflussgrößen bestimmt und mögliche Vereinfachungen untersucht. Dabei werden sowohl die bereits aus der Literatur bekannten Einflüsse überprüft als auch weitergehende Untersuchungen durchgeführt.

### 6.4.1 Quasi-zweidimensionale Simulationen

Um den zeitlichen Aufwand bei der Berechnung zu reduzieren bzw. eine feinere Vernetzung der Struktur zu ermöglichen, wird im Folgenden die Möglichkeit einer vereinfachten dreidimensionalen Berechnung untersucht. Diese Vereinfachung besteht darin, den im externen Programm erzeugten Probekörper bis auf eine Zellenscheibe zu reduzieren, so dass sich eine quasi zweidimensionale Struktur ergibt (siehe Abbildung 6.12). Durch die Randbedingungen ( $u_z = 0$ ) und ( $u_y = 0$ ) wird, wie im Dreidimensionalen, ein ebener Verzerrungszustand dieser Zellenscheibe sichergestellt. Auf diese Weise können quasi-zweidimensionale Berechnungen, die aufgrund des Importierformats der Daten in AUTODYN nicht direkt möglich sind, durchgeführt werden.

Vergleichsberechnungen, wie in Abbildung 6.13 exemplarisch anhand der Wellengeschwindigkeit in B-A8 für  $u_p = 500$  m/s dargestellt, zeigen eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse der quasi-zweidimensionalen mit denen der dreidimensionalen Simulationen. Die Punkte aus der "zweidimensionalen Berechnung" und die aus der dreidimensionalen Berechnung weichen zwar im vorderen Bereich aufgrund der größeren Streuung der dreidimensionalen Simulationsergebnisse voneinander ab, konvergieren jedoch mit zunehmender Lauflänge zum selben Wert. Diese bereits von RIEDEL in [233] getroffene Feststellung kann somit anhand der eigenen Untersuchungen bestätigt werden.

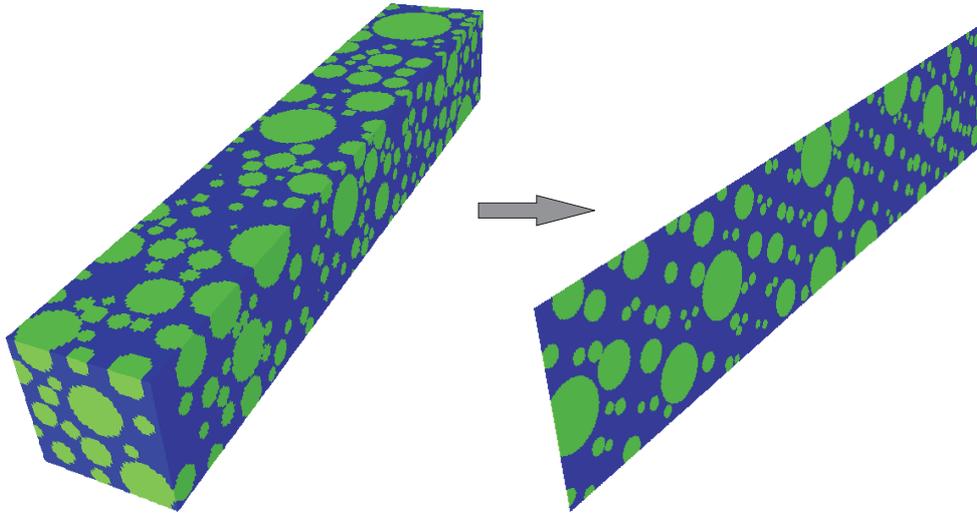
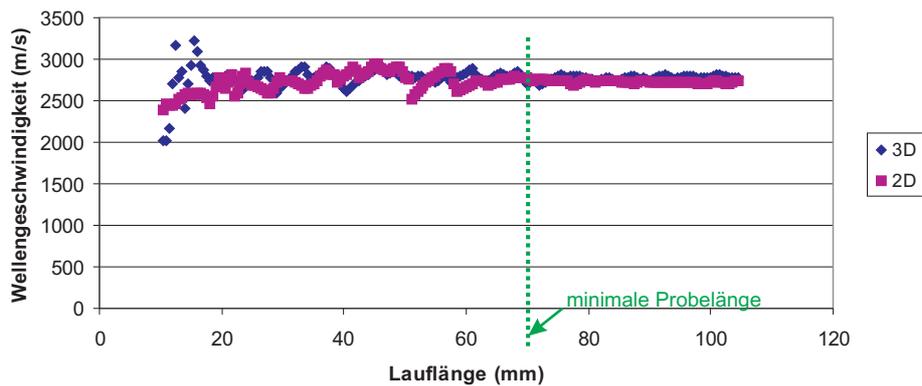


Abbildung 6.12: Drei- und "quasi-zweidimensionaler" Betonkörper

Folglich kann die "2-D" Berechnung als sinnvolle Vereinfachung des Problems betrachtet werden, wenn die Probelänge die zur Konvergenz erforderliche minimale Länge überschreitet. Alle weiteren im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen zur Bestimmung der Zustandsgleichung werden daher mit Zellscheiben durchgeführt.

Abbildung 6.13: Vergleich von 2-D und 3-D Berechnungen bei  $u_p = 500$  m/s

### 6.4.2 Einfluss des Festigkeitsmodells

Bei einer Änderung der Fließbedingung des Zementsteins ist aufgrund der verändert einsetzenden plastischen Verformung des Betons auch eine Veränderung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit zu erwarten. Um den Betrag dieser Änderung abzuschätzen, wird daher im Folgenden der Einfluss des gewählten Festigkeitsmodells auf die Simulationsergebnisse untersucht. Dabei wird das Festigkeitsmodell des Zuschlags konstant gehalten und das des Zementsteins variiert.

Untersucht werden die Modelle:

- RHT Concrete,
- DRUCKER-PRAGER,
- VON MISES

sowie eine Simulationsreihe ohne Festigkeitsmodell. Die bei den Simulationen verwendeten Materialparameter und -kenngrößen sind in Tabelle D.3 in Anhang D.2 zusammengestellt.

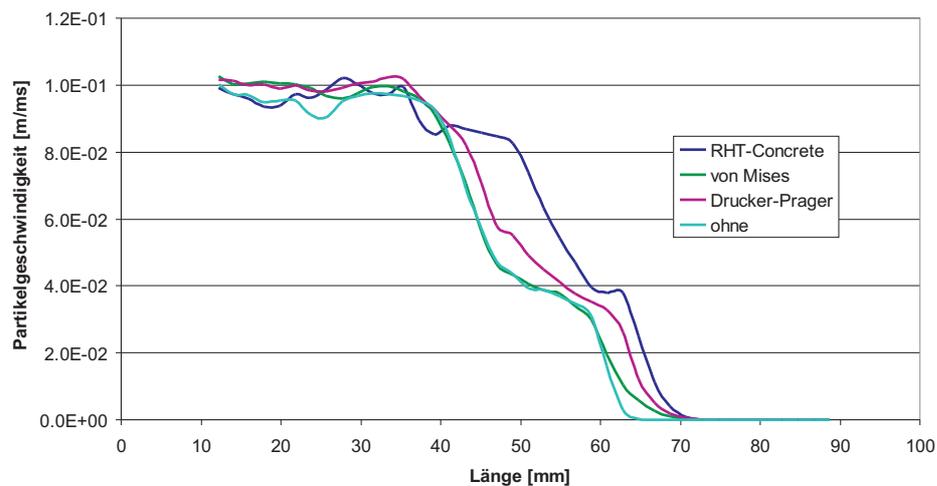


Abbildung 6.14: Vergleich des Partikelgeschwindigkeitsverlaufs in einem Auswertepunkt bei Verwendung unterschiedlicher Festigkeitsmodelle

Abbildung 6.14 zeigt den Verlauf der Partikelgeschwindigkeiten über die Körperlänge in der Mitte der (geometrisch identischen) Probekörper bei  $u_p = 100$  m/s. In der Abbildung sind deutliche Unterschiede zwischen den Geschwindigkeitsverläufen erkennbar. Bei der Auswertung aller Simulationen und der Homogenisierung über alle Gauges zeigt sich jedoch, dass sich die Wahl des Festigkeitsmodells nur bei niedrigen Partikelgeschwindigkeiten (bis ca. 500 m/s) auf die  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung

auswirkt. Dies kann anhand der unterschiedlichen plastischen Verformungsenergie erklärt werden: je mehr Energie der Welle in plastische Verformung umgesetzt wird, desto "langsamer" wird die Welle. Die Simulationsergebnisse korrelieren daher mit der Höhe der Fließspannung. Ab einer Partikelgeschwindigkeit von  $u_p > 500$  m/s ist dagegen, wie in Abbildung 6.15 dargestellt, nahezu kein Einfluss des Festigkeitsmodells mehr zu erkennen, da bei höheren Partikelgeschwindigkeiten und den daraus resultierenden hohen Drücken der Einfluss der plastischen Verzerrungen nur noch von untergeordneter Bedeutung für die Wellengeschwindigkeit ist. Dies schließt auch die Simulation ohne Festigkeitsmodell ein. Das Ergebnis legt daher nahe, Simulationen mit Partikelgeschwindigkeitsrandbedingungen von  $u_p > 500$  m/s ohne die Verwendung eines Festigkeitsmodells durchzuführen, da dies die Rechenzeit erheblich verkürzt. Darüber hinaus sollten bei der Bestimmung der Steigung  $S$  der linearen  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung möglichst Simulationsergebnisse mit höheren Partikelgeschwindigkeiten verwendet werden, um damit den Einfluss des Festigkeitsmodells zu verringern.

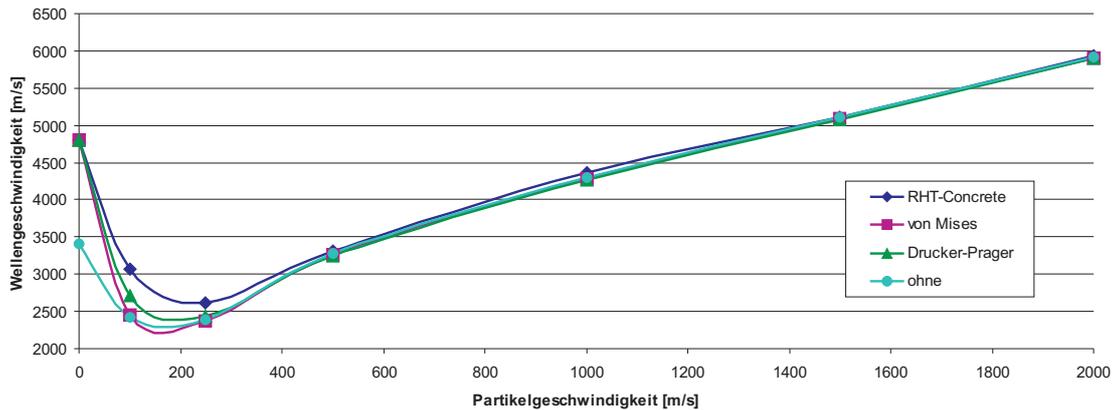


Abbildung 6.15: Vergleich der  $U_s$ - $u_p$ -Beziehungen aus Werkstoffsimulation bei Verwendung unterschiedlicher Festigkeitsmodelle

Auffällig ist zudem der Einfluss des Festigkeitsmodells auf die elastische Wellengeschwindigkeit. Der Unterschied zwischen den Simulationen mit Festigkeitsmodell und ohne lässt sich jedoch auf die physikalische Bestimmung der Longitudinalwellengeschwindigkeit  $c_L$  aus der Kompressions- und Transversalwellengeschwindigkeit ( $c_B$  und  $c_T$ )

$$c_L^2 = c_B^2 + \frac{4}{3}c_T^2 \quad \text{mit} \quad c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6.2)$$

zurückführen. Die Longitudinalwellengeschwindigkeit des Betons kann somit in einer Simulation ohne Festigkeitsmodell nicht bestimmt werden. Da jedoch der Kompressionsmodul des Komposits Beton aus der mesomechanisch ermittelten elastischen

Kompressionswellengeschwindigkeit  $c_B$  bestimmt werden kann, kann, je nach Problemstellung, auch die zusätzliche Bestimmung dieser elastischen Wellengeschwindigkeit zur späteren Überführung der Ergebnisse auf die makromechanische Ebene sinnvoll sein.

Die Ergebnisse mit den Modellen VON MISES, DRUCKER-PRAGER und RHT Concrete zeigen dagegen keine sichtbaren Abweichungen von einander, da sich die elastische Wellengeschwindigkeit  $c_{el}$  nach der Gleichung

$$c_{el} = \sqrt{\frac{K + 4/3 G}{\rho_{por}}} \quad (6.3)$$

bestimmt und sowohl  $K$  und  $\rho_{por}$  (in der Zustandsgleichung) als auch  $G$  bei allen drei Materialmodellen gleich sind. Die auftretenden Abweichungen beschränken sich auf die dritte Nachkommastelle und sind daher zu vernachlässigen.

Für den Bereich der  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung kann daher festgestellt werden, dass bei  $u_p < 500$  m/s eine möglichst realitätsnahe Modellierung des deviatorischen Materialverhaltens von großer Bedeutung für das numerische Ergebnis ist.

Eine Vernachlässigung des Festigkeitsmodells ist dagegen nur für Simulationen mit einer Partikelgeschwindigkeit  $u_p > 500$  m/s bzw. zur Bestimmung der elastischen Kompressionswellengeschwindigkeit  $c_B$  sinnvoll.

Im Gegensatz zur  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung war eine Bestimmung des Einflusses des Festigkeitsmodells auf die Druck-Dichte-Beziehung nur teilweise möglich. Während bei der Auswertung der Wellengeschwindigkeiten lediglich die Ankunftszeit der Welle bestimmt wird, wird bei der Auswertung der Druck-Dichte-Paare der sich nach Durchlauf der Welle einstellende Wert betrachtet. Bei den Simulationen mit niedriger (VON MISES) bzw. ohne Festigkeit kam es bei Partikelgeschwindigkeiten von  $u_p > 250$  m/s zu erheblichen Verzerrungen der Zellen (ähnlich einer turbulenten Strömung) und somit zu numerischen Instabilitäten, die eine Auswertung unmöglich machten. Bei der Auswertung der Simulationen mit den Festigkeitsmodellen RHT und DRUCKER-PRAGER zeigten sich jedoch keine nennenswerten Unterschiede.

### 6.4.3 Einfluss der Kornverteilung

Um den Einfluss der im externen Programm erzeugten zufälligen Verteilung der Körner im Zementstein zu untersuchen, wurden 10 unterschiedliche Probekörper mit der Sieblinie B16 erzeugt und Simulationen mit verschiedenen Randbedingungen  $1 \leq u_p \leq 1500$  m/s durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Simulationen, einschließlich der Standardabweichung  $\sigma$ , sind in Tabelle 6.3 dargestellt.

Bei der Auswertung der Simulationen zeigt sich nur ein geringer Einfluss der Kornverteilung im numerischen Probekörper auf das Ergebnis. Alle Ergebnisse liegen in einem Bereich von maximal  $\pm 4\%$  um den Mittelwert bzw. einer Standardabweichung  $\sigma \leq 65$  m/s. Die absolute Streuung der Werte ist in Abbildung 6.16 grafisch dargestellt.

Tabelle 6.3: Werkstoffsimulation; Einfluss unterschiedlicher Kornverteilung auf die Wellengeschwindigkeit

$u_p$ [m/s]	$U_{s,min}$ [m/s]	$U_{s,max}$ [m/s]	Mittelwert [m/s]	Abweichung max. [%]	SD* [m/s]
1	5278,0	5416.4	5343.7	1.4	56.0
50	4492.8	4643.1	4561.8	1.8	62.7
100	2982.2	3052.7	2987.2	2.2	65.0
250	2872.7	3034.8	2964.7	3.1	60.8
500	3306.6	3451.1	3368.8	2.5	58.5
1000	4440.0	4564.1	4476.1	2.0	44.1
1500	5303.0	5455.4	5382.0	1.5	46.3

\* SD = standard deviation (Standardabweichung)

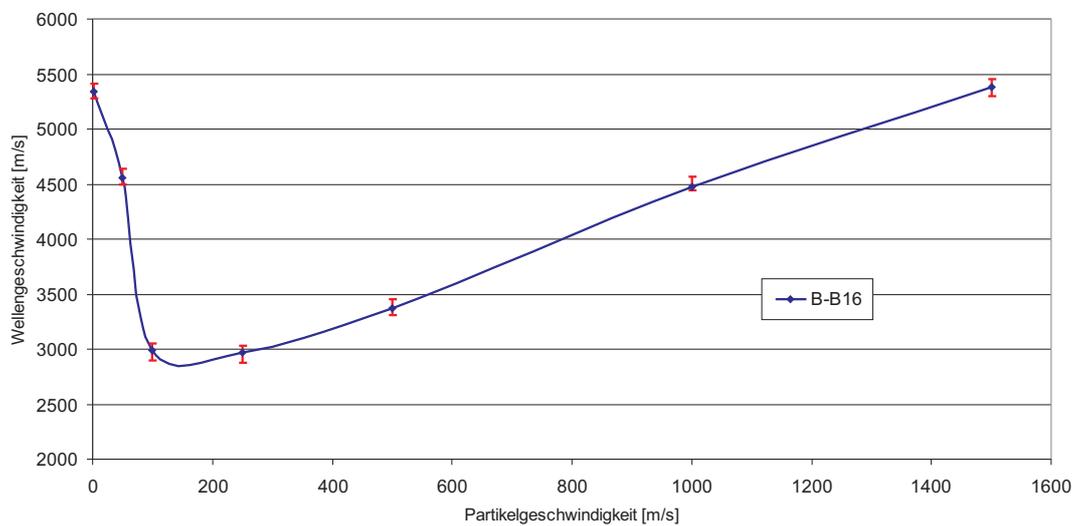


Abbildung 6.16: Werkstoffsimulation; absolute Streuung der Wellengeschwindigkeit bei unterschiedlicher Kornverteilung im Probekörper

Da bei der Untersuchung verschiedener numerischer Probekörper weder der Druck noch die Dichte konstant bleiben, können die in der Simulationsreihe ermittelten Druck-Dichte-Paare nicht direkt miteinander verglichen werden.

Zur Beurteilung des Einflusses der Kornverteilung auf die aus den Werkstoffsimulationen ermittelten Druck-Dichte-Beziehungen werden daher die resultierenden abschnittsweise linearen Funktionen verglichen und deren Abweichung von einander betrachtet. Abbildung 6.17 zeigt die Ergebnisse der Simulationsreihen. Dabei sind aus Gründen der Übersichtlichkeit lediglich 5 Reihen dargestellt.

In den Simulationen zeigen sich keine nennenswerten Streuungen der Ergebnisse. Auch die sich in den Simulationen ergebenden Nulldichten streuen lediglich in einem Bereich von ca. 1% um den anhand der Mischregel ermittelten theoretischen Wert von  $2.348 \text{ g/cm}^3$ . Dieses gute Ergebnis kann vermutlich auf die hohe Anzahl an Auswertepunkten zurückgeführt werden. Hier nicht explizit dargestellte Simulationen mit nur 200 Gauges zeigten teilweise deutliche Abweichungen (bis zu 5%) von der theoretischen Ausgangsdichte. Ein signifikanter Einfluss der zufällig erzeugten Kornverteilung auf die Simulationsergebnisse ist jedoch hier nicht zu erkennen.

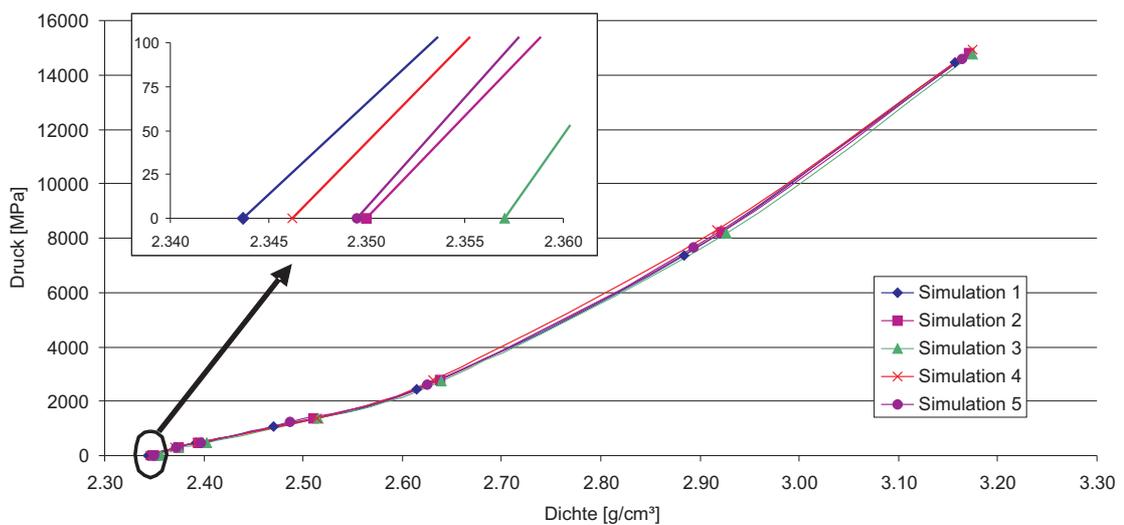


Abbildung 6.17: Werkstoffsimulation; Vergleich der Druck-Dichte-Beziehungen bei unterschiedlicher Kornverteilung im Probekörper

Aufgrund der geringen Stichprobenanzahl von lediglich 10 Probekörpern kann die durchgeführte Untersuchung statistisch grundsätzlich nicht als repräsentativ betrachtet werden, jedoch lassen die vorliegenden Ergebnisse keinen erheblichen Einfluss der Kornverteilung erwarten. Der Einfluss der Kornverteilung wird daher vernachlässigt und nicht weiter betrachtet.

### 6.4.4 Untersuchung von Stahlfaserbeton

Zur Erweiterung der mesomechanischen Werkstoffsimulation auf die Untersuchung von Stahlfaserbeton wird der in Abschnitt 6.1 beschriebene Algorithmus zur Erzeugung von numerischen Probekörpern modifiziert. In einem zusätzlichen Schritt wird, wie in Abbildung 6.18 grafisch dargestellt, der Körper um einen Anteil "Stahlfasern" erweitert.

Nach der Generierung des mit dem Material Zementstein gefüllten Körpers werden Stahlfasern (gerade Stahlfasern mit  $l/d = 50$ ) in den Körper eingefügt. Diese haben zufällige Ausrichtungen und Positionen und können sich mit den Rändern des Körpers überschneiden. Ihr Anteil übersteigt den in dem Mischrezept festgelegten Stahlfaseranteil, je nach Sieblinie des Betons, um einen empirisch ermittelten Betrag zwischen 40% für die Sieblinie C8 und 140% für die Sieblinie A32.

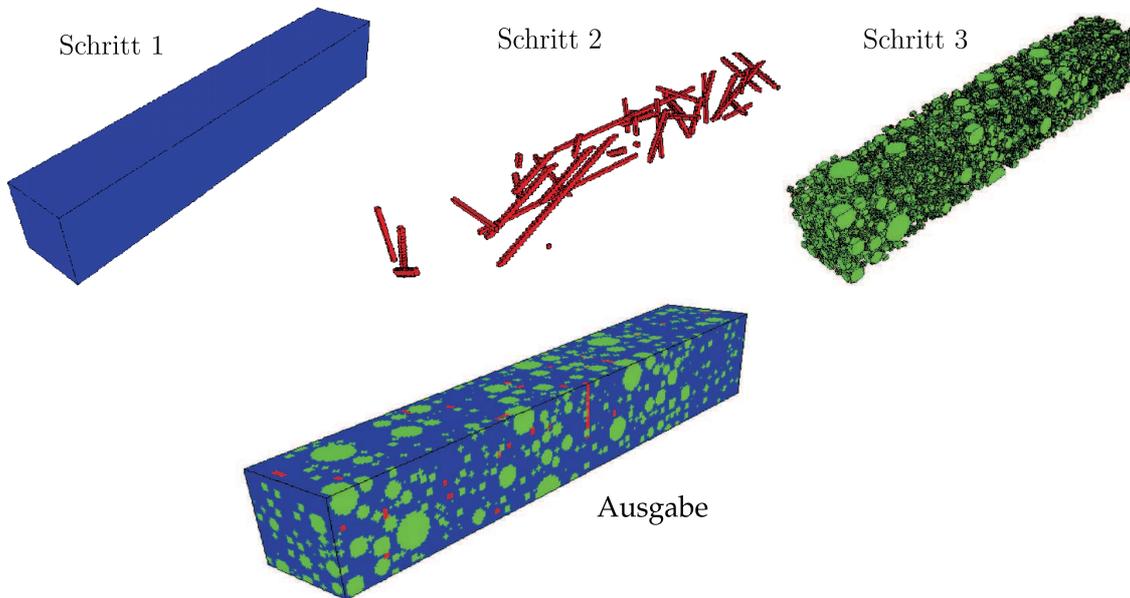


Abbildung 6.18: Generierung eines mesomechanischen Stahlfaserbetonkörpers

Dieser Überschuss verschwindet nach dem nächsten Schritt, da ein Teil der mit dem Material Stahl gefüllten Elemente bei der Generierung der Zuschlagskörner durch das Zuschlagsmaterial ersetzt wird. Diese Vorgehensweise begründet sich darin, dass eine exakte Darstellung der Stahlfasern mit einer Überschneidungsabfrage mit den Zuschlagskörnern numerisch kaum realisierbar bzw. mit sehr großem zeitlichen Aufwand und sehr feinen Netzen verbunden wäre. Eine derartige Vereinfachung erscheint jedoch möglich, da auf Grundlage der Ergebnisse aus Abschnitt 6.4.3 für die Bestimmung der EoS-Daten primär eine zufällige Verteilung des Stahlvolumens im Körper

erforderlich ist, nicht jedoch die Abbildung der exakten Länge der Fasern. Abbildung 6.19 zeigt die Erweiterung des in Abbildung 6.2 dargestellten Algorithmus.

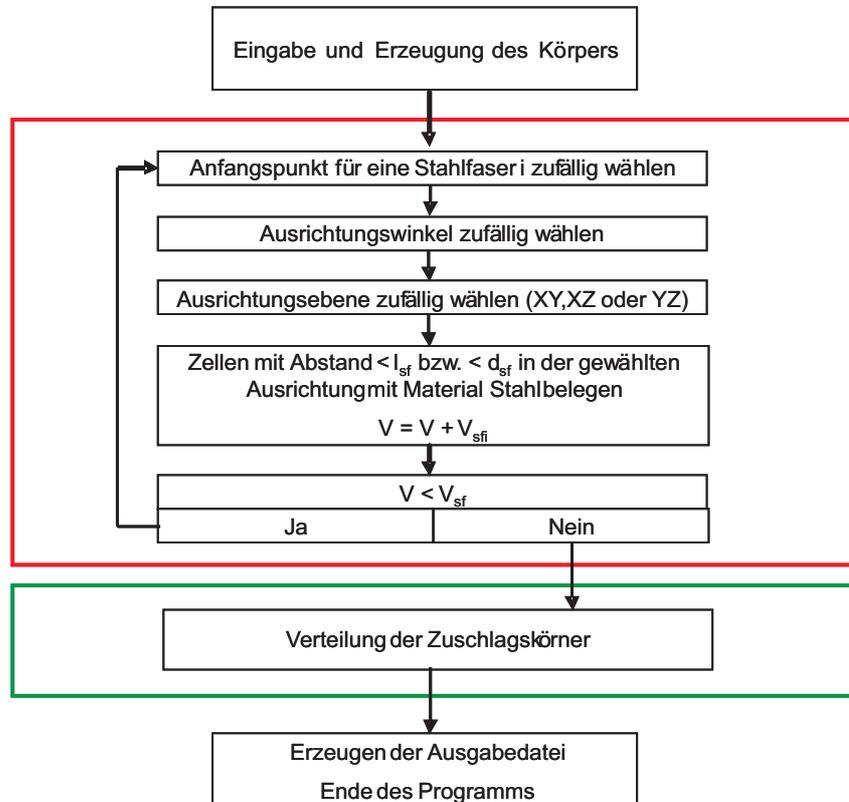


Abbildung 6.19: Stahlfaserbeton; Erweiterung des Algorithmus zur mesomechanischen Probekörpermodellierung

Das Materialverhalten von Stahl unter hohen Drücken und hohen Verzerrungsraten gilt als weitgehend erforscht. Eines der meistverwendeten Werkstoffmodelle zur Beschreibung von Stahl stellt dabei das von JOHNSON & COOK ([147], [148] und [149]) entwickelte JC-Modell dar, mit dem bereits vielfach gute Ergebnisse erzielt wurden (siehe z.B. [6] und [106]). Zur Modellierung des Materialverhaltens der Stahlfasern wird daher auf dieses Werkstoffmodell zurückgegriffen. Das volumetrische Materialverhalten des Stahls wird dabei mittels einer MIE-GRÜNEISEN-Zustandsgleichung abgebildet, deren Parameter in Tabelle 6.4 zusammengefasst sind.

Ein grundsätzlicher Vorteil des JC-Festigkeitsmodells ist, dass es auch bei hohen Verzerrungsraten, hohen Temperaturen und großen Verformungen seine Gültigkeit nicht verliert. Dies ist bei den hier zur Bestimmung der Zustandsgleichung durchgeführten Werkstoffsimulationen jedoch nur von untergeordneter Bedeutung.

Im JC-Modell wird die VON MISES Fließspannung  $Y$  um eine plastische und um eine verzerrungsratenabhängige Verfestigung sowie um eine thermische Entfestigung

Tabelle 6.4: Parameter und Werte der MIE-GRÜNEISEN-Zustandsgleichung für Stahl (nach [147])

Parameter	Wert	Einheit
Dichte $\rho$	7.896	[g/cm <sup>3</sup> ]
Kompressionswellen- geschwindigkeit $c_B$	4569	[m/s]
Steigung $S$	1.49	[-]
Grüneisenparameter $\Gamma$	2.17	[-]

erweitert. Die Verfestigung ist dabei in Abhängigkeit von der plastischen Verzerrung  $\varepsilon_{pl}$  formuliert:

$$Y = \underbrace{(A + B \varepsilon_{pl}^n)}_{\text{statisch}} \cdot \underbrace{(1 + C \ln \dot{\varepsilon}_{pl}^*)}_{\text{dynamisch}} \cdot \underbrace{(1 - T^{*m})}_{\text{thermisch}}, \quad (6.4)$$

wobei  $\dot{\varepsilon}_{pl}^*$  die auf  $\dot{\varepsilon}_{pl} = 1.0 \text{ s}^{-1}$  normierte Verzerrungsrate und  $T^*$  die auf die Schmelztemperatur  $T_s$  bezogene Ersatztemperatur beschreiben. Die Parameter  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $n$  und  $m$  werden aufgrund des geringen Einflusses des Festigkeitsmodells (Abschnitt 6.4.2) zur Beschreibung der Stahlfasern aus [147] übernommen. Die verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 6.5 zusammengefasst.

Tabelle 6.5: Parameter des JC Festigkeitsmodells für Stahl (nach [147])

Parameter	Wert	Einheit
Schubmodul $G$	81.8	[GPa]
VON MISES Fließspannung $A$	0.35	[GPa]
Verfestigungsparameter $B$	0.275	[GPa]
Verfestigungsexponent $n$	0.36	[-]
Verzerrungsratenparameter $C$	0.022	[-]
Thermischer Entfestigungsexponent $m$	1.0	[-]
Schmelztemperatur $T_s$	1811	[K]

Mit drei auf Basis des Betons B-B8 erzeugten Probekörpern wurden vier Simulationsreihen mit unterschiedlichen Stahlfasergehalten zwischen 0.0 und 3.2 Vol.-% durchgeführt und ausgewertet. Zur Eliminierung der Streuung aufgrund der zufälligen Kornverteilung wurde bei den Simulationsreihen mit 0.0 Vol.-% und 3.2 Vol.-%

der selbe Probekörper verwendet. Dabei wurden die mit Stahlfasern belegten Zellen einmal mit Stahl und einmal mit Zementstein gefüllt.

Die in Abbildung 6.20 zusammengefassten Ergebnisse lassen keinen Einfluss der Stahlfasern auf die numerisch bestimmte  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung erkennen. Alle Simulationsergebnisse liegen innerhalb des in Abschnitt 6.4.3 ermittelten Streubereichs. Auffällig ist insbesondere, dass die Kurven der Simulationsreihe mit 3.2 Vol.-% Stahlfasern und die der faserlosen Simulationsreihe, bei denen eine Streuung verhindert wurde, nahezu deckungsgleich (Abweichung ca. 0.1%) sind.

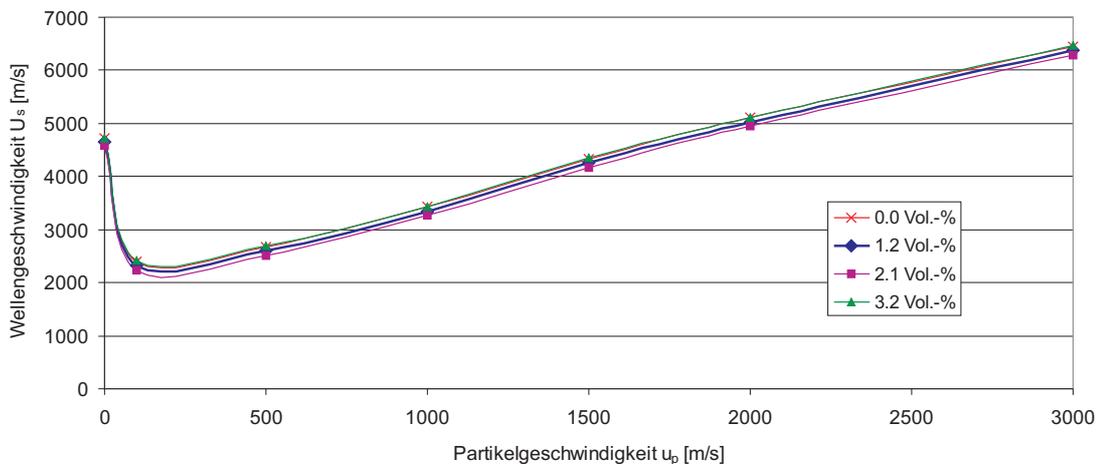


Abbildung 6.20: Stahlfaserbeton;  $U_s$ - $u_p$ -Beziehungen bei unterschiedlichen Stahlfasergehalten

Es kann daher gefolgert werden, dass die Stahlfasern aufgrund ihres äußerst geringen Anteils (in baupraktischen Betonmischungen bis maximal 3.0 Vol.-%) keinen Einfluss auf die  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung des Betons haben.

Im Vergleich der Druck-Dichte-Beziehungen in Abbildung 6.21 ist ebenfalls kein signifikanter Einfluss der Stahlfasern auf das Kompaktionsverhalten des Betons erkennbar. Die Stahlfasern scheinen in den Simulationen lediglich eine Verschiebung der Kompaktionskurve entlang der Abszisse zu bewirken. Eine genauere Betrachtung der in den Simulationen bestimmten Ausgangsdichten  $\rho_0$  zeigt, dass die nach Mischregel aufgrund der Zugabe der Stahlfasern erwartete Zunahme der Anfangsdichte auf 2.51 g/cm<sup>3</sup> bei 3.2 Vol.-% nicht abgebildet wird. Bedingung für eine realitätsnahe Bestimmung der Ausgangsdichte wäre, dass ein annähernd dem Fasergehalt entsprechender Anteil der Auswertepunkte in den modellierten Stahlfasern liegt. Während, wie in Abschnitt 6.4.3 dargestellt, die theoretische Dichte des reinen Betons gut wiedergegeben wird, kann die Verteilung der Auswertepunkte im nume-

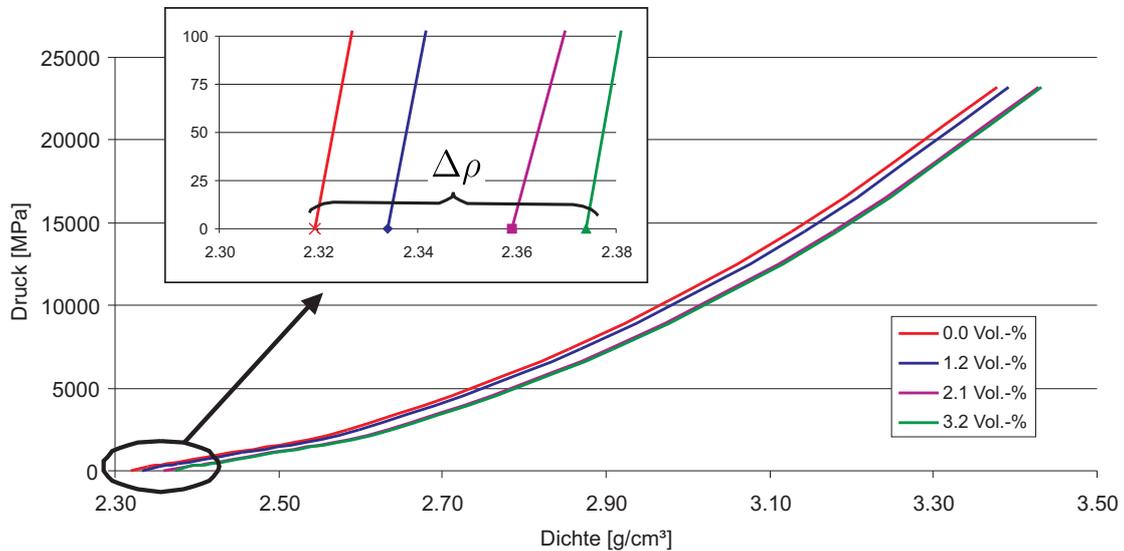


Abbildung 6.21: Stahlfaserbeton; Druck-Dichte-Kurven bei unterschiedlichen Stahlfasergehalten

rischen Probekörper die Dichte der Stahlfasern nicht ausreichend berücksichtigen. Dieses Problem konnte auch durch eine Erhöhung der Anzahl der Auswertepunkte nicht beseitigt werden.

Die Ergebnisse der  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung bleiben von dieser Feststellung jedoch unberührt, da die Wellengeschwindigkeit in den Fasern auch berücksichtigt wird, wenn kein Auswertepunkt in den Fasern liegt.

Abbildung 6.22 zeigt den Vergleich der mit dem selben Probekörper durchgeführten Simulationen für 0.0 Vol.-% und 3.2 Vol.-%, wobei die numerisch bestimmte HUGONIOT-Kurve für 3.2 Vol.-% Stahlfasergehalt entlang der Abszisse um  $\Delta\rho$  nach links verschoben wurde. Die Abbildung zeigt keine wesentliche Änderung der Form der HUGONIOT-Kurve infolge der "Zugabe" von Stahlfasern.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Stahlfasern in der numerischen Simulation weder einen Einfluss auf die  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung noch auf das Kompaktionsverhalten des Betons haben. Auch wenn bei der Auswertung der Druck-Dichte-Wertepaare nicht der gesamte Stahlfaseranteil berücksichtigt werden konnte, so kann dennoch angenommen werden, dass für geringe Stahlfasergehalte eine um den Betrag  $\Delta\rho$  verschobene HUGONIOT-Kurve eines entsprechenden Betons ohne Stahlfasern das volumetrische Materialverhalten des Stahlfaserbetons mit guter Genauigkeit abbilden kann.

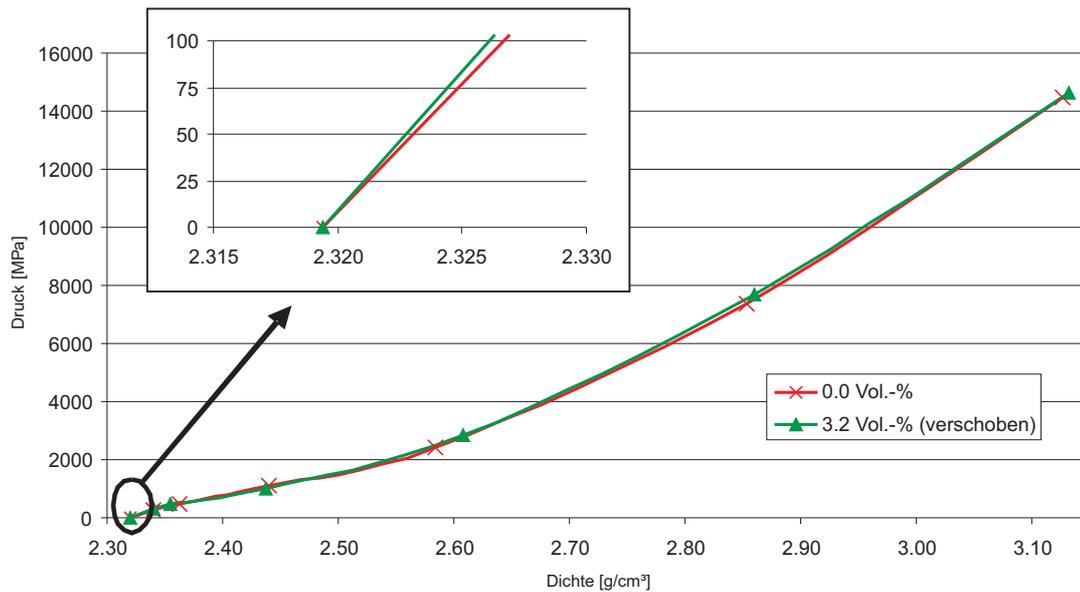


Abbildung 6.22: Stahlfaserbeton; Überlagerung der Druck-Dichte-Kurven für 0.0 Vol.-% und 3.0 Vol.-% Stahlfasergehalt

## 6.5 Einfache Abschätzung der Zustandsgleichung des Betons

In Abschnitt 5.5.1 wurde die Zustandsgleichung des Zementsteins anhand einer volumetrischen Mischregel unter Berücksichtigung aller Einzelbestandteile bis auf Mikroebene abgeschätzt. Die guten Ergebnisse in den mesomechanischen Simulationen mit dieser Abschätzungsmethode legen nahe, auch die Möglichkeit einer Anwendung für den makromechanischen Beton zu untersuchen. Dies scheint insbesondere sinnvoll, da dabei keine weiteren Bestandteile hinzukommen, sondern lediglich der Anteil des Zuschlagsmaterials (entspricht dem Sand im Zementstein) erhöht wird. Zur Beurteilung der Anwendbarkeit dieser einfachen Methode zur Abschätzung der Zustandsgleichung des heterogenen Werkstoffs Beton wurde für die Sieblinien A8 bis A32, B8 bis B32 und C8 bis C32 die Druck-Dichte-Beziehung jeweils mesomechanisch ermittelt. Die dazu entsprechend dem in den Abschnitten 5.4 und 5.5 beschriebenen Vorgehen bestimmten Materialparameter des Zementsteins sind in Tabelle D.4 in Anhang D.3 zusammengefasst.

Anschließend wurden die Simulationen wiederholt, wobei die Probekörper mit dem anhand der volumetrischen Mischregel bestimmten homogenen Material gefüllt wurden. Als Festigkeitsmodell für den homogenisierten Beton wurde das Standard-RHT Modell mit einer einaxialen Druckfestigkeit von  $f_c = 50$  MPa verwendet.

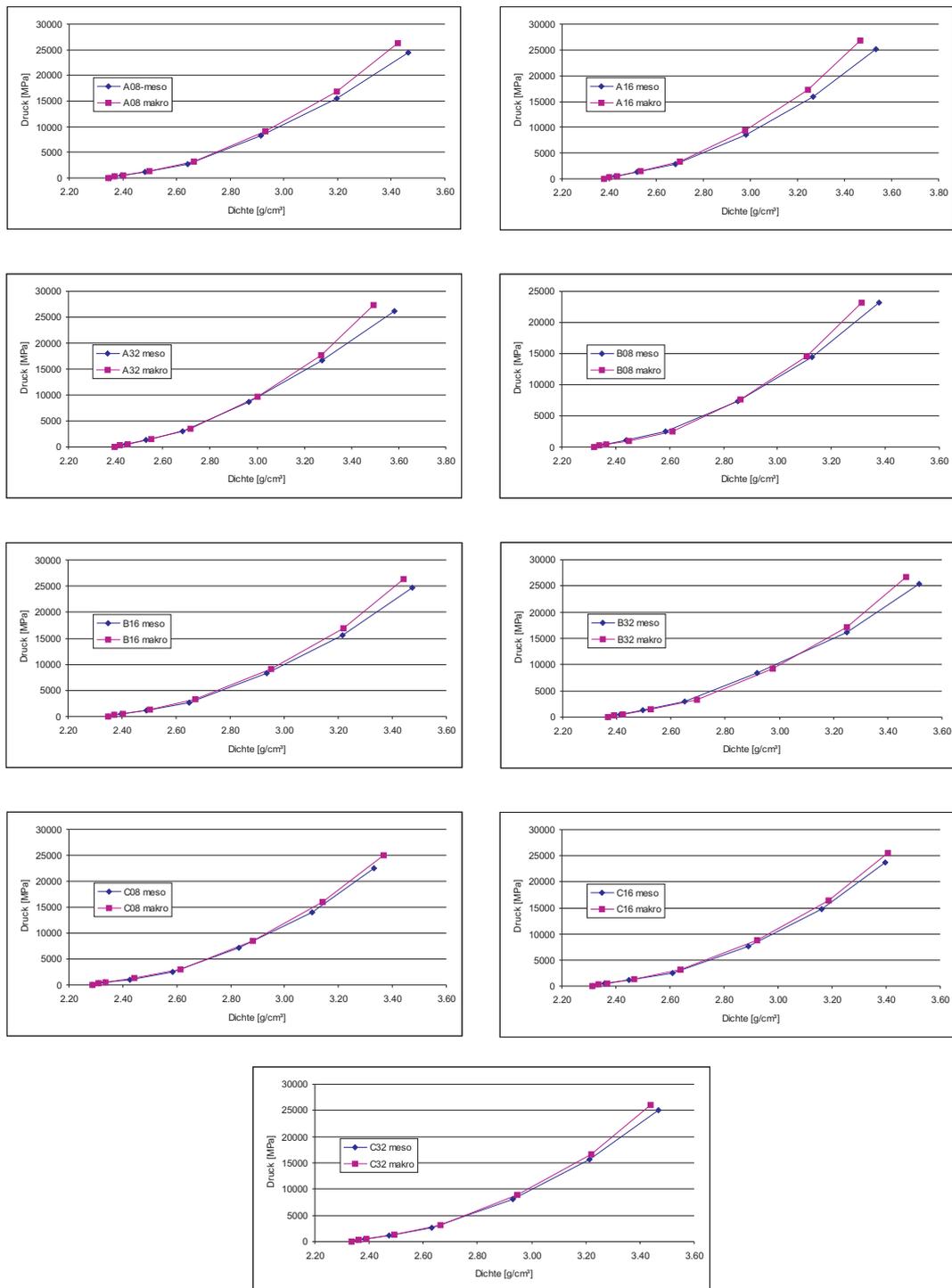


Abbildung 6.23: Werkstoffsimulation; Vergleich der meso- und makromechanischen Simulationen zur Bestimmung der Zustandsgleichung

Die Ergebnisse der mesomechanischen Simulationsreihen für die unterschiedlichen Sieblinien sind in Abbildung 6.23 den makromechanischen Ergebnissen gegenübergestellt.

Aus der Abbildung wird deutlich, dass die Druck-Dichte-Beziehungen der meso- und makromechanischen Materialbeschreibungen bis zu einem Druck von ca. 10 GPa praktisch deckungsgleich sind und erst bei höheren Drücken von einander abweichen. Bis zu diesem Druck ist die makromechanische Beschreibung jedoch geeignet, das aus den mesomechanischen Simulationen bestimmte volumetrische Materialverhalten des Betons nahezu exakt abzubilden. Da Drücke  $> 10$  GPa zudem nur sehr selten auftreten, z.B. direkt unterhalb der Ladung bei einer Kontaktdetonation, und der Bereich bis 10 GPa die meisten Anwendungsfälle abdeckt, kann dieses Ergebnis als großer Fortschritt gewertet werden. Es ermöglicht eine genaue, lediglich auf der Betonzusammensetzung basierende Abschätzung der Zustandsgleichung verschiedenartiger normalfester Betone und macht somit sowohl teure Experimente als auch aufwendige numerische Simulationen für die meisten Anwendungen überflüssig. Erst bei Drücken  $> 10$  GPa zeigt sich ein, im Vergleich zu den mesomechanischen Simulationen, steiferes Verhalten des makromechanisch beschriebenen Betons. Dies kann bei allen Sieblinien beobachtet werden.

Es ist daher anzunehmen, dass die Näherung der polynomialen Zustandsgleichung des vollständig kompaktierten Materials, insbesondere im Bereich der Glieder höherer Ordnung, Ungenauigkeiten aufweist. Diese Aussage basiert jedoch auf der Annahme, dass die mesomechanische Simulation die genaueren Ergebnisse liefert. Da die mesomechanische Simulation allerdings nur für einen Bereich bis ca. 7 GPa validiert ist, kann dies nicht mit Sicherheit festgestellt werden.

Zur Vereinfachung dieser teilweise aufwendigen Berechnungen wurde das gesamte Verfahren (einschließlich des Diagramms in Abbildung 5.7) in eine MICROSOFT EXCEL-Umgebung programmiert. Die Eingabe-Oberfläche dieses Programms ist in Abbildung 6.24 dargestellt. Diese Automatisierung bietet eine deutliche Zeitersparnis bei der Bestimmung der zur vollständigen Beschreibung der Zustandsgleichung notwendigen Parameter. Die physikalischen Eigenschaften aller wichtigen Bestandteile des Betons sind individuell an den jeweils betrachteten Beton anpassbar. Dies ermöglicht eine maximale Flexibilität bei der Parameterabschätzung für unterschiedliche Betone. Die zusätzlich angegebenen Standardwerte (default values) geben darüber hinaus einen Anhalt zur Abschätzung unbekannter Materialkenngrößen. Dies ermöglicht die Anwendung der Methode, wenngleich unter Verringerung der Genauigkeit, auch ohne genaue Kenntnis der Materialkennwerte der mesoskopischen und mikroskopischen Bestandteile des betrachteten Betons.

Dies berührt jedoch nicht die grundsätzliche Forderung nach entsprechenden Grundkenntnissen in diesem Bereich. Zwar werden die Eingaben anhand von Plausibilitätskontrollen während des Berechnungsvorgangs geprüft, jedoch führen lediglich Eingaben außerhalb des Definitionsbereichs (z.B. w/z-Wert  $\leq 0$ ) zum Abbruch des Programms.

Die Anwendung der Methode (und somit auch des Programms) ist, wie bereits in Kapitel 5 erläutert, auf den Bereich von "Normalbeton" begrenzt. Das volumetrische Materialverhalten hochgradig poröser Betone einerseits, sowie hochfester Beton andererseits kann somit nicht gesichert abgeschätzt werden.

**p- $\alpha$  EoS parameters for concrete**

Input	water / cement ratio [-]	water requirement [kg/m <sup>3</sup> ]	aggregate density [g/cm <sup>3</sup> ]	Calculate						
	0.4	180	2.627							

Input	cement density [g/cm <sup>3</sup> ]	sound speed in aggregates [m/s]	cement gel density [g/cm <sup>3</sup> ]	sound speed in cement gel [m/s]	cement gel density (compacted) [g/cm <sup>3</sup> ]	sound speed in cement gel (compacted) [m/s]	slope S of water [-]	slope S of cement gel [-]	slope S of aggregate material [-]	air voids (voulme fraction) [-]	
	3.100	3750	2.440	3217	3.004	3727	1.389	1.339	1.143	0.020	
	3.100	3750	2.440	3217	3.004	3727	1.389	1.339	1.143	0.020	default values

volume fractions f [-]					
$f_{\text{aggregate}}$	$f_{\text{cement gel}}$	$f_{\text{gel pores}}$	$f_{\text{air voids}}$	$f_{\text{capillary pores}}$	$f_{\text{unhydrated cement}}$
0.65484	0.24161	0.07248	0.03106	0.00000	0.00000

Parameter output	equation of state parameters (p-alpha)				
	$\rho_{\text{por}}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$c_{\text{p,por}}$ [m/s]	$\rho_{\text{ref}}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$c_{\text{b,comp}}$ [m/s]	S [-]
	2.382	3351	2.579	3567	1.204

equation of state parameters (polynomial)					
A_1 [GPa]	A_2 [GPa]	A_3 [GPa]	B_0 [-]	B_1 [-]	T_2 [GPa]
32.824	40.883	17.484	1.408	1.408	32.824
					T_1 [GPa]
					0.000

error messages

Abbildung 6.24: Abschätzung der EoS-Parameter; Eingabe-Oberfläche des auf Kapitel 5 basierenden Programms

## 6.6 Zusammenfassung

In Kapitel 6 wurde, basierend auf einem Ansatz von RIEDEL [233] die Bestimmung der Zustandsgleichung mittels mesomechanischer Werkstoffsimulation untersucht. Mit einem speziell entwickelten Programm wurden mesomechanische Körper mit zufälliger Verteilung der Zuschlagskörner erzeugt und in den Hydrocode AUTODYN importiert. Dort wurden in Werkstoffsimulationen Druckwellen unterschiedlicher Intensität in den Körpern eingebracht, die Materialantwort des "numerischen Betons" ausgewertet und die Zustandsgleichung bestimmt. Dabei konnte, nicht zuletzt aufgrund der verbesserten Materialbeschreibung des Zementsteins, eine sehr gute Übereinstimmung mit den Experimentaldaten unterschiedlicher Betonmischungen festgestellt werden.

In den insgesamt über 500 numerischen Simulationen wurde zudem, neben der Untersuchung verschiedener Einflussfaktoren wie beispielsweise das Festigkeitsmodell und die Kornverteilung, auch erstmals die Zustandsgleichung von Stahlfaserbeton

aus Werkstoffsimulationen bestimmt. Dazu wurde das Programm zur Generierung der mesomechanischen Körper auf die Erzeugung von Stahlfasern erweitert. Anhand der so erzeugten Stahlfaserbetonkörper konnte gezeigt werden, dass die Zugabe eines geringen Anteils an Stahlfasern ( $\leq 3.0$  Vol.-%) keinen wesentlichen Einfluss auf die  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung und das Kompaktionsverhalten des Betons hat. Es kann angenommen werden, dass eine um den Dichteunterschied zwischen Beton und Stahlfaserbeton verschobene HUGONIOT-Kurve eines entsprechenden Betons ohne Stahlfasern das volumetrische Materialverhalten des Stahlfaserbetons in guter Näherung abbildet.

Abschließend wurde die Anwendbarkeit der zur Beschreibung des Zementsteins verwendeten volumenbasierten Mischregel zur homogenen Beschreibung des Betons auf Ebene der Makromechanik untersucht. Dabei zeigte sich, dass mit diesem Ansatz das volumetrische Materialverhalten des Betons für die meisten Anwendungsfälle im Bereich des Bauwesens gut abgeschätzt werden kann. Für diese Bereiche kann somit eine vergleichsweise einfache Tabellenkalkulation, bei der lediglich die Betonzusammensetzung als Eingangsgröße dient, aufwendige Experimente bzw. umfangreiche numerische Simulationen ersetzen.

# Kapitel 7

## Untersuchung von Festigkeit und Schädigung in Werkstoffsimulationen

### 7.1 Allgemeines

In "normalfestem" Beton gilt die Verbundzone zwischen dem (Grob-)Zuschlag und der Zementmatrix, die so genannte *Interfacial Transition Zone (ITZ)*, als das schwächste Glied des Betons. Aus statischen Versuchen ist bekannt, dass die Rissbildung in dieser Zone beginnt und sich entlang der Korngrenzen in die Matrix (= Zementleim bzw. Zementstein mit Feinsand) ausbreitet [30]. Die ITZ hat daher maßgeblichen Einfluss auf die Schädigungsentstehung und -evolution. Dies legt nahe, in einem mesomechanischen Modell zur Untersuchung von Festigkeiten und Schädigungsprozessen zusätzlich auch die ITZ diskret abzubilden.

In diesem Kapitel wird daher zunächst umfassend die numerische Modellbildung zur konstitutiven Beschreibung der ITZ erläutert, was einen Schwerpunkt dieses Kapitels darstellt. Zur Überprüfung des Modells werden anschließend, aufbauend auf den Ergebnissen umfangreicher Voruntersuchungen, quasi-statische Zug- und Druckversuche simuliert.

Im darauf folgenden Abschnitt werden Simulationen mit wechselnder Lastrichtung durchgeführt. Ziel dabei ist die Bestimmung der Restzugfestigkeit von Beton nach vorhergehender Druckbelastung. Dazu wird der aus der Literatur verfügbare experimentell bestimmte Datensatz durch numerische Ergebnisse so erweitert, dass funktionale Zusammenhänge abgeleitet werden können.

Anschließend wird in weiterführenden numerischen Untersuchungen das Zugbruchverhalten des Betons bei unterschiedlichen Verzerrungsraten betrachtet.

Abschließend werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und Anforderungen an ein neu zu entwickelndes Materialmodell zur makroskopischen Beschreibung von Beton definiert.

## 7.2 Modellbildung der Interfacial Transition Zone (ITZ)

### 7.2.1 Entstehung und Charakteristik

Die ITZ entsteht durch "innere Blutung" (erhöhter Wasser/Zement-Wert) des Betons [119] an der Grenze zu den Zuschlagskörnern, was eine Ausfällung größerer  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  Kristalle in gerichteter Orientierung und eine höhere Porosität nach der Hydratation [228] zur Folge hat. Dieses Phänomen ist auch als "wall effect" bekannt (vgl. z.B. [30], [249] und [211]). Die in Abbildung 7.1 dargestellte Verbundzone zwischen Zuschlag und Matrix wurde bereits von einer Vielzahl von Wissenschaftlern (z.B. in [13], [30], [108], [143]) untersucht. Dabei konnte festgestellt werden, dass die Verbundeigenschaften zwischen Zuschlag und Zementleim von einer großen Zahl von Faktoren beeinflusst werden, von denen die wichtigsten in Tabelle 7.1 unter Angabe exemplarischer Literaturstellen zusammengefasst sind.

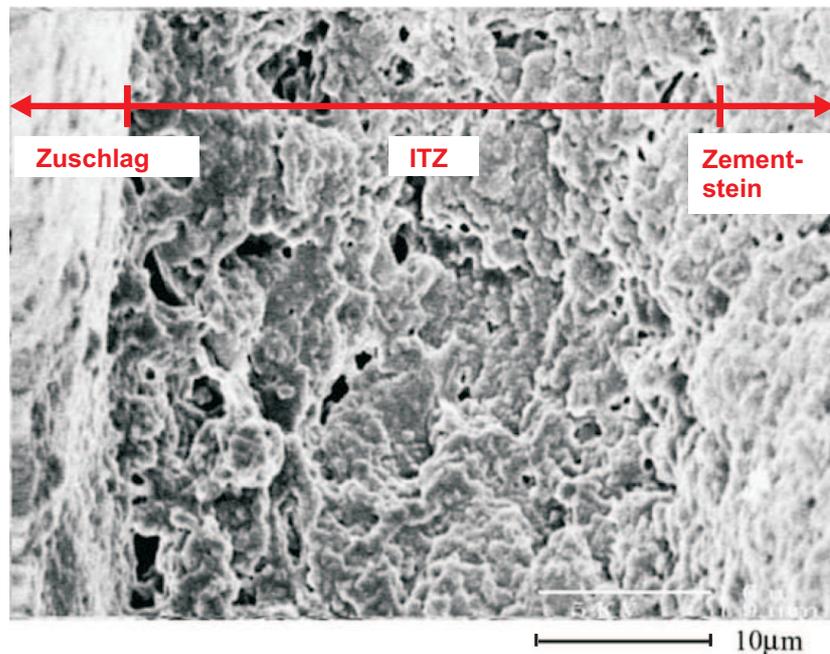


Abbildung 7.1: Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme der Mikrostruktur in der Verbundzone [132]

So zeigt Flußkies beispielsweise aufgrund seiner glatten Oberfläche schlechtere Verbundeigenschaften als gleichartiges gebrochenes Zuschlagsmaterial [108]. Auch die Reaktionsfähigkeit des Zuschlags zeigt einen deutlichen Einfluss auf den Verbund. Bei Zuschlägen aus Quarz kommt es zu chemischen Reaktionen mit dem

Zement, was zu einem besseren Verbund führt als zwischen Granit und Zement [99]. Ferner verbessert sich der Verbund bei einem niedrigeren Wasser/Zement-Wert (w/z-Wert), da dadurch die Ausfällung der  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  Kristalle verringert und deren einheitliche Orientierung behindert wird. Gleiches gilt für die Zugabe von Betonzusätzen wie Flugasche und Fließmittel [119].

In Versuchen von TASONG ET AL. [263] zeigte sich über die Oberflächenbeschaffenheit der Zuschläge hinaus auch eine Abhängigkeit der Verbundfestigkeit von der Festigkeit der Zuschläge.

Zudem ist auch die Interaktion benachbarter Zuschlagskörner zu berücksichtigen. So wurde in Experimenten unter Laborbedingungen festgestellt, dass die Verbundfestigkeit eines einzelnen Zuschlagskorns sinkt, wenn sich weitere in dessen Nähe befinden (vgl. [13]).

Tabelle 7.1: Einflußfaktoren auf die Verbundzone zwischen Zuschlag und Matrix

Oberflächentextur des Zuschlags	[99], [108], [215]
Chemische Zusammensetzung des Zuschlags	[264], [259], [143]
Wasser/Zement-Wert des Betons	[289], [215], [4]
Betonzusätze (Fließmittel, Flugasche, etc.)	[225], [211], [42], [146]
Mechanische Eigenschaften des Zuschlags	[263], [145], [228]
Benachbarte Zuschlagskörner	[64], [13]

Die mechanischen Eigenschaften der Verbundzone zwischen Zementmatrix und Zuschlag hängen in hohem Maße von der komplexen Interaktion der beschriebenen Einflußfaktoren ab (vgl. [30]). Ein direkter funktionaler Zusammenhang mit am Beton messbaren Kenngrößen wie beispielsweise der Betondruckfestigkeit konnte bis heute nicht festgestellt werden. Dementsprechend finden sich in der Literatur lediglich qualitative Aussagen bezüglich der ITZ. Für die Materialmodellierung ist jedoch eine quantitative Bestimmung der Steifigkeiten und Festigkeiten zwingend erforderlich. Im Folgenden werden daher die bekannten qualitativen Zusammenhänge beschrieben und die für die Modellbildung erforderlichen Materialparameter daraus abgeleitet.

Den Betrachtungen wird ein runder Zuschlag zugrunde gelegt, da dieser in der überwiegenden Zahl der Fälle zur Herstellung von Normalbeton verwendet wird.

Die Dicke der Verbundzone wird in der Literatur je nach Betonart mit 15 bis 100  $\mu\text{m}$  beschrieben. Bei normalfestem Beton mit rundem Zuschlag kann der hinsicht-

lich der mechanischen Eigenschaften relevante Bereich der ITZ auf 35-50  $\mu\text{m}$  um die Zuschlagsgrenze herum beschränkt werden (vgl. [249]). Die Größe dieser Zone ist dabei unabhängig von der Größe des Zuschlagskorns [13].

Ein für die mechanischen Eigenschaften in der Verbundzone entscheidender Parameter ist die im Vergleich zum Hauptteil des Matrixmaterials (Zementleim) erhöhte Porosität. Der Porositätsgradient innerhalb der ITZ ist in Abbildung 7.2 links schematisch dargestellt.

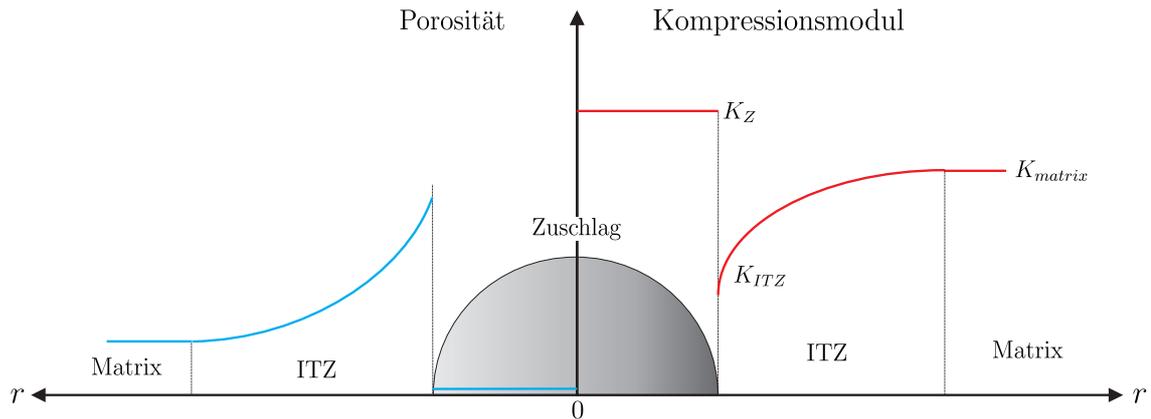


Abbildung 7.2: Qualitative Darstellung der Porosität und des Kompressionsmoduls in der ITZ

Die elastischen Moduln des Materials innerhalb der Verbundzone verhalten sich, wie in Abbildung 7.2 rechts exemplarisch für den Kompressionsmodul gezeigt, näherungsweise umgekehrt proportional zum Porositätsgradienten.

Da jedoch bei der diskreten Modellierung einer Geometrie jeder Zelle feste Materialeigenschaften zugewiesen werden müssen, d.h. eine funktionale Beschreibung innerhalb einer Zelle nicht möglich ist, werden die Materialeigenschaften in der ITZ als homogen angenommen.

Der in Abbildung 7.3 dargestellte funktionale Verlauf der Porosität der ITZ in Normalbeton mit unterschiedlichen Zuschlägen wurde durch mehrere Forscher quantitativ beschrieben (vgl. z.B. [249], [66]) und wird nach GARBOCZI und BENTZ [88] mit

$$o_{ITZ} = 0.1 + 0.25 e^{-r/10} \quad (7.1)$$

gut angenähert.

Das Verhältnis der Porosität der ITZ und des Matrixmaterials kann nun unter Verwendung von Gleichung (7.1) aus dem Verhältnis der Integrale der Porositäten über den Radius bestimmt werden:

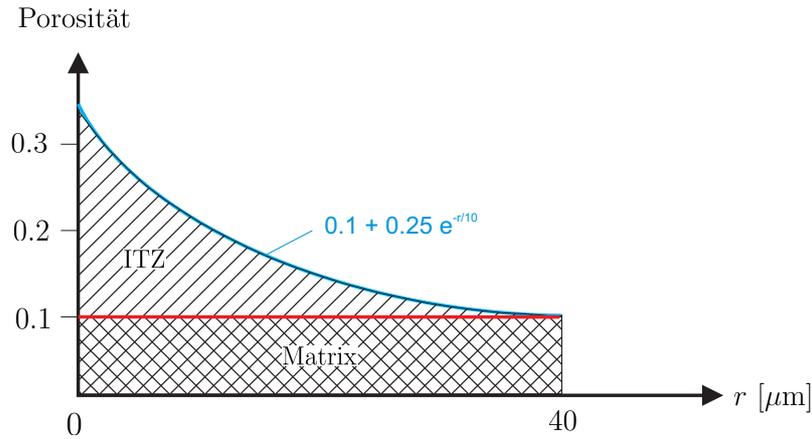


Abbildung 7.3: Porosität der ITZ und des Matrixmaterials in Abhängigkeit von der Entfernung vom Zuschlag

$$\frac{o_m}{o_{ITZ}} = \frac{\int_0^r o_m(r) dr}{\int_0^r o_{ITZ}(r) dr} \quad \text{mit} \quad r \in [0; 40]$$

$$\frac{o_m}{o_{ITZ}} = \frac{\int_0^{40} 0.1 dr}{\int_0^{40} 0.1 + 0.25 e^{-r/10} dr} = \frac{4}{6.454} = 0.62 . \quad (7.2)$$

### 7.2.2 Zustandsgrößen der ITZ

Zur Beschreibung des volumetrischen Materialverhaltens des ITZ-Materials bis zur vollständigen Kompaktion wird eine  $p - \alpha$ -Zustandsgleichung zugrunde gelegt. Da eine experimentelle Bestimmung der HUGONIOT-Kurve des ITZ-Materials nicht möglich ist, ist es erforderlich, die Parameter der Zustandsgleichung abzuschätzen.

Auf Grundlage der Annahme eines homogenen Materials geben HASHIN und MONTEIRO in [119] analytische Ansätze zur Abschätzung des Kompressionsmoduls. Aus den Gleichungen

$$K_e = K_{ITZ} + \frac{f_z/(f_m + f_z)}{1/(K_z - K_{ITZ}) + [3f_{ITZ}/(f_{ITZ} + f_z)]/(3K_m + 4G_m)} \quad (7.3)$$

und

$$K^* = K_m + \frac{f_m + f_z}{1/(K_e - K_m) + 3f_m/(3K_m + 4G_m)} \quad (7.4)$$

mit  $f_{m,z,ITZ}$  Volumenanteil des Matrixmaterials, des Zuschlags bzw. der ITZ im Beton,

$K_{m,z,ITZ}$	Kompressionsmodul der Einzelkomponenten,
$K_e$	äquivalenter Kompressionsmodul für Zuschlag und ITZ,
$K^*$	Kompressionsmodul des Kompositmaterials (Beton),
$G_m$	Schubmodul des Matrixmaterials,

kann mittels Iteration der mittlere Kompressionsmodul  $K_{ITZ}$  der Verbundzone bestimmt werden.

Die Gleichungen (7.3) und (7.4) erfordern die analytische Bestimmung der Volumenanteile der einzelnen Komponenten. Diese erfolgt auf der Grundlage der jeweiligen Sieblinie des Betons. Dabei ergibt sich das Gesamtvolumen der ITZ aus der Summe der Zonen um die Zuschlagskörner der einzelnen Korngruppen  $j$ . Hierbei wird vereinfachend der jeweils mittlere Radius  $r_{m,j}$  zur Berechnung verwendet:

$$\frac{V_{ITZ}}{V_z} = \sum_j R_j \cdot f_j \cdot \frac{1}{r_{m,j}^3} \quad \text{mit} \quad R_j = (r_{m,j} + t_{ITZ})^3 - r_{m,j}^3 \quad (7.5)$$

Dabei bezeichnen in Gleichung (7.5)  $V_z$  das Gesamtvolumen des Zuschlags,  $f_j$  den Volumenanteil der Korngruppe  $j$  und  $t_{ITZ}$  die Dicke der Verbundzone. Der Volumenanteil  $f_{ITZ}$  der ITZ im Beton ergibt sich schließlich aus dem für die einzelnen Sieblinien errechneten Volumenanteil  $f_z$  des Zuschlags im Beton.

Dieses Vorgehen erfordert jedoch eine genaue Kenntnis der Betonzusammensetzung und beinhaltet einen nicht unerheblichen Rechenaufwand. Zur Anwendung in der Praxis ist es daher sinnvoll,  $K_i$  aus einfach zu bestimmenden Materialeigenschaften des Betons abzuleiten.

So zeigten HASHIN und MONTEIRO anhand von Versuchen und Berechnungen mit den Gleichungen (7.3) und (7.4), dass der Kompressionsmodul der Verbundzone  $K_i$ , bei Verwendung eines gemischten Zuschlags wie beispielsweise Flußkies, mit 70% der Matrixsteifigkeit  $K_m$  gut angenähert werden kann.

Die poröse Dichte  $\rho_{ITZ}$  wird mittels volumetrischer Mischregel analog der Dichte des Zementsteins in Abschnitt 5.5.1 ermittelt. Dabei ist jedoch zusätzlich die in der ITZ erhöhte Porosität ( $\rho_{ITZ}/\rho_m = 1.61$ ) zu berücksichtigen; zudem ist zu beachten, dass das Matrixmaterial einem Zementstein ohne Sandanteil entspricht.

$$\rho_{ITZ} = \frac{f_{ZG} \cdot \rho_{ZG} + 1.61 \cdot (f_{GP} \cdot \rho_w + 0.5 \cdot f_{KP} \cdot (\rho_w + \rho_l) + f_{LP} \cdot \rho_l)}{f_{ZG} + 1.61 \cdot (f_{GP} + f_{KP} + f_{LP})} \quad (7.6)$$

Die Volumenanteile  $f_i$  in Gleichung (7.6) ergeben sich dabei in Abhängigkeit vom w/z-Wert aus dem Diagramm in Abbildung 5.7.

Dementsprechend lassen sich die Volumenanteile bei w/z = 0.51 zu  $f_{ZG} = 0.55$ ,  $f_{GP} = 0.16$ ,  $f_{KP} = 0.22$  und  $f_{LP} = 0.07$  bestimmen.

Die poröse Wellengeschwindigkeit  $c_{B,ITZ}$  kann entweder ebenfalls anhand der volumetrischen Mischregel oder aus der porösen Dichte und dem genäherten Kompressionsmodul mittels Gleichung (3.4) berechnet werden. Die Abweichung zwischen den beiden Verfahren beträgt für den in dieser Arbeit betrachteten Zementleim weniger als 0.1 %.

$$c_{B,ITZ} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{0.7 \cdot K_m}{\rho_{ITZ}}}$$

$$c_{B,ITZ} = \frac{f_{ZG} \cdot c_{B,ZG} + 1.61 \cdot (f_{GP} \cdot c_w + 0.5 \cdot f_{KP} \cdot (c_w + c_l) + f_{LP} \cdot c_l)}{f_{ZG} + 1.61 \cdot (f_{GP} + f_{KP} + f_{LP})} \quad (7.7)$$

Der Druck am HUGONIOT-Elastic-Limit ( $p_{HEL}$ ) muss, aufgrund der gerichteten kristallinen Gefügestruktur der ITZ, deutlich niedriger angenommen werden als im Matrixmaterial. Ferner ist nach dem Versagen der ersten Kristalle ein "progressiver Kollaps" auf Mikroebene zu erwarten, was dazu führt, dass auch der zur vollständigen Kompaktion erforderliche Druck  $p_{comp}$  ebenfalls, im Vergleich zum Matrixmaterial, niedrig anzunehmen ist.

Dementsprechend werden  $p_{HEL}$  und  $p_{comp}$  für die ITZ im Verhältnis der Porositäten in Gleichung (7.2) verringert:

$$p_{HEL,ITZ} = 0.3 \text{ [GPa]} \cdot 0.62 = 0.186 \text{ [GPa]} . \quad (7.8)$$

$$p_{comp,ITZ} = 5 \text{ [GPa]} \cdot 0.62 = 3.1 \text{ [GPa]} . \quad (7.9)$$

Der Kompaktionsexponent  $N$  wird analog dem Zementstein zu 3 angenommen.

Zur Beschreibung des kompaktierten ITZ-Materials wird eine polynomiale Zustandsgleichung gewählt, deren Parameter wie in Abschnitt 5.5.1 aus der kompaktierten Dichte  $\rho_{ref}$ , der kompaktierten Wellengeschwindigkeit  $c_{B,comp}$  und der Steigung der  $U_s$ - $u_p$ -Beziehung  $S$  bestimmt werden. Die Abschätzung dieser Eingangsgrößen erfolgt analog der Bestimmung der Größen des Zementsteins in den Gleichungen (5.8), (5.10) und (5.11), jedoch wie bei der porösen Dichte ohne Sandanteil und unter Berücksichtigung des aufgrund der ursprünglichen Porosität (Faktor 1.61) erhöhten Wasseranteils. Die Berechnung der Dichte der ITZ ist exemplarisch in Gleichung (7.10) dargestellt.

$$\rho_{ref,ITZ} = \frac{f_{m,comp} \cdot \rho_{ref,m} + 1.61 \cdot (f_{GP} \cdot \rho_w + 0.5 \cdot f_{KP} \cdot \rho_w)}{f_{m,comp} + 1.61 \cdot (f_{GP} + 0.5 \cdot f_{KP})} \quad (7.10)$$

Da die Zusammensetzung des Matrixmaterials lediglich vom w/z-Wert abhängt, sind die Volumenanteile der Einzelkomponenten und daher die Materialparameter der ITZ unabhängig von der Sieblinie der Betonmischung.

Entsprechend den Näherungen in Gleichung (5.12) können somit auch die Parameter der polynomialen Zustandsgleichung der ITZ bestimmt werden.

### 7.2.3 Festigkeitsmodell der ITZ

Die in Abschnitt 7.2.1 beschriebene erhöhte Porosität in der Verbundzone beeinflusst neben den Steifigkeiten auch die Festigkeit des dort vorherrschenden Materials.

Da die Beschreibung der Festigkeiten des ITZ-Materials für die Modellbildung von großer Bedeutung ist, sollen diese nun näher betrachtet werden. Dazu wird nach einer Näherung des Schubmoduls zunächst die Verbundzugfestigkeit abgeschätzt. Anschließend werden, unter der vereinfachenden Annahme eines funktionalen Zusammenhangs zwischen den Festigkeiten, die Verbundschub- und Verbunddruckfestigkeit abgeleitet.

#### Schubmodul

Die Abschätzung des Schubmoduls kann anhand der Betrachtung als räumliches, rotationssymmetrisches Randwertproblem erfolgen. Dabei wird vereinfachend von einem mittleren deviatorischen Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

ausgegangen.

Die Lösung eines derartigen Problems ist ausführlich in [179] beschrieben. Die Bestimmungsgleichungen ergeben sich dabei zu:

$$\begin{aligned} u_r &= \beta \left[ 12\nu\psi^2 A + 2B + \frac{2(5-4\nu)}{\psi^3} C - \frac{3}{\psi^5} D \right] rP \quad , \\ u_\theta &= \beta \left[ (7-4\nu)\psi^2 A + B + \frac{2(1-2\nu)}{\psi^3} C + \frac{D}{\psi^5} \right] r\dot{P} \quad , \\ u_{rr} &= 2\beta G \left[ -6\nu\psi^2 A + 2B - \frac{4(5-\nu)}{\psi^3} C + \frac{12}{\psi^5} D \right] rP \quad , \\ u_{r\theta} &= 2\beta G \left[ (7+2\nu)\psi^2 A + B + \frac{2(1+\nu)}{\psi^3} C - \frac{4}{\psi^5} D \right] r\dot{P} \quad . \end{aligned} \quad (7.12)$$

In Gleichung (7.12) bezeichnen  $\psi$  den auf den Radius des Zuschlagskorns normierten Radius  $r$ ,  $\nu$  die Poisson-Zahl und  $P$  das LEGENDRE-Polynom.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  sind die unbekanntenen Konstanten des jeweiligen Materials. Das entstehende Gleichungssystem kann nur numerisch gelöst werden.

Auf diesem analytischen Ansatz aufbauend entwickelten LI, ZHAO & PANG in [175] einen funktionalen Zusammenhang der Einzel-Moduln und dem Schubmodul des Betons:

$$G^* = 0.265G_m f_m + \frac{[0.735f_m + 0.662(f_{ITZ} + f_z)]^2 G_m G_{ITZ} G_z}{0.735f_m G_{ITZ} G_z + 0.662(f_{ITZ} G_m G_z + f_z G_m G_{ITZ})} \quad (7.13)$$

mit  $f_{m,z,ITZ}$  Volumenanteil des Matrixmaterials, des Zuschlags bzw. der ITZ im Beton,  
 $G_{m,z,ITZ}$  Schubmodul der Einzelkomponenten,  
 $G^*$  Schubmodul des Kompositmaterials.

Auch für den Schubmodul der ITZ,  $G_{ITZ}$ , entwickelten HASHIN und MONTEIRO einen Näherungswert. So kann dieser gemäß [119] zu 50% des Matrix-Schubmoduls  $G_m$  angenommen werden.

### Verbundzugfestigkeit

HSU und SLATE [143] führten bereits 1963 mit knapp 1000 Versuchen mit unterschiedlichen Zuschlägen, w/z-Werten, Probekörperfeuchtigkeiten und Matrixzusammensetzungen eine der umfangreichsten Untersuchungen zur Verbundzugfestigkeit zwischen Zuschlag und Matrix durch. Da bei diesen Versuchen u.a. festgestellt wurde, dass die gesägten Oberflächen im Versuch die Oberflächen "handelsüblicher" Zuschläge relativ korrekt abbilden (Abweichung für die meisten Fälle < 15 %, im Versuch < 6 %), werden diese Versuche für die Entwicklung der funktionalen Abschätzung der Zugfestigkeit  $f_{t,ITZ}$  herangezogen.

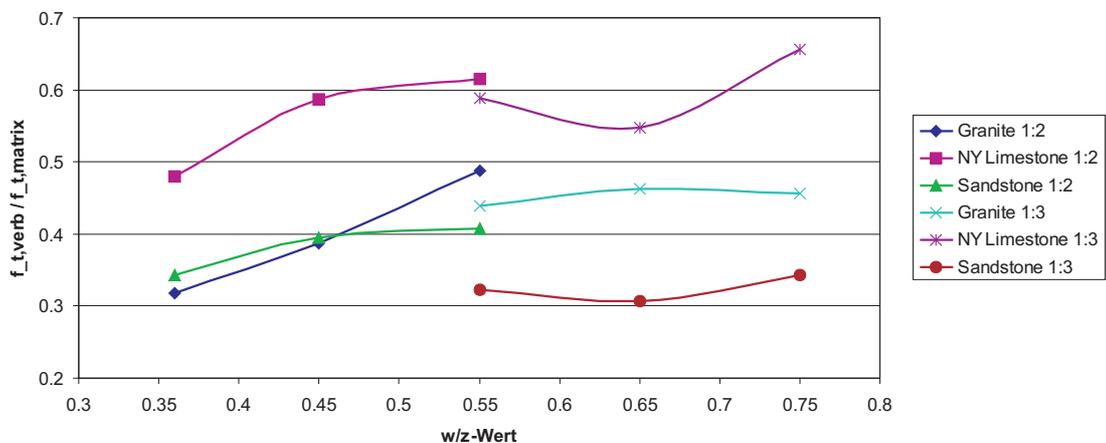


Abbildung 7.4: Relative Verbundzugfestigkeit unterschiedlicher Zuschläge bei variierendem w/z-Wert nach Versuchen aus [143]

Abbildung 7.4 zeigt das Verhältnis der Verbundzugfestigkeit zur Matrixzugfestigkeit für verschiedene Zuschlagstoffe bei variierendem w/z-Wert und für unterschiedliche Zement/Sand-Verhältnisse des Matrixmaterials (Verhältniszahl hinter der Bezeichnung des Zuschlagsmaterials). Die Zuschläge "New York Limestone" und "Sandsto-

ne” repräsentieren dabei chemisch reaktive bzw. inerte Materialien und bilden somit Grenzwerte.

Ausgehend von dem zu ca. 0.1 bestimmten Verhältnis zwischen Zug- und Druckfestigkeit des Matrixmaterials lassen sich aus der Auswertung der Versuche folgende qualitative bzw. quantitative Aussagen ableiten:

- im für Normalbeton gebräuchlichen Bereich von  $w/z$  zwischen 0.4 und 0.65 ist der Einfluss des  $w/z$ -Werts gering
- das Verhältnis  $f_{t,ITZ}/f_{t,m}$  liegt innerhalb der Grenzen 0.3 und 0.65
- eine Erhöhung des Sandanteils im Matrixmaterial verringert das  $f_{t,ITZ}/f_{t,m}$  - Verhältnis nur geringfügig

Die Verbundzugfestigkeiten des Granits bei  $w/z = 0.36$  und  $0.45$  in Abbildung 7.4 aus den Versuchen von HSU und SLATE scheinen deutlich zu niedrig und werden auch in der Auswertung in [143] angezweifelt. Im Mittel aller Versuchsergebnisse ergibt sich jedoch ein Verhältniswert von 0.54. Untersuchungen zum Einfluss des Betonalters ( $> 28$  Tage) zeigten lediglich bei dem chemisch stark reaktiven New York Limestone eine Erhöhung der Verbundzugfestigkeit. Bei unbekannter Zuschlagszusammensetzung sollte daher zunächst von  $f_{t,ITZ}/f_{t,m} = 0.54$  ausgegangen werden.

### Verbundschubfestigkeit

Die reine Verbundschubfestigkeit der Verbundzone zwischen Zuschlag und Matrix bzw. Zementstein wurde bisher nur von wenigen Wissenschaftlern untersucht. AQUINO ET AL. [13] konnten jedoch anhand von umfangreichen Ausdrückversuchen zwei wesentliche qualitative Aussagen zum Einfluss verschiedener Faktoren auf die Schubfestigkeit der ITZ,  $f_{s,ITZ}$ , erarbeiten, die der folgenden Abschätzung zugrunde gelegt werden:

1. Feinzuschläge (Sandkörner) im Matrixmaterial haben keinen erkennbaren Einfluss auf die Verbundschubfestigkeit  $f_{s,ITZ}$ ,
2.  $f_{s,ITZ}$  ist unabhängig von der Größe des Zuschlags.

Zur quantitativen Abschätzung der Verbundschubfestigkeit wird daher ein vom Zuschlagsmaterial unabhängiger, linearer funktionaler Zusammenhang zwischen den einzelnen Festigkeiten angenommen.

Unter dieser Annahme lässt sich aus den Versuchsergebnissen in [13] und [143] für Indian Limestone der gesuchte Zusammenhang ableiten. Das Verhältnis der Verbundschubfestigkeit zur Verbundzugfestigkeit ergibt sich dabei zu

$$\frac{f_{s,ITZ}}{f_{t,ITZ}} = \frac{2.28 \text{ MPa}}{1.16 \text{ MPa}} = 1.97 \quad . \quad (7.14)$$

### Verbunddruckfestigkeit

Da das ITZ-Material auch unter Laborbedingung nicht in größerem Maßstab erzeugt werden, bzw. dessen Druckfestigkeit nicht direkt bestimmt werden kann, finden sich derzeit in der Literatur keine Versuche zur Bestimmung der reinen Druckfestigkeit des ITZ-Materials. Daher muss für deren Abschätzung ein theoretischer Ansatz gewählt werden.

In einem reinen Druckspannungszustand eines porösen Materials ist das Versagen mit dem Porenkollaps gekoppelt. Es kann daher angenommen werden, dass die Druckfestigkeit in einem umgekehrt proportionalen Zusammenhang mit der Porosität  $o$  des Materials steht. Unter dieser Bedingung kann die Druckfestigkeit des ITZ-Materials,  $f_{c,ITZ}$ , aus dem reziproken Verhältnis der Porosität der ITZ und des Matrixmaterials angenähert werden.

$$\frac{f_{c,ITZ}}{f_{c,m}} = \frac{o_m}{o_{ITZ}} = 0.62 \quad (7.15)$$

Somit sind die für die zur Beschreibung der Versagensfläche wesentlichen Materialkennwerte des ITZ-Materials näherungsweise bestimmt. Tabelle 7.2 fasst diese nochmals übersichtlich zusammen. Zur Modellierung des deviatorischen Material-

Tabelle 7.2: Zusammenfassung der Materialkennwerte der ITZ

Variable	Bedeutung	relativer Wert	Quelle
$G_{ITZ}$	Schubmodul	$0.5 \cdot G_m$	[119]
$f_{t,ITZ}$	Zugfestigkeit	$0.54 \cdot f_{t,m}$	[143]
$f_{s,ITZ}$	Schubfestigkeit	$1.97 \cdot f_{t,ITZ}$	[13] und [143]
$f_{c,ITZ}$	Druckfestigkeit	$0.62 \cdot f_{c,m}$	[88] und Gl. (7.15)

verhaltens der ITZ wird, wie bereits zur Beschreibung des Zementsteins, das in AUTODYN [53] implementierte Materialmodell RHT Concrete zugrunde gelegt und an die Eigenschaften der ITZ angepasst.

Die Überführung der statischen Materialeigenschaften in den dynamischen Bereich erfolgt durch die Berücksichtigung der im RHT-Modell beinhalteten verzerrungsra-tenabhängigen Festigkeitssteigerung nach C.E.B 187 [62].

Die Bestimmung der Parameter der ITZ-Fließfunktion erfolgt analog der des Zementsteins in Abschnitt 5.5.2. Als Eingangsparameter dienen hier die in Tabelle 7.2 zusammengefassten Festigkeiten und Moduln. Dabei wird für das "Hydrostatic Tensile Limit" (HTL) ebenfalls ein Verhältniswert von  $HTL = 0.9 \cdot f_t$  angenommen.

Ebenso werden der Meridianverhältnisparameter  $Q$  und der Parameter zur Beschreibung des druckabhängigen Übergangs von sprödem zu duktilem Materialverhalten übernommen.

Tabelle 7.3: Materialparameter des RHT-Modells zur Beschreibung der Interfacial Transition Zone

Parameter	Wert	Einheit
Schubmodul $G$	$0.5 G_m$	[GPa]
Druckfestigkeit $f_c$	$0.62 f_{c,m}$	[GPa]
rel. Zugfestigkeit $f_t/f_c$	0.087	[-]
rel. Schubfestigkeit $f_s/f_c$	0.17	[-]
Fließflächenparameter $A$	1.716	[-]
Fließflächenexponent $N$	0.55	[-]
Meridianverhältnis $Q$	0.68	[-]
Übergangsparameter spröde/duktil	0.01	[-]

### 7.3 Numerische Simulation von Zug- und Druckversuchen

Dynamisches Materialverhalten stellt, wie bereits erwähnt, grundsätzlich eine Erweiterung des statischen Materialverhaltens dar. Eine wesentliche Voraussetzung für die Untersuchung dynamischer Prozesse ist daher die Fähigkeit des numerischen Modells, die Materialantwort unter quasi-statischen Belastungen wiederzugeben. Daher werden zunächst die in [161] beschriebenen statischen Versuche von KUPFER numerisch untersucht. Diese Versuche sind aufgrund der relativ kleinen Probekörpergeometrie, der genau dokumentierten Zusammensetzung und Eigenschaften des Betons sowie der umfassenden Versuchsauswertung besonders zur numerischen Nachbildung im Rahmen dieser Arbeit geeignet.

In KUPFERS Versuchen wurden Druck- und Zugversuche an Betonplatten mit den Abmessungen Höhe x Breite x Tiefe = 200 x 200 x 50 mm durchgeführt. Die Rezeptur sowie die Sieblinie (Größtkorn 15 mm) des untersuchten Betons sind in [161] umfassend dokumentiert.

Zur Vermeidung einer behinderten Querverzerrung erfolgte die Lasteinleitung dabei über Stahlbürsten. Die Versuche wurden weggesteuert durchgeführt. Der Versuchsaufbau sowie die Auswertung der Ergebnisse sind ebenfalls in [161] ausführlich beschrieben.

Im Folgenden werden zunächst die durchgeführten Voruntersuchungen zur numerischen Nachbildung dieser Versuche beschrieben. In diesen Voruntersuchungen konnte eine Reihe von Erkenntnissen gewonnen werden, die für die numerische Umsetzung der oben beschriebenen Versuche auf mesomechanischer Modellebene von Bedeutung sind. Aufbauend auf den Voruntersuchungen werden die mesomechanischen Werkstoffsimulationen eines Zug- und eines Druckversuches beschrieben und die Ergebnisse diskutiert.

### 7.3.1 Voruntersuchungen

Im Rahmen umfangreicher Voruntersuchungen wurde versucht, die in [161] beschriebenen Probekörper dreidimensional und möglichst entsprechend ihrer realen Geometrie zu modellieren. Die in einem 32-Bit-System beschränkte maximale Zellenanzahl (max.  $10^6$ ) führt dabei jedoch zu wesentlichen Einschränkungen. Die geringe Ausdehnung der ITZ erfordert zur realitätsnahen Abbildung eine Zellgröße von  $\leq 50 \mu\text{m}$ . Dies ergäbe  $1.6 \cdot 10^{10}$  Zellen und ist daher, ungeachtet des Berechnungsaufwands, mit dem derzeit verfügbaren System nicht realisierbar. Dementsprechend wurde versucht, bei gleichzeitiger Vergrößerung der Elementierung, im numerischen Modell lediglich einen repräsentativen Ausschnitt der realen Probekörper abzubilden.

Gewählt wurde ein  $25 \times 25 \times 6.25 \text{ mm}$  großer Ausschnitt mit einer Netzfeinheit von  $200 \times 200 \times 200 \mu\text{m}$ . Daraus ergibt sich eine Zellenanzahl von  $4.8 \cdot 10^5$  Zellen. Das verwendete numerische Modell ist in Abbildung 7.5 grafisch dargestellt.

Abbildung 7.5 zeigt zudem die Lage der Auswertepunkte und die geometrischen und numerischen Randbedingungen des Modells. Die Lasteinleitung erfolgte weggesteuert anhand einer Geschwindigkeitsrandbedingung  $u$ . Gelagert wurde der Körper mittels einer verhinderten Verschiebung der unteren Netzknoten in  $y$ -Richtung. Deutlich erkennbar ist zudem, dass bei der Generierung des Körpers abgeschnittener Zuschlag in  $z$ -Richtung zugelassen wurde. Dies war erforderlich, da aufgrund der Skalierung des Körpers eine vollständige Platzierung größerer Körner in  $z$ -Richtung nicht mehr möglich war. Durch das Zulassen von abgeschnittenem Zuschlag in Richtung der  $z$ -Achse konnte dagegen die in [161] dokumentierte Sieblinie nahezu exakt eingehalten werden.

Die Bestimmung der Materialparameter erfolgte entsprechend dem in den Abschnitten 5.4, 5.5 und 7.2 beschriebenen Vorgehen. Die ermittelten und in den Voruntersuchungen verwendeten Materialparameter sind in Anhang D.4 übersicht-

lich zusammengefasst.

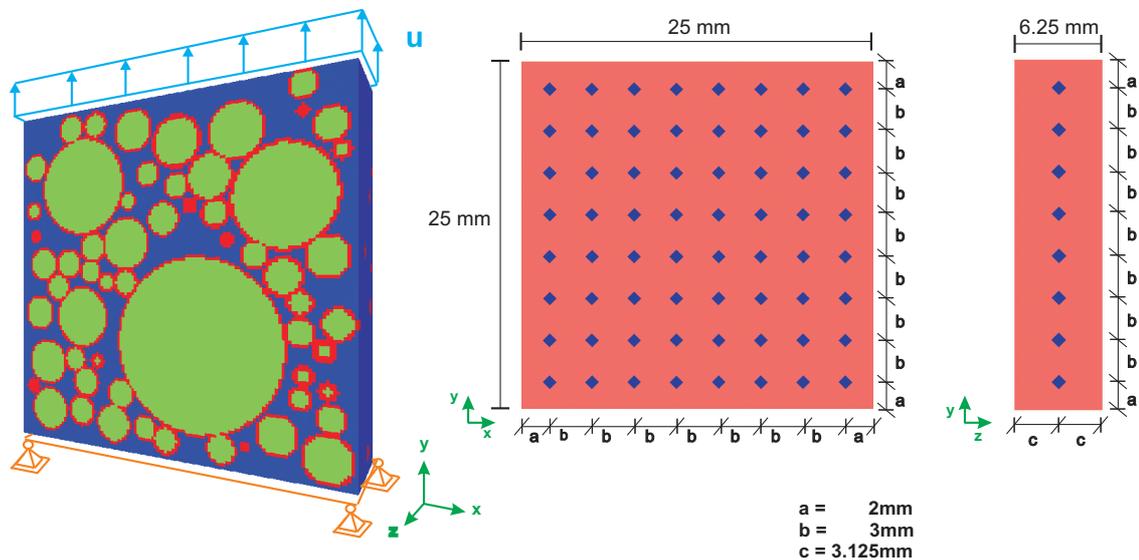


Abbildung 7.5: Numerisches Modell (3D) zur Simulation der KUPFER- Versuche in [161]

Insgesamt wurden im Rahmen der Voruntersuchungen sechs Zugversuche und vier Druckversuche mit unterschiedlicher Kornverteilung simuliert. Die Simulationen erfolgten mit einer Geschwindigkeitsrandbedingung  $u = 0.002$  m/s bei Zugversuchen ( $\dot{\epsilon} \approx 0.08$  s<sup>-1</sup>) und  $u = -0.004$  m/s bei Druckversuchen ( $\dot{\epsilon} \approx 0.16$  s<sup>-1</sup>). Damit ergab sich eine durchschnittliche Berechnungsdauer von 4 Wochen für einen Zug- und 8 Wochen für einen Druckversuch.

Abbildung 7.6 zeigt exemplarisch die numerischen Schädigungsbilder bei der Simulation eines Zug- und eines Druckversuches. Das Ergebnis des Zugversuchs entspricht dabei dem erwarteten Schädigungsbild mit einer einzelnen geschädigten Ebene durch den Probekörper. Auch die Simulation des Druckversuchs lieferte prinzipiell ein realistisches Schädigungsbild. Erwartet wurden mehrere geschädigte Ebenen parallel zur Lasttrichtung. Aufgrund der groben Diskretisierung greifen die Bereiche der ITZ um die Zuschlagskörner jedoch weitestgehend in einander, weshalb diese Schädigungsstruktur nur in Teilbereichen (z.B. rechts außen in Abbildung 7.6) erkennbar ist.

Die quantitative Auswertung der Simulationen zeigte dagegen eine durchweg erhebliche Unterschätzung der Versagensspannungen. So lagen bei der Simulation der Zugversuche die numerischen Ergebnisse im Mittel 25 % und bei den Druckversuchen sogar knapp 73 % unter den von KUPFER bestimmten Festigkeiten. Zudem verhielten sich die numerischen Probekörper weniger steif als die Proben im Experiment.

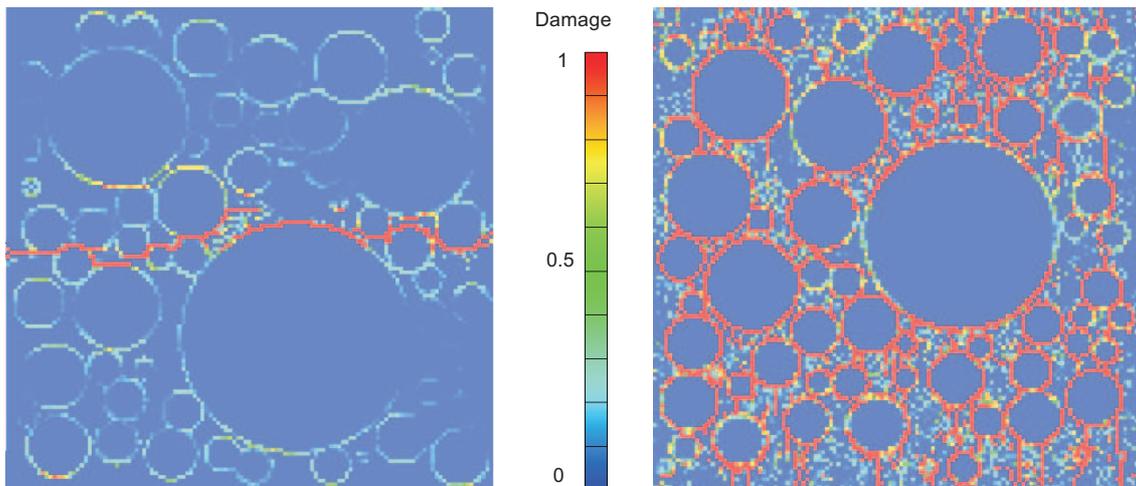


Abbildung 7.6: 3D-Simulation der einaxialen Versuche in [161]; links: Schädigung in einem Zugversuch, rechts: Schädigung in einem Druckversuch

Abbildung 7.7 stellt exemplarisch die Auswertung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen einer Zug- und einer Drucksimulation dar. Dabei wird das Materialverhalten des Betons zwar qualitativ wiedergegeben, jedoch werden auch die (insbesondere im Druckversuch erheblichen) Abweichungen vom Experiment deutlich.

In einer umfassenden Auswertung der numerischen Ergebnisse konnten die wesentlichen Ursachen für diese Abweichungen identifiziert werden. Dies sind:

1. die starke Heterogenität des numerischen Probekörpers,
2. der geringe Elementierungsgrad und
3. eine fehlende Anpassung der Materialparameter des Festigkeitsmodells der ITZ an das geometrische Modell.

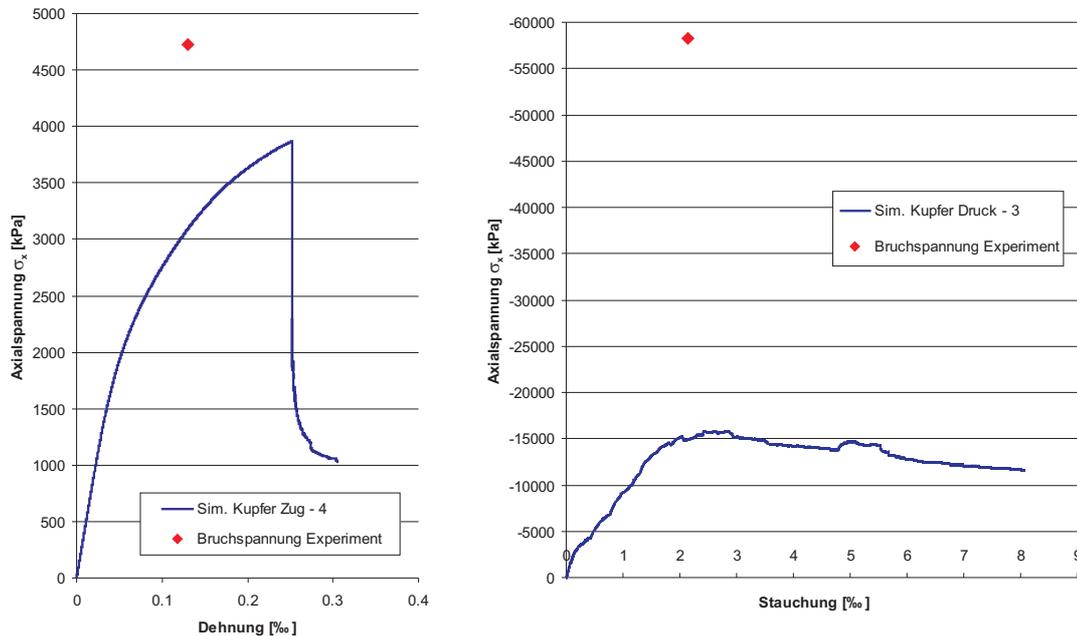


Abbildung 7.7: 3D-Simulation der einaxialen Versuche in [161]; links: Spannungs-Dehnungs-Diagramm, rechts: Spannungs-Stauchungs-Diagramm

### Zu 1:

Aufgrund der erforderlichen Skalierung der Körperabmessungen bei gleichbleibenden Korndurchmessern waren die numerischen Probekörper stark heterogen. Im Gegensatz dazu können die realen Probekörper als makroskopisch homogen betrachtet werden. KUPFER begründet die Wahl der verwendeten Probekörperabmessungen unter anderem mit dem Ziel, näherungsweise makroskopische Homogenität annehmen zu können. Während sich bei einaxialer Belastung eines homogenen Körpers ein nahezu gleichmäßiges Hauptspannungsfeld einstellt, kommt es in stark heterogenen Körpern aufgrund unterschiedlicher Steifigkeiten innerhalb des Körpers zu teilweise erheblichen lokalen Spannungskonzentrationen. So wurden in den Simulationen in einzelnen Gauges Spannungen bis zum sechsfachen der mittleren Spannung aufgezeichnet. Dies führt dazu, dass Schädigungsprozesse in den makroskopisch stark heterogenen numerischen Probekörpern bereits bei geringen Belastungen beginnen und die Körper früher versagen als die deutlich weniger heterogenen realen Probekörper.

In den meisten durchgeführten Simulationen mit Zugbelastung konnte festgestellt werden, dass die ITZ, die das Größtkorn umgab, vergleichsweise hohe Anteile an der Fläche der Versagensebene hatte. In diesen Simulationen war die ITZ um das Größtkorn zudem auch der Ausgangspunkt der Schädigungsinitiierung. Ein

ähnliches Verhalten konnte auch in den auf Druck beanspruchten Proben infolge Querkzugspannungen beobachtet werden. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Größtkorn den Bereich der höchsten Steifigkeit im Probekörper darstellte und somit hohe Spannungen in dieses Korn eingeleitet wurden. Der Einfluss des Größtkorns wird dabei insbesondere vor dem Hintergrund deutlich, dass dessen Volumen allein 15 % des gesamten Körpers bzw. 29 % des gesamten Grobzuschlags einnimmt. Damit ergab sich gleichzeitig auch ein relativ großer, durchgängig mit ITZ-Zellen belegter Bereich, der eine erhebliche Schwächung darstellte.

Die starke Skalierung und die daraus folgende starke Heterogenität der Probekörper begünstigten somit sowohl die Schädigungsinitiierung als auch eine beschleunigte Schädigungsevolution.

### Zu 2:

Aufgrund des gewählten Elementierungsgrads ist die Ausdehnung der ITZ im numerischen Probekörper etwa fünfmal so hoch wie die von SCRIVENER in [249] bestimmte mittlere Ausdehnung von  $40 \mu\text{m}$ . Da sich, wie auch in Abbildung 7.6 ersichtlich, die numerischen Schädigung ausbilden konnte, ohne dabei größere Bereiche des Zementsteins zu "durchqueren", lag die Vermutung nahe, dass diese Vereinfachung der Schädigungsevolution ihre Ursache in einer zu großen Ausdehnung der ITZ hat. Eine direkte Untersuchung dieser Annahme durch eine Verfeinerung des Netzes ist jedoch aufgrund der begrenzten Zellenanzahl nicht möglich.

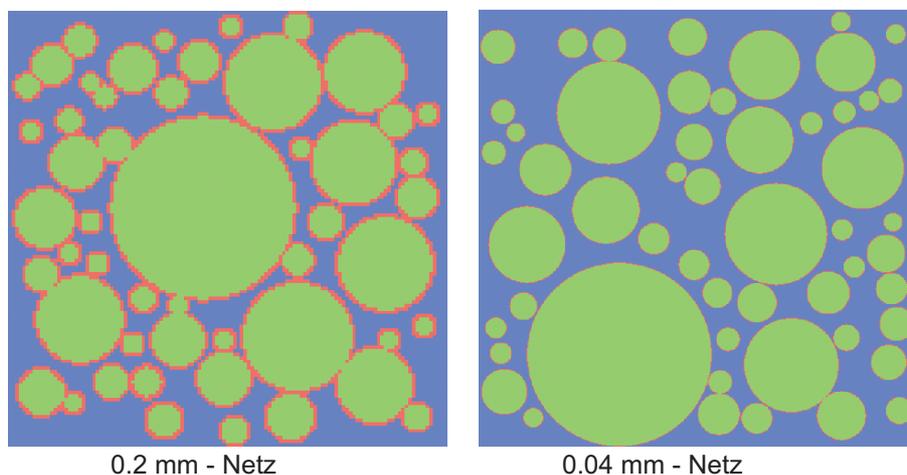


Abbildung 7.8: Vergleich zweier Probekörper mit gleicher Sieblinie und unterschiedlicher Diskretisierung

Abbildung 7.8 zeigt die Gegenüberstellung zweier Körper mit gleicher Sieblinie und unterschiedlichen Diskretisierungsgraden. Darin fällt auf, dass bei dem Körper mit

geringerem Diskretisierungsgrad an mehreren Stellen die ITZ verschiedener Körner aneinandergrenzt. Dadurch entstehen Bereiche, in denen Schädigungsevolution ohne die Schädigung von Zementstein-Zellen möglich ist. In dem mit einem hohen Diskretisierungsgrad generierten Körper ist hingegen eine Verbindung einzelner geschädigter Bereiche, die in der ITZ unterschiedlicher Körner entstehen, nur durch die Schädigung der dazwischen liegenden Zementstein-Zellen möglich.

Dementsprechend steigt der Einfluss der Festigkeit des Zementsteins mit zunehmendem Diskretisierungsgrad. Ein geringer Grad der Diskretisierung führt jedoch dazu, dass eine Vereinigung der einzelnen geschädigten Bereiche bereits bei niedrigeren Belastungen möglich ist. Der niedrige Diskretisierungsgrad in den numerischen Simulationen muss daher als weitere Ursache für die frühzeitig einsetzende Entfestigung sowie die geringe Versagenslast betrachtet werden.

### **Zu 3:**

Eine weitere Ursache für die deutlichen Abweichungen zwischen Simulation und Experiment konnte im Bereich der Festigkeitsparameter der ITZ identifiziert werden. Die Festigkeit der ITZ stellt einen maßgeblichen Faktor bei Schädigungsinitiierung und -evolution dar.

Die für die Formulierung der Parameter des Festigkeitsmodells der ITZ in Abschnitt 7.2.3 wesentliche Materialkenngröße ist die einaxiale Druckfestigkeit  $f_c$ . Diese wird in Gleichung (7.15) anhand des mittleren Verhältnisses der Porositäten der ITZ und des Zementsteins aus Gleichung (7.2) abgeschätzt, wobei jedoch eine Ausdehnung der ITZ von  $40 \mu\text{m}$  zugrunde gelegt wird. Bei der Anwendung im numerischen Modell wurde diese für einen Bereich von  $40 \mu\text{m}$  bestimmte Homogenisierung der Festigkeiten der ITZ für eine Ausdehnung der ITZ von  $200 \mu\text{m}$  übernommen. Dies führte zu einer erheblichen Schwächung des Querschnitts und somit schließlich zu vorzeitigem Versagen der Probekörper. Diese Problematik der Homogenisierung betrifft ebenso die aus [119] übernommene Abschätzung des Schubmoduls  $G$ .

Zur realistischen Abbildung der Festigkeiten und Steifigkeit der ITZ wäre daher entweder eine Netzfeinheit von  $40 \mu\text{m}$  oder eine Anpassung der Homogenisierung an die gewählte Netzfeinheit erforderlich.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass mit dem in den Voruntersuchungen verwendeten Modellansatz das Materialverhalten des Betons und insbesondere das Schädigungsverhalten qualitativ gut abgebildet werden konnte. Quantitativ zeigten sich jedoch erhebliche Abweichungen von den in Laborversuchen beobachteten Festigkeiten. Diese Abweichungen konnten auf drei maßgebliche Fehlerquellen zurückgeführt werden: die Heterogenität des Probekörpers, der Diskretisierungsgrad und eine fehlende Anpassung der Festigkeitsparameter der ITZ an das geometrische Modell.

Da, wie bereits erläutert, mit dem verwendeten geometrischen Modellansatz weder eine Vergrößerung des betrachteten Ausschnitts noch eine Verfeinerung des Netzes

möglich sind, muss an dieser Stelle ein anderer Weg gewählt werden.

Für die weiteren Simulationen der KUPFER-Versuche wird daher ein quasi-zweidimensionales geometrisches Modell (analog Abschnitt 6.4.1) verwendet. Durch den damit verbundenen Wegfall des größten Teils der Zellen in z-Richtung wird sowohl eine Vergrößerung des betrachteten Ausschnitts als auch eine Verfeinerung der räumlichen Diskretisierung möglich. Der durch dieses quasi planarsymmetrische Modell geringfügig veränderte Spannungszustand in z-Richtung wird dabei vernachlässigt.

Betrachtet wird nun, wie in Abbildung 7.9 dargestellt, eine Körpergeometrie von 100 x 100 mm mit einer Zellgröße von 100 x 100 (x 100)  $\mu\text{m}$ . Damit werden die Probleme der Heterogenität und der Diskretisierung größtenteils beseitigt. Die gewählte Zellgröße erfordert jedoch weiterhin ein Anpassung der Materialparameter der ITZ. Dazu wird das mittlere Porositätsverhältnis um den Grobzuschlag analog Gleichung (7.2) für einen Bereich  $r = 100 \mu\text{m}$  bestimmt:

$$\frac{o_m}{o_{ITZ}} = \frac{\int_0^{100} 0.1 dr}{\int_0^{40} 0.1 + 0.25 e^{-r/10} dr + \int_{40}^{100} 0.1 dr} = \frac{10}{12.5} = 0.80 . \quad (7.16)$$

Anhand des neu bestimmten mittleren Porositätsverhältnisses wird die einaxiale Druckfestigkeit der ITZ in Gleichung (7.15) an das geometrische Modell angepasst. Ebenso wird der Schubmodul  $G$  um 30 % gegenüber dem ursprünglichen Wert aus Gleichung (7.13) bzw. der Abschätzung aus [119] erhöht.

Die an das geometrische Modell angepassten Materialparameter der ITZ sind ebenfalls in Anhang D.4 zusammengefasst.

Die gegenüber dem in den Voruntersuchungen verwendeten Modellansatz erhöhte Zellenanzahl ( $1.0 \cdot 10^6$ ) sowie die Netzverfeinerung führen jedoch zu einer deutlichen Erhöhung der Berechnungsdauer (siehe CFL-Kriterium in Abschnitt 4.3.1). Um diese Erhöhung zumindest teilweise auszugleichen, erfolgt die Lasteinleitung im quasi-zweidimensionalen Modell beidseitig. Diese Maßnahme ist möglich, da in den Voruntersuchungen keine wesentlichen Spannungswellen im Probekörper beobachtet werden konnten.

Darüber hinaus wird die Zahl der Auswertepunkte pro Ebene senkrecht zur Lastrichtung auf 50 erhöht, um die mittlere Axialspannung in einem Querschnitt des Probekörpers genauer bestimmen zu können.

### 7.3.2 Simulation der Zugversuche

Die Simulation der Zugversuche aus [161] wurden mit dem im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen modifizierten Modell wiederholt. Die Auswertung dieser Simulation zeigt ein gegenüber den Voruntersuchungen in Abschnitt 7.3.1 deutlich verbessertes Ergebnis.

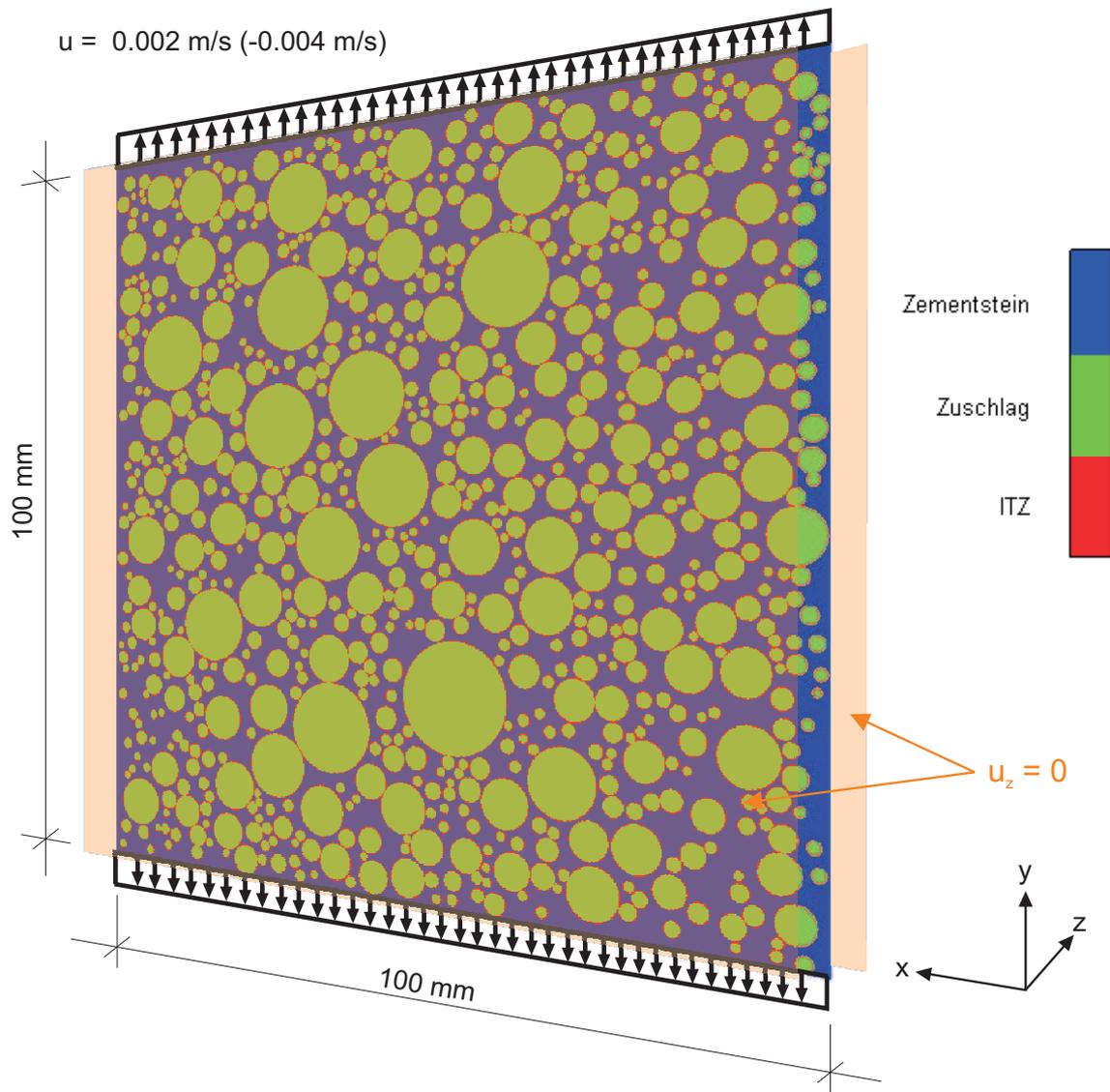


Abbildung 7.9: Geometrisches Modell (2D) zur Simulation der KUPFER-Versuche in [161]

Abbildung 7.10 zeigt das aus der Simulation ermittelte Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Die erreichte Versagensspannung beträgt 4400 kPa und weicht somit lediglich um 7 % von dem ebenfalls in Abbildung 7.10 dargestellten mittleren Versuchsergebnis ab. Auch die numerisch bestimmte Bruchdehnung von 0.126 % stimmt sehr gut mit dem mittleren Versuchsergebnis überein.

Die numerisch ermittelte Spannungs-Dehnungs-Beziehung zeigt bis ca. 60 % der maximal aufnehmbaren Spannung ein nahezu lineares und darüber hinaus ein geringfügig nichtlineares Materialverhalten. Auch hier stimmt das Simulationsergebnis

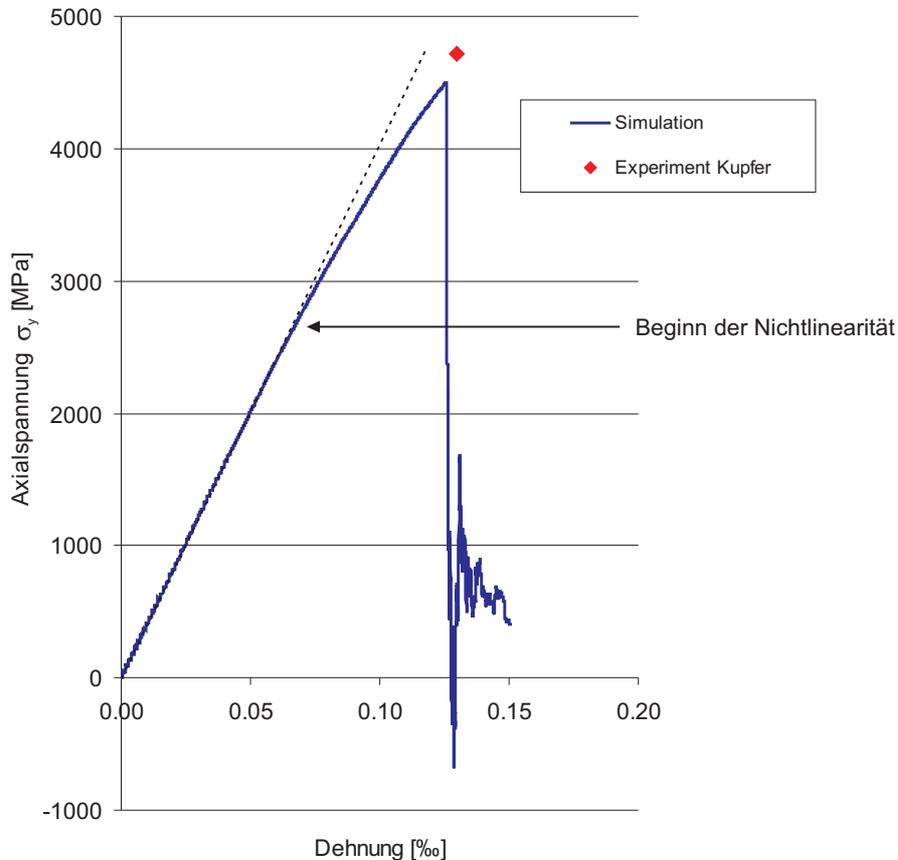


Abbildung 7.10: Simulation der einaxialen Zugversuche in [161]; Spannungs-Dehnungs-Diagramm

gut mit den in [161] dokumentierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung überein. Nach Erreichen der Versagensspannung fällt die Axialspannung erwartungsgemäß stark ab. Die infolge der frei werdenden elastischen Verformungsenergie in den Probekörper eingebrachten Spannungswellen führen kurzfristig zu deutlichen Oszillationen im numerischen Ergebnis. Diese klingen jedoch nach ca. einer Millisekunde ab. Abbildung 7.11 zeigt die Schädigungsevolution während der numerischen Simulation. Im Zuge der Laststeigerung zeigen sich im gesamten Probekörper leichte Schädigungen der ITZ. Dieser Vorgang setzt sich fort, bis an Stellen lokaler Spannkonzentrationen im inneren des Probekörpers einzelne Bereiche der ITZ versagen. Ausgehend von diesen lokalen Schädigungen setzt der Versagensprozess ein. Der lokale Verlust der Festigkeit führt zu Spannungsumlagerungen, geschädigte Einzelbereiche verbinden sich und der Körper versagt nahezu "schlagartig". Diese in den Simulationen beobachtete Schädigungsevolution entspricht dem aus Zugversuchen an Betonkörpern bekannten spröden Versagen.

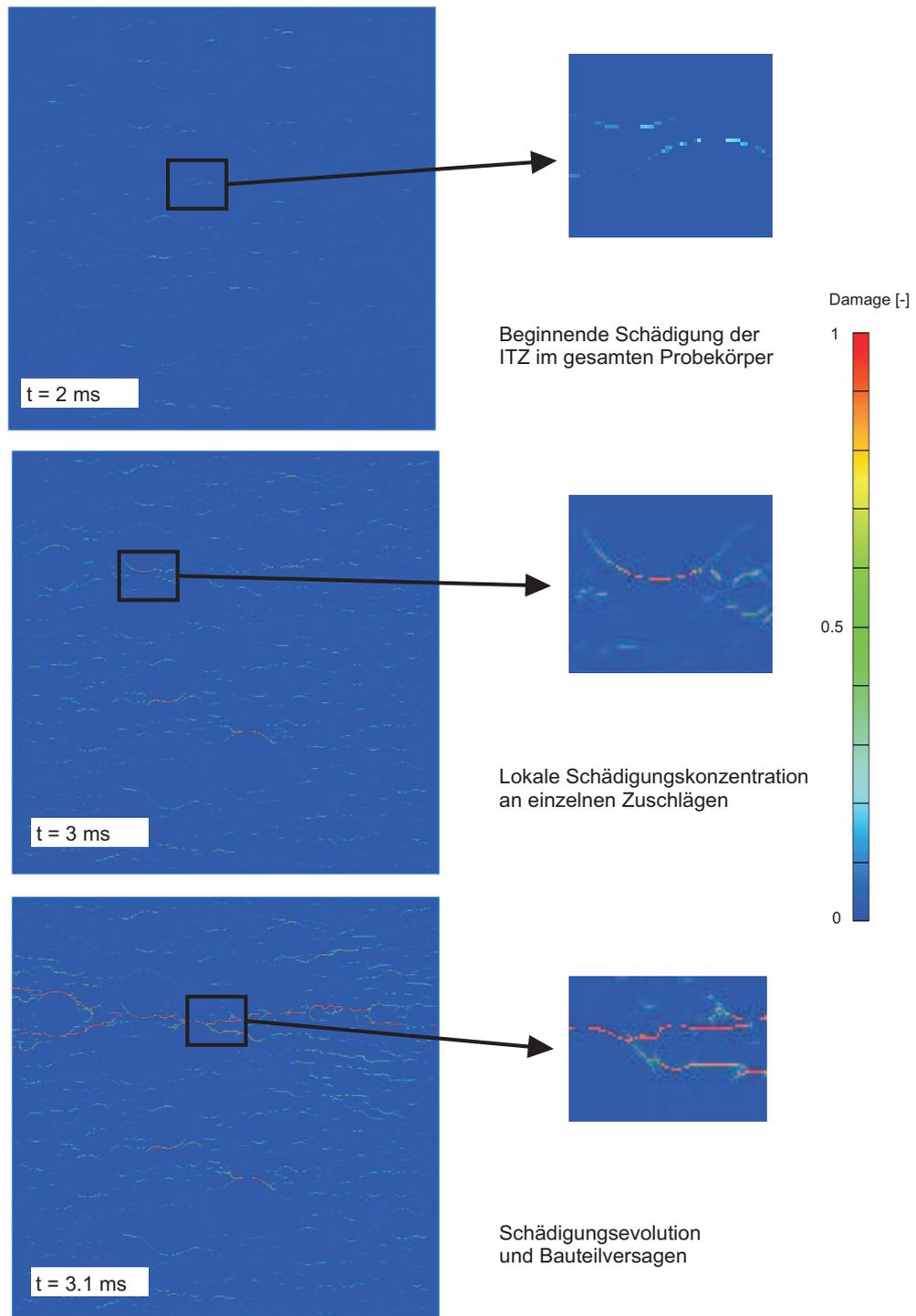


Abbildung 7.11: Simulation der einaxialen Zugversuche in [161]; Evolution der numerischen Schädigung

### 7.3.3 Simulation der Druckversuche

Die Simulation der Druckversuche aus [161] mit dem gegenüber den Voruntersuchungen modifizierten Modell zeigt ebenfalls ein deutlich verbessertes Ergebnis. Abbildung 7.12 zeigt das numerisch ermittelte Spannungs-Stauchungs-Diagramm. Die in der Simulation erreichte (absolute) Versagensspannung beträgt 51.8 MPa und liegt somit 11 % unter der von KUPFER bestimmten mittleren aufnehmbaren Druckspannung von 58.3 MPa. Die numerisch bestimmte Bruchverzerrung von 1.80 ‰ weicht um 16 % vom mittleren Versuchsergebnis ab.

Die numerisch ermittelte Spannungs-Stauchungs-Beziehung zeigt bis ca. 80 % der maximal aufnehmbaren Last ein näherungsweise lineares Materialverhalten. Lediglich bei einer Belastung zwischen ca. 15 MPa und 20 MPa kann eine Nichtlinearität beobachtet werden. Diese Nichtlinearität kann auf eine beginnende Schädigung der ITZ senkrecht zur Lastrichtung (vgl. Abbildung 7.13, oben) zurückgeführt werden. Eine derartige Schädigung der Kontaktfläche zwischen Zuschlag und ITZ ist theoretisch auch in realen Versuchen zu erwarten, jedoch wäre die Nichtlinearität aufgrund der äußerst geringen Ausdehnung dieser "schwächsten" Bereiche der ITZ in einem realen Körper in einem experimentell bestimmten Spannungs-Verzerrungs-Diagramm praktisch nicht erkennbar.

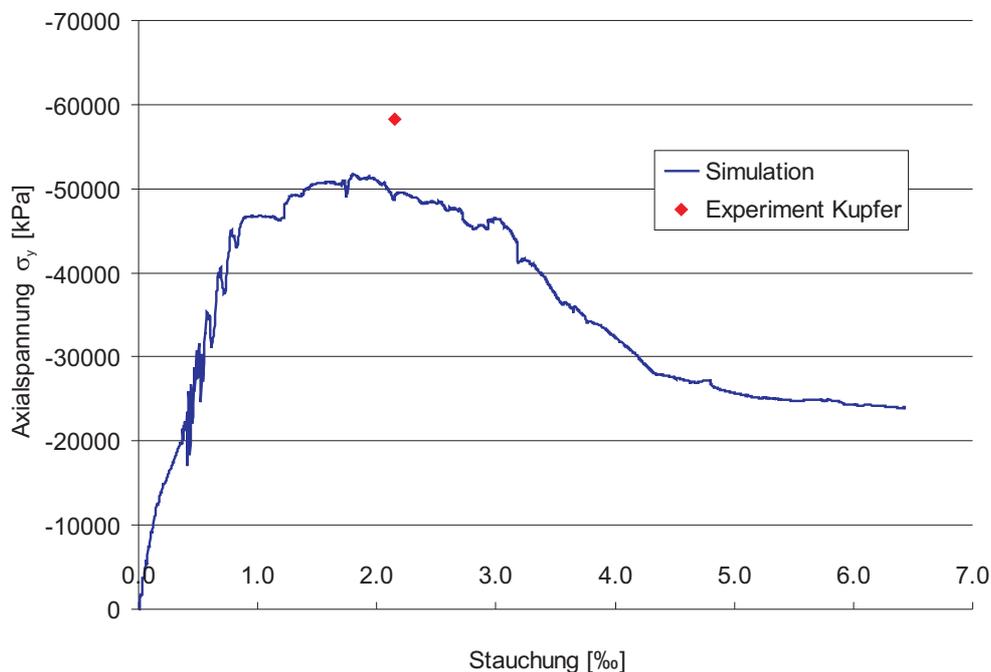


Abbildung 7.12: Simulation der einaxialen Druckversuche in [161]; Spannungs-Stauchungs-Diagramm

Nach der daraus resultierenden Spannungsumlagerung zeigt das Diagramm in Abbildung 7.12 wieder einen näherungsweise linearen Verlauf. Die in diesem Bereich deutlich erkennbaren Oszillationen sind die Folge erster vollständiger Schädigungen, wobei im Bereich lokaler Spannungsspitzen zwischen einzelnen Zuschlägen der Zementstein infolge Querkzugspannungen versagt. Die Schädigungen verlaufen daher, wie in Abbildung 7.13 im mittleren Bild illustriert, parallel zur Lastrichtung. Ab ca. 75 % der numerischen Maximallast zeigen sich, insbesondere im Randbereich, Zusammenschlüsse der numerisch geschädigten Bereiche (vgl. Abbildung 7.13, unten), was zu einem deutlichen Steifigkeitsverlust und wachsenden Stauchungen führt. In diesem Bereich sind Spannungsumlagerungen nur noch bedingt möglich. Die Last kann daher auch nur noch geringfügig gesteigert werden. Nach Erreichen der maximalen Druckspannung beginnt die Entfestigung. Die mittlere Druckspannung sinkt dabei kontinuierlich bei gleichzeitiger Zunahme der Schädigung.

Abbildung 7.14 zeigt oben das numerisch erzeugte Schädigungsbild im Bruchzustand. Dabei sind Gefügeschädigungen im gesamten Probekörper zu erkennen. Eine Schädigung einzelner Zuschlagskörner ist dabei, im Gegensatz zu den meisten realen Versuchen, nicht zu beobachten. Hauptgrund dafür ist, dass die Körner als homogen angenommen wurden, d.h. keine Imperfektionen (z.B. Risse oder Schwächungen) enthalten. Da das Kornversagen jedoch nur in hochfestem Beton von Bedeutung für den Versagensprozess ist, kann der Einfluss dieser Vereinfachung auf das numerische Ergebnis vernachlässigt werden.

Eine Aussage zur Versagensform des Körpers im Bruchzustand ist jedoch anhand dieses Schädigungsbildes nicht möglich. Hierzu ist es erforderlich, auch die Verzerrungen innerhalb des Körpers zu betrachten. Abbildung 7.14 zeigt daher unten die zugehörigen effektiven Verzerrungen. Dabei ist das Versagensmuster deutlich erkennbar. Die sich ergebende Versagensform mit starker Schädigung parallel zur Belastungsrichtung entspricht den erwarteten Längstrennrissen (vgl. Abbildung 1.3). Zudem ist in Abbildung 7.14 ein "Abbrechen" der linken unteren Ecke des numerischen Probekörpers erkennbar. Dies lässt auf eine lokale Schwächung infolge einer ungünstigen Kornanordnung schließen.

Um dieses Ergebnisses besser einordnen zu können, sind in Abbildung 7.15 die Verzerrungen im Bruchzustand bei Lasteinleitung ohne Behinderung der Querverzerrung (entspricht den Versuchen in [161]) dem Ergebnis der gleichen Simulation bei behinderter Querverzerrung gegenübergestellt. Dabei sind deutliche Unterschiede zwischen den beiden Versagensformen erkennbar. Bei einer Behinderung der Querverzerrung im Lasteinleitungsbereich, wie sie sich beispielsweise bei Lasteinleitung mittels Stahlplatten ergibt, zeigt sich, anstelle der über den Probekörper verteilten Längstrennrisse, die aus derartigen Versuchen bekannte Sanduhrform (vgl. Abbildung 1.3). Der Vergleich zeigt insbesondere, dass das numerische Modell auch die sich aus den Randbedingungen ergebende unterschiedliche Schädigungsphänomenologie wiedergibt.

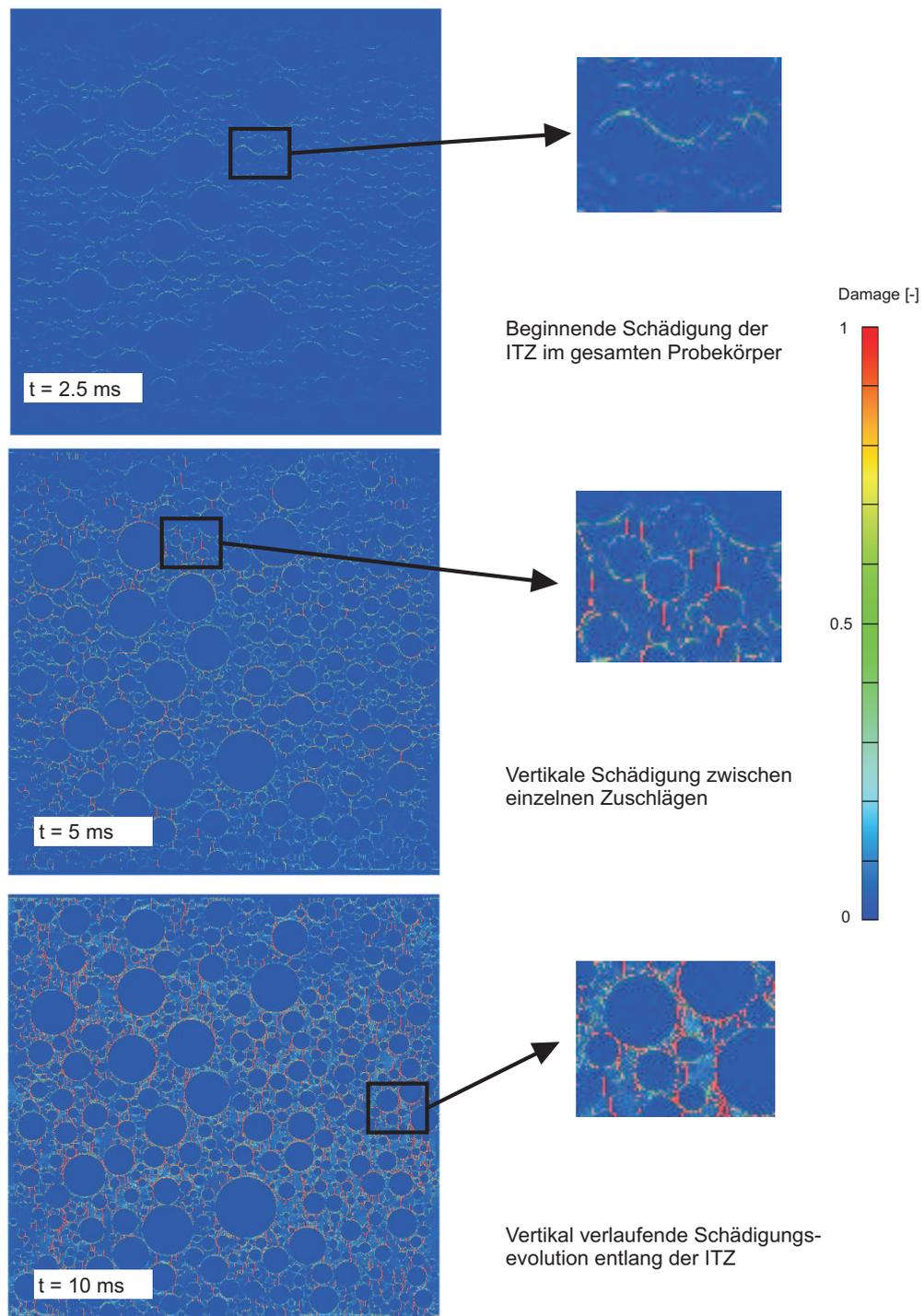


Abbildung 7.13: Simulation der einaxialen Druckversuche in [161]; Evolution der numerischen Schädigung

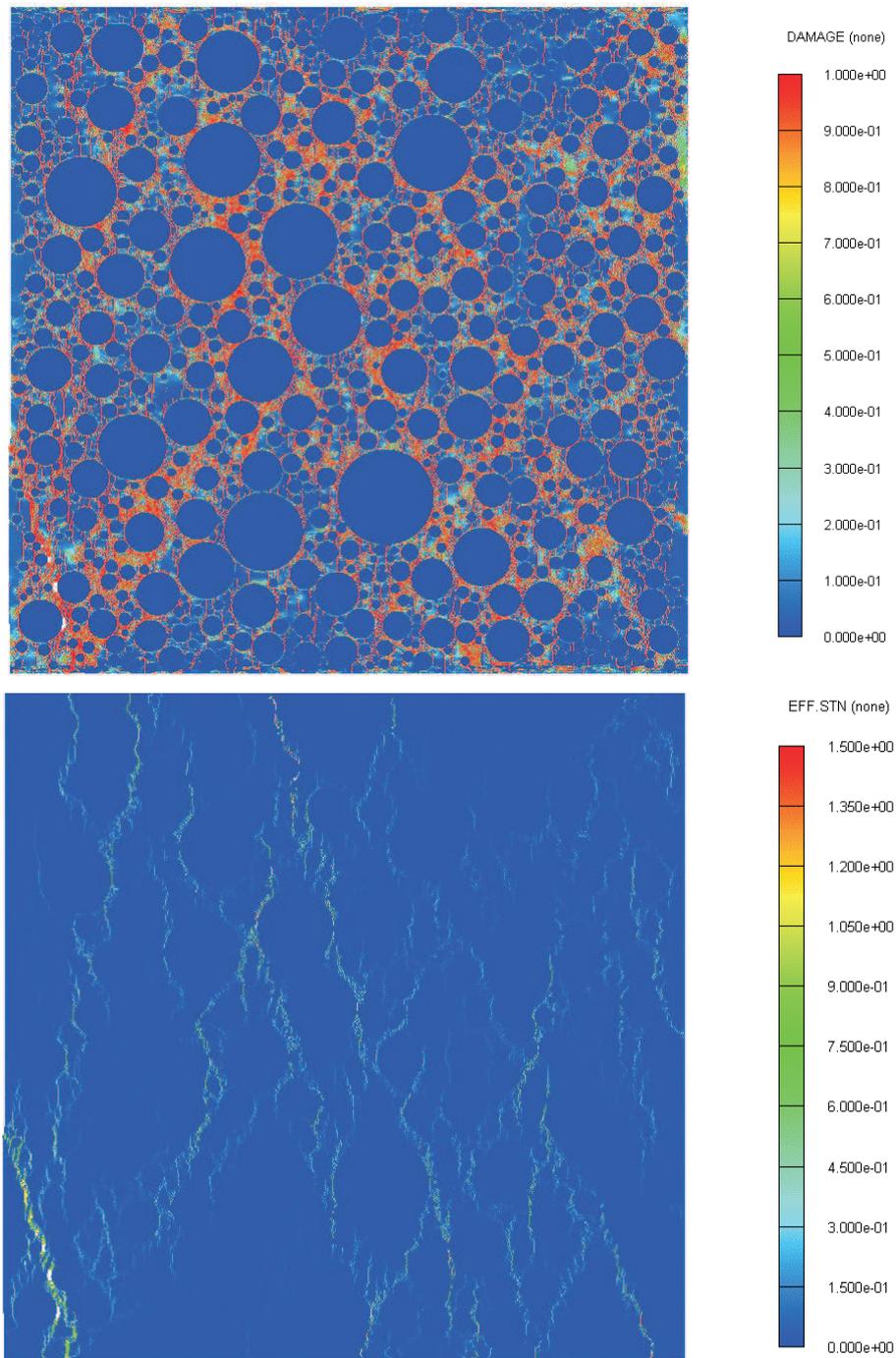


Abbildung 7.14: Simulation der einaxialen Druckversuche in [161]; numerische Schädigung und effektive Verzerrungen bei  $t = 50$  ms

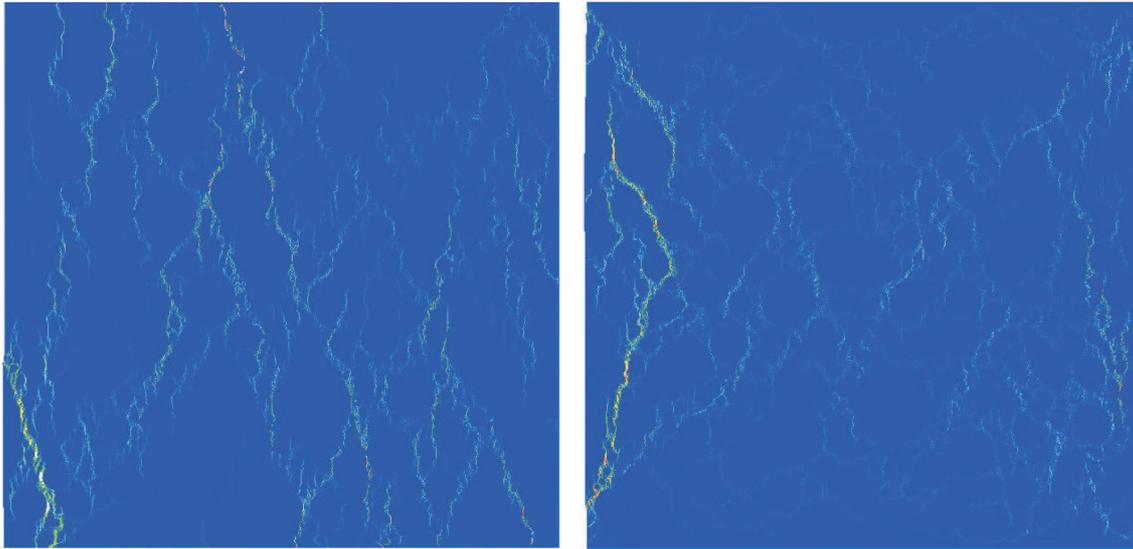


Abbildung 7.15: Simulation einaxialer Druckversuche, effektive Verzerrungen im Bruchzustand; links: Lasteinleitung ohne Behinderung der Querverzerrung, rechts: mit Behinderung der Querverzerrung

Insgesamt kann somit festgestellt werden, dass die numerische Simulation das Materialverhalten und insbesondere die Schädigungsinitiierung und -evolution des untersuchten Betons unter Druckbelastung ebenfalls gut abbildet.

## 7.4 Numerische Simulation von Festigkeitsversuchen mit wechselnder Lastrichtung

Die funktionale Beschreibung der Festigkeitsdegradation infolge einer äußeren Belastung ist aufgrund fehlender Versuchsdaten in praktisch allen bekannten Materialmodellen global und linear formuliert. Global bedeutet in diesem Zusammenhang, dass eine Belastung, die zu einer Entfestigung führt, grundsätzlich alle Festigkeiten (Druck-, Zug- und Schubfestigkeit) betrifft. Da jedoch, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird, eine Zugentfestigung auch ohne Beeinträchtigung der Druckfestigkeit möglich ist, stellt dies einen erheblichen Schwachpunkt dar. Insbesondere bei Wellenreflexionen an freien Oberflächen (vgl. Abschnitt 3.4) kommt es zu einem Lastrichtungswechsel bei dem die Degradation der Zugfestigkeit nach vorhergehender Druckbelastung von erheblicher Bedeutung sein kann.

Mit der derzeit zur Verfügung stehenden Versuchstechnik sind jedoch Lastrichtungswechsel bei der Untersuchung von Betonproben selbst unter einaxialer Belastung nur äußerst eingeschränkt möglich. Daher stehen in der Literatur nahezu keine Experimentaldaten zum Verhalten des Betons bei einem Wechsel der Belastungsrichtung

bzw. -art zur Verfügung. Die wenigen verfügbaren Versuchsdaten sollen daher im Folgenden durch Simulationen ergänzt werden. Ziel dabei ist die Entwicklung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Druckbelastung und residualer Zugfestigkeit sowie dessen Erweiterung auf den Bereich dreiaxialer Belastungen.

### 7.4.1 Verfügbare Experimentaldaten

Die einzige dem Autor derzeit in der Literatur verfügbare Datenbasis für einaxiale Festigkeitsversuche mit Lastwechsel bildet die von AKÇAOĞLU ET AL. 2002 [4] durchgeführte Versuchsreihe. Dabei wurden einzelne Zuschlagskörner mit einem Durchmesser von 9 mm, 12 mm, 19 mm, 25 mm und 32 mm mittig in mit Zementstein gefüllte Probewürfel mit einer Kantenlänge von 10 cm positioniert. Nach 28 Tagen wurde die Zugfestigkeit der Proben, die zuvor mit einer Druckbelastung  $l_{pre}$  von jeweils 40%, 60% und 80% der Druckfestigkeit beansprucht worden waren, ermittelt und mit der Zugfestigkeit der Proben ohne Vorbelastung verglichen.

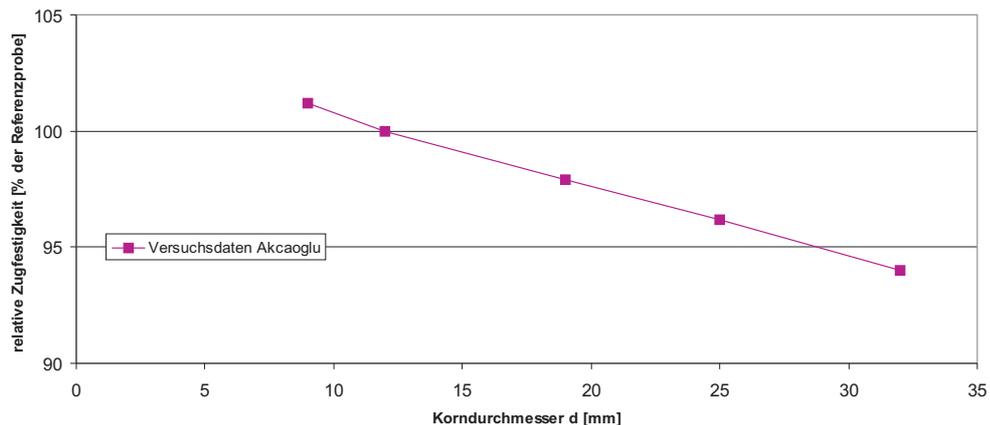


Abbildung 7.16: Betonprobekörper, einaxialer Zugversuch; relative Zugfestigkeit bei unterschiedlichen Zuschlagsgrößen [4]

Abbildung 7.16 zeigt die Zugfestigkeit der verschiedenen (ungeschädigten) Proben im Verhältnis zu einer Referenzprobe ohne Zuschlag. Darin ist ein deutlicher Einfluss der Zuschlagskorngröße auf die Zugfestigkeit zu erkennen. AKÇAOĞLU ET AL. führen diesen Einfluss auf eine Schwächung der Probekörper aufgrund der ITZ zurück (vgl. [4]). Folglich ist nicht die Größe des Zuschlags, sondern vielmehr der Anteil des Zuschlags (und somit der Anteil der ITZ) im Beton einer der entscheidenden Faktoren für die Zugfestigkeit.

Der bei den reinen Zugversuchen festgestellte Einfluss der Korngröße kann auch bei den Versuchen mit vorhergehender Druckbelastung beobachtet werden. Bei allen

Vorbelastungsstufen zeigt sich eine Zunahme des Zugfestigkeitsverlustes bei steigendem Korndurchmesser. Abbildung 7.17 stellt den im prozentualen Zugfestigkeitsverlust (Tensile Strength Loss, TSL) der vorbelasteten Proben im Vergleich zu den jeweiligen Probekörpern ohne Vorbelastung dar. Bemerkenswert ist dabei, dass bereits eine verhältnismäßig geringe Druckbelastung ( $l_{pre} = 40\%$  der Druckfestigkeit) zu einer signifikanten Reduktion der Zugfestigkeit führt. Daraus kann gefolgert werden, dass die ITZ bei Druckbelastung der Probekörper schon weit vor Erreichen der Maximallast erheblich geschädigt wird.

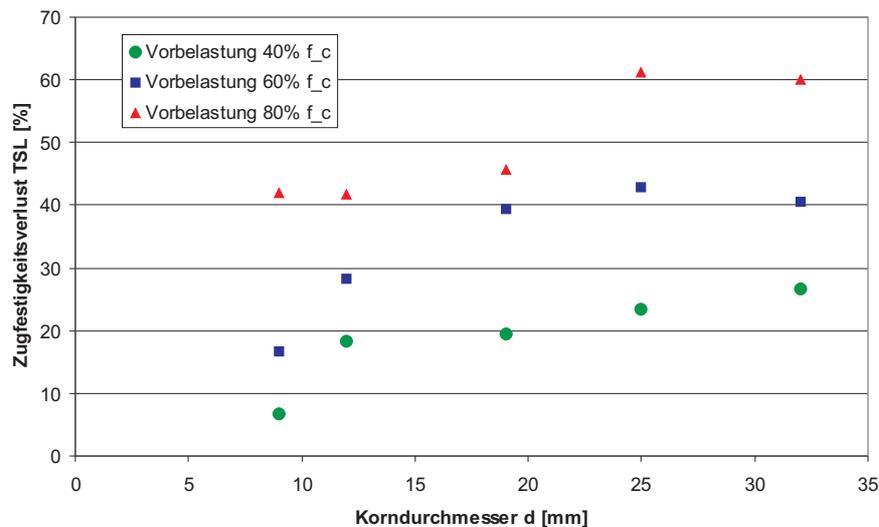


Abbildung 7.17: Zugfestigkeitsverlust bei unterschiedlichen Zuschlagskorngrößen und verschiedenen Vorbelastungen [4]

Wenngleich diese Versuche nicht direkt das Verhalten von Beton mit einer Vielzahl von Zuschlagskörnern wiedergeben, so lassen sich dennoch zwei wesentliche Feststellungen aus den Versuchsergebnissen ableiten:

1. Bereits geringe Druckbelastungen des Betons führen zu einer deutlichen Verringerung der Zugfestigkeit.
2. Der Zugfestigkeitsverlust infolge Druckbelastung nimmt bei steigendem Grob-  
zuschlagsanteil zu.

Die Versuchsergebnisse lassen somit einen Zusammenhang zwischen dem Anteil des Zuschlags (und somit der ITZ) im Beton und dem Zugfestigkeitsverlust infolge Druckbelastung vermuten. Die Experimente bilden jedoch lediglich einen Bereich bis zu einem auf die Querschnittsfläche projizierten Grob-  
zuschlagsanteil von  $a_{agg} = 0.08$  (entspricht einem Korn mit  $d = 32$  mm) ab. Bei Betonen mit

Regelsieblinien liegt der Grobzuschlagsanteil  $a_{agg}$  dagegen zwischen 0.27 (Sieblinie C8) und 0.68 (Sieblinie A32). Eine Ableitung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Grobzuschlagsanteil und Zugfestigkeitsverlust infolge Druckbelastung alleine anhand der Daten in [4] ist daher nicht möglich.

Auch hier bietet die mesomechanische Simulation die Möglichkeit einer Abschätzung des Materialverhaltens des Betons. Aufbauend auf den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte werden daher zunächst, zur Validierung des Modells, die Versuche von AKÇAOĞLU ET AL. simuliert und anschließend in weiterführenden Simulationsreihen auf den Bereich "baupraktischer" Betone erweitert.

Die von SCHULER 2004 [247] zur Bestimmung der Restfestigkeit durchgeführten Versuche zeigten ebenfalls einen deutlichen Zugfestigkeitsverlust infolge Druckvorbelastung. In diesen Versuchen wurden Betonproben unter Behinderung der Querverformung vorbelastet und anschließend die Restspaltzugfestigkeit bestimmt. Abbildung 7.18 zeigt die in SCHULERS Experimenten ermittelten Zugfestigkeitsverluste in Abhängigkeit vom auf die Betondruckfestigkeit normierten hydrostatischen Druck.

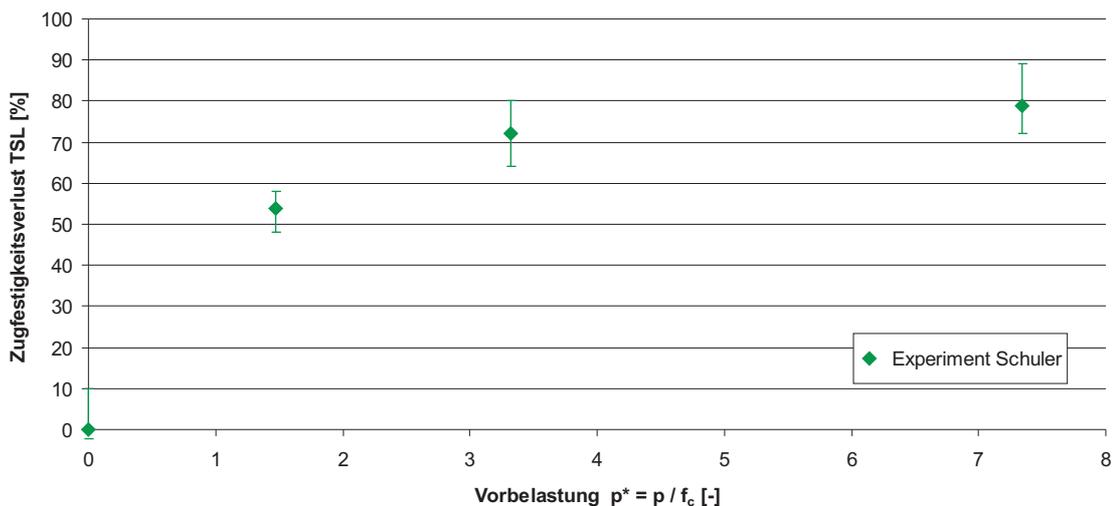


Abbildung 7.18: Zugfestigkeitsverlust bei mehraxialer Vorbelastung; Daten aus [247]

Da die Druckvorbelastung in diesen Versuchen mit behinderter Querverformung aufgebracht wurde, ist ein Vergleich mit den Ergebnissen der Werkstoffsimulation nicht direkt möglich. Die Daten können jedoch zur Überprüfung des aus den Simulationen entwickelten und auf dreiaxiale Belastungen erweiterten funktionalen Zusammenhangs herangezogen werden.

Somit stehen zwei unabhängige Datensätze zur Verfügung, anhand derer einerseits das numerische Modell entwickelt und andererseits dessen Ergebnisse überprüft werden können.

### 7.4.2 Aufbau und Validierung des numerischen Modells

Zur weiteren Überprüfung des numerischen Modells und dessen Anwendbarkeit auf die Problemstellung der wechselnden Belastungsrichtung werden zunächst die in [4] beschriebenen Versuche simuliert und die numerischen mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Die Abmessungen des numerischen Modells entsprechen dabei denen der in den Versuchen verwendeten Probekörper, wobei die Simulationen jedoch aus den in Abschnitt 7.3.1 erläuterten Gründen anhand eines quasi-zweidimensionalen Modells erfolgen. Abbildung 7.19 zeigt links den im Modell gewählten Versuchsaufbau am Beispiel eines Korns mit  $d = 25$  mm. Dazu wurde der in Abschnitt 6.1 beschriebene Algorithmus so modifiziert, dass genau ein Zuschlagskorn mit einem bestimmten Durchmesser mittig im numerischen Probekörper erzeugt wird. Zudem werden auf der Ober- und Unterseite der Proben biegegesteife Stahlplatten zur realitätsnahen Abbildung der Lasteinleitung modelliert. Dabei wird von einer vollständigen Behinderung der Querverformung des Betonkörpers an den Lasteinleitungsplatten ausgegangen. Die Belastung selbst wird durch Geschwindigkeitsrandbedingungen an den Stahlplatten modelliert. Dies entspricht einem weggesteuerten Festigkeitsversuch. Die axialen Spannungen werden dabei in jeweils 50 Meßpunkten in der oberen und unteren Hälfte aufgezeichnet und anschließend ausgewertet.

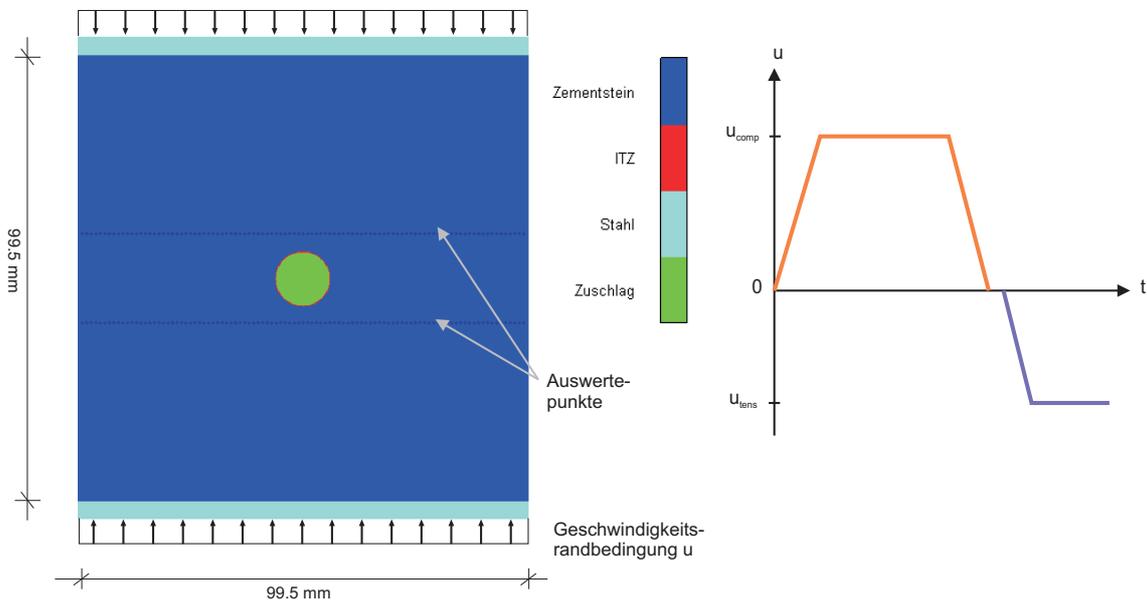


Abbildung 7.19: Druck-Zug-Versuch; Aufbau des numerischen Modells

Die Bestimmung der Materialparameter erfolgte entsprechend dem in den Abschnitten 5.4, 5.5 und 7.2 beschriebenen Vorgehen. Die unter Berücksichtigung der

erforderlichen Anpassung aus Abschnitt 7.3.1 ermittelten Materialparameter sind in den Tabellen D.8 und D.9 in Anhang D.5 zusammengefasst.

Wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten, ist es auch hier notwendig, die Belastungsgeschwindigkeit einerseits so gering zu wählen, dass Wellenphänomene verhindert werden und andererseits so hoch, dass die aufgrund der erforderlichen Netzfeinheit von  $100\ \mu\text{m}$  erhebliche Rechenzeit minimiert wird. Die Belastungsgeschwindigkeiten werden daher zunächst auf  $u_{comp} = 0.15\ \text{m/s}$  für Druckbelastungen und  $u_{tens} = -0.075\ \text{m/s}$  für Zugbelastungen festgelegt. Zudem werden die Geschwindigkeitsrandbedingungen nicht ruckartig, sondern linear ansteigend aufgebracht (siehe Abbildung 7.19 rechts).

Zur Simulation der unterschiedlichen Belastungsstufen wird zunächst ein reiner Druckversuch simuliert. Aus dem Ergebnis des Druckversuchs kann dann die zum Erreichen der jeweiligen Druckspannungen erforderliche Belastungszeit bestimmt werden. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 7.20 exemplarisch anhand des numerischen Ergebnisses der Probe mit  $d = 12\ \text{mm}$  dargestellt.

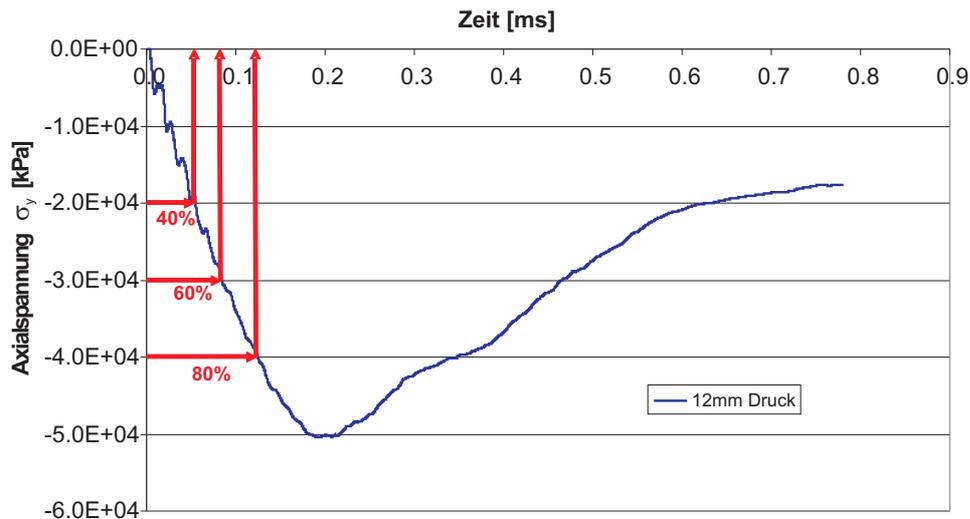


Abbildung 7.20: Druck-Zug-Versuch; Ermittlung der Lastzeiten für unterschiedliche Belastungsstufen

Zwar wäre hier die Aufbringung der Laststufen mittels einer Druckrandbedingung besser, jedoch zeigten sich bei Simulationen mit Druckrandbedingungen erhebliche Oszillationen der Spannungsverläufe. Diese sind auf Wellenreflexionen innerhalb der Stahlplatten zurückzuführen. Da die Eliminierung dieser Effekte durch eine verlangsamte Lastaufbringung jedoch zu erheblich verlängerten Rechenzeiten führt und die mit Geschwindigkeitsrandbedingungen erzielten Laststufen nur um maximal  $6\%$  vom Zielwert abweichen, scheint diese Ungenauigkeit akzeptabel.

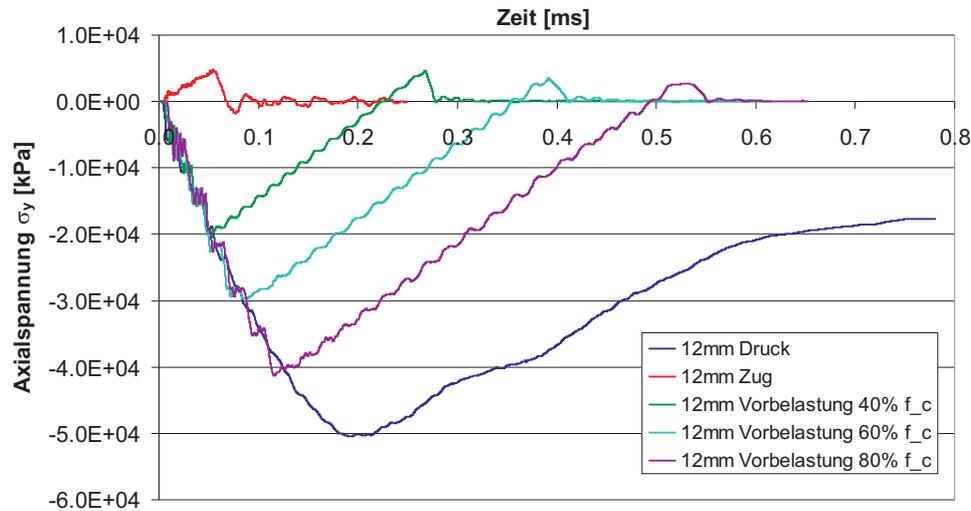


Abbildung 7.21: Druck-Zug-Versuch; Simulation der Versuche in [4]: Spannung  $\sigma_y$  über der Zeit bei  $d = 12$  mm

Die Auswertung der Spannungsverläufe der Axialspannung  $\sigma_y$  während der Simulationen erfolgt durch Mittelwertbildung der Messwerte in den über den Querschnitt verteilten Messpunkten (siehe Abbildung 7.19). Abbildung 7.21 zeigt exemplarisch den Verlauf der Axialspannung  $\sigma_y$  über der Zeit bei der Simulation des Versuchs mit einem Korn  $d = 12$  mm. Darin ist, wie auch in den Versuchen von AKÇAOĞLU ET AL., eine deutliche Abnahme der Zugfestigkeit bei steigender Vorbelastung erkennbar. Zudem zeigt sich bei allen Simulationen ein mit der Vorbelastung bzw. -schädigung zunehmend duktileres Materialverhalten bei Erreichen der Grenzzugspannung. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass die Vorschädigung durch die Druckbelastung zu einer veränderten Spannungsverteilung führt, die ein duktileres Versagen verursacht.

Die Spannungsverläufe in Abbildung 7.21 zeigen zwar schwache, aber deutlich erkennbare Schwingungen. Diese Oszillationen deuten auf Spannungswellen infolge zu schneller Lastaufbringung hin. Aufgrund der lediglich geringen Ausprägung der Oszillationen ist jedoch kein Einfluss der Spannungswellen auf das quantitative Simulationsergebnis zu erwarten.

Die Ergebnisse aller Simulationsreihen sind in Tabelle 7.4 zusammengefasst und den Experimentaldaten von AKÇAOĞLU ET AL. gegenübergestellt. Die experimentellen Ergebnisse werden dabei durch die Simulation insgesamt gut wiedergegeben. Die größte Abweichung zwischen Simulation und Experiment (24%) zeigt sich bei der Probe mit  $d = 9$  mm und  $l_{pre} = 80\% f_c$  Vorbelastung. Dies wird in der grafischen Darstellung in Abbildung 7.22 besonders deutlich.

Tabelle 7.4: Druck-Zug-Versuch; Vergleich des Zugfestigkeitsverlustes (TSL) aus Experiment [4] und Simulation

<b>d = 9 mm</b>	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$
Vorbelastung $l_{pre}$ [% $f_c$ ]	40.0	38.1	-5%	60.0	57.9	-4%	80.0	83.2	+4%
TSL [%]	6.7	8.1	+21%	16.7	18.2	+9%	42.0	32.1	-24%
<b>d = 12 mm</b>	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$
Vorbelastung $l_{pre}$ [% $f_c$ ]	40.0	40.8	+2%	60.0	58.8	-2%	80.0	81.8	+2%
TSL [%]	18.3	14.8	-19%	28.3	25.9	-8%	41.7	43.3	+4%
<b>d = 19 mm</b>	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$
Vorbelastung $l_{pre}$ [% $f_c$ ]	40.0	42.3	+6%	60.0	61.7	+3%	80.0	79.3	-1%
TSL [%]	19.4	23.5	+21%	39.4	34.7	-12%	45.6	53.2	+17%
<b>d = 25 mm</b>	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$
Vorbelastung $l_{pre}$ [% $f_c$ ]	40.0	41.0	+3%	60.0	59.5	-1%	80.0	77.4	-3%
TSL [%]	23.3	25.1	+8%	42.8	40.3	-6%	61.1	55.6	-9%
<b>d = 32 mm</b>	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$	Exp.	Sim.	$\Delta$
Vorbelastung $l_{pre}$ [% $f_c$ ]	40.0	41.4	+3%	60.0	62.6	+4%	80.0	82.5	+3%
TSL [%]	26.7	28.9	+8%	40.6	45.8	+13%	60.0	63.2	+5%

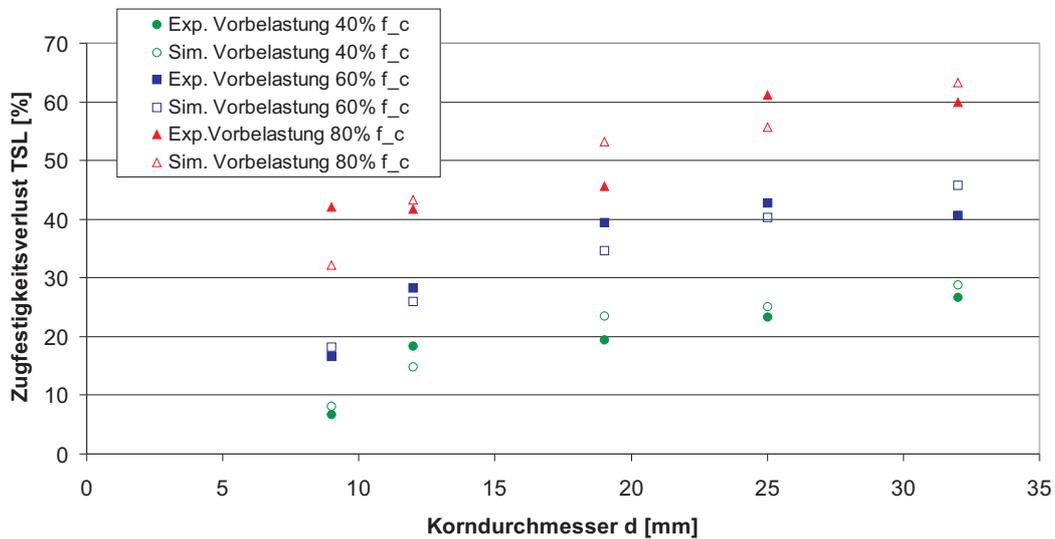


Abbildung 7.22: Druck-Zug-Versuch; Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Versuchen in [4]

Während bei den niedrigen Belastungsstufen Simulation und Experiment sowohl qualitativ als auch quantitativ gut übereinstimmen, ist bei den Experimentaldaten mit 80%  $f_c$  Vorbelastung eine deutliche Streuung erkennbar. Die Simulationsergebnisse bei dieser Laststufe bestätigen dagegen den sich bei 40% bzw. 60% Vorbelastung abzeichnenden Trend. Demnach scheint der Einfluss des Zuschlags im Probekörper mit zunehmendem Grobzuschlagsanteil abzunehmen.

### 7.4.3 Erweiterung des Datenbereichs durch Simulation

Aus den in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten experimentellen und numerischen Ergebnissen ist zwar ein grundsätzlicher Trend erkennbar, jedoch wäre zur Anwendung einer aus den Daten ermittelten Beziehung zwischen Grobzuschlagsanteil  $a_{agg}$ , Vorbelastung  $l_{pre}$  und Zugfestigkeitsverlust TSL auf baupraktische Betonmischungen eine Extrapolation um ca. das 3.5 bis 8.5-fache des zugrunde liegenden Datenbereichs erforderlich. Eine derartige Extrapolation müsste äußerst kritisch betrachtet werden.

Eine Möglichkeit, den Datenbereich zur Abschätzung einer  $a_{agg}$ - $l_{pre}$ -TSL-Beziehung zu erweitern, besteht in der Simulation des Bereichs mit höherem Grobzuschlagsanteil.

Dementsprechend wurden weitere Probekörper modelliert und analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 7.4.2 simuliert und ausgewertet. Aufgrund der Oszillationen in den Spannungsverläufen der vorangegangenen Simulationsreihe wurde jedoch die Belastungsgeschwindigkeit auf  $u_{comp} = 0.1$  m/s und  $u_{tens} = -0.05$  m/s reduziert.

Mit steigender Anzahl der Grobzuschläge ist jedoch eine exakte Bestimmung des auf die Querschnittsfläche projizierten Grobzuschlagsanteil  $a_{agg}$  aufgrund der zufälligen Verteilung der Körner im Beton nicht mehr ohne weiteres möglich. Als maßgebender Wert für  $a_{agg}$  wird daher im Folgenden der sich aus dem Volumenanteil der Grobzuschläge ergebende Anteil berücksichtigt. Untersucht wurden numerische Probekörper mit  $a_{agg} = 0.12, 0.18, 0.25$  und  $0.35$  sowie  $0.54$  (entspricht Sieblinie A8). Die Ergebnisse dieser sowie der vorangegangenen Simulationsreihen sind in Abbildung 7.23 grafisch dargestellt.

In Abbildung 7.23 ist erkennbar, dass sich der Einfluss des Grobzuschlagsanteils mit steigendem  $a_{agg}$  deutlich verringert. Streckenweise nimmt der Zugfestigkeitsverlust bei zunehmendem Grobzuschlagsanteil sogar ab. Dies scheint jedoch physikalisch nicht sinnvoll und ist vermutlich auf die bereits angesprochene zufällige Verteilung der Körner im Beton zurückzuführen. Gleiches gilt für die TSL-Werte bei  $a_{agg} = 0.12$ . Hier scheint der Zugfestigkeitsverlust bei durchgängig allen Belastungsstufen zu hoch. Auch dies ist vermutlich auf eine ungünstige Kornverteilung zurückzuführen. Da aus den Ergebnissen der bisher untersuchten Belastungsstufen (3 Datenpunkte) die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Vorbelastung und Zugfestigkeitsverlust ebenfalls nur bedingt möglich ist, sind auch hier weiterführende Simulationen zur Erweiterung der Datenbasis erforderlich. Daher wurden an der Probe mit  $a_{agg} = 0.54$  zusätzlich die Belastungsstufen variiert.

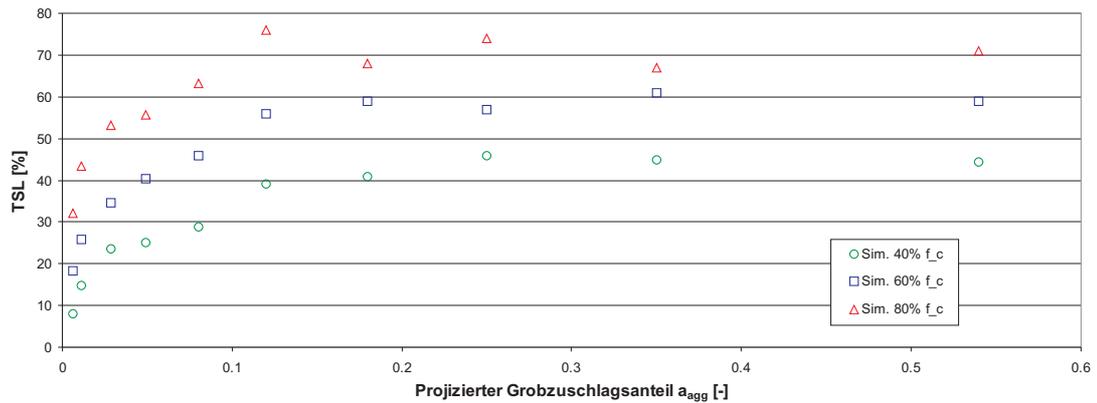


Abbildung 7.23: Druck-Zug-Versuch; Zugfestigkeitsverlust infolge Vorbelastung bei verschiedenem Grobzuschlagsanteil

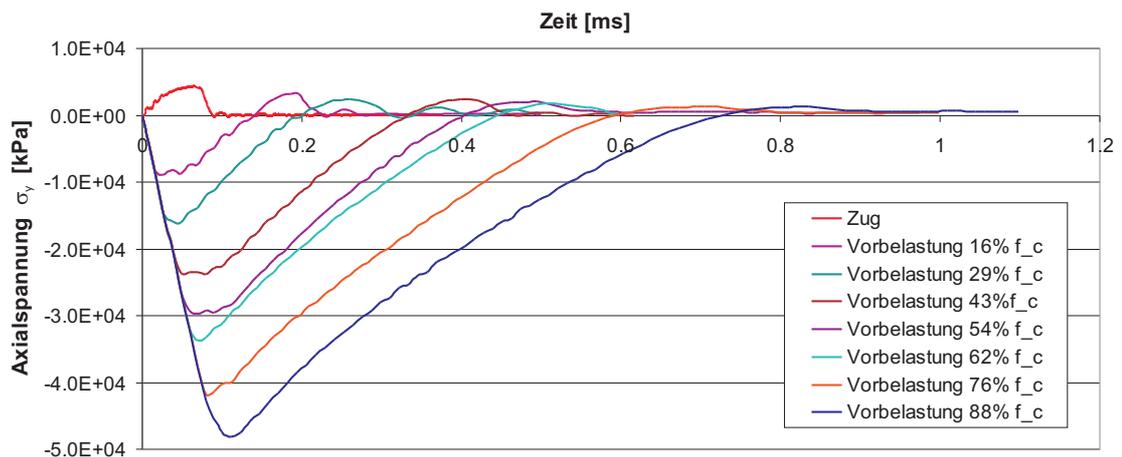


Abbildung 7.24: Druck-Zug-Versuch; Zeitlicher Verlauf der Axialspannungen  $\sigma_y$  während der Simulationen mit unterschiedlichen Vorbelastungen

Abbildung 7.24 zeigt die Verläufe der Axialspannung  $\sigma_y$  bei den untersuchten Vorbelastungen. Auffällig bei diesen Spannungsverläufen ist, neben der erwarteten Abnahme der maximal aufnehmbaren Zugspannung, die erhebliche Zunahme der Duktilität bei höheren Vorbelastungen.

Die anhand der erreichten Maximalspannungen bestimmten Zugfestigkeitsverluste TSL sind in Abbildung 7.25 dargestellt. Die Ergebnisse zeigen eine monotone Zunahme des TSL. Das geringfügige Absinken des Wertes zwischen  $l_{pre} = 80\%$  und  $l_{pre} = 88\%$  kann auf die Verwendung unterschiedlicher numerischer Proben zurückgeführt

werden.

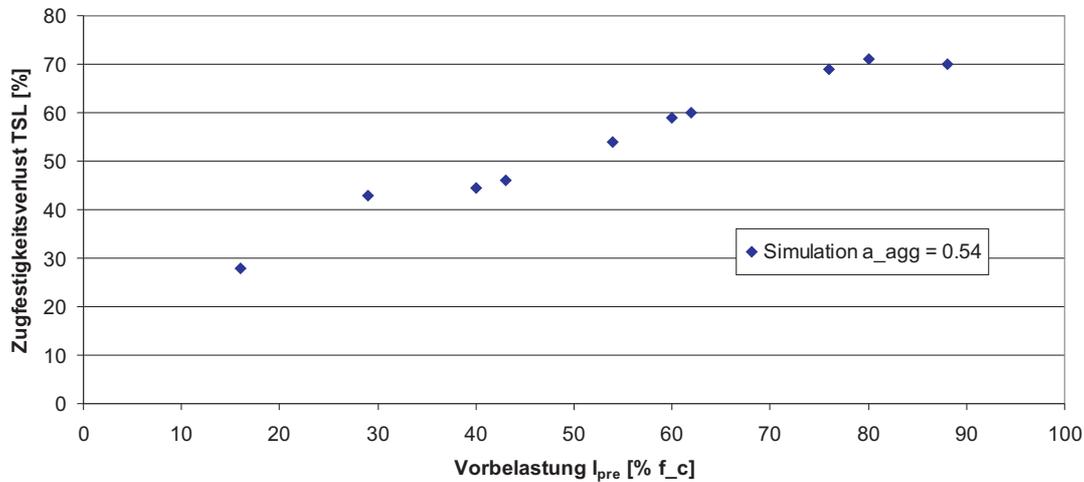


Abbildung 7.25: Druck-Zug-Versuch; Zugfestigkeitsverlust infolge verschiedener Vorbelastungen bei  $a_{agg} = 0.54$

Abbildung 7.26 stellt die Auswertung der Duktilitätszunahme am Beispiel der Simulation mit  $l_{pre} = 76\%$  exemplarisch dar. Dabei wird die Differenz  $\Delta\varepsilon$  zwischen der Verzerrung zum Zeitpunkt der maximalen Axialspannung ( $\sigma_y = \max.$ ) und der Verzerrung bei vollständigem Bruch ( $\sigma_y = 0$ ) bestimmt. Als Maß für die Duktilitätszunahme wird anschließend das Verhältnis der jeweiligen Verzerrungsdifferenz  $\Delta\varepsilon_{l_{pre}}$  zur Verzerrungsdifferenz  $\Delta\varepsilon_{l_{pre}=0}$  (relative Duktilität) ausgewertet.

Das Ergebnis dieser Auswertung ist in Abbildung 7.27 dargestellt. Bei der Auswertung der Simulation mit der Vorbelastung  $l_{pre} = 88\%$  zeigte sich ein Spannungsplateau nach Erreichen der Maximalspannung, so dass eine Bestimmung der Verzerrung bei  $\sigma_y = \max.$  nicht möglich war. Die Duktilitätszunahme war daher nicht sinnvoll auswertbar.

Auch wenn derzeit keine experimentellen Daten vorliegen, die eine derartige Duktilitätszunahme bestätigen, so ist sie doch physikalisch erklärbar: bei einer ungeschädigten Probe kann die Spannung so lange gesteigert werden, bis das Material an seiner schwächsten Stelle versagt. Zu diesem Zeitpunkt sind jedoch bereits alle Bereiche der Probe so stark belastet, dass praktisch keine Spannungsumlagerungen mehr möglich sind. Der erste Riss breitet sich daher "schlagartig" aus und führt zu einem spröden Versagen der Probe. Bei einer vorgeschädigten Probe dagegen sind bereits multiple Risse im Material vorhanden. Diese führen einerseits zu einem deutlichen Steifigkeitsverlust unter Zugbeanspruchung und andererseits zu geringeren Spannungskonzentrationen an den einzelnen Risspitzen. Die Risse wachsen gleichzeitig an mehreren Stellen im Material und ermöglichen somit ständige Spannungsumlagerungen, die zu einem duktilen Verhalten der Gesamtstruktur führen.

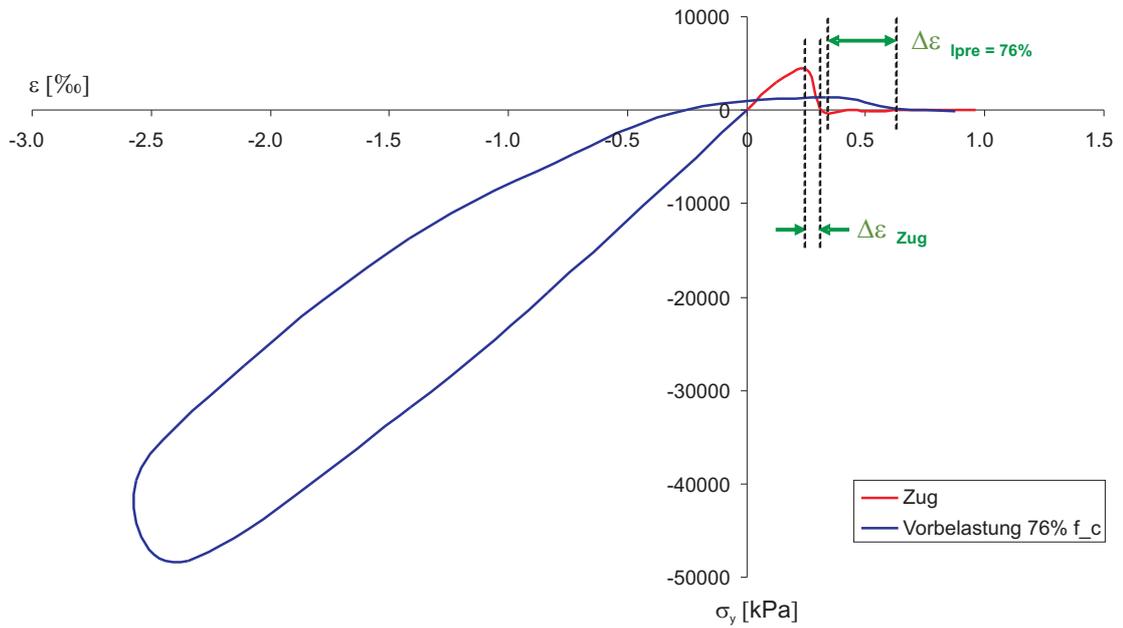


Abbildung 7.26: Druck-Zug-Versuch; Duktilitätszunahme infolge Druckbelastung; Auswerteverfahren am Beispiel  $l_{pre} = 76\%$

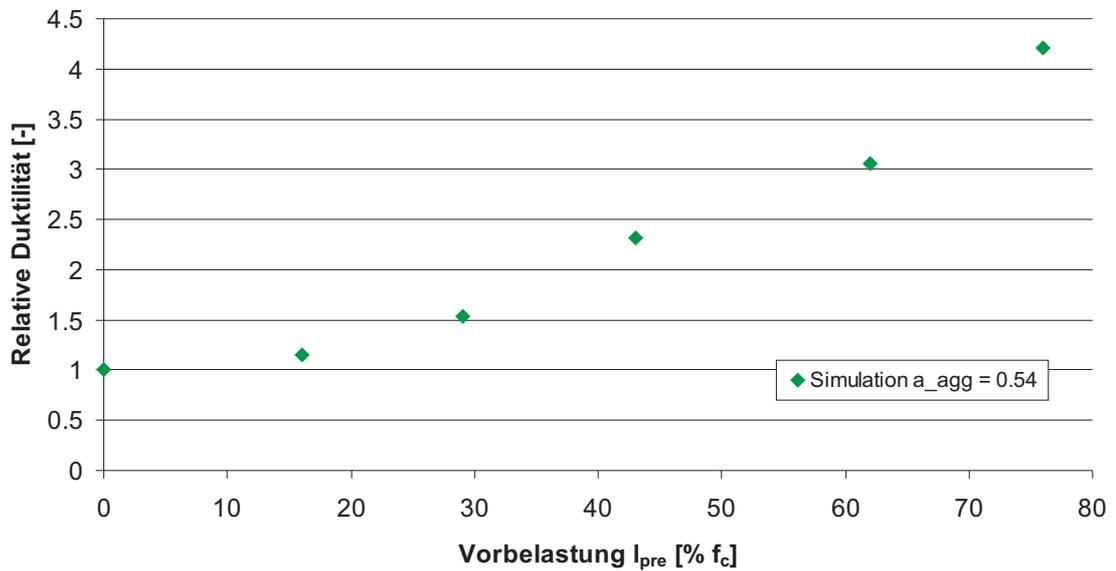


Abbildung 7.27: Druck-Zug-Versuch; Duktilitätszunahme infolge unterschiedlicher Vorbelastungen

Die Simulationsergebnisse scheinen somit insgesamt plausibel und als Basis zur Entwicklung funktionaler Zusammenhänge für ein makromechanisches Modell geeignet.

#### 7.4.4 Bestimmung funktionaler Zusammenhänge

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, unterliegen auch die "numerischen Versuchsergebnisse" einer gewissen Streuung. Eine abschnittsweise lineare Formulierung mit linearer Interpolation zwischen den Stützstellen scheint daher nicht sinnvoll. Vielmehr ist es erforderlich, geeignete Funktionen zu finden, die die festgestellten Trends abbilden und gleichzeitig die Streuung der ermittelten Werte minimieren. Die Minimierung des Streuung bzw. die Optimierung der gewählten Funktionen erfolgt dabei mit der bereits in Abschnitt 5.5.2 beschriebenen mathematischen Analyse-Software MATHCAD [189].

##### Abhängigkeit des Zugfestigkeitsverlustes vom Zuschlagsgehalt

Das primäre Ziel bei der Entwicklung einer  $a_{agg}$ -TSL-Beziehung ist die möglichst genaue Wiedergabe der Simulationsergebnisse. Bei der Wahl einer geeigneten Ausgleichsfunktion ist jedoch auch die spätere Kombination mit einer  $l_{pre}$ -TSL-Beziehung zu berücksichtigen. Das bedeutet, dass die drei  $a_{agg}$ -TSL Datenreihen möglichst mit derselben Funktion beschrieben werden, wobei die Abbildung der einzelnen Datenreihen durch Variation möglichst weniger Parameter erreicht wird.

Als Basis für die Entwicklung der  $a_{agg}$ -TSL-Beziehung wird die Datenreihe mit  $l_{pre} = 40\%$  gewählt. Sie streut am wenigsten und ist daher am besten zur Bestimmung einer Ausgleichsfunktion geeignet.

Von den betrachteten Ausgleichsfunktionen bietet eine gebrochen rationale Funktion der Form

$$f(a_{agg}) = p \cdot \frac{a_{agg}}{a_{agg} + q} = TSL \quad (7.17)$$

die beste Anpassbarkeit an die vorhandenen Daten. Die iterative Optimierung der Funktionsparameter ergab dabei den besten Fit für  $p = 49$  und  $q = 0.04$ . Variationen der Funktionsparameter zeigten zudem, dass eine Verschiebung der Funktion entlang der Ordinate ( $TSL = f(a_{agg}) + r$  mit Variation des Verschiebungsparameters  $r$ ) ausreicht, um auch die anderen Datenreihen, insbesondere im baupraktisch relevanten Bereich ab  $a_{agg} \approx 0.2$ , mit guter Genauigkeit abzubilden (siehe Abbildung 7.28).

Als Maß der Genauigkeit gilt dabei die Standardabweichung  $\sigma$  der Simulationsergebnisse bei Zugrundelegung der (entlang der Ordinate verschobenen) gebrochen rationalen Funktion als Mittelwert. Die sich ergebenden Standardabweichungen sind in Tabelle 7.5 übersichtlich zusammengestellt.

Die ermittelte Funktion gibt somit die Versuchs- und Simulationsergebnisse mit hoher Genauigkeit wieder. Sie basiert jedoch auf der Annahme, dass die Grobzuschläge zwar zufällig aber dennoch gleichmäßig im Zementstein verteilt sind.

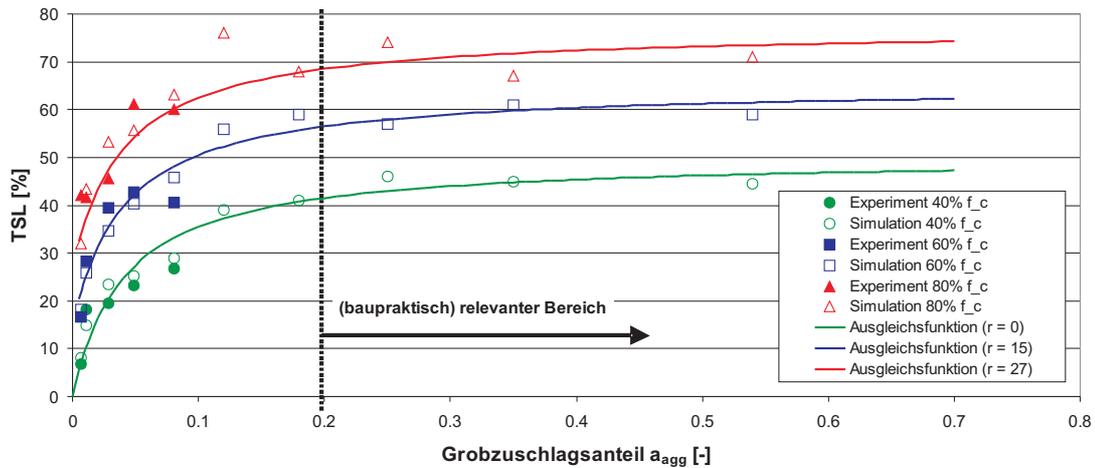


Abbildung 7.28: Druck-Zug-Versuch; aus Simulationsdaten ermittelte  $a_{agg}$ -TSL-Beziehungen (7.17)

Dies ist in der Realität bei höheren Grobzuschlagsanteilen auch zu erwarten. Bei kleinen  $a_{agg}$  dagegen kann eine günstige bzw. ungünstige Kornverteilung zu erheblichen Streuungen im Ergebnis führen. Bei der Anwendung für Betone mit sehr niedrigem Grobzuschlagsanteil ist daher eine erhöhte Unsicherheit zu erwarten. Eine weiterführende Untersuchung und Quantifizierung dieser Unsicherheit erfolgt im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht.

Tabelle 7.5: Standardabweichung der Simulationsergebnisse bei Variation des Parameters  $r$  der Funktion  $f(a_{agg})$

Belastungsstufe	Verschiebungsparameter $r$	Standardabweichung $\sigma$
40%	0	1.3%
60%	15	2.5%
80%	27	3.8%

### Zugfestigkeitsverlust infolge Druckbelastung

Für ein Degradationsmodell auf makromechanischer Ebene ist eine (möglichst geschlossene) Formulierung des Zusammenhangs zwischen Vorbelastung und Zugfestigkeitsverlust von besonderer Bedeutung. Jeder Druckbelastung soll ein resultierender Zugfestigkeitsverlust zugeordnet werden können. Die in Abbildung 7.25 dargestellten Simulationsergebnisse zeigen einen nahezu linearen Zusammenhang im gesamten untersuchten Bereich zwischen  $l_{pre} = 16\%$  und  $l_{pre} = 88\%$ . Ein Zwangspunkt einer  $l_{pre}$ -TSL-Beziehung ist jedoch, dass eine Vorbelastung von 0% nicht zu einer Verringerung der Zugfestigkeit führen darf. Eine einfache Regressionsgerade erfüllt diese Forderung nicht. Gewählt wurde daher eine Ausgleichsfunktion der Form

$$g(l_{pre}) = a \cdot (l_{pre})^b = TSL \quad . \quad (7.18)$$

Die Bestimmung der Parameter liefert für  $a = 5.82$  und  $b = 0.563$  die nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate geringsten Abweichungen. Bei Zugrundelegung der Funktion als Mittelwert ergibt sich hier eine Standardabweichung  $\sigma$  von 2.3%. Abbildung 7.29 stellt Gleichung (7.18) grafisch dar.

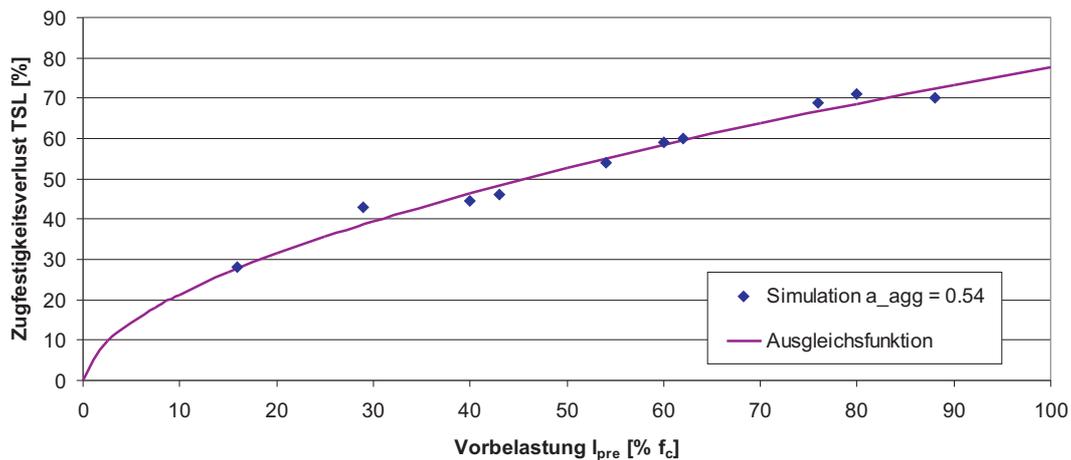


Abbildung 7.29: Druck-Zug-Versuch; aus Simulationsdaten ermittelte  $l_{pre}$ -TSL-Beziehung (7.18)

Zur Verwendung dieser Funktion in einer Hydrocode-Umgebung ist es erforderlich, die ermittelte Funktion auf den Bereich dreiaxialer Spannungszustände zu erweitern. Zudem ermöglicht diese Erweiterung, den nur auf Simulationsergebnissen beruhenden funktionalen Zusammenhang den Experimentaldaten von SCHULER in [247] gegenüber zu stellen.

Der Erweiterung der Funktion in Gleichung (7.18) auf den Bereich dreiaxialer Spannungszustände wird die Annahme zugrunde gelegt, dass eine hydrostatische Belastung bis zur dreiaxialen Druckfestigkeit  $f_{ccc}$  die gleichen Zugfestigkeitsverluste

hervorrufen wie einaxiale Belastungen bis zur einaxialen Druckfestigkeit  $f_c$ . Zudem wird der Zugfestigkeitsverlust bei Drücken oberhalb  $f_{ccc}$  als konstant angenommen, da aufgrund der weiteren Kompaktion zunächst keine signifikanten Steigerungen des Zugfestigkeitsverlustes zu erwarten sind.

Da die dreiaxiale Betonfestigkeit nur in den wenigsten Fällen bekannt ist, wird diese auf die einaxiale Druckfestigkeit zurück geführt. Nach ZHOU [296] liegt das Verhältnis der dreiaxialen zur einaxialen Druckfestigkeit für Normalbetone bei  $f_{ccc}/f_c \approx 4$ . Bei genauerer Betrachtung der in [296] durch die verschiedenen Autoren durchgeführten Versuche wird zwar deutlich, dass bei allen Versuchen zunächst ein hydrostatischer Spannungszustand auf die Probekörper aufgebracht und anschließend eine oder zwei der drei Spannungskomponenten bis zum Bruch erhöht wurden, jedoch kann aus den bis zu einem Verhältnis von  $\sigma_3/(\sigma_2 = \sigma_1) = 0,9$  vorliegenden Versuchsergebnissen der Wert für einen reinen hydrostatischen Spannungszustand sinnvoll angenommen werden.

Der Zusammenhang zwischen hydrostatischer Druckbelastung und Zugfestigkeitsverlust  $TSL$  in [%] ergibt sich somit zu

$$TSL(l_{pre}) = 5.82 \cdot (l_{pre})^{0.563} \quad \text{mit} \quad l_{pre} = \frac{p}{4 \cdot f_c} \cdot 100 \leq 100 \quad (7.19)$$

bzw.

$$TSL(l_{pre}) = 77.8 \cdot (l_{pre})^{0.563} \quad \text{mit} \quad l_{pre} = \frac{p}{4 \cdot f_c} \leq 1.0 \quad (7.20)$$

Die in der Vorbelastung  $l_{pre}$  enthaltene Normierung auf die einaxiale Druckfestigkeit  $f_c$  stellt dabei gleichzeitig die Vergleichbarkeit der in Abbildung 7.18 dargestellten Versuchsdaten mit den Simulationsergebnissen sicher. Abbildung 7.30 stellt diese einander gegenüber.

Die Gegenüberstellung zeigt eine qualitativ gute Übereinstimmung zwischen den Versuchen und der aus den mesomechanischen Simulationen entwickelten Funktion. Lediglich im Bereich für die untersuchte Problemstellung niedriger Vorbelastung zeigen die Versuche einen geringfügig höheren Zugfestigkeitsverlust. Neben Ungenauigkeiten in der Modellbildung liegt eine mögliche Erklärung für diesen, verglichen mit den numerischen Ergebnissen, hohen Zugfestigkeitsverlust im Versuchsaufbau. Zur Minimierung der Reibung wurde im Experiment eine Teflonhülse zwischen Betonprobe und Stahlfassung eingebaut. Der Kompressionsmodul von Teflon beträgt nach MARSH [187] nur ca. 2.8 GPa. Das entspricht etwa einem Zehntel des Kompressionsmoduls von Beton bzw. einem Hundertstel von Stahl. Somit kann, insbesondere bei relativ niedrigen Drücken, nicht von einer idealen Querverformungsbehinderung ausgegangen werden, was zur einer höheren Schädigung unter Druckbelastung führen kann. Ob dies jedoch letztlich der Grund für die Abweichung ist, kann ohne eine genauere Untersuchung nicht abschließend festgestellt werden. Hierfür wären weitere Versuchsdaten erforderlich, die derzeit allerdings nicht zur Verfügung stehen.

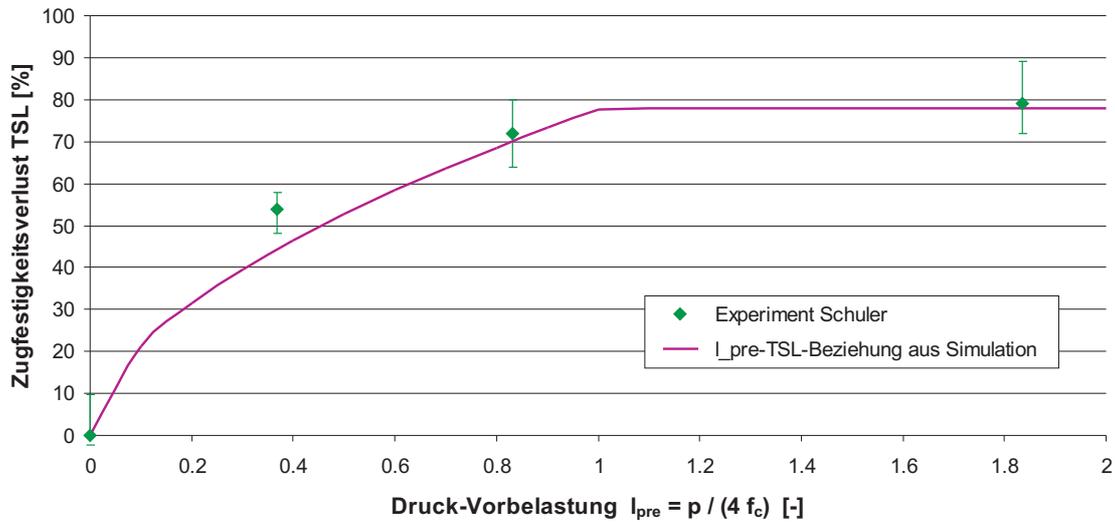


Abbildung 7.30: Druck-Zug-Versuch; Vergleich der aus Simulationen entwickelten  $l_{pre}$ -TSL-Beziehung (7.20) mit Experimentaldaten aus [247]

Über den gesamten Wertebereich betrachtet stimmen Experiment und Simulation jedoch gut überein. Die aus den Werkstoffsimulationen gewonnene funktionale Beziehung zwischen Druckvorbelastung und Zugfestigkeitsverlust in Gleichung (7.19) bzw. (7.20) kann daher für eine makromechanische Formulierung als geeignet betrachtet werden.

### Zunahme der Bruchdehnung infolge vorhergehender Druckbelastung

Die in Abbildung 7.27 dargestellte relative Duktilität in Abhängigkeit von der Vorbelastung zeigt einen deutlichen Trend, der anhand eines Polynoms zweiter Ordnung,

$$f_{duct}(l_{pre}) = 4.45 \cdot (l_{pre})^2 + 0.81 \cdot (l_{pre}) + 1 \quad , \quad (7.21)$$

mit hoher Genauigkeit (Standardabweichung  $\sigma < 0.1$ ) abgebildet werden kann. Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erläutert, kann die in den Simulationen beobachtete Duktilitätszunahme zwar physikalisch interpretiert bzw. erklärt, jedoch mangels Versuchen derzeit nicht validiert werden. Die Funktion in Gleichung (7.21) kann dementsprechend nur als sinnvolle Abschätzung betrachtet werden, da sie nicht durch Experimentaldaten abgesichert ist.

Abbildung 7.31 stellt die Funktion in Gleichung (7.21) zusammen mit den Simulationsergebnissen grafisch dar.

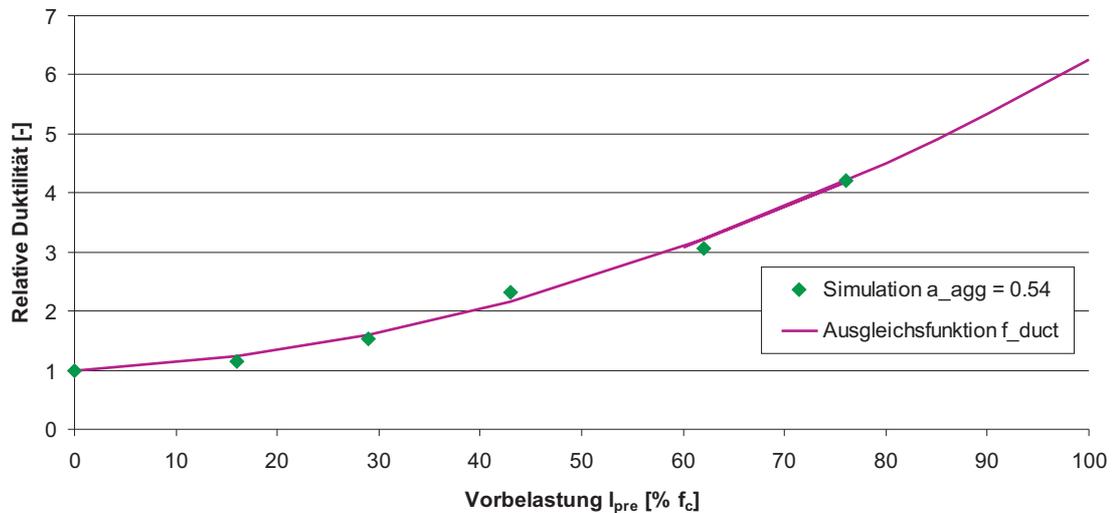


Abbildung 7.31: Druck-Zug-Versuch; aus Simulationsdaten ermittelter Zusammenhang zwischen Vorbelastung und relativer Duktilität (Gleichung (7.21))

## 7.5 Untersuchung des Zugbruchverhaltens bei unterschiedlichen Verzerrungsraten

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die besondere Rolle der ITZ im Versagensprozess des Betons deutlich. Aufbauend auf diesen Untersuchungen unter quasi-statischer Zug- und Druckbelastung wird nun das Schädigungsverhalten einer mit Biegezug beanspruchten Betonprobe bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten bzw. Verzerrungsraten betrachtet. Dazu wird ein Drei-Punkt-Biegezugversuch (vgl. Abschnitt 1.2.2) gewählt, da dieser eine lokalisierte Schädigung erwarten lässt. Ziel dabei ist es, das Schädigungsverhalten und die Schädigungsbilder in numerischen Simulationen zu untersuchen und daraus Rückschlüsse auf das unterschiedliche Versagen von Betonbauteilen bei Blast- oder Impaktbelastung zu ziehen.

### 7.5.1 Aufbau des numerischen Modells

Die Modellierung des im Drei-Punkt-Biegezugversuch betrachteten Gesamt-Probekörpers erfolgt, wie in Abbildung 7.32 dargestellt, durch biegesteife Kopplung eines auf mesomechanischer Modellebene modellierten Mittelteils mit als homogen betrachteten Seitenteilen.

Diese Koppelung ermöglicht eine Netzaufweitung (siehe Ausschnitt in Abbildung 7.32) in den seitlichen Bereichen, die für die Untersuchung der Schädigungsprozesse nur von untergeordneter Bedeutung sind. Durch die Netzaufweitung von einer Zellkantenlänge von 0.1 mm bei der mesomechanischen auf 0.4 mm in der makro-

mechanischen Materialbeschreibung kann die Anzahl der Zellen im Modell deutlich reduziert werden.

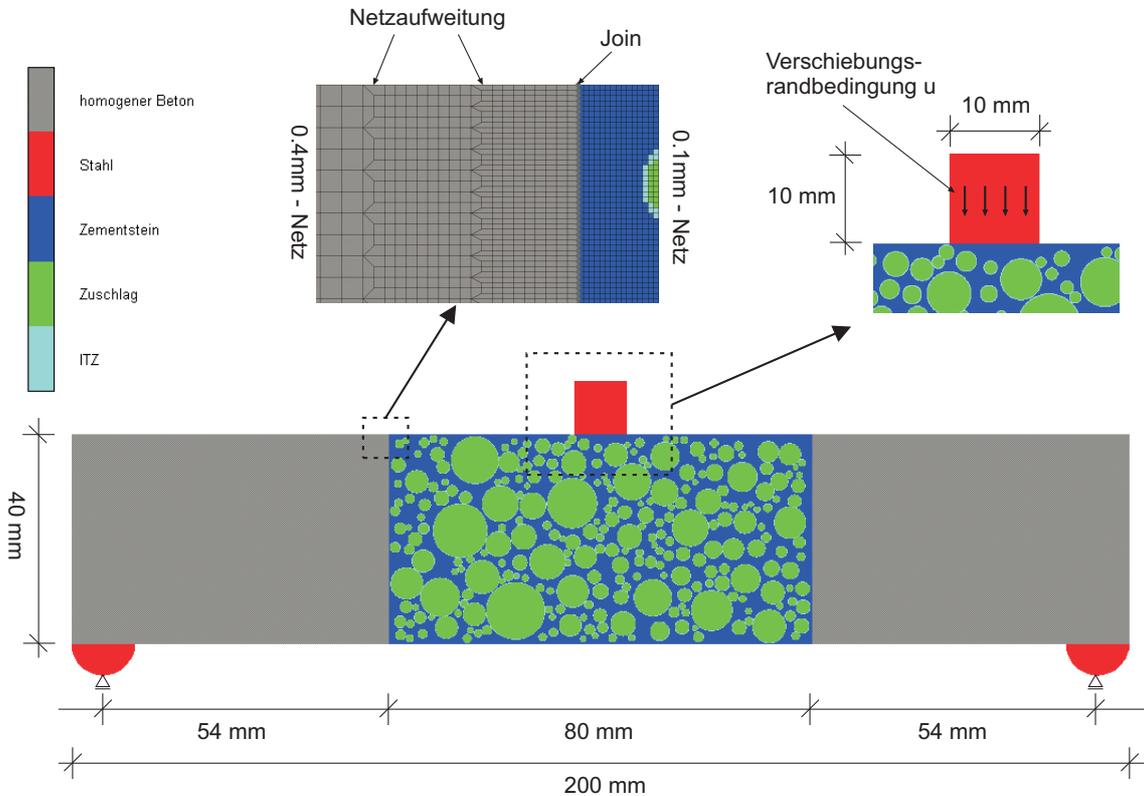


Abbildung 7.32: Numerisches Modell zur Simulation der Biegezugversuche

Der in den Biegezugversuchen numerisch untersuchte Beton entspricht der in Abschnitt 7.3 betrachteten Betonzusammensetzung. Die verwendeten Materialkenngrößen und -parameter des mesomechanisch modellierten Mittelteils können daher den Tabellen D.5 und D.6 in Anhang D.4 entnommen werden.

Die Materialmodellierung des homogenisierten Betons erfolgt anhand des bereits zur Modellierung des Zementsteins und der ITZ verwendeten Materialmodells RHT. Dabei werden die in [233] vorgeschlagenen Modellparameter und eine dem in Abschnitt 7.3 untersuchten Beton entsprechenden Druckfestigkeit von 58.3 MPa verwendet.

Die Last auf den Probekörper wird weggesteuert anhand einer Geschwindigkeitsrandbedingung  $u$  aufgebracht. Die Lasteinleitung erfolgt dabei über einen Stahlquader, da die Modellierung einer Punktlast zu einer unrealistisch hohen Spannkonzentration und somit numerisch zu einer unrealistischen Schädigung unterhalb der Last führen kann.

Aus dem selben Grund erfolgt auch die Lagerung des numerischen Probekörpers nicht mittels einer direkten Punktlagerung. Anstelle dessen wird die Lagerkraft über Stahl-Halbzyylinder verteilt in den Körper eingebracht. Ein Einfluss der Lagerung auf

das Schädigungsverhalten des betrachteten mesomechanisch modellierten Mittelteils kann dabei ausgeschlossen werden.

Die Materialbeschreibung des Stahls erfolgt anhand des in Abschnitt 6.4.4 beschriebenen JC-Modells von JOHNSON und COOK [149]. Die Fließgrenze des Stahls beträgt dabei 792 MPa. Da die Modellierung des Stahls nur von untergeordneter Bedeutung für die Simulationen ist, wird an dieser Stelle auf eine genauere Betrachtung der verwendeten Materialparameter und Kenngrößen verzichtet.

## 7.5.2 Simulation und Ergebnisse

Durchgeführt werden vier Simulationen mit unterschiedlichen Geschwindigkeitsrandbedingungen  $u$ . Betrachtet werden die Belastungsgeschwindigkeiten  $u_1 = 0.01$  m/s,  $u_2 = 0.1$  m/s,  $u_3 = 1.0$  m/s und  $u_4 = 5.0$  m/s. Dabei ergibt sich im ungeschädigten Zustand, unter Zugrundelegung der Balkentheorie, eine über die Bauteilhöhe veränderliche Verzerrungsrate. Diese kann mathematisch aus der Biegelinienformulierung zu

$$\dot{\epsilon} = 12 \cdot \frac{u}{l^2} \cdot z \quad (7.22)$$

bestimmt werden, wobei  $l$  der Spannweite entspricht und  $z$  den vertikalen Abstand zur Schwerelinie beschreibt. Abbildung 7.33 stellt dies schematisch für einen symmetrischen Querschnitt dar.

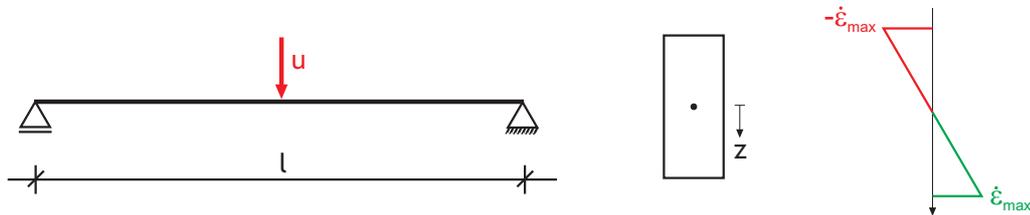


Abbildung 7.33: Verzerrungsrate im Querschnitt bei Biegezugbelastung

Die sich für die untersuchten Belastungsgeschwindigkeiten  $u$  an der Unterkante des Probekörpers ergebenden maximalen Verzerrungsraten  $\dot{\epsilon}_{max}$  sind in Tabelle 7.6 übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle 7.6: Maximale Verzerrungsraten bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten  $u$

$u$ [m/s]	0.01	0.1	1.0	5.0
$\dot{\epsilon}_{max}$ [s <sup>-1</sup> ]	0.07	0.7	6.8	34.0

Die in den Simulationen der Biegezugversuche erzeugten numerischen Schädigungsbilder sind in Abbildung 7.34 zusammengefasst. Die Simulation mit  $u = 0.01$  m/s zeigt zunächst eine an der Unterseite verteilte leichte Schädigung. Im Bereich der höchsten Zugspannung kommt es, ähnlich dem quasi-statischen Zugversuch in Abschnitt 7.3.2, zur Initialschädigung und zu einer Schädigungsevolution in einen einzelnen Schädigungspfad. Da nach der Initialschädigung in unbewehrtem Beton eine Spannungsumlagerung und eine Rissverteilung nur sehr eingeschränkt möglich ist, entspricht dies dem erwarteten Schädigungsbild. Auffällig dabei ist jedoch, dass der geschädigte Bereich im Wesentlichen entlang der ITZ verläuft und sozusagen den Weg des geringsten Widerstandes durch das Bauteil nimmt.

Bei der Belastungsgeschwindigkeit von  $u = 0.1$  m/s zeigt sich zwar ein grundsätzlich ähnliches Versagensbild, jedoch verläuft der geschädigte Bereich hier nicht mehr nur von Korngrenze zu Korngrenze, sondern deutlich direkter in Richtung der Last und dabei mehr durch den Zementstein. Dieses Verhalten deutet auf Trägheitseffekte hin, die eine Spannungsumlagerung und -lokalisation am schwächsten Punkt verhindern. Darüber hinaus ist in dieser Simulation eine im Vergleich zu  $u = 0.01$  m/s ausgeprägtere Schädigung auf der Körperunterseite sowie im Lasteinleitungsbereich zu erkennen.

Bei einer Belastungsgeschwindigkeit von  $u = 1.0$  m/s zeigt sich bereits ein deutlich verändertes Schädigungsbild. Hier beginnt die Schädigungsevolution, wie in Abbildung 7.35 links dargestellt, gleichzeitig sowohl an mehreren Stellen der auf der Bauteilunterseite als auch unterhalb der Lasteinleitung. Die geschädigten Bereiche breiten sich dann gegenläufig von unten nach oben bzw. umgekehrt aus. Dieses Schädigungsverhalten lässt auf eine Kombination zweier Effekte schließen. Zum einen ist die Trägheit des Gesamtsystems so hoch, dass das Material unterhalb der Last lokal stark beschleunigt wird, was zu einer Schubschädigung im oberen Bereich des Körpers führt.

Andererseits ist die Verzerrungsrate auf der Unterseite groß genug, um eine Spannungskonzentration im schwächsten Punkt zu verhindern. Die Schädigung setzt folglich gleichzeitig an mehreren Punkten auf der Unterseite ein. Auch dieses Verhalten ist eine Folge von Trägheitseffekten.

Die Simulation mit einer Belastungsgeschwindigkeit von  $u = 5.0$  m/s zeigt schließlich ein für Impaktbelastungen typisches Schädigungsbild. Aufgrund der Trägheit des Systems kommt es zu einem "Durchstanzen", wobei sich die geschädigten Bereiche aufgrund des Ausbreitungswinkels auch in den als homogen modellierten Bereich fortpflanzen. Dabei erfolgt die Schädigungsinitiierung an der Stelle der Lasteinleitung und breitet sich von dort sphärisch aus (siehe Abbildung 7.35 rechts). Zudem weisen die horizontal geschädigten Bereiche an der Bauteilunterseite deutlich auf eine Schädigung infolge einer reflektierten Zugwelle hin. Bei dieser Belastungsgeschwindigkeit werden somit auch Wellenphänomene relevant.

Zusätzlich zeigen die Simulationen bei  $u = 1.0$  m/s und  $u = 5.0$  m/s eine lokale Schädigung an der Kopplung zwischen den mesomechanisch und makromechanisch modellierten Modellteilen sowie im Bereich der Auflager. Während die Schädigung

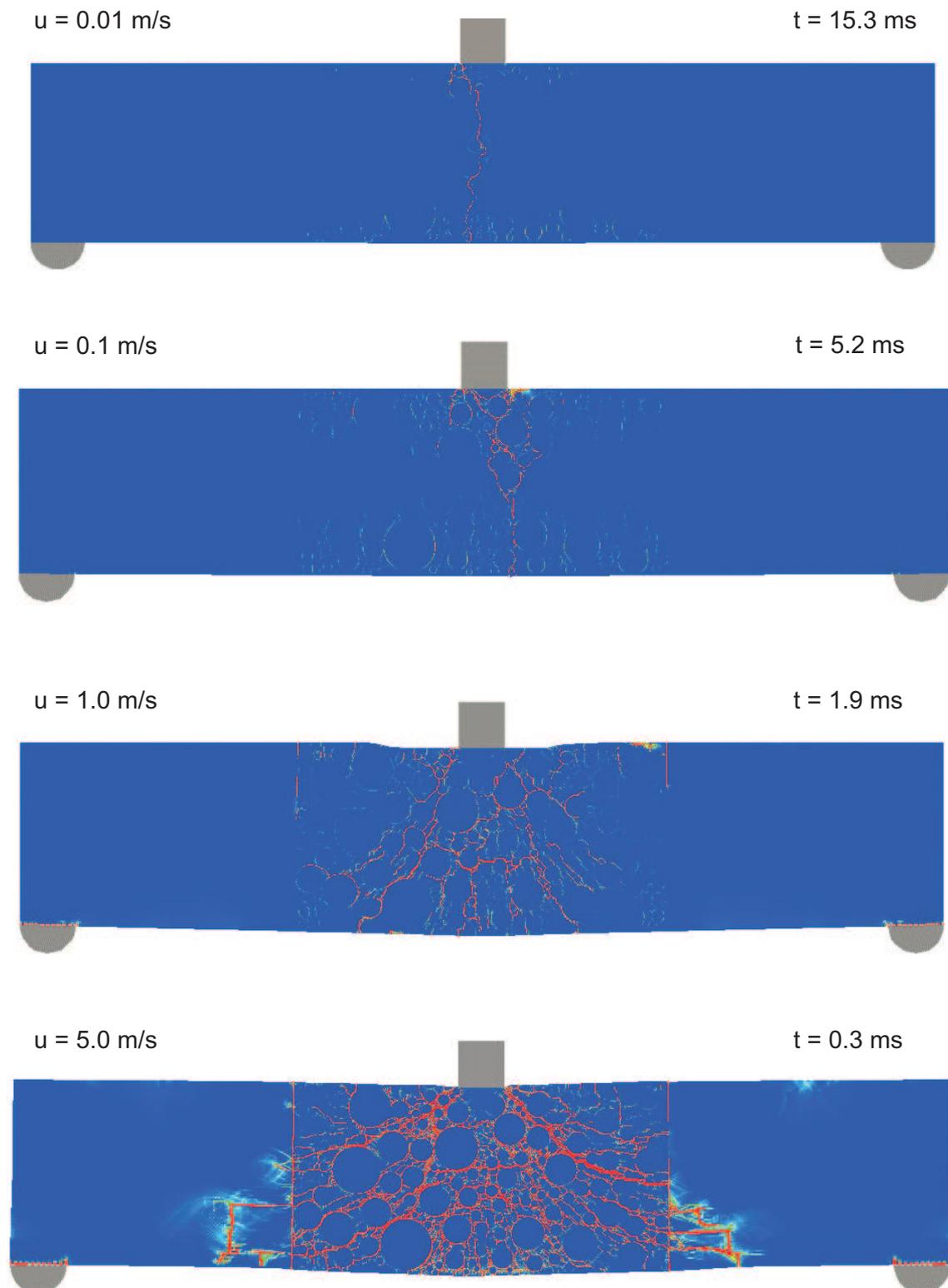


Abbildung 7.34: Biegezugversuche bei unterschiedlicher Belastungsgeschwindigkeit; numerische Schädigungsbilder

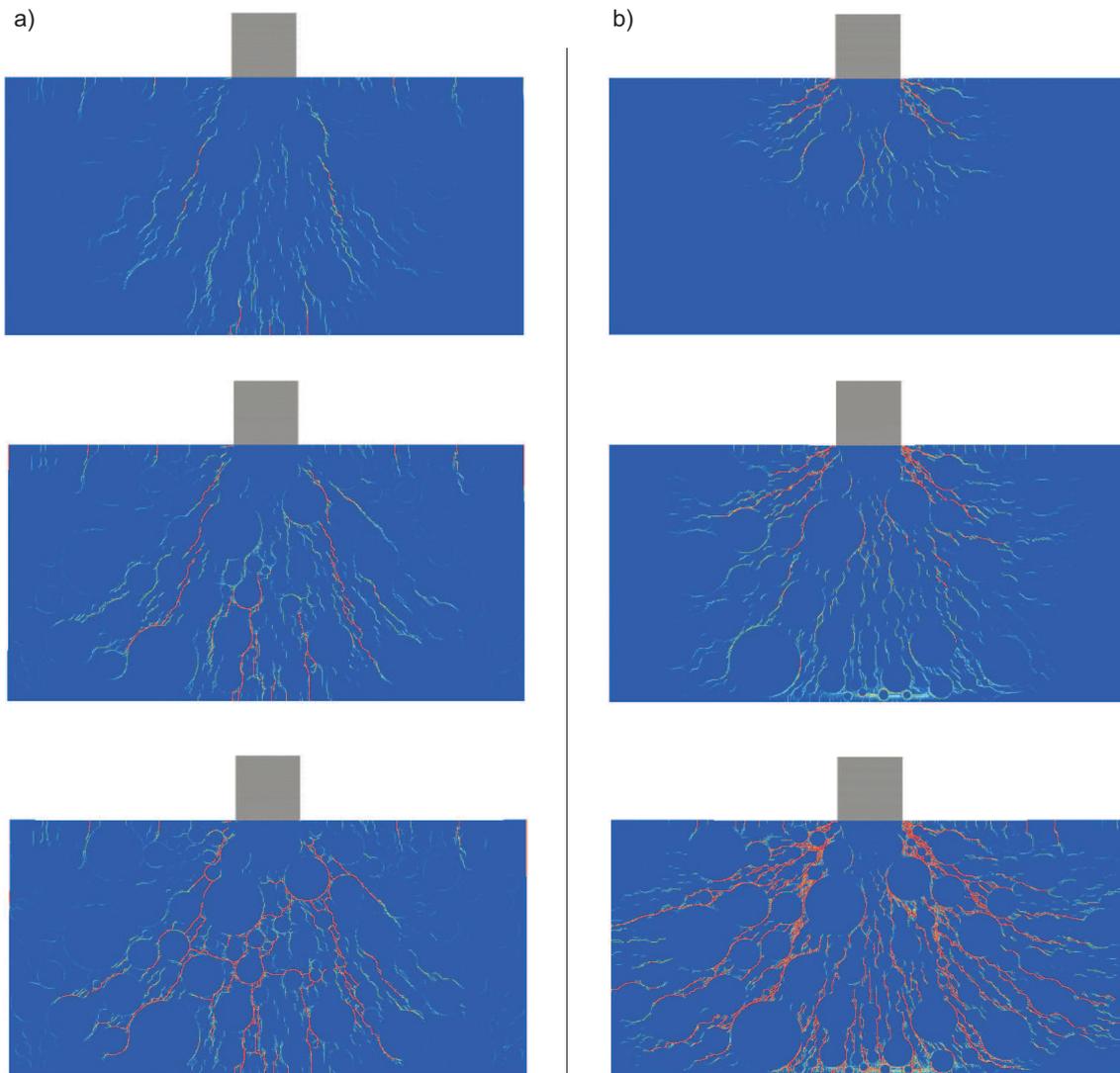


Abbildung 7.35: Biegezugversuche, numerische Schädigungsevolution; a) bei  $u = 1.0$  m/s, b) bei  $u = 5.0$  m/s

im Kopplungsbereich ein numerisches Artefakt darstellt (vgl. z.B. [2]), scheint die Schädigung im Auflagerbereich dagegen grundsätzlich realistisch. Da beide Schädigungen jedoch keinen Einfluss auf das eigentliche Simulationsergebnis haben, werden sie hier nicht näher untersucht.

Aus der durchgeführten Simulationsreihe kann gefolgert werden, dass das Schädigungsverhalten mit steigender Belastungsgeschwindigkeit zunehmend von Trägheitseffekten beeinflusst wird. Spannungsumlagerungen scheinen nur noch bedingt möglich. Es entstehen multiple Schädigungspfade, in denen deutlich mehr Energie in Bruchenergie umgewandelt wird als in nur einem einzelnen Schädigungspfad. Diese Effekte könnten somit eine wesentliche Ursache für die aus Experimenten bekannte verzerrungsratenabhängige Steigerung der Festigkeit (z.B. in [15], [35]) und der Bruchenergie (z.B. in [247]) darstellen.

## 7.6 Zusammenfassung und Folgerungen

In diesem Kapitel wurden Werkstoffsimulationen zur Untersuchung des Festigkeits- und Schädigungsverhalten von Beton durchgeführt. Als wesentliche Voraussetzung für diese Untersuchungen wurde das mesomechanische Modell zunächst um die für den Versagensprozess in Beton entscheidende Verbundzone zwischen Zuschlag und Zementstein, die Interfacial Transition Zone (ITZ), erweitert. Die Eigenschaften der ITZ wurden umfassend erläutert und ein auf empirischen Zusammenhängen beruhendes, für Normalbetone allgemein anwendbares Materialmodell zur Beschreibung der ITZ wurde entwickelt und implementiert.

Zur Validierung des um die ITZ erweiterten mesomechanischen Modells wurden aus der Literatur bekannte einaxiale Zug- und Druckversuche simuliert und ausgewertet. Dabei zeigten die Simulationen sowohl qualitativ als auch quantitativ eine gute Übereinstimmung mit den Versuchen.

Nach der Überprüfung der Vorhersagefähigkeit des Modells wurde der Zugfestigkeitsverlust des Betons infolge einer Druck-Vorbelastung untersucht. Aufbauend auf den in der Literatur vorhandenen Versuchsdaten mit einem sehr geringen Grobzuschlagsanteil wurden weiterführende numerische Simulationen auf mesomechanischer Ebene durchgeführt und aus deren Ergebnissen funktionale Zusammenhänge zwischen Grobzuschlagsanteil, Druck-Vorbelastung und Zugfestigkeitsverlust ermittelt. Die Erweiterung dieses Zusammenhangs auf den Bereich dreiaxialer Beanspruchungen ermöglichte zudem einen Vergleich der in den Werkstoffsimulationen bestimmten Daten mit weiteren aus der Literatur bekannten Versuchen. Auch dabei zeigte sich eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment. Sowohl die verfügbaren Versuche als auch die weiterführenden mesomechanischen Materialsimulationen zeigen einen deutlichen Zugfestigkeitsverlust vor Erreichen der maximalen Druckbeanspruchung. Zudem konnte in den Simulationen eine signifikante Zunahme der Duktilität nach Erreichen der Maximalspannung beobachtet werden.

Wenngleich die ermittelten Degradationsfunktionen nur teilweise auf Experimentaldaten beruhen, und somit nur als Abschätzung betrachtet werden können, so stellen sie doch einen wesentlichen Fortschritt bei der Beschreibung der Schädigung in einem makromechanischen Modell dar, da weder die Zugfestigung noch die Duktilitätszunahme infolge Druckvorbelastung bisher in einem dem Autor bekannten Materialmodell für Beton berücksichtigt werden.

Abschließend wurde anhand von Simulationen eines Drei-Punkt-Biegezugversuchs das Zugbruchverhalten von Beton bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten bzw. Verzerrungsraten untersucht. Es konnte festgestellt werden, dass das Schädigungsverhalten mit steigender Belastungsgeschwindigkeit von einem auf der Bauteilunterseite beginnenden "Aufreißen" in ein kegelförmiges "Durchstanzen" mit Schädigungsinitiierung auf der Bauteiloberseite übergeht. Dabei konnte die Massenträgheit des Systems als eine für dieses Verhalten wesentliche Ursache identifiziert werden.

Zusammenfassend ergeben sich aus den in diesem Kapitel durchgeführten Simulationen und den daraus gewonnenen Erkenntnissen vier für die makromechanische Modellbildung wesentliche Feststellungen und Grundannahmen, die in der Modellentwicklung mit zu berücksichtigen sind:

1. Die Zugfestigkeit des Betons ist sowohl vom Grobzuschlagsanteil als auch von der Vorbelastung abhängig.
2. Im Bereich "baupraktisch relevanter" Betonzusammensetzungen hat der Grobzuschlagsanteil nur einen geringen Einfluss auf den Zugfestigkeitsverlust infolge Druck-Vorbelastung ( $\pm 4\%$ ).
3. Der Zugfestigkeitsverlust beginnt bereits bei einer Druckbelastung  $\ll f_c$ .
4. Mit steigender Vorbelastung versagt der Beton unter Zugbeanspruchung zunehmend duktil.

Aus Punkt 1 ergibt sich die Notwendigkeit, die Belastungsgeschichte des auf Makroebene formulierten Materials während der Simulation anhand geeigneter Größen zu speichern.

Da ein makromechanisches Modell im Wesentlichen der Simulation von (geplanten) realen Bauteilen dient, legt die Feststellung in Punkt 2 eine Vernachlässigung des Einflusses des Grobzuschlagsanteils nahe. Dies scheint insbesondere möglich, da bereits die Standardabweichung der Versuchs- bzw. Simulationsdaten im Bereich von 4% liegt.

Aus Punkt 3 folgt, dass die Zugfestigkeit im Meridianschnitt des Modells unabhängig von der Druckfestigkeit veränderbar sein muss. Eine geschlossene Formulierung, wie beispielsweise die GUO-Bruchfläche im RGGP-Modell [106], bietet somit nicht die notwendige Flexibilität, da nach jeder Steigerung der Belastung alle Funktionsparameter neu iterativ bestimmt werden müssten.

Eine weitere für die makromechanische Modellbildung bedeutsame Feststellung ist das deutlich duktilere Nachbruchverhalten infolge Druck-Vorbelastung (Punkt 4). Dies ist bei der Schädigungsformulierung auf der Makroebene zu berücksichtigen.

Die in Abschnitt 7.4 festgestellte Einfluss der Kornverteilung auf die Festigkeit hat keinen direkten Einfluss auf die makromechanische Modellbildung. Sie verdeutlicht lediglich die Streuung der Materialeigenschaften, der sowohl die realen als auch die auf mesomechanischer Ebene in Simulationen bestimmten Materialeigenschaften unterliegen. Ein makromechanisches Modell (ohne Einbeziehung der Wahrscheinlichkeitstheorie) basiert auf im Bauteil "globalen" Eigenschaften (in der Regel der Mittelwert der Versuchsergebnisse) und kann somit die "Unschärfe" der Eigenschaften nicht abbilden. Dies ist grundsätzlich bei der Auswertung der Simulationen zu berücksichtigen.

Da die Massenträgheit im numerischen Modell unabhängig von der Modellebene abgebildet wird, können die in Abschnitt 7.5 bei höheren Belastungsgeschwindigkeiten bzw. Verzerrungsraten beobachteten Effekte grundsätzlich auf makromechanischer Ebene abgebildet werden. Daher ergeben sich diesbezüglich keine Implikationen für die makromechanische Modellbildung.

# Kapitel 8

## Makromechanische Materialbeschreibung

### 8.1 Allgemeines

Im vorangegangenen Kapitel wurde der Werkstoff Beton anhand des Zusammenwirkens seiner Hauptbestandteile auf mesomechanischer Ebene untersucht. Zur Berechnung der globalen und lokalen Strukturantwort realer Bauteile unter hochdynamischen Belastungen ist es jedoch heute immer noch erforderlich, den Beton als homogenes Material zu beschreiben. Einerseits führt die in der mesomechanischen Materialbeschreibung notwendige feine Elementierung zu erheblichen Rechenzeiten, andererseits ist die maximale Elementzahl in den kommerziellen Hydrocodes aufgrund des internen Speicherbedarfs begrenzt, so dass größere Strukturen (derzeit) ohnehin nicht auf dieser Ebene der Modellierung abgebildet werden können.

Eine direkte Anwendung der mesomechanischen Materialbeschreibung auf Bauteile mit in der Praxis üblichen Dimensionen ist somit nicht möglich. In diesem Kapitel werden daher die aus den mesomechanischen Werkstoffsimulationen in Kapitel 6 und in Kapitel 7 gewonnenen Erkenntnisse in ein makromechanisches Modell umgesetzt. Darüber hinaus wird der Anwendungsbereich des Modells durch Berücksichtigung des verzerrungsratenabhängigen Materialverhaltens auf (hoch-)dynamische Belastungen erweitert.

In den Untersuchungen der Festigkeiten auf mesomechanischer Ebene wurde bisher im Wesentlichen nur quasi-statisches Materialverhalten betrachtet. Im Folgenden wird daher zunächst das Festigkeitsverhalten von Beton unter (hoch-)dynamischer Beanspruchung näher betrachtet. Dabei werden bekannte funktionale Zusammenhänge zwischen Verzerrungsrate und Festigkeitssteigerung diskutiert und eine neue Funktion wird aufgestellt.

Anschließend wird ein Überblick über die derzeit gebräuchlichen Materialmodelle für Beton unter dynamischer Belastung gegeben. Dabei werden die wesentlichen

Schwachstellen der Modelle identifiziert und Folgerungen für ein neues Materialmodell gezogen.

Darauf aufbauend wird die Entwicklung eines neuen Materialmodells zur Beschreibung von Beton unter (hoch-)dynamischer Belastung beschrieben. Dabei wird zunächst die Formulierung der Fließfunktion für statische Belastungen dargestellt und deren Parameter erläutert. Zur Berücksichtigung der verzerrungsrateabhängigen Festigkeitssteigerung werden die entwickelten Festigkeitssteigerungsfunktionen in die Formulierung der Fließfläche implementiert. Aufbauend darauf erfolgt die Modellbildung der plastischen Verfestigung.

Anschließend wird die Formulierung des Schädigungsmodells beschrieben. Zudem wird die aus der Schädigungsevolution resultierende Degradation der Materialeigenschaften dargestellt und erläutert.

Ziel dabei ist es, das Schädigungsverhalten des Betons sowohl bei quasi-statischer als auch bei dynamischer Belastung möglichst realitätsnah abzubilden, um so zuverlässige Aussagen zum Zustand eines Bauteils nach einer Einwirkung treffen zu können.

Abschließend wird die Umsetzung der oben genannten Forderungen an die makromechanische Modellbildung überprüft und kritisch diskutiert.

## 8.2 Dynamisches Werkstoffverhalten von Beton

Beton zeigt unter hohen Belastungsgeschwindigkeiten bzw. Verzerrungsraten mitunter signifikante Steigerungen sowohl der Druck- als auch insbesondere der Zugfestigkeit. Da bei Belastungen durch Impakt oder Luftstoß hohe Verzerrungsraten auftreten (bei Kontaktdetonation bis zu  $10^7 s^{-1}$ ), ist eine Berücksichtigung dieses Phänomens bei der Modellbildung unumgänglich.

Verzerrungsrateabhängiges Festigkeitsverhalten von Beton wurde in zahlreichen Experimenten beobachtet und dokumentiert. Eine Vielzahl dieser Versuchsdaten wurde beispielsweise von BISCHOFF in [34], BISCHOFF & PERRY in [35] und von BACHMANN in [15] zusammengefasst.

Zwar ist die Ursache für dieses Phänomen noch nicht gänzlich geklärt, jedoch gibt es einige plausible Erklärungsansätze. Zum einen ist die Rissgeschwindigkeit im Beton, wie u.a. in [167] dargestellt, nach oben hin begrenzt und nimmt mit steigender Belastungsgeschwindigkeit auch nur vergleichsweise langsam zu. Da sich also Risse, aufgrund derer der Beton letztlich versagt, nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausbreiten können, lässt sich die Bruchlast steigern, wenn die Belastung ausreichend schnell aufgebracht wird. Zum anderen konnte von WEERHEIJM [281] in Split-Hopkinson-Bar Versuchen mit gekerbten Probekörpern beobachtet werden, dass sich mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit der Schädigungsbereich der Proben vergrößert, d.h. es bilden sich mehrere Riss-Ebenen, wodurch die insgesamt dissipierte Bruchenergie steigt. Schließlich ist anzunehmen, dass auch Effekte der

Massenträgheit bei der ratenabhängigen Festigkeitssteigerung eine Rolle spielen (vgl. z.B. [15]). Diese Annahme legt zugleich nahe, dass die Verfestigung keinem Grenzwert entgegen strebt, sondern "nach oben offen" ist.

### 8.2.1 Steigerung der Druckfestigkeit

Zur quantitativen Beschreibung der ratenabhängigen Festigkeitssteigerung von Beton bei Druckbelastung finden sich in der Literatur mehrere Formulierungen, von denen drei grundlegende Ansätze exemplarisch in Tabelle 8.1 gegenüber gestellt sind.

Tabelle 8.1: Formulierungen der ratenabhängigen Verfestigung bei Druckbelastung

C.E.B. [62]:	$\frac{f_{c,dyn}}{f_{c,stat}} = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^\alpha$	mit	$\dot{\epsilon}_0 = 3 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ , $\alpha = \frac{1}{5+3/4f_c}$	für	$\dot{\epsilon} \leq 30 s^{-1}$
	$\frac{f_{c,dyn}}{f_{c,stat}} = \gamma \sqrt[3]{\dot{\epsilon}}$	mit	$\log \gamma = 6\alpha - 0.492$		für $\dot{\epsilon} > 30 s^{-1}$
HJC [140]:	$\frac{f_{c,dyn}}{f_{c,stat}} = 1 + C \ln  \dot{\epsilon}^* $	mit	$C = \text{Formparameter}$ , $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}/1 s^{-1}$		
RGGP [106]:	$\frac{f_{c,dyn}}{f_{c,stat}} = \left\{ [\tanh((\log(\dot{\epsilon}^*) - W_x) \cdot S)] \cdot \left[\frac{F_m}{W_y} - 1\right] + 1 \right\} \cdot W_y$				
	mit	$F_m, W_x, W_y, S = \text{Formparameter}$ ,	$\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}/1 s^{-1}$		

Alle bekannten Steigerungsfunktionen sind aus Versuchen abgeleitet. Aus den von BISCHOFF & PERRY zusammen gestellten Versuchsdaten (Abbildung 8.1) wird jedoch deutlich, dass die Ergebnisse, auf denen diese Funktionen basieren, erheblich streuen. Diese Streuung lässt sich auch bei genauerer Betrachtung nicht mit unterschiedlichen Betongütern der jeweiligen Proben erklären und muss daher auf die Heterogenität des Betons zurückgeführt werden. Je nach den zur Bestimmung der Gesetzmäßigkeit verwendeten Messreihen ergeben sich daher unterschiedliche Funktionen. Zudem existieren für Beton kaum Versuche mit Verzerrungsraten  $\dot{\epsilon} > 10^2 s^{-1}$ . Untersuchungen mit höheren Verzerrungsraten sind auch nicht sinnvoll durchzuführen, da dabei nicht mehr von einem gleichmäßigen Spannungszustand ausgegangen werden kann (vgl. [167]). Das Verhalten oberhalb dieser Grenze ist somit nicht empirisch belegt und jede Extrapolation der vorhandenen Funktionen in den Bereich  $\dot{\epsilon} > 10^2 s^{-1}$  stellt lediglich eine Annahme dar.

Unter Berücksichtigung der hier dargestellten Aspekte können jedoch zwei grundlegende Annahmen getroffen werden:

- die Steigerung der Festigkeit strebt keinem festen Wert entgegen und
- sie ist nicht abhängig von der Betongüte.

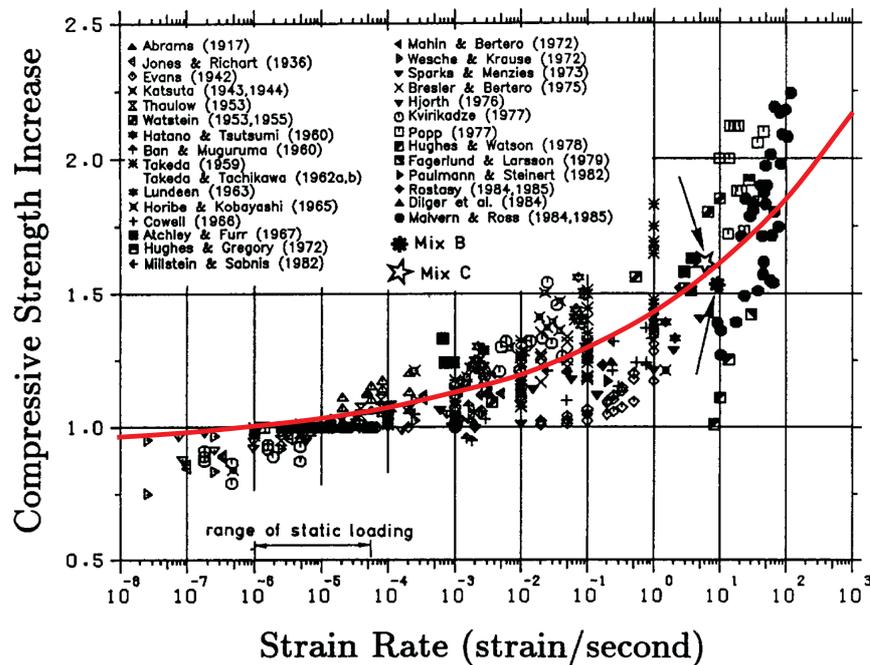


Abbildung 8.1: Dynamische Druckfestigkeitssteigerung von Beton in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate (BISCHOFF & PERRY [35])

Unter Zugrundelegung dieser Annahmen lassen sich die beschriebenen Funktionen hinsichtlich ihrer Eignung für das eigene Modell bewerten. So schließt der erste Punkt einen hyperbolischen Ansatz aus, da dieser bei  $\dot{\epsilon} \rightarrow \infty$  gegen einen festen Wert konvergiert.

Die im C.E.B. vorgeschlagene Funktion ist abhängig von der statischen Betonfestigkeit formuliert - ein Zusammenhang, der bisher nicht nachgewiesen werden konnte. Zudem führt eine Extrapolation der Formulierung des C.E.B. in den Bereich höherer Verzerrungsraten ( $\dot{\epsilon} > 10^2 \text{ s}^{-1}$ ) zu physikalisch nicht erklärbar hohen Festigkeitssteigerungen.

Die Funktion von HOLMQUIST, JOHNSON und COOK (HJC) bildet die Steigerungsfaktoren bei niedrigen und hohen Verzerrungsraten grundsätzlich gut ab. Sie zeigt jedoch im Bereich um  $10^{-4} \text{ s}^{-1} < \dot{\epsilon} < 1 \text{ s}^{-1}$  eine deutliche Abweichung von den Versuchsergebnissen.

Der gewählte Ansatz ist daher die in Abbildung 8.1 eingezeichnete Exponentialfunktion, die als "best fit" aus den Mittelwerten der Versuchsdaten in [34] bestimmt wurde.

$$\frac{f_{c,dyn}}{f_{c,stat}} = 0.5 \cdot \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{0.13} + 0.90 \quad \text{mit} \quad \dot{\epsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1} \quad (8.1)$$

Dabei sind die Parameter der Funktion bewusst mit maximal nur zwei Nachkom-

mastellen angegeben, da eine präzisere Bestimmung eine analytische Genauigkeit suggerieren würde, die bei der erheblichen Streuung der Versuchsdaten nicht haltbar ist.

Gleichung (8.1) bietet gegenüber den anderen Formulierungen den Vorteil, dass sie, neben der Berücksichtigung eines großen Datensatzes, im dynamischen und hochdynamischen Teil durchgängig in der Mitte des Datenbereichs verläuft.

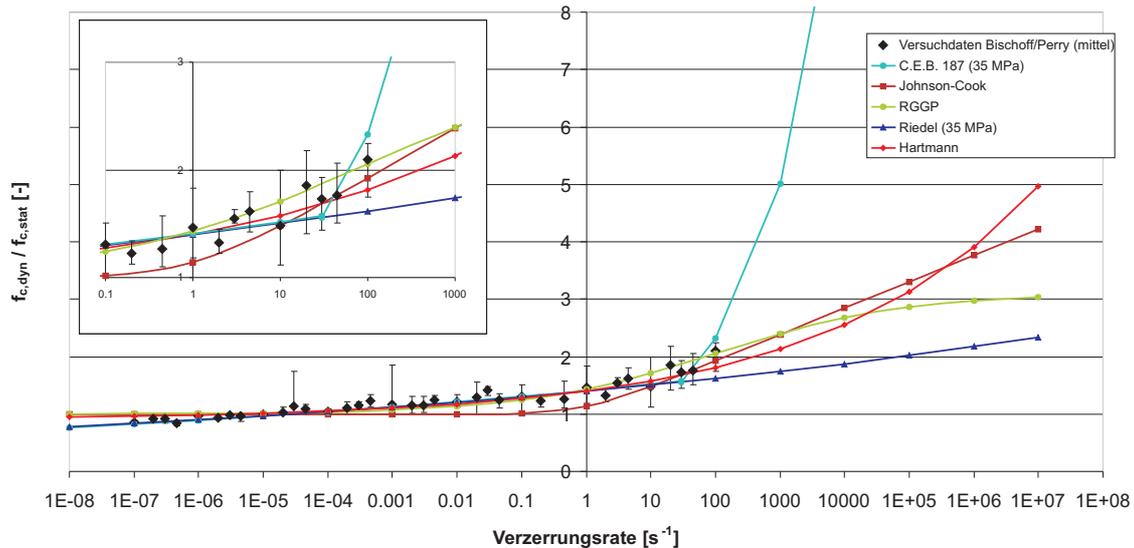


Abbildung 8.2: Dynamische Druckfestigkeitssteigerung; Gegenüberstellung verschiedener Steigerungsfunktionen mit den Mittelwerten der Versuchsdaten aus [35]

Abbildung 8.2 stellt die Mittelwerte und den Datenbereich der Versuchsdaten in [35] den beschriebenen Funktionen anderer Autoren und der eigenen Funktion gegenüber. Zum Vergleich ist zusätzlich die von RIEDEL [233] in RHT verwendete Extrapolation des ersten Abschnitts der C.E.B.-Formulierung abgebildet, die jedoch deutlich unterhalb der in den Versuchen gemessenen Steigerungen bleibt. Aus Abbildung 8.2 wird deutlich, dass die Steigung der gewählten Funktion auch im logarithmischen Maßstab mit steigenden Verzerrungsraten zunimmt. Es sei nochmals hervorgehoben, dass es sich dabei um ein Postulat handelt, das sich aus der Extrapolation der Versuchsdaten ergibt und nicht anhand von Experimenten belegt ist.

### 8.2.2 Steigerung der Zugfestigkeit

Das Phänomen der ratenabhängigen Festigkeitssteigerung ist bei Zugbelastung deutlich ausgeprägter als bei Druckbelastung. Dies konnte in zahlreichen Experimenten wie beispielsweise von ZIELINSKI 1982 [298], BACHMANN 1993 [15], MALVAR & ROSS

1998 [181] und SCHULER ET AL. 2006 [248], um nur einige zu nennen, festgestellt werden. Dieses unterschiedliche Verhalten des Betons bei schneller Druck- und Zugbelastung erfordert eine separate Formulierung der Steigerungsfunktion für Zug. Die derzeit in der Literatur für Materialmodelle zur Simulation hochdynamischer Belastungen auf Betonstrukturen verwendeten Festigkeitssteigerungsfunktionen gleichen in ihren mathematischen Ansätzen denen der in Tabelle 8.1 zusammengefassten Druckfestigkeitssteigerung und verwenden lediglich an die Phänomenologie des Verhaltens unter Zug angepasste Material- und Formparameter.

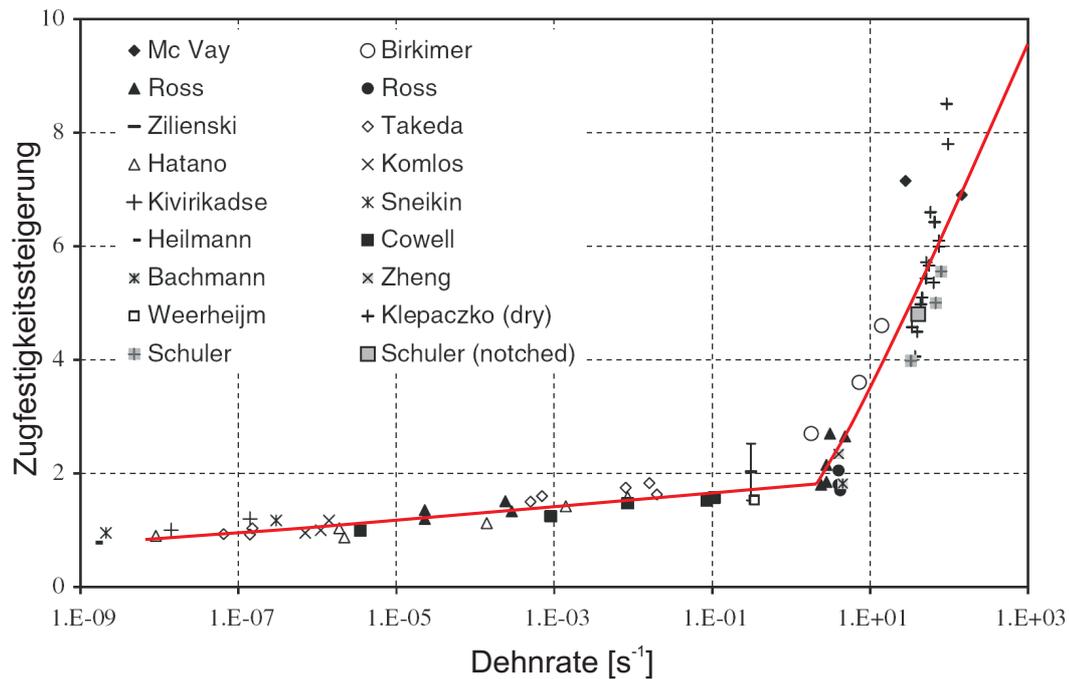


Abbildung 8.3: Dynamische Zugfestigkeitssteigerung von Beton in Abhängigkeit von der Dehnrate (SCHULER ET AL. [248])

Abbildung 8.3 zeigt die 2006 von SCHULER ET AL. [248] zusammengefassten Ergebnisse von Zugversuchen unter verschiedenen Dehnraten. Ein Vergleich der aus der Literatur zur Verfügung stehenden Steigerungsfunktionen mit den Mittelwerten der von SCHULER ET AL. zusammengestellten Versuchsdaten in Abbildung 8.4 macht jedoch deutlich, dass keine dieser Funktionen die errechneten Mittelwerte im gesamten Bereich korrekt wiedergibt.

So bleibt die Formulierung nach HOLMQUIST, JOHNSON und COOK (HJC) im Bereich von  $10^{-4} s^{-1} < \dot{\epsilon} < 1 s^{-1}$  deutlich unter den mittleren Versuchsdaten. Der hyperbolische Ansatz aus RGGP überschätzt dagegen die mittlere Festigkeitssteigerung im Bereich um  $\dot{\epsilon} = 10^0$ . Zudem strebt er einem endlichen Wert entgegen, was der auch für Zugbelastung angenommenen grundsätzlichen Forderung aus Abschnitt

8.2.1 widerspricht. Der im C.E.B. gewählte Ansatz bildet die Versuchsergebnisse im Bereich niedriger und mittlerer Dehnraten (bis  $\dot{\epsilon} = 3 \cdot 10^1 s^{-1}$ ) zwar relativ gut ab, zeigt aber bei höheren Dehnraten eine zunächst sehr schwache, dann jedoch stark ansteigende Verfestigung, die das reale Verhalten vermutlich deutlich überschätzt.

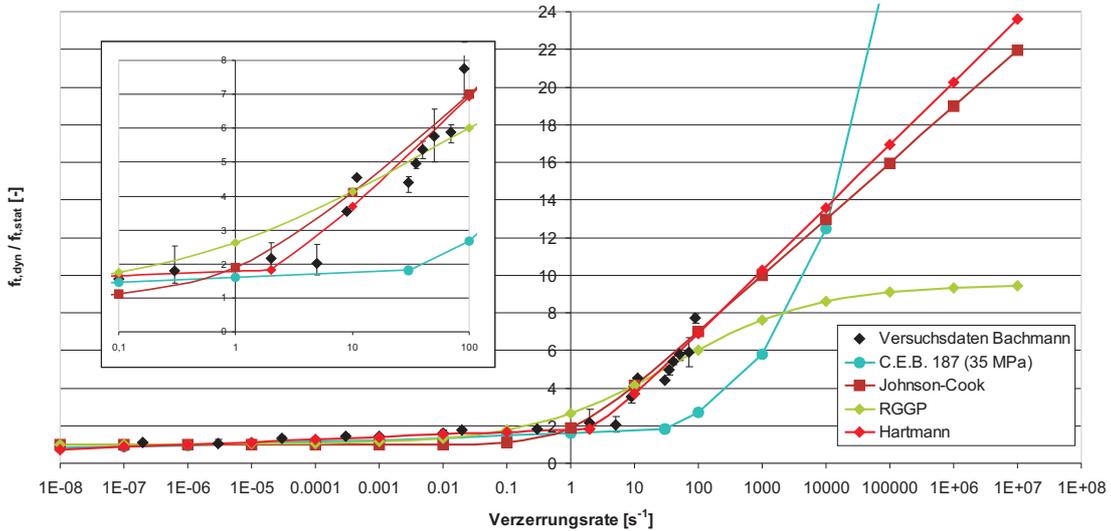


Abbildung 8.4: Dynamische Zugfestigkeitssteigerung; Gegenüberstellung verschiedener Steigerungsfunktionen mit den Mittelwerten der Versuchsdaten aus [248]

Da sich die mittleren Versuchsergebnisse weder durch eine polynomiale, noch durch eine exponentielle oder logarithmische Funktion geschlossen approximieren lassen, werden für das Modell in dieser Arbeit die in Abbildung 8.3 dargestellten zwei abschnittsweise definierte Funktionen gewählt. Dabei liegt der Schwerpunkt auf einer guten Näherung an die Versuchsdaten im unteren und mittleren Bereich, da die nach einer Kontaktdetonation durch Reflexion im Bauteil entstehenden Zugwellen nur selten Dehnraten  $\dot{\epsilon} > 10^3 s^{-1}$  hervorrufen. Die Anpassung der Funktionen an die Experimentaldaten ergibt

$$\begin{aligned} \frac{f_{t,dyn}}{f_{t,stat}} &= 0.13 \cdot \log\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}\right) + 1.78 && \text{für } \dot{\epsilon} \leq 2s^{-1} \quad \text{und} \\ \frac{f_{t,dyn}}{f_{t,stat}} &= 1.45 \cdot \ln\left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}\right)\right] + 0.23 && \text{für } \dot{\epsilon} > 2s^{-1}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

wobei  $\dot{\epsilon}_0$  die Referenzdehnrates von  $1s^{-1}$  darstellt. Auch hier sind die Parameter aus dem zuvor genannten Grund auf zwei Nachkommastellen begrenzt.

Die wesentlichen Vorteile dieser Formulierung liegen darin, dass sie sich zum einen auf einen relativ großen Datensatz stützt, und zum anderen, wie in Abbildung 8.4

deutlich erkennbar ist, die Mittelwerte dieser Daten besonders im mittleren Bereich besser annähert als die aus der Literatur bekannten Funktionen. Zwar ergibt die gewählte Formulierung für extrem niedrige Dehnraten, verglichen mit den Versuchsergebnissen, zu niedrige Werte, jedoch scheint dies in Anbetracht der Aufgabenstellung zur Beschreibung hochdynamischer Vorgänge akzeptabel.

Die Extrapolation von Gleichung (8.2) in den Bereich von Dehnraten  $\dot{\epsilon} > 100s^{-1}$  stellt jedoch, ebenso wie Gleichung (8.1) zur Beschreibung der Druckfestigkeitssteigerung, lediglich ein Postulat auf Grundlage der Forderung nach einer "nach oben offenen" Formulierung dar, da auch für Zugbeanspruchung für diese Dehnraten keine Versuchsdaten vorliegen.

### 8.3 Bekannte Materialmodelle für Beton unter (hoch-)dynamischer Belastung

Auf dem Spezialgebiet der Modellierung von Beton unter hohen Drücken und hohen Verzerrungsraten, wie sie bei Kontaktdetonationen erreicht werden, gibt es nur verhältnismäßig wenige Veröffentlichungen und noch deutlich weniger unterschiedliche Werkstoffmodelle. Einen guten Überblick über diese Materialmodelle geben CLEGG bis 1995 in [60] und Ruppert bis 2000 in [238]. Heute stellen neben dem bereits in Abschnitt 1.2.3 erwähnten HJC-Modell u.a. die folgenden Modelle die neuere Entwicklung und den Stand der Erkenntnisse dar:

- MALVAR ET AL. "K & C" [185]
- RIEDEL "RHT" [233], erweitert durch SCHULER [247]
- GEBBEKEN und GREULICH "RGGP" [93]
- PANDEY ET AL. [216]

#### 8.3.1 K & C

Das von MALVAR ET AL. ursprünglich 1994 [183] veröffentlichte und bis heute mehrfach weiterentwickelte Materialmodell "K & C" basiert auf dem Modell von WILLAM-WARNKE und erweitert es hinsichtlich der Phänomene triaxialen Materialverhaltens von niedrigen bis zu höchsten Belastungsgeschwindigkeiten. Volumetrisches und deviatorisches Materialverhalten werden dabei durch eine poröse Zustandsgleichung und eine Versagensfläche mit anfänglich nicht-assoziativer, später assoziativer Fließregel entkoppelt beschrieben.

Das deviatorische Materialverhalten wird mittels drei von einander unabhängigen Grenzflächenformulierungen für Fließspannung ( $\Delta\sigma_y$ ), maximale Verfestigung ( $\Delta\sigma_m$ ) und Restfestigkeit ( $\Delta\sigma_r$ ) abgebildet. Wird die Fließspannung überschritten,

so beginnt die plastische Verformung und das Material verfestigt sich bis zum Erreichen der Maximalspannung. Danach verringert sich die Materialfestigkeit bis zur Restfestigkeit (siehe Abbildung 8.5).

$$\Delta\sigma_y = a_{0y} + \frac{p}{a_{1y} + a_{2y}p} \quad (8.3)$$

$$\Delta\sigma_m = a_0 + \frac{p}{a_1 + a_2p} \quad (8.4)$$

$$\Delta\sigma_r = \frac{p}{a_{1f} + a_{2f}p} \quad (8.5)$$

Die Parameter  $a_{0y}, a_{1y}, a_{2y}, a_0, a_1, a_2, a_{1f}$  und  $a_{2f}$  bestimmen dabei die Form der Grenzflächen und sind vom Nutzer festzulegen. Zwischen den einzelnen Flächen wird mittels einer, teilweise vom Anwender zu bestimmenden und von der Art der Belastung abhängigen, Funktion  $\eta$  der akkumulierten plastischen Verzerrungen interpoliert.  $\eta$  kann dabei einen Wert von 0 bis 1 annehmen.

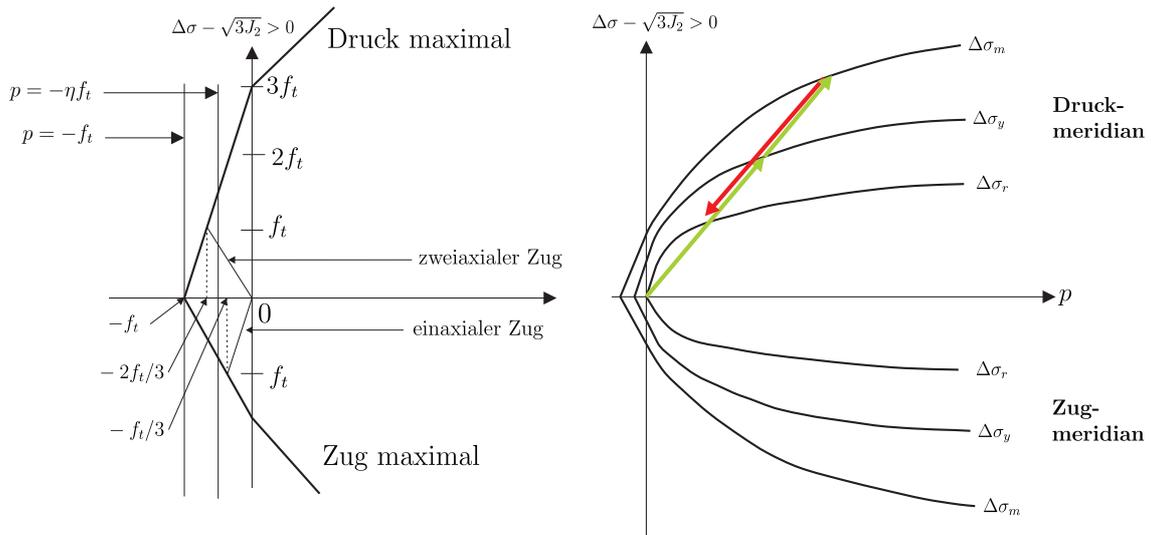


Abbildung 8.5: Darstellung der Grenzflächen des K & C Modells nach [209]

Das vom LODE-Winkel abhängige Materialverhalten wird durch die Formulierung von WILLAM-WARNKE berücksichtigt, wobei auch der druckabhängige Übergang von sprödem zu duktilem Verhalten abgebildet wird.

Die verzerrungsratenabhängige Steigerung der Festigkeit erfolgt über eine vom Anwender zu definierende abschnittsweise lineare Funktion und bewirkt eine Aufweitung der Grenzfläche  $\Delta\sigma_m$ . Die experimentell belegte Erweiterung des elastischen

Bereichs (vgl. [128]) wird dabei jedoch nicht berücksichtigt. Die zunächst nicht-assoziative Fließregel wurde 1996 auf eine teil-assoziative und assoziative Fließregel erweitert (siehe [184]), um auch die Volumendilatation bei Schubverzerrungen abbilden zu können. Die Notwendigkeit der Abbildung der Volumendilatation wird jedoch durch CHEN relativiert, der in [56] feststellt, dass diese nur bei niedrigen hydrostatischen Drücken und kurz vor dem Versagen auftritt. Sie wird daher in vielen Modellen nicht berücksichtigt (vgl. [60]).

Die Degradation des Kompressions- und Schubmoduls wird über ein kumulatives Schädigungsmodell gesteuert, das im Wesentlichen auf den effektiven plastischen Verzerrungen basiert. Die Schädigungssinkremente sind dabei mit den Parametern  $b_i = b_1$  für  $p \geq 0$  und  $b_i = b_2$  für  $p < 0$  für Druck und Zug unterschiedlich formuliert:

$$\Delta\lambda = \frac{\overline{\Delta\varepsilon^p}}{\left[1 + \left(\frac{s}{100}\right)(r_f - 1)\right] \left(1 + \frac{p}{r_f f_i}\right)^{b_i}} \quad (8.6)$$

Der Eingabeparameter  $s$  erlaubt dabei die Variation der "Auswirkung" des Ratenfaktors  $r_f$ . Da dieses rein deviatorische Kriterium eine Schädigung durch hydrostatische Zugspannungen nicht abbilden kann, verfügt das Modell über ein zusätzliches volumetrisches Zugschädigungssinkrement der Form  $\Delta\lambda = b_3 f_d k_d (\varepsilon_v - \varepsilon_{v,yield})$ , wobei der Parameter  $f_d$  ein Annäherungsparameter ist, der je nach Nähe zu einem hydrostatischen Zugspannungszustand einen Wert zwischen 0 und 1 annimmt.

Das K & C Modell ist derzeit eines der am Häufigsten verwendeten Materialmodelle zur Simulation von Beton unter hochdynamischen Belastungen. Dennoch zeigen sich bei genauer Betrachtung auch einige Nachteile des Modells. So erfordert seine hohe Komplexität mit insgesamt 71 Parametern ein erhebliches Hintergrundwissen des Anwenders. Zwar wurde 1999 auch eine "simple input"-Variante des Modells entwickelt [182], jedoch ist die darin enthaltene Bestimmung der Parameter aus der einaxialen Druckfestigkeit  $f_c$  durchaus fragwürdig (vgl. [5]) und verringert nicht den erforderlichen Kenntnisstand des Nutzers. Zudem sind beispielsweise die Parameter  $b_2$  und  $b_3$ , die die Schädigung infolge Zugbeanspruchung steuern, hochgradig netzabhängig (vgl. [209]) und viele der festen Parameter des Modells wurden nicht aus Stoßwellendaten für sehr hohe Drücke bestimmt (vgl. [233]). Darüber hinaus wird die Poissonzahl als konstant angenommen, was nicht mit dem im Experiment beobachteten Verhalten korreliert.

Zwar wurde das Modell 2005 in den ALE-Code "ALE3D" portiert und geringfügig erweitert [209], jedoch wurden diese Nachteile dabei nicht beseitigt.

### 8.3.2 RHT

Das 2000 von Riedel [233] am Ernst-Mach-Institut veröffentlichte Werkstoffmodell RHT für Beton unter dynamischen Lasten ist dem Ansatz von MALVAR ET AL. grundsätzlich ähnlich, basiert jedoch auf dem Modell von HOLMQUIST, JOHNSON

und COOK und erweitert dieses ebenfalls zur Abbildung der Phänomenologie des Betons unter hohen Belastungsgeschwindigkeiten. Das volumetrische Materialverhalten wird dabei durch eine  $p$ - $\alpha$  Zustandsgleichung vom deviatorischen entkoppelt beschrieben. Das deviatorische Materialverhalten ist in einer Versagensfläche mit nicht-assoziativer Fließregel abgebildet. Die Formulierung der Fläche im Meridianschnitt, der Abhängigkeit vom LODE-Winkel  $\theta$  (bzw. der dritten Invarianten des Spannungsdeviators  $J_3$ ) und der Ratenabhängigkeit ist modular gewählt, um einerseits eine Portierbarkeit in andere Codes zu gewährleisten und andererseits einen Austausch einzelner Module oder eine Erweiterung auf andere Materialien zu ermöglichen. Sie setzt sich daher aus drei Einzelanteilen zusammen:

$$Y_{fail}(p, \theta, \dot{\varepsilon}) = Y_{TXC}(p) R_3(\theta) F_{Rate}(\dot{\varepsilon}) \quad . \quad (8.7)$$

Die Form der Versagensfläche im Meridianschnitt ( $Y_{TXC}(p)$ ) wird dabei durch insgesamt drei Parameter für die druckunabhängige Festigkeit sowie für die lineare und exponentielle Druckabhängigkeit beschrieben. Da diese mathematisch stetige Funktion es jedoch nicht ermöglicht, das im Experiment ermittelte Materialverhalten bei niedrigen und negativen hydrostatischen Drücken exakt abzubilden, wird unterhalb eines Dicks von  $p/f_c = 1/3$  zwischen den aus der Literatur entnommenen bzw. abgeleiteten ([139], [161]) Messpunkten bei  $p = 0$  und der triaxialen Zugfestigkeit HTL stückweise linear interpoliert. Die  $J_3$ -Abhängigkeit in  $R_3(\theta)$  basiert auf der Formulierung nach WILLAM-WARNKE mit einem linear druckabhängigen Übergang von einer Dreiecks- zu einer Kreisform. Zur Beschreibung der verzerrungsratenabhängigen Verfestigung bedient sich RIEDELS Modell der Formulierung von BISCHOFF und SCHLÜTER [36], wobei zwischen  $p = f_c/3$  und  $p = -f_t/3$  zwischen den exponentiellen Funktionen für Druck und Zug linear interpoliert wird.

Beginnendes Fließen wird durch eine separat formulierte elastische Grenzfläche  $Y_{el}(p, \theta, \dot{\varepsilon})$  abgebildet, nach deren Überschreitung eine isotrope Verfestigung einsetzt. Ausgehend davon, dass bei porösen Materialien irreversible (plastische) Verformungen auch unter einem rein hydrostatischen Spannungszustand - nämlich mit beginnendem Porenkollaps - möglich ist, wird die elastische Grenzfläche in Richtung der Hydrostaten durch eine Kappenfunktion begrenzt. Die anschließende Verfestigung wird anhand einer Fläche  $Y_{pre}$  modelliert, die sich, ausgehend von der elastischen Grenzfläche, ausdehnt, bis sie sich mit der Versagensfläche  $Y_{fail}$  deckt. Die dritte Grenzfläche in RIEDELS Modell,  $Y_{fric}$ , beschreibt die Restfestigkeit des vollständig geschädigten Materials, wobei keine Zugspannungen mehr, und Schubspannungen nur noch unter Druck aufgenommen werden können. In teilgeschädigten Zuständen wird zwischen  $Y_{fail}$  und  $Y_{fric}$  interpoliert. Die Schädigungsformulierung selbst ist weitgehend unverändert von HOLMQUIST, JOHNSON und COOK [140] übernommen. Sie basiert auf einem normierten Schädigungsparameter  $0 \leq D \leq 1$  ( $0 =$  ungeschädigt;  $1 =$  vollständig geschädigt), der sich aus der Summe der inkrementellen effektiven plastischen Verzerrungen ergibt. Anhand dieses Schädigungsparameters erfolgt schließlich auch die Degradation der Steifigkeiten und Festigkeiten.

Fließ- und Versagensfläche des RHT-Modells sind in Abbildung 8.6 schematisch dargestellt.

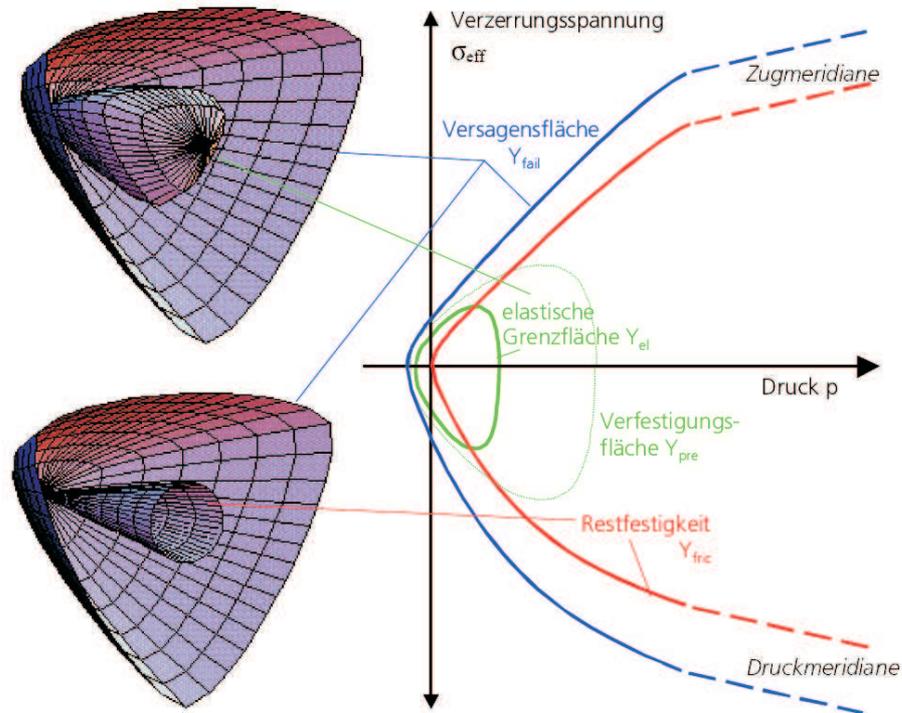


Abbildung 8.6: Darstellung der Grenzflächen des RHT Modells [233]

SCHULER [247] erweiterte 2004 diese Schädigungsformulierung. Dabei werden die Schädigung infolge hydrostatischer Druckspannungen ( $D_{com}$ ) und die Zugentfestigung ( $D_{ten}$ ) getrennt betrachtet und inkrementell additiv zusammengeführt.  $D_{com}$  errechnet sich unter Berücksichtigung der Belastungsgeschichte über eine bilineare Funktion aus der Zustandsgleichung, während  $D_{ten}$  anhand der inkrementellen Rissöffnung  $\Delta\delta$  und der, von der Rissgeschwindigkeit abhängigen, Bruchenergie  $G_f$  bestimmt wird (vgl. Abbildung 8.7).

$$\Delta D_{ten} = \frac{f_t(\dot{\epsilon})}{G_f(\dot{\delta})} \frac{k^2}{k+1} D^{\frac{k-1}{k}} \Delta\delta \quad \text{mit} \quad D \geq 0 \quad . \quad (8.8)$$

Zur Beschreibung der Ratenabhängigkeit der Zugfestigkeit  $f_t(\dot{\epsilon})$  verwendet SCHULER eine aus der Literatur und eigenen Versuchen abgeleitete Exponentialfunktion nach ROSS [237].

Das erweiterte Werkstoffmodell RHT bildet die meisten physikalischen Phänomene der hochdynamischen Belastungen ab und liefert gute Ergebnisse bei der numerischen Simulation von Impakt-Beanspruchungen. Besonders hervorzuheben ist die

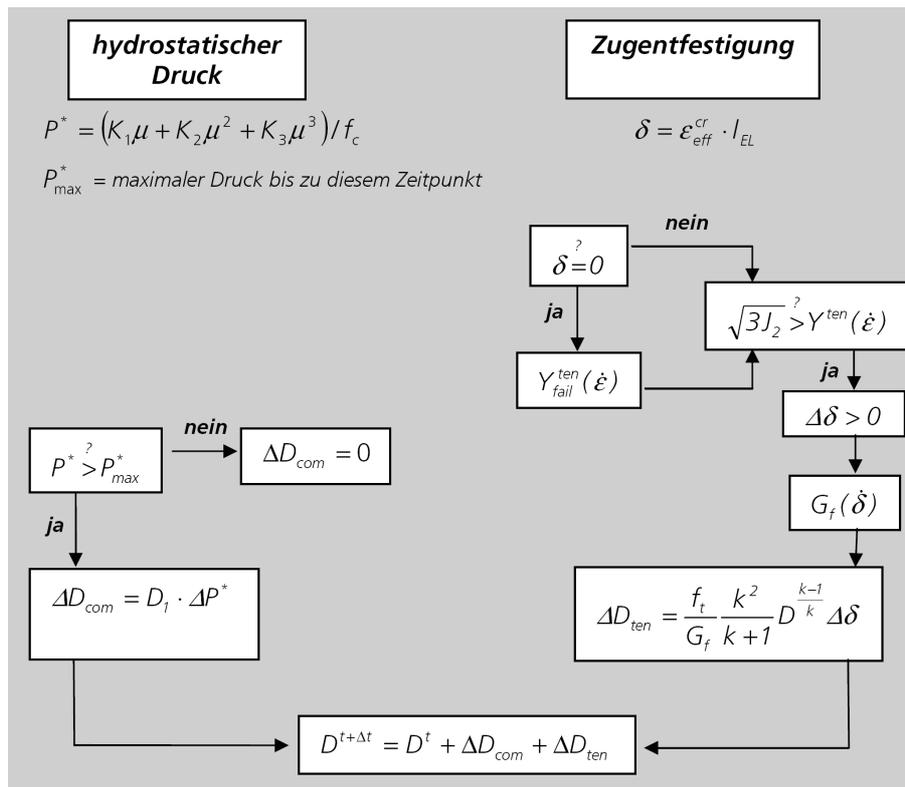


Abbildung 8.7: Schematischer Aufbau des SCHULER Schädigungsmodells (aus [247])

Flexibilität aufgrund des modularen Aufbaus des Modells. Diese erfordert jedoch die Eingabe einer Vielzahl von Parametern, die experimentell nicht, oder nur schwer bestimmbar sind und nicht mit Parameterstudien hinterlegt sind (vgl. [118], [180]). Zudem wurde bei der Berücksichtigung der Verzerrungsratenabhängigkeit eine vereinfachte Formulierung gewählt (vgl. Abschnitt 8.5.1), was zu teilweise deutlichen Fehlern bei hohen Verzerrungsraten führt. Das Modell zeigt daher Schwächen bei der Abbildung der Schädigung infolge Kontaktdetonation, die auch in der durch SCHULER erweiterten Fassung noch nicht behoben sind (vgl. [247]).

### 8.3.3 RGGP

Das ursprünglich 2004 von GREULICH [106] am Institut für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr entwickelte Stahlfaserbeton-Werkstoffmodell "RGGP" beschreibt das Materialverhalten basierend auf einer Bruchflächenformulierung nach GUO [110]. Es ist eine Weiterentwicklung des 2000 am selben Institut von GEBBEKEN und RUPPERT entwickelten Modells "RUPPCON" [95], [238] und dafür konzipiert, je nach Wahl der Parameter, Stahlfaser- oder auch unbewehrten Beton unter

hohen Drücken und Verzerrungsraten zu simulieren.

Auch in diesem Modell werden, im Hinblick auf die Portierbarkeit in andere Codes, das volumetrische und deviatorische Materialverhalten entkoppelt durch eine Zustandsgleichung für poröse Materialien (z.B. P- $\alpha$ -EoS) und eine Versagensfläche mit nicht-assoziativer Fließregel beschrieben. GREULICH verwendet eine in sich geschlossene Formulierung; die Form der Fläche im Meridianschnitt, die Abhängigkeit vom LODE-Winkel  $\theta$  und die Ratenabhängigkeit werden in nur einer Funktion zusammengefasst, deren Parameter die Phänomenologie in funktionaler Form abbilden:

$$\tau_0 = a(f_c(\dot{\varepsilon}), D) \left( \frac{b(f_t(\dot{\varepsilon}), D) - \sigma_0}{c(\theta, D) - \sigma_0} \right)^d \quad (8.9)$$

Ausgehend von der Annahme, dass die maximal aufnehmbare Schubspannung  $\tau_0$  (normiert auf die einaxiale Druckfestigkeit) mit steigendem hydrostatischen Druck gegen einen festen Wert konvergiert, beschreibt der Parameter  $a$  diesen Grenzwert. Der Parameter  $b$  entspricht der dreiaxialen Zugfestigkeit (HTL) und begrenzt die Fläche im Bereich negativer Drücke. Die Funktion des Meridianparameters  $c(\theta, D) = c_t(\theta, D) + c_c(\theta, D)$  beschreibt die einem REULEAUX-Dreieck ähnliche Form der Bruchfläche im Deviatorschnitt. Diese Dreiecksform geht mit zunehmender Schädigung in eine Kreisfläche über. Der exponentielle Parameter  $d$  steuert die Form der Meridiane längs der Hydrostaten. Die Funktionsparameter sind schematisch in Abbildung 8.8 dargestellt.

Die Materialparameter im Ausgangszustand sind dabei von aus der Literatur bekannten Experimentdaten, insbesondere von ZHOU 1995 [296], abgeleitet.

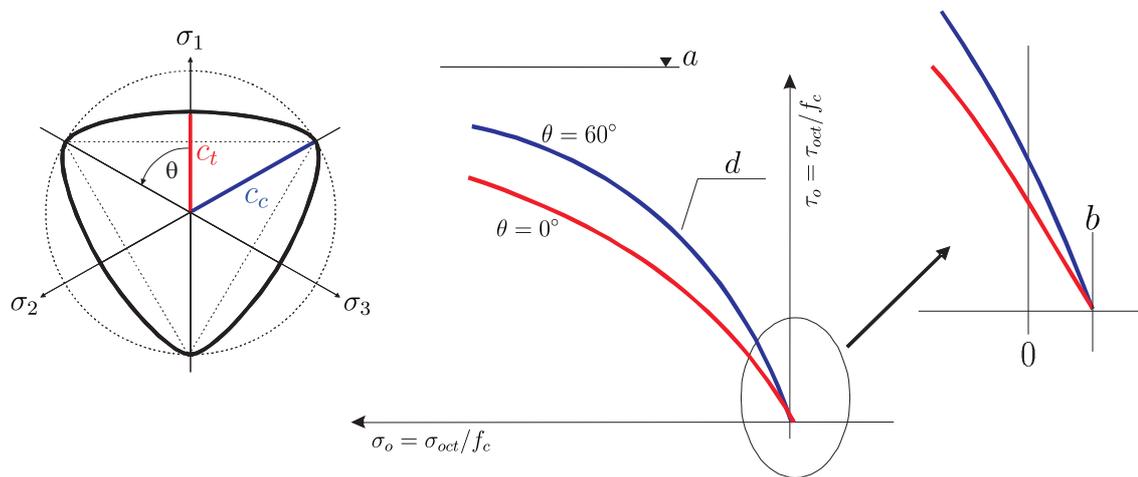


Abbildung 8.8: Darstellung der Grenzfläche des RGGP Modells [106]

Im Modell RGGP werden Fließ- und Bruchfläche auf einander abgebildet. Das Material beginnt erst mit Erreichen der Bruchfläche zu fließen und verhält sich bis

dorthin elastisch. Eine plastische Verfestigung wird nicht beschrieben. Die ratenabhängige Festigkeitssteigerung ist für Druck- und Zugbeanspruchung getrennt in relativ komplexen hyperbolischen Gleichungen formuliert, die jeweils eine obere Grenze der möglichen Festigkeitssteigerung postulieren.

Die Schädigungsfunktion in RGGP basiert ebenfalls auf dem Ansatz von HOLMQUIST, JOHNSON und COOK [140] und erweitert diesen in zweierlei Hinsicht. Zum einen wird, basierend auf den Erkenntnissen des C.E.B 1987 [62], die Bruchverzerrung ratenabhängig erhöht, zum anderen wird neben der inkrementellen Schädigung durch Gestaltänderung ( $D_1$ ) eine Schädigung durch Kompaktion ( $D_2$ ) eingeführt. Dieses Schädigungsinkrement  $D_2$  berechnet sich aus den Inkrementen der Porenkompaktion  $\Delta\mu_{por}$  bezogen auf das Kompaktionsvermögen  $\mu_{gran}$  des Materials. Die beiden Schädigungsinkremente werden schließlich über eine postulierte Kreisgleichung zu dem globalen Schädigungsparameter  $D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$  verknüpft. Die Degradation der Bruchflächenparameter erfolgt abhängig von der globalen Schädigung  $D$ .

Auch das Werkstoffmodell RGGP bildet die meisten physikalischen Phänomene der hochdynamischen Belastungen ab und liefert insbesondere bei der Simulation von Kontaktdetonationen gute Ergebnisse. Bei der Simulation von Penetrationsprozessen liefert das Modell nur bedingt zuverlässige Ergebnisse. Nachteilig ist zudem, dass keine Schädigung infolge hydrostatischer Zugspannungen abgebildet werden kann. Es berücksichtigt zudem, auf Grund der Annahme der elastischen Verformung bis zum Erreichen der Bruchfläche, keine plastische Verfestigung. Dies führt in Zusammenhang mit der direkt einsetzenden Degradation der Steifigkeiten zu einem, in der Realität nicht zu beobachtenden, Knick im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm. Darüber hinaus führt die Degradation der elastischen Moduln nicht zu einer Änderung der Energiebilanz. Dies wurde jedoch gem. [219] im Rahmen der Weiterentwicklung behoben und programmtechnisch umgesetzt.

### 8.3.4 Pandey

Das von PANDEY ET AL. [216] für die Anwendung in FE-Codes entwickelte und 2006 veröffentlichte Werkstoffmodell stellt zwar keine wesentlichen neuen Ansätze vor, vereint jedoch verschiedene Ansätze zur Beschreibung der Phänomenologie des Materialverhaltens von bewehrtem Beton unter hochdynamischer Beanspruchung. Die zu Grunde gelegte Bruchfläche basiert auf dem Modell von MENETREY und WILLAM [192] in einer Formulierung im Hauptspannungsraum.

$$F(\xi, \rho, \theta) = \left( \frac{\sqrt{1,5}\rho}{f_{cd}} \right)^2 + m \left[ \rho \frac{r(\theta, e)}{\sqrt{6}f_{cd}} + \frac{\xi}{\sqrt{3}f_{cd}} \right] - 1 = 0 . \quad (8.10)$$

Der Materialparameter  $m$  wird so bestimmt, dass die einaxiale Druck- und Zugfestigkeit auf der Bruchfläche liegen und ergibt sich daher zu:

$$m = \left[ \frac{3(f_c^2 - f_t^2)}{f_c f_t} \right] \frac{e}{e + 1}. \quad (8.11)$$

Die  $J_3$ -Abhängigkeit in  $r(\theta, e)$  basiert auf der Formulierung nach WILLAM-WARNKE, wobei der "Exzentrizitäts"-Parameter  $e$  einen druckabhängigen Übergang von einer Dreiecks- zu einer Kreisform im Deviatorschnitt bewirkt.

Die in der Bruchfläche verwendete dynamische Festigkeit  $f_{cd}$  zur Berücksichtigung der verzerrungsratenabhängigen Verfestigung ist aus der Beschreibung von SOROUS-HIAN [257] ( $f_{cd}/f_c = A_0 + A_1 \log(\dot{\epsilon}) + A_2 [\log(\dot{\epsilon})]^2$ ) einschließlich der für Stahlbeton vorgeschlagenen Parameter  $A_0$  bis  $A_2$  übernommen.

PANDEY ET AL. legen in ihrem Modell ein visko-plastisches Materialverhalten zu Grunde. Die Ratenabhängigkeit der plastischen Verformungen wird durch eine Exponentialfunktion  $\gamma(\dot{\epsilon})$  nach HATANO und TSUTSUMI [120] beschrieben,

$$\gamma(\dot{\epsilon}) = \dot{\epsilon}_{ref} e^{c_0 + c_1 \log(\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_{ref})}, \quad (8.12)$$

wobei die Form der Kurve anhand der Parameter an aus der Literatur bekannte Versuchsergebnisse angepasst wurde. Für den Bereich der Zugbeanspruchung und das Nachbruchverhalten, bei dem der Bewehrungsstahl eine besondere Rolle spielt, wird ein verschmiertes Rissmodell auf Grundlage einer trilinearen Funktion nach GUPTA und MAESTRINI [111] verwendet, dessen Parameter sich aus den Verhältnissen der E-Moduln, der Zugfestigkeiten und der Querschnittsflächen in der jeweiligen Orientierung ergeben. Dabei wird das Materialverhalten bis zum Erreichen der Bruchgrenze als linear angenommen und danach die Steifigkeit stufenweise reduziert. Die Degradation der Schubsteifigkeit erfolgt exponentiell abhängig von der plastischen Verzerrung.

Der Fokus dieses Materialmodells liegt, wie aus der Formulierung der Schädigung deutlich wird, in der Abbildung des Zugverhaltens unter hohen Verzerrungsgeschwindigkeiten. In diesem Bereich zeigt es auch teilweise gute Ergebnisse. Jedoch weist das Modell, trotz seiner Aktualität, teilweise erhebliche Defizite auf:

- Das Modell bildet keine Schädigung unter Druckbeanspruchung ab. Eine Degradation der Festigkeiten und Steifigkeiten erfolgt in diesem Bereich nicht.
- Die Materialeigenschaften sind im Wesentlichen aus einaxialen Versuchen bestimmt. So wird beispielsweise die einaxiale gleich der zweiaxialen Druckfestigkeit angenommen, was nicht mit veröffentlichten Versuchsergebnissen, beispielsweise von YIN ET AL. [291], übereinstimmt.
- Die Parameter des Modells basieren nur teilweise auf Daten aus hochdynamischen Experimenten. Vergleichsberechnungen mit Versuchen aus diesem Bereich fehlen. Die Anwendbarkeit des Modells zur Simulation von beispielsweise Kontaktdetonationen ist somit offen.

### 8.3.5 Folgerungen für das eigene Modell

Die in diesem Abschnitt dargestellten Materialmodelle bilden die in Versuchen beobachteten Phänomene bei Beton unter hochdynamischen Lasten auf unterschiedliche Weise ab, zeigen jedoch alle prinzipiell gute Ergebnisse bei der Simulation. In Tabelle 8.2 sind die aktuellen Materialmodelle hinsichtlich der zu Grunde liegenden Bruchflächen- und Schädigungsformulierungen nochmals zusammengefasst.

Tabelle 8.2: Aktuelle Materialmodelle für Beton unter hochdynamischer Belastung

Modell	Bruchfläche nach	Schädigungsmodell	Besonderheiten
K & C	WILLAM-WARNKE [286]	plastische Verzerrungen gekoppelt mit volumetrischer Zugschädigung	Drei-Flächen-Modell mit plast. Verfestigung und assoziativer Fließregel
RHT	HOLMQUIST, JOHNSON und COOK [140], MURRAY [201]	HOLMQUIST, JOHNSON und COOK [140] oder Bruchenergiekriterium	Drei-Flächen-Modell mit elastischer Kappe
RGGP	GUO [110], ZHOU [296]	HOLMQUIST, JOHNSON und COOK [140] und Kompaktionsschädigung	Zwei-Flächen-Modell zur Simulation von Stahlfaserbeton
PANDEY ET AL.	MENETREY und WIL-LAM [192]	GUPTA und MAESTRINI [111]	Ein-Flächen-Modell mit Visko-Plastizität

Trotz der in Teilbereichen guten Ergebnisse zeigen sich bei genauerer Betrachtung dieser Modelle auch individuelle Schwächen. Da diese jedoch aus dem Zusammenwirken zwischen den verwendeten Schädigungsgesetzen, der Bruchflächenformulierung und der Formulierung der Degradation der Materialparameter entstehen, sind sie nicht durch den einfachen Austausch einzelner Gleichungen zu beheben.

Bei der Entwicklung eines neuen Materialmodells ist daher erneut bei der physikalischen Beschreibung der Realität anzusetzen. Gleichwohl bieten die bereits existierenden Modelle, sowohl aufgrund ihrer Stärken als auch ihrer Schwächen, wichtige Anregungen und Entscheidungshilfen für neue Entwicklungen.

Aus den beschriebenen Modellen lassen sich zunächst grundsätzliche Forderungen an ein neues Materialmodell ableiten. Ein neues Modell sollte:

1. alle wichtigen Phänomene des Materialverhaltens unter triaxialer Belastung abbilden können,

2. sowohl für statische als auch für hochdynamische Belastungen Gültigkeit besitzen,
3. auf physikalisch interpretierbaren Parametern basieren und
4. erweitert und an ähnliche Werkstoffe angepasst werden können.

Punkt 1 erfordert eine Beschreibung der Festigkeiten in Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck bzw. Zug sowie eine Berücksichtigung des LODE-Winkels  $\theta$  und einen druckabhängigen Übergang von sprödem zu duktilem Verhalten (Formänderung im Deviatorschnitt). Darüber hinaus muss das Materialverhalten - insbesondere die Schädigung - sowohl unter ein- als auch mehraxialer Belastung beschrieben werden. Aus der Forderung von Punkt 2 lässt sich ableiten, dass alle relevanten Materialparameter, wie beispielsweise Druck- und Zugfestigkeit, Elastizitäts- und Schubmodul sowie die Bruchverzerrung, verzerrungsratenabhängig formuliert werden müssen. Zudem muss diese Formulierung auch höchste Verzerrungsgeschwindigkeiten abbilden können, bzw. die Ergebnisse entsprechender Versuche repräsentativ widerspiegeln. Die beiden ersten Punkte erfordern somit eine sinnvolle Wahl der mechanisch - mathematischen Gleichungen und deren Parameter.

Neben einer Bestimmbarkeit der Materialparameter aus Standard-Experimenten bzw. Werkstoffsimulationen sollen die verwendeten Werkstoffparameter möglichst direkt auf physikalische Größen zurück zu führen sein. Diese Forderung aus Punkt 3 ermöglicht eine einfache Anpassbarkeit des Modells an den jeweils vorliegenden Beton-Werkstoff und stellt so einen breiten Anwendungsbereich des Modells sicher. Hinsichtlich der Erweiterbarkeit und der Anpassung an ähnliche zementbasierte Materialien (z.B. Mörtel) ist zudem ein modularer Aufbau wie im RHT-Modell grundsätzlich von Vorteil. Die Möglichkeit eines Austauschs einzelner konstitutiver Gleichungen bzw. einzelner Module gem. Punkt 4 ist daher in der Programmierung zu berücksichtigen.

Neben diesen grundsätzlichen Anforderungen sollte auch die Möglichkeit des einfachen Portierens in andere Hydrocodes offen gehalten werden. Dies legt ein Modell mit getrennter Beschreibung des volumetrischen und deviatorischen Materialverhaltens nahe, da diese Trennung allen Hydrocodes gemeinsam ist (vgl. [233]).

## 8.4 Zustandsgleichung des neuen Modells

Die Zustandsgleichung (EoS) des Werkstoffs Beton wurde in den Kapiteln 5 und 6 umfassend betrachtet. Dabei wurde u.a. gezeigt, dass es möglich ist, die Parameter der  $p$ - $\alpha$  Zustandsgleichung mit der dort dargestellten Methode auch für homogenisierten Beton auf rein theoretischer Ebene mit hoher Genauigkeit abzuschätzen. Auf die Parameter der Zustandsgleichung wird daher an dieser Stelle nicht erneut eingegangen.

## 8.5 Versagensfläche des neuen Modells

Ausgangspunkt für die Formulierung der Versagensfläche  $Y_{max}$  im Spannungsraum sind die einaxialen Festigkeiten  $f_c$ ,  $f_t$  und  $f_s$ . Sie stellen drei in Versuchen vergleichsweise einfach zu bestimmende Grenzspannungen auf der Versagensfläche dar. Alle drei dieser charakteristischen Spannungszustände liegen jedoch auf unterschiedlichen Meridianen der Versagensfläche (vgl. Abschnitt 1.2.3).

Zur Projektion dieser Spannungszustände auf den Druckmeridian (als formgebende Funktion im Meridianschnitt) ist es daher erforderlich, zunächst die Form der Fläche im Deviatorschnitt zu beschreiben.

Die Form der Versagensfläche im Deviatorschnitt ist, entsprechend der Forderung aus Abschnitt 8.3.5, abhängig vom LODE-Winkel  $\theta$  und berücksichtigt somit die dritte Invariante des Spannungsdeviators  $J_3$  (Gleichung 2.30). Für das eigene Modell wird dazu die in Abbildung 8.9 rechts dargestellte Formulierung nach WILLAM und WARNKE [286]

$$F_{J_3}(\theta) = \frac{2 \cdot (1 - r_1^2) \cdot \cos \theta + (2 \cdot r_1) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - r_1^2) \cdot \cos^2 \theta + 5 \cdot r_1^2 - 4 \cdot r_1}}{4 \cdot (1 - r_1^2) \cdot \cos^2 \theta + (1 - 2 \cdot r_1)^2} \quad (8.13)$$

verwendet. Dabei beschreibt der Parameter  $0.5 \leq r_1 \leq 1.0$  das Verhältnis der Radien des Zugmeridians (rot) zum Druckmeridian (blau). Für  $r_1 = 0.5$  beschreibt die Fläche im Meridianschnitt ein Dreieck (entspricht dem Modell von TRESCA [269]) und für  $r_1 = 1.0$  einen Kreis (entspricht dem Modell von VON MISES [198]).

Im Meridianschnitt der Versagensfläche  $Y_{max}$  wird der Druckmeridian ( $\theta = 60^\circ$ ) durch eine Potenzfunktion der Form

$$Y_{max}^{\theta=60^\circ} = \left( A_{trans} + M \cdot p^{*E} \right) \cdot f_c \quad (8.14)$$

beschrieben, wobei  $p^*$  den auf die einaxiale Druckfestigkeit normierten Druck darstellt. Diese Normierung ist notwendig, um die Materialparameter  $M$  und  $E$  aus einer breiten Basis an Versuchen mit Betonen unterschiedlicher Festigkeiten bestimmen zu können. Zudem ermöglicht die Normierung, wie in Abschnitt 8.5.1 noch gezeigt werden wird, die korrekte Berücksichtigung der verzerrungsratenabhängigen Festigkeitssteigerung.

Als Grundlage zur Ermittlung der Parameter  $M$  und  $E$  werden die umfangreichen Versuchszusammenstellungen von GUO [109] und ZHOU [296] herangezogen. Die aus den dort beschriebenen Versuchen als "best fit" ermittelten Parameter sind in Tabelle 8.3 zusammengefasst.

Der Verschiebungsparameter  $A_{trans}$  stellt dabei keinen unabhängigen Materialparameter dar. Er wird anhand der Gleichung

$$A_{trans} = 1 - M \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^E \quad (8.15)$$

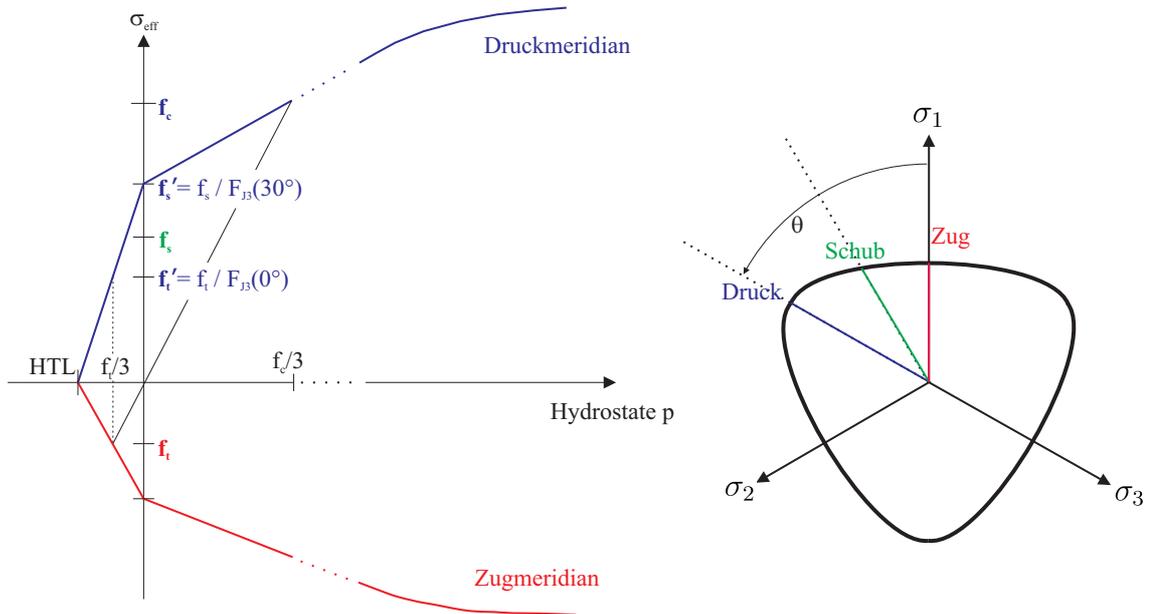


Abbildung 8.9: Schematische Darstellung der Versagensfläche  $Y_{max}$  für Beton; links: Meridianschnitt, rechts: Deviatorschnitt

immer so bestimmt, dass sich bei  $p = 1/3 \cdot f_c$  die einaxiale Druckfestigkeit ergibt. Die Formulierung der Versagensfläche anhand einer Potenzfunktion bietet jedoch, wie bereits von RIEDEL in [233] festgestellt, nicht genügend Flexibilität, um die Versuchsdaten bei niedrigen Drücken ( $p < 1/3 \cdot f_c$ ) wiederzugeben. Zudem muss, der Forderung aus Abschnitt 7.6 entsprechend, die Zugfestigkeit  $f_t$  unabhängig von der Druckfestigkeit verändert werden können. Dies ist bei Verwendung einer Potenzfunktion über den gesamten Bereich nicht möglich. Im Bereich  $p < 1/3 \cdot f_c$  wird daher zwischen  $f_c$  und den auf den Druckmeridian projizierten Grenzspannungszuständen,  $f'_s$  und  $f'_t$ ,

$$f'_t = f_t / F_{J_3}(\theta = 0^\circ) \quad \text{und} \quad (8.16)$$

$$f'_s = f_s / F_{J_3}(\theta = 30^\circ) \quad , \quad (8.17)$$

abschnittsweise linear interpoliert (siehe Abbildung 8.9, links). Dabei wird die statische dreiaxiale Zugfestigkeit (HTL) im Schnittpunkt der Meridiane für  $p < 0$  mit der Hydrostaten angenommen.

Ausgehend vom Druckmeridian  $Y_{max}^{\theta=60^\circ}$  wird die gesamte Versagensfläche  $Y_{max}$  durch Rotation um die Hydrostate aufgespannt. Die Berücksichtigung der Sprödigkeit, d.h. der Form im Deviatorschnitt, erfolgt dabei durch Multiplikation mit der Funktion  $F_{J_3}(\theta)$ :

$$Y_{max}(\theta) = Y_{max}^{\theta=60^\circ} \cdot F_{J_3}(\theta) \quad . \quad (8.18)$$

Tabelle 8.3 stellt die für das Modell ermittelten Parameter der Versagensfläche sowie deren Quellen zusammenfassend dar.

Tabelle 8.3: Materialparameter der Versagensfläche

Parameter	Wert	Einheit	Quelle
Druckfestigkeit $f_c$	47.0	[MPa]	Versuch*
rel. Zugfestigkeit $f_t/f_c$	0.07	[-]	[161], [156]
rel. Schubfestigkeit $f_s/f_c$	0.11	[-]	[109], [296]
Meridianmultiplikator $M$	1.96	[-]	<i>Iteration</i> [109], [296]
Meridianexponent $E$	0.526	[-]	<i>Iteration</i> [109], [296]
Meridianverhältnis $r_1$	0.60	[-]	[109], [296]

\* für die Betondruckfestigkeit liegen i.d.R. Versuchsdaten vor; hier aus [165]

### 8.5.1 Verzerrungsratenabhängige Festigkeit

Zur Berücksichtigung der in Abschnitt 8.2 dargestellten Verzerrungsratenabhängigkeit wird in den meisten Materialmodellen, beispielsweise im RHT-Modell [233], die Fließ- bzw. Versagensspannung mit dem jeweiligen Festigkeitssteigerungsfaktor (Dynamic Increase Factor, DIF) multipliziert. Die Fläche wird somit senkrecht zur Hydrostaten aufgeweitet.

Aus Sicht der Kontinuumsmechanik ist dieses Vorgehen jedoch nicht vollkommen korrekt. Wird im Versuch beispielsweise eine einaxiale dynamische Druckfestigkeit von  $f_c \cdot DIF$  bestimmt, so gilt für den betrachteten Spannungszustand:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} f_c \cdot DIF & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (8.19)$$

Die Aufspaltung dieses Spannungszustandes in einen sphärischen und einen deviatorischen Anteil nach Gleichung (2.6) ergibt einen Spannungsdeviator der Form

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} f_c \cdot DIF & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} f_c \cdot DIF & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} f_c \cdot DIF \end{bmatrix} . \quad (8.20)$$

Nach Gleichung (2.19) gilt

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2}{3} f_c \cdot DIF \right)^2 + \left( -\frac{1}{3} f_c \cdot DIF \right)^2 + \left( -\frac{1}{3} f_c \cdot DIF \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{3} f_c^2 \cdot DIF^2. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Im Spannungsraum ergibt sich somit

$$\tau = \sigma_{eff} = \sqrt{3 \cdot J_2} = f_c \cdot DIF \quad . \quad (8.22)$$

Gleichzeitig gilt jedoch für den hydrostatischen Druck

$$p = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} = \frac{1}{3} \cdot f_c \cdot DIF \quad . \quad (8.23)$$

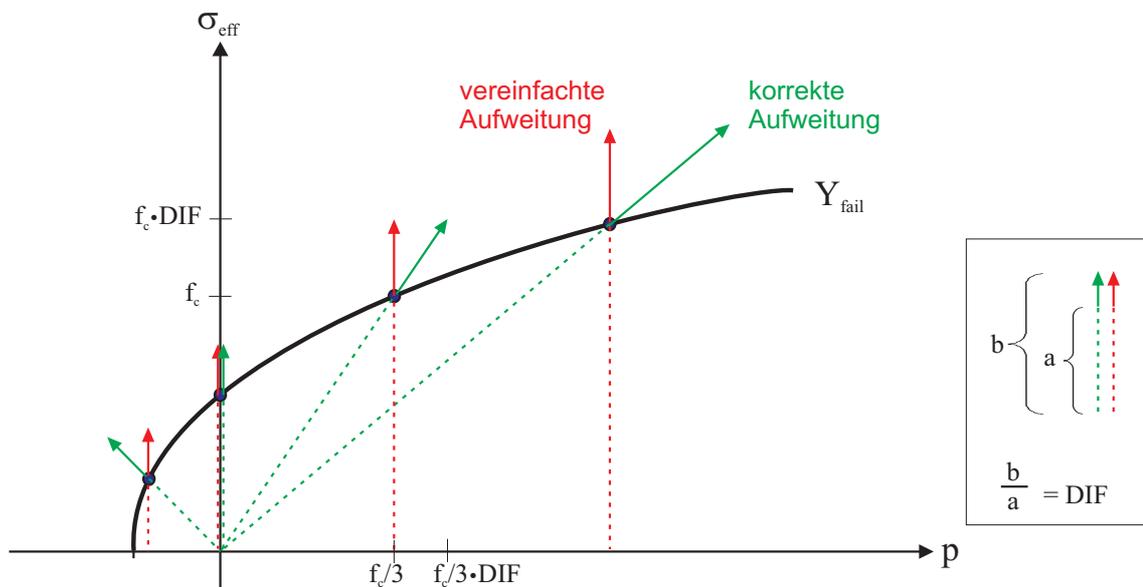


Abbildung 8.10: Aufweitung der Versagensfläche infolge dynamischer Festigkeitssteigerung; rot: vereinfachte Umsetzung, grün: kontinuumsmechanisch korrekte Umsetzung

Das bedeutet, dass sich der entsprechende Punkt auf der Versagensfläche sowohl senkrecht als auch parallel zur Hydrostaten mit dem Faktor DIF verschiebt. Abbildung 8.10 stellt die unterschiedliche Umsetzung der verzerrungsrateabhängigen Festigkeitssteigerung schematisch dar. Dabei ist das im eigenen Modell umgesetzte Vorgehen in grün, das beispielsweise im RHT-Modell umgesetzte Vorgehen in rot dargestellt.

Im Programmcode des eigenen Modells erfolgt die Umsetzung anhand der Normierung des Druckes auf die "momentane" Festigkeit  $f_{c,act} = f_c(\dot{\epsilon}, D)$  sowie Multiplikation mit  $f_{c,act}$  in Gleichung (8.14). Im Bereich der abschnittsweise linearen Formulierung werden die charakteristischen Spannungszustände ebenfalls den momentanen Festigkeiten angepasst:  $\sigma_{eff} = f_{s,act} = f_s(\dot{\epsilon}, D)$  bei  $p = 0$  und  $\sigma_{eff} = f_{t,act} = f_t(\dot{\epsilon}, D, l_{pre})$  bei  $p = -1/3 \cdot f_{t,act}$ . Zudem wird das HTL( $\dot{\epsilon}, D, l_{pre}$ ) durch Multiplikation mit DIF entlang der Hydrostaten verschoben.

Der jeweilige Festigkeitssteigerungsfaktor entspricht dabei der Gleichung (8.1) für Drücke  $p \geq 1/3 \cdot f_{c,act}$  bzw. Gleichung (8.2) für  $p \leq -1/3 \cdot f_{t,act}$ . Bei Drücken im Übergangsbereich wird linear interpoliert.

## 8.5.2 Plastische Verfestigung

Der Werkstoff Beton zeigt, wie in Kapitel 7 beschrieben, bereits vor Erreichen der Maximalspannung  $Y_{max}$  inelastische Verformungen. Ein hypoelastisches Materialgesetz mit bei Erreichen der Versagensspannung einsetzender Schädigung und Entfestigung kann dieses als plastische Verfestigung bekannte Phänomen jedoch nicht abbilden. Daher wird eine elastische Grenzfläche  $Y_{el}$  formuliert. Überschreitet die auftretende Spannung die elastische Grenzspannung, so setzt plastische Verformung ein. Dabei weitet sich  $Y_{el}$  so lange auf, bis sie deckungsgleich mit  $Y_{max}$  ist (siehe Abbildung 8.11). Erst dann beginnt die Schädigung des Materials, die in Abschnitt 8.6 beschrieben wird.

Die Formulierung der elastischen Grenzfläche im unbelasteten Zustand erfolgt ausgehend von der Versagensfläche  $Y_{max}$ . Basierend auf den ein- und mehraxialen Festigkeitsversuchen in [161] lässt sich die beginnende Nichtlinearität im Spannungs-Verzerrungs-Diagramm bei ca. 2/3 der Maximalspannung bestimmen. Ein Einfluss der Verzerrungsrate auf diesen Verhältniswert ist, wie beispielsweise in [128] beschrieben, nicht zu erwarten.

Die Aufweitung der elastischen Grenzfläche  $Y_{el}$  im numerischen Modell erfolgt analog der dynamischen Festigkeitssteigerung in Abschnitt 8.5.1. Die elastische Grenzspannung zu einem Zeitpunkt  $t$  wird dabei anhand eines Verfestigungsfaktors  $f_{hard}$  gesteuert. Dieser wird aus dem Verhältnis der bis  $t$  maximal erreichten Spannung  $\max \sigma_{eff}$  zur maximal aufnehmbaren Spannung  $\sigma_{eff}^{max}$  bestimmt:

$$f_{hard} = \frac{\max \sigma_{eff}}{\sigma_{eff}^{max}} \quad \text{mit} \quad 2/3 \leq f_{hard} \leq 1 \quad . \quad (8.24)$$

Mit der plastischen Verfestigung zeigt sich, wie in Abbildung 8.12 exemplarisch anhand eines zyklischen Druckversuchs von SINAH ET AL. [253] dargestellt, ein geringer Steifigkeitsverlust. In den Versuchen in [253] beträgt dieser anhand des Verhältnisses der Sekantenmoduln 0-A und B-C (vgl. Abbildung 8.12) bestimmte Steifigkeitsverlust jedoch maximal 4%. Er scheint daher vernachlässigbar und wird bei der Modellbildung nicht berücksichtigt.

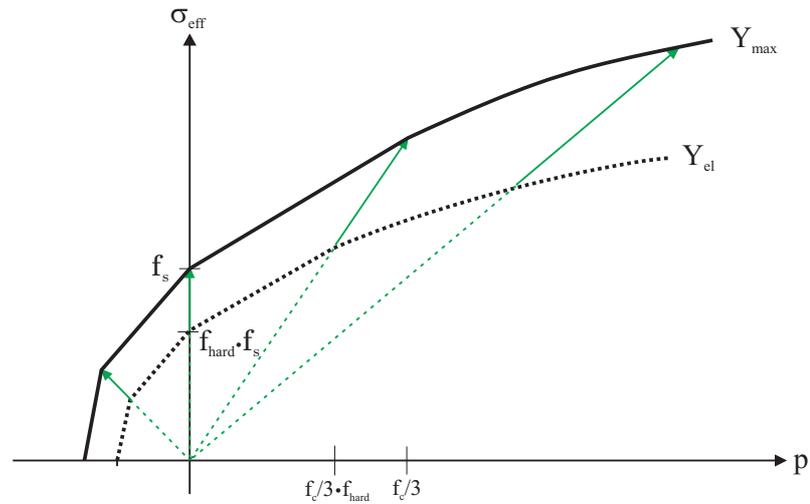


Abbildung 8.11: Aufweitung der elastischen Grenzfläche  $Y_{el}$  bis zur Versagensfläche  $Y_{max}$

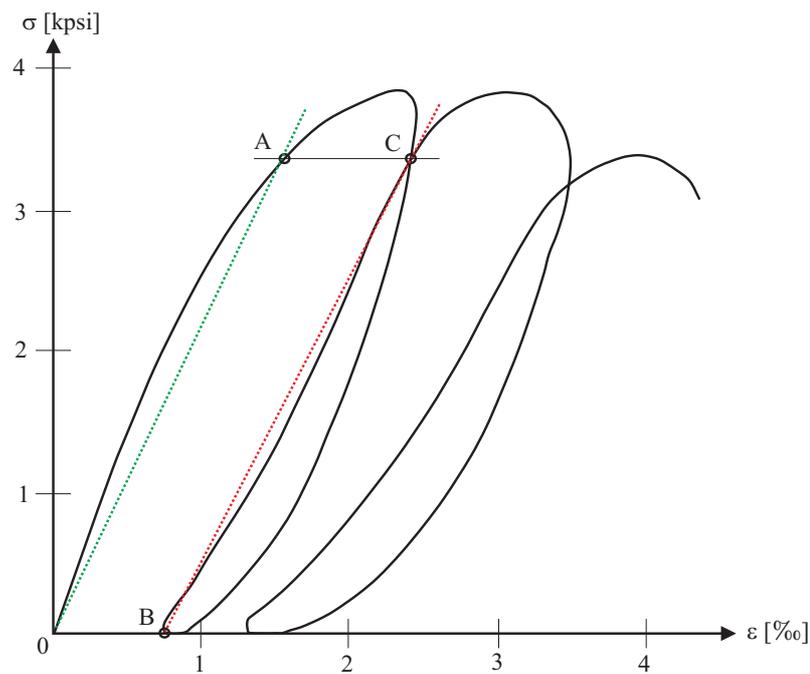


Abbildung 8.12: Steifigkeitsverlust bei plastischer Verfestigung; zyklischer Druckversuch nach [253]

Die Berechnung der plastischen Inkremente während der Aufweitung der elastischen Grenzfläche sowie nach Erreichen der Versagensfläche erfolgt, je nach hydrostatischem Druck, anhand einer teilassozierten bzw. einer VON MISES-äquivalen-

ten Fließregel (vgl. Abschnitt 2.2.2). Da insbesondere bei niedrigen und negativen Drücken eine VON MISES-äquivalente Fließregel zu bisweilen erheblichen Fehlern führen kann (vgl. z.B. [58], [60]), wird im Bereich  $p \leq 1/3f_c$  eine teilassozierte Fließregel ( $d\varepsilon_{ij}^p \perp Y$  im Meridianschnitt, jedoch nicht Deviatorschnitt) verwendet. Bei höheren Drücken ( $p > 1/3f_c$ ) verringert sich der Einfluss der Fließregel, weshalb hier zugunsten der Rechengeschwindigkeit eine VON MISES-äquivalente Fließregel zur Anwendung kommt.

## 8.6 Schädigungsmodell

### 8.6.1 Vorüberlegungen

In der Literatur findet sich keine einheitliche Definition des Begriffs "Schädigung". Den meisten Umschreibungen des Begriffs ist jedoch gemeinsam, dass er eine in der Regel dauerhafte negative Beeinflussung der Eigenschaften infolge äußerer oder innerer Einwirkungen beschreibt.

Da eine Veränderung einer Eigenschaft in eine bestimmte Richtung je nach Anwendung sowohl positiv als auch negativ sein kann, ist somit auch der Begriff der Schädigung abhängig von der jeweiligen Problemstellung.

In Bezug auf den Werkstoff Beton und im Zusammenhang mit der hier durchgeführten Untersuchung (hoch-)dynamischer Prozesse werden vornehmlich die Eigenschaften Festigkeit und Steifigkeit betrachtet. Dabei gelten hohe Festigkeiten und Steifigkeiten als positiv. Schädigung bedeutet daher im Wesentlichen den teilweisen oder völligen Verlust der Festigkeit bzw. Steifigkeit des Materials. Geschädigtes Material kann somit, im Vergleich zum ungeschädigten Material, nicht mehr alle Spannungszustände aufnehmen bzw. zeigt unter gleichen Spannungszuständen größere Verformungen.

Das nichtlineare Verformungsverhalten des Betons resultiert im Wesentlichen aus der sukzessiven Schädigung des Materials infolge äußerer und innerer Beanspruchungen. Bei Überschreiten einer elastischen Grenzspannung stellen sich irreversible Gefügeschädigungen (Porenkollaps, Mikrorisse) ein, die zwar nicht zu einem sofortigen Versagen führen, jedoch eine Veränderung der Werkstoffeigenschaften bewirken. Neben der Notwendigkeit zur Anpassung der Materialeigenschaften an die Belastungshistorie im Rahmen der Degradation, ist auch die Vorhersage der Schädigung am zu untersuchenden Bauteil von besonderem Interesse:

- Das Schädigungsbild eines Bauteils lässt Rückschlüsse über abplatzende Bruchstücke zu, was für die Beurteilung der Schutzwirkung von erheblicher Bedeutung ist.
- Die Gegenüberstellung der numerisch vorhergesagten mit der realen Schädigung stellt, neben beispielsweise der Verformung und den Druck-/Zeitverläufen, das Hauptkriterium bei der Validierung des Materialmodells dar.

- Es können Rückschlüsse auf das Resttragverhalten des Bauteils im geschädigten Zustand gezogen werden, wenngleich dies zum derzeitigen Stand der Forschung auch nur sehr eingeschränkt möglich ist.

Der realitätsnahen Beschreibung der Schädigung innerhalb eines Materialmodells kommt daher eine besondere Bedeutung zu.

Auf die Frage, unter welcher Voraussetzung sich eine Schädigung in einem Material einstellt, gibt es ebenfalls eine Vielzahl von Antworten. Die gebräuchlichsten dieser Schädigungskriterien sind in Tabelle 8.4 zusammengefasst. Dabei lassen sich zwei grundsätzliche Typen unterscheiden: auf Grenzspannungen basierende und auf Grenzverzerrungen basierende Schädigungskriterien. Diese lassen sich wiederum in Untergruppen einteilen. Hier kann beispielsweise zwischen plötzlichem Versagen und sukzessiver Schädigung unterschieden werden. Während beim plötzlichen Versagen eine bis dahin ungeschädigte Zelle bei Überschreiten eines bestimmten Schwellwertes (z.B. Hauptzugspannung) ad hoc als vollständig geschädigt gilt, versagt die Zelle bei der sukzessiven Schädigung schrittweise innerhalb eines Werteintervalls des jeweiligen Kriteriums. Ein Beispiel dafür ist die kumulative Schädigung, bei der einzelne Schädigungsinkremente über die Zeit aufsummiert werden ( $D = \sum \Delta D$ ), so dass sich das Versagen des Materials aus einer Teilschädigung entwickeln kann. Dieses Vorgehen bietet den Vorteil, dass somit auch die Änderung bzw. Degradation der Materialeigenschaften (z.B. Festigkeiten, elastische Moduln) allmählich voranschreitet, was phänomenologisch dem realen Werkstoffverhalten entspricht. Ein mit einem Degradationsmodell gekoppeltes Schädigungsmodell sollte daher eine inkrementelle Schädigung berücksichtigen.

In der Regel werden, je nach Zielsetzung und Anwendung, verschiedene dieser Kriterien in einem Modell kombiniert. Eine ausführliche Zusammenstellung verschiedener Schädigungskriterien bzw. -modelle findet sich beispielsweise in [302] und [60].

Ein darüber hinaus mögliches Schädigungskriterium stellt die durch plastische Verformungsarbeit in das Material eingebrachte (dissipierte) Energie dar. Eine energiebasierte Formulierung bietet gegenüber den rein auf plastischen Verzerrungen aufgebauten Schädigungsmodellen, die die gerichteten oder ungerichteten Verzerrungen bzw. die daraus entwickelten Schädigungen auf eine relativ willkürliche Art zusammenfassen, den Vorteil einer richtungsunabhängigen Größe, die sich additiv zusammenführen lässt.

Der Anwendung einer solchen Formulierung in einem numerischen Modell steht jedoch entgegen, dass die Bruchenergie des Betons, insbesondere bei Schubbelastung (sog. Mode II Bruchenergie) experimentell schwer zu bestimmen ist und derzeit nur wenige Versuchsdaten bekannt sind. Zudem wurde der Einfluss der Verzerrungsgeschwindigkeit auf die Mode II Bruchenergie bisher nicht experimentell untersucht. Da die Zugbruchenergie (Mode I Bruchenergie) einen deutlichen Einfluss der Verzerrungsgeschwindigkeit zeigt (vgl. z.B. [247], [281]), ist jedoch auch bei der Mode II Bruchenergie eine Ratenabhängigkeit zu erwarten.

Eine für unterschiedliche Betone anwendbare energiebasierte Schädigungsformulierung scheint daher, zumindest derzeit, nicht sinnvoll.

Tabelle 8.4: Schädigungskriterien

Typ	Kriterium	Beschreibung
Grenzspannung	hydrostatischer Druck	Zelle versagt, wenn der hydrostatische Druck / Zug einen bestimmten Grenzwert übersteigt
	Hauptzugspannung	Zelle versagt, wenn eine Hauptspannung einen kritischen Wert übersteigt
	Schubspannung	Zelle versagt, wenn die VON MISES Vergleichsspannung einen kritischen Wert übersteigt
Grenzverzerrung	Gesamtverzerrung	Zelle versagt, wenn die geometrische Verzerrung einen bestimmten Grenzwert übersteigt
	plastisch Verzerrung	Zelle versagt, wenn die plastische Verzerrung einen bestimmten Grenzwert übersteigt

### 8.6.2 Formulierung des Schädigungsmodells

Die im Modell verwendete Schädigungsformulierung basiert im Wesentlichen auf der von RUPPERT 2000 [238] entwickelten und durch GREULICH 2004 erweiterten entkoppelten Beschreibung der Schädigung aus Gestaltänderung  $D_{shear}$  und Kompaktion  $D_{comp}$ .

Sie erweitert diesen Ansatz jedoch hinsichtlich:

1. des unterschiedlichen Bruchverhaltens des Betons bei Druck- und Zugbelastung und
2. der in Kapitel 7 beschriebenen Duktilitätszunahme infolge Druckvorbelastung.

Die Schädigung  $D_{shear}$  ist abgeleitet von einem von HOLMQUIST, JOHNSON und COOK entwickelten und auf einer plastischen Grenzverzerrung basierenden Modell HJC [140]. Dabei werden die inkrementellen plastischen Verzerrungen einer Grenzverzerrung gegenübergestellt und deren Verhältnis über die Zeit akkumuliert.

Die Kompaktionschädigung ( $D_{comp}$ ) beschreibt die Schädigung infolge hydrostatischen Druckes. Diese wird, dem Ansatz von RUPPERT [238] folgend, aus dem Verhältnis der zu einem Zeitpunkt maximal erreichten Dichte zur Dichte des vollständig kompaktierten Materials bestimmt.

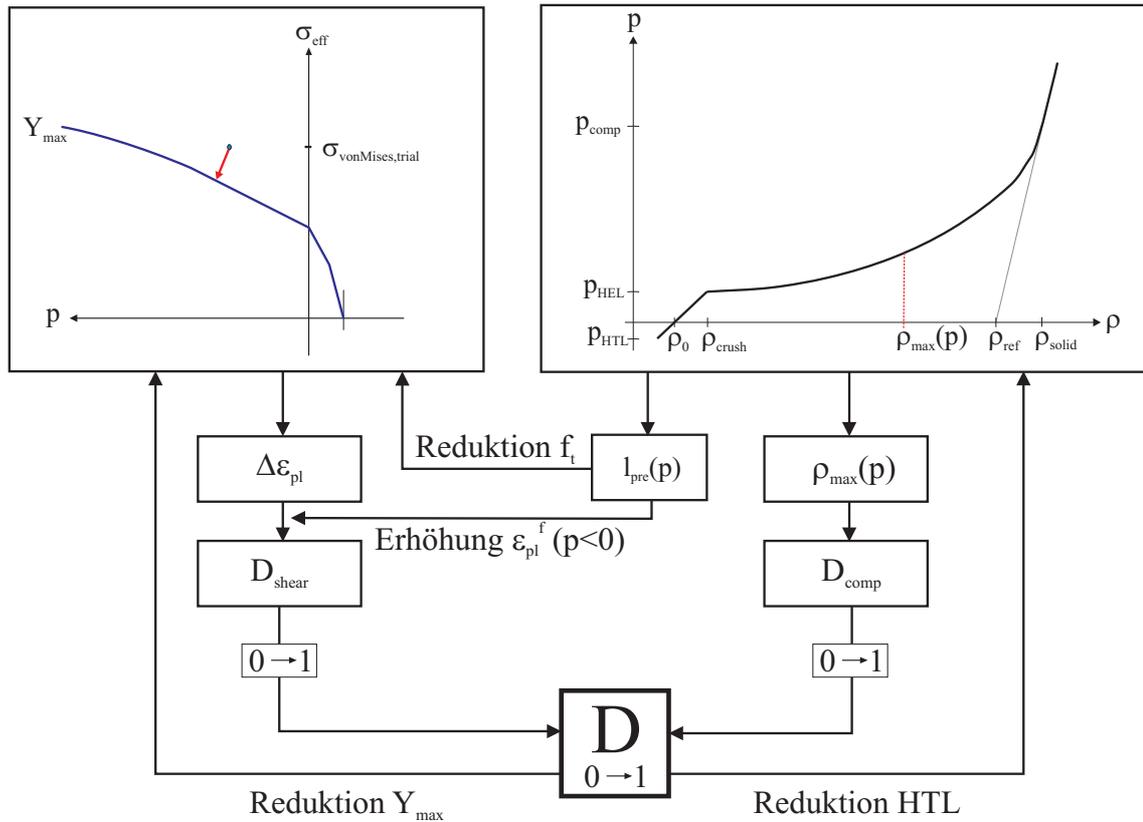


Abbildung 8.13: Aufbau des erweiterten Schädigungsmodells

Die Gesamtschädigung  $D$  setzt sich schließlich aus den Einzelschädigungen  $D_{\text{shear}}$  und  $D_{\text{comp}}$  zusammen. Abbildung 8.13 stellt den Aufbau des Schädigungsmodells schematisch dar.

### Schädigung infolge Gestaltänderung

Die Schädigung des Materials beginnt nach dem Erreichen der maximal aufnehmbaren Spannung. Das bedeutet, dass nach Abschluss der plastischen Verfestigung bzw. bei vollständiger Aufweitung der Fließfläche zu  $Y_{\text{max}}$  jede weitere plastische Verzerrung zur Schädigung des Materials führt.

Die mathematische Beschreibung dieser Schädigung im Modell baut auf dem phänomenologischen Ansatz von HOLMQUIST, JOHNSON und COOK [140] (HJC) auf. Dabei wird das plastische Verzerrungsinkrement  $\Delta \varepsilon_{\text{pl}}$  in einem Zeitschritt einer vom hydrostatischen Druck  $p$ , der Verzerrungsrate  $\dot{\varepsilon}$  und der Vorbelastung  $l_{\text{pre}}$  abhängigen plastischen Verzerrungsreserve nach Erreichen der Maximallast  $\varepsilon_{\text{pl}}^f(p, \dot{\varepsilon}, l_{\text{pre}})$  gegenübergestellt und daraus das Schädigungsinkrement  $\Delta D_{\text{shear}}$  bestimmt:

$$\Delta D_{\text{shear}} = \frac{\Delta \varepsilon_{\text{pl}}}{\varepsilon_{\text{pl}}^f(p, \dot{\varepsilon}, l_{\text{pre}})} \quad (8.25)$$

Die plastische Verzerrungsreserve bezeichnet dabei die nach Erreichen der Maximalspannung bis zum vollständigen Bruch auftretenden plastischen Verzerrungen. Die aus Gleichung (8.25) bestimmten Schädigungsinkremente werden über die Zeitschritte  $\Delta t$  aufsummiert. Die Schädigung  $D_{shear}$  ergibt sich somit aus

$$D_{shear} = \sum_{(\Delta t)} \Delta D_{shear} \leq 1.0 \quad , \quad (8.26)$$

wobei der Beton bei  $D_{shear} = 1.0$  als vollständig zerstört angenommen wird. Zwar sind darüber hinaus noch (plastische) Verzerrungen möglich, eine weitere Zunahme der Schädigung ist jedoch ausgeschlossen.

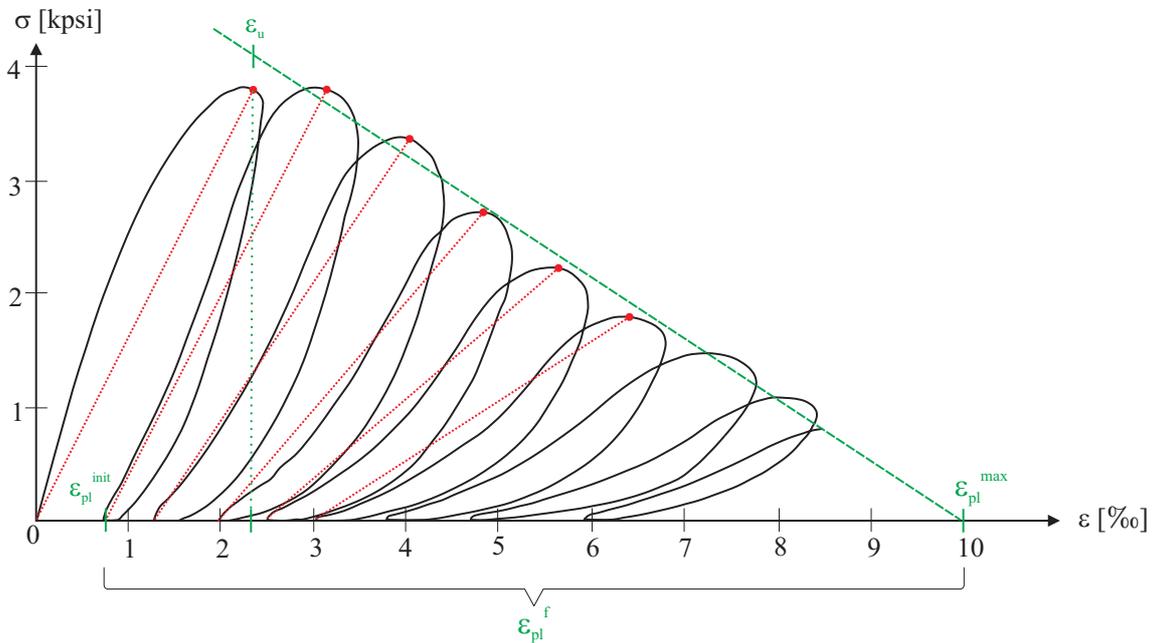


Abbildung 8.14: Bestimmung unterschiedlicher Verzerrungszustände aus zyklischem Druckversuch (nach [253])

Der wesentliche Unterschied des eigenen Modells zu HJC liegt in der plastischen Verzerrungsreserve  $\varepsilon_{pl}^f(p, \dot{\varepsilon}, l_{pre})$ . Das HJC Modell geht von einer in zyklischen Druckversuchen ermittelten Mindest-Bruchverzerrung ( $= \varepsilon_{pl}^{max}$  in Abbildung 8.14) aus und wendet diesen Grenzwert auch auf Zugbelastungen an. Dies bedeutet zum einen, dass auch plastische Verzerrungen vor Erreichen der Maximallast (während der plastischen Verfestigung) zu Schädigung führen. Zum anderen ergibt sich aufgrund der Anwendung der in Druckversuchen ermittelten Bruchverzerrung auf Zugbelastung ebenfalls eine Bruchverzerrung von  $\varepsilon_{pl}^{max} = 0.01$ , was den aus Versuchen (z.B. [63]) bekannten Wert ( $\varepsilon_{pl}^{max} \approx 0.001$  bei vollständigem Bruch) um den Faktor 10 übersteigt.

Aus dem in Abbildung 8.14 dargestellten Versuch lassen sich jedoch die Verhältnisse zwischen der plastischen Verzerrung bei beginnendem Bruch  $\varepsilon_{pl}^{init}$ , der (Gesamt-)Verzerrung bei beginnendem Bruch  $\varepsilon_u$  und der plastischen Verzerrung bei vollständigem Bruch  $\varepsilon_{pl}^{max}$  für den Bereich  $p > 0$  abschätzen:

$$\varepsilon_{pl}^{init} \approx \varepsilon_u / 2.5 \quad \text{und} \quad (8.27)$$

$$\varepsilon_{pl}^{max} \approx 10 \cdot \varepsilon_{pl}^{init} \quad \text{für } p > 0 \quad . \quad (8.28)$$

Daraus ergibt sich für die in Abbildung 8.14 dargestellte "plastische Verzerrungsreserve"  $\varepsilon_{pl}^f$  nach Erreichen der Maximallast:

$$\varepsilon_{pl}^f = \varepsilon_{pl}^{max} - \varepsilon_{pl}^{init} = D_\varepsilon^+ \cdot \varepsilon_u = 3.6 \cdot \varepsilon_u \quad \text{für } p > 0 \quad . \quad (8.29)$$

Die Abschätzung der plastischen Verzerrungsreserve des Betons unter Zugbelastung ( $p \leq 0$ ) erfolgt analog anhand der zyklischen Zugversuche in [78]. Dabei ergibt sich

$$\varepsilon_{pl}^f = \varepsilon_{pl}^{max} - \varepsilon_{pl}^{init} = D_\varepsilon^- \cdot \varepsilon_u = 10 \cdot \varepsilon_u \quad \text{für } p \leq 0 \quad . \quad (8.30)$$

Diese Abschätzung wird auch durch die einaxialen Zugversuche in [280] bestätigt. In den meisten in der Literatur dokumentierten Experimenten werden die Verzerrungen lediglich bis kurz nach Erreichen der Maximallast bestimmt. Die Druckabhängigkeit der plastischen Verzerrungsreserve  $\varepsilon_{pl}^f(p)$  wird daher, aufgrund der deutlich breiteren Datenbasis, anhand der effektiven Verzerrungen bei beginnendem Bruch,

$$\varepsilon_{eff,u} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \quad , \quad (8.31)$$

abgeschätzt. Dazu werden hier die von KUPFER durchgeführten mehraxialen Druck- und Zugversuche in [161] herangezogen. Die Auswertung der Ergebnisse ist in Abbildung 8.15 zusammengestellt. Dabei ist der sich ergebende hydrostatische Druck  $p$  auf die Betondruckfestigkeit normiert ( $p^* = p/f_c$ ). Zusätzlich ist exemplarisch eines der Versuchsergebnisse grafisch dargestellt.

In Abbildung 8.15 sind zwei charakteristische Bereiche erkennbar. Zum einen zeigt sich im Bereich  $p > 0$  mit steigendem Druck ein deutlicher Anstieg der effektiven Verzerrungen. Zum anderen ist auffällig, dass die effektiven Verzerrungen im Bereich  $p < 0$  praktisch konstant bleiben:  $\varepsilon_{eff,u} = const. = \varepsilon_{u,min}$ . Dieses Verhalten ist bei der Formulierung der Grenzverzerrungen zu berücksichtigen.

Bei den Versuchen in [161] zeigte sich zudem bei  $p > 0$  kein signifikanter Einfluss der Betongüte auf die effektiven Verzerrungen bei Maximallast  $\varepsilon_{eff,u}$ . Lediglich bei ein- und mehraxialem Zug nahm  $\varepsilon_{eff,u}$  (bzw.  $\varepsilon_{u,min}$ ) mit steigender Betongüte ab.

Aus den Versuchsdaten lassen sich Ausgleichsfunktionen für die beiden charakteristischen Bereiche bestimmen:

$$\varepsilon_{eff,u}(p) = \begin{cases} \varepsilon_{u,min} & : p^* < 0 \\ D_\varepsilon^p \cdot p^* = 6.63 \cdot 10^{-3} \cdot p^* & : p^* \geq 0.1 \quad . \end{cases} \quad (8.32)$$

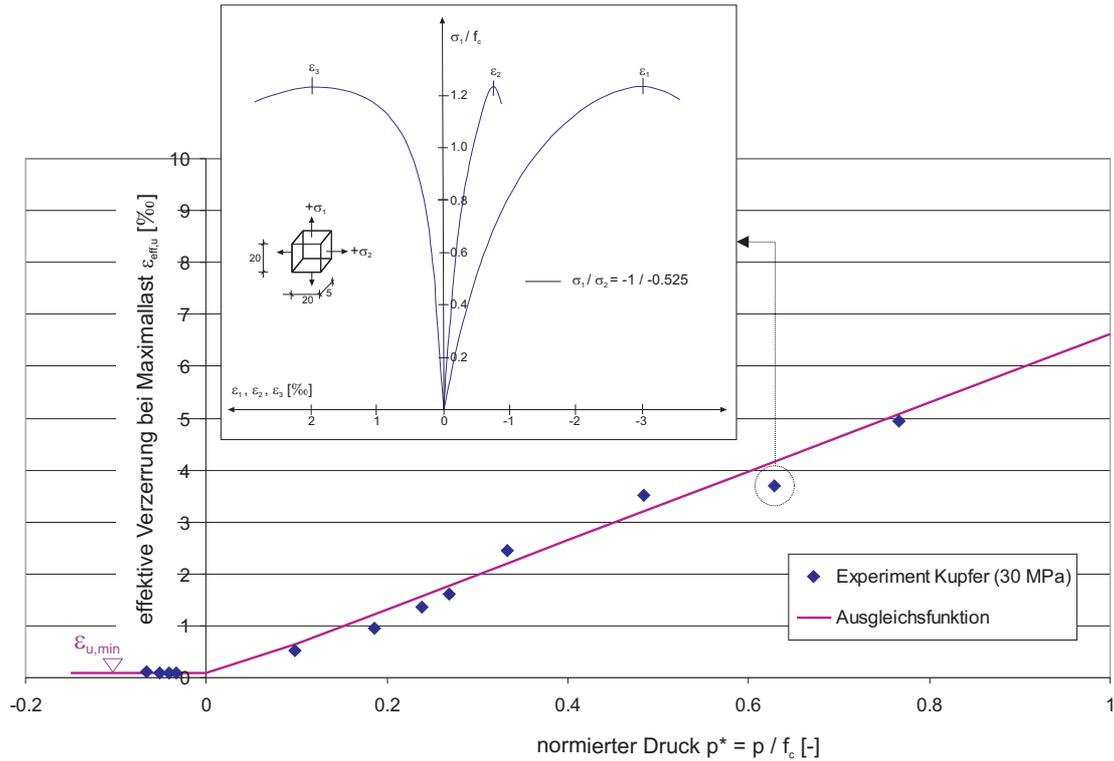


Abbildung 8.15: Auswertung der mehraxialen Versuche von KUPFER [161]; effektive Verzerrungen bei Maximallast

Zwischen  $p^* = 0$  und dem durch die Versuche abgedeckten Bereich ab  $p^* = 0.1$  wird linear interpoliert.

Da für den Bereich höherer Drücke ( $p^* > 1$ ) keine Experimentaldaten vorliegen, wird die Funktion aus Gleichung (8.32) in diesen Bereich extrapoliert. Dies muss jedoch als Postulat betrachtet werden.

Unter der Annahme, dass die Verhältniszerte in Gleichung (8.29) und (8.30) unabhängig vom hydrostatischen Druck konstant bleiben, kann anhand von Gleichung (8.32) auch die Druckabhängigkeit der plastischen Verzerrungsreserve  $\varepsilon_{pl}^f(p)$  abgeschätzt werden.

Die Abhängigkeit der Bruchverzerrung  $\varepsilon_u$  von der Verzerrungsrate wurde im Rahmen des CEB Reports Nr. 187 [62] eingehend untersucht. Die dort festgestellte Abhängigkeit,

$$\varepsilon_u(\dot{\varepsilon}) = \varepsilon_u \cdot f_u(\dot{\varepsilon}) = \varepsilon_u \cdot \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{0.02}, \quad (8.33)$$

mit der Referenz-Verzerrungsrate  $\dot{\varepsilon}_0 = 3 \cdot 10^{-5}$  bei Druckbelastung bzw.  $\dot{\varepsilon}_0 = 3 \cdot 10^{-6}$  bei Zugbelastung wird für das Modell unverändert übernommen.

In Abschnitt 7.4 wurde ein Zusammenhang zwischen der Druckvorbelastung  $l_{pre}$  und der Zunahme der Bruchdehnung entwickelt. Dieser in Gleichung (7.21) funktional beschriebene Zusammenhang wird bei hydrostatischen Drücken  $p < 0$  zusätzlich zur Verzerrungsrate berücksichtigt.

Somit wird die nach Erreichen der Maximallast aufnehmbare plastische Verzerrung durch

$$\varepsilon_{pl}^f(p, \dot{\varepsilon}, l_{pre}) = \begin{cases} D_{\varepsilon}^- \cdot \varepsilon_{u,min} \cdot f_u(\dot{\varepsilon}) \cdot f_{duct}(l_{pre}) = \varepsilon_{min}^f & \text{für } p < 0 \\ D_{\varepsilon}^+ \cdot \varepsilon_{eff,u}(p) \cdot f_u(\dot{\varepsilon}) \geq \varepsilon_{min}^f & \text{für } p \geq 0 \end{cases} \quad (8.34)$$

vollständig beschrieben. Dabei bezeichnen  $D_{\varepsilon}^-$  und  $D_{\varepsilon}^+$  die Proportionalitätsfaktoren aus den Gleichungen (8.29) und (8.30).

### Schädigung infolge Kompaktion

Hydrostatische Drücke oberhalb des HEL führen zu einer Kompaktion des porösen Betons. Diese durch Porenkollaps verursachte plastische Volumenänderung stellt ebenfalls eine Gefügeschädigung dar. Diese Schädigung wird jedoch in der auf den deviatorischen plastischen Verzerrungen basierenden Schädigung aus Gestaltänderung nicht erfasst. Daher wird eine zweite Schädigungsvariable  $D_{comp}$  eingeführt, die die Schädigung infolge Kompaktion beschreibt. Dabei beinhaltet  $D_{comp}$  nicht den auf der Schädigung der ITZ beruhenden Zugfestigkeitsverlust infolge Druckvorbelastung ( $TSL(l_{pre})$ ). Dieser wird in Abschnitt 8.7.2 separat beschrieben.

Zur Beschreibung der Kompaktionsschädigung wird auf das von RUPPERT [238] entwickelte Modell zurückgegriffen. Dieses Modell basiert auf dem in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Kompaktionsvermögen  $\mu_{gran}$  des Betons und vergleicht dieses mit der zum jeweiligen Zeitpunkt  $t$  maximal erreichten Kompaktion  $\mu(\rho_{max})$ . Die jeweilige Dichte  $\rho(p)$  wird dabei aus der Zustandsgleichung übernommen. Die EoS liefert jedoch lediglich die aktuelle Dichte im belasteten Zustand und beinhaltet somit sowohl elastische Kompression als auch plastische Kompaktion. Während RUPPERT das Kompaktionsvermögen anhand der Dichten im entlasteten Zustand annähert, wird das Kompaktionsvermögen im eigenen Modell aus dem Verhältnis der tatsächlichen Dichten im belasteten Zustand bestimmt:

$$\underbrace{\mu_{gran} = \frac{\rho_{ref} - \rho_0}{\rho_0}}_{\text{RUPPERT}} \quad \underbrace{\mu_{gran} = \frac{\rho_{solid} - \rho_{crush}}{\rho_{crush}}}_{\text{eigenes Modell}} \quad (8.35)$$

Die belastete Dichte  $\rho_{solid}(p_{comp})$  wird iterativ aus der polynomialen Zustandsgleichung des vollständig kompaktierten Materials angenähert, wobei die Energieanteile nicht berücksichtigt werden.

Zwischen dem Kompaktionsbeginn bei  $\rho_{crush}$  und der vollständigen Kompaktion bei  $\rho_{solid}$  beschreibt die Variable  $\mu_{por}(p)$ ,

$$\mu_{por}(p) = \frac{\rho(p) - \rho_{crush}}{\rho_{crush}} \quad (8.36)$$

das von der aktuellen Dichte abhängige Kompaktionsvermögen.

Das Entwicklungsgesetz zur Berechnung des Schädigungsinkrementes  $\Delta D_{comp}$  wird unverändert von RUPPERT übernommen:

$$\Delta D_{comp} = \gamma \cdot \left( \frac{\mu_{por}(p)}{\mu_{gran}} \right)^{\gamma-1} \cdot \frac{\Delta \mu_{por}}{\mu_{gran}} . \quad (8.37)$$

Der Parameter  $\gamma$  in Gleichung (8.37) beschreibt die Schädigungsevolution: für  $\gamma > 1$  steigt die Schädigung zu Beginn der Kompaktion stärker an und nimmt am Ende nur noch langsam zu (duktiles Schädigungsverhalten); für  $\gamma < 1$  wird das Material zunächst nur gering und zum Ende der Kompaktion hin stark geschädigt (sprödes Schädigungsverhalten). Dieses vom Parameter  $\gamma$  abhängige Schädigungsverhalten ist in Abbildung 8.16 schematisch dargestellt.

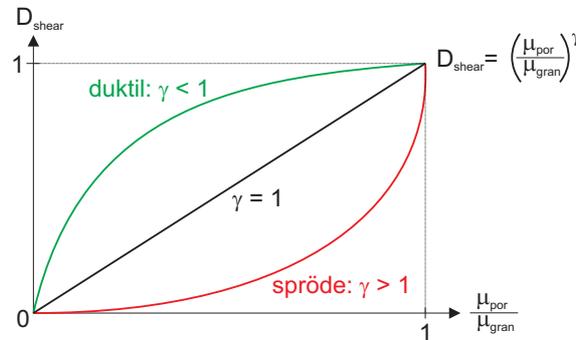


Abbildung 8.16: Schädigungsevolution im Entwicklungsgesetz der Druckschädigung nach RUPPERT [238]

Der Werkstoff Beton zeigt, wie bereits anhand der Zustandsgleichung erkennbar, ein relativ duktilen Kompaktionsverhalten. Nach Überschreiten des HEL nimmt die Dichte bei Erhöhung des Druckes zunächst erheblich zu, wohingegen zum Erreichen der vollständigen Kompaktion deutliche Drucksteigerungen erforderlich sind.

Die Schädigungsinkremente aus Gleichung (8.37) werden über die Zeitschritte  $\Delta t$  bis zur vollständigen Kompaktion bei  $D_{comp} = 1$  akkumuliert.

$$D_{comp} = \sum_{(\Delta t)} \Delta D_{comp} \leq 1.0 \quad (8.38)$$

Darüber hinaus ist nur noch (elastische) Kompression möglich.

### Kopplung der Einzelschädigungen

Die Kopplung der Einzelschädigungen  $D_{shear}$  und  $D_{comp}$  zur globalen Schädigungsvariablen  $D$  erfolgt empirisch anhand der Gleichung

$$D = 1 - (1 - D_{comp}) \cdot (1 - D_{shear}) . \quad (8.39)$$

Diese Kopplung basiert nicht auf physikalischen Zusammenhängen, jedoch wurden folgende phänomenologische Anforderungen zugrunde gelegt:

- das Material gilt erst dann als vollständig geschädigt, wenn mindestens eine der zwei Teilschädigungen den Wert 1 (vollständige Schädigung) erreicht, und
- die der Degradation zugrunde liegende Gesamtschädigung kann nicht kleiner sein, als die größte Teilschädigung:  $D \geq \max[D_{comp} ; D_{shear}]$ .

Tabelle 8.5 stellt die für das Modell verwendeten Schädigungsparameter sowie deren Quellen zusammenfassend dar.

Tabelle 8.5: Parameter des Schädigungsmodells

Parameter	Wert	Einheit	Quelle
Verzerrung bei max. Zugspannung $\varepsilon_{u,min}$	$0.1 \cdot 10^{-3}$	[-]	Abb. 8.15, [161]
Verzerrungsreserve Multiplikator $D_{\varepsilon}^{-}$	10	[-]	[78], [280]
Verzerrungsreserve Multiplikator $D_{\varepsilon}^{+}$	3.6	[-]	Abb. 8.14, [253]
Verzerrungsreserve Druckabhängigkeit $D_{\varepsilon}^p$	$6.63 \cdot 10^{-3}$	[-]	Abb. 8.15, [161]
Evolutionsparameter $\gamma$	1.5	[-]	<i>empirisch</i>

## 8.7 Degradation der Materialeigenschaften

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Schädigung  $D$  bewirkt sowohl eine Herabsetzung der Steifigkeit als auch eine Verringerung der Festigkeit des Materials. Diese als plastisch brechende Entfestigung (Abbildung 8.17, rechts) bekannte Degradation der Materialeigenschaften (vgl. [58]) stellt eine Kombination aus elastoplastisch entfestigendem (Abbildung 8.17, links) und elastisch brechendem (Abbildung 8.17, Mitte) Materialverhalten dar.

Qualität und Quantität dieser Änderung sind jedoch für die einzelnen Materialeigenschaften verschieden. Daher ist es erforderlich, die von der Schädigung betroffenen Materialeigenschaften unter Einbeziehung der Erkenntnisse aus Kapitel 7 getrennt zu betrachten. Die zu betrachtenden Materialeigenschaften sind:

- Schubmodul,
- Druckfestigkeit,
- Schubfestigkeit und
- Zugfestigkeit.

In Anwendung der isotropen Kontinuumsschädigungsmechanik wird dabei weder zwischen verschiedenen Last- bzw. Schädigungsrichtungen unterschieden noch werden Rissöffnungen und -schließungen modelliert.

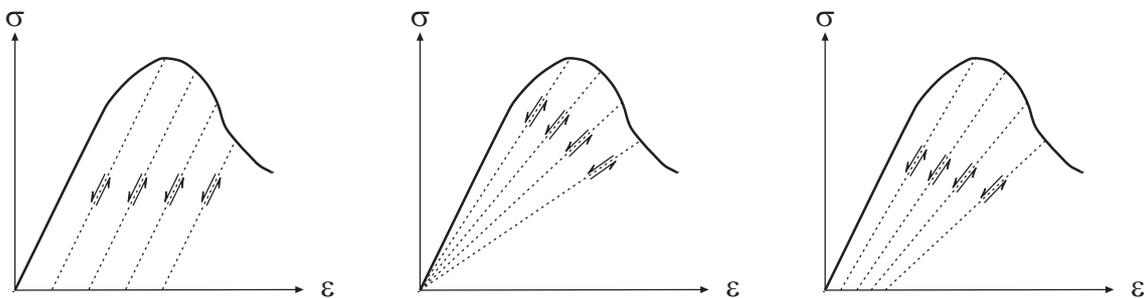


Abbildung 8.17: Degradation der Steifigkeiten und Festigkeiten nach [58]; links: elasto-plastisch entfestigend, Mitte: elastisch brechend, rechts: plastisch brechend

### 8.7.1 Degradation der Steifigkeit

Die Modellierung der elastischen Entfestigung erfolgt durch Reduktion des Schubmoduls  $G$ . Ausgehend von der Annahme, dass sich die Schwächung des Schubmoduls infolge Schädigung proportional zur Schwächung des Elastizitätsmoduls (Sekantenmodul) verhält, wird zunächst der einaxiale Druckversuch mit zyklischer Belastung in Abbildung 8.14 untersucht und der daraus abgeleitete Zusammenhang für dreiaxiale Belastungen übernommen.

Aus dem in Abbildung 8.14 dargestellten Versuchsergebnis aus [253] ist zu erkennen, dass sich die elastische Entfestigung nahezu linear verhält. Mit dem von mehreren Autoren (z.B. in [106], [233] und [238]) verwendete Ansatz für betonartige Werkstoffe, bei dem sich die Schubsteifigkeit von Beton im vollständig geschädigten Zustand ( $G_{frac}$ ) auf 13% der ursprünglichen Steifigkeit ( $G_0$ ) verringert, wurden bereits gute Ergebnisse erzielt. Daher wird dieser Ansatz auch für das eigene Modell übernommen:

$$G(D) = (1 - D) \cdot G_0 + D \cdot G_{frac} \quad \text{mit} \quad G_{frac}/G_0 = 0.13 . \quad (8.40)$$

Die Reduktion des Schubmoduls erfordert eine Korrektur der deviatorischen Spannungen  $s_{ij}$ . Diese ist nach RIEDEL [233] für einen Berechnungsschritt von  $t-1$  nach  $t$  formuliert mit:

$$s_{ij,D(t)} = s_{ij,D(t-1)} \cdot \frac{(1 - D(t)) + \frac{G_{frac}}{G_0} \cdot D(t)}{(1 - D(t-1)) + \frac{G_{frac}}{G_0} \cdot D(t-1)} \quad (8.41)$$

### 8.7.2 Degradation der Festigkeiten

Die elasto-plastische Entfestigung wird anhand der Reduktion der Versagensfläche  $Y_{max}$  zur Restfestigkeitsfläche  $Y_{dam}$  modelliert. Diese dritte Grenzfläche beschreibt das Materialverhalten im vollständig geschädigten Zustand ( $D = 1$ ). In diesem Zustand kann der Beton Verformungen nur noch unter Druck Scherspannungen entgegensetzen. Das Materialverhalten ist qualitativ vergleichbar mit dem nicht-kohäsiver Reibungsmaterialien wie beispielsweise Kies oder Sand.

Der Übergang von  $Y_{max}$  zu  $Y_{dam}$  erfolgt dabei, analog dem Vorgehen in Abschnitt 8.5.1 durch die schädigungabhängige Reduktion der charakteristischen Festigkeiten  $f_{c,act}$ ,  $f_{s,act}$  und  $f_{t,act}$  sowie des HTL. Dabei werden die aus einaxialen Versuchen bestimmten Entfestigungsfunktionen auf dreiaxiale Spannungszustände übertragen. Das Degradationsmodell sowie die einzelnen Entfestigungsfunktionen sind in Abbildung 8.18 schematisch zusammengefasst.

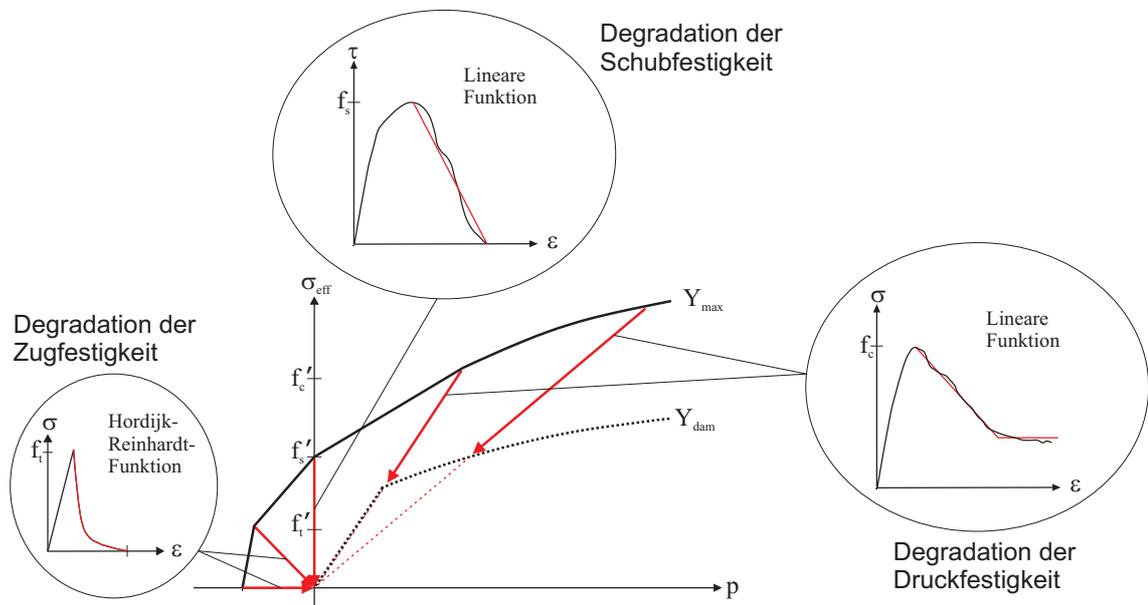


Abbildung 8.18: Degradation der Festigkeiten

### Degradation der Druckfestigkeit

Mit zunehmender Schädigung sinkt die aufnehmbare deviatorische Spannung. Unter hydrostatischem Druck kann das Material jedoch auch im vollständig geschädigten Zustand, aufgrund von Verzahnungseffekten, noch Schubbelastungen aufnehmen. Die einaxiale Druckfestigkeit wird daher schädigungsabhängig auf einen Wert  $f_{c,dam} > 0$  verringert. Dabei wird von einem linearen Zusammenhang zwischen Schädigung und Druckfestigkeit ausgegangen (vgl. Abbildung 8.18) und linear zwischen  $f_c$  und  $f_{c,dam}$  interpoliert:

$$f_{c,act}(\dot{\varepsilon}, D) = (1 - D) \cdot f_c(\dot{\varepsilon}) + D \cdot f_{c,dam}(\dot{\varepsilon}) \quad . \quad (8.42)$$

SCHULER bestimmte in [247] die einaxiale Restdruckfestigkeit  $f_{c,dam}$  nach Vorschädigung durch Kompression zu ca.  $0.3 \cdot f_c$ . Dieser Wert wird für das Modell übernommen.

### Degradation der Schubfestigkeit

Die reine Schubfestigkeit (hydrostatischer Druck  $p=0$ ) des Betons verringert sich mit steigender Schädigung sukzessiv, bis im vollständig geschädigten Zustand bei  $D = 1$  keine Schubspannungen mehr aufgenommen werden können.

Scherversuche von BALLATORE ET AL. [16] in [67] (qualitativ dargestellt in Abbildung 8.18) legen auch hier einen linearen Zusammenhang zwischen Schädigung und Restfestigkeit nahe:

$$f_{s,act}(\dot{\varepsilon}, D) = (1 - D) \cdot f_s(\dot{\varepsilon}) \quad . \quad (8.43)$$

### Degradation der Zugfestigkeit und des HTL

Die Degradation der Zugfestigkeit im numerischen Modell basiert auf dem aus einaxialen Zugversuchen bekannten Materialverhalten des Betons. Diese zeigen, wie in Abbildung 8.18 qualitativ dargestellt, nach Erreichen der Maximallast zunächst einen erheblichen Festigkeitsverlust, der bei weiterer Schädigung deutlich abnimmt. Die im Degradationssmodell zur Beschreibung dieser Entfestigung verwendete Funktion (engl.: "softening curve") folgt der so genannten "HORDIJK-REINHARDT"-Formulierung [141] in Gleichung (8.44).

$$f_{TSL}(D) = (1 + (c_1 \cdot D)^3) \cdot e^{-c_2 \cdot D} - D \cdot (1 + c_1^3) \cdot e^{-c_2} \quad (8.44)$$

Die Formparameter  $c_1$  und  $c_2$  bestimmen dabei die Krümmung der Funktion. HORDIJK und REINHARDT bestimmten diese Parameter in ihren Versuchen zu  $c_1 = 3.0$  und  $c_2 = 6.93$ . Diese Werte werden im Modell für das dreiaxiale Materialverhalten übernommen.

Die Schädigung  $D$  im Modell bewirkt eine Degradation aller Festigkeiten. Eine Druckvorbelastung  $l_{pre}$  dagegen verursacht, wie in Abschnitt 7.4 gezeigt, lediglich

eine Reduktion der Zugfestigkeit. Die Degradation der Zugfestigkeit infolge Druckvorbelastung erfolgt unabhängig von der Schädigung anhand der aus den mesomechanischen Simulationen entwickelten Gleichung (7.20). Für die Degradation der Zugfestigkeit ergibt sich somit:

$$f_{t,act}(\dot{\varepsilon}, D, l_{pre}) = f_t(\dot{\varepsilon}) \cdot f_{TSL}(D) \cdot TSL(l_{pre}) . \quad (8.45)$$

Die Degradation des HTL erfolgt analog zur Zugfestigkeit.

Tabelle 8.6 fasst alle Parameter des Degradationsmodells nochmals übersichtlich zusammen.

Tabelle 8.6: Parameter des Degradationsmodells

Parameter	Wert	Einheit	Quelle
rel. Reststeifigkeit $G_{frac}/G_0$	0.13	[-]	[226] bzw. [106], [233]
rel. Restdruckfestigkeit $f_{c,dam}/f_c$	0.3	[-]	[247]
HORDIJK-REINHARDT-Parameter $c_1$	3.0	[-]	[141] bzw. [282]
HORDIJK-REINHARDT-Parameter $c_2$	6.93	[-]	[141] bzw. [282]

## 8.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde, aufbauend auf den bisherigen Erkenntnissen, eine neue makromechanische Materialbeschreibung für Beton dargestellt. Ziel dabei war die Verbesserung bzw. Beseitigung von Schwachstellen bekannter Materialmodelle durch die Umsetzung der in Abschnitt 8.3.5 beschriebenen Forderungen. Dazu wurden ein Drei-Flächen-Festigkeitsmodell, ein Schädigungsmodell und ein Degradationsmodell entwickelt und in einem neuen Werkstoffgesetz zur Beschreibung von Beton unter quasi-statischen bis hochdynamischen Belastungen zusammengefasst.

Das ein- und mehraxiale Materialverhalten wird durch die Formulierung der Fließ- bzw. Bruchfläche im Spannungsraum vollständig beschrieben. Die Nichtlinearität des Materialverhaltens vor Erreichen der Maximalspannung (plastische Verfestigung) wird dabei durch eine zusätzlich elastische Grenzfläche berücksichtigt. Die Bestimmung der meisten Modellparameter erfolgte anhand einer äußerst umfangreichen Datenbasis. Dies rechtfertigt die Verwendung der Parameter als Näherung auch für andere Normalbetone.

Durch die Implementierung von Funktionen zur Beschreibung der dynamischen Materialeigenschaften (Festigkeiten und Grenzverzerrung) wurde der Anwendungsbereich des Modells ausgehend vom statischen Materialverhalten auf den Bereich der

(hoch-) dynamischen Belastungen erweitert. Durch dieses Vorgehen konnte erreicht werden, dass die Formulierung des Modells sowohl für statische als auch für dynamische Belastungen geeignet ist.

Die im Modell verwendeten Materialparameter und -kenngrößen können größtenteils in Standardexperimenten bestimmt werden. Zur genauen Adaption der Fließflächenparameter an eine bestimmte Betonmischung ist zwar ein höherer Versuchsaufwand erforderlich, dies ist jedoch aufgrund der komplexen Form einer Fließfläche von Beton unvermeidlich. Lediglich die Beschreibung der Materialeigenschaften im vollständig geschädigten Zustand ( $G_{frac}$  und  $f_{c,dam}$ ) sowie des Evolutionsexponenten der Kompaktionsschädigung  $\gamma$  sind mit ein- bzw. mehraxialen Druckversuchen nicht direkt zu bestimmen. Sie wurden anhand von in der Literatur verfügbaren phänomenologisch bestimmten Daten angenähert.

Die Formulierung der Schädigung und die damit per definitionem verbundene Degradation der Materialeigenschaften stellen sicher, dass die Materialeigenschaften des Betons zu jedem Zeitpunkt an die Art und Intensität der Vorbelastung (Belastungshistorie) angepasst werden. Der Aufbau des Schädigungsmodells berücksichtigt dabei sowohl das Versagen infolge statischer als auch die Phänomenologie (hoch-) dynamischer Belastung.

Die Anpassbarkeit des Materialmodells an andere Betone oder ähnliche Werkstoffe ist durch die Veränderbarkeit aller wesentlichen Eingangsparameter des Modells gewährleistet. Der angestrebte modulare Aufbau des Modells konnte jedoch nicht vollständig realisiert werden. So konnte beispielsweise aufgrund der in Abschnitt 8.5.1 beschriebenen Abhängigkeiten die dynamische Festigkeitssteigerung funktional nicht gänzlich von der Fließflächenformulierung getrennt werden.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass der Großteil der in Abschnitt 8.1 beschriebenen Forderungen bei der mathematisch/physikalischen Modellbildung umgesetzt wurde. Die Überprüfung der Funktionalität des Modells in praktischen Anwendungen, d.h. bei der Simulation belasteter Bauteile ist Inhalt des nächsten Kapitels.



# Kapitel 9

## Verifikation und Validierung des makromechanischen Modells

### 9.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Materialmodell (HPG-Concrete) verifiziert und validiert. Die Verifikation überprüft dabei im wesentlichen die korrekte "Funktion" der im Programmcode implementierten Gleichungen. Sie liefert jedoch keine Aussage darüber, ob die implementierten Gleichungen das reale Materialverhalten wiedergeben. Dies wird erst in einem weiteren Schritt bei der Validierung anhand geeigneter Versuche festgestellt. Mit anderen Worten: während bei der Verifikation das Modell rein auf seine mathematische Korrektheit hin überprüft wird, wird anhand der Validierung die Eignung des Modells zur Abbildung des realen Materialverhaltens untersucht.

In Anlehnung an das im Leitfaden zur Verifikation und Validierung der American Society of Mechanical Engineers [9] vorgeschlagene Vorgehen wurde das makromechanische Modell zunächst verifiziert. Eine detaillierte Darstellung der Einzel-Überprüfung aller in den Hydrocode AUTODYN [54] implementierten Gleichungen des Modells scheint an dieser Stelle jedoch nicht sinnvoll, weil diese größtenteils im Debug-Modus der Entwicklungsumgebung erfolgt. Daher wird im Folgenden lediglich ein Teil der Verifikation des makromechanischen Modells dargestellt. Anschließend erfolgt die Validierung. Dabei werden die Ergebnisse numerischer Simulationen mit Versuchsergebnissen verglichen. Zur Verdeutlichung der Breite möglicher Anwendungen des neuen Modells werden zur Validierung sowohl Anspannungsversuche an unbewehrten Betonplatten als auch Penetrationsversuche an massigen Betonzielen herangezogen. Darüber hinaus werden die Grenzen der Anwendung diskutiert.

## 9.2 Verifikation

Im Rahmen des hier dargestellten Teils des Verifikationsprozesses wird ein einfacher rotationssymmetrischer Körper unter (quasi-)statischer Zug- und Druckbelastung untersucht (siehe Abbildung 9.1). Ziel dieser Untersuchung ist es, zu überprüfen:

- ob die in den Simulationen erreichten maximalen Zug- bzw. Druckspannungen  $\sigma_{xx}$  mit den im Modell eingegebenen Festigkeiten übereinstimmen und
- ob die Degradation infolge plastischer Verzerrungen korrekt einsetzt.

Für das in Abbildung 9.1 dargestellte Betonmaterial wurde eine einaxiale Druckfestigkeit von  $f_c = 38$  MPa gewählt. Alle weiteren Modellparameter und Kennwerte entsprechen den in den Tabellen 8.3 und 8.5, wobei die dynamischen Steigerungsfunktionen deaktiviert wurden.

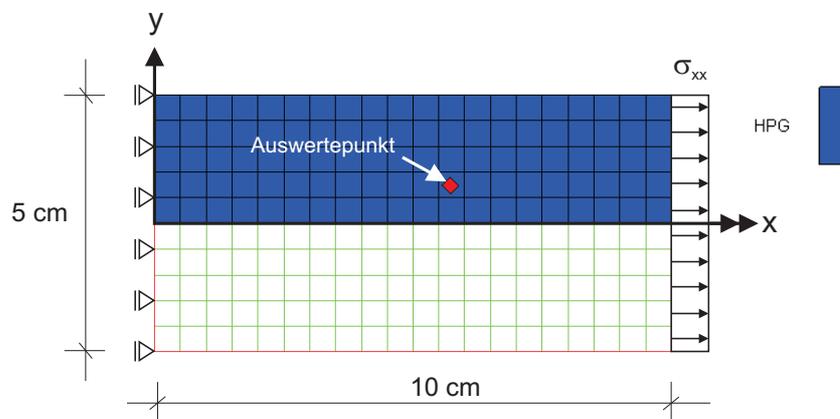


Abbildung 9.1: Verifikation des Werkstoffgesetzes: Modellaufbau und Diskretisierung

Abbildung 9.2 zeigt die Zugspannungen in x-Richtung über den plastischen Verzerrungen während des Zugversuchs. Das Diagramm zeigt zwar leichte Oszillationen aufgrund der Belastungsgeschwindigkeit, jedoch sind diese vernachlässigbar klein und werden daher nicht weiter betrachtet. Die in der Simulation errechnete Zugbruchspannung beträgt 2.67 MPa und stimmt somit praktisch exakt mit der Vorgabe ( $f_t = 0.07 \cdot f_c = 2.66$  MPa) überein. Nach Erreichen der Maximalspannung setzt unmittelbar die Degradation ein und der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve folgt der HORDIJK-REINHARDT-Funktion in Gleichung (8.44). Die Spannung erreicht schließlich bei einer plastischen Verzerrung von  $\varepsilon_{pl} = 1$  ‰ null. Dies entspricht ebenfalls der Programmeingabe.

Abbildung 9.3 zeigt das Ergebnis der gleichen Simulation mit umgekehrter Belastungsrichtung (Druck). Auch hier sind leichte Oszillationen zu erkennen, die ebenfalls auf die Belastungsgeschwindigkeit und die daraus entstehenden Spannungswellen zurückgeführt werden können. Im Spannungs-Verzerrungs-Diagramm in Abbildung 9.3 sind sowohl das Einsetzen der plastischen Verfestigung als auch der Beginn

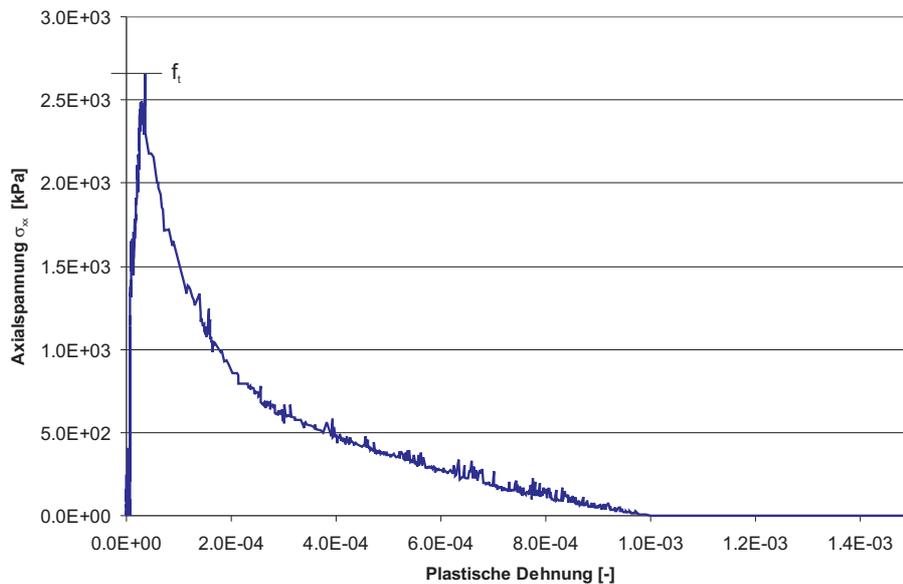


Abbildung 9.2: Betonzugversuch; Verifikation des Werkstoffgesetzes: Spannungs-Dehnungs-Diagramm bei einaxialer Zugbelastung

der Festigkeitsdegradation deutlich erkennbar. Die in der Simulation erreichte Maximalspannung beträgt unter Berücksichtigung der Oszillation im Mittel 38.1 MPa ( $\pm 1.5$  MPa). Dieses Ergebnis liegt im Rahmen der erwarteten Genauigkeit der Simulation.

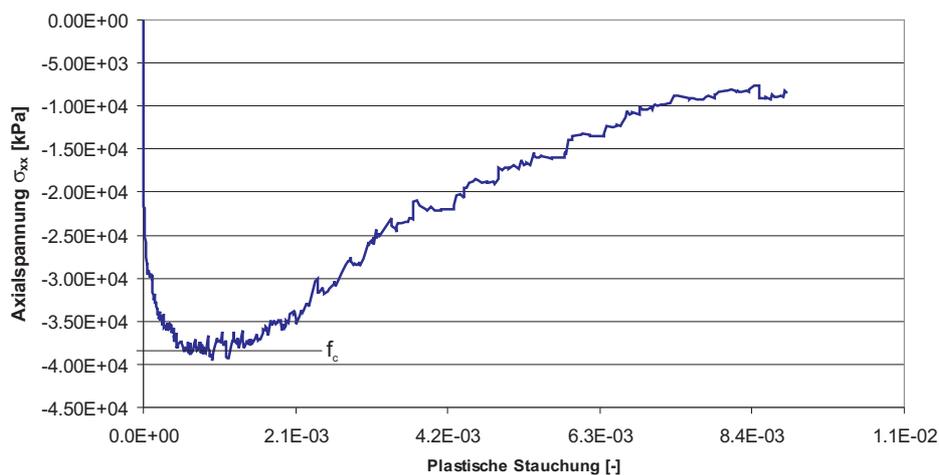


Abbildung 9.3: Verifikation des Werkstoffgesetzes: Spannungs-Verzerrungs-Diagramm bei einaxialer Druckbelastung

Insgesamt scheinen die in den Hydrocode AUTODYN implementierten Gleichungen korrekte Ergebnisse zu liefern. Die in das Modell eingegebenen Festigkeiten werden in den Simulationen wiedergegeben und die Degradation der Materialeigenschaften (hier exemplarisch anhand der Festigkeiten gezeigt) setzt korrekt ein. Für die weiteren Betrachtungen wird daher von einer fehlerfreien Funktion des Werkstoffmodells bei statischem Verhalten ausgegangen. Dennoch können Fehler in der Programmierung nicht gänzlich ausgeschlossen werden. Daher sind die anhand des Modells bestimmten numerischen Ergebnisse, wie auch bei Verwendung anderer Modelle, grundsätzlich auf Plausibilität zu prüfen.

## 9.3 Validierung

Die Validierung des makromechanischen Modells erfolgt, wie eingangs erwähnt, anhand von Vergleichsberechnungen von Anspannungsversuchen an unbewehrten Betonplatten und Penetrationsversuchen an dicken Betonzielen.

Bei den Anspannungsversuchen wird eine extrem starke Druckwelle in das Material eingekoppelt. Diese läuft durch die Platte und wird aufgrund des Impedanzunterschiedes an der Rückseite zu einer Zugwelle reflektiert (vgl. Abschnitt 3.4), die zur Schädigung des Materials bis hin zu Abplatzungen führt. Folglich stehen bei der Validierung des Modells anhand der Anspannungsversuche im wesentlichen die Phänomene der Wellenausbreitung im Vordergrund. Während auf der ladungszugewandten Seite die Schädigungsprozesse bei extrem hohen Drücken und Verzerrungsraten entscheidend sind, dominiert auf der Gegenseite der Platte die Schädigung infolge Zugbelastung bzw. bei "negativen hydrostatischen Drücken" (hydrostatischer Zug). Die bei den Penetrationsversuchen auftretenden Drücke und Verzerrungsraten sind dagegen deutlich geringer. Hier ist insbesondere das deviatorische Materialverhalten, beschrieben durch das Festigkeitsmodell, entscheidend.

Die Validierung des Modells anhand sowohl Anspannungs- als auch Penetrationsversuchen deckt die wichtigsten Anwendungsbereiche ab und überprüft gleichzeitig die Vorhersagefähigkeit des Modells bei Belastungen mit unterschiedlichen Drücken und Verzerrungsraten.

### 9.3.1 Vergleichsberechnungen von Anspannungsversuchen an unbewehrten Betonplatten

Für die Untersuchungen in diesem Abschnitt werden die an der Wehrtechnischen Dienststelle (WTD) 52 in Oberjettenberg durchgeführten Anspannungsversuche an unbewehrten Betonplatten mit dem Ergebnis numerischer Simulationen mit dem makromechanischen Modell verglichen. Experimentell untersucht wurden einerseits das Schädigungsverhalten von Betonplatten unterschiedlicher Dicke bei konstanter Ladungsmenge (Serie 2) sowie andererseits von Platten mit gleicher Geometrie bei verschiedenen Ladungsmengen (Serie 3). Die charakteristischen Parameter und Kenn-

größen dieser Versuche sind in Tabelle 9.1 übersichtlich zusammengestellt. Die bei den Versuchen verwendete Betonrezeptur, der Versuchsaufbau sowie die Versuchsergebnisse und Auswertungsmethoden sind im Bericht von LANDMANN [165] ausführlich dokumentiert.

Das Hauptaugenmerk der Vergleiche zwischen Simulation und Experiment liegt dabei auf dem qualitativen und quantitativen Vergleich der Schädigungsabmessungen.

Tabelle 9.1: Charakteristische Parameter und Kennwerte der experimentell untersuchten Betonplatten

Versuch	Sprengst.-Menge PETN [g]	Bauteildicke $d$ [cm]	Festigkeit $f_c$ [MPa]	Dichte $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]
S2/P7	650	45.0	47.2	2.448
S2/P8	650	30.0	47.2	2.448
S2/P9	650	20.0	47.2	2.448
S3/P1	350	30.0	38.6	2.452
S3/P2	650	30.0	38.6	2.452
S3/P3	850	30.0	38.6	2.452

### Aufbau des numerischen Modells

Der Aufbau des numerischen Modells zur Simulation der Kontaktdetonationen erfolgt in Anlehnung an den in [165] dokumentierten Versuchsaufbau. Der einzige wesentliche Unterschied ist dabei die Abbildung der in den Versuchen rechteckigen Platten (Kantenlänge  $l = 2\text{m}$ ) durch eine rotationssymmetrische Platte (Durchmesser  $d = 2\text{m}$ ). Nach [29] und [53] ist diese vereinfachte Modellierung unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie bei homogenem isotropen Material nahezu einschränkungsfrei möglich. Lediglich der Einfluss der Ecken bei der Wellenreflexion an den seitlichen Oberflächen der Platte kann nicht mehr erfasst werden. Dieser hat jedoch keine Auswirkung auf die lokale Schädigung in Plattenmitte (vgl. [91]) und wird daher vernachlässigt. Abbildung 9.4 stellt das Simulationsmodell grafisch dar.

Wie bereits in Abschnitt 4.2 erläutert, eignet sich die EULERSche Betrachtungsweise besonders gut zur Simulation von Strömungsprozessen, wie sie auch bei der Detonation von Sprengstoff auftreten. Der Sprengstoff (PETN 1.50) wird daher im Modell in einem ansonsten mit Luft gefüllten EULER-Netz mit einer Netzfeinheit von  $2\text{mm} \times 2\text{mm}$  abgebildet. Die Formgebung des Netzes stellt dabei sicher, dass sich der Druck aus der Detonation des Sprengstoffs über die gesamte Plattenoberseite hinweg ausbreiten kann und gleichzeitig die benötigte Rechendauer auf einem akzeptablen Niveau (ca. 1 Tag) gehalten wird. Die Flow-out Randbedingung ermöglicht das Entweichen der komprimierten Luft und der Detonationsschwaden nach oben und zur Seite. Die Initiierung des PETN 1.50 erfolgt, wie auch im

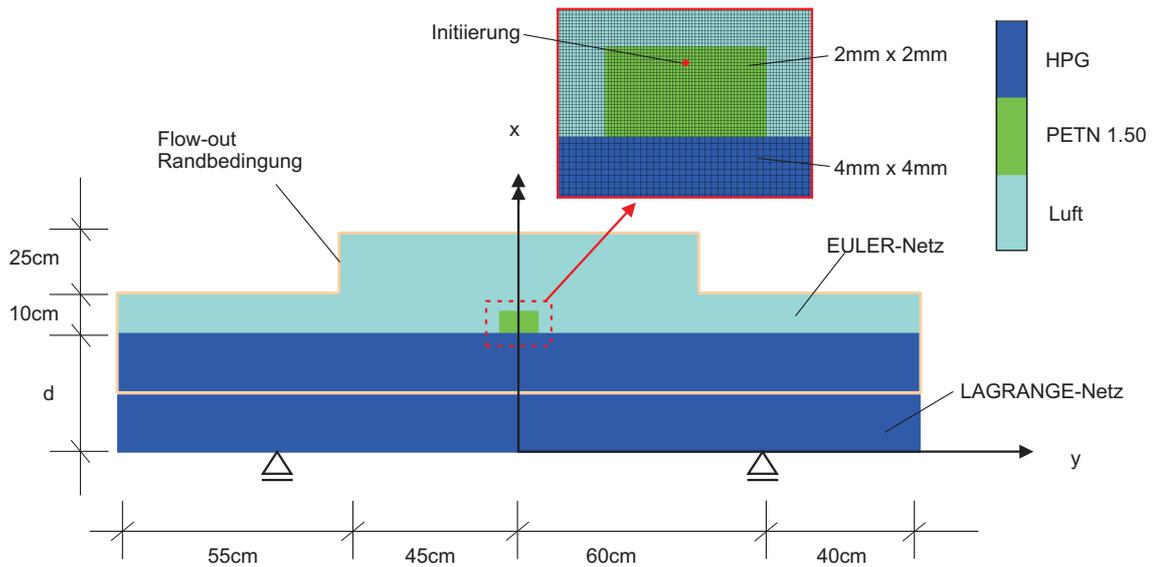


Abbildung 9.4: Validierung des Werkstoffgesetzes: Modellaufbau und Diskretisierung der Detonationssimulationen

Experiment [165], 1cm unterhalb der Sprengstoffoberkante.

Die Betonplatte ist aus den ebenfalls in Abschnitt 4.2 genannten Gründen mit einem LAGRANGE-Netz modelliert. Die Netzfeinheit beträgt dabei 4mm x 4mm. Diese örtliche Auflösung kann als ausreichend erachtet werden, da sich bereits bei einer Elementierung mit 8mm Netzkantenlänge eine asymptotische Konvergenz in den direkt ausgewerteten Größen in den Erhaltungsgleichungen zeigt (vgl. [97]). Zur Vermeidung von Instabilitäten der Berechnung aufgrund zu stark deformierter Elemente wurde ein Erosionskriterium (vgl. Abschnitt 4.3.6) bei einer geometrischen Verzerrung von 200 % festgelegt. Die Abmessungen der Betonplatte sowie die Position der Auflager sind, entsprechend dem Versuchsaufbau in [165], für alle Simulationen konstant.

Die Interaktion zwischen Sprengstoff und Beton erfolgt mittels polygonfreier EULER-LAGRANGE-Kopplung. Die theoretischen Grundlagen dieser Kopplung sind in [53] beschrieben und werden an dieser Stelle nicht näher erläutert.

### Auswertung der numerischen Schädigung

Die in [165] dokumentierten Versuche der WTD 52 wurden hinsichtlich der Schädigung infolge der beaufschlagten Kontaktdetonationen ausgewertet. Im Einzelnen wurden dabei betrachtet:

- die Tiefe des Detonationskraters ( $t_K$ ),
- der Durchmesser des Detonationskraters ( $d_K$ ),
- die Tiefe des Abplatzungsbereichs ( $t_A$ ) und

- der Durchmesser des Abplatzungsbereichs ( $d_A$ ).

Zudem wurde in jeder experimentell untersuchten Serie mindestens ein Schnittbild eines Versuchskörpers angefertigt.

Abbildung 9.5 zeigt die bei der Auswertung der Versuche betrachteten Bereiche anhand eines Schnittbildes eines der Versuchskörper. Zudem ist die Bestimmung der Schädigungsabmessungen schematisch dargestellt.

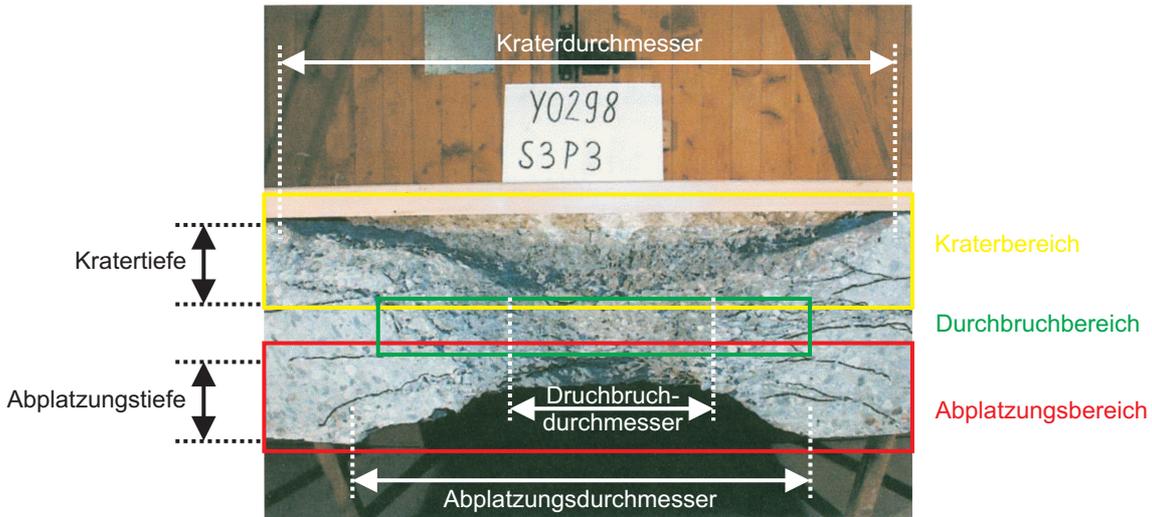


Abbildung 9.5: Schnittbild durch einen Versuchskörper: Definition der Schädigungsbereiche und -abmessungen

Wie in Abbildung 9.5 erkennbar, ist der Bereich der tatsächlichen Schädigung erheblich größer als das von der Platte gelöste Volumen. Es zeigen sich deutliche Risse über die gesamte Bauteildicke, die auch seitlich weit über den Abplatzungskegel hinaus verlaufen.

Während Krater und Abplatzungen in den Experimenten vergleichsweise leicht bestimmt werden können (fehlende Betonteile in Abbildung 9.5), müssen die numerische Schädigung  $D$  und die "Rissbereiche" im Beton interpretiert werden. Abbildung 9.6 zeigt exemplarisch das Simulationsergebnis der in Abbildung 9.5 dargestellten Platte S3/P3. Darin wird deutlich, dass das numerische Modell zwar geschädigte Bereiche (vereinfacht angedeutet durch die gestrichelten Linien) vorhersagt, jedoch nicht direkt zwischen "abgeplatzten" und "noch mit der Struktur verbundenen" Bereichen unterscheiden kann. Für einen Vergleich mit den experimentell bestimmten (von außen sichtbaren) Schädigungen müssen daher sowohl die numerischen Ergebnisse als auch die tatsächliche Schädigung interpretiert bzw. anhand geeigneter Größen abgeschätzt werden.

Die Bestimmung des Kraterdurchmessers  $d_K$  ist, wie in Abbildung 9.6 erkennbar, direkt aus dem numerisch erzeugten Schädigungsbild ablesbar. Die seitliche Ausdehnung des Kraters ist durch die numerische Schädigung klar begrenzt und kann

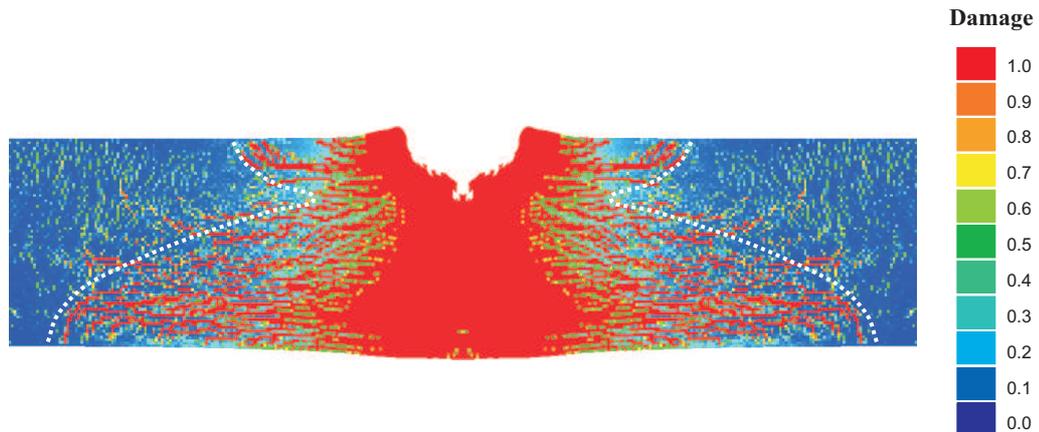


Abbildung 9.6: Schädigungsbild aus der numerischen Simulation einer Kontaktde- tonation auf eine Betonplatte mit AUTODYN

direkt gemessen werden.

Ebenso können in den meisten Simulationen die Kratertiefe  $t_K$  und gegebenenfalls der Durchbruchdurchmesser  $d_D$  direkt aus dem numerischen Schädigungsbild be- stimmt werden. Dabei entspricht die Kratertiefe der Tiefe des im Kraterbereich durchgängig vollständig geschädigten Materials. Um eine eindeutige Bestimmung des Durchbruchdurchmesser  $d_D$  in den numerischen Simulationen zu ermöglichen, wird jeweils die schmalste Stelle des durchgängig geschädigten Bereichs als maßgeblich betrachtet.

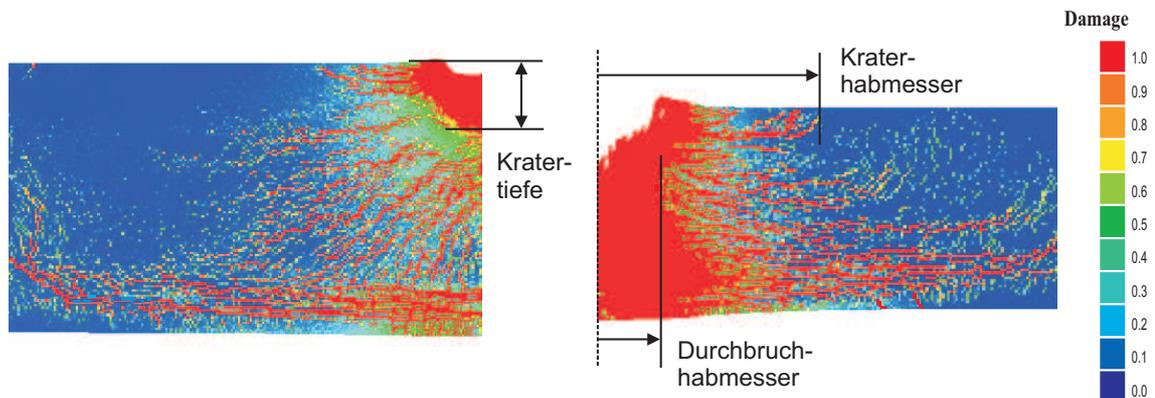


Abbildung 9.7: Bestimmung der Schädigungsabmessungen aus numerischen Schädigungsbildern

Abbildung 9.7 stellt die Ermittlung des Kraterdurchmessers, der Kratertiefe sowie des Durchbruchdurchmessers anhand des numerischen Schädigungsbildes nochmals grafisch dar.

Während im Experiment im Fall eines Durchbruchs die Kratertiefe auf Grundlage der Kraterform abgeschätzt werden konnte, scheint dies jedoch für die numerischen Ergebnisse nicht sinnvoll, da die Kraterform nur näherungsweise abgebildet wird (vgl. Abbildung 9.5 und 9.6). In diesen Fälle kann die Kratertiefe somit nicht bestimmt werden.

Eine eindeutige Aussage darüber, ob das numerische Ergebnis einen Durchbruch zeigt, ist jedoch anhand des Schädigungsbildes allein nicht in allen Fällen möglich. Hier gibt jedoch die Bewegungsrichtung der Partikel im Kraterbereich unterhalb der Ladung Aufschluss. Bei einem Durchbruch bewegen sich alle Partikel in Richtung der ladungsabgewandten Seite (ähnlich Durchstanzen). Bei Simulationen ohne Durchbruch dagegen bewegen sich die Partikel direkt unterhalb der Ladung entgegengesetzt (ähnlich Rückprall). Abbildung 9.8 zeigt dieses Materialverhalten anhand der Knotengeschwindigkeitsvektoren. Mit Hilfe dieses Verfahrens kann für alle Simulationen eine verlässliche Aussage zum Vorliegen eines Durchbruchs getroffen werden.

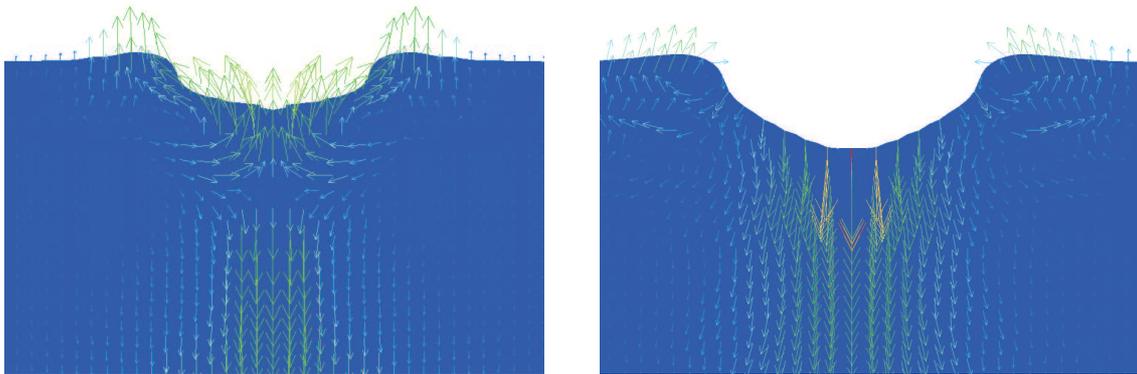


Abbildung 9.8: Bewegungsrichtung der Netzknoten unterhalb der Ladung; links: kein Durchbruch, rechts: Durchbruch

Ähnlich der Auswertung des Durchbruchverhaltens können auch die in den Experimenten beobachteten, durch die reflektierte Zugwelle verursachten Abplatzungen auf der Plattenrückseite nicht direkt aus dem numerischen Schädigungsbild abgeschätzt werden. Zur Bestimmung des Durchmessers und der Tiefe der Abplatzungen ( $d_A$  und  $t_A$ ) in der Simulation sind daher ebenfalls zusätzliche Abschätzungskriterien erforderlich.

Die (numerische) Schädigungsevolution während der Simulation einer Kontaktdetonation an einer Betonplatte ist nach einer Zeit von, je nach Plattengeometrie und Ladungsmenge, 250 - 500  $\mu\text{s}$  näherungsweise abgeschlossen. Danach nimmt die Schädigung nur noch marginal zu. Dies gilt jedoch nicht für die Verzerrungen. Bereiche mit hohem Impuls, die sich im Experiment als Trümmer von der Struktur lösen,

führen weiterhin zu Verzerrungen innerhalb der Struktur. Dies legt nahe, die effektiven Verzerrungen in die Abschätzung der Abplatzungen einzubeziehen. Numerische Studien an zwei weiteren Platten (S2/P5 und S3/P4 in [165]) ergaben, dass eine Verdoppelung der Simulationszeit bis zum Abschluss der Schädigungsentwicklung ausreicht, um aussagefähige Ergebnisse zu liefern. Die Grenzverzerrung zu diesem Zeitpunkt konnte dabei zu  $\varepsilon_{eff} \geq 0.11$  bestimmt werden.

Abbildung 9.9 zeigt die Bestimmung des Durchmessers und der Tiefe der Abplatzungen am Beispiel der Simulation des Versuchs S3/P2.

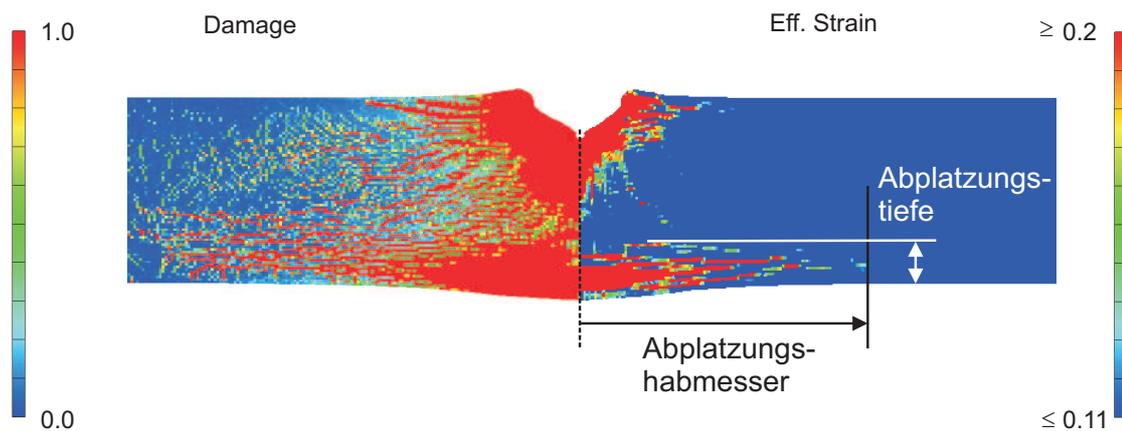


Abbildung 9.9: Abschätzung der Abplatzungsabmessungen aus den effektiven Verzerrungen

Somit können alle zum Vergleich der numerischen Simulationen mit den Versuchsergebnissen notwendigen Schädigungsgrößen ermittelt bzw. abgeschätzt werden.

### Vergleich der Schädigung in Simulation und Experiment

Zur qualitativen Wertung des numerischen Ergebnisses werden zunächst die Schädigungsbilder aus Experiment und Simulation mit einander verglichen. Die Abbildungen 9.10 bis 9.15 zeigen die Überlagerungen der numerischen Schädigungsbilder mit Schnitten durch die experimentell untersuchten Betonplatten. Dabei ist es wichtig anzumerken, dass die "roten Bereiche" in den numerischen Schädigungsbildern keine diskreten Risse darstellen. Sie zeigen vielmehr einen Bereich, in dem in der realen Struktur eine Schädigung (in Form von Mikro- und Makrorissen oder Kompaktion) zu erwarten ist.

Die numerisch erzeugten Schädigungsbilder zeigen dennoch deutlich die Ausbildung eines Kraters und eines breiten, aufgrund der Zugwelle geschädigten Bereichs auf der Plattenrückseite. Dies entspricht dem grundsätzlichen Schädigungsmuster bei Kontaktdetonationen. Sowohl die Reduktion der Plattendicke bei gleichbleibender Ladungsmenge (Abbildungen 9.10 bis 9.12) als auch die Erhöhung der Sprengstoffmenge bei konstanter Plattendicke (Abbildungen 9.13 bis 9.15) zeigen in den

Simulationen eine deutliche Zunahme des geschädigten Bereichs. Dies entspricht dem Schädigungsverhalten im Experiment.

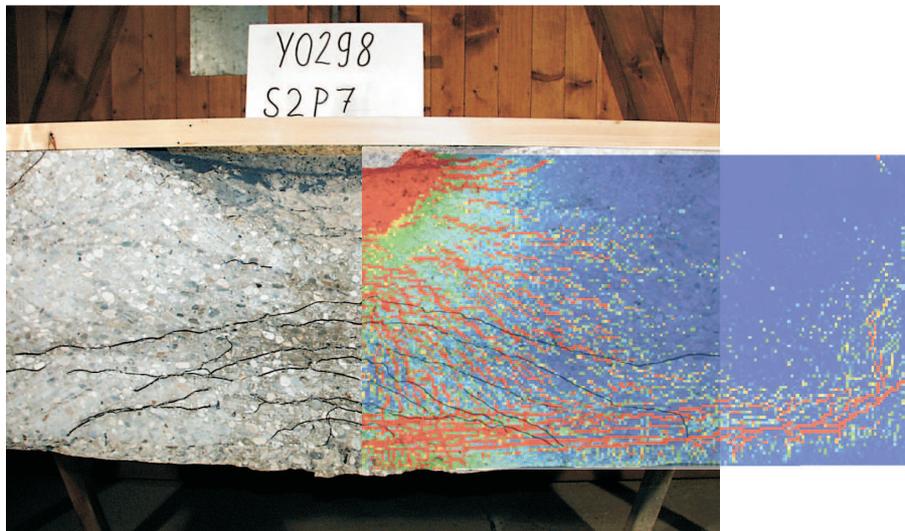


Abbildung 9.10: Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S2/P7

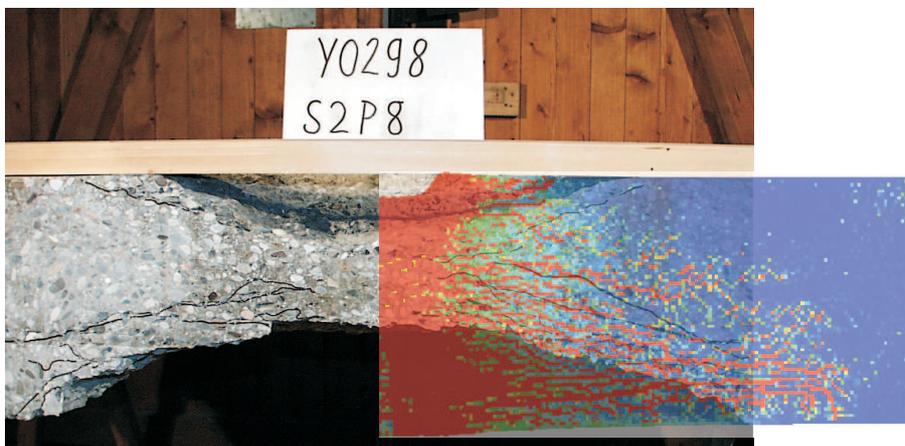


Abbildung 9.11: Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S2/P8

Die Abbildungen verdeutlichen, dass die Schädigung der Betonplatten in den Experimenten nicht auf die vom Bauteil gelösten Trümmer beschränkt ist. Die durch die WTD 52 angefertigten Schnittbilder der Platten zeigen erhebliche Schäden in Form

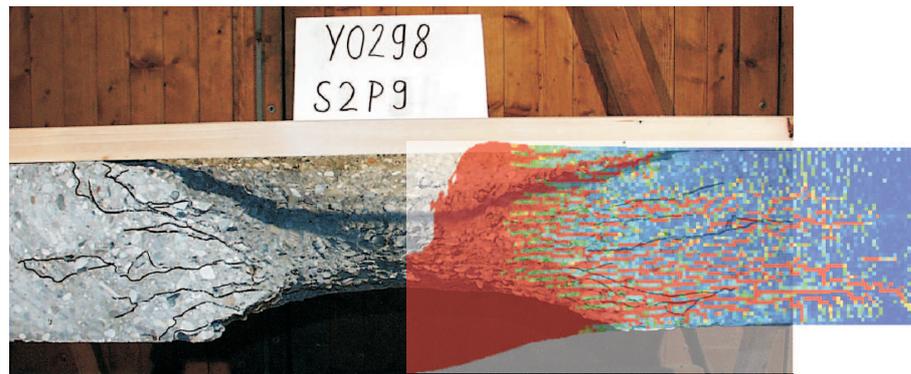


Abbildung 9.12: Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S2/P9

von Makrorissen im Inneren der Platten. Die tatsächliche Schädigung des Betons - einschließlich der nicht mit bloßem Auge erkennbaren Mikrorisse - ist jedoch darüber hinaus in einem noch deutlich größeren Bereich zu erwarten.

Es kann daher festgestellt werden, dass die numerisch bestimmten geschädigten Bereiche das Schädigungsverhalten der experimentell untersuchten Betonplatten qualitativ wiedergeben.

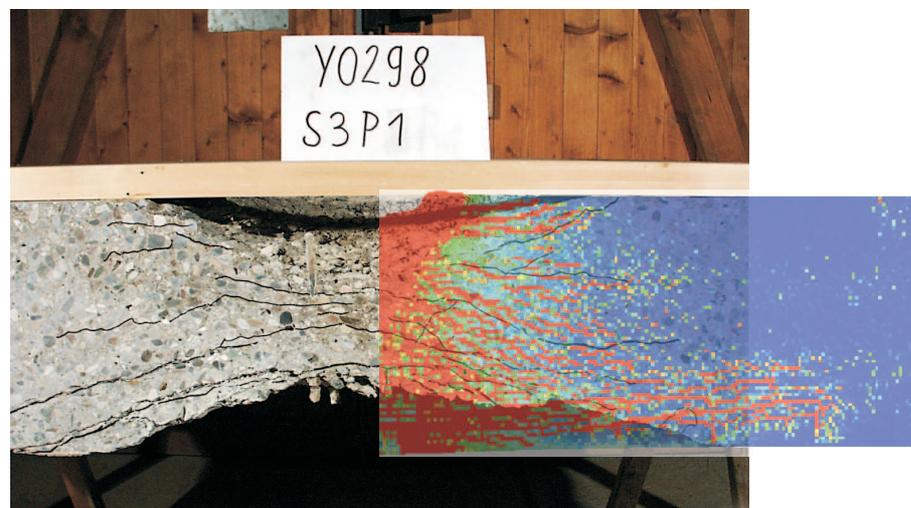


Abbildung 9.13: Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S3/P1

Zur Überprüfung der quantitativen Vorhersagefähigkeit des Modells werden im Folgenden die Ergebnisse aller in Tabelle 9.1 zusammengefassten Versuche den entsprechenden Simulationen gegenübergestellt, die Ergebnisse verglichen und

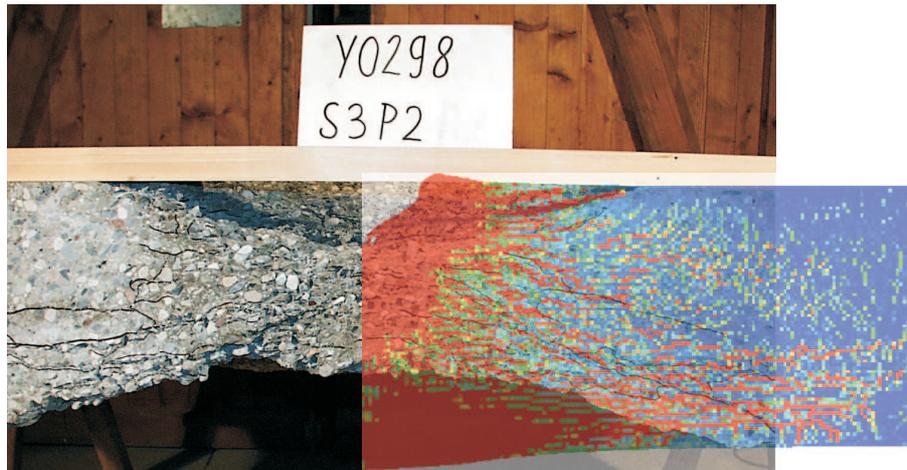


Abbildung 9.14: Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S3/P2

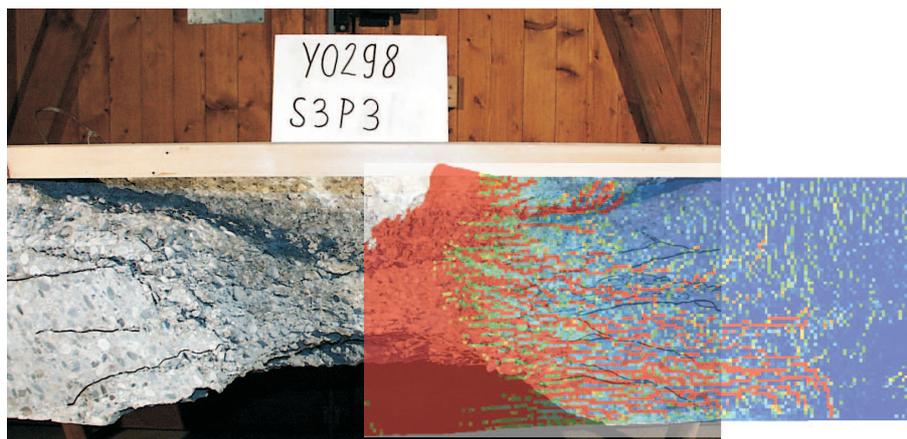


Abbildung 9.15: Überlagerung des numerischen Schädigungsbildes mit dem Schnitt der angesprengten Betonplatte S3/P3

Abweichungen diskutiert.

Tabelle 9.2 dokumentiert die in den Versuchen der Wehrtechnischen Dienststelle 52 ermittelten Schädigungsabmessungen, die sich durch die Detonationsbelastungen auf die Betonplatten ergeben haben.

Dabei wurden die angesprengten Platten "nachbehandelt"; d.h. lose Bruchstücke, die lediglich aufgrund von Verzahnungen noch mit den Platten verbunden waren, wurden mittels eines Hammers entfernt, bevor die Schädigungsabmessungen bestimmt wurden. Während sich dabei im Kraterbereich praktisch keine Änderungen ergaben, wurden in den Bereichen der Abplatzungen und Durchbrüche teilweise

deutliche Materialmengen entfernt.

Tabelle 9.2: Schädigungsabmessungen der Betonplatten aus den Versuchen der WTD 52

Versuch	Krater- tiefe [cm]	Krater- durchmesser [cm]	Abplatzungs- tiefe [cm]	Abplatzungs- durchmesser [cm]	Durchbruch- durchmesser [cm]
S2/P7	14.0	56.0	0.0	0.0	—
S2/P8	8.5	54.0	14.0	90.0	—
S2/P9	7.0	55.0	13.0	68.0	33.0
S3/P1	8.5	48.0	9.5	81.0	—
S3/P2	9.5	53.0	11.0	85.0	—
S3/P3	9.0	57.0	21.0	85.0	30.0

#### *Vergleich der Krater- und Durchbruchschädigungen*

Zunächst werden die Krater- und Durchbruchbereiche verglichen. Die Auswertung der Simulationen erfolgt dabei entsprechend den zuvor erläuterten Kriterien. Die in den Simulationen ermittelten Kraterdurchmesser und -tiefen sowie die Durchbruchdurchmesser sind in Tabelle 9.3 den Versuchen gegenübergestellt. Die Spalte  $\Delta$  beschreibt dabei die Abweichung des Simulationsergebnisses vom Experiment, wobei das Vorzeichen angibt, ob das numerische Ergebnis das Versuchsergebnis unterschätzt (-) oder überschätzt (+).

In den Simulationen der Versuche S2/P9, S3/P2 und S3/P3 ergab sich ein Durchbruch der Platte, weshalb die Kratertiefen dieser Simulationen nicht bestimmt werden konnten.

Tabelle 9.3: Vergleich der Kraterschädigungen und Durchbruchdurchmesser aus Simulation und Experiment

Versuch	Kratertiefe			Kraterdurchmesser			Durchbruch		
	$t_{K,Sim}$ [cm]	$t_{K,Exp}$ [cm]	$\Delta$ [%]	$d_{K,Sim}$ [cm]	$d_{K,Exp}$ [cm]	$\Delta$ [%]	$d_{D,Sim}$ [cm]	$d_{D,Exp}$ [cm]	$\Delta$ [%]
S2/P7	12.6	14.0	-10.0	57.6	56.0	+2.9	—	—	—
S2/P8	10.2	8.5	+20.0	52.2	54.0	-3.3	—	—	—
S2/P9	—	7.0	—	54.4	55.0	-1.1	22.0	33.0	-33.3
S3/P1	9.5	8.5	+11.8	51.2	48.0	+6.7	—	—	—
S3/P2	—	9.5	—	57.6	53.0	+8.7	6.2	—	—
S3/P3	—	9.0	—	60.0	57.0	+5.3	19.5	30.0	-35.0

Die Auswertung der Kratertiefen zeigt auf den ersten Blick erhebliche Diskrepanzen zwischen Simulation und Experiment. Die scheinbar hohen Abweichungen relativieren sich jedoch bei Betrachtung der absoluten Unterschiede. So entspricht die relative Abweichung von 20 % im Versuch S2/P8 einer absoluten Abweichung von lediglich 1.7 cm. Sie liegt somit im Bereich des in den Versuchen verwendeten Größtkorndurchmessers ( $d_{max} = 1.6$  cm), welcher im Rahmen der Homogenisierung als Toleranzbereich gesehen werden kann. Zudem scheinen die numerischen Ergebnisse die Versuche nicht grundsätzlich zu über- oder unterschätzen.

Alle betrachteten Simulationsergebnisse bleiben somit innerhalb der auf die Heterogenität des realen Werkstoffs zurückführbaren Streubreite der Versuche.

Auch die in den Experimenten beobachteten Kraterdurchmesser werden in den Simulationen hervorragend abgebildet. Die maximale Abweichung beträgt lediglich 8.7 % bzw. 4.6 cm absolut bei der Simulation des Versuchs S3/P2. Das Ergebnis dieser Simulation stellt zudem eine Besonderheit dar, da sich numerisch ein Durchbruch der Platte ergab, der im Experiment nicht festgestellt wurde. Dennoch liegen die numerischen Schädigungsabmessungen des Kraters innerhalb des im Bericht der WTD 52 [165] dokumentierten experimentellen Streuung.

Bei der Auswertung der Durchbrüche zeigen sich dagegen teilweise erhebliche Unterschiede zwischen Simulation und Experiment. Die Abweichungen der Simulationen zum Experiment von bis zu 35 % des im Experiment gemessenen Wertes können anhand des Größtkorndurchmessers und somit der Heterogenität nicht mehr erklärt werden.

Bei genauerer Betrachtung der Durchbrüche zeigen jedoch sowohl die Experimente als auch die Simulationen in diesem Bereich erhebliche (Gefüge-)Schädigungen. Dies wird insbesondere beim Vergleich der experimentellen Durchbruchdurchmesser vor und nach der Nachbehandlung deutlich. So lag  $d_D$  im Versuch S3/P3 vor der Bearbeitung mit dem Hammer bei 20.0 cm und damit 33 % unter dem korrigierten Wert. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass bei der Nachbehandlung im Bereich des Durchbruchs aufgrund der starken Schädigung deutlich mehr Material entfernt wurde, als lediglich "lose Bruchstücke".

Dies relativiert die in Tabelle 9.3 dargestellten Abweichungen. Bei Zugrundelegung der Schädigung der unbehandelten Platten beträgt die maximale Abweichung lediglich noch 9.6 %. Es kann daher festgestellt werden, dass das Modell auch die Durchbrüche infolge Kontaktdetonation gut abbildet.

Dennoch muss ein Bereich einer Betonplatte, der sich mit einem einfachen Hammer entfernen lässt, als nahezu vollkommen geschädigt betrachtet werden. Dieser Bereich des nahezu vollständig zerstörten Materials um den Durchbruch scheint sich mit 150 % des numerisch bestimmten Durchbruchdurchmessers gut abschätzen zu lassen.

In der Auswertung bisher nicht berücksichtigt wurde der Versuch S3/P2. Bei diesem Versuch konnte bei der Auswertung der Simulation ein Durchbruch der Platte festgestellt werden, der im Experiment nicht beobachtet wurde (vgl. Abbildung 9.14). In der Auswertung der WTD 52 [165] wurde dieser Versuch jedoch bereits als "Grenzfall zum Durchbruch" dokumentiert. Zudem wurde der Versuch zweimal,

jedoch mit geringfügig unterschiedlichen Betonen, wiederholt, wobei sich in beiden Versuchen ein Durchbruch ergab. Dennoch ist hier ein direkter Vergleich der Schädigungsabmessungen für Kratertiefe und Durchbruchdurchmesser aus Simulation und Experiment nicht möglich.

#### *Vergleich der Abplatzungsschädigung*

Die Auswertung der Abplatzungsbereiche in den numerischen Simulationen basiert, wie oben beschrieben, auf den effektiven Verzerrungen. Die so in den Simulationen ermittelten Abplatzungstiefen und -durchmesser sind in Tabelle 9.4 den Versuchen gegenübergestellt. Die Spalte  $\Delta$  beschreibt dabei, analog der Auswertung des Kraterbereichs, die Abweichung des Simulationsergebnisses vom Experiment. Das Vorzeichen kennzeichnet auch hier, ob das numerische Ergebnis das Versuchsergebnis unterschätzt (-) oder überschätzt (+).

In der Simulation des Versuchs S3/P3 konnte die Abplatzungstiefe nicht bestimmt werden. Ein Vergleich mit dem experimentellen Ergebnis ist daher nicht möglich.

Tabelle 9.4: Vergleich der Abplatzungsschädigungen aus Simulation und Experiment

Versuch	Abplatzungstiefe			Abplatzungsdurchmesser		
	$t_{A,Sim}$ [cm]	$t_{A,Exp}$ [cm]	$\Delta$ [%]	$d_{A,Sim}$ [cm]	$d_{A,Exp}$ [cm]	$\Delta$ [%]
S2/P7	6.2	0.0	—	78.4	0.0	—
S2/P8	10.1	14.0	-27.8	81.6	90.0	-9.3
S2/P9	8.3	13.0	-36.1	64.0	68.0	-5.9
S3/P1	7.7	9.5	-18.9	68.8	81.0	-15.1
S3/P2	9.3	11.0	-15.4	92.8	85.0	+9.2
S3/P3	—	21.0	—	86.4	85.0	+1.6

Während für den Versuch S2/P7 keine Abplatzungen dokumentiert wurden, zeigte das Simulationsergebnis deutlich einen zwar flachen aber breiten Abplatzungsbereich. Jedoch wurde beim späteren Transport der Platte von nicht näher dokumentierten "sich lösenden Beton-Schollen" berichtet [106]. Dies lässt vermuten, dass die für den Versuch gewählte Kombination aus Ladungsmenge und Plattendicke gerade den Grenzbereich zu sich lösenden Bruchstücken darstellt. Das Simulationsergebnis kann daher zwar als realistisch betrachtet werden, ein direkter Vergleich mit dem Experiment ist jedoch nicht möglich.

Auffällig in Tabelle 9.4 ist, dass die Abplatzungstiefen in den Simulationen durchgängig unterschätzt werden. Die Abweichungen von bis zu 36.1 % lassen sich jedoch auch durch eine Änderung der Ablese-Grenzverzerrung nicht merklich verbessern. Dennoch werden die Veränderungen der Abplatzungstiefen infolge der Variation der Plattendicke bzw. der Ladungsmenge tendenziell wiedergegeben.

Eine genaue Bestimmung der Abplatzungstiefen aus den Simulationen scheint somit nicht direkt möglich. Durch eine Korrektur der abgelesenen Werte um +25 % können die durchschnittlichen Abweichungen jedoch auf unter 10 % reduziert werden. Dies ermöglicht zumindest eine relative genaue Abschätzung der zu erwartenden Abplatzungstiefen.

Im Gegensatz zu den Abplatzungstiefen werden die Abplatzungsdurchmesser, unter Berücksichtigung der experimentellen Streuung, mit einer guten Genauigkeit abgebildet. Die maximale Abweichung der Simulation vom Experiment beträgt lediglich 15.1 %, wobei die Abweichungen sowohl in positiver als auch in negativer Richtung um die Versuchsergebnisse streuen.

Die zugrunde gelegte effektive Grenzverzerrung stellt jedoch lediglich eine Abschätzung dar. Daher können auch die aus den Simulationen ermittelten Abplatzungsdurchmesser nur als (gute) Näherung betrachtet werden.

### Zusammenfassung

Die Simulationen geben die in den Experimenten beobachteten Schädigungsbilder qualitativ durchweg gut wieder. Die sich in den Simulationen ergebenden geschädigten Bereiche gehen dabei erwartungsgemäß deutlich über den Bereich der vom Bauteil gelösten Bruchstücke hinaus.

Die experimentell bestimmten Kratertiefen und -durchmesser sowie die Durchmesser von Durchbrüchen werden, unter Berücksichtigung der experimentellen Streuung, durch das Modell in allen Simulationen mit guter Genauigkeit abgebildet.

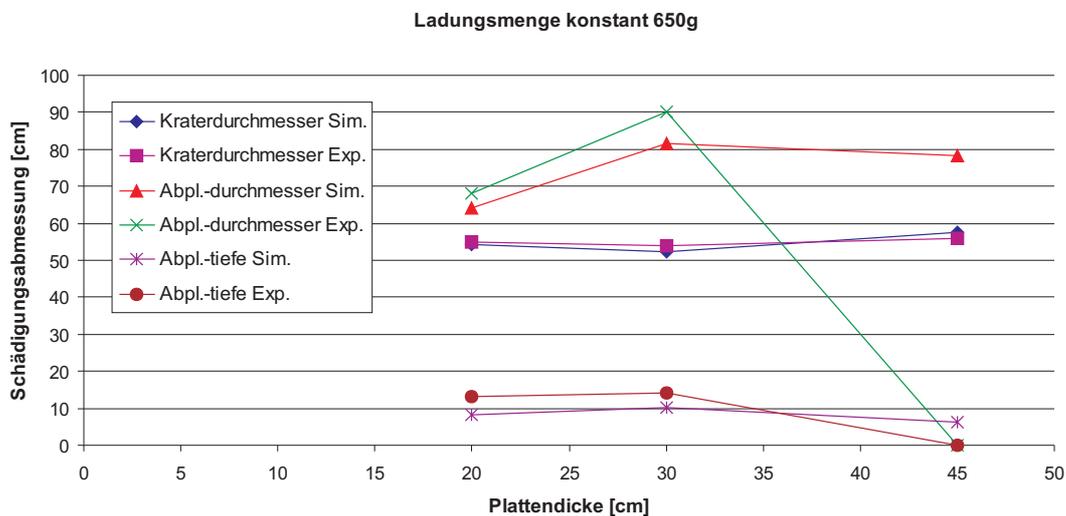


Abbildung 9.16: Zusammenfassung der experimentell und numerisch bestimmten Schädigungsabmessungen bei Variation der Plattendicke

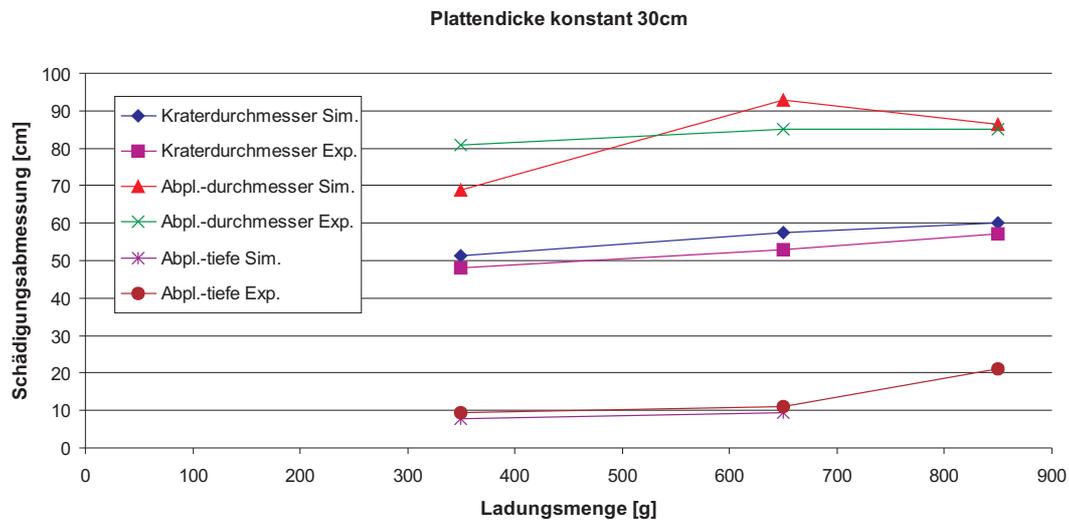


Abbildung 9.17: Zusammenfassung der experimentell und numerisch bestimmten Schädigungsabmessungen bei Variation der Ladungsmenge

Auch die Abplatzungsdurchmesser auf der Plattenrückseite können anhand des neuen Modells relativ genau ( $\pm 15\%$ ) abgeschätzt werden. Lediglich die Abplatzungstiefen lassen sich nur näherungsweise abschätzen, wobei sich die Genauigkeit durch Einführung eines Korrekturfaktors deutlich verbessern lässt.

Die Diagramme in Abbildung 9.16 und 9.17 fassen die Validierung des Modells anhand von Kontaktdetonationen übersichtlich zusammen.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass mit dem neuen Materialmodell qualitative und quantitative Aussagen zur Schädigung einer durch Kontaktdetonation geschädigten Betonstruktur gemacht werden können.

### 9.3.2 Vergleichsberechnungen von Penetrationsversuchen an massigen Betonzielen

Zur Untersuchung der Qualität des Materialmodells bei der Simulation von Penetrationsvorgängen werden die von FORRESTAL ET AL. in [84] veröffentlichten Versuche mit Simulationen mit dem neuen Modell verglichen. In den Versuchen wurden großkalibrige Projektile (Kaliber 76.2mm) mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten auf kreisrunde Betonplatten mit einer Dicke von  $d = 1.22\text{m}$  bzw.  $d = 1.83\text{m}$  geschossen und die Verzögerung während des Eindringvorgangs sowie die Eindringtiefe der Projektile bestimmt.

Die charakteristischen Parameter und Kennwerte dieser Versuche sind in Tabelle 9.5 übersichtlich zusammengestellt. Die bei den Versuchen verwendete Betonrezeptur, der Versuchsaufbau sowie die Versuchsergebnisse und Auswertungsmethoden sind

Tabelle 9.5: Charakteristische Parameter der Penetrationsversuche

Versuch	Auftreffgeschwindigkeit	Bauteildicke	Festigkeit
	$v_0$ [m/s]	$d$ [m]	$f_c$ [MPa]
SNL-00-11/3	238.1	1.22	39.0
SNL-00-12/4	275.7	1.83	39.0
SNL-00-09/1	314.0	1.22	39.0
SNL-00-10/2	369.5	1.22	39.0
SNL-00-14/5	456.4	1.83	39.0

in [84] ausführlich dokumentiert.

Da die Schädigungsabmessungen durch FORRESTAL ET AL. nicht dokumentiert wurden, liegt das Hauptaugenmerk der Vergleiche zwischen Simulation und Experiment auf der Betrachtung der Eindringtiefen.

### Aufbau des numerischen Modells

Der Aufbau des numerischen Modells zur Simulation der Penetrationsversuche erfolgt entsprechend dem in [84] dokumentierten Versuchsaufbau.

Die Betonziele werden mit einem LAGRANGE-Netz mit einer Netzfeinheit von 3.5mm x 3.5mm modelliert. Diese örtliche Diskretisierung liegt deutlich unterhalb der Konvergenzgrenze von 8mm Netzkantenlänge (vgl. Abschnitt 9.3.1). Das Erosionskriterium wurde auf 150 % geometrische Verzerrung festgelegt. Dieser Wert entspricht dem Ergebnis umfangreicher numerischer Studien an einer ähnlichen Problemstellung [118].

Der Penetrator wurde ebenfalls mit einem LAGRANGE-Netz modelliert. Die Netzfeinheit variiert zwischen 10mm x 2.4mm im hinteren Teil und 1.8mm x 0.6mm im Inneren der Projektilnase. Dabei wurde auf die Einhaltung des in [96] untersuchten und empfohlenen Verhältnisses der Elementgrößen von Penetrator und Ziel geachtet. Die Interaktion zwischen Penetrator und Beton erfolgt durch LAGRANGE-LAGRANGE-Kopplung mit einer Prozesszonenbreite (vgl. Abschnitt 4.3.5) von 0.16mm. Der Reibungsbeiwert zwischen den zwei Materialien wurde auf 0.1 festgelegt. Dieser Wert ist, wie bereits bei der Festlegung des Erosionskriteriums aus dem Ergebnis der umfangreichen Studien von HANSSON und SKOGLUND [118] übernommen. Das numerische Modell ist in Abbildung 9.18 detailliert dargestellt.

Der Aufbau des Penetratorinneren ist in [84] nicht dokumentiert. Bekannt sind lediglich das Material der Hülle, Gesamtmasse des Projektils und die eingebaute Messtechnik. Da sich die Projektilen bei den Versuchen nicht verformten, wurde bei der geometrischen Modellbildung eine ausreichend dicke Wandstärke modelliert und der übrige Raum mit einem der Messtechnik äquivalenten Material gefüllt. Die

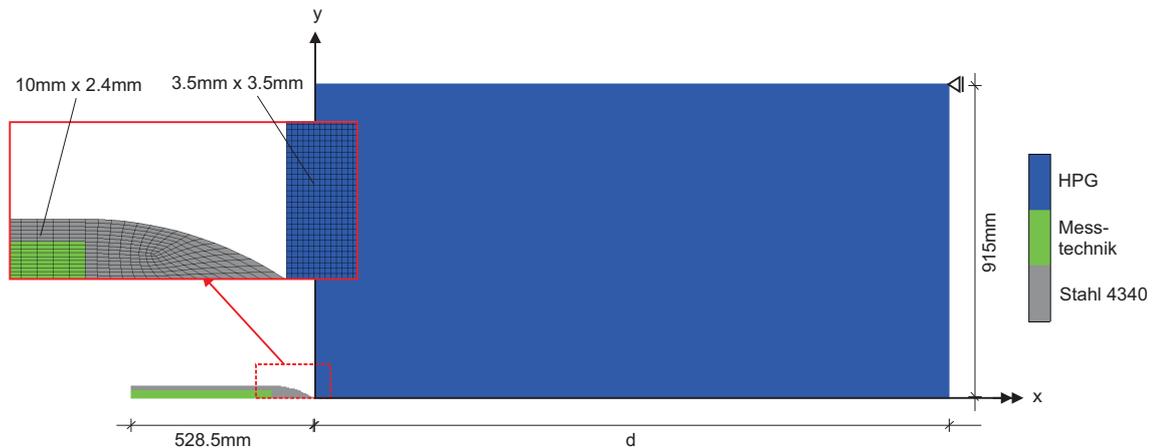


Abbildung 9.18: Validierung des Werkstoffgesetzes: Modellaufbau und Diskretisierung der Penetrationssimulationen

Dichte dieses Materials wurde aus der Gesamtmasse des Projektils und der Masse der Hülle zu  $2.40 \text{ g/cm}^3$  bestimmt. Dies gewährleistet den korrekten Impuls des Penetrators beim Aufprall.

Allen Teilen des Penetrators wurde in einer Anfangsrandbedingung die jeweilige, im Versuch gemessene Aufprallgeschwindigkeit zugewiesen.

### Vergleich der Eindringtiefen in Simulation und Experiment

Die in Tabelle 9.5 zusammengefassten Versuche wurden simuliert und die jeweilige Eindringtiefe bestimmt, nachdem der Penetrator zum Stillstand gekommen ist. Die Auswertung erfolgt durch die Bestimmung der geometrischen Position der Projektilspitze. Der Auswerteprozess ist somit deutlich einfacher als bei der Untersuchung der Kontaktdetonationen in Abschnitt 9.3.1.

Zusätzlich wird das aus dem Penetrationsvorgang resultierende Schädigungsbild beurteilt. Da die Schädigungsgeometrie jedoch in [84] nicht dokumentiert wurde, erfolgt diese Auswertung lediglich qualitativ.

Tabelle 9.6 stellt die numerisch bestimmten Eindringtiefen den Versuchsergebnissen gegenüber.

Insgesamt zeigen die in den Simulationen bestimmten Eindringtiefen eine gute Übereinstimmung mit den Versuchen. Während bei den niedrigeren Auftreffgeschwindigkeiten (bis  $314 \text{ m/s}$ ) die experimentellen Ergebnisse in den Simulationen nahezu exakt wiedergegeben werden, ergeben sich in den übrigen Simulationen leichte Abweichungen bis maximal  $17.5 \%$ . Dabei werden die in den Versuchen bestimmten Eindringtiefen sowohl über- als auch unterschätzt. Der Einfluss der Reibung kann daher als maßgebliche Ursache der Abweichungen ausgeschlossen werden, da der Reibungsbeiwert konstant, d.h. von der Geschwindigkeit unabhängig ist.

Tabelle 9.6: Vergleich der Eindringtiefen aus Simulation und Experiment

Versuch	Eindringtiefe		
	Simulation [cm]	Experiment [cm]	$\Delta$ [%]
SNL-00-11/3	32.5	30.0	+8.3
SNL-00-12/4	38.8	38.0	+2.1
SNL-00-09/1	46.3	45.0	+2.9
SNL-00-10/2	62.3	53.0	+17.5
SNL-00-14/5	82.0	94.0	-12.8

Grundsätzlich liegen jedoch auch die Ergebnisse bei den höheren Auftreffgeschwindigkeiten noch in dem bei derartigen Versuchen zu erwartenden Streubereich (vgl. [94]). Die Abweichungen können somit vermutlich auf experimentelle Streuung zurückgeführt werden. Dies ist insbesondere wahrscheinlich, da die Ergebnisse bei  $v_0 > 314$  m/s dieser Versuchsreihe in weiterführenden Versuchen nicht reproduziert werden konnten. In den späteren Versuchen lagen die Eindringtiefen ca. 15 % über bzw. unter den von FORRESTAL ET AL. ermittelten Werten [50]. Das entspricht in etwa den in der Simulation bestimmten Eindringtiefen.

### Diskussion der numerischen Schädigungsbilder

Die sich in den Versuchen ergebenden Schädigungsabmessungen bzw. -bilder sind in [84] nicht dokumentiert. Die Auswertung der numerisch erzeugten Schädigung kann daher, anders als bei der Eindringtiefe, nur qualitativ erfolgen.

Die numerischen Schädigungsbilder sind in den Abbildungen 9.19 bis 9.23 dargestellt. Diese zeigen insgesamt eine deutliche Zunahme der Schädigung bei steigender Auftreffgeschwindigkeit. Dies wird insbesondere bei Betrachtung des Kraterbereichs deutlich. Während in Abbildung 9.19 nur eine lokale Schädigung um die Eindringstelle herum erkennbar ist, ist bei den Simulationen mit höheren Auftreffgeschwindigkeiten, wie beispielsweise in Abbildung 9.22 und 9.23, der gesamte vordere Bereich des Betonziels geschädigt. Die Zunahme der Schädigung bei zunehmender Auftreffgeschwindigkeit des Penetrators (vgl. [94]) wird grundsätzlich in der Simulation wiedergegeben.

Auffällig in den numerischen Schädigungsbildern ist insbesondere eine lokal konzentrierte diagonale Schädigung. Diese ist zwar in allen Simulationen erkennbar, jedoch bei den Simulationen der Versuche mit geringerer Bauteildicke  $d$  deutlich stärker ausgeprägt. Diese Ausprägung nimmt mit höherer Auftreffgeschwindigkeit des Penetrators nochmals zu.

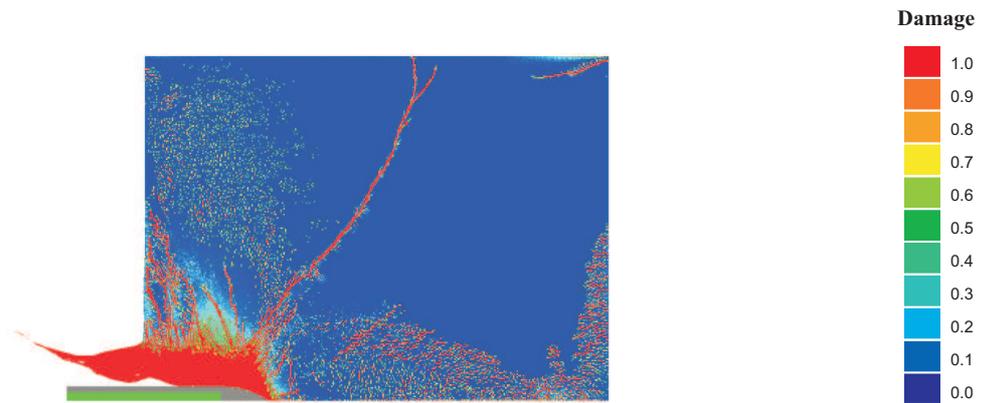


Abbildung 9.19: Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-11/3

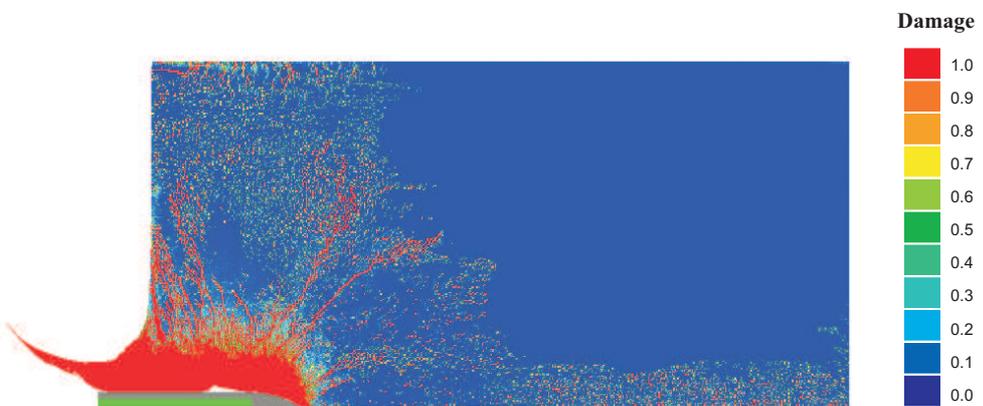


Abbildung 9.20: Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-12/4

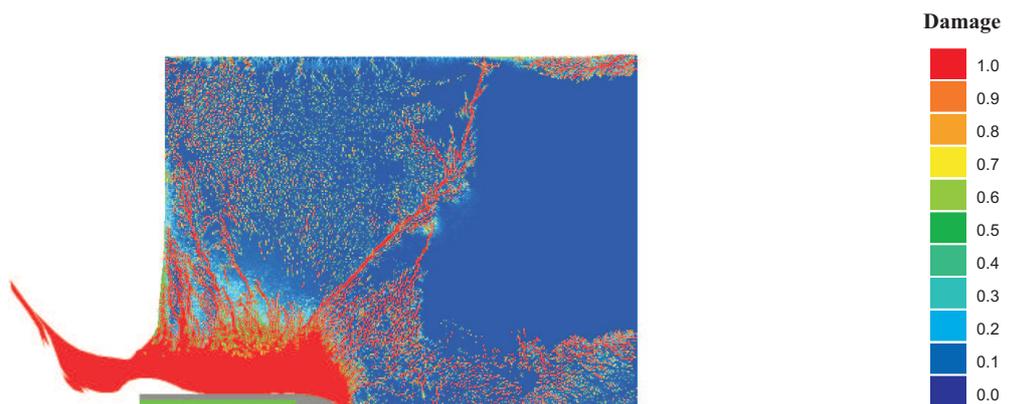


Abbildung 9.21: Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-09/1

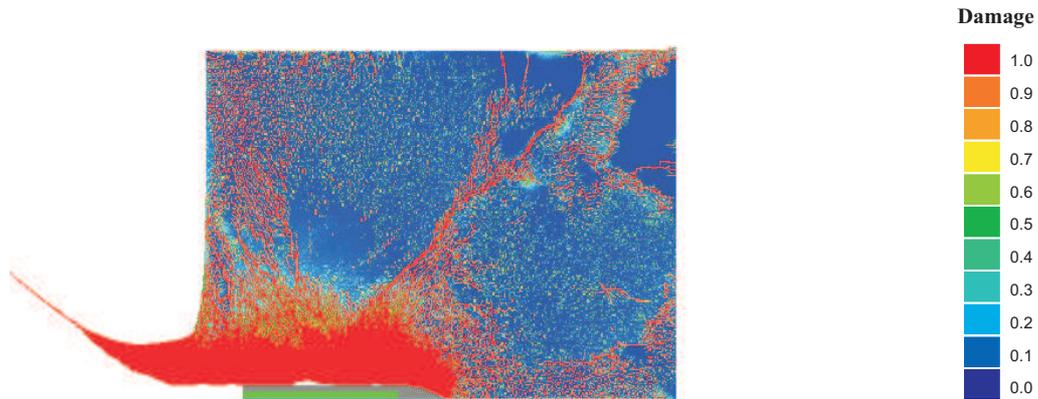


Abbildung 9.22: Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-10/2

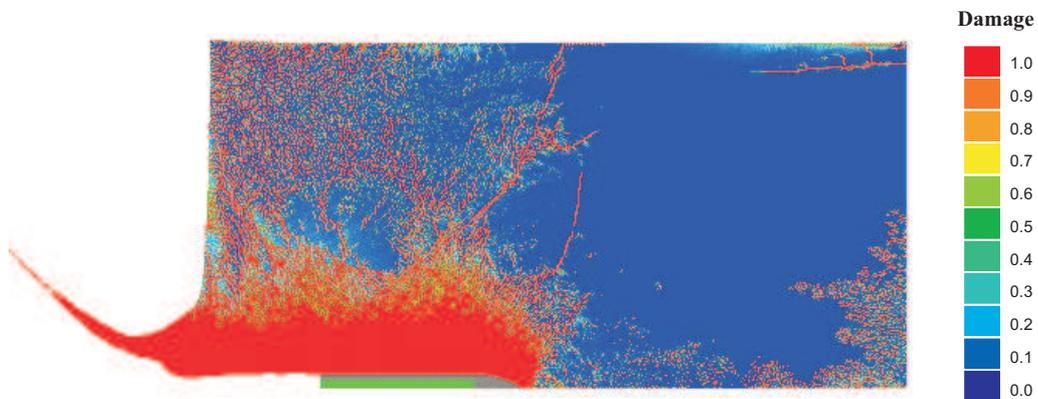


Abbildung 9.23: Numerisch erzeugtes Schädigungsbild des Versuchs SNL-00-14/5

Ein derartiges Schädigungsverhalten ist grundsätzlich aus Versuchen bekannt. Die Intensität der Schädigung ist dabei bei sonst gleichen Parametern zum einen abhängig von der Energie des Penetrators und zum anderen von der Trägheit des noch vor dem Penetrator liegenden Materials [118]. Dies erklärt die unterschiedliche Ausprägung der diagonalen Schädigung bei den Simulationen der Bauteile mit  $d = 1.22\text{m}$  und  $d = 1.83\text{m}$ .

Insgesamt wird die Phänomenologie der Schädigung des Betons infolge Impaktbelastung in den Simulationen qualitativ gut wiedergegeben. Eine quantitative Überprüfung der Schädigungsabmessungen ist im Rahmen dieser Arbeit mangels ausreichend dokumentierter Versuchsreihen nicht möglich. Dennoch sollten die mit dem entwickelten Materialmodell numerisch erzeugten Schädigungen bei Vorliegen geeigneter Versuchsreihen auch quantitativ überprüft werden.

### Zusammenfassung

Die durchgeführten Vergleichsberechnungen von großkalibrigen Beschussversuchen auf massige Betonziele zeigen insgesamt eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Im Bereich der niedrigeren Auftreffgeschwindigkeiten innerhalb der Versuchsreihe stimmen Simulation und Experiment nahezu exakt überein.

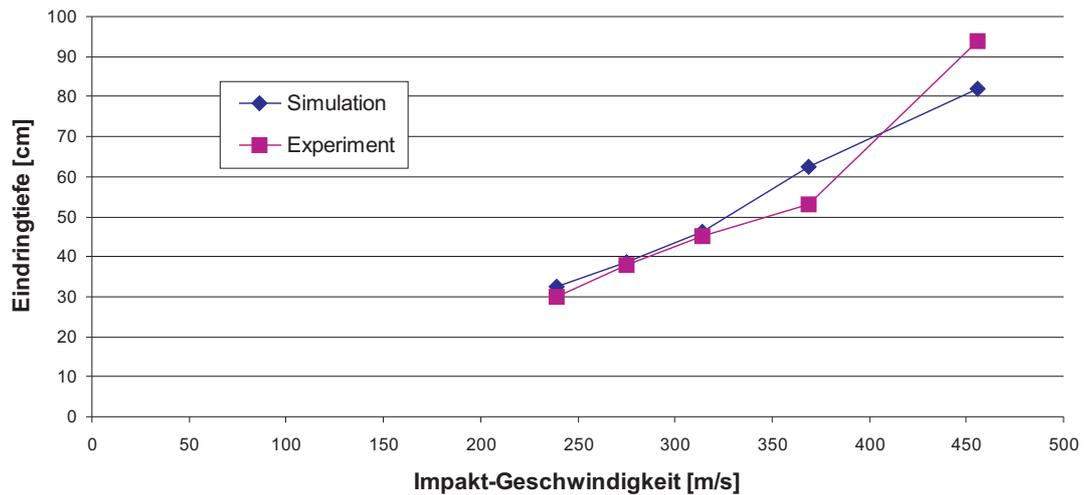


Abbildung 9.24: Zusammenfassung der experimentell und numerisch bestimmten Eindringtiefen

Die leichten Abweichungen bei höheren Impaktgeschwindigkeiten konnten auf experimentelle Streuungen zurückgeführt werden. Das Diagramm in Abbildung 9.24 fasst die Validierung des Modells anhand von Penetrationsversuchen übersichtlich zusammen.

Ein direkter Vergleich der Schädigungen aus Simulation und Experiment war hier mangels dokumentierter Schädigungsabmessungen der Versuche nicht möglich. Dennoch konnte die Schädigung zumindest qualitativ beurteilt werden. Dabei bilden die Simulationen die Schädigungsphänomenologie im Wesentlichen gut ab. Die numerisch erzeugten Schädigungsbilder können daher als realistisch betrachtet werden. Es kann daher festgestellt werden, dass anhand des neuen Materialmodells quantitative Aussagen zur Eindringtiefe von Penetratoren in eine Betonstruktur gemacht werden können. Zudem ist eine qualitative Vorhersage der zu erwartenden Schädigung möglich.

# Kapitel 10

## Zusammenfassung und Ausblick

### 10.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Computersimulation von Beton auf der Modellebene der Mesomechanik. Um dabei die komplexen Wechselwirkungen der einzelnen Bestandteile des heterogenen Betons zu erfassen, bedarf es eines realitätsnahen geometrischen Modells und realitätsnaher Materialbeschreibungen der betrachteten Komponenten. Ein derartiges Modell sowie die erforderlichen Materialbeschreibungen wurden im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und in eine Hydrocode-Umgebung eingebettet. Aufbauend darauf wurden Werkstoffsimulationen durchgeführt und deren Ergebnisse in makromechanische Modelle umgesetzt.

Einleitend wurden die mechanischen Grundlagen, die Phänomenologie der Wellenausbreitung in homogenen Medien und deren Berechnung mittels des Finite-Differenzen-Verfahrens bei expliziter Zeitintegration in einem Hydrocode dargestellt. Diese bilden die Basis aller im Rahmen dieser Arbeit verwendeten und entwickelten Modelle.

Die unterschiedlichen (Mikro-)Bestandteile der Betons wurden eingehend erläutert, deren Materialkenngrößen bestimmt und mittels einer volumetrischen Mischregel die Materialparameter der auf der Ebene der Mesomechanik betrachteten Bestandteile ermittelt. Zudem wurden die speziellen Anforderungen an ein geometrisches Modell zur mesomechanischen Beschreibung von Beton diskutiert und in ein Programm zur netzbasierten Probekörpergenerierung umgesetzt.

Es wurden numerische Simulationen auf mesomechanischer Modellebene durchgeführt und daraus die Zustandsgleichung des Betons bestimmt. Darüber hinaus wurden in weiterführenden Untersuchungen ausgewählte Aspekte des Festigkeitsverhaltens und der Schädigungsevolution betrachtet.

Schwerpunkt der Arbeit bildete die Umsetzung der aus den mesomechanischen Untersuchungen gewonnenen Erkenntnisse in ein neues Werkstoffmodell zur Beschreibung von Beton auf makromechanischer Modellebene. Die zur Charakterisierung des

Materialverhaltens erforderlichen Parameter wurden bestimmt und zur Verfügung gestellt.

Alle im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modelle wurden numerisch umgesetzt, verifiziert und anhand von Vergleichsberechnungen mit vorliegenden Versuchsdokumentationen überprüft.

Insbesondere wurden die folgenden Aspekte bearbeitet:

- Bestimmung der Materialparameter der betrachteten Bestandteile des Betons:
  - Ermittlung der Materialparameter des Zuschlags, des Zementsteins und der Verbundzone zwischen Zuschlag und Zementstein sowie Implementierung in bestehende Materialmodelle für Gestein bzw. für betonartige Werkstoffe,
- Werkstoffsimulationen zur Bestimmung der Zustandsgleichung:
  - Entwicklung und Programmierung eines multifunktionalen Algorithmus zur Generierung von Betonkörpern auf mesomechanischer Modellebene,
  - Simulationsbasierte Bestimmung der Zustandsgleichung einzelner Betonmischungen und Vergleich der numerischen Ergebnisse mit zur Verfügung stehenden Experimentaldaten,
  - Entwicklung einer Methode zur einfachen Abschätzung der Zustandsgleichung auf makromechanischer Modellebene,
- Werkstoffsimulationen zur Untersuchung von Festigkeit und Schädigung:
  - Untersuchung der Abbildbarkeit einaxialer Versuche zur Bestimmung der Materialfestigkeit,
  - Entwicklung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Druckbelastung und Zugentfestigung,
  - Untersuchung des Schädigungsverhaltens unter Biegezugbelastung bei unterschiedlichen Verzerrungsraten
- Umsetzung in ein makromechanisches Modell:
  - Entwicklung eines generalisierten Drei-Flächen-Festigkeitsmodells mit plastischer Verfestigung, Verzerrungsratenabhängigkeit und schädigungsabhängiger Entfestigung,
  - Entwicklung eines phänomenologischen Schädigungsgesetzes unter Berücksichtigung der Erkenntnisse aus den Untersuchungen auf mesomechanischer Modellebene,
  - Anwendung der Schädigungsevolution auf die isotrope Kontinuumschädigungsmechanik durch Degradation der Materialfestigkeit und -steifigkeit.

## 10.2 Bewertung

Das im Rahmen dieser Arbeit zur Verfügung gestellte Verfahren zur Bestimmung der Materialparameter ermöglicht eine Anwendung bei beliebiger Diskretisierungsgrenze der explizit betrachteten Bestandteile des Betons. Es schließt somit die Lücke der fehlenden allgemeinen Materialbeschreibung der Betonkomponenten und insbesondere der ITZ und schafft damit die Grundlage zur Betrachtung des Materialverhaltens verschiedener Betonmischungen mit unterschiedlichen Eigenschaften auf der Ebene der Mesomechanik.

Anhand der durchgeführten Werkstoffsimulationen unter quasi-statischer und dynamischer Belastung konnte gezeigt werden, dass mit den entwickelten numerischen Modellen das Materialverhalten des heterogenen Gesamtsystems gut wiedergegeben werden kann. Sie bilden daher eine solide Grundlage für mögliche weitere Anwendungen im Bereich der mesomechanischen Untersuchung von Beton unter dynamischer Belastung.

Da auf mesomechanischer Ebene nur jeweils kleine Ausschnitte einer Gesamtstruktur betrachtet werden können, wurde besonderer Wert darauf gelegt, nicht nur die Ebene der Mesomechanik zu betrachten, sondern auch deren Anwendung zur makromechanischen Modellbildung aufzuzeigen. Dadurch konnte in allen Bereichen ein klarer Bezug zur praktischen Anwendung hergestellt werden.

Die dabei entwickelte Methode zur Abschätzung der Zustandsgleichung auf Basis der Betonrezeptur stellt eine wesentliche Erleichterung dar. Sie bietet eine anwendungsorientierte Bestimmung der zur Durchführung numerischer Simulationen notwendigen Parameter und ermöglicht in vielen Bereichen einen Verzicht auf kostspielige experimentelle oder numerische Untersuchungen.

Das neu entwickelte makromechanische Materialmodell bietet ebenfalls einige Verbesserungen gegenüber den bekannten und in Hydrocodes implementierten Materialmodellen für Beton. Es bildet alle wesentlichen Phänomene des Materialverhaltens sowohl unter statischer als auch unter (hoch-)dynamischer Belastung ab. Dazu gehören plastische Verfestigung, verzerrungsratenabhängige Festigkeitssteigerung, Schädigung sowie Degradation der Festigkeiten und der Steifigkeit. Wesentliche Neuerungen gegenüber den bekannten Modellen sind:

1. eine von einander entkoppelte Beschreibung der Festigkeiten in der Formulierung der Bruchfläche: Dies ermöglicht eine verbesserte Beschreibung der dynamischen Festigkeitssteigerung sowie der Materialentfestigung entsprechend der Belastungshistorie.
2. ein neues phänomenologisches Schädigungsgesetz: Es ermöglicht eine von statischer bis (hoch-)dynamischer Belastung durchgängig realitätsnahe Schädigungsbeschreibung.
3. ein verbessertes Degradationsmodell: Dadurch wird die Entfestigung des Materials infolge Schädigung realitätsnäher wiedergegeben. Zudem wird auch die

Entfestigung bei Druckbelastung unterhalb der maximal aufnehmbaren Spannung berücksichtigt.

In Kapitel 9 konnte das Modell verifiziert und validiert werden. Sowohl Anspengversuche an Betonplatten als auch Beschussversuche an Betonzielen konnten erfolgreich abgebildet werden. Somit wurde gezeigt, dass mit dem neuen Modell qualitative und quantitative Aussagen zur Auswirkung (hoch-)dynamischer Einwirkungen auf Betonstrukturen auch in einem, im Gegensatz zu anderen Modellen breiten Anwendungsbereich möglich sind.

### 10.3 Ausblick

Die im Rahmen dieser Arbeit bereitgestellten Methoden zur Parameterbestimmung und geometrischen Modellbildung liefern eine Grundlage zur Modellierung von Beton auf der Ebene der Mesomechanik in einer Hydrocode-Umgebung.

Da deren grundsätzliche Eignung zur Abbildung des Materialverhaltens des heterogenen Werkstoffs Beton in den durchgeführten Werkstoffsimulationen gezeigt werden konnte, eröffnet sich damit ein weites Spektrum möglicher weiterführender Forschung und praktischer Anwendungen. Die durchgeführten Werkstoffsimulationen stellen dabei nur einen kleinen Ausschnitt der möglichen Anwendungen dar.

Das Hauptaugenmerk liegt jedoch derzeit im Bereich der wissenschaftlichen Forschung. Hier eröffnet sich eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten zur Untersuchung von dynamischen Prozessen in Beton, bei denen das Zusammenwirken von Zuschlag und Zementstein von besonderer Bedeutung ist. Denkbar wären beispielsweise:

- (mehraxiale) dynamische Festigkeitsbetrachtungen (z.B. Split-Hopkinson Spallationstest),
- Untersuchung im Bereich der Endballistik (z.B. des Einflusses des Zuschlags bei Penetrationsvorgängen) oder
- weitere Untersuchungen der Schädigungsevolution bei dynamischer Belastung (z.B. dynamisches Abscheren).

Darüber hinaus bietet die bei der Simulation von Biegezugversuchen angewandte Kopplung von meso- und makromechanischer Modellierung erhebliches Potential bei der Untersuchung lokaler Prozesse innerhalb größerer Strukturen. Insbesondere mit dem in naher Zukunft zu erwartenden Wegfall der systembedingten Einschränkungen in der Modellgröße ließen sich die Bereiche von besonderem Interesse im Rahmen eines Mehrskalens-Modells detaillierter abbilden. Dies würde dann auch ein breites Anwendungsspektrum in der Praxis eröffnen.

Die Anwendung der neu entwickelten theoretischen Methode zur Abschätzung der makroskopischen Zustandsgleichung ist nicht auf den Werkstoff Beton begrenzt. Bei entsprechender Bestimmung der Zustandsgrößen und Volumenverhältnisse der einzelnen Bestandteile wäre auch eine Anwendung der Methode auf verschiedene andere heterogene Werkstoffe möglich.

Gleiches gilt für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte makromechanische Festigkeitsmodell. Neben der Möglichkeit, der in der Praxis zunehmenden Forderung nachzukommen, Bauteilbemessungen auch für außergewöhnliche Belastungen durchzuführen, ermöglicht es durch seinen Aufbau auch eine Anpassung an Materialien ähnlicher Phänomenologie.

Abschließend kann festgestellt werden, dass die Betrachtung des Werkstoffs Beton auf der Ebene der Mesomechanik eine gute Möglichkeit darstellt, die Prozesse und Zusammenhänge im Inneren des Materials bei (hoch-)dynamischer Belastung besser zu verstehen. Aufbauend auf den dabei gewonnenen Erkenntnissen sind dann voraussichtlich auch weitere deutliche Verbesserungen der makromechanischen Materialbeschreibungen zu erwarten.



# Literaturverzeichnis

- [1] Addressio, F. L.; Carroll, D. E.; Dukowicz, J. K.; Harlow, F. H.; Johnson, J. N.; Kaskiwa, B. A.; Maltrud, M. E.; Ruppel, H. M.: *CAVEAT: A computer code for fluid dynamics problems with large distortion and internal slip*. Techn. Ber., Los Alamos National Laboratory, UC-32, 1988.
- [2] Ai, H.: *Shock-Induced Damage in Rocks: Application to Impact Cratering*. Dissertation, California Institute of Technology, 2006.
- [3] Ai, H. A.; Ahrens, T. J.: Simulation of dynamic response of granite: A numerical approach of shock-induced damage beneath impact craters. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 33: S. 1–10, 2006.
- [4] Akçaoglu, T.; Tokyay, M.; Çelik, T.: Effect of coarse aggregate size on interfacial cracking under uniaxial compression. *Material Letters*, Bd. 57, 2002.
- [5] Akers, S.: Concrete Constitutive Modeling Issues. *Proceedings of the Workshop on Modeling Concrete Under High Dynamic Loadings, Austin, Texas*, 2007.
- [6] Akers, S. et al. (Hg.): *Proceedings of the Workshop on Modeling Concrete Under High-Impulsive Loadings*. Institute for Advanced Technology, University of Texas, Austin, March 2007.
- [7] Altenbach, J.; Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Verlag, 1994.
- [8] Amdsdn, A. A.; Ruppel, H. M.; Hirt, C. W.: *SALE: A simplified ALE computer program for fluid flow at all speeds*. Techn. Ber., Los Alamos Scientific Laboratory, 1980.
- [9] American Society of Mechanical Engineers - ASME: *Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*. American Society of Mechanical Engineers, 2006.
- [10] Ames, W. F.: *Numerical methods for partial differential equations*. Computer science and applied mathematics. Academic Press, New York, 2. Aufl., 1977.

- [11] Anderson, C. E.: An Overview of the Theory of Hydrocodes. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 5: S. 33–59, 1987.
- [12] Anderson, D. L.: *Theory of the Earth*. Blackwell Scientific Publications, Boston, 1989.
- [13] Aquino, M. J.; Li, Z.; Shah, S. P.: Mechanical properties of the aggregate and cement interface. *Advanced Cement Based Materials*, Bd. 2: S. 211–223, 1995.
- [14] Arnold, W.: *Dynamisches Werkstoffverhalten von Armco-Eisen bei Stoßwellenbelastung*. Dissertation, VDI Fortschrittberichte; Reihe 5, Nr. 247, 1991.
- [15] Bachmann, H.: *Die Massenträgheit in einem Pseudo-Stoffgesetz für Beton bei schneller Zugbeanspruchung*. Schriftenreihe des Instituts für Baustofftechnologie und Massivbau der Universität Karlsruhe, Dissertation, 1993.
- [16] Ballatore, E.; Carpinteri, A.; Ferrara, G.; Melchiorri, G.: Mixed mode fracture energy of concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, Bd. 35(1-3): S. 145–157, 1990.
- [17] Balmer, G. G.: Shearing strength of concrete under high triaxial stress-computation of mohr's envelope as a curve. *Structural Research Laboratory Report, Denver*, (SP-23), 1949.
- [18] Barker, L. M.; Hollenbach, R. E.: Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface. *Journal of Applied Physics*, Bd. 43(11): S. 4669–4675, 1972.
- [19] Bathe, K. J.: *Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag, 1990.
- [20] Bazant, Z. P.; Ozbolt, J.: Compression failure of quasibrittle material: Nonlocal microplane model. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 118(3): S. 540–556, 1992.
- [21] Becker, A. A.: *The boundary element method in engineering - a complete course*. McGraw-Hill, 1992.
- [22] Becker, E.; Bürger, W.: *Kontinuumsmechanik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1975.
- [23] Behring, H.: *Numerische Bestimmung der Grenzlast einer ungeschädigten und einer durch Explosion geschädigten Stahlbetonplatte*. Diplomarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2004.
- [24] Beissel, S.; Belytschko, T.: Nodal integration of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 139: S. 49–74, 1996.

- [25] Beltrami, E.: Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici. *Il Nuovo Cimento*, Bd. 18(1): S. 145–155, 1885.
- [26] Belytschko, T.; Chen, J. S.: *Meshfree and Particle Methods*. John Wiley and Sons Ltd., 2007.
- [27] Belytschko, T.; Lu, Y. Y.; Gu, L.: Element-free Galerkin methods. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Bd. 37: S. 229–256, 1994.
- [28] Belytschko, T.; Neal, M. O.: Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (31): S. 547–572, 1991.
- [29] Benson, D. J.: Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 99: S. 235–394, 1992.
- [30] Bentur, A.; Alexander, M. G.: A review of the work of the ritem tc 159-etc: Engineering of the interfacial transition zone in cementitious composites. *Materials and Structures*, Bd. 33: S. 82–87, 2000.
- [31] Berhader, D.; Hanson, R. (Hg.): *Shock Waves and Shock Tubes, Proceedings of the Fifteenth International Symposium on Shock Waves and Shock Tubes - Berkeley, California July 28 - August 2 1985*. Stanford University Press, California, 1985.
- [32] Betten, J.: *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [33] Bian, L.; Fawaz, Z.; Behdinan, K.: A mixed mode crack growth model taking account of fracture surface contact and friction. *International Journal of Fracture*, Bd. 139(1): S. 39–58, 2006.
- [34] Bischoff, P. H.: *Compressive Response of Concrete to Hard Impact*. Department of Civil Engineering, Imperial College of Science and Technology, London, Dissertation, 1988.
- [35] Bischoff, P. H.; Perry, S. H.: Impact behaviour of plain concrete loaded in uniaxial compression. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 121(6): S. 685–693, 1995.
- [36] Bischoff, P. H.; Schlüter, F.-H.: Concrete structures under impact and impulsive loading, synthesis report. *Comité Euro-Internationale du Béton, Bulletin d'Information No. 187, Contribution à la 26e Session Plénière du C.E.B., Dubrovnik*, 1988.

- [37] Bleich, H. H.: On the uniqueness in ideally elastoplastic problems in case of nonassociated flow rules. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 94: S. 983–987, 1972.
- [38] de Boer, R.; Desenkamp, H. T.: Constitutive equations for concrete in failure state. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 115(8): S. 1591–1608, 1989.
- [39] Boker, R.: Die Mechanik der bleibenden Formänderung in Kristallinisch aufgebauten Körpern. *Mitteilungen und Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 175*, S. 1–51, 1915.
- [40] Bresler, B.; Pister, K.: Strength of concrete under combined stresses. *ACI Material Journal*, Bd. 55: S. 321–345, 1958.
- [41] Bresler, B.; Pister, K. S.: Failure of plain concrete under combined stresses. *Proceedings of the American Society of Civil Engineering*, 1955.
- [42] Brough, A. R.; Atkinson, A.: Automated identification of the aggregate-paste interfacial transition zone in mortars of silica sand with portland or alkali-activated slag cement paste. *Cement and Concrete Research*, Bd. 30: S. 849–854, 2000.
- [43] Burshtein, L. S.: Determination of poisson's ratio for rocks by static and dynamic methods. *Journal of Mining Science*, Bd. 4(3): S. 235–238, 1968.
- [44] Butcher, B. M.; Karnes, C. H.: *Sandia Laboratories Research Report SC-RR-67-3040*. Techn. Ber., Sandia Laboratories, Albuquerque, 1968.
- [45] Buyukozturk, O.; Nilson, A. H.; Slate, F. O.: Stress-strain response and fracture of a concrete model in biaxial loading. *ACI Material Journal*, Bd. 68(8): S. 590–599, 1971.
- [46] Buzaud, E.; Gabet, T.; Vu, H.; Daudeville, L.; Malecot, Y.: The characterisation and modelling of concrete response under high pressure confinement. In Akers, S. et al. (Hg.), *Proceedings of the Workshop on Modeling Concrete Under High-Impulsive Loadings*. Institute for Advanced Technology, University of Texas, Austin, 2007.
- [47] Caballero, A.; Lopez, C. M.; Carol, I.: 3d meso-structural analysis of concrete specimens under uniaxial tension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 195: S. 7182–7195, 2006.
- [48] Caballero, A.; Willam, K. J.; Carol, I.: Consistent tangent formulation for 3d interface modeling of cracking/fracture in quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 197: S. 2804–2822, 2008.

- [49] Caramana, E. J.; Shashkov, M. J.; Whalen, P. P.: Formulations of Artificial Viscosity for Multi-dimensional Shock Wave Computations. *Journal of Computational Physics*, (144): S. 70–97, 1998.
- [50] Cargile, D., Engineer Research and Development Center (ERDC): *Persönliche Mitteilung*, 2008.
- [51] Carlson, D. E.; Shield, R. T.: *Finite Elasticity*. Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
- [52] Carroll, M. M.; Holt, A. C.: Static and dynamic pore collapse relations for ductile porous materials. *Journal of Applied Physics*, Bd. 43(4), 1972.
- [53] Century Dynamics: *Autodyn - Theory Manual*, 2002.
- [54] Century Dynamics: *Autodyn - User Subroutines Tutorial*, 2005.
- [55] Chen, W.: *Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume 2: Plasticity and Modeling*. Elsevier Amsterdam - London - New York - Tokyo, 1994.
- [56] Chen, W.; Saaleb, A. F.: *Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume 1: Elasticity and Modeling*. John Wiley & Sons, 1982.
- [57] Chen, W. F.: *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [58] Chen, W. F.; Han, D. J.: *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [59] Cherry, J. T.: Computer calculations of explosion-produced craters. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Bd. 4: S. 1–22, 1967.
- [60] Clegg, R. A.: *Material Models for Concrete in Hydrocodes*. Techn. Ber. R059:01, Century Dynamics Limited, 1996.
- [61] Collins, G. S.: *An Introduction to Hydrocode Modeling*. Department of Planetary Science, University of Arizona, 2002.
- [62] Comité Euro-Internationale du Béton, CEB Bulletin d'Information No. 187: Concrete structures under impact and impulsive loading. *CEB Comité Euro-Internationale du Béton, Lausanne*, 1987.
- [63] Comité Euro-Internationale du Béton, CEB Bulletin d'Information No. 210: Behavior and analysis of reinforced concrete structures under alternate actions inducing inelastic response. *CEB Comité Euro-Internationale du Béton, Lausanne*, 1991.

- [64] Corr, D.; Accardi, M.; Graham-Brady, L.; Shah, S.: Digital image correlation analysis of interfacial debonding properties and fracture behavior in concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, Bd. 74: S. 109–121, 2007.
- [65] Courant, R.; Friedrichs, K. O.: *Supersonic Flow and Shock Waves*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [66] Crumbie, A. K.: *Characterisation of the Microstructure of Concrete*. Dissertation, Imperial College, London, 1994.
- [67] Cusatis, G.; Bažant, Z. P.; Cedolin, L.: Confinement-shear lattice csl model for fracture propagation in concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 195: S. 7154–7171, 2006.
- [68] Cusatis, G.; Cedolin, L.: Two-scale study of concrete fracturing behavior. *Engineering Fracture Mechanics*, Bd. 74: S. 3–17, 2007.
- [69] Davis, J. L.: *FINITE METHODS IN DYNAMICS OF CONTINUOUS MEDIA*. Macmillan Publishing Company, 1986.
- [70] Davis, P. J.: *Methods of numerical integration*. Academic Press, Orlando, 1984.
- [71] Dickamp, M. J.; Richter, T.: *Zement-Merkblatt Betontechnik B4 - 1.2007*. Verein Deutscher Zementwerke, 2007.
- [72] Diekmann, R.; Hungershöfer, J.; Lux, M.; Taenzer, L.; Wierum, J.: Efficient contact search for finite element analysis. *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona*, 2000.
- [73] DIN-Normen Ausschuß: *Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung DIN 1045*. 2005.
- [74] DIN-Normen Ausschuß: *DIN EN 12390-3 Prüfung von Festbeton - Teil 3: Druckfestigkeit von Probekörpern*. 2008.
- [75] DIN-Normen Ausschuß: *DIN EN 12390-5 Prüfung von Festbeton - Teil 5: Biegezugfestigkeit von Probekörpern*. 2008.
- [76] Dougill, J. W.: On stable progressively fracturing solids. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Bd. 27(4): S. 423–437, 1976.
- [77] Drucker, D. C.; Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, Bd. 10(2): S. 157–165, 1952.
- [78] Duda, H.: Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung. *DAfStb, Heft 419*, Beuth Verlag, Berlin, 1991.

- [79] Dugdale, J. S.; MacDonald, D.: The thermal expansion of solids. *Physics Review*, Bd. 89: S. 832–834, 1953.
- [80] Eibl, J.; Curbach, M.: An attempt to explain strength increase due to high loading rates. *Nuclear Engineering and Design*, Bd. 112: S. 45–50, 1989.
- [81] Eibl, S. J.: Schockwellebeanspruchung von Stahlbetonwänden durch Kontaktdetonation. *Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, TU München*, 1995.
- [82] Erhart, T.: *Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten*. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 2004.
- [83] Evans, G.: *Practical numerical integration*. Wiley, 1993.
- [84] Forrestal, M. J.; Frew, D. J.; Hickerson, J. P.; Rohwer, T. A.: Penetration of concrete targets with deceleration-time measurements. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 28: S. 479–497, 2003.
- [85] Forster, O.: *Integralrechnung im  $R^n$  mit Anwendungen*. Vieweg-Verlag, 3. Aufl., 1996.
- [86] Freund, L. B.: *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [87] Fromm, H.: *Handbuch der physikalischen und Technischen Mechanik*, Bd. 4, S. 359. 1931.
- [88] Garboczi, E. J.; Bentz, D. P.: Analytical formulas for interfacial transition zone properties. *Advanced Cement Based Materials*, Bd. 6: S. 99–108, 1997.
- [89] Gaul, L.; Fiedler, C.: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg Verlag, 1998.
- [90] Gebbeken, N.: Simulationsmodelle für Tragwerke unter Explosion. In *Berichte der 7. Fachtagung BAUSTATIK - BAUPRAXIS*, S. 431–438. 1999.
- [91] Gebbeken, N.; Greulich, S.: *Verhalten von Baustrukturen aus Stahlbeton unter Kontaktdetonationen: Simulationsmodell für bewehrten Beton*. Techn. Ber., FMoD research project BA514-MF206 (Abschlussbericht 2001), Berichte des Lehrstuhls für Baustatik, Universität der Bundeswehr München, 2001.
- [92] Gebbeken, N.; Greulich, S.; Pietzsch, A.: Hugoniot properties for concrete determined by full-scale detonation experiments and flyer-impact tests. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 32: S. 2017–2031, 2006.

- [93] Gebbeken, N.; Greulich, S.; Pietzsch, A.; Hartmann, T.: Modellbildung zur simulation von stahlfaserbeton unter hochdynamischer belastung. *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 103(6): S. 398–412, 2008.
- [94] Gebbeken, N.; Linse, T.: *Entwicklung eines Engineering Tools zur Ermittlung der Schutzwirkung betonartiger Bauteile gegen Penetration*. Techn. Ber., Universität der Bundeswehr München, Abschlussbericht, ISSN 1435-3555, 2008.
- [95] Gebbeken, N.; Ruppert, M.: A new concrete material model for high dynamic hydrocode simulations. *Archive of Applied Mechanics*, Bd. 70(7): S. 463–478, 2000.
- [96] Gebbeken, N.; Teich, M.; Linse, T.: Numerical Modelling of High Speed Impact and Penetration into Concrete Structures. *Proceedings of the 7th International Conference on Shock & Impact Loads on Structures, 17 - 19 October, Beijing China*, 2007.
- [97] Gebbeken, N. F. J.; Ruppert, M.: ON THE SAFETY AND RELIABILITY OF HIGH DYNAMIC HYDROCODE SIMULATIONS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (46): S. 839–851, 1999.
- [98] Gerstle, K. H.; Aschl, H.: Behavior of concrete under multiaxial stress states. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 106(6): S. 1383–1403, 1980.
- [99] Giaccio, G.; Zerbino, R.: Failure mechanism of concrete combined effects of coarse aggregates and strength level. *Advanced Cement Based Materials*, Bd. 7: S. 41–48, 1998.
- [100] Grady, D. E.: Impact compression properties of concrete. *Proceedings of the 6th International Symposium on Interaction of Nonnuclear Munitions with Structures, Panama City, Florida, May 3-7*, 1993.
- [101] Grady, D. E.: Shock and release data for sac-5 concrete to 25 gpa. *Sandia National Laboratories - Technical Memorandum, TMDG0595*, 1995.
- [102] Grady, D. E.; Furnish, M. D.: *Shock and Release Wave Properties of MJ-2 Grout*. Techn. Ber. SAND88-1642, Sandia National Laboratories, 1988.
- [103] Graff, K. F.: *Wave Motion in Elastic Solids*. Oxford University Press, 1975.
- [104] Grassl, P.; Rempling, R.: A damage-plasticity interface approach to the meso-scale modelling of concrete subjected to cyclic compressive loading. *Engineering Fracture Mechanics*, Bd. 75: S. 4804–4818, 2008.
- [105] Gray, G. T.: *Mechanical Testing and Evaluation Handbook*, Bd. 8, Kap. Classic Split-Hopkinson Pressure Bar Testing, S. 488–496. American Society for Metals, Materials Park, OH, 2000.

- [106] Greulich, S.: *Zur numerischen Simulation von Stahlbeton- und Stahlfaserbetonstrukturen unter Detonationsbeanspruchung*. Dissertation, Institut für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München, 2004.
- [107] Guest, J. J.: On the strength of ductile materials under combined stress. *Philosophical Magazine*, Bd. 50: S. 69–133, 1900.
- [108] Guinea, G. V.; El-Sayed, K.; Rocco, C. G.; Elices, M.; Planas, J.: The effect of the bond between the matrix and the aggregates on the cracking mechanism and fracture parameters of concrete. *Cement and Concrete Research*, Bd. 32: S. 1961–1970, 2002.
- [109] Guo, Z.; Zhon, Y.; Nechvatal, D.: Auswertung von Versuchen zur mehrachsigen Betonfestigkeit, die an der Technischen Universität München durchgeführt wurden. *DASTB, Heft*, (447): S. 65–106, 1995.
- [110] Guo, Z. H.; Wang, C. Z.: Investigation of strength and failure criterion of concrete under multi-axial stresses. *China Civil Engineering Journal*, Bd. 24(1): S. 1–14, 1991.
- [111] Gupta, A. K.; Maestrini, S. R.: Tension stiffness model for reinforced concrete bars. *Journal of Structural Engineering*, Bd. 116(3): S. 769–790, 1990.
- [112] Gupta, Y.; Seaman, L.: *Local Response of Reinforced Concrete to Missile Impact*. Epri np-1217, final report, European Parliaments Research Initiative, 1979.
- [113] H Li, T. L., J Zhao: Triaxial compression tests on a granite at different strain rates and confining pressures. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Bd. 36: S. 1057–1063, 1999.
- [114] Hahn, H. G.: *Bruchmechanik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1976.
- [115] Haigh, B. T.: The strain energy function and the elastic limit. *Engineering*, Bd. 109: S. 158–160, 1920.
- [116] Hall, C. A.; Chhabildas, L. C.; Reinhart, W. D.: SHOCK HUGONIOT AND RELEASE IN CONCRETE WITH DIFFERENT AGGREGATE SIZES FROM 3 TO 23 GPa. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 23: S. 341–351, 1999.
- [117] Hallquist, J. O.; Goudreau, G. L.; Benson, D. J.: Sliding Interfaces with Contact-Impact in Large-Scale Lagrangian Computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (51): S. 107–137, 1985.

- [118] Hansson, H.; Skoglund, P.: *Simulation of Concrete Penetration in 2D and 3D with the RHT Material Model*. Techn. Ber. FOI-R-0720-SE, Swedish Defence Research Agency, 2002.
- [119] Hashin, Z.; Monteiro, P. J. M.: An inverse method to determine the elastic properties of the interphase between the aggregate and the cement paste. *Cement and Concrete Research*, Bd. 32: S. 1291–1300, 2002.
- [120] Hatano, T.; Tsutsumi, H.: Dynamical compressive deformation and failure of concrete under earthquake load. *Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering*, S. 1963–1968, 1960.
- [121] Haufe, A.: *Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie*. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 2001.
- [122] Haupt, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag, 2000.
- [123] Haupt, P.: Materialtheorie am Beispiel eines Elastomerwerkstoffs. In *4. LS-DYNA Anwenderforum*. 2005.
- [124] Hauptverband der gewerblichen Berufsgenossenschaften (HVBG): *GESTIS Stoffdatenbank*. <http://www.hvbg.de/d/bia/gestis/stoffdb/index.html>, 16.08.2007.
- [125] Hazzard, J. F.; Young, R. P.: Moment tensors and micromechanical models. *Tectonophysics*, Bd. 356: S. 181–197, 2002.
- [126] Hecht, E.: *Optik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2005.
- [127] Hempel, A.: *Untersuchung des Einflusses von Temperatur und Luftfeuchtigkeit auf die Mesostruktur von Zementstein mittels Neutronenkleinwinkelstreuung*. Dissertation, TU Chemnitz, 1997.
- [128] Hentz, S.; Donzé, F. V.; Daudeville, L.: Discrete element modelling of concrete submitted to dynamic loading at high strain rates. *Computers and Structures*, Bd. 82: S. 2509–2524, 2004.
- [129] Herrmann, N.: *Experimentelle Erfassung des Betonverhaltens unter Schockwellen*. Dissertation, Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH), 2002.
- [130] Herrmann, W.: Constitutive equations for ductile porous materials. *Journal of Applied Physics*, (40): S. 2490–2499, 1969.
- [131] Hersel, O.: *Zement-Merkblatt Betontechnik B1 - 1.2006*. Verein Deutscher Zementwerke, 2006.

- [132] Heukamp, F. H.; Lemarchand, E.; Ulm, F. J.: The effect of interfacial properties on the cohesion of highly filled composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 42: S. 287–305, 2005.
- [133] Häfner, S.; Eckardt, S.; Luther, T.; Könke, C.: Mesoscale modeling of concrete: Geometry and numerics. *Computers and Structures*, Bd. 84: S. 450–461, 2006.
- [134] Hibbit; Karlson; Sorenson: *ABAQUS/Explicit User's Manual Version 5.5*, 1995.
- [135] Hiermaier, S.: *Numerische Simulation von Impaktvorgängen mit einer netzfreien Lagrangemethode (Smooth Particle Hydrodynamics)*. Universität der Bundeswehr, München, 1996.
- [136] Hiermaier, S.: *Numerik und Werkstoffdynamik der Crash- und Impaktvorgänge*. Ernst-Mach-Institut, 2003.
- [137] Hiermaier, S.: *Structures Under Crash and Impact*. Springer-Verlag, 2008.
- [138] Hirsch, C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Bd. 1: Fundamentals of Numerical Discretization. John Wiley & Sons, 1988.
- [139] Hofstetter, G.; Mang, A. H.: *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures, Fundamentals and Advances in the Engineering Sciences*. Vieweg, Wiesbaden, 1995.
- [140] Holmquist, T. J.; Johnson, G. R.; Cook, W. H.: A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates and high pressures. *Proceedings of the 14th International Symposium on Ballistics, Québec*, S. 591–600, 1993.
- [141] Hordijk, D. A.: *Local approach to fatigue of concrete*. Dissertation, Delft University of Technology, 1991.
- [142] Hsieh, S. S.; Ting, E. C.; Chen, W. F.: A plasticity-fracture model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 18(3): S. 181–197, 1982.
- [143] Hsu, T. T. C.; Slate, F. O.: Tensile bond strength between aggregate and cement paste or mortar. *ACI Journal*, Bd. 60(4): S. 465–486, 1963.
- [144] Huber, F.: *Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken*. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 2006.
- [145] Husem, M.: The effects of bond strengths between lightweight and ordinary aggregate-mortar, aggregate-cement paste on the mechanical properties of concrete. *Materials Science and Engineering*, (363): S. 152–158, 2003.

- [146] Jiang, L.: The interfacial zone and bond strength between aggregates and cement pastes incorporating high volumes of fly ash. *Cement & Concrete Composites*, Bd. 21: S. 313–316, 1999.
- [147] Johnson, G. R.; Cook, W. H.: A constitutive model and data for materials subjected to large strain, high strain rates and high temperatures. *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*, 1983.
- [148] Johnson, G. R.; Cook, W. H.: A constitutive model and data for metals subjected to large strain, high strain rates and high temperatures. *Defense Systems Division Hopkins, Minesota, USA, Air Force Armament Laboratory*, S. 541–547, 1984.
- [149] Johnson, G. R.; Cook, W. H.: Fracture characteristics for three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Bd. 21: S. 31–48, 1985.
- [150] Kaliszky, S.: *Plastizitätslehre - Theorie und technische Anwendungen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2. Aufl., 1984.
- [151] von Karman, T.: Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, (55): S. 1749–1757, 1911.
- [152] Kýlýc, A.; Yasar, E.; Celik, A. G.: Effect of grout properties on the pull-out load capacity of fully grouted rock bolt. *Tunnelling and Underground Space Technology*, Bd. 17: S. 355–362, 2002.
- [153] Klein, B.: *Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode*. (2. neubearbeitete Auflage), F. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft Braunschweig / Wiesbaden, 1997.
- [154] Kley, W.: *Theoretische Astrophysik*. Vorlesungsskript, Institut für Astronomie & Astrophysik, Universität Tübingen, 2008.
- [155] Knothe, K.; Wessel, K.: *Finite Elemente für Ingenieure*. Springer Verlag, 1995.
- [156] Krauß, M.: *Probabilistischer Nachweis der Wirksamkeit von Maßnahmen gegen frühe Trennrisse in massigen Betonbauteilen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2004.
- [157] Krätzig, W.; Mancevski, D.; Pölling, R.: Modellierungsprinzipien von Beton. In Meskouris, K. (RWTH Aachen) (Hg.), *Baustatik-Baupraxis 7*, S. 295–304. Balkema Verlag, Rotterdam, 1999.
- [158] Krätzig, W. B.; Başar, Y.: *Tragwerke 3: Theorie und Anwendungen der Methode der Finiten Elemente*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

- [159] Kuchling, H.: *Taschenbuch der Physik*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl-Hanser-Verlag, 2007.
- [160] Kuhl, E.: *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 2000.
- [161] Kupfer, H.: Das Verhalten von Beton unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung. *DAfStb, Heft 229, Verlag Ernst & Sohn*, 1973.
- [162] Kupfer, H.; Hilsdorf, H. K.; Rausch, H.: Behavior of concrete under biaxial stresses. *American Concrete Institute Journal*, Bd. 66(8): S. 656–666, 1969.
- [163] Labbane, M.; Saha, N. K.; Ting, E. C.: Yield criterion and loading function for concrete plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 30(9): S. 1269–1288, 1993.
- [164] Lade, P. V.; Kim, M. K.: Single hardening constitutive model for soil, rock and concrete. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 32(14): S. 1963–1978, 1995.
- [165] Landmann, F.: *Dokumentation der Parameteruntersuchungen des Schädigungsverhaltens von Stahlbetonplatten unter Kontaktdetonationen*. Zwischenbericht, Wehrtechnische Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik, Oberjettenberg, 2001.
- [166] Landmann, F.: *Vergleich der Messmethoden bei Ermittlung von EoS-Daten von Beton mit Hilfe der KMW-Aufnehmer und durch Flyer Plate Impact*. Techn. Ber., Kurzbericht der Wehrtechnischen Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik, Oberjettenberg, 2001.
- [167] Larcher, M.: Numerische simulation von schockwellenbeanspruchungen mit hilfe des elementfreien galerkin-verfahrens. *47. Forschungskolloquium des des DAfStb*, 2006.
- [168] Larcher, M.: *Numerische Simulation des Betonverhaltens unter Stoßwellen mit Hilfe des Elementfreien Galerkin-Verfahrens*. Dissertation, Universität Fride-riciana zu Karlsruhe, 2007.
- [169] Launay, P.; Gachon, H.: Strain and ultimate strength of concrete under triaxial stress. *ACI Journal, Special Publication*, Bd. 34: S. 13–43, 1971.
- [170] Lax, P. D.; Wendroff, B.: Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Bd. 13: S. 217–237, 1960.
- [171] Lepenies, I. G.: *Zur hierarchischen und simultanen Multi-Skalen-Analyse von Textilbeton*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 2007.

- [172] Leukart, M.: *Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien*. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 2005.
- [173] Levin, D.: The approximation power of moving least-squares. *Mathematics of Computation*, Bd. 67(224): S. 1517–1531, 1998.
- [174] Lew, A.; Radovitzky, R.; Ortiz, M.: An artificial-viscosity method for the lagrangian analysis of shocks in solids with strength on unstructured, arbitrary-order tetrahedral meshes. *Journal of Computer-Aided Materials Design*, (8): S. 213–231, 2001.
- [175] Li, G.; Zhao, Y.; Pang, S.: A three-layer built-in analytical modeling of concrete. *Cement and Concrete Research*, Bd. 28(7): S. 1057–1070, 1998.
- [176] Lion, A.: *Einführung in die Lineare Viskoelastizität*. Beiträge zur Materialtheorie, Universität der Bundeswehr München, Heft 4/07, ISSN 1862-5703, 2007.
- [177] Liu, G. R.; Liu, M. B.: *Smoothed particle hydrodynamics - a meshfree particle method*. World Scientific, New Jersey, 2003.
- [178] Livermore Software Technology Coporation: *LS-DYNA USER'S MANUAL, Version 960*, 2001.
- [179] Lur'e, A.: *Nonlinear theory of elasticity*. North-Holland, 1990.
- [180] Magnusson, J.; Hansson, H.; Skoglund, P.; Unosson, M.: *Material Testing and Numerical Simulations of Penetration in High Performance Concrete*. Techn. Ber. FOI-R-0724-SE, Swedish Defence Research Agency, 2002.
- [181] Malvar, J. M.; Ross, C. A.: Review of strain rate effects for concrete in tension. *ACI Materials Journal*, Bd. 95(6): S. 735–739, 1998.
- [182] Malvar, L. J.; Crawford, J. E.; Morrill, K. B.: K & c concrete material model, release iii: automated generation of material model input. *Rep. TR-99-24, Karagozian & Case Structural Engineers*, 1999.
- [183] Malvar, L. J.; Crawford, J. E.; Wesevich, J. W.: A new concrete model for dyna3d. *Karagozian and Case, Report No. TR-94-14.1, June 1, 1994*.
- [184] Malvar, L. J.; Crawford, J. E.; Wesevich, J. W.: *A New Concrete Model for DYNA3D Release II: Shear Dilatation and Directional Rate Enhancements*. Techn. Ber., Karagozian and Case, Report No. TR-96-2.2, February 8, 1996.
- [185] Malvar, L. J.; Morrill, K. B.; Crawford, J. E.: Numerical modeling of concrete confined by fiber-reinforced composites. *Journal of Composites for Construction*, Bd. 8(4): S. 315–322, 2004.

- [186] Marsal, D.: *Finite Differenzen und Elemente - numerische Lösung von Variationsproblemen und partiellen Differentialgleichungen*. Springer, Berlin u.a., 1989.
- [187] Marsh, S. P.: *LASL SHOCK HUGONIOT DATA*. University of California Press, 1980.
- [188] Marti, P.; Alvarez, M.; Kaufmann, W.; Sigrist, V.: *Tragverhalten von Stahlbeton*. IBK Publikation SP-008, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1999.
- [189] MathSoft Inc.: *MathCad 13.1*. All rights reserved. U.S.Pat.Nos. 5,469,538 und 5,526,475, 1986-2005.
- [190] Mazars, J. A.: A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, Bd. 25: S. 729–737, 1986.
- [191] Melosh, H. J.; Ryan, E. V.; Asphaug, E.: Dynamic fragmentation in impacts: Hydrocode simulation of laboratory impacts. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 97(9): S. 14,735–14,759, 1992.
- [192] Menetrey, P.; Willam, K. J.: Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*, Bd. 92(3): S. 311–318, 1995.
- [193] Meyers, M. A.: *Dynamic Behaviour of Materials*. Wiley Interscience, New York, 1994.
- [194] Michel, K. W.; Wagner, H. G.: Stoßwellen und materie. *Naturwissenschaften*, Bd. 58(2): S. 65–77, 1971.
- [195] Michelis, P.: Polyaxial yielding of granular rock. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 111(8): S. 1049–1066, 1985.
- [196] Michelis, P.: True triaxial cycle behavior of concrete and rock in compression. *International Journal of Plasticity*, Bd. 3: S. 249–270, 1987.
- [197] Mills, L. L.; Zimmerman, R. M.: Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. *ACI Material Journal*, Bd. 67(10): S. 802–807, 1970.
- [198] von Mises, R.: Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 582–592, 1913.
- [199] Mohr, O.: Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials? *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Band 44*, S. 1524–1530, 1900.

- [200] Morrow, C. A.; Lockner, D. A.: *Physical Properties of Two Core Samples from Well 34-9RD2 at the Coso Geothermal Field, California*. Open-file report 2006-1230, U.S. GEOLOGICAL SURVEY, 2006.
- [201] Murray, Y. D.; Lewis, B. A.: Numerical simulations of damage in concrete. *AP-TEC Inc. für Defense Nuclear Agency, Auftrag DANN 001-91-C-0075*, 1995.
- [202] Murray, Y. D.; Lewis, B. A.: Constitutive modeling of rock and concrete. *8th Int. Symposium on Interaction of the Effects of Munitions with Structures (ISIEMS), Washington D.C.*, 1997.
- [203] Nahme, H.: *Bestimmung der Hugoniot-Daten von Beton mittels Planar-Impakt-Untersuchungen*. Techn. Ber., Fraunhofergesellschaft - Ernst-Mach-Institut für Kurzzeitdynamik, EMI-Bericht E 38 / 00, 2000.
- [204] Nayroles, B.; Touzot, G.; Villon, P.: Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, Bd. 10: S. 301–318, 1992.
- [205] Nöbeling, G.: *Integralsätze der Analysis*. de Gruyter, Berlin, 1979.
- [206] Nemat-Nasser, S.; Isaacs, J. B.; Starrett, J. E.: Hopkinson Techniques for Dynamic Recovery Experiments. *Mathematical and Physical Sciences*, Bd. 435(1894): S. 371–391, 1991.
- [207] von Neumann, J.; Richtmyer, R. D.: A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks. *Journal of Applied Physics*, (21): S. 232–237, 1950.
- [208] Niemunis, A.: *Über die Anwendung der Kontinuumstheorie auf bodenmechanische Probleme - Eine Vorlesung für Grundbau- und Tunnelbauvertiefer*. Ruhr-Universität Bochum, 2006.
- [209] Noble, C.; Kokko, E.; Darnell, I.; Dunn, T.; Hagler, L.; Leininger, L.: *Concrete Model Descriptions and Summary of Benchmark Studies for Blast Effects Simulations*. Lawrence Livermore National Laboratory, 2005.
- [210] Ockert, J.: *Ein Stoffgesetz für die Schockwellenausbreitung in Beton*. Dissertation, Universität Fridericana zu Karlsruhe, 1997.
- [211] Ollivier, J. P.; Maso, J. C.; Bourdette, B.: Interfacial transition zone in concrete. *Advanced Cement Based Materials*, Bd. 2: S. 30–38, 1995.
- [212] Ottosen, N. S.: A failure criterion for concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 103(4): S. 527–535, 1977.
- [213] Ottosen, N. S.: Constitutive model for short-time loading of concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 105(1): S. 127–141, 1979.

- [214] Ozbolt, J.; Bazant, Z. P.: Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 118(7): S. 1365–1386, 1992.
- [215] Özturan, T.; Çeçen, C.: Effect of coarse aggregate type on mechanical properties of concretes with different strengths. *Cement and Concrete Research*, Bd. 27(2): S. 165–170, 1997.
- [216] Pandey, A. K.; Kumar, R.; Paul, D. K.; Trikha, D. N.: Strain rate model for dynamic analysis of reinforced concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, Bd. 132(9): S. 1393–1401, 2006.
- [217] Phani, K. K.; Niyogi, S. K.; Maitra, A. K.; Roychaudhury, M.: Strength and elastic modulus of a porous brittle solid: an acousto-ultrasonic study. *Journal of Materials Science*, Bd. 21: S. 4335–4341, 1986.
- [218] Pickhardt, R.; Bose, T.; Schäfer, W.: *Beton, Herstellung nach Norm - Arbeitshilfe für Ausbildung, Planung und Baupraxis*. Schriftenreihe der Zement- und Betonindustrie, Vbt Verlag Bau u. Technik, 2006.
- [219] Pietzsch, A.: 2006. Persönliches Gespräch.
- [220] Pölling, R.: *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2000.
- [221] Plotzitz, A.: *Ein Verfahren zur numerischen Simulation von Betonstrukturen beim Abbruch durch Sprengen*. Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Fridericiana zu Karlsruhe, Dissertation, 2002.
- [222] Ponter, A. R. S.; Hayhurst, D. R.: *Creep in Structures*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [223] Potter, D.: *Computational Physics*. John Wiley & Sons, London, 1973.
- [224] Preissmann, A.: *Propagation des intumescences dans les canaux et rivières*. Paper presented at the First Congress of the French Association for Computation, AFCAL Grenoble, France, 1961.
- [225] Prokopski, G.; Halbiniak, J.: Interfacial transition zone in cementitious materials. *Cement and Concrete Research*, Bd. 30: S. 579–583, 2000.
- [226] Randles, P. W.; Libersky, L. D.: Smooth particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 139: S. 375–408, 1996.
- [227] Rankine, W. J. M.: *Manual of Applied Mechanics*. London, 1858.

- [228] Rao, G.; Prasad, R.: Influence of the roughness of aggregate surface on the interface bond strength. *Cement and Concrete Research*, Bd. 32: S. 253–257, 2002.
- [229] Reckling, K. A.: *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*. Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [230] Reese, S.; Wriggers, P.: A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 48: S. 79–109, 2000.
- [231] Richart, F. E.; Brandtzaeg, A.; Brown, R. L.: A study of the failure of concrete under combined compressive stresses. *University of Illinois Experiment Station Bulletin*, (185), 1928.
- [232] Richtmyer, R. D.; Morton, K. W.: *DIFFERENCE METHODS FOR INITIAL-VALUE PROBLEMS*. INTERSCIENCE PUBLISHERS, John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [233] Riedel, W.: *Beton unter dynamischen Lasten - Meso- und makromechanische Modelle und ihre Parameter*. Ernst-Mach-Institut, 2000.
- [234] Riedel, W.; Wicklein, M.; Thoma, K.: Shock properties of conventional and high strength concrete: Experimental and mesomechanical analysis. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 35: S. 155–171, 2008.
- [235] Rinehart, J. S.: *Stress Transients in Solids*. Department of Mechanical Engineering, Hyper Dynamics, University of Colorado; veröffentlicht in Santa Fe, New Mexico, 1975.
- [236] Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 135(1): S. 1–61, 1908.
- [237] Ross, C. A.; Thompson, P. Y.; Tedesco, J. W.: Split-hopkinson pressure-bar tests on concrete and mortar in tension and compression. *Materials Journal*, Bd. 86(5), 1989.
- [238] Ruppert, M.: *Zur Makromechanischen Beschreibung des Materialverhaltens von Beton unter hochdynamischen Einwirkungen*. Dissertation, Institut für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München, 2000.
- [239] de Saint-Venant: Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. *Comptes Rendus hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences*, Bd. 70: S. 473–480, 1870.

- [240] Sancho, J. M.; Planas, J.; Galvez, J. C.; Reyes, E.; Cendon, D. A.: An embedded cohesive crack model for finite element analysis of mixed mode fracture of concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2006.
- [241] Sanz-Serna, J. M.; Christie, I.: Petrov-Galerkin methods for nonlinear dispersive waves. *Journal of Computational Physics*, Bd. 39: S. 94–102, 1981.
- [242] Sax, N. I.: *Dangerous Properties of Industrial Materials*. Van Nostrand Reinhold Company Inc., 6. Aufl., 1984.
- [243] Scheffler, K.; Straub, J.; Grigull, U.: *Wasserdampf tafeln. Thermodynamische Eigenschaften von Wasser und Wasserdampf bis 800° C und 800 bar*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [244] Schlegel, R.: Nichtlineare Berechnung von Beton und Stahlbetonstrukturen nach DIN 1045-1 mit ANSYS. *23rd CADFEM Users Meeting 2005*, 2005.
- [245] Schmidt-Hurtienne, B.: *Ein dreiaxiales Schädigungsmodell für Beton unter Einschluß des Dehnrateneffekts bei Hochgeschwindigkeitsbelastung*. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe, Dissertation, 2000.
- [246] Schock, R. N.; Heard, H. C.; Stephens, D. R.: Stress-strain behavior of a granodiorite and two graywackes on compression to 20 kilobars. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 78: S. 5922–5941, 1973.
- [247] Schuler, H.: *Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Schädigung von stoßbeanspruchtem Beton*. Fraunhofer Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut, Dissertation, 2004.
- [248] Schuler, H.; Mayrhofer, C.; Thoma, K.: Spall experiments for the measurement of the tensile strength and fracture energy of concrete at high strain rates. *International Journal of Impact Engineering*, Bd. 32: S. 1635–1650, 2006.
- [249] Scrivener, K. L.; Nematì, K. M.: The percolation of pore space in the cement paste/aggregate interfacial zone of concrete. *Cement and Concrete Research*, Bd. 26(1): S. 35–40, 1996.
- [250] Sharp, R. W.; Barton, R. T.: *HEMP advection model*. Techn. Ber., Lawrence Livermore National Laboratory, UCID-17809, 1981.
- [251] Silva, M. A.; Miranda, M. N. N.: Estimation of properties of ternary mixtures of solids using the mixing rule. *Powder Technology*, Bd. 134: S. 16–23, 2003.

- [252] Simo, J. C.; Ju, J. W.: Strain- and stress-based continuum damage models: Part i - formulation, part ii - computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 23: S. 821–869, 1987.
- [253] Sinha, B. P.; Gerstle, K. H.; Tulin, R. G.: Stress-strain relations for concrete under cyclic loading. *ACI Journal*, Bd. 61: S. 195–211, 1964.
- [254] Sokolov, I. M.; Erdmann, U.: *Skript zur Vorlesung Thermodynamik*. Institut für Physik der Humboldt-Universität Berlin, 2006.
- [255] Song, Y. B.; Zhao, G. F.: A general failure criterion for concretes under multi-axial stress. *China Civil Engineering Journal*, Bd. 29(2): S. 25–32, 1996.
- [256] Song, Y. B.; Zhao, G. F.; al.: Deformation and strength of concrete under tri-axial loading. *Journal of Hydrolic Engineering*, Bd. 38(12): S. 10–16, 1991.
- [257] Soroushian, P.; Ki-Bong, C.; Alhamad, A.: Dynamic constitutive behavior of concrete. *ACI Journal*, (83): S. 251–259, 1986.
- [258] Strang, G.: On the Construction and Comparison of Difference Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 5(3): S. 506–517, 1968.
- [259] Strublea, L.; Mindess, S.: Morphology of the cement-aggregate bond. *International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, Bd. 5(2): S. 79–86, 1983.
- [260] Suanno, R. L. M.; Ferrari, L. B.; Prates, C. L. M.: Nonlinear analysis of reinforced concrete shells subjected to impact loads. *Transactions of the 17th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 17) Prague, Czech Republic*, 2003.
- [261] Swegle, J. W.; Grady, D. E.: Shock viscosity and the prediction of shock wave rise times. *Journal of Applied Physics*, Bd. 58(2): S. 692–701, 1985.
- [262] Szabó, I.: *Einführung in die technische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [263] Tasong, W. A.; Lynsdale, C. J.; Cripps, J. C.: Aggregate-cement paste interface. ii: Influence of aggregate physical properties. *Cement and Concrete Research*, Bd. 28(10): S. 1453–1465, 1998.
- [264] Tasong, W. A.; Lynsdale, C. J.; Cripps, J. C.: Aggregate-cement paste interface part i. influence of aggregate geochemistry. *Cement and Concrete Research*, Bd. 29: S. 1019–1025, 1999.
- [265] Tasuji, M. E.; Slate, F. O.; Nilson, A. H.: Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading. *ACI Material Journal*, Bd. 75(5): S. 306–312, 1978.

- [266] Taylor, E.: Hydrocode modelling of space debris hyper velocity impact on soda-lime glass using the johnson-holmquist brittle material model. *2nd European Conference on Space Debris, Darmstadt, Germany, 1997.*
- [267] Thienel, K. C.: *Werkstoffe des Bauwesens*. Vorlesungsskript, Universität der Bundeswehr, München, 2003.
- [268] Timoshenko, S. P.: *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [269] Tresca, H.: Sur l'écoulement des corps solides soumis a de fortes pression. *Comptes Rendus hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences*, Bd. 59: S. 754–758, 1864.
- [270] Tsai, S. W.; Wu, E. W.: A general Theory of Strength for Anisotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, Bd. 5: S. 58–80, 1971.
- [271] Tsembelis, K.; Millett, J. C. F.; Proud, W. G.; Field, J. E.: *Shock Compression of Condensed Matter - 1999*, Kap. THE SHOCK HUGONIOT PROPERTIES OF CEMENT PASTE UP TO 5 GPa, S. 1267–1270. American Institute of Physics, 2000.
- [272] Unger, J. F.; Eckardt, S.; Könke, C.: Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 196: S. 4087–4100, 2007.
- [273] Venturini, W. S.: *The boundary element method in geomechanics*. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [274] Verein Deutscher Zementwerke, VDZ: *Zement-Taschenbuch 2002*. 50. Ausgabe. Verlag Bau + Technik, Düsseldorf, 2002.
- [275] Viogt, W.: *Annalen der Physik*, Bd. 4. Wiley-VCH, 1901.
- [276] Vogt, N.: *Vorlesungsskript Grundbau I*. Lehrstuhl für Grundbau, Bodenmechanik, Felsmechanik und Tunnelbau der TU München, 2005.
- [277] Wahrig, G.; Krämer, H.; Zimmermann, H.: *Brockhaus Wahrig Deutsches Wörterbuch*. Stuttgart, 1981.
- [278] Wang, C. C.; Truesdell, C. A.: *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhof International Publishing, Leyden, 1973.
- [279] Wang, C. Z.; Guo, Z. H.; Zhang, X. Q.: Experimental investigation of biaxial and triaxial compressive concrete strength. *ACI Material Journal*, Bd. 84(2): S. 92–100, 1987.

- [280] Weerheijm, J.: *Concrete under impact tensile loading and lateral compression*. Dissertation, Technische Universität Delft, 1992.
- [281] Weerheijm, J.: Rate dependant load-deformation relation for concrete under impact tensile loading. *Proceedings of the 11th International Conference on Fracture, Turin (Italy)*, 2005.
- [282] Weerheijm, J.; Van Doormaal, J. C. A. M.: Tensile failure of concrete at high loading rates. *International Journal of Impact Engineering*, 2004.
- [283] Wendt, J. F.: *Computational Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1996.
- [284] Westergaard, H. M.: On the resistance of ductile materials to combined stresses. *Journal of the Franklin Institute*, Bd. 189: S. 627–640, 1920.
- [285] Whirley, R. G.; Engelman, B. E.: *DYNA2D - A Nonlinear, Explicit, Two-Dimensional Finite Element Code For Solid Mechanics - User Manual*. University of California, 1993.
- [286] Willam, K. J.; Warnke, E. P.: Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *International Association for Bridge and Structural Engineering, Proceedings*, Bd. 19: S. 1–31, 1975.
- [287] Wu, H. C.: Dual failure criterion for plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 100(6): S. 1167–1181, 1974.
- [288] Wu, J. Y.; Li, J.; Faria, R.: An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 43: S. 583–612, 2006.
- [289] Wu, K.; Liu, J.; Zhang, D.; Yan, A.: Rupture probability of coarse aggregate on fracture surface of concrete. *Cement and Concrete Research*, Bd. 29: S. 1983–1987, 1999.
- [290] Yang, B. L.; Dafalias, Y. F.; Herrmann, L. R.: A bounding surface plasticity model for concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 111(3): S. 359–380, 1983.
- [291] Yin, S.; Su, E.; Mansur, M.; Hsu, T.: Biaxial tests of plain and fiber concrete. *ACI Materials Journal*, Bd. 86(24): S. 236–243, 1989.
- [292] Yu, M.: Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century. *Applied Mechanics Review*, Bd. 55(3): S. 169–218, 2002.
- [293] Zhang, D.; Xiao, L.: *The Riemann problem and interaction of waves in gas dynamics*. Longman Scientific & Technical, New York, 1989.

- [294] Zhou, F.; Molinari, J. F.; Ramesh, K. T.: Effects of material properties on the fragmentation of brittle materials. *International Journal of Fracture*, Bd. 139(2): S. 169–196, 2006.
- [295] Zhou, X. Q.; Hao, H.: Mesoscale modelling of concrete tensile failure mechanism at high strain rates. *Computers and Structures*, Bd. 86: S. 2013–2026, 2008.
- [296] Zhou, Y.: *Über das Festigkeitsverhalten verschiedener Werkstoffe*. Shaker Verlag, 1995.
- [297] Ziegler, H.: Palstizität ohne Thermodynamik? *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Bd. 21(5), 1970.
- [298] Zielinski, A. J.: *Fracture of concrete and mortar under uniaxial impact tensile loading*. Delft University Press, Dissertation, 1982.
- [299] Zinkiewicz, O. C.: *Methode der Finiten Elemente*. Hansa Verlag, 1977.
- [300] Zukas, J.: *Introduction to Hydrocodes*. Elsevier Ltd., 2004.
- [301] Zukas, J. A.: *Impact dynamics*. Wiley, New York, 1982.
- [302] Zukas, J. A.: *Materials at High Strain Rates*, Kap. 6, S. 219–242. Elsevier, London / New York, 1987.
- [303] Zukas, J. A.: *High Velocity Impact Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1990.



# Anhang A

## Grundlegende Werkstoffmodelle

### RANKINE

Das von RANKINE 1858 veröffentlichte Fließkriterium ([227]) unterscheidet nicht zwischen Druck-, Zug-, oder Schubbeanspruchung, sondern bezieht sich lediglich auf die Hauptnormalspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ . Es besagt, dass das Fließen eintritt, sobald eine der Hauptspannungen die im einaxialen Zug- bzw. Druckversuch gemessene Fließspannung  $\sigma_Y$  erreicht:

$$\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_Y = 0 \quad . \quad (\text{A.1})$$

Experimente haben gezeigt, dass diese Formulierung zur Näherung des Materialverhaltens fester Stoffe bei niedrigen Drücken verwendet werden kann (vgl. [229]).

### VON MISES

Der VON MISES-Fließzylinder ist vermutlich die bekannteste und zugleich auch eine der einfachsten Fließflächenformulierungen. Sie geht von der Annahme aus, dass die Fließgrenze druckunabhängig ist. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von plastischer Inkompressibilität. Zudem ist die Fließbedingung nach VON MISES unabhängig von der 3. Invarianten des Spannungsdeviators und somit vom LODE-Winkel  $\theta$ , was zu einem kreisförmigen Deviatorschnitt führt. Plastische Verformung tritt ein, wenn die 2. Invariante des Deviators den Wert einer quadratischen Funktion der einaxialen Fließgrenze erreicht:

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_Y^2 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Die für Metall entwickelte VON MISES Fließfläche findet heute noch Anwendung zur Beschreibung des Materialverhaltens von duktilen Werkstoffen, wie beispielsweise Stahl.

TRESCA

Das Fließkriterium nach TRESCA ist der Formulierung nach VON MISES im Grunde ähnlich. Sie geht jedoch von der Annahme aus, dass Metalle zu fließen beginnen, wenn die Schubspannung einen bestimmten Wert überschreitet. Diese einfache Abhängigkeit vom Winkel  $\theta$  führt zu einer Sechseckform im Deviatorschnitt (vgl. Abbildung 1.6).

Weiterführende Beschreibungen der Fließflächenformulierungen nach VON MISES und TRESCA finden sich z.B. in [136], [32], [58] und [229].

DRUCKER-PRAGER

Im Gegensatz zu den bisher dargestellten Fließflächen ändert sich bei der Formulierung nach DRUCKER-PRAGER die Fließgrenze in Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck  $p$ . Bei DRUCKER-PRAGER ist dieser Zusammenhang linear. Die Fließspannung  $Y$  wird zu null, wenn die dreiaxiale Zugfestigkeit HTL ("Hydrostatic Tensile Limit") erreicht wird. Die Steigung der sich im Meridianschnitt darstellenden Geraden, die aufgrund der ursprünglichen Entwicklung für Erdreich auch Reibungswinkel  $\alpha$  genannt wird, ist dabei materialabhängig.

$$Y = \bar{\sigma}' + p \tan\alpha \quad \text{mit} \quad \bar{\sigma}' = \text{Deviatorische Vergleichsspannung} \quad (\text{A.3})$$

Diese Formulierung kann zur Beschreibung einiger poröser oder granularer Materialien verwendet werden. Aufgrund der Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen scheint das Fließkriterium nach DRUCKER-PRAGER zur Beschreibung der Betonfestigkeit geeignet (vgl. [244],[55],[157] und [220]).

MOHR-COULOMB

Die von MOHR-COULOMB entwickelte Fließfläche ist ebenfalls abhängig vom hydrostatischen Druck formuliert, jedoch ist der Zusammenhang nicht linear wie bei DRUCKER-PRAGER, sondern parabolisch. Aus physikalischer Sicht bedeutet diese Form, dass der Einfluss des hydrostatischen Druckes auf die Fließspannung bei zunehmendem Druck abnimmt:

$$Y = \sqrt{\bar{\sigma}' + \frac{b^2}{a} p} - b \quad (\text{A.4})$$

mit  $a$  hydrostatische Fließspannung,  
 $b$  deviatorische Fließspannung .

Eine nichtlineare, jedoch nicht zwingend parabolische, Druckabhängigkeit der Fließspannung ist in unterschiedlichen Modellen implementiert, von denen einige in Abschnitt 1.2.3 und 8.3 näher betrachtet werden. Neben der analytischen Beschreibung sind jedoch auch abschnittsweise lineare Formulierungen möglich.

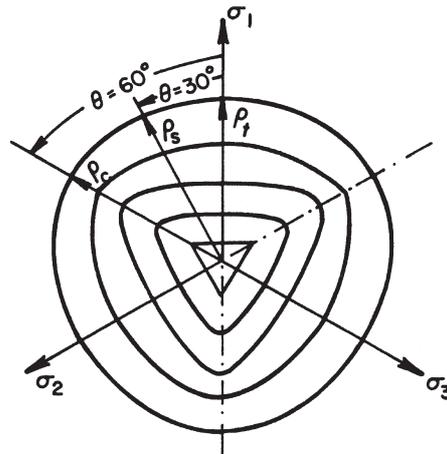


Abbildung A.1: Änderung der Fließfläche im Deviatorschnitt nach OTTOSEN, schematisch [56]

#### OTTOSEN

Die Fließflächenformulierung nach OTTOSEN entspricht im Meridianschnitt im Wesentlichen einem parabolischen Zusammenhang des hydrostatischen Drucks mit der Fließspannung (vgl. MOHR-COULOMB). Eine Besonderheit findet sich jedoch bei der Betrachtung des Deviatorschnitts. Seine Form geht mit steigendem hydrostatischen Druck von einer Dreiecksform (ähnlich RANKINE) kontinuierlich in eine Kreisform über (siehe Abb. A.1).

Physikalisch bedeutet dies, dass mit zunehmendem Druck die dritte Invariante  $J_3$  bzw. der LODE-Winkel  $\theta$  einen zunehmend geringeren, und schließlich keinen Einfluss mehr haben.

Eine derartige Änderung der Fließfläche kann beispielsweise für Beton damit erklärt werden, dass sich das Material zunächst spröde und mit steigender Kompaktion zunehmend duktil verhält. Ein tatsächliches derartiges Verhalten konnte bisher jedoch noch nicht nachgewiesen werden (vgl. z.B. [129]).

#### WILLAM-WARNKE

Eine weitere Besonderheit weist die Formulierung nach WILLAM-WARNKE auf. Sie stützt sich auf die Annahme, dass plastisches Fließen auch unter reinem hydrostatischen Druck möglich ist. Mit Erreichen eines charakteristischen Drucks beginnt sich die Fließfläche zur Hydrostaten hin zu schließen, so dass ein im Hauptspannungsraum geschlossener Körper entsteht. Derartige Formulierungen werden auch als "Kappen-Modelle" oder "Cap-Models" bezeichnet.

Jedoch konnte auch diese Annahme bezüglich des triaxialen Werkstoffverhaltens bis heute experimentell nicht nachgewiesen werden.

Wie in Abschnitt 1.2.3 erwähnt, haben die Fließflächenformulierungen mit zunehmender Realitätsnähe auch an Komplexität zugenommen. Sie lassen sich daher auch anhand der Anzahl der verwendeten Parameter einteilen. In Tabelle A.1 sind, nach diesem Kriterium geordnet, einige ausgewählte Formulierungen zusammenfassend dargestellt.

Das mit bis zu 27 von einander unabhängigen Parametern derzeit umfangreichste Modell ist das für anisotrope Materialien entwickelte TSAI-WU-Modell [270], das hier jedoch nicht näher beschrieben wird.

Tabelle A.1: Fließflächenformulierungen

Anzahl Parameter	Fließbedingung nach	Anwendungsbereich	Hauptfließkriterium
1	COULOMB	Böden	kritische Schubspannung
	RANKINE	Böden / Beton	max. Hauptspannung
	VON MISES	Metalle	Gestaltänderungsarbeit, $J_2$
2	MOHR	Böden / spröde Werkstoffe	kritische Schubspannungen
	DRUCKER PRAGER	plastisches Material bei niedrigen Drücken / Beton	deviatorische Vergleichsspannung
3	BRESLER PISTER	Böden	kritische Schubspannungen
	ARGYRIS	Beton	Invarianten $I_1$ , $J_2$ und $J_3$
4	OTTOSEN	Beton	Invarianten $I_1$ , $J_2$ und $J_3$
	HSIEH ET AL.	Beton	Invarianten $I_1$ , $J_2$ und $J_3$
5	WILLAM-WARNKE	versch. Werkstoffe	Invarianten $I_1$ , $J_2$ und $J_3$
	GUO	Beton	Invarianten $I_1$ , $J_2$ und $J_3$

# Anhang B

## Betonrezepte und Stoffraumgleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden Betone unterschiedlicher Festigkeitsklassen und unterschiedlichen Sieblinien, hauptsächlich nach DIN 1045 [73], untersucht. Die Wahl der Festigkeitsklasse und des Zements bestimmen dabei den Wasser-Zement-Wert ( $w/z$ -Wert) der Betone, die aus den WALZ-Kurven (Abbildung B.1) ermittelt werden. Die im Folgenden für einen Beton der Festigkeitsklasse C 40/50 mit einem Zement CEM II 42,5 N ( $w/z = 0.51$ ) dargestellten Berechnungen können grundsätzlich für beliebige Normalbetone durchgeführt werden.

Zur Festlegung der Betonrezeptur wird zunächst die Körnungsziffer  $k$  bestimmt. Diese ergibt sich aus der Summe der Siebdurchgänge  $s$  der jeweiligen Siebe der Sieblinie geteilt durch Hundert und dient als Eingangswert zur Bestimmung des Wasseranspruchs mittels des Diagramms in Abbildung B.2. Dabei wird für die zu untersuchenden Betone eine mittlere (plastische) Konsistenz zugrunde gelegt.

$$\begin{aligned} k &= \sum s_i / 100 \\ k &= (s_{0.25mm} + s_{0.5mm} + s_{1mm} + s_{2mm} + s_{4mm} + s_{8mm} + s_{16mm}) / 100 \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Der Zementgehalt des Betons wird anschließend aus dem Wasseranspruch und dem aufgrund der Festigkeitsklasse vorgeschriebenen  $w/z$ -Wert ermittelt.

Zur Ermittlung des Anteils der Gesteinskörnung in der Betonmischung ist zunächst das auf 1  $m^3$  Beton bezogene Volumen  $V_g$  des Zuschlags zu bestimmen.

$$V_g = 1000 \frac{dm^3}{m^3} - \left( \frac{z}{\rho_z} + \frac{w}{\rho_w} + \frac{b}{\rho_b} + l(\%) \times 10 \right) \quad (\text{B.2})$$

Dieses ergibt sich anhand der Stoffraumgleichung (Gleichung (B.2)) aus dem Zementgehalt  $z$ , dem Wassergehalt  $w$ , dem Gehalt an Betonzusatzstoffen  $b$  (hier = 0) und dem Luftporengehalt  $l$  sowie den zugehörigen Dichten  $\rho$  der Stoffe. Der Luftporenanteil in den Betonmischungen wird entsprechend dem Richtwert in [274] mit 2

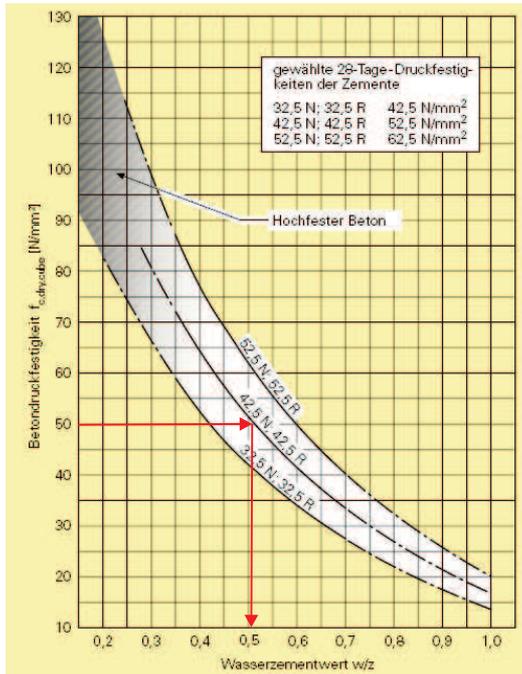


Abbildung B.1: Walzkurven zur Bestimmung des w/z-Wertes aus [71]

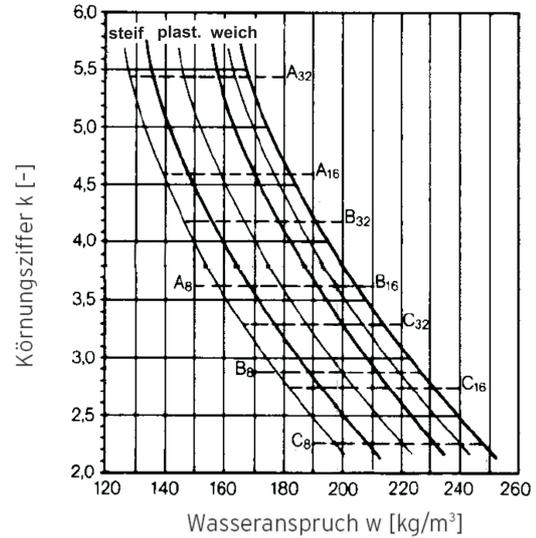


Abbildung B.2: Wasseranspruch des Betons nach [267]

Vol.-% angenommen. Daraus ergibt sich direkt die Zuschlagsmenge pro Kubikmeter Beton:

$$g = V_g \cdot \rho_g \cdot \quad (B.3)$$

Bei der Bestimmung der Massen- und Volumenanteile der Betone werden im Folgenden die in Tabelle B.1 dargestellten Materialdichten zugrunde gelegt.

Tabelle B.1: Materialdichten der Betonbestandteile

Bestandteil	Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	Quelle
Zement	3.10	[131]
Wasser	1.00	[243]
Zuschlag	2.65	[187], [233]
Luft	<i>vernachlässigt</i>	-

Die für die Generierung der mesomechanischen Körper notwendige Verteilung der Kornfraktionen in [l / m<sup>3</sup>] ergibt sich aus den Sieblinien und der Stoffraumglei-

chung. Die zur Abschätzung der Materialparameter erforderlichen Volumenanteile der Bestandteile des Zementsteins (ZS) werden aus den Volumenanteilen dieser Bestandteile im Beton bestimmt.

Dieses Vorgehen wird im Folgenden anhand eines Betons C 40/50 mit der Sieblinie A8 exemplarisch dargestellt.

#### Mischrezept für Sieblinie A8

Körnungsziffer:  $k = (95 + 86 + 79 + 64 + 39)/100 = 3.63$

Wasseranspruch:  $180 \text{ kg/m}^3$

Zementgehalt:  $z = \frac{w}{w/z} = 352.9 \text{ kg/m}^3$

Zuschlagsmenge:  $\frac{g}{\rho_g} = 1000 - \frac{352.9}{3.1} - \frac{180}{1.0} - 20 = 686.1 \quad [\text{l/m}^3]$   
 $\Rightarrow g = 1818.3 \text{ [kg/m}^3]$

Tabelle B.2: Volumenanteile der Bestandteile im Frischbeton B-A8

	Masse / $\text{m}^3$	Dichte $\rho$	Volumenanteil $f$ im Beton
Zement	352.9	3.1	0.114
Wasser	180.0	1.0	0.180
Luftporen	-	-	0.020
Zuschlag	1818.3	2.65	0.686

#### Verteilung der Kornfraktionen im Beton B-A8

Tabelle B.3: Verteilung der Kornfraktionen im Beton B-A8

	Vol.% der Kornfraktion	$V_{g,i}$ in $[\text{l} / \text{m}^3]$
< 1 mm	21	144.1
1 - 2 mm	15	102.9
2 - 4 mm	25	171.5
4 - 8 mm	39	267.6
	$\Sigma = 100$	$\Sigma = 686.1 = V_g$

Volumenanteile  $f$  im Zementstein ZS-A8

$$0.114 + 0.180 + 0.020 + 0.21 \cdot 0.686 = 0.458 \quad (= f_{ZS} \text{ im Beton B-A8})$$

Tabelle B.4: Volumenanteile der Bestandteile im Zementstein ZS-A8

	Volumenanteil $f$ im ZS	
Zement	0.114 / 0.458	= 0.249
Wasser	0.180 / 0.458	= 0.393
Luftporen	0.020 / 0.458	= 0.044
Zuschlag < 1 mm	0.686 · 0.21 / 0.458	= 0.314
	$\Sigma = 1$	

Die Tabellen B.5 bis B.7 fassen die Ergebnisse dieser Berechnungen für die Regelsieblinien nach DIN 1045 [73] übersichtlich zusammen.

Tabelle B.5: Betonrezept für Beton C 40/50 mit Regelsieblinien nach DIN 1045 [73]

Sieblinie	Körnungsziffer [ - ]	Wasseranspruch [ kg/m <sup>3</sup> ]	Zem.-gehalt [ kg/m <sup>3</sup> ]	Zuschl.-gehalt [ kg/m <sup>3</sup> ]	w/z [ - ]
A8	3.63	180	352.9	1818.3	0.51
A16	4.60	160	313.7	1904.8	
A32	5.48	147	288.2	1961.1	
B8	2.90	199	390.2	1736.1	
B16	3.66	179	351.0	1822.6	
B32	4.20	166	325.5	1878.9	
C8	2.27	220	431.4	1645.2	
C16	2.75	204	400.0	1714.5	
C32	3.30	187	366.7	1788.0	

Tabelle B.6: Volumenanteile der Kornfraktionen in 1 m<sup>3</sup> des betrachteten Betons

Sieblinie	Teilvolumina der Kornfraktionen in [ 1/m <sup>3</sup> ]						Σ
	<1 mm	1-2 mm	2-4 mm	4-8 mm	8-16 mm	16-32 mm	
A8	144.1	102.9	171.5	267.6	-	-	686.1
A16	86.3	64.7	107.8	172.5	287.5	-	718.8
A32	59.2	44.4	66.6	111.0	177.6	281.2	740.0
B8	275.1	98.3	111.4	170.3	-	-	655.1
B16	220.1	68.8	96.3	137.5	165.1	-	687.8
B32	198.5	63.8	70.9	106.4	127.6	141.8	709.0
C8	353.9	86.9	86.9	93.1	-	-	620.8
C16	317.1	84.1	77.6	90.6	77.6	-	647.0
C32	283.3	74.2	81.0	81.0	81.0	74.2	674.7

Tabelle B.7: Zusammensetzung des Zementsteins des betrachteten Betons

Sieblinie	Volumenanteile $f$ im Zementstein			
	Zement	Wasser	Luftporen	Zuschlag <1mm
A8	0.249	0.393	0.044	0.314
A16	0.275	0.436	0.054	0.235
A32	0.291	0.461	0.063	0.185
B8	0.203	0.321	0.032	0.444
B16	0.212	0.336	0.038	0.414
B32	0.214	0.339	0.041	0.406
C8	0.190	0.300	0.027	0.483
C16	0.193	0.304	0.030	0.473
C32	0.194	0.307	0.033	0.466



# Anhang C

## Materialparameter des Zementgels

Zur Abschätzung der Materialparameter des kompaktierten Zementsteins in Abschnitt 5.5.1 wird zunächst das Zementgel auf der Ebene seiner Einzelverbindungen betrachtet. Nach [127] besteht hydratisierter Zement (ohne physikalisch gebundenes Wasser und Poren) aus den in Tabelle C.1 zusammengefassten Hauptphasen. Dabei bezeichnen:

- $C \rightarrow CaO$  (Calciumoxid)
- $S \rightarrow SiO_2$  (Siliciumdioxid)
- $A \rightarrow Al_2O_3$  (Aluminiumoxid, Korund)
- $F \rightarrow Fe_2O_3$  (Eisen(III)oxid, Hämatit)

Die übrigen Reaktionsprodukte, wie beispielsweise Kalk (Calciumcarbonat  $CaCO_3$ ), mit einem Volumenanteil von insgesamt 0.9% werden dabei vernachlässigt.

Tabelle C.1: Chemische Hauptbestandteile des hydratisierten Zementgels ([127])

Phase	Bezeichnung	Vol.-%
$C_3S_2$	Calciumsilikat	44.8
$C_4A$	Calciumaluminat	5.8
$C_3A \cdot CaSO_4$	Calciumaluminat-Calciumsulfat	16.8
$C_6AF$	Calciumaluminoferrit	7.8
$Ca(OH)_2$	Calciumhydroxid	22.3
$Mg(OH)_2$	Magnesiumhydroxid	1.6

Der Volumenanteil der Bestandteile der Phasen kann anhand ihrer Einzeldichten und dem Volumenanteil der jeweiligen Phase im Zementgel (= hydratisierter Zement ohne physikalisch gebundenes Wasser und Poren) angenähert werden. Die für diese Näherungen zugrunde gelegten Dichten sowie die Wellengeschwindigkeiten der einzelnen Phasenbestandteile sind in Tabelle C.2 zusammengefasst.

Tabelle C.2: Einzeldichten und Wellengeschwindigkeiten der Hauptphasenbestandteile des Zementgels

Phase	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$c_B$ [m/s]	Quelle
<i>CaO</i>	3.37	4554	[242], [187]
<i>SiO<sub>2</sub></i>	2.65	3200	[187]
<i>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	3.94	4060*	[242], [187]
<i>Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	5.24	4350	[124], [12]
<i>CaSO<sub>4</sub></i>	2.964	3150	[242], [217]
<i>Ca(OH)<sub>2</sub></i>	2.343	2620**	[242], [187]
<i>Mg(OH)<sub>2</sub></i>	2.38	2910**	[124], [187]

\* angenähert durch Korund;  
 \*\* angenähert durch Kombination der Reinstoffe

### Volumenanteile der Einzelverbindungen im Zementgel

Die Volumenanteile  $f$  der Einzelverbindungen im Zementgel werden aus ihrer Häufigkeit in der Phase und dem Verhältnis ihrer Dichten mittels volumetrischer Mischregel berechnet.

Der Gesamtvolumenanteil entspricht dabei den Anteilen nach Tabelle C.1.

Exemplarisch ergibt sich für das Calciumsilikat ( $C_3S_2$ ):

$$3 \cdot f_C + 2 \cdot f_S = 0.448 \quad (I)$$

$$\frac{f_C}{f_S} = \frac{\rho_S}{\rho_C} = 0.786 \quad (II)$$

$$\Rightarrow f_C = 3 \cdot 8.08\% = 24.24\%$$

$$\Rightarrow f_S = 2 \cdot 10.28\% = 20.56\% \quad (C.1)$$

Bei drei Einzelverbindungen in einer Phase (z.B.  $C_6AF$ ) kommt als zusätzliche Bestimmungsgleichung ein weiteres Dichteverhältnis hinzu. Somit sind auch diese Gleichungen lösbar.

Anhand dieser Methode können alle Volumenanteile der Einzelverbindungen im Zementgel bestimmt werden. Das Ergebnis dieser Bestimmung ist in Tabelle C.3 dargestellt.

Tabelle C.3: Volumenanteile der Einzelverbindungen im Zementgel

Phase	Anteile der Einzelverbindungen in Vol.-%						
	$CaO$	$SiO_2$	$Al_2O_3$	$Fe_2O_3$	$CaSO_4$	$Ca(OH)_2$	$Mg(OH)_2$
$C_3S_2$	24.24	20.56					
$C_4A$	4.42		1.38				
$C_3A \cdot CaSO_4$	9.33		3.87		3.60		
$C_6AF$	6.09		1.27	0.44			
$Ca(OH)_2$						22.3	
$Mg(OH)_2$							1.6
<b>Summe</b>	<b>44.08</b>	<b>20.56</b>	<b>6.52</b>	<b>0.44</b>	<b>3.60</b>	<b>22.3</b>	<b>1.6</b>

### Dichte des kompaktierten Zementgels

Die Dichte des kompaktierten Zementgels  $\rho_{ref,ZG}$  wird aus den Dichten der Einzelbestandteile  $i$  mittels volumetrischer Mischregel angenähert und ergibt sich anhand der Ergebnisse in Tabelle C.3 zu:

$$\begin{aligned}
 \rho_{ref,ZG} &= (f_{CaO} \cdot \rho_{CaO} + f_{SiO_2} \cdot \rho_{SiO_2} + f_{Al_2O_3} \cdot \rho_{Al_2O_3} + \\
 &+ f_{Fe_2O_3} \cdot \rho_{Fe_2O_3} + f_{CaSO_4} \cdot \rho_{CaSO_4} \\
 &+ f_{Ca(OH)_2} \cdot \rho_{Ca(OH)_2} + f_{Mg(OH)_2} \cdot \rho_{Mg(OH)_2}) / \Sigma f_i \\
 \rho_{ref,ZG} &= (0.4408 \cdot 3.37 \frac{g}{cm^3} + 0.2056 \cdot 2.65 \frac{g}{cm^3} + 0.0652 \cdot 3.94 \frac{g}{cm^3} + \\
 &+ 0.0044 \cdot 5.24 \frac{g}{cm^3} + 0.036 \cdot 2.96 \frac{g}{cm^3} + 0.223 \cdot 2.343 \frac{g}{cm^3} + \\
 &+ 0.016 \cdot 2.38 \frac{g}{cm^3}) / 0.991 = 3.004 \frac{g}{cm^3} . \quad (C.2)
 \end{aligned}$$

Durch die Division mit  $\Sigma f_i = 0.991$  werden die Eigenschaften der vernachlässigten 0.9 % durch die des Komposits ersetzt, so dass sich aus der Rechnung der Wert für

$\Sigma f_i = 1$  ergibt.

### Wellengeschwindigkeit im kompaktierten Zementgel

Analog der Bestimmung der Dichte kann auch die Wellengeschwindigkeit im kompaktierten Zementgel  $c_{B,ZG,comp}$  aus den Wellengeschwindigkeiten der Einzelverbindungen  $i$  abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned}
 c_{B,ZG,comp} &= (0.4408 \cdot 4554 \frac{m}{s} + 0.2056 \cdot 3200 \frac{m}{s} + 0.0652 \cdot 4060 \frac{m}{s} + \\
 &+ 0.0044 \cdot 4350 \frac{m}{s} + 0.036 \cdot 3150 \frac{m}{s} + 0.223 \cdot 2620 \frac{m}{s} + \\
 &+ 0.016 \cdot 2910 \frac{m}{s}) / 0.991 = 3726.9 \frac{m}{s} \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

# Anhang D

## Materialparameter und -kenngrößen

### D.1 Validierung der EoS-Bestimmung

Zur Validierung der EoS-Bestimmung aus Werkstoffsimulation wird in Abschnitt 6.3 der Zementstein des in [166] dokumentierten Betons modelliert. Die dabei bestimmten Materialkennwerte und -parameter sind in den Tabellen D.5 und D.6 übersichtlich zusammengestellt. Das Materialmodell zur Beschreibung des Zuschlags wird, mit Ausnahme der Dichte (vgl. Abschnitt 6.3) unverändert aus Abschnitt 5.4 übernommen.

Tabelle D.1: Parameter der Zustandsgleichung des in [166] dokumentierten Zementsteins

$\rho_{por}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$c_B$ [m/s]	$p_{HEL}$ [GPa]	$p_{comp}$ [GPa]	$N$ [-]	$\rho_{ref}$ [g/cm <sup>3</sup> ]
2.145	2986	0.3	5.0	3	2.506
$A_1$ [GPa]	$A_2$ [GPa]	$A_3$ [GPa]	$B_0$ [-]	$B_0$ [-]	$T_1$ [GPa]
28.666	37.420	19.233	1.491	1.491	28.666

### D.2 Einfluss des Festigkeitsmodells auf die Hugoniot-Daten

In Abschnitt 6.4.2 wird der Einfluss des Festigkeitsmodells auf die in Werkstoffsimulationen bestimmten HUGONIOT-Daten untersucht. Die verwendeten Materialkennwerte und -parameter der Festigkeitsmodelle sind in Tabelle D.3 zusammengefasst.

Tabelle D.2: Parameter des Festigkeitsmodells des in [166] dokumentierten Zementsteins

$G$ [GPa]	$f_c$ [GPa]	$f_t/f_c$ [-]	$f_s/f_c$ [-]	$A$ [-]	$N$ [-]	$Q$ [-]
21.5	0.06	0.063	0.32	2.124	0.825	0.68

Zusätzlich sind die dort beschriebenen Fließfunktionen in Abbildung D.1 im Meridianschnitt grafisch dargestellt.

Tabelle D.3: Materialparameter der in Abschnitt 6.4.2 verwendeten Festigkeitsmodelle

RHT - Concrete		
Schubmodul $G$	19.8	[GPa]
Druckfestigkeit $f_c$	0.06	[GPa]
rel. Zugfestigkeit $f_t/f_c$	0.063	[-]
rel. Schubfestigkeit $f_s/f_c$	0.32	[-]
Fließflächenparameter $A$	2.124	[-]
Fließflächenexponent $N$	0.825	[-]
Meridianverhältnis $Q$	0.68	[-]
Übergangparameter spröde/duktil	0.01	[-]
v. MISES		
Schubmodul $G$	19.8	[GPa]
Fließspannung $\sigma_Y$	0.035	[GPa]
DRUCKER-PRAGER		
Schubmodul $G$	19.8	[GPa]
Verfestigung	<i>abschnittsweise linear</i>	
Druck #1	-0.005	[GPa]
Druck #2	0.03	[GPa]
Druck #3	1.0	[GPa]
Fließspannung #1	0.0	[GPa]
Fließspannung #2	0.04	[GPa]
Fließspannung #3	0.4	[GPa]

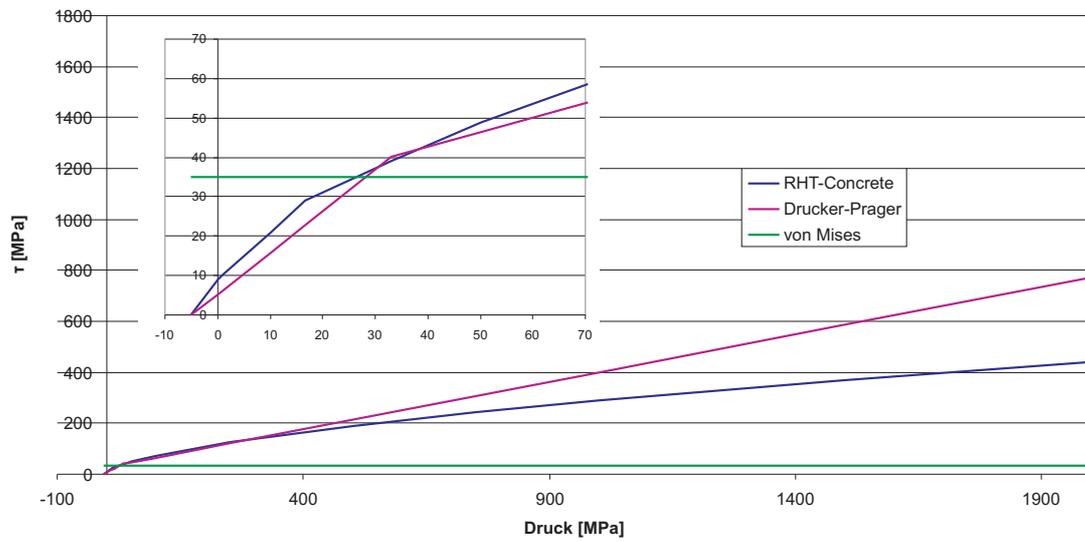


Abbildung D.1: Grafische Darstellung der verwendeten Festigkeitsmodelle

### D.3 Vergleich der EoS aus meso- und makro-mechanischer Simulation

Tabelle D.4 fasst die aus den Stoffraumgleichungen in Anhang B und den Formulierungen in den Abschnitten 5.4 und 5.5 bestimmten Parameter der  $p$ - $\alpha$ -Zustandsgleichung für Zementsteine der in Abschnitt 6.5 untersuchten Betone zusammen.

Tabelle D.4: Parameter der  $p$ - $\alpha$ -Zustandsgleichung zur Beschreibung des Zementsteins

Parameter	A 8	A 16	A 32	B 8	B 16	B 32	C 8	C 16	C 32
$\rho_{por}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	2.021	1.949	1.903	2.140	2.113	2.106	2.176	2.167	2.161
$c_B$ [m/s]	2807	2699	2630	2986	2945	2934	3039	3026	3016
$p_{HEL}$ [GPa]	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
$p_{comp}$ [GPa]	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
$N$ [-]	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$\rho_{ref}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	2.459	2.431	2.413	2.501	2.492	2.489	2.513	2.510	2.508
$A_1$ [GPa]	26.407	25.041	24.164	28.606	28.105	27.970	29.253	29.088	28.972
$A_2$ [GPa]	35.639	34.536	33.808	37.343	36.961	36.859	37.828	37.705	37.618
$A_3$ [GPa]	20.452	21.143	21.546	19.193	19.495	19.575	18.792	18.896	18.968
$B_0$ [-]	1.549	1.586	1.611	1.491	1.504	1.507	1.474	1.478	1.481
$B_1$ [-]	1.549	1.586	1.611	1.491	1.504	1.507	1.474	1.478	1.481
$T_1$ [GPa]	26.407	25.041	24.164	28.606	28.105	27.970	29.253	29.088	28.972

### D.4 Simulation einaxialer Druck- und Zugversuche

Die zur Simulation der in [161] dokumentierten einaxialen Druck- und Zugversuche in Abschnitt 7.3 im Rahmen der Voruntersuchungen verwendeten Materialkennwerte und -parameter sind in den Tabellen D.5 und D.6 übersichtlich zusammengestellt. Das Materialmodell zur Beschreibung des Zuschlags wird unverändert aus Abschnitt 5.4 übernommen.

Tabelle D.5: Parameter der Zustandsgleichung des Zementsteins (ZS) und der ITZ des Betons aus [161]

	$\rho_{por}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$c_B$ [m/s]	$p_{HEL}$ [GPa]	$p_{comp}$ [GPa]	$N$ [-]	$\rho_{ref}$ [g/cm <sup>3</sup> ]
ZS	2.270	3175	0.3	5.0	3	2.551
ITZ	1.681	2311	0.186	3.1	3	2.226
	$A_1$ [GPa]	$A_2$ [GPa]	$A_3$ [GPa]	$B_0$ [-]	$B_0$ [-]	$T_1$ [GPa]
ZS	30.87	39.09	17.90	1.473	1.473	30.87
ITZ	18.15	25.85	17.27	1.642	1.642	18.15

Tabelle D.6: Parameter des Festigkeitsmodells des Zementsteins (ZS) und der ITZ des Betons aus [161]

	$G$ [GPa]	$f_c$ [GPa]	$f_t/f_c$ [-]	$f_s/f_c$ [-]	$A$ [-]	$N$ [-]	$Q$ [-]
ZS	23.15	0.070	0.063	0.32	2.124	0.825	0.68
ITZ	16.15	0.043	0.087	0.17	1.716	0.55	0.68

Die Festigkeitsparameter der Verbundzone nach Anpassung der auf Grundlage der Ausdehnung der ITZ ermittelten Materialkennwerte an deren Ausdehnung im geometrische Modell sind in Tabelle D.7 zusammengestellt.

Tabelle D.7: Parameter des Festigkeitsmodells der ITZ des Betons aus [161] nach Anpassung an das geometrische Modell

	$G$ [GPa]	$f_c$ [GPa]	$f_t/f_c$ [-]	$f_s/f_c$ [-]	$A$ [-]	$N$ [-]	$Q$ [-]
ITZ	21.45	0.056	0.087	0.17	1.716	0.55	0.68

## D.5 Simulation von Festigkeitsversuchen mit wechselnder Lastrichtung

Die zur Simulation von Festigkeitsversuchen mit wechselnder Lastrichtung in Abschnitt 7.4 verwendeten Materialkennwerte und -parameter des in [4] dokumentierten Betons sind in den Tabellen D.8 und D.9 übersichtlich zusammengestellt. Das Materialmodell zur Beschreibung des Zuschlags wird unverändert aus Abschnitt 5.4 übernommen.

Tabelle D.8: Parameter der Zustandsgleichung des Zementsteins (ZS) und der ITZ des Betons aus [4]

	$\rho_{por}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$c_B$ [m/s]	$p_{HEL}$ [GPa]	$p_{comp}$ [GPa]	$N$ [-]	$\rho_{ref}$ [g/cm <sup>3</sup> ]
ZS	2.021	2807	0.3	5.0	3	2.459
ITZ	1.521	2123	0.186	3.1	3	2.116
	$A_1$ [GPa]	$A_2$ [GPa]	$A_3$ [GPa]	$B_0$ [-]	$B_0$ [-]	$T_1$ [GPa]
ZS	26.41	35.64	20.45	1.549	1.549	26.41
ITZ	15.80	23.56	17.59	1.722	1.722	15.80

Tabelle D.9: Parameter des Festigkeitsmodells des Zementsteins (ZS) und der ITZ des Betons aus [4]

	$G$ [GPa]	$f_c$ [GPa]	$f_t/f_c$ [-]	$f_s/f_c$ [-]	$A$ [-]	$N$ [-]	$Q$ [-]
ZS	19.81	0.062	0.08	0.32	2.124	0.825	0.68
ITZ	15.40	0.049	0.087	0.17	1.716	0.55	0.68