

# Beurteilung geschädigter Brückenbauwerke unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerkparameter

Dipl.-Ing. Andreas Baumhauer

Von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktoringenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

**Universität der Bundeswehr München**

**Juni 2010**



## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt den Themenkomplex der Zustandsbewertung beschädigter Brückenbauwerke, insbesondere bei schwerwiegenden, komplexen oder unklaren Schadensbildern. Dabei muss mit unvollständigen bzw. ungenauen Informationen über die Beschädigung und z. T. sogar über die konstruktiven Durchbildungen eines Bauwerks adäquat umgegangen werden. Ein Verfahren zur realitätsnahen Zustandsbewertung von Brücken muss daher möglichst alle zur Verfügung stehenden Informationen, wie beispielsweise das Expertenwissen des Brückenprüfers zur Abschätzung fehlender Informationen, abbilden und methodeninhärente Unschärfen entsprechend ihrer natürlichen Form beschreiben können. Die Bewertung von Schäden hinsichtlich der Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ ist daher mit subjektiven und objektiven Unsicherheiten behaftet. In dieser Arbeit wurde ein Verfahren entwickelt, welches unter Berücksichtigung der Unschärfen, der während der Bauwerksprüfung durchgeführten Messungen, Beobachtungen und subjektiven Einschätzungen, den Zustand eines geschädigten Tragwerks durch strikte Trennung zwischen der unscharfen Zustandsbeschreibung und der Bestimmung der Auswirkungen auf die Tragfähigkeit objektiv und validierbar bewertet.

## Abstract

The present work treats the subject of state assessment of damaged bridges, in particular with serious, complicated or unclear damage symptoms. In these cases it is necessary to cope with incomplete and inexact information about the damage or even about the structural detailing. Hence, a procedure to perform an accurate state assessment has to be able to take advantage of all available information, e.g. experts knowledge to make a rough estimate of missing data, and has to treat arising uncertainties in an adequate manner. So, the assessment of damaged bridges concerning the criteria „stability“, „traffic safety“ and „durability“ is linked with subjective and objective uncertainties. In this work a procedure was developed, which takes into account the uncertainties of measurements, observations and subjective appraisals, occurring while performing the state assessment of a damaged bridge. This is done by separating uncertain state description and the determination of the impact of local damages on the load-bearing capacity of bridges.

## Vorwort

Die Mitarbeit an den vom Bundesministerium der Verteidigung geförderten Forschungsprojekten zum Thema „Beurteilung der Tragfähigkeit geschädigter Brücken im Rahmen von Auslandseinsätzen der Bundeswehr“ eröffnete mir die Möglichkeit der Promotion, deren Ergebnisse in der vorliegenden Arbeit zusammengefasst sind.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Norbert Gebbeken für die Anregung zu dieser Arbeit, für die hervorragende Förderung sowie für die Übernahme des Erstreferats. Das Klima des selbstständigen wissenschaftlichen Arbeitens an seinem Institut bildet die Grundlage um erfolgreich neue Ideen umsetzen zu können.

Für die Übernahme des Koreferats und für die wertvollen kritischen Anmerkungen danke ich Frau Professor Schnellenbach-Held von der Universität Duisburg-Essen.

Bei Professor Manfred Keuser bedanke ich mich für die Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses.

Das kollegiale und aufgeschlossene Arbeitsklima am Instituts für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München hat entscheidend zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen. Dafür danke ich allen Kollegen herzlich. Insbesondere der technische Support und die fachlichen Diskussionen mit den Kollegen Dr.-Ing. Stefan Greulich und Dipl.-Ing. Achim Pietzsch trugen zum Gelingen der Arbeit bei.

Weiter möchte ich mich bei allen Praktikanten und Diplomanden bedanken, die bei der Aufbereitung und Umsetzung hilfreich mitgewirkt haben.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie und meiner Frau Yana, die mir während der gesamten Zeit aufmunternd zur Seite gestanden haben.

Neubiberg, den 28.06.2010

Andreas Baumhauer

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Manfred Keuser  
1. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Norbert Gebbeken  
2. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Martina Schnellenbach-Held  
(Universität Duisburg-Essen)

Tag der Prüfung: 25. Juni 2010

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Problemstellung und Ziel der Arbeit . . . . .	3
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Ausgewählte theoretische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1	Kontinuumsschädigungsmechanik . . . . .	10
2.1.1	Kinematik . . . . .	10
2.1.2	Beschreibung von Spannungen . . . . .	13
2.1.3	Elastizitätstheorie . . . . .	15
2.1.4	Plastizitätstheorie . . . . .	16
2.1.5	Schädigungstheorie . . . . .	18
2.2	Finite Elemente Methoden . . . . .	20
2.2.1	Differentielle Formulierung . . . . .	20
2.2.2	Approximative Lösungsverfahren . . . . .	21
2.3	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	22
2.3.1	Allgemeines . . . . .	22
2.3.2	Direkte Verfahren . . . . .	23

---

2.3.3	Iterative Verfahren . . . . .	23
2.3.4	Präkonditionierer . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Mathematische Beschreibung der Unbestimmtheit</b>	<b>29</b>
3.1	Charakterisierung (un)bestimmter Informationen - Begriffsdefinitionen . . .	30
3.2	Theorie der unscharfen Maße . . . . .	34
3.3	Evidenztheorie . . . . .	35
3.4	Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	40
3.5	Möglichkeitstheorie . . . . .	41
3.6	Scharfe und unscharfe Mengen . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Zustandsbeschreibung mit unscharfen Tragwerksparametern</b>	<b>55</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	56
4.2	Bewertung mittels direkter Messung am Bauwerk . . . . .	57
4.2.1	Unscharfer Messwert . . . . .	58
4.2.2	Fehlerbehaftete Messungen . . . . .	60
4.2.3	Geringer Stichprobenumfang . . . . .	62
4.2.4	Statistische Daten . . . . .	66
4.3	Simulation des Schädigungsvorganges . . . . .	71
4.4	Bewertung mittels Expertensystemen . . . . .	84
4.4.1	Fuzzyfizierung . . . . .	88
4.4.2	Inferenz . . . . .	90
4.4.3	(De-)Fuzzyfizierung . . . . .	92
4.5	Inkorporation von Erfahrungswissen . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Zustandsprognose</b>	<b>95</b>

---

5.1	Allgemeines . . . . .	95
5.2	Ausgewählte zeitabhängige Schädigungsprozesse . . . . .	96
5.3	Modelle zur Prognose von Schadensentwicklungen . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Unscharfe Tragwerksanalyse mit der Fuzzy-Finite-Elemente-Methode</b>	<b>107</b>
6.1	Das Erweiterungsprinzip . . . . .	107
6.2	Lösungsverfahren mit deterministischer Grundlösung . . . . .	110
6.2.1	Die Transformationsmethode . . . . .	113
6.2.2	Die $\alpha$ -Level-Optimierung . . . . .	114
6.2.3	Fuzzy-Arithmetik mit Hilfe von dünn besetzten Gittern . . . . .	114
6.3	Fuzzy-Arithmetik . . . . .	116
6.3.1	Verknüpfung unabhängiger Fuzzy-Größen . . . . .	117
6.3.2	Interaktion zwischen Fuzzy-Größen . . . . .	127
6.3.3	Der Körper der Fuzzy-Größen . . . . .	140
6.3.4	Anwendungsgrenzen bei der Fuzzyifizierung von Algorithmen . . . . .	141
6.3.5	Software-Implementierung des Körpers der Fuzzy-Größen . . . . .	146
6.3.5.1	Der monotone Modus . . . . .	153
6.3.5.2	Der selektiv nicht monotone Modus . . . . .	166
6.3.5.3	Der adaptive Modus . . . . .	175
6.4	Effizienzvergleich der methodischen Ansätze . . . . .	183
<b>7</b>	<b>Generierung und Validierung von Berechnungsmodellen geschädigter Brückentragwerke</b>	<b>201</b>
7.1	Modellbildung . . . . .	202
7.2	Modellkalibrierung . . . . .	213

---

7.3	Modellvalidierung . . . . .	224
<b>8</b>	<b>Zustandsbewertung</b>	<b>233</b>
8.1	Zustandsbewertung nach DIN 1076 und RI-EBW-PRÜF . . . . .	233
8.2	Bewertung des Verfahrens nach RI-EBW-PRÜF . . . . .	239
8.3	Fuzzy-Zustandsbewertung . . . . .	241
8.3.1	Grundlagen . . . . .	242
8.3.2	Schadensbewertung . . . . .	243
8.3.3	Zustandsbewertung . . . . .	247
8.3.4	Weiterführende Analysen im Rahmen des BMS . . . . .	248
8.3.5	Sensitivitätsanalyse . . . . .	250
8.4	Bewertung der Fuzzy-Zustandsbewertung . . . . .	251
<b>9</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>253</b>
9.1	Beispiel 1 . . . . .	254
9.1.1	Schadens- und Zustandsbeschreibung der Brücke 1 . . . . .	254
9.1.2	Schadens- und Zustandsbeschreibung der Brücke 2 . . . . .	256
9.1.3	Schadens- und Zustandsbewertungen . . . . .	258
9.1.3.1	RI-EBW-PRÜF . . . . .	258
9.1.3.2	Fuzzy-Zustandsbewertung . . . . .	260
9.1.3.3	Ergebniszusammenfassung . . . . .	267
9.1.4	Zustandsentwicklung und Bewertung einer Erhaltungsmaßnahme . . . . .	270
9.2	Beispiel 2 . . . . .	276
9.2.1	Konstruktionsbeschreibung . . . . .	277
9.2.2	Bestimmung des Bauwerkszustandes . . . . .	279



9.2.3	Fuzzy-Tragwerksanalyse im ungeschädigten Zustand . . . . .	282
9.2.4	Modellvalidierung . . . . .	288
9.2.5	Schädigungssimulation und Zustandsbewertung . . . . .	297
<b>10</b>	<b>Zusammenfassende Bewertung</b>	<b>309</b>
10.1	Zusammenfassung . . . . .	309
10.2	Bewertung . . . . .	312
10.3	Ausblick . . . . .	313
<b>A</b>	<b>Bestimmung des Monotonieverhaltens mit dem „adaptiven Modus“</b>	<b>331</b>
<b>B</b>	<b>Ergebnisse des Effizienzvergleichs</b>	<b>335</b>
B.1	<i>Cholesky</i> -Zerlegung . . . . .	336
B.1.1	Monotoner Modus . . . . .	336
B.1.2	Selektiv nicht monotoner Modus . . . . .	340
B.1.3	Parallelisierung . . . . .	342
B.2	„shifted incomplete“ <i>Cholesky</i> -Zerlegung (SICT) . . . . .	343
B.2.1	Monotoner Modus . . . . .	343
B.2.2	Selektiv nicht monotoner Modus . . . . .	347
B.2.3	Parallelisierung . . . . .	349
B.3	robuste unvollständige <i>Cholesky</i> -Zerlegung (RICT) . . . . .	350
B.3.1	Monotoner Modus . . . . .	350
B.3.2	Selektiv nicht monotoner Modus . . . . .	354
B.3.3	Parallelisierung . . . . .	356
B.4	stabilisierter approximativer inverser Präkonditionierer (SAINV) . . . . .	357
B.4.1	Monotoner Modus . . . . .	357

B.4.2	Selektiv nicht monotoner Modus . . . . .	361
B.4.3	Parallelisierung . . . . .	363

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Kontinuumsmechanische Beschreibung eines Körpers in der Referenzkonfiguration $\mathcal{B}_0$ und der Momentankonfiguration $\mathcal{B}_t$ . . . . .	11
2.2	Wirkung der Spannungsvektorkomponenten auf eine Fläche, deren Normalenvektor in die Richtung der Achse $x_2$ zeigt . . . . .	14
3.1	Beziehungen zwischen mengentheoretischen und maßtheoretischen Ansätzen	34
3.2	links: scharfe und unscharfe Mengen; rechts: $\alpha$ -Niveaumengen . . . . .	47
4.1	Krater in Fahrbahnplatte: Idealisierungen der realen Geometrie; fuzzyfizzierter Kraterradius (rechts) . . . . .	60
4.2	Betonüberdeckung: Serie fehlerbehafteter Messungen (links), Fuzzy-Zahl $\tilde{F}$ zur Konstruktion der Intervalle $E_i$ (rechts) . . . . .	61
4.3	Fuzzyfizierte Betonüberdeckung . . . . .	62
4.4	Betondruckfestigkeit: relative Häufigkeiten der Messwerte (links), transformierte Möglichkeiten der Messwerte (rechts) . . . . .	65
4.5	Standardnormalverteilung: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (links), spezifischste Möglichkeitsdichtefunktion (rechts) . . . . .	69
4.6	Betonfahrbahnplatte, Kontaktdetonation, Schädigungssimulation mit Hydrocode: feine Diskretisierung; Darstellung der Schädigung (dunkelblau=ungeschädigt - rot=stark geschädigt) . . . . .	74

4.7	Betonfahrbahnplatte, Kontaktdetonation, FEM-Modell der geschädigten Platte: gröbere Diskretisierung; Darstellung der Schädigung (dunkelblau=ungeschädigt - rot=stark geschädigt) . . . . .	74
4.8	Fuzzyfizierte Modellgröße bzw. Berechnungsparameter $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$ . . . . .	78
4.9	Abstandsmaß zwischen Fuzzy-Größen: Bezeichnungen . . . . .	79
4.10	Minimalkonfiguration eines Expertensystems . . . . .	85
4.11	Aufbau eines Fuzzy-Expertensystems; (un)scharfer Eingangswert $x_i$ , Fuzzyfizierung, Inferenz, Defuzzyfizierung, scharfer Ausgangswert $y_j$ . . . . .	88
4.12	Linguistische Variable „Rissbreite“; Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Terme . . . . .	89
4.13	Fuzzy-logisches assoziatives Gedächtnis (FAM): linguistische Eingangsvariable $A$ und linguistische Ausgangsvariable $B$ ; Einflussbereich der Regel „Wenn $\tilde{A}_2$ , dann $\tilde{B}_2$ “ . . . . .	91
4.14	Approximation eines Systems durch „Regelflecken“: links, gröbere Näherung mit wenigen Regeln; rechts, feinere Näherung mit mehr Regeln . . . . .	93
5.1	Brückenbauwerke, Nutzungsdauer und Instandsetzung (nach [68]) . . . . .	96
5.2	Starke Stahlkorrosion und Abplatzungen infolge der Volumenzunahme des Rostes . . . . .	102
5.3	„Fuzzyfiziertes“ Korrosionsmodell für Betonstahl . . . . .	105
6.1	Unschärfes kartesisches Produkt im Eingangsraum und Abbildung in den Ergebnisraum mit Hilfe des Erweiterungsprinzips . . . . .	109
6.2	Abbildung des $\alpha_k$ -Niveaus der unscharfen Eingangsmenge auf das $\alpha_k$ -Niveau der Ergebnismenge . . . . .	110
6.3	Bestimmung der Intervallgrenzen des $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ und der Eingangsgrößen $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ . . . . .	120
6.4	Fehler durch Approximation von $L$ und $R$ mit linearen Funktionsansätzen .	123

6.5	Darstellung eines Fuzzy-Intervalls und Transformation in den Definitionsbereich der $\alpha$ -Niveaus . . . . .	125
6.6	Künstliche Unschärfe durch mehrfaches Auftreten von Variablen in arithmetischen Ausdrücken . . . . .	129
6.7	Unscharfes kartesisches Produkt ohne (links) und mit (rechts) Berücksichtigung der Gleichheitsrelation $R^=$ . . . . .	131
6.8	Darstellung der Monotonieeigenschaften bei Verknüpfung von partiell identischen Fuzzy-Größen mit a) gleichbleibender und b) nicht gleichbleibender Monotonieeigenschaft . . . . .	137
6.9	Verknüpfung von nicht-monotonem mit monotonem Funktional . . . . .	138
6.10	statisches System mit Belastung . . . . .	142
6.11	Abschnittsweise Abbildung der unscharfen Teilmengen der Fuzzy-Eingangsgröße $\tilde{x}_F$ auf die Ergebnisgröße $\tilde{Q}$ . . . . .	144
6.12	Nullstellenbestimmung mit Gleitkommazahlen (links) und mit Fuzzy-Größen (rechts) . . . . .	148
6.13	(a) Fuzzy-Dreieckszahl/-Intervall; (b) quadratische Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall; (c) Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall mit <i>Gauß</i> 'scher Zugehörigkeitsfunktion; (d) Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall mit exponentieller Zugehörigkeitsfunktion . . . . .	150
6.14	Indirekte Identität von Variablen . . . . .	155
6.15	Schematische Darstellung der selektiven Verknüpfung der Äste partiell identischer bzw. unabhängiger Fuzzy-Größen . . . . .	160
6.16	Darstellung der Äste der Ergebnisgrößen von a) $\tilde{a} \cdot \tilde{a}$ und b) $ \tilde{a} $ mit $\tilde{a} = \langle -1, 1, 2 \rangle$ . . . . .	162
6.17	Darstellung der durch die einfache Kondensation bedingten künstlichen Unschärfe . . . . .	165
6.18	Darstellung des Schlegeldiagramms eines Tesserakts (4-dimensionaler Hyperwürfel) . . . . .	167

6.19	Darstellung der diskreten Auswertepunkte im dreidimensionalen Raum der Eingangsgrößen bei Berücksichtigung von a) $m = 0$ und b) $m = 1$ monotonen Eingangsgrößen . . . . .	169
6.20	Reduktion des Berechnungsaufwands einer Analyse mit 10 Fuzzy-Eingangsgrößen in Abhängigkeit von der Anzahl $m$ monotoner Größen und der Anzahl $z$ der Zwischenpunkte nicht-monotoner Größen je $\alpha$ -Niveau . .	170
6.21	Nicht monotone Fuzzy-Größen; Anordnung der Zwischenäste . . . . .	171
6.22	Schematische Darstellung der selektiven Verknüpfung der Äste partiell identischer bzw. unabhängiger nicht-monotoner Fuzzy-Größen . . . . .	173
6.23	Dreidimensionaler Raum der Eingangsgrößen, ineinanderliegende scharfe kartesische Produkte und Äste der (Zwischen-)Ergebnisgrößen (gestrichelte Linie) . . . . .	177
6.24	Isohypsen; Ableitungen des Funktionsgraphs (6.108) . . . . .	179
6.25	Ergebnisgröße $\tilde{z}$ von Gleichung (6.108), diskrete Auswertung mit dem Erweiterungsprinzip, a) Falsches Ergebnis mit dem „monotonen Modus“, b) Korrektes Ergebnis mit dem „selektiv nicht monotonen Modus“ . . . . .	180
6.26	Ablaufschema einer numerischen Berechnung mit der neu entwickelten Fuzzy-Arithmetik . . . . .	182
6.27	Speedup des monotonen Modus . . . . .	188
6.28	Systemverhalten des monotonen Modus in Abhängigkeit von $n$ . . . . .	190
6.29	Systemverhalten des monotonen Modus in Abhängigkeit von $m$ . . . . .	190
6.30	Speedup des monotonen Modus in Abhängigkeit vom Lösungsverfahren . .	191
6.31	Systemverhalten des nicht monotonen Modus in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . .	194
6.32	Speedup des nicht monotonen Modus in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . . .	195
6.33	Amdahlsches Gesetz . . . . .	197
6.34	Speedup und Effizienz des parallelisierten monotonen Modus in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren . . . . .	199

7.1	Brückenmodellierung, Transformation des Datenmodells (IFC) in numerisches Simulationsmodell . . . . .	205
7.2	Stab, Stabachse, links Extrusionskörper (gerader Stab), rechts Sweep-Körper (Bogen) . . . . .	206
7.3	Bestimmung des Hauptachsensystems am Querschnitt (links) und räumlich (rechts) . . . . .	208
7.4	Bestimmung der Stabachse (links); Lösungsverhalten im Randbereich (rechts)	209
7.5	Inverse Fläche; links Quader ( $l : b : h = 1000 : 100 : 1$ ), rechts Quader ( $l : b : h = \infty : 100 : 1$ ) . . . . .	211
7.6	Brücke, numerische Berechnung, Darstellung der Stabachse in einem geometrisch geschädigten Körper . . . . .	213
7.7	Approximation einer Antwortfunktion $f(x_1, x_2)$ durch eine zweifache Multilinearform $\Phi(x_1, x_2)$ . . . . .	219
7.8	Prinzip der Funktionsweise des Optimierungsalgorithmus . . . . .	221
8.1	Versagensmöglichkeit $\Pi_F^i$ ; Vergleich der Fuzzy-Beanspruchung ( $\tilde{S}_i$ ) mit den mit der Fuzzy-Beanspruchbarkeit ( $\tilde{R}_i$ ) . . . . .	245
9.1	Brücke 1, Ansicht . . . . .	254
9.2	Brücke 1, Querschnittsabmessungen [m] . . . . .	255
9.3	Brücke 1, Schadensdokumentation . . . . .	256
9.4	Brücke 2, Ansicht . . . . .	256
9.5	Brücke 2, Querschnittsabmessungen [m] . . . . .	257
9.6	Brücke 2, Schadensdokumentation . . . . .	258
9.7	Brücke 1, Schadensskizze, Auszug . . . . .	262
9.8	Brücke 1, Schadensskizze, Bewehrung . . . . .	263
9.9	Brücke 1, Bewehrung, Korrosionsabtrag . . . . .	263

9.10	Bewehrung, Korrosion, Fuzzy-Abtragungsrate . . . . .	264
9.11	Brücke 2, Schadensskizze, Auszug . . . . .	265
9.12	Brücke 2, Schadensskizze, Bewehrung . . . . .	266
9.13	Brücke 2, Bewehrung, Korrosionsabtrag . . . . .	266
9.14	Brücke 1, Entwicklung der Zustandszahl . . . . .	272
9.15	Schadensentwicklung, Karbonatisierung . . . . .	274
9.16	Brücke 1, Instandsetzungsmaßnahmen, Variantenbewertung, Entwicklung der Zustandszahl . . . . .	275
9.17	Schematische Darstellung der Testbrücke . . . . .	279
9.18	Fuzzy-Materialkenngrößen . . . . .	281
9.19	FEM-Modell der untersuchten Brücke . . . . .	284
9.20	Versuchsbrücke, Numerisches Modell; Verformungs- und Spannungszu- stand; Scharfe Berechnung mit den Modalwerten der Eingangsgrößen . . .	285
9.21	Versuchsbrücke, Numerisches Modell; Erste Biegeeigenform bei $f_1 = 2,9$ Hz; Scharfe Berechnung mit den Modalwerten der Eingangsgrößen . . . . .	285
9.22	Versuchsbrücke, Numerisches Modell; Erste Torsionseigenform bei $f_2 =$ 4,3 Hz; Scharfe Berechnung mit den Modalwerten der Eingangsgrößen . . .	285
9.23	Versuchsbrücke, Numerisches Modell; Zweite Biegeeigenform bei $f_3 =$ 10,9 Hz; Scharfe Berechnung mit den Modalwerten der Eingangsgrößen . .	285
9.24	Versuchsbrücke, Fuzzy-Antwortgrößen mit (gestrichelte Linie) und ohne (durchgezogene Linie) Vernachlässigung der Streuung der Materialdichten .	287
9.25	Versuchsbrücke, Antwortspektrum infolge ambienter Anregung (Auszug) .	289
9.26	Versuchsbrücke, Antwortgrößen, unscharfe Messwerte, Fuzzy-Antwortgrößen	290
9.27	Versuchsbrücke, Modellvalidierung, Elastizitätsmodule aus inverser Modal- analyse . . . . .	292



9.28	Versuchsbrücke, Modellvalidierung, „rückgerechnete“ Fuzzy-Eigenfrequenzen und unscharfe Messwerte der Eigenfrequenzen . . . . .	292
9.29	Versuchsbrücke, Modellvalidierung, relative Abweichung der „rückgerechneten“ Elastizitätsmodulen des Betons und des Baustahls bezogen auf die Fuzzy-Eingangsgrößen, Darstellung der Äste von $\tilde{V}_1^{Beton}$ und $\tilde{V}_1^{Baustahl}$ . . .	293
9.30	Versuchsbrücke, Modellvalidierung, Elastizitätsmodule aus inverser statischer Analyse . . . . .	295
9.31	Versuchsbrücke, Modellvalidierung, „rückgerechnete“ Fuzzy-Verformung und Fuzzy-Spannungen und unscharfe Messwerte der Verformung und Spannungen . . . . .	295
9.32	Versuchsbrücke, Schädigungssimulation, Darstellung der Cluster und der zugehörigen Elemente bei der Zusammenfassung der Fuzzy-Schädigung zu zehn Gruppen, Teil 1 . . . . .	298
9.33	Versuchsbrücke, Schädigungssimulation, Darstellung der Cluster und der zugehörigen Elemente bei der Zusammenfassung der Fuzzy-Schädigung zu zehn Gruppen, Teil 2 . . . . .	299
9.34	Versuchsbrücke, Schädigungssimulation, Darstellung der Cluster und der zugehörigen Elemente bei der Zusammenfassung der Fuzzy-Schädigung zu fünf Gruppen . . . . .	300
9.35	FEM-Modell der geschädigten Brücke, Lasteinleitung, lokale Schädigung .	301
9.36	Versuchsbrücke, FEM-Modell, lokale Schädigung mit zehn Materialgruppen, Plattenoberseite (oben) und Plattenunterseite (unten) . . . . .	302
9.37	Versuchsbrücke, FEM-Modell, lokale Schädigung mit fünf Materialgruppen, Plattenoberseite (oben) und Plattenunterseite (unten) . . . . .	303
9.38	Versuchsbrücke, FEM-Modell, lokale Schädigung, Elastizitätsmodule des geschädigten Betons entsprechend Abbildung 9.36 . . . . .	304
9.39	Versuchsbrücke, FEM-Modell, lokale Schädigung, Elastizitätsmodule des geschädigten Betons entsprechend Abbildung 9.37 . . . . .	305

9.40	Versuchsbrücke, Ergebnisauswertung, Fuzzy-Grenzzustand, Versagensmöglichkeit . . . . .	306
B.1	Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizzierten <i>Cholesky</i> -Zerlegung in Abhängigkeit von $n$ . . . . .	338
B.2	Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizzierten <i>Cholesky</i> -Zerlegung in Abhängigkeit von $m$ . . . . .	338
B.3	Speedup der fuzzyfizzierten <i>Cholesky</i> -Zerlegung in Abhängigkeit von $n$ . . .	339
B.4	Speedup der fuzzyfizzierten <i>Cholesky</i> -Zerlegung in Abhängigkeit von $m$ . . .	339
B.5	Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizzierten <i>Cholesky</i> -Zerlegung in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . . .	341
B.6	Speedup der fuzzyfizzierten <i>Cholesky</i> -Zerlegung in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . .	341
B.7	Paralleler speedup der fuzzyfizzierten <i>Cholesky</i> -Zerlegung in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren . . . . .	342
B.8	Relative Berechnungsdauer der shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von $n$ . . . . .	345
B.9	Relative Berechnungsdauer der shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von $m$ . . . . .	345
B.10	Speedup der fuzzyfizzierten shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von $n$ . . . . .	346
B.11	Speedup der fuzzyfizzierten shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von $m$ . . . . .	346
B.12	Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizzierten shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . . .	348
B.13	Speedup der fuzzyfizzierten shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . . .	348
B.14	Paralleler speedup der fuzzyfizzierten shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren . . . . .	349

B.15 Relative Berechnungsdauer der robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von $n$ . . . . .	352
B.16 Relative Berechnungsdauer der robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von $m$ . . . . .	352
B.17 Speedup der fuzzyfizierten robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von $n$ . . . . .	353
B.18 Speedup der fuzzyfizierten robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von $m$ . . . . .	353
B.19 Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizierten robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . . .	355
B.20 Speedup der fuzzyfizierten robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . . .	355
B.21 Paralleler speedup der fuzzyfizierten robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren . . . .	356
B.22 Relative Berechnungsdauer dem stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von $n$ . . . . .	359
B.23 Relative Berechnungsdauer dem stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von $m$ . . . . .	359
B.24 Speedup der fuzzyfizierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von $n$ . . . . .	360
B.25 Speedup der fuzzyfizierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von $m$ . . . . .	360
B.26 Relative Berechnungsdauer mit dem fuzzyfizierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . .	362
B.27 Speedup mit dem fuzzyfizierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von $\bar{n}$ . . . . .	362

B.28 Paralleler speedup mit dem fuzzyfizierten stabilisierten approximativen inversen Prakonditionierer (SAINV) in Abhangigkeit von der Anzahl der Prozessoren . . . . . 363

# Tabellenverzeichnis

4.1	Gemessene Betondruckfestigkeiten . . . . .	65
6.1	Bestimmung der Intervallgrenzen des $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für einstellige Operatoren (Gleichung (6.14)) . . . . .	119
6.2	Bestimmung der Intervallgrenzen des $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für zweistellige Operatoren (Gleichung (6.15)) . . . . .	119
6.3	Bestimmung der Intervallgrenzen des $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für gemischte zweistellige Operatoren (Gleichung (6.16)) . . . . .	119
6.4	Bestimmung der Intervallgrenzen des $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für gemischte zweistellige Operatoren (Gleichung (6.17)) . . . . .	119
6.5	Bestimmung der Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für einstellige Operatoren (Gleichung (6.14)) . . . . .	121
6.6	Bestimmung der Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für zweistellige Operatoren (Gleichung (6.15)) . . . . .	121
6.7	Bestimmung der Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für gemischte zweistellige Operatoren (Gleichung (6.16)) mit $c \in \mathbb{R}$ . . . . .	121

6.8	Bestimmung der Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße $\tilde{y}$ in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für gemischte zweistellige Operatoren (Gleichung (6.17)) mit $c \in \mathbb{R}$ . . . . .	121
6.9	Einstellige Operatoren . . . . .	151
6.10	Zweistellige Operatoren . . . . .	151
6.11	Gemischt-zweistellige Präfix-Operatoren mit $c \in \mathbb{R}$ . . . . .	152
6.12	Gemischt-zweistellige Suffix-Operatoren mit $c \in \mathbb{R}$ . . . . .	152
6.13	Anzahl der $k$ -dimensionalen Grenzelemente von $n$ -dimensionalen Hyperwürfeln . . . . .	168
6.14	reduzierte Anzahl der $k$ -dimensionalen Grenzelemente von $n$ -dimensionalen Hyperwürfeln bei bekannter nicht-monotoner Fuzzy-Eingangsgröße . . . . .	168
6.15	Vorzeichen der partiellen Ableitungen an den Stützstellen der Äste der Fuzzy-Ergebnisgröße von Gleichung (6.108) . . . . .	178
6.16	Anteil der Fuzzy-Operationen an der Gesamtzahl arithmetischer Operation, Angaben in Prozent . . . . .	192
8.1	Definitionen der Schadensbewertung nach dem Kriterium Standsicherheit [28] . . . . .	237
9.1	Brücke 1, statisch relevante Bewehrung . . . . .	255
9.2	Brücke 2, statisch relevante Bewehrung . . . . .	257
9.3	RI-EBW-PRÜF, Schadenskatalog, Auszug . . . . .	259
9.4	Zustandsbewertung, Ergebniszusammenfassung . . . . .	267
9.5	RI-EBW-PRÜF, Schadenskatalog, Karbonatisierung . . . . .	271
9.6	Versuchsbrücke, Betondaten, Stichprobenauswertung; Rohdichte, Festigkeit, Elastizitätsmodul . . . . .	280
9.7	Versuchsbrücke, Einfluss der Unschärfen der Materialkenndaten auf die Unschärfe der Ergebnisgrößen . . . . .	286

A.1	Einstellige Operatoren . . . . .	331
A.2	Gemischt-zweistellige Präfix-Operatoren mit $c \in \mathbb{R}$ . . . . .	332
A.3	Gemischt-zweistellige Suffix-Operatoren mit $c \in \mathbb{R}$ . . . . .	333
A.4	Zweistellige Operatoren; partielle Ableitung nach Koordinatenrichtungen von $\tilde{x}_1$ . . . . .	333
A.5	Zweistellige Operatoren; partielle Ableitung nach Koordinatenrichtungen von $\tilde{x}_2$ . . . . .	334
A.6	Zweistellige Operatoren; partielle Ableitung nach gemeinsamen Koordina- tenrichtungen . . . . .	334
B.1	Mittelwert der Analysedauer mit der <i>Cholesky</i> -Zerlegung; Angaben in Se- kunden . . . . .	337
B.2	Variationskoeffizient der Analysedauer mit der <i>Cholesky</i> -Zerlegung; Anga- ben in Prozent . . . . .	337
B.3	Auswertung der Analysedauer mit der <i>Cholesky</i> -Zerlegung . . . . .	340
B.4	Parallelisierung; Auswertung der Analysedauer mit der <i>Cholesky</i> -Zerlegung	342
B.5	Mittelwert der Analysedauer mit der shifted incomplete <i>Cholesky</i> - Zerlegung (SICT); Angaben in Sekunden . . . . .	344
B.6	Variationskoeffizient der Analysedauer der shifted incomplete <i>Cholesky</i> - Zerlegung (SICT); Angaben in Prozent . . . . .	344
B.7	Auswertung der Analysedauer mit der shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung	347
B.8	Parallelisierung; Analysedauer mit der shifted incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung	349
B.9	Mittelwert der Analysedauer mit der robusten incomplete <i>Cholesky</i> - Zerlegung (RICT); Angaben in Sekunden . . . . .	351
B.10	Variationskoeffizient der Analysedauer mit der robusten incomplete <i>Cho-</i> <i>lesky</i> -Zerlegung (RICT); Angaben in Prozent . . . . .	351

B.11 Auswertung der Analysedauer mit der robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung . . . . .	354
B.12 Parallelisierung; Analysedauer mit der robusten incomplete <i>Cholesky</i> -Zerlegung . . . . .	356
B.13 Analysedauer mit dem stabilisierten approximativen inversen Prakon- ditionierer (SAINV); Angaben in Sekunden . . . . .	358
B.14 Analysedauer mit dem stabilisierten approximativen inversen Prakon- ditionierer (SAINV) . . . . .	361
B.15 Parallelisierung; Analysedauer mit dem stabilisierten approximativen in- versen Prakon- ditionierer (SAINV) . . . . .	363



# Symbolverzeichnis

## Arithmetik

$a; \dots; z$  Variablen:  $a; \dots; z \in \mathbb{R}$

$\underline{a}; \dots; \underline{z}$  Vektoren

$\underline{A}; \dots; \underline{Z}$  Matrizen

$\Sigma$  Summe

$\Pi$  Produkt

$\ln$  natürlicher Logarithmus

$\lg$  dekadischer Logarithmus

$\operatorname{sgn}$  Signumfunktion

$\operatorname{ld}$  dyadischer Logarithmus

## Analysis

$(\dots; \dots)$  geordnetes n-Tupel

$(\dots; \dots)$  offenes Intervall

$[\dots; \dots]$  geschlossenes Intervall

$|\dots|$  Betrag

$\|\dots\|$  Norm

$\lim$  Limes, Grenzwert

$\infty$  unendlich

$d$  Differentiation

$\partial$  partielle Differentiation

$\int$  Integration

$\rightarrow$  Abbildung

$\twoheadrightarrow$  surjektive Abbildung

**Mengenlehre** $\underline{\mathbf{A}}, \dots, \underline{\mathbf{Z}}$ Grundmengen<sup>1)</sup> $\underline{A}, \dots, \underline{Z}$ scharfe Mengen<sup>1)</sup> $\underline{A}^C, \dots, \underline{Z}^C$ Komplement von  $\underline{A}, \dots, \underline{Z}$  bzgl der  
zugehörigen Grundmenge  $\underline{\mathbf{A}}, \dots, \underline{\mathbf{Z}}$ <sup>1)</sup> $\mathbb{N}$ 

Menge der natürlichen Zahlen

 $\mathbb{R}$ 

Menge der reellen Zahlen

 $\mathbb{R}^n$  $n$ -dimensionaler euklidischer Raum $\{\dots; \dots\}$ 

Menge der ...; ... Elemente einer Menge

 $\in$ 

ist Element von

 $\notin$ 

ist nicht Element von

 $\emptyset$ 

leere Menge

 $\cap$ 

Durchschnitt

 $\cup$ 

Vereinigung

 $\setminus$ 

Differenz

 $\subseteq$ 

Teilmengenrelation

 $\underline{\mathcal{C}}$ Mengensystem<sup>1)</sup> $\mathcal{P}(\dots), 2^{\dots}$ 

Potenzmenge

 $\underline{\mathcal{F}}$ Algebra<sup>1)</sup> $\underline{\mathcal{S}}$  $\sigma$ -Algebra<sup>1)</sup>**Logik** $\wedge$ 

Konjunktion: logisches und

 $\vee$ 

Alternative: logisches oder

 $|$ 

für die gilt

 $\Rightarrow$ 

Implikation: wenn ..., dann

 $\Leftrightarrow$ 

Äquivalenz: genau dann, wenn ...

$\forall$	Allquantor: für alle ... gilt
$\exists$	Existentialquantor: es gibt ein
<b>Fuzzy-Set-Theorie</b>	
$\sim$	Fuzzyness
$\tilde{a}; \dots; \tilde{z}$	Fuzzy-Größen <sup>1)</sup>
$\langle a; b; c \rangle$	Fuzzy-Dreieckszahl mit den Intervallgrenzen des Supports a und c und dem Gipfelpunkt b
$\langle a; b; c; d \rangle$	Fuzzy-Intervall mit den Intervallgrenzen des Supports a und d und den Intervallgrenzen des Gipfelintervalls b und c
$\mu(\underline{x})$	Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-Größe $\tilde{x}$ <sup>1)</sup>
$\tilde{A}, \dots, \tilde{Z}$	Fuzzy-Mengen <sup>1)</sup>
$\alpha_i$	$\alpha$ -Level i auf dem Niveau $\alpha_i = \mu$
$\underline{A}_{\alpha_i}, \dots, \underline{Z}_{\alpha_i}$	$\alpha$ -Niveaumengen <sup>1)</sup>
$S(\tilde{X})$	Kern der unscharfen Menge $\tilde{X}$ <sup>1)</sup>
<b>Bestimmung des Bauwerkszustandes</b>	
$\underline{\mathfrak{E}}$	beobachtbare, messbare Bauwerkseigenschaft
$\underline{\mathfrak{M}}$	Modellgröße bzw. Berechnungsparameter
$\tilde{\mathfrak{M}}$	Fuzzy-Modellgröße bzw. Fuzzy-Berechnungsparameter
$p(x)$	Wahrscheinlichkeitsverteilung
$m$	Mittelwert
$\sigma$	Standardabweichung
$\pi(x)$	Möglichkeitsverteilung
d	Schädigungsvariable
$\mathcal{B}$	Materieller Körper
$\mathcal{B}_i$	Teilgebiet eines Körpers

$\Gamma, \Phi, \Psi, \Omega$	Gesamtheit der Teilgebiete (Netz)
$C_k$	k-ter Cluster
$\mathcal{C}$	Clusterkonfiguration (Menge aller Cluster)
$n_m$	Anzahl der Cluster $C_k$
$d(\tilde{a}, \tilde{b})$	modifiziertes <i>Euklid'sches</i> Abstandsmaß
<b>Zustandsprognose</b>	
$D_0$	Durchmesser der Bewehrungsstäbe
$k_s$	Korrosionsgeschwindigkeit
$\tilde{k}_s$	Fuzzy-Korrosionsgeschwindigkeit
$A_s(t)$	zeitabhängige Bewehrungsstahlfläche
<b>Fuzzy-Tragwerksanalyse</b>	
$\mathcal{O}$	Landau-Symbol, Komplexität
L	linker Ast einer Fuzzy-Größe
R	rechter Ast einer Fuzzy-Größe
$\underline{F}, \underline{F}_L, \underline{F}_R$	Klasse von Funktionen
$R(x, y)$	Relation
$R^=$	Gleichheitsrelation
F	Körper der Fuzzy-Größen
$ID$	Identifikationsnummer einer Fuzzy-Größe
$LR_i$	i-ter Ast einer Fuzzy-Größe
$m$	Anzahl der $\alpha$ -Niveaus
$n$	Anzahl der Fuzzy-Eingangsgrößen
$T_{FQ}(n, m)$	Berechnungsdauer der neuen Fuzzy-Arithmetik in Abhängigkeit von $m$ und $n$
$T_{det}(n, m)$	Berechnungsdauer der Verfahren mit deterministischer Grundlösung in Abhängigkeit von $m$ und $n$
$S(n, m)$	Geschwindigkeitserhöhung (speedup)

$p$	Anzahl der Prozessoren
$N$	Problemgröße
$S(p, N)$	paralleler speedup
<b>Modellbildung und -validierung</b>	
$\beta, \gamma$	Drehwinkel
$A(\beta, \gamma)$	Querschnittsfläche in Abhängig der Drehwinkel
$E_i$	Effekt des i-ten Faktors
$E_{ij}$	Wechselwirkung zwischen dem i-ten und dem j-ten Faktor
$f_i(\dots)$	Antwortfunktion des Systems für die i-ten Größe
$\Phi_i(\dots)$	Approximation der Antwortfunktion des Systems für die i-ten Größe
$d(\tilde{A})$	Entropiemaß für die unscharfe Menge $\tilde{A}$
$d_s(\tilde{A})$	<i>Shannon'sche</i> Entropiemaß für die unscharfe Menge $\tilde{A}$
$V_1^i$	relative Modellgenauigkeit
$V_2^i$	relative Modellunschärfe
<b>Zustandsbewertung</b>	
S	Standicherheit
V	Verkehrssicherheit
D	Dauerhaftigkeit
$m$	Anzahl der Einzelschäden innerhalb einer Bauteilgruppe
$U$	Schadensumfang
$Z_i^{BG}$	Zustandszahl der i-ten Bauteilgruppe
$Z$	Zustandsnote des Bauwerks
$\tilde{S}$	Fuzzy-Beanspruchung

$\tilde{R}$	Fuzzy-Beanspruchbarkeit
$g(\underline{x})$	Grenzzustandsfunktion
$\Pi_F$	Versagensmöglichkeit
$\eta_i^{\alpha_k}$	Einflussfaktor der i-ten Fuzzy-Eingangsgröße auf dem $\alpha_k$ -Niveau auf die Ergebnisgröße
$\rho_i$	normalisierter Einflussfaktor der i-ten Fuzzy- Eingangsgröße auf die Ergebnisgröße

<sup>1)</sup> Für den eindimensionalen Fall entfällt der Unterstrich

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Das Bundesfernstraßennetz umfasst ca. 37.110 Brücken (Stand: 31.12.2004 [29]) in der Baulast des Bundes. Hinzukommen die Brücken der Länder und Gemeinden. Der Gesamtbestand an Brücken in Deutschland kann auf ca. 120.000 Bauwerke geschätzt werden [29]. Das Anlagevermögen der Brücken des Bundes wird mit ca. 40 Mrd. Euro veranschlagt. Verlässliche Zahlen über den weltweiten Brückenbestand stehen nicht zur Verfügung. Die Bedeutung von Brücken für die Mobilität in arbeitsteiligen, räumlich differenzierten Gesellschaften ist jedoch offensichtlich.

Durch die Nutzung und Umwelteinflüsse verschlechtert sich der Zustand eines jeden Bauwerks kontinuierlich. Wiederkehrende Einwirkungen lassen Brücken „altern“ und erfordern den Einsatz von Ressourcen zum Erhalt der Bausubstanz. Im Freistaat Bayern werden jährlich ca. 50 Mio. Euro zum Erhalt der Brücken aufgewendet [1]. Bundesweit werden sich die eingesetzten Mittel im Zeitraum von 2003 bis 2015 auf 9,4 Mrd. Euro bis 13,2 Mrd. Euro [29] belaufen. Ein unter wirtschaftlichen und gesellschaftspolitischen Gesichtspunkten möglichst optimaler Einsatz von Finanzmitteln der öffentlichen Hand zum Erhalt und Ersatz von Brücken ist eine Grundvoraussetzung, um die für eine prosperierende Wirtschaft notwendige Infrastruktur bereitstellen zu können. Dies kann nur dann Erfolg haben, wenn gesicherte Erkenntnisse über den Zustand der Straßen- und Eisenbahnbrücken vorliegen und dieser mit ausreichender Genauigkeit in die Zukunft prognostiziert werden kann, um notwendige Maßnahmen im Kontext der gesamten Infrastruktur rechtzeitig planen zu kön-

nen.

Neben den wiederkehrenden Einwirkungen auf Brücken können jedoch auch nicht wiederkehrende Einwirkungen den Zustand von Brücken erheblich beeinflussen. Nicht wiederkehrende Einwirkungen können durch außergewöhnliche Ereignisse während der Nutzung auftreten. Unfälle im unmittelbaren Bereich von Brückenbauwerken können zu Schäden infolge Anprall oder Brand führen. In diese Kategorie sind aber auch extreme Wetterereignisse, beispielsweise Orkanstürme, zu zählen. In jüngster Vergangenheit wird darüber hinaus auch der Bedrohung durch Terrorismus immer mehr Bedeutung beigemessen. Das Szenario eines Anschlags auf die Infrastruktur und im besonderen Maße auf Tunnels und Brücken führt zu bisher kaum berücksichtigten Einwirkungen: Detonation und Impakt. Derartige Einwirkungen führen zumeist zu einer diskontinuierlichen und über das Maß von Alterungsschäden weit hinausgehenden Verschlechterung des Bauwerkszustandes. Oftmals ist die Standsicherheit des Bauwerks gefährdet. Eine schnelle Abschätzung des Schadensausmaßes und insbesondere der Resttragfähigkeit der geschädigten Struktur bildet die Grundlage für die Festlegung etwaiger Maßnahmen (z. B. Nutzungsbeschränkung, Sperrung, Sanierungskonzept, ...). Bei Aufräumungsarbeiten im unmittelbaren Bereich einsturzgefährdeter Brücken muss das Gefährdungspotential für Leib und Leben der Arbeiter nachvollziehbar bewertet werden. Unter dem Gesichtspunkt der latenten Gefahr von terroristischen Anschlägen auf Brücken gewinnen auch präventive Maßnahmen an Bedeutung. Eine frühzeitige Identifizierung besonders gefährdeter Bauwerke und die Durchführung von Maßnahmen des baulichen Schutzes, können positiv zur Verbesserung der Sicherheitslage beitragen.

In allen oben beschriebenen Fällen muss mit unvollständigen bzw. ungenauen Informationen über die Beschädigung eines Bauwerks umgegangen werden. Zusätzliche mangelhafte konstruktive Durchbildungen erschweren dabei die Anamnese und Diagnose. In wenig bzw. nicht entwickelten Ländern, wie sie beispielsweise im Rahmen von Einsätzen der Bundeswehr angetroffen werden, liegt der Zustand der Bauwerke wegen der z. T. sehr schlechten Qualität der Bauausführung bzw. über lange Zeiträume fehlender Instandhaltungsmaßnahmen oftmals außerhalb des Erfahrungsbereiches, der in Normen und Vorschriften festgehalten ist. Dennoch werden solche Bauwerke genutzt und müssen daher bewertet werden. Es ist dabei ein nachvollziehbares und möglichst objektives Bewertungsverfahren geschädigter Brückenbauwerke anzustreben.



## 1.2 Problemstellung und Ziel der Arbeit

Brücken sind integraler Bestandteil der Infrastruktur. Sie erhöhen die Mobilität der Bevölkerung und ermöglichen dadurch den modernen Wirtschaftsprozess mit räumlich getrennten Arbeits- und Wohnstätten. Eine effiziente Abwicklung der Warenströme ist eine weitere wesentliche Grundlage für wirtschaftliches Wachstum und ohne Brücken kaum zu realisieren. Wegen dieser globalen Bedeutung sind Brücken i. A. im Besitz von Institutionen der Staaten. In Deutschland werden Brückenbauwerke entsprechend ihrer regionalen bzw. überregionalen Bedeutung dem Bund, den Ländern oder den Kommunen zugeschrieben. Um den Brückenbestand und damit das Anlagevermögen des Bundes, der Länder und der Kommunen zu erhalten, müssen kontinuierlich Investitionen in den Erhalt der Bausubstanz getätigt werden. Der Einsatz von Ressourcen zur Bauwerkserhaltung und -instandsetzung erfolgt dabei unter Berücksichtigung des gesamten Brückenbestandes (Netzebene).

Grundlage für die Beurteilung der Gesamtsituation sind in Deutschland die Ergebnisse der Bauwerksprüfungen nach DIN 1076 [9] der einzelnen Brückenbauwerke (Objektebene). Die Erfassung, Bewertung, Aufzeichnung und Auswertung von Ergebnissen dieser Prüfungen sind in der Richtlinie zur einheitlichen Erfassung, Bewertung, Aufzeichnung und Auswertung von Ergebnissen der Bauwerksprüfung nach DIN 1076 (RI-EBW-PRÜF) [28] vereinheitlicht und zusammengefasst. Die Schadensbewertung erfolgt getrennt für die Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“. „In der Regel werden die Schadensbewertungen aus den im Anhang [von RI-EBW-PRÜF] enthaltenen und im Software-Programm SIB-Bauwerke zur Verfügung gestellten Schadensbeispielen übernommen“ [28].

Für jedes Bauteil wird aus der Schadensbewertung eine Zustandszahl ermittelt. Die Gesamtzustandsnote eines Bauwerks ergibt sich im Wesentlichen aus der Zustandszahl des am schlechtesten bewerteten Bauteils, die gegebenenfalls unter Berücksichtigung des Schadensumfangs und der Häufigkeit der Einzelschäden modifiziert wird. Der Umgang mit Ungewissheit und speziell mit Unschärfe bei der Identifikation und Bewertung von Einzelschäden, sowie der Aggregation der Einzelbewertungen zur Gesamtzustandsbewertung eines Bauwerks liegt dabei im Verantwortungsbereich des Prüfingenieurs. Grundlage hierfür bilden seine sachgerechte Ausbildung und Erfahrung.

Bei schwerwiegenden, komplexen oder unklaren Schadensbildern sind für eine sinnvoll-

le Maßnahmenplanung über die übliche Vorgehensweise hinausgehende detaillierte objektbezogene Schadensanalysen erforderlich. Zur Schadensanalyse von Stahlbeton- und Spannbetonbrücken wird in [99] ein computergestütztes Vorgehen unter Berücksichtigung der auftretenden Unschärfen, insbesondere bei der Datenerfassung und bei den Entscheidungsvorgängen der Schadensanalyse, vorgestellt. Mit Hilfe eines regelbasierten Expertensystems wird der Anwender bei der Identifikation einer Schadensursache und bei der Bewertung des Schadens hinsichtlich der Kriterien nach RI-EBW-PRÜF unterstützt. Die Bewertung der Einzelschäden nach den Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ erfolgt analog zu der Richtlinie RI-EBW-PRÜF mit der Hilfe von Schadensbeispielen.

Der Einfluss eines Schadens auf eines der Kriterien wird ohne Berücksichtigung der tatsächlichen Konstruktion auf Grund von „a priori“ Untersuchungen bewertet. Auch die akkumulative Wirkung mehrerer Einzelschäden wird lediglich näherungsweise durch Modifikation der Zustandsnoten erfasst. Die maßgebenden Eingangsgrößen bei der Dringlichkeitsreihung der Mittelvergabe zur Bauwerkserhaltung stellen somit lediglich Näherungen der realen Situation dar. Während der Zustandsbewertung auftretende Unschärfen gehen durch Rundung verloren. Einer auftretenden Rissweite von Trennrissen in Stahlbetonüberbauten von 0,39 mm wird beispielsweise gemäß den in der Richtlinie RI-EBW-PRÜF [28] enthaltenen Schadensbeispielen eine Zustandszahl (Tragsicherheit) von 0 zugeordnet, während eine Rissweite von 0,40 mm bereits eine Zustandszahl (Tragsicherheit) von 1 bedeutet. Trennrisse mit Rissweiten größer als 0,40 mm werden nicht differenziert behandelt. Die Vermeidung möglicher Fehleinschätzungen des Bauwerkszustandes, die durch die Datenreduktion (Rundung) und die näherungsweise Aggregation aller an einem Bauwerk festgestellten Schäden auftreten können, ist der Ansatzpunkt der vorliegenden Arbeit.

In dieser Arbeit wird ein Konzept verfolgt, welches unter Berücksichtigung der Unschärfen, der während der Bauwerksprüfung durchgeführten Messungen, Beobachtungen und Einschätzungen, den Zustand eines geschädigten Tragwerks und dadurch insbesondere die Standicherheit und Dauerhaftigkeit der Struktur direkt bewertet. Auftretende Unschärfen können in objektive und subjektive Unschärfen unterteilt werden. Objektive Unschärfen treten insbesondere bei der Durchführung von Messungen auf und können mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt werden. Subjektive Unschärfen resultieren zumeist aus der Beurteilung bzw. Bewertung eines Sachverhalts durch einen Experten bei unvollständiger Informationslage. Schäden können zumeist nicht direkt messtechnisch

quantifiziert werden. Indikatoren (z. B. Rissweiten, sichtbare Rostfahnen, usw.) müssen vom Prüfenieur bewertet werden, wodurch die Quantifizierung des Schädigungsgrades, d. h. die Veränderung der Tragwerksparameter, mit subjektiver Unschärfe behaftet sind. Eine mathematisch konsistente Behandlung dieser subjektiven Unschärfen erfolgt auf der Basis von „unscharfen Mengen“ [140]. Mittels einer „unscharfen“ Tragwerksanalyse werden die unscharfen Eingangsgrößen in den Raum der Ergebnisgrößen transformiert. Dadurch wird es möglich, die Auswirkungen von Bauwerksschäden direkt hinsichtlich der Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit zu bewerten. Der Einsatz eines computergestützten Verfahrens zur numerischen Simulation des Tragverhaltens eines geschädigten Bauwerks unter Berücksichtigung der auftretenden Unschärfen führt daher zu einer realistischeren Beurteilung des Tragwerkszustandes. Darüber hinaus kann der Informationsgehalt der unscharfen Ergebnisgrößen zu weiterführenden Analysen genutzt werden. Die Modellparameter können in Verbindung mit Bauwerksverhaltensmessungen validiert und kalibriert werden. Auf Basis von subjektivem Expertenwissen wird eine objektive Bewertung des Bauwerkszustandes gemäß den Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ ermöglicht.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zehn Kapitel. Zunächst werden in Kapitel 2 wesentliche Grundlagen zur numerischen Simulation des Tragverhaltens geschädigter Strukturen bereitgestellt. Zur Beschreibung des mechanischen Werkstoffverhaltens werden vorab Aspekte der Kontinuumsschädigungsmechanik, wie die stoffunabhängigen kinematischen Beziehungen und die Darstellung von Spannungen sowie die darauf aufbauenden stoffabhängigen konstitutiven Beziehungen der Elastizitäts-, Plastizitäts- und Schädigungstheorie skizziert. Im zweiten Abschnitt wird die Finite-Elemente-Methode als numerisches Verfahren zur Abbildung der zuvor abgeleiteten konstitutiven Beziehungen auf der Strukturebene erörtert. Dabei wird insbesondere auf die Transformation der differentiellen Formulierungen des ersten Abschnitts in lineare bzw. nichtlineare Gleichungssysteme eingegangen. Im abschließenden Abschnitt des Kapitels werden Methoden für eine computerbasierte Lösung der Gleichungssysteme zusammengefasst.

Kapitel 3 hat die Beschreibung nicht deterministischer Systeme zum Inhalt. Zur Ein-

führung in die Thematik der mathematischen Beschreibung von Unbestimmtheit wird im ersten Abschnitt eine systematische Charakterisierung (un)bestimmter Informationen dargestellt. Neben einer ausführlichen Zusammenstellung von Ursachen und Quellen der Unbestimmtheit aus informationstheoretischer Sicht legt dieser Abschnitt das in dieser Arbeit verwendete Vokabular fest. In den folgenden Abschnitten werden die mathematischen Ansätze der Evidenztheorie, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Möglichkeitstheorie zur Beschreibung unbestimmter Informationen detailliert erörtert. Die Darstellung erfolgt im Rahmen der übergeordneten Theorie der unscharfen Maße mit Betonung der Beziehungen zwischen den theoretischen Ansätzen untereinander sowie mit den im ersten Abschnitt dargestellten Charakterisierungen unbestimmter Informationen. Der letzte Abschnitt erörtert die Erweiterung der klassischen Mengenlehre zur Theorie der unscharfen Mengen und zeigt Verbindungen zur Möglichkeitstheorie auf.

In Kapitel 4 wird die quantitative Beschreibung des Zustandes geschädigter Strukturen unter Berücksichtigung der dabei auftretenden Unschärfen und Unsicherheiten behandelt. Zunächst wird die Transformation von Bauwerkseigenschaften in Berechnungsparameter einer numerischen Simulation als Grundlage für die Auswahl einer geeigneten Unsicherheitstheorie dargestellt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Möglichkeitstheorie bzw. die Theorie der unscharfen Mengen zur Berücksichtigung von sowohl objektiven Informationen als auch von subjektiven Bewertungen eingesetzt. Die Transformation objektiver, durch direkte Messungen am Bauwerk gewonnener, Informationen in Fuzzy-Tragwerksparameter wird im zweiten Abschnitt erörtert. Dabei wird detailliert auf in der Praxis anzutreffende Messsituationen eingegangen. Im dritten Abschnitt wird die Schädigungssimulation als indirekte Methode der Zustandsbeschreibung dargestellt. In diesem Zusammenhang steht die Veränderung des Informationsgehalts des Simulationsergebnisses beim Übergang zu Tragwerksmodellen mit signifikant geringerer Diskretisierungsfeinheit im Vordergrund. Für die Kondensation der lokalen Materialeigenschaften im Rahmen der Netzvergrößerung wird ein neuer Cluster-Algorithmus zur Klassifizierung von Fuzzy-Parametern entwickelt. Schließlich werden Expertensysteme und Erfahrungswissen als weitere Informationsquelle zur Festlegung der Berechnungsparameter diskutiert.

Die Prognose der Entwicklung des gegenwärtigen Zustands eines Bauwerks für zukünftige Zeitpunkte ist Gegenstand von Kapitel 5. Dafür werden zunächst ausgewählte zeitabhängige Schädigungsprozesse dargestellt. Anschließend werden auf diesen chemischen und physikalischen Vorgängen basierende Prognosemodelle für die Schadensentwicklung unter

Berücksichtigung unscharfer Eingangsdaten erörtert.

Die Entwicklung eines auf den dargestellten Grundlagen basierenden Verfahrens zur Beurteilung des Zustandes deteriorierter Brückentragwerke ist der Kern dieser Arbeit. Die erbrachte wissenschaftliche Leistung wird detailliert in den folgenden drei Kapiteln dargestellt.

Kapitel 6 behandelt die Durchführung numerischer Simulationen auf der Basis der „Finite-Elemente-Methode“ unter Berücksichtigung von Fuzzy-Tragwerksparametern. Nach einer Erörterung der Grundlagen für die Erweiterung von arithmetischen zu fuzzyarithmetischen Operationen werden im zweiten Abschnitt bestehende Verfahren zur Durchführung einer Fuzzy-Tragwerksanalyse diskutiert. Anschließend wird die im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“ dargestellt. Dazu wird zunächst systematisch das theoretische Konzept entwickelt. Als nächstes folgt eine kritische Diskussion der Anwendungsgrenzen des Verfahrens. Schließlich wird die Umsetzung des konzeptionellen Ansatzes in eine effiziente Software dargestellt. Das Kapitel schließt mit einer Gegenüberstellung der Leistungsfähigkeiten des neu entwickelten und der bestehenden Verfahren ab.

Die Überführung des unscharfen Zustandes eines Brückentragwerks in ein Berechnungsmodell als Grundlage für den Einsatz der „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“ wird in Kapitel 7 behandelt. Im ersten Abschnitt wird die Modellbildung beschädigter Brücken als Prozess der Abstraktion und Idealisierung diskutiert. Den Ausgangspunkt bildet die Darstellung des an das Konzept des „Building Information Modeling“ (BIM) angelehnten dreidimensionalen objektorientierten Datenmodells. Auf dieser Grundlage wird dann ein neu entwickelter Algorithmus zur automatisierten Generierung von numerischen Berechnungsmodellen vorgestellt. Die beiden folgenden Abschnitte thematisieren die Kalibrierung und die Validierung von Berechnungsmodellen. Dazu wird ein im Rahmen der vorliegenden Arbeit neu entwickeltes Verfahren zur Bestimmung von unscharfen Modellgrößen auf Grund von (unscharfen) Messungen am Bauwerk erörtert. Dieses Verfahren, das auf der neu entwickelten und in Kapitel 6 dargestellten Fuzzy-Arithmetik basiert, dient zum einen zur Angleichung des theoretischen an das reale Bauwerksverhalten und zum anderen zur Beurteilung der Modellgüte. Für den letzteren Fall werden Modifikationen des Grundalgorithmus dargestellt und quantitative Kriterien zur Modellvalidierung abgeleitet.

In Kapitel 8 wird schließlich das neue Verfahren zur Zustandesbewertung geschädigter Brücken dargestellt. Im ersten Abschnitt wird zunächst auf wesentliche Aspekte des der-

zeit in Deutschland angewendeten Verfahrens der Zustandsbewertung nach DIN 1076 und RI-EBW-PRÜF eingegangen. Der zweite Abschnitt stellt das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Bewertungsverfahren auf der Basis einer possibilistischen Sicherheitsbeurteilung des Tragwerks vor. Die Beurteilungskriterien Standsicherheit bzw. Dauerhaftigkeit werden dabei von der mit der „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“ bestimmten Versagensmöglichkeit zum gegenwärtigen bzw. zukünftigen Zeitpunkt abgeleitet. Die beiden Kriterien dienen dann u. a. zur Festlegung einer Zustandsnote. Diese bildet den Anknüpfungspunkt an das bestehende Bewertungsverfahren und insbesondere an das im Aufbau befindliche Bauwerks-Management-System (BMS).

Die drei dargestellten Themenkomplexe „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“, Modellbildung und -validierung geschädigter Brücken und deren Zustandsbewertung auf der Grundlage einer possibilistischen Sicherheitsbeurteilung stellen den Kern der eigenen wissenschaftlichen Arbeit dar. Dabei ist neben der dargestellten Entwicklungen der drei Module selbst, insbesondere deren Integration in ein Gesamtkonzept zur einheitlichen, validierbaren und zuverlässigen Bewertung der Dringlichkeit von Instandsetzungsmaßnahmen von Brückenbauwerken auf Netzebene zu nennen.

Kapitel 9 zeigt die Anwendung des zuvor dargestellten Ansatzes zur Zustandsbewertung beschädigter Brücken unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerkparameter am Beispiel eines exemplarischen Brückenbauwerks. Neben der Bestimmung der unscharfen Modellgrößen wird die Modellvalidierung und die Simulation des Tragverhaltens mit der „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“ des geschädigten Brückenbauwerks gezeigt.

Kapitel 10 schließt die Arbeit mit einer Diskussion des entwickelten Verfahrens zur Beurteilung geschädigter Brücken ab und gibt einen Ausblick auf weitere interessante Aspekte zur Simulation des Tragverhaltens von Bauwerken unter Berücksichtigung auftretender Unschärfen.

## Kapitel 2

# Ausgewählte theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden zur Einführung in die Thematik wesentliche Grundlagen zur Modellierung geschädigter Brücken dargestellt.

Zunächst werden in Abschnitt 2.1 essentielle Gleichungen aus der Kontinuumsschädigungsmechanik skizziert, mit denen eine mechanische Beschreibung (geschädigter) Werkstoffe erfolgen kann. Die Darstellung beginnt mit einer Erläuterung der kinematischen Beziehungen, die die Bewegung und Deformation materieller Körper im Raum beschreiben. Der darauf folgende Abschnitt führt den Spannungsvektor und den *Cauchy*-Spannungstensor ein. Die Verknüpfung von Spannungen und Verzerrungen führt auf materialabhängige konstitutive Beziehungen. Zunächst werden diese Beziehungen für elastisches Materialverhalten dargestellt. Auf dieser Grundlage wird anschließend die klassische Plastizitätstheorie erläutert, welche dann zu einer Beschreibung geschädigter Werkstoffe erweitert wird.

Die Berechnung kontinuierlicher Systeme führt in einem ersten Schritt zu einer Problemformulierung mit Hilfe von Differentialgleichungen und in einem zweiten Schritt zur Ermittlung der Lösungsfunktionen des Gleichungssystems. Eine analytische Bestimmung der Lösungsfunktionen ist für baupraktisch relevante Fragestellungen oft nicht durchführbar. Daher wird die analytische Lösung approximiert. Unter den zahlreichen Näherungsverfahren, wird im Rahmen der Strukturberechnung oft die „Finite-Elemente-Methode“ (FEM) eingesetzt. Dieses Verfahren wird in Abschnitt 2.2 skizziert.

Mit Hilfe der „Finite-Elemente-Methode“ wird die Lösung eines Differentialgleichungssystems in die Lösung eines herkömmlichen (nicht)linearen Gleichungssystems überführt. In Abhängigkeit von der zugrunde liegenden Kontinuumsschädigungsmechanischen Formu-

lierung können charakteristische Eigenschaften des Gleichungssystems abgeleitet werden, die in Verbindung mit der Problemgröße die Auswahl von Lösungsverfahren bestimmen. In Abschnitt 2.3 wird ein Überblick über Lösungsverfahren von Gleichungssystemen der Strukturmechanik sowie spezifische Charakteristika dieser Verfahren dargestellt.

## 2.1 Kontinuumsschädigungsmechanik

### 2.1.1 Kinematik

Ein deformierbarer fester Körper besitzt im unbelasteten Zustand zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  eine bestimmte Lage im dreidimensionalen euklidischen Raum. Diese Lage dient im Allgemeinen als Referenzkonfiguration, auf die nun die Lageänderungen des Körpers bezogen werden, und wird mit  $\mathcal{B}_0$  bezeichnet. Die belastungsbedingte aktuelle Lage des Körpers zum Zeitpunkt  $t$  wird Momentankonfiguration genannt und mit  $\mathcal{B}_t$  bezeichnet (Abbildung 2.1). Die Lage eines Partikels in der Referenzkonfiguration wird durch den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  und in der Momentankonfiguration durch den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  beschrieben. Der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration wird in Abhängigkeit vom Ortsvektor  $\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration und von der Zeit  $t$  durch die Abbildungsvorschrift

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \tag{2.1}$$

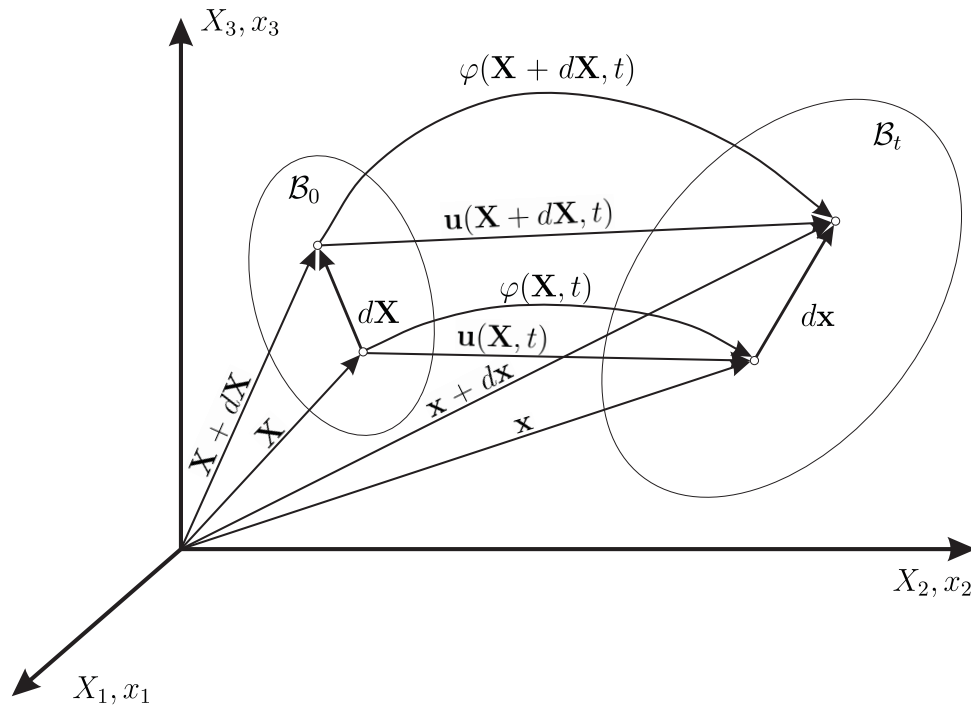
bestimmt. Die Gleichung (2.1) mit den unabhängigen Variablen  $\mathbf{X}$  und  $t$  wird als materielle oder *Lagrange'sche* Beschreibungsweise bezeichnet. Die Komponenten  $X_i$ ,  $i=1,2,3$  des Ortsvektors in der Referenzkonfiguration werden als materielle oder *Lagrange'sche* Koordinaten bezeichnet. Eine detailliertere Darstellung der materiellen (*Lagrange'schen*) Betrachtungsweise und eine Abgrenzung zur räumlichen (*Euler'schen*) Betrachtungsweise kann beispielsweise ([66] entnommen werden.

Der Differenzvektor  $\mathbf{u}$  zwischen dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  eines Partikels in der Referenzkonfiguration und dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$  desselben Partikels in der Momentankonfiguration wird als Verschiebungsvektor bezeichnet:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \tag{2.2}$$

Der Verschiebungszustand ist die Gesamtheit der Verschiebungsvektoren aller Partikel





**Abbildung 2.1:** Kontinuumsmechanische Beschreibung eines Körpers in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  und der Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$

eines Körpers. Er ist im Allgemeinen bei einem deformierbaren festen Körper das Ergebnis einer Starrkörperbewegung und einer Gestaltänderung des Körpers. Bei der Starrkörperbewegung, die in der Regel aus einer Translation und einer Rotation des Körpers besteht, ändert sich weder sein Volumen noch seine Gestalt.

Die Änderung der Abstände zwischen benachbarten Punkten des Körpers während der Bewegung kennzeichnet die Verformung des Körpers. Zwei Punkte sind in diesem Sinn benachbart, wenn ihr Abstand infinitesimal klein ist.

In der Referenzkonfiguration sind zwei benachbarte Punkte durch die Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  festgelegt. Das Abstandsquadrat  $dS^2$  dieser beiden Punkte in der Referenzkonfiguration ergibt sich in Indeschreibweise zu:

$$dS^2 = dX_i dX_i. \quad (2.3)$$

In der Momentankonfiguration werden die beiden Punkte durch die Ortsvektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$  festgelegt.

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + u(\mathbf{X}) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = (\mathbf{X} + d\mathbf{X}) + u(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) \quad (2.5)$$

Das Abstandsquadrat  $ds^2$  dieser beiden Punkte in der Momentankonfiguration ergibt sich zu:

$$ds^2 = dx_i dx_i. \quad (2.6)$$

Mit den Gleichungen (2.4) und (2.5) erhält man

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + u(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - u(\mathbf{X}) \quad (2.7)$$

oder in Indexschreibweise

$$dx_i = dX_i + u_i(X_j + dX_j) - u_i(X_j) \quad (2.8)$$

Die Entwicklung von  $u(\mathbf{X}+d\mathbf{X})$  in eine *Taylor*-Reihe an der Stelle  $\mathbf{X}$  ergibt mit der *Einstein*'schen Summationskonvention:

$$u_i(X_j + dX_j) = u_i(X_j) + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_j^2} (dX_j)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u_i}{\partial X_j^3} (dX_j)^3 \dots \quad (2.9)$$

Unter der Voraussetzung, dass die nichtlinearen Reihenglieder gegenüber dem linearen Reihenglied von höherer Ordnung klein sind, kann die *Taylor*-Reihe nach dem linearen Glied abgebrochen werden. Durch Einsetzen von Gleichung (2.9) in Gleichung (2.8) wird dann

$$dx_i = dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j + \dots \approx \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j \quad (2.10)$$

erhalten. Wird Gleichung (2.10) in Gleichung (2.6) eingesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) dX_j dX_k \\ &= \left( \delta_{jk} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) dX_j dX_k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die als Metrik bezeichnete Längen- und Winkelmessung ist durch  $ds^2$  in der Momentan-konfiguration und durch  $dS^2$  in der Referenzkonfiguration vollständig beschrieben. Die Differenz  $ds^2 - dS^2$  ist ein Maß für die Verformung. Sie lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) dX_j dX_k \\ &= 2E_{jk} dX_j dX_k = 2E_{ij} dX_i dX_j \end{aligned} \quad (2.12)$$

oder in tensorieller Schreibweise:

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{X}^T \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.13)$$

Der Tensor 2. Stufe  $\mathbf{E}$  wird als *Green'scher* Verzerrungstensor oder Verzerrungstensor in *Lagrange'schen* Koordinaten bezeichnet. In einem kartesischen Koordinatensystem können seine Komponenten wie folgt dargestellt werden:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right]. \quad (2.14)$$

Bei Annahme infinitesimal kleiner Deformationen können die quadratischen Glieder  $\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j}$  vernachlässigt werden. In der geometrisch linearen Elastizitätstheorie ergibt sich für den Verzerrungstensor

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right]. \quad (2.15)$$

### 2.1.2 Beschreibung von Spannungen

Durch Anwendung des Schnittprinzips werden die inneren Kräfte und Momente eines Körpers freigelegt. Wenn  $\Delta F$  die Kraft auf einem Flächenelement  $\Delta A$  der Schnittfläche ist, dann beschreibt der Quotient  $\Delta F/\Delta A$  die mittlere Flächenbelastung für dieses Element. Der Grenzwert

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2.16)$$

den man erhält, wenn das Flächeninkrement  $\Delta A$  gegen Null konvergiert, wird auch als Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  bezeichnet.

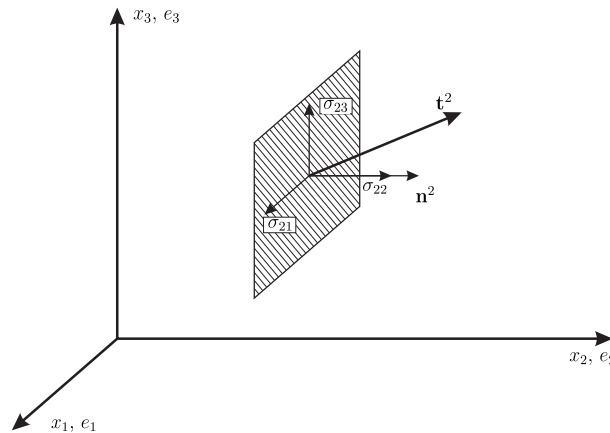
Der Spannungszustand in einem Punkt  $P$  kann mit drei linear unabhängigen Spannungsvektoren  $(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3)$ , die auf zueinander senkrechten Ebenen wirken, vollständig beschrieben werden.

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}^n$  steht im Allgemeinen nicht senkrecht auf der betrachteten Schnittebene mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$ . Er kann i. A. in eine Komponente parallel und in eine senkrecht zum Normalenvektor  $\mathbf{n}$  zerlegt werden. Die Komponente in Richtung des Normalenvektors wird als Normalspannung und die Komponente senkrecht zu ihm als Schubspannung bezeichnet. Für die Betrachtung in kartesischen Koordinaten kann die Schubspannung in zwei weitere Anteile zerlegt werden, die den Koordinatenachsen des in Abbildung 2.2 dargestellten Systems entsprechen. Dadurch kann man den Spannungsvektor  $\mathbf{t}^2$  durch eine Normalspannungskomponente  $\sigma_{22}$  und zwei Schubspannungskomponenten  $\sigma_{21}$  und  $\sigma_{23}$ , in den Richtungen der drei Hauptachsen beschreiben.

$$\mathbf{t}^1 = \sigma_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \cdot \mathbf{e}_3 = \sigma_{1j} \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.17)$$

$$\mathbf{t}^2 = \sigma_{2j} \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.18)$$

$$\mathbf{t}^3 = \sigma_{3j} \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.19)$$



**Abbildung 2.2:** Wirkung der Spannungsvektorkomponenten auf eine Fläche, deren Normalenvektor in die Richtung der Achse  $x_2$  zeigt

Die neun skalaren Größen  $\sigma_{ij}$  sind die kartesischen Komponenten des *Cauchy-Spannungstensors*:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Mit Hilfe von Gleichgewichtsbetrachtungen kann gezeigt werden, dass der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  symmetrisch ist:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.21)$$

Beim *Cauchy*-Spannungstensor beziehen sich die zugrunde liegenden Spannungsvektoren  $\mathbf{t}^i$  und Normalenvektoren  $\mathbf{n}^i$  auf die Momentankonfiguration. Weitere Spannungstensoren aus der Kontinuumsmechanik sind der erste *Piola-Kirchhoff*'sche Spannungstensor und der zweite *Piola-Kirchhoff*'sche Spannungstensor. Beide Tensoren bilden die Spannungen in der verformten Momentankonfiguration mit Bezug auf ihre unverformte Referenzkonfiguration ab.

### 2.1.3 Elastizitätstheorie

Im Rahmen der Elastizitätstheorie werden reversible und pfadunabhängige Verzerrungen behandelt.

Das Stoffgesetz, d. h. die Verknüpfung von Spannungen und Verzerrungen, wird mit dem verallgemeinerten *Hooke*'schen Gesetz

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.22)$$

beschrieben.

Dabei ist  $C_{ijkl}$  der Elastizitätstensor und charakterisiert die elastischen Eigenschaften des Materials. Bei isotropen Materialien sind die Komponenten von  $C_{ijkl}$  in Abhängigkeit von zwei unabhängigen Konstanten, den Lamèschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , festgelegt. Ihr Zusammenhang mit dem Elastizitätsmodul  $E$ , dem Schubmodul  $G$ , der Querkontraktionszahl  $\nu$  und dem Kompressionsmodul  $K$  ist wie folgt gegeben:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (2.23)$$

Der Elastizitätstensor lässt sich damit mit Hilfe des Kroneckersymbols  $\delta_{ij}$  durch

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.24)$$

angeben. Durch Einsetzen von Gleichung (2.24) in die Gleichung (2.22), erhält man das Elastizitätsgesetz:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (2.25)$$

### 2.1.4 Plastizitätstheorie

Im Rahmen der Elasto-Plastizität wird vereinfachend angenommen, dass sich ein Material ideal elastisch (vgl. Abschnitt 2.1.3) verhält, bis die Materialbeanspruchung einen Grenzwert erreicht. Bei weiterer Steigerung der Beanspruchung werden, ohne Spannungserhöhung, bleibende Verzerrungen bzw. Verformungen im Material hervorgerufen; es plastifiziert.

Die Grenze der Materialbeanspruchung ab der Plastifizieren eintritt, kann im neundimensionalen Spannungsraum als Fließfläche

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (2.26)$$

die den Raum zulässiger Spannungszustände umschließt, angegeben werden. Spannungszustände auf der Fließfläche können zum Plastifizieren im Material führen, während Zustände außerhalb der Fließfläche unzulässig sind.

Die Form der Fließfläche und ihre Lage im Spannungsraum sind materialabhängig. Verändert die Fließfläche während des Plastifizierens ihre Ausdehnung, so spricht man von isotroper Ver- bzw. Entfestigung. Ändert die Fließfläche ihre Lage im Spannungsraum, so wird der Begriff kinematische Ver- bzw. Entfestigung verwendet. Beide Vorgänge können auch kombiniert auftreten. Bei ideal plastischen Materialien ändert sich die Fließfläche während des Belastungsvorgangs nicht.

Spannungszustände außerhalb der Fließfläche stellen unzulässige Zustände dar. Deshalb muss ausgehend von einem Spannungszustand auf der Fließfläche bei Belastungssteigerung das Spannungsinkrement  $d\sigma_{ij}$  tangential zur Fließfläche am Ort  $\sigma_{ij}$  sein. Erfährt ein Materialpunkt, dessen aktueller Spannungszustand auf der Fließfläche liegt ( $f(\sigma_{ij}) = 0$ ), eine Beanspruchungssteigerung, so treten plastische Verzerrungen auf.

Zur Bestimmung der plastischen Verzerrung wird vorausgesetzt, dass das Material das Prinzip der „maximalen Dissipation“

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)d\varepsilon_{ij}^P \geq 0 \quad (2.27)$$

erfüllt. Danach nimmt die wirklich aufgewandte Deformationsarbeit  $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^P$  ein Maximum gegenüber allen anderen möglichen Arbeitsbeträgen  $\sigma_{ij}^0d\varepsilon_{ij}^P$  an, die bei der gleichen Deformation  $d\varepsilon_{ij}^P$  erbracht würden. Die Bestimmung von  $\sigma_{ij}$  kann als Optimierungsproblem mit der Nebenbedingung, dass  $\sigma_{ij}$  auf der Fließfläche liegen muss, formuliert werden. Mit

Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel kann die Optimierungsaufgabe in

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P - d\lambda f(\sigma_{ij})) = 0 \quad (2.28)$$

mit dem Lagrange-Multiplikator  $d\lambda$  umformuliert werden. Daraus ergibt sich die Fließregel:

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \text{ mit } d\lambda \geq 0. \quad (2.29)$$

Damit lässt sich der aktuelle Zustand eines Materialpunktes mit Hilfe der inneren Belastungsbedingungen angeben:

$$\begin{aligned} f < 0, \quad d\lambda = 0 &\Rightarrow \text{elastische Belastung bzw. Entlastung} \\ f = 0, \quad d\lambda > 0 &\Rightarrow \text{plastische Belastung} \\ f = 0, \quad d\lambda = 0 &\Rightarrow \text{neutrale Belastung} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Das plastische Verzerrungsinkrement  $d\varepsilon_{ij}^P$  steht gemäß Gleichung (2.29) senkrecht auf der Fließfläche. Dieser Fall wird als assoziierte Fließregel bezeichnet. Wird in Gleichung (2.29) für  $f$  ein plastisches Potential  $g$  mit  $f \neq g$  eingeführt, so liegt eine nicht-assoziierte Fließregel vor.

Mit Gleichung (2.29) ist nun die Richtung des plastischen Verzerrungsinkrements  $d\varepsilon_{ij}^P$  bekannt, nicht jedoch der Betrag. Die bestimmende skalare Größe  $\lambda$  muss für konkrete Fließfunktionen und plastische Potentiale derart bestimmt werden, dass der Spannungszustand (bei Ver- bzw. Entfestigung), solange keine Entlastung eintritt, stets auf der Fließfläche bleibt.

Durch additive Zerlegung der Gesamtverzerrung in einen elastischen und einen plastischen Anteil kann eine zu Gleichung (2.22) analoge infinitesimale inkrementelle Formulierung gefunden werden:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^P). \quad (2.31)$$

Der positive Konsistenzparameter  $d\lambda$  wird mittels der Konsistenzbedingung

$$d\lambda df = 0 \quad (2.32)$$

bestimmt. Zusammen mit Gleichung (2.29) und Gleichung (2.31) kann Gleichung (2.31) in allgemeiner Form mit der Fließfunktion  $f$  und dem plastischen Potential  $g$  mit

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abcd} d\varepsilon_{cd}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{tu}}} \quad (2.33)$$

angegeben werden. Daraus lässt sich der elasto-plastische Steifigkeitstensor  $C_{ijkl}^{ep}$  ableiten:

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{C_{ijcd} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}}. \quad (2.34)$$

### 2.1.5 Schädigungstheorie

Eine Schädigung ist gemäß *Gross* [67] der Prozess der Strukturänderung eines Materials, welcher mit der Entstehung, dem Wachstum und der Vereinigung von Mikrodefekten verbunden ist. Folglich entsteht im Endstadium eine vollständige Auflösung der Bindungen und somit eine Materialtrennung und die Bildung eines makroskopischen Risses.

Die Klassifikation von Materialschädigung erfolgt in spröde Schädigung, duktile Schädigung, Kriechschädigung und Ermüdungsschädigung. Spröde Schädigung ist durch die Bildung und das Wachstum von Mikrorissen, wie beispielsweise bei Keramiken und Beton, charakterisiert. Duktile Schädigung und Kriechschädigung sind durch das Wachstum, die Vereinigung und die Neuentstehung von Mikroporen geprägt. Ermüdungsschädigung ist durch Entstehung von Mikrorissen infolge von Spannungskonzentrationen aufgrund der mikroplastischen Wechselbelastung gekennzeichnet. Die entstandenen Mikrorisse breiten sich aus und vereinigen sich.

Zur Beschreibung des Schädigungszustandes werden i. A. Schädigungsvariablen eingeführt. Die Veränderung der Werte der Variablen wird durch ein Evolutionsgesetz beschrieben, das die Entwicklung der Schädigung adäquat darstellen muss.

Es existieren verschiedene Ansätze zur Einführung der Schädigungsvariablen. Beispielsweise beschreiben *Lemaître & Chaboche* [100] Schädigung in einer verzerrungsbasierten Form, in der sie den Steifigkeitstensor als innere Schädigungsvariable auswählen:

$$C_{ijkl}^{ed} = (1 - D_{ijkl}) C_{ijkl}^0. \quad (2.35)$$

Die Materialdegradation wird durch Modifikation des Steifigkeitstensors im Ausgangszustand  $C_{ijkl}^0$  durch den Schädigungstensor  $D_{ijkl}$  beschrieben. Der Term  $(1 - D_{ijkl})$  drückt dabei den aktuellen Schädigungszustand aus. Alternativ dazu beschreibt *Ortiz* [114] Schädigung durch Veränderung des Nachgiebigkeitstensors  $D_{ijkl}$ ; d. h. spannungsbasiert.

Im Folgenden wird der Schädigungszustand vereinfachend durch seine geometrische Quantifizierung nach einer Idee von *L. M. Kachanov* [67] beschrieben.



Man betrachtet ein Flächenelement  $dA$  eines geschädigten Körpers mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$ . Der Flächenanteil der Mikrorisse oder Poren wird als  $dA_D$  bezeichnet. Auf dieser Basis kann die vom Normalenvektor  $\mathbf{n}$  abhängige Schädigung als Verhältnis der geschädigten zu den ungeschädigten Flächen gedeutet werden:

$$D(\mathbf{n}) = \frac{dA_D}{dA} \quad \text{mit} \quad 0 \leq D(\mathbf{n}) \leq 1. \quad (2.36)$$

In Übereinstimmung mit der Anschauung liegt für  $D(\mathbf{n}) = 0$  ein ungeschädigtes und für  $D(\mathbf{n}) = 1$  ein völlig geschädigtes Material vor. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die eingeführten Schädigungsvariablen insbesondere beim Einsatz numerischer Verfahren (z. B. Finite-Elemente-Methode, Finite Differenzen-Methode, ...) eine integrale Größe darstellen. Auftretende Spannungen, Verzerrungen und der Schädigungszustand sind als Mittelwert über ein repräsentatives Volumenelement zu verstehen. Die Problemdiskretisierung hat maßgeblichen Einfluss auf die Schadensquantifizierung. Die Mittelwertbildung kann als ein Grund dafür angesehen werden, dass vollkommenes Versagen „bei realen Werkstoffen allerdings schon bei  $D = 0,2 \dots 0,5$  [67]“ eintritt.

Wird in Analogie zu Gleichung (2.16) die auf der infinitesimalen Schnittfläche wirkende Kraft auf die effektiv wirkende Fläche

$$dA^{eff} = dA - dA_D = (1 - D)dA \quad (2.37)$$

bezogen, so wird der effektive Spannungsvektor  $\mathbf{t}^{eff}$  mit

$$\mathbf{t}^{eff} = \frac{\mathbf{t}}{1 - D} \quad (2.38)$$

bestimmt.

Sind sowohl  $\mathbf{t}$  bzw.  $\mathbf{t}^{eff}$  als auch  $D$  von der Schnitttrichtung, d. h. vom Normalenvektor  $\mathbf{n}$  abhängig, so liegt eine anisotrope Schädigung vor. Bei isotroper Schädigung nimmt die Schädigungsvariable in allen Richtungen den selben Wert an. Der Schädigungstensor in Gleichung (2.35) vereinfacht sich zu

$$\mathbf{D} = D\mathcal{I} \quad (2.39)$$

mit der skalaren Schädigungsvariablen  $D$  und dem vierstufigen Einheitstensor  $\mathcal{I}$ .

Der effektive Spannungszustand  $\sigma_{ij}^{eff}$  kann dann ausgehend vom Spannungszustand im ungeschädigten Zustand  $\sigma_{ij}$  und von der Schädigungsvariablen  $D$  zu

$$\sigma_{ij}^{eff} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D} \quad (2.40)$$

bestimmt werden.

Im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik wird zur Beschreibung der Stoffgesetze i. A. angenommen, dass die effektiven Spannungen  $\sigma_{ij}^{eff}$  in einem geschädigten Material die selben Verzerrungen hervorrufen wie  $\sigma_{ij}$  in einem ungeschädigten Material. Für ein isotrop geschädigtes elastisches Material wird das Stoffgesetz im geschädigten Zustand durch Äquivalenzbetrachtung

$$\varepsilon_{kl} = \frac{\sigma_{ij}}{C_{ijkl}^0} = \frac{\sigma_{ij}^{eff}}{(1-D)C_{ijkl}^0} \quad (2.41)$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (2.35) erhalten.

## 2.2 Finite Elemente Methoden

### 2.2.1 Differentielle Formulierung

Die Berechnung kontinuierlicher Systeme führt in einem ersten Schritt zu einer Problemformulierung mit Hilfe von Differentialgleichungen und in einem zweiten Schritt zur Ermittlung der Lösungsfunktionen des Gleichungssystems. *Bathe* [18] unterscheidet, ausgehend von der allgemeinen Differentialgleichung im Bereich  $(x, y)$

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.42)$$

in Abhängigkeit von den Koeffizienten drei grundlegende Typen:

$$B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{elliptisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ > 0 & \text{hyperbolisch} \end{cases} \quad (2.43)$$

Diese Charakterisierung des Differentialgleichungssystems hat nicht nur Bedeutung für die Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens, sondern ermöglicht auch eine direkte Zuordnung zu verschiedenen physikalischen Problemfeldern. Entsprechend Gleichung (2.43) beschreibt Gleichung (2.42) in ihrer einfachsten Form die *Laplace'sche* Gleichung, die Wärmeleitungsgleichung oder die Wellengleichung.

Analytische Verfahren zur Bestimmung der Lösungsfunktion von Gleichung (2.42) können beispielsweise [118, 119] entnommen werden. Ihr Einsatz beschränkt sich jedoch

auf verhältnismäßig einfache Systeme [18], insbesondere mit einfachen Randbedingungen. Baupraktisch relevante Problemstellungen zeichnen sich jedoch häufig durch mannigfaltige Kopplungsbeziehungen und mathematisch schwer zu beschreibende Randbedingungen aus.

Mit der Erfindung des Digitalrechners durch *Konrad Zuse* (1910 - 1995) wurde die Entwicklung neuer und verbesserter Verfahren zur Berechnung von Tragstrukturen im gesamten Ingenieurwesen möglich. Vor allem die „Finite-Elemente-Methode“ (der Begriff Finite-Elemente wurde 1960 von *Clough* eingeführt), sowie Verfahren zur Lösung größerer Gleichungssysteme bilden seit etwa 45 Jahren die Voraussetzung zur detaillierten numerischen Analyse komplexer Systeme.

### 2.2.2 Approximative Lösungsverfahren

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweise Lösung, insbesondere elliptischer partieller Differentialgleichungen mit Randbedingungen. Sie basiert auf dem *Ritz-Galerkin*-Verfahren, ein Verfahren, das zu der Gruppe der *Ritz*-Verfahren zählt. Bei diesem Verfahren wird das zu lösende Differentialgleichungssystem in eine schwache Form überführt. Diese schwache Form ergibt sich durch Multiplikation der Differentialgleichung mit einer Testfunktion  $v \in \mathcal{V}$  und anschließender Integration über das gesamte Gebiet. Wählt man den Funktionsraum  $\mathcal{V}$  derart, dass er alle Funktionen enthält, so entspricht die schwache Form der starken Form. Dies bedeutet, dass die partielle Differentialgleichung exakt erfüllt wird. I. A. wird der Funktionsraum  $\mathcal{V}$  lediglich einen Teilraum des Raumes aller Funktionen abbilden. Für die in ihm enthaltenen Funktionen muss gefordert werden, dass sie den Randbedingungen genügen. Dabei führt das *Ritz-Galerkin*-Verfahren in der Regel auf ein stark gekoppeltes Gleichungssystem für die in den Ansätzen enthaltenen Parameter.

Bei der Finite-Elemente-Methode wird zur Bestimmung einer näherungsweise Lösung ebenfalls eine Formulierung in der schwachen Form benutzt. Im Gegensatz zum *Ritz-Galerkin*-Verfahren wird jedoch die Ansatzfunktion nicht über das gesamte Gebiet, sondern bereichsweise innerhalb der finiten Elemente betrachtet. Die Elemente werden durch Konsistenzbedingungen an Rändern verknüpft. Dadurch wird das Gleichungssystem teilweise entkoppelt. Die Lösung eines Differentialgleichungssystems wird in die Lösung eines (nichtlinearen) Gleichungssystems überführt. Eine ausführliche Darstellung der Finite-

Elemente-Methode ist beispielsweise in [146, 18] zu finden.

## 2.3 Lösung linearer Gleichungssysteme

### 2.3.1 Allgemeines

Nichtlineare Gleichungssysteme können beispielsweise infolge zeitlicher Abhängigkeiten und geometrischer bzw. materieller Nichtlinearitäten auftreten. Derartige Gleichungssysteme werden i. A. mit Hilfe iterativer Verfahren (z. B. *Newton-Raphson*-Verfahren) behandelt, wobei in jedem Schritt ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist.

Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist daher die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{2.44}$$

mit der regulären Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und der rechten Seite  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

Das Gleichungssystem (2.44) wird durch Aggregation der Elementmatrizen der finiten Elemente (vgl. Abschnitt 2.2.2) erhalten. Im Rahmen der Modellierung strukturmechanischer Problemstellungen enthält der Vektor  $\mathbf{b}$  eingeprägte Kraftgrößen, d. h. die äußeren Einwirkungen auf das Tragwerk. Der gesuchte Vektor  $\mathbf{x}$  beschreibt die Knotenverschiebungen und -verdrehungen der finiten Elemente infolge der Einwirkung  $\mathbf{b}$ . Die Matrix  $\mathbf{A}$  wird als Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Ihre Einträge geben den Widerstand des Rechenmodells gegen Verschiebungen und Verdrehungen an. Die Matrix  $\mathbf{A}$  wird durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

- $\mathbf{A}$  ist symmetrisch,
- $\mathbf{A}$  ist positiv definit, d. h.  $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0 \forall \mathbf{x} \neq 0$ ,
- $\mathbf{A}$  ist nicht singulär und
- $\mathbf{A}$  ist i. A. schwach besetzt.

Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems (2.44) lassen sich in direkte und iterative Verfahren unterscheiden.

### 2.3.2 Direkte Verfahren

„Unter einem direkten Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems versteht man eine Rechenvorschrift, die unter Vernachlässigung von Rundungsfehlern die exakte Lösung in endlich vielen Schritten ermittelt.“ [105]

Die Grundidee direkter Verfahren ist eine äquivalente Umformung der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$ , i. A. in ein Matrizenprodukt, das effizient durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen gelöst werden kann.

Für symmetrische positiv definite Matrizen  $\mathbf{A}$  lässt sich die Existenz einer eindeutigen Zerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{L} \tag{2.45}$$

mit der unteren Dreiecksmatrix  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zeigen. Gleichung (2.45) wird als *Cholesky-Zerlegung* bezeichnet. Eine algorithmenorientierte Formulierung der *Cholesky-Zerlegung* sowie die anschließende Vorwärts- und Rückwärtselimination kann beispielsweise *Meister* [105] entnommen werden.

Die Zerlegung der Matrix  $\mathbf{A}$  (Gleichung (2.45)) benötigt ca.  $\frac{n^3}{6}$  Multiplikationen,  $\frac{n^2}{2}$  Divisionen und  $\frac{n}{3}$  Wurzelberechnungen [105]. Ein effizienter Einsatz des Verfahrens ist daher für kleine bis mittelgroße Gleichungssysteme zu erwarten.

Insbesondere im Rahmen der Bestimmung der Tragfähigkeit von Brücken können direkte Verfahren zielführend eingesetzt werden. Die Ermittlung der maßgebenden Beanspruchungen im Tragwerk erfolgt i. A. durch sukzessive Auswertung diskreter Laststellungen und anschließender Überlagerung der Beanspruchungen im Tragwerk. Da sich bei linear elastischen Berechnungen die Steifigkeitsmatrix der Struktur für die einzelnen Laststellungen nicht ändert, kann die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix (Gleichung (2.45)) zu Beginn der Berechnung einmal durchgeführt werden. Die Auswertung der einzelnen Laststellungen erfordert dann nur noch die Durchführung der weitaus weniger aufwändigen Vorwärts- und Rückwärtselimination. Dies kann u. U. zu einer Reduktion der Gesamtberechnungsdauer führen.

### 2.3.3 Iterative Verfahren

Im Gegensatz zu den direkten Verfahren ermitteln die in diesem Abschnitt dargestellten Verfahren die Lösung des Gleichungssystems (2.44) lediglich näherungsweise. Iterative

Näherungsverfahren ermitteln sukzessive Näherungen  $\mathbf{x}_m$  an die exakte Lösung  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  durch wiederholtes Ausführen einer festgelegten Rechenvorschrift [105]

$$\mathbf{x}_{m+1} = \phi(\mathbf{x}_m, \mathbf{b}) \text{ mit } m = 0, 1, \dots \quad (2.46)$$

bei gegebenem Startvektor  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Iterative Verfahren können im Wesentlichen in Splitting-Methoden, Mehrgitter- und *Krylov*-Unterraum-Verfahren unterteilt werden.

Splitting-Methoden basieren auf einer Aufteilung der Matrix  $\mathbf{A}$  in der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2.47)$$

so dass sich aus Gleichung (2.44) das äquivalente System

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (2.48)$$

ergibt. Unter der Voraussetzung, dass die Matrix  $\mathbf{B}$  regulär ist, wird die iterative Rechenvorschrift (Gleichung (2.46)) der Splitting-Verfahren

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}_m + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \text{ mit } m = 0, 1, \dots \quad (2.49)$$

erhalten.

Geometrische Mehrgitterverfahren nutzen eine Hierarchie von gröber werdenden Diskretisierungen des finiten Elemente Modells zur effektiven Lösung von Gleichung (2.44). Im Gegensatz dazu können algebraische Mehrgitterverfahren direkt auf lineare Gleichungssysteme angewendet werden. Beide Verfahren sind im Grundsatz jedoch identisch. Ausgehend vom feinsten Gitter werden in einem (mehrstufigen) iterativen Verfahren Näherungslösungen und insbesondere das Residuum der Näherungslösung auf das nächst gröbere Gitter übertragen. Die Näherungslösungen werden dabei nur grob (d. h. mit wenigen Iterationszyklen) mit der Näherungslösung des vorherigen Gitters als Startvektor bestimmt und vor dem Übertrag (Restriktion) geglättet. Auf dem größten Gitter kann dann die Lösung numerisch exakt ermittelt werden. In einer erneuten absteigenden Sequenz werden die Lösung und der Approximationsfehler auf das jeweils feinere Gitter übertragen (prolongiert) und geglättet, bis auf dem feinsten Gitter schließlich die Lösung von Gleichung (2.44) vorliegt. Für eine detailliertere Darstellung des Verfahrens sei beispielsweise auf *Meister* [105] oder *Mense* [106] verwiesen.

*Krylov*-Unterraum-Verfahren gehören zur Klasse der Projektionsmethoden. Diese ermitteln Näherungslösungen  $\mathbf{x}_m \in \mathbf{x}_0 + K_m$  von Gleichung (2.44) unter der Berücksichtigung von

$$(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m) \perp L_m \quad (2.50)$$

mit beliebigen  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  und den  $m$ -dimensionalen Unterräumen  $K_m, L_m \subseteq \mathbb{R}^n$ . Gilt  $K_m = L_m$ , so liegt eine orthogonale Projektionsmethode vor und Gleichung (2.50) wird *Galerkin*-Bedingung genannt. Für  $K_m \neq L_m$  liegt eine schiefe Projektionsmethode vor und Gleichung (2.50) wird *Petrov-Galerkin*-Bedingung genannt. Wird für  $K_m$  speziell der *Krylov*-Unterraum

$$K_m = K_m(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{r}_0\} \quad (2.51)$$

gewählt, so wird mit  $K_m = L_m$  eine orthogonale *Krylov*-Unterraum-Methode erhalten. Eine solche Methode zur Lösung von Gleichung (2.44) für symmetrische positiv definite Matrizen  $\mathbf{A}$  ist die von *Hestens & Stiefel* [79] vorgestellte Methode der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren). Sie basiert auf einer Umformung des linearen Gleichungssystems (2.44) in eine Minimierungsaufgabe

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}. \quad (2.52)$$

Es kann nun gezeigt werden, dass der Lösungspunkt der Minimierungsaufgabe  $\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} F(\mathbf{x})$  der Lösung des Gleichungssystems (2.44) entspricht [105].

Das globale Minimum von Gleichung (2.52) wird iterativ durch Minimierung der Funktion  $F(\mathbf{x})$  entlang einer Folge von Suchrichtungen  $\{\mathbf{p}_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$  gefunden. Es konvergiert, unter Vernachlässigung von Rundungsfehlern, spätestens nach  $n$  Schritten. Die Suchrichtung  $\mathbf{p}_m$  des  $m$ -ten Schritts wird mit

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{r}_m + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \mathbf{p}_j \quad (2.53)$$

erhalten. Die Faktoren  $\alpha_j$  können aus der Orthogonalitätsbedingung (2.50) gewonnen werden. Mit der Anfangssuchrichtung  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$  spannen die Suchrichtungen dann den  $m+1$ -dimensionalen *Krylov*-Unterraum (Gleichung (2.51)) auf. Seine Dimension wird in jedem Iterationszyklus inkrementiert und dadurch die Genauigkeit der Lösung  $\mathbf{x}_m \in \mathbf{x}_0 + K_m$  sukzessive verbessert.

### 2.3.4 Präkonditionierer

Die Matrix  $\mathbf{A}$  (Gleichung (2.44)) kann durch skalare Größen charakterisiert werden. Neben dem Spektralradius eignet sich insbesondere die Konditionszahl der Matrix  $\mathbf{A}$  zur Beurteilung des Lösungsverhaltens der dargestellten Verfahren zur iterativen Lösung des Gleichungssystems (2.44). Mit der induzierten Matrixnorm  $\|\cdot\|_\alpha$  wird die Konditionszahl der Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  durch

$$\text{cond}_\alpha(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\|_\alpha \|\mathbf{A}^{-1}\|_\alpha \quad (2.54)$$

bestimmt. Unabhängig von der zugrunde liegenden induzierten Matrixnorm kann für eine beliebige reguläre Matrix  $\mathbf{A}$  und die Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  die Ungleichung

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \geq \text{cond}(\mathbf{I}) = 1 \quad (2.55)$$

formuliert werden.

Ohne Herleitung sei hier lediglich auf die Tatsache hingewiesen, dass sich eine kleine Konditionszahl günstig auf den Konvergenzverlauf beispielsweise des CG-Verfahrens auswirkt.

Das Ziel einer Präkonditionierung ist demnach eine äquivalente Umformung des Gleichungssystems (2.44)

$$\mathbf{P}_L \mathbf{A} \mathbf{P}_R \mathbf{x}^T = \mathbf{P}_L \mathbf{b} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_R \mathbf{x}^P \quad (2.57)$$

mit  $\mathbf{P}_L$  und  $\mathbf{P}_R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  unter der Bedingung

$$\text{cond}(\mathbf{P}_L \mathbf{A} \mathbf{P}_R) < \text{cond}(\mathbf{A}) \quad (2.58)$$

um die Konvergenz iterativer Verfahren zu beschleunigen. Ist lediglich  $\mathbf{P}_L \neq \mathbf{I}$ , so ist das Gleichungssystem linkspräkonditioniert, ist nur  $\mathbf{P}_R \neq \mathbf{I}$ , so ist es rechtspräkonditioniert und unterscheiden sich sowohl der Linkspräkonditionierer  $\mathbf{P}_L$  als auch der Rechtspräkonditionierer  $\mathbf{P}_R$  von der Einheitsmatrix, so heißt das Gleichungssystem beidseitig präkonditioniert.

Wegen Gleichung (2.55) erscheint eine links- bzw. rechtsseitige Präkonditionierung mit der inversen Matrix von  $\mathbf{A}$  als „optimale“ Maßnahme. Natürlich entspricht die Bestimmung



von  $\mathbf{A}^{-1}$  bereits der Lösung des Gleichungssystems und stellt somit einen trivialen Fall dar. Der Grundgedanke findet jedoch bei „approximativen inversen Präkonditionierern (AINV)“ Anwendung. Der Präkonditionierer  $\mathbf{P}$  muss dann lediglich  $\mathbf{P} \approx \mathbf{A}^{-1}$  erfüllen. Eine Möglichkeit der Konstruktion einer näherungsweise inversen Matrix zu  $\mathbf{A}$  kann aus

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{D} \quad (2.59)$$

abgeleitet werden. Die Matrix  $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n]$  muss dann aus konjugierten Richtungsvektoren  $\mathbf{z}_i$ , die den  $\mathbb{R}^n$  aufspannen, bestehen. Die Vektoren können beispielsweise mit einer *Gram-Schmidt*-Orthogonalisierung bestimmt werden. Die Matrix  $\mathbf{D}$  weist dann lediglich auf der Diagonale von Null verschiedene Einträge auf. Eine detaillierte Darstellung des AINV-Algorithmus sowie eine stabilisierte Variante (SAINV) ist *Benzi, Cullum & Tuma* [20] zu entnehmen.

Eine alternative Äquivalenzumformung des Gleichungssystems (2.44) kann mit Hilfe einer unvollständigen *Cholesky*-Zerlegung erreicht werden. Sei

$$\mathcal{M}^{\mathbf{A}} := \{(i, j) | a_{ij} \neq 0\} \quad (2.60)$$

die Besetzungsstruktur von  $\mathbf{A}$ , so kann die Zerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T + \mathbf{F} \quad (2.61)$$

mit der Bedingung

1.  $l_{ij} = 0$ , falls  $(i, j) \notin \mathcal{M}^{\mathbf{A}}$ ,
2.  $(\mathbf{L} \mathbf{L}^T)_{ij} = a_{ij}$  falls  $(i, j) \in \mathcal{M}^{\mathbf{A}}$  und

angegeben werden. Existiert eine solche Zerlegung, so wird sie unvollständige *Cholesky*-Zerlegung (engl.: incomplete *Cholesky* (IC)) genannt.

Es existieren zahlreiche Varianten der oben dargestellten Grundversion des IC. Einige davon heben Bedingung 1 auf und ersetzen sie durch alternative Regeln, um zu entscheiden, ob ein Element  $l_{ij}$  zu Null gesetzt wird oder nicht. Häufig wird ein Schwellenwert (engl.: threshold) in Verbindung mit einer maximalen Anzahl von Einträgen  $l_{ij} \neq 0$  je Spalte als Steuerparameter eingesetzt. Mit ihnen kann die Besetzungsstruktur der Matrix  $\mathbf{L}$  gesteuert werden. Je größer die Anzahl der Matrixeinträge  $l_{ij} \neq 0$  wird, desto größer

wird der nötige Speicherplatz und desto mehr steigt der Berechnungsaufwand der Präkonditionierung bei gleichzeitiger Reduktion der eigentlichen iterativen Gleichungslösung. Diese Varianten werden mit ICT bezeichnet [16].

Obwohl IC bzw. ICT erfolgreich in der Praxis eingesetzt werden, kann die Existenz einer Zerlegung lediglich für einige spezielle Matrix-Klassen (M-Matrix, H-Matrix, diagonaldominant) bewiesen werden [105]. Im Rahmen baustatischer Problemstellungen, insbesondere auf der Basis einer finiten Elemente Formulierung ist die Matrix  $\mathbf{A}$  i. A. keiner dieser Klassen zuzuordnen. Dadurch kann die Stabilität der iterativen Gleichungslösung nicht garantiert werden. Exemplarisch seien hier zwei Modifikationen des ICT zu Erhöhung der Stabilität angegeben.

Der „shifted“ ICT (SICT) [104] nutzt die Umformung

$$\mathbf{A} = (1 + \alpha)\mathbf{D} + \mathbf{B} \tag{2.62}$$

mit der Diagonalmatrix  $\mathbf{D} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  und  $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$ , um  $\mathbf{A}$  in eine äquivalente diagonaldominante Matrix umzuformen und dadurch die Existenz einer Zerlegung zu gewährleisten.

Ein anderer Weg, die Stabilität der Präkonditionierung und der nachgeschalteten iterativen Gleichungslösung zu gewährleisten, besteht darin, die unvollständige Zerlegung derart zu wählen, dass die präkonditionierte Matrix positiv definit bleibt. Darauf zielt der „robuste“ IC (RICT) [13] ab. Wird in einem Schritt der Zerlegung ein Element  $l_{ij}$  von  $\mathbf{L}$  zu Null gesetzt, so wird  $|l_{ij}|$  zu den korrespondierenden Diagonalelementen von  $\mathbf{A}$  ( $a_{ii}$  und  $a_{jj}$ ) addiert, wodurch die Eigenschaft der positiven Definitheit erhalten bleibt und ein vorzeitiger Abbruch der Gleichungslösung vermieden wird.

## Kapitel 3

# Mathematische Beschreibung der Unbestimmtheit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer Bewertungsmethode für beschädigten Brücken unter expliziter Berücksichtigung auftretender Unbestimmtheiten. Die mathematische Beschreibung der Unbestimmtheiten hängt dabei von ihren Ursachen und Quellen ab. Dieser Abschnitt hat zum Ziel, die wesentlichen Grundlagen des Umgangs mit unbestimmten Daten und Informationen zusammenzufassen.

In Abschnitt 3.1 werden daher zunächst grundlegende Gedanken zur Charakterisierung (un)bestimmter Informationen dargestellt. Dieser Abschnitt dient darüber hinaus zur Festlegung des Vokabulars, das im weiteren Verlauf der Arbeit in Verbindung mit unbestimmten Daten und Informationen verwendet wird.

In Abschnitt 3.2 wird zunächst die „Theorie der unscharfen Maße“ als übergeordnetes Prinzip zur Verarbeitung unbestimmter Daten und Informationen eingeführt.

In den Abschnitten 3.3 bis 3.5 werden anschließend ausgewählte Unsicherheitstheorien behandelt, die sich aus diesem grundlegenden Prinzip ableiten lassen. Neben einer Beschreibung der theoretischen Grundlagen werden diese Theorien auch hinsichtlich der in Abschnitt 3.1 festgelegten Charakterisierung unbestimmter Informationen unterteilt und bewertet.

In Abschnitt 3.6 wird schließlich die „Theorie der unscharfen Mengen“ als Erweiterung der klassischen Mengentheorie eingeführt. Neben einer Einordnung in die in Abschnitt 3.1 festgelegte Systematik werden wesentliche Operationen mit unscharfen Mengen dargestellt.

### 3.1 Charakterisierung (un)bestimmter Informationen - Begriffsdefinitionen

„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“

*Albert Einstein* [46]

Mit dieser Aussage unterstrich *Albert Einstein* die prinzipielle Unfähigkeit genauer deterministischer Prognosen eines Systemzustandes. Im Rahmen des Determinismus wird davon ausgegangen, dass bei bekannten Naturgesetzen und dem vollständig bekannten Zustand eines Systems der weitere Ablauf aller Ereignisse prinzipiell vorherbestimmt ist. Bei der Beschreibung physikalischer und chemischer Vorgänge sind i. A. weder die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten vollständig bekannt bzw. modellierbar noch kann der Zustand des Systems exakt beschrieben werden. Den letzteren Sachverhalt formulierte *Werner Karl Heisenberg* (\* 5. Dezember 1901 in Würzburg; † 1. Februar 1976 in München) in der nach ihm benannten Unschärferelation. Die Ungleichung [78]

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{h}{4 \cdot \pi} \tag{3.1}$$

gibt den Zusammenhang von den Standardabweichungen bei der Bestimmung des Ortes  $x$  und des Impulses  $p$  einer Teilchengesamtheit mit dem *Planck*'schen Wirkungsquantums an. Die rechte Seite der Ungleichung ist eine Konstante größer Null. Daher besagt die Ungleichung: Wird ein Wert (z. B. der Ort) „exakt“ ( $\lim \sigma_x \rightarrow 0$ ) ermittelt, dann wird gleichzeitig die korrespondierende Messgröße (z. B. der Impuls) ungenau ( $\lim \sigma_p \rightarrow \infty$ ). Der Zustand, beschrieben durch beide Größen, kann daher nicht beliebig genau angegeben werden; er bleibt (teilweise) unbestimmt.

In einem allgemeineren Sinne kann eine Information (z. B. eine Aussage, ein Zustand, der Wert einer Variablen, ...) als bestimmt oder unbestimmt angesehen werden. Sie ist bestimmt, falls sie präzise und sicher ist, sonst ist sie unbestimmt. Mit dem Begriff Unbestimmtheit werden viele Termini in Verbindung gebracht: Unsicherheit, Unschärfe, Unklarheit, Unbekanntheit, Doppelsinn, Mehrdeutigkeit, Unwissenheit, Zufall, etc. [120]. Im Rahmen dieser Arbeit wird er als Überbegriff der komplementären Konzepte Impräzision und Unsicherheit benutzt. *Dubois & Prade* [38] und *Smets* [127] betrachten dabei

Impräzision als Eigenschaft der Information während sie Unsicherheit dem Beobachter zuschreiben, der den Wahrheitsgehalt einer Information bewertet.

Die Begriffe Impräzision und Ungenauigkeit werden synonym verwendet. Eine Information wird als ungenau angesehen, wenn sie mehr als einen Zustand der Realität beschreibt. Aus mengentheoretischer Sicht stimmt eine genaue Information mit der *einen* Realität überein

$$\Omega = \{\omega\}, \quad (3.2)$$

während eine ungenaue Information mehrere mögliche Realitäten

$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\} \quad (3.3)$$

unterstützt. Welche der Möglichkeiten davon die tatsächliche Wirklichkeit wiedergibt, lässt sich auf Grund der vorhandenen Information nicht festlegen. Eine genaue Information ist in diesem Sinne nicht mehr weiter unterteilbar [38]. Das Konzept der Ungenauigkeit hängt von der nötigen Granularität der Problemstellung ab. Beispielsweise ist die Angabe des Baujahrs einer Brücke für die Bestimmung der für die Errichtung verwendeten Normengeneration ausreichend, während die Angabe des Jahres der Fertigstellung für die Planung der Eröffnungsfeier unzulänglich ist.

Impräzision kann hinsichtlich ihrer Dimensionen weiter unterteilt werden. *Dubois & Prade* [38] führen als Ausprägungen der Impräzision die Begriffe Ambiguität oder Mehrdeutigkeit, Vagheit und Unschärfe ein. Mehrdeutigkeit führen sie dabei ausschließlich auf konkurrierende Bedeutungen der Sprache, z. B. infolge von Homonymie zurück. Die Bedeutung des Wortes „Kiefer“ ist im Kontext der Botanik (Kiefer = Baum) eine andere als in der Anatomie (Kiefer = Teil des Gesichtsschädels). Sie argumentieren, dass diese Mehrdeutigkeit durch Festlegung des Kontextes aufgehoben werden kann und gehen in der Folge davon aus, dass der Kontext im Rahmen der Problemstellung eindeutig bekannt ist. Die Quellen von Vagheit und Unschärfe sehen sie in einer fehlenden klaren Festlegung der Grenzen der Menge  $\Omega$  (Gleichung (3.3)). *Smets* [127] hingegen sieht Vagheit und Unschärfe als zwei Formen der Impräzision. Er setzt Vagheit und Ambiguität gleich.

In dieser Arbeit werden beide Ansichten kombiniert. Impräzision wird als Folge der Aspekte Ambiguität, Vagheit und Unschärfe verstanden. Ambiguität wird, *Dubois & Prade* folgend, ausschließlich als sprachliche Mehrdeutigkeit definiert und daher nicht weiter behandelt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird dem Begriff Vagheit eine spezielle Form der Mehrdeutigkeit zugewiesen. Eine Information ist in diesem Sinne vage, falls sie nicht weiter präzisierbar ist und nicht auf eine sprachliche Mehrdeutigkeit zurückzuführen ist. Dies sind typischerweise fehlerbehaftete Messungen. Beispielsweise wird die Genauigkeit der Bestimmung der Betonüberdeckung mit Hilfe des „PS 200 Ferrosan“ bei unbekanntem Durchmesser des Bewehrungsstahls und einer Tiefenmessung von 60 mm mit  $\pm 4$  mm angegeben.

Unschärfe tritt immer dann auf, wenn keine klaren Abgrenzungen gefunden werden können. Dies kann der Fall sein, wenn ein Begriff einen Bedeutungsraum umschließt, für den Fälle gefunden werden können, die weder eindeutig dazu noch nicht dazu gezählt werden können. Dieser verschwommene Übergang vom „Dazugehören“ zum „Nicht-Dazugehören“ lässt sich mit Hilfe des „Sorites“-Paradoxon veranschaulichen. „Sorites“ ist das altgriechische Wort für Haufen. Das Paradoxon ist ein Trugschluss in der Form eines Ketten schlusses. Zu Beginn sei ein Haufen Sand gegeben. Wird ein Sandkorn entfernt, so ist der verbleibende Rest immer noch ein Haufen. Dasselbe gilt für das nächste entfernte Sandkorn. Irgendwann wird das letzte Sandkorn entnommen und der Haufen ist verschwunden. Es lässt sich jedoch nicht das entscheidende Sandkorn identifizieren, welches für den Verlust der Eigenschaft „Haufen“ verantwortlich ist. Der Übergang vom „Haufen“ zum „Nicht-Haufen“ ist kontinuierlich.

Die dargestellten Begriffsdefinitionen für Vagheit und Unschärfe weichen bewusst von denen in der Philosophie und Linguistik verwendeten ab. Dort wird üblicherweise der Begriff Vagheit mit nicht klar abgegrenzten Begriffen in Verbindung gebracht und teilweise synonym mit dem Begriff Unschärfe benutzt. Mit der abweichenden Begriffsdefinition soll die Nähe unscharfer („fuzzy“) linguistischer Ausdrücke zu den unscharfen Mengen („fuzzy sets“, Abschnitt 3.6) ausgedrückt werden.

„Im folgenden wird mit Unsicherheit generell die unvollkommene Informationslage eines Entscheiders bezeichnet, die eine oder mehrere Komponenten des Entscheidungsproblems betreffen kann [109].“ Im Gegensatz zur Impräzision ist Unsicherheit damit keine Eigenschaft der Information selbst, sondern bezeichnet eine nicht eindeutige Auswahl aus mehreren Alternativen. Unsicherheit wird üblicherweise hinsichtlich ihrer Ursache in aleatorische und epistemische Unsicherheit unterteilt.

Aleatorische Unsicherheit wird auch als stochastische, nicht-reduzierbare, inhärente Unsicherheit oder als Variabilität bezeichnet. Sie folgt aus der Tatsache, dass sich ein betrachtetes System zufällig verhalten kann. Welche Zustände das System einnimmt, ist nicht

vorhersehbar. Diese Unsicherheit lässt sich nicht durch zusätzliche Informationen über das System reduzieren; sie ist nicht-reduzierbar. Aleatorische Unsicherheit wird in der Literatur auch mit dem Begriff der objektiven Unsicherheit in Verbindung gebracht. Die Unsicherheit in der Prognose, welcher der Systemzustände eingenommen wird, wird als objektiv bezeichnet, da sie unabhängig von der Einschätzung des Beobachters angesehen wird sondern, lediglich vom Aufbau des Experiments abhängt.

Epistemische Unsicherheit hingegen hängt vom Kenntnisstand des Beobachters ab. Sie wird daher auch als subjektive Unsicherheit bezeichnet. Kann der Kenntnisstand über das betrachtete System verdichtet werden, so nimmt die Unsicherheit ab. Daher wird sie auch als reduzierbare Unsicherheit bezeichnet. Die Unterteilung in stochastische und epistemische Unsicherheit ist jedoch keineswegs unumstritten. Ein alternativer Ansatz geht davon aus, dass auch stochastische Unschärfe auf einem prinzipiellen Informationsmangel beruht, d. h. dem Betrachter die eigentlichen Gründe für die Unsicherheit verborgen sind. Diese Fragestellung ist Gegenstand kontroverser philosophischer Diskussionen.

Impräzision und Unsicherheit existieren nicht unabhängig voneinander. Sie sind komplementäre Konzepte zur Beschreibung unbestimmter Informationen. Im Rahmen dieser Arbeit werden sie weniger als disjunkte Attribute von Information gesehen, sondern betonen vielmehr die betrachtete Ursache für die Unmöglichkeit einer deterministischen Aussage. Oftmals stehen die beiden Konzepte in direkter Wechselwirkung. *Dubois & Prade* [38] sehen eine negative Korrelation zwischen ihnen: Die zunehmende Präzisierung des Informationsgehaltes führt zu einer Erhöhung der Unsicherheit bzgl. des Wahrheitsgehaltes einer Aussage, und umgekehrt. Andererseits induziert Impräzision Unsicherheit bei der Auswahl verschiedener Alternativen.

Im Folgenden werden mathematische Ansätze zur Verarbeitung unbestimmten Wissens dargestellt. Die Systematik und Notation sind dabei an Ausführungen in [38, 15, 91, 125] angelehnt. Die mathematischen Theorien, welche nach *George J. Klir* [91] derzeit praktikabel eingesetzt werden können, sind die Evidenztheorie, die Wahrscheinlichkeitstheorie, die Möglichkeitstheorie und die Theorie der unscharfen Mengen. Diese Ansätze sind teilweise miteinander verknüpft. Abbildung 3.1 zeigt ihre Verwandtschaftsbeziehungen.

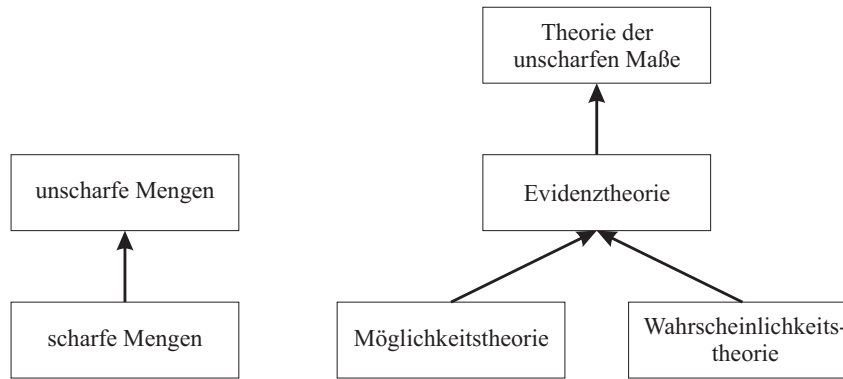


Abbildung 3.1: Beziehungen zwischen mengentheoretischen und maßtheoretischen Ansätzen

## 3.2 Theorie der unscharfen Maße

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist eine beliebige (mehrdimensionale) scharfe Grundmenge  $\underline{\mathbf{X}}$ . Betrachtet wird nun ein Mengensystem  $\underline{\mathcal{C}}$  mit

$$\underline{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{P}(\underline{\mathbf{X}}) = 2^{\underline{\mathbf{X}}} \quad (3.4)$$

über dessen Elemente eine reellwertige Mengenfunktion

$$g : \underline{\mathcal{C}} \mapsto [0; 1] \quad (3.5)$$

definiert wird. Die Mengenfunktion  $g$  ist ein unscharfes Maß auf  $\langle \underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathcal{C}} \rangle$  wenn

$$g(\emptyset) = 0 \text{ falls } \emptyset \in \underline{\mathcal{C}}, \quad (3.6)$$

$$g(\underline{\mathcal{C}}) = 1 \text{ und} \quad (3.7)$$

$$\forall \underline{A}_i, \underline{A}_j \in \underline{\mathcal{C}} : \underline{A}_i \subseteq \underline{A}_j \Rightarrow g(\underline{A}_i) \leq g(\underline{A}_j) \quad (3.8)$$

gilt. Für nichtendliche Mengensysteme  $\underline{\mathcal{C}}$  wird zudem noch die Stetigkeit bezüglich der Mengeninklusion gefordert. Für jede steigende Folge  $\underline{A}_1 \subseteq \underline{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \underline{A}_n$  mit  $\underline{A}_i \in \underline{\mathcal{C}}$ , die gegen ein Element von  $\underline{\mathcal{C}}$  strebt, muss

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(\underline{A}_i) = g\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i\right) \quad (3.9)$$

gelten. Analog dazu muss für jede fallende Folge  $\underline{A}_1 \supseteq \underline{A}_2 \supseteq \dots \supseteq \underline{A}_n$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(\underline{A}_i) = g\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i\right) \quad (3.10)$$



erfüllt sein.

In praktischen Anwendungen wird das Mengensystem  $\underline{\mathcal{C}}$  häufig durch eine Sigma-Algebra ersetzt. Ein Mengensystem  $\underline{\mathcal{F}} \in \mathcal{P}(\underline{\mathbf{X}})$  heißt Algebra, wenn folgende Eigenschaften gelten:

$$\emptyset \in \underline{\mathcal{F}} \tag{3.11}$$

$$\underline{A} \in \underline{\mathcal{F}} \Rightarrow \underline{A}^C \in \underline{\mathcal{F}} \tag{3.12}$$

$$\underline{A}, \underline{B} \in \underline{\mathcal{F}} \Rightarrow \underline{A} \cup \underline{B} \in \underline{\mathcal{F}} \tag{3.13}$$

$\underline{\mathcal{F}}$  heißt  $\sigma$ -Algebra  $\underline{\mathcal{S}}$ , wenn die Gleichungen (3.11) und (3.12) gelten und zusätzlich

$$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots \in \underline{\mathcal{F}} \Rightarrow \bigcup_{\underline{A}_k} \in \underline{\mathcal{F}} \tag{3.14}$$

erfüllt ist. Das Tripel  $[\underline{\mathbf{X}}; \underline{\mathcal{S}}; g]$  wird in Analogie zum Wahrscheinlichkeitsraum als unscharfer Maßraum bezeichnet.

Aus der Monotoniebedingung (Gleichung (3.8)) kann gefolgert werden, dass für alle aus dieser Definition abgeleiteten Maße

$$g(\underline{A} \cup \underline{B}) \geq \max \{g(\underline{A}), g(\underline{B})\} \tag{3.15}$$

und

$$g(\underline{A} \cap \underline{B}) \leq \min \{g(\underline{A}), g(\underline{B})\} \tag{3.16}$$

gelten.

### 3.3 Evidenztheorie

Die Evidenztheorie [125], in der Literatur auch als *Dempster-Shafer*-Theorie bekannt, basiert auf zwei dualen unscharfen Maßen:

- Glaubwürdigkeit (engl.: belief function):  $Bel : 2^{\underline{\mathbf{X}}} \rightarrow [0; 1]$
- Plausibilität (engl.: plausibility function):  $Pl : 2^{\underline{\mathbf{X}}} \rightarrow [0; 1]$

Zur Konstruktion dieser Maße führt *Shafer* für endliche Grundbereiche  $\underline{\mathbf{X}}$  eine grundlegende Wahrscheinlichkeitszuweisung  $m$  ein. Die Menge  $\underline{\mathbf{X}}$  repräsentiert den Kenntnisstand

über einen bestimmten Sachverhalt. Alle ihre Teilmengen  $\underline{A}$  formalisieren sachbezogene Aussagen bzw. Behauptungen in Form einer eins zu eins Relation mit den Methoden der Mengenlehre. Mit Hilfe der Mengenfunktion  $m$  werden diesen Teilmengen  $\underline{A} \in 2^{\underline{X}}$  grundlegende Wahrscheinlichkeiten (engl.: basic probability numbers) zugewiesen. Diese werden als Grad des Vertrauens in den Wahrheitsgehalt der zu den Mengen korrespondierenden Aussagen bzw. Behauptungen interpretiert. Für die Funktion  $m : 2^{\underline{X}} \rightarrow [0; 1]$  wird

$$m(\emptyset) = 0 \quad (3.17)$$

und

$$\sum_{A \subset 2^{\underline{X}}} m(A) = 1 \quad (3.18)$$

gefordert. Die Mengen  $\underline{A}$ , für die  $m(\underline{A}) > 0$  gilt, werden als Herdmengen bezeichnet. Sie müssen weder disjunkt sein noch  $\underline{X}$  vollständig überdecken. Die Wertzuweisung  $m(\underline{A})$  bezieht sich ausschließlich auf die Menge  $\underline{A}$ . Zusätzliches Vertrauen in den Wahrheitsgehalt von Aussagen, die mit Teilmengen  $\underline{B}$  von  $\underline{A}$  verknüpft sind, müssen durch andere Wertzuweisungen  $m(\underline{B})$  realisiert werden. Der gesamte mit  $\underline{A}$  verknüpfte Vertrauensgrad wird dann mit

$$Bel(\underline{A}) = \sum_{B \subset A} m(B) \quad (3.19)$$

erhalten.

Die Festlegung von  $m(\underline{A})$  lässt im Rahmen der Evidenztheorie den Vertrauensgehalt in die komplementäre Aussage  $\underline{A}^C$  unbestimmt. Die grundlegende Wahrscheinlichkeitszuweisung drückt also implizit den Kenntnisstand über den betrachteten Sachverhalt aus. Totale Unkenntnis wird beispielsweise durch  $m(\underline{X}) = 1$  ausgedrückt. *Shafer* betont die epistemische Natur des Mengensystems  $2^{\underline{X}}$  bzw. die damit verknüpften Propositionen. Er bezeichnet daher die Gesamtheit der Herdmengen in Verbindung mit der grundlegenden Wahrscheinlichkeitszuweisung als Evidenzgesamtheit ( $\text{supp } m, m$ ).

Mit einer gegebenen grundlegenden Wahrscheinlichkeitszuweisung können nun für alle Mengen  $\underline{A} \in 2^{\underline{X}}$  die eingangs erwähnten unscharfen Maße Glaubwürdigkeit

$$Bel(\underline{A}) = \sum_{B|B \subset A} m(B) \quad (3.20)$$

und Plausibilität

$$Pl(\underline{A}) = \sum_{B|B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (3.21)$$

bestimmt werden. Der Glaubwürdigkeitsgrad  $Bel(\underline{A})$  wird also durch alle Sachverhalte  $\underline{B}$  determiniert, die  $\underline{A}$  implizieren, d. h. notwendig machen. Der Plausibilitätsgrad  $Pl(\underline{A})$  hingegen wird ermittelt, indem alle Mengen  $\underline{B}$  betrachtet werden, die  $\underline{A}$  ermöglichen. Für das Maß der Glaubwürdigkeit gilt neben  $Bel(\emptyset) = 0$  und  $Bel(\underline{\mathbf{X}}) = 1$  für alle  $\underline{A}_i \in 2^{\underline{\mathbf{X}}}$ :

$$\begin{aligned}
Bel(\underline{A}_1 \cup \underline{A}_2 \cup \dots \cup \underline{A}_n) \geq & \sum_j Bel(\underline{A}_j) \\
& - \sum_{j < k} Bel(\underline{A}_j \cap \underline{A}_k) \\
& + \sum_{j < k < l} Bel(\underline{A}_j \cap \underline{A}_k \cap \underline{A}_l) \\
& \vdots \\
& + (-1)^{n+1} Bel(\underline{A}_1 \cap \underline{A}_2 \cap \dots \cap \underline{A}_n)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Das Maß der Glaubwürdigkeit ist für disjunkte Mengen  $\underline{A}_i$  und  $\underline{A}_j$  „superadditiv“:

$$Bel(\underline{A}_i \cup \underline{A}_j) \geq Bel(\underline{A}_i) + Bel(\underline{A}_j). \tag{3.23}$$

Das duale Maß der Plausibilität ist durch die Eigenschaften  $Pl(\emptyset) = 0$ ,  $Pl(\underline{\mathbf{X}}) = 1$  und

$$\begin{aligned}
Pl(\underline{A}_1 \cap \underline{A}_2 \cap \dots \cap \underline{A}_n) \leq & \sum_j Pl(\underline{A}_j) \\
& - \sum_{j < k} Pl(\underline{A}_j \cup \underline{A}_k) \\
& + \sum_{j < k < l} Pl(\underline{A}_j \cup \underline{A}_k \cup \underline{A}_l) \\
& \vdots \\
& + (-1)^{n+1} Pl(\underline{A}_1 \cup \underline{A}_2 \cup \dots \cup \underline{A}_n)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

für alle  $\underline{A}_i \in 2^{\underline{\mathbf{X}}}$  definiert. Es ist für disjunkte Mengen  $\underline{A}_i$  und  $\underline{A}_j$  „subadditiv“:

$$Pl(\underline{A}_i \cup \underline{A}_j) \leq Pl(\underline{A}_i) + Pl(\underline{A}_j). \tag{3.25}$$

Mit dem Maß der Glaubwürdigkeit  $Bel(\underline{A})$  nach Gleichung (3.20) kann  $Bel(\underline{A}^C)$  nicht bestimmt werden. Analog dazu kann mit dem Maß der Plausibilität  $Pl(\underline{A})$  nach Gleichung (3.21)  $Pl(\underline{A}^C)$  nicht bestimmt werden. Zwischen den dualen Maßen besteht jedoch mit

$$Pl(\underline{A}) = 1 - Bel(\underline{A}^C) \tag{3.26}$$

eine eindeutige Zuordnung. Darüber hinaus kann aus den Gleichungen (3.20) und (3.21) direkt gefolgert werden, dass für jedes  $\underline{A} \in 2^{\underline{\mathbf{X}}}$  stets

$$Pl(\underline{A}) \geq Bel(\underline{A}) \tag{3.27}$$

gilt.

Im Rahmen der Evidenztheorie ist es möglich, Aussagen über den selben Sachverhalt verschiedener Quellen zu aggregieren. Zu der kombinierten Evidenzgesamtheit können sukzessive Informationen neuer Quellen hinzugefügt werden, so dass es genügt, die Zusammenfassung von zwei Informationsquellen zu betrachten. Gegeben seien die grundlegenden Wahrscheinlichkeitszuweisungen  $m_1$  und  $m_2$  über der Grundmenge  $\underline{\mathbf{X}}$ . Die Herdmengen weisen dann die grundlegenden Wahrscheinlichkeiten  $m_1(\underline{A}_1), \dots, m_1(\underline{A}_n)$  bzw.  $m_2(\underline{B}_1), \dots, m_2(\underline{B}_m)$  mit  $\underline{A}_i, \underline{B}_j \in 2^{\underline{\mathbf{X}}}$  auf. Die Zusammenfassung der beiden grundlegenden Wahrscheinlichkeitszuweisungen  $m_1$  und  $m_2$  kann mit der Kombinationsvorschrift nach *Dempster* (engl.: Dempster's rule of combination) erfolgen:

$$m_{1,2}(\underline{A}_k) = \frac{\sum_{\underline{A}_i \cap \underline{B}_j = \underline{A}_k} m_1(\underline{A}_i) \cdot m_2(\underline{B}_j)}{1 - K}. \quad (3.28)$$

Gemäß Gleichung (3.17) wird  $m_{1,2}(\underline{A}_k) = 0$  für  $\underline{A}_k = \emptyset$  gesetzt. Die Einhaltung von Gleichung (3.18) macht dann eine Normalisierung von  $m_{1,2}$  notwendig. Der Faktor

$$K = \sum_{\underline{A}_i \cap \underline{B}_j = \emptyset} m_1(\underline{A}_i) \cdot m_2(\underline{B}_j) \quad (3.29)$$

entspricht dabei dem Anteil der grundlegenden Wahrscheinlichkeiten, die der leeren Menge zugewiesen würde.

Die Normalisierung in der Kombinationsvorschrift nach *Dempster* bedingt eine vollständige Negierung des in den beiden Aussagen enthaltenen Konflikts. *Zadeh* [144] wies auf diese Problematik mit einem plakativen Beispiel widersprüchlicher Diagnosen und der daraus folgenden intuitiv falschen Schlussfolgerung hin. Die Kritik an der dargestellten Verknüpfungsoperation zweier Evidenzgesamtheiten führte zu zahlreichen alternativen Kombinationsvorschriften. Diese werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch nicht benötigt und werden daher nur beispielhaft aufgeführt. Detaillierte Darstellungen sind den angegebenen Literaturquellen zu entnehmen.

- Abschlagsregel nach *Shafer* [125]
- disjunktive Regel des Konsens von *Dubois & Prade* [43]
- *Yagers* modifizierte Kombinationsvorschrift nach *Dempster* [138]
- *Inagakis* vereinheitlichte Kombinationsvorschrift [81]

- Zhangs Zentrumskombinationsvorschrift [139]

Seien nun die grundlegenden Wahrscheinlichkeitszuweisungen  $m_1$  und  $m_2$  über verschiedenen Grundmengen  $\underline{\mathbf{X}}$  und  $\underline{\mathbf{Y}}$  gegeben. Die kombinierte grundlegende Wahrscheinlichkeitszuweisung  $m_{1,2}$  ist dann eine Abbildung

$$m_{1,2} : 2^{\underline{\mathbf{X}} \times \underline{\mathbf{Y}}} \rightarrow [0; 1]. \quad (3.30)$$

Jede Herdmenge ist dann eine zweistellige Relation  $R$  auf dem kartesischen Produkt  $\underline{\mathbf{X}} \times \underline{\mathbf{Y}}$ . Die Gesamtheit der Herdmengen kann durch die mengentheoretische Vereinigung der Zylindererweiterungen der Herdmengen der Evidenzgesamtheiten ( $\text{supp } m_1, m_1$ ) und ( $\text{supp } m_2, m_2$ ) gewonnen werden. Da für alle  $\underline{A}_i \in \text{supp } m_1$  und  $\underline{B}_j \in \text{supp } m_2$

$$\underline{A}_i^{Cyl} = \{(x, y) | x \in \underline{A}_i\} \cap \underline{B}_j^{Cyl} = \{(x, y) | y \in \underline{B}_j\} \neq \emptyset \quad (3.31)$$

gilt, kann die Normalisierung in Gleichung (3.28) entfallen. Jedem Element des kartesischen Produkts der Herdmengen der Evidenzgesamtheiten ( $\text{supp } m_1, m_1$ ) und ( $\text{supp } m_2, m_2$ ) wird dann mit

$$m_{1,2}(\underline{A}_i \times \underline{B}_j) = m_1(\underline{A}_i) \cdot m_2(\underline{B}_j) \quad (3.32)$$

eine kombinierte grundlegende Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Die verknüpften Evidenzgesamtheiten werden dann als nicht interaktiv bezeichnet.

Die Herdmengen einer Evidenzgesamtheit drücken im Sinne von Gleichung (3.3) ungenaues Wissen aus. Da die Evidenztheorie nicht zwingend voraussetzt, dass bei der Festlegung der Herdmengen der gesamte durch  $\underline{\mathbf{X}}$  repräsentierte Kenntnisstand überdeckt wird und für die gegenseitige Lage der Herdmengen keine Einschränkungen vorliegen, kann die Evidenztheorie zur Modellierung von impräzise und lückenhaftem Wissen eingesetzt werden. Die Evidenzgesamtheit drückt den epistemologischen Wissensstand über das betrachtete System aus. Die Bewertung von Informationen  $\underline{A}$  mit Hilfe des Glaubwürdigkeitsgrades  $Bel(\underline{A})$  kann daher als Maß angesehen werden, das ausdrückt, wie sehr der vorhandene Kenntnisstand die mit  $\underline{A}$  verknüpfte Information unterstützt.  $Bel(\underline{A}) = 1$  kann demzufolge als volle Unterstützung von  $\underline{A}$  interpretiert werden, während  $Bel(\underline{A}) = 0$  keine Aussage zulässt.

### 3.4 Wahrscheinlichkeitstheorie

Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird in der Literatur oft mit dem Axiomensystem von *Kolmogoroff* eingeführt [17].

**Axiom 1:** Es ist  $0 \leq P(E) \leq 1$  für jedes  $E$  aus der Ereignisalgebra  $\mathcal{S}$ .

**Axiom 2:** Es ist  $P(\underline{\mathbf{X}}) = 1$ .

**Axiom 3:** Für je abzählbar viele Elemente  $E_1, E_2, \dots$  aus  $\mathcal{S}$  gilt

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$$

falls nur  $E_i \cap E_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  ist, d. h. falls sich die Ereignisse  $E_1, E_2, \dots$  paarweise ausschließen.

Mit dem bisher Dargestellten lässt sich dieser axiomatische Zugang in die Familie der unscharfen Maße einordnen. Axiom 1 entspricht dabei Gleichung (3.5) und Axiom 2 korrespondiert mit Gleichung (3.7). Darüber hinaus kann Axiom 3 als Spezialfall von Gleichung (3.22), in dem die Monotoniebedingung durch die stärkere Additivitätsforderung ersetzt wurde, gedeutet werden. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist also ein spezielles Glaubwürdigkeitsmaß, dessen Herdmengen elementare (bzw. atomare) Ereignisse und daher disjunkt sind. Mit Gleichung (3.20) und Gleichung (3.21) folgt für ein beliebiges Ereignis  $\underline{A} \in 2^{\underline{\mathbf{X}}}$

$$Bel(\underline{A}) = Pl(\underline{A}) = P(\underline{A}). \quad (3.33)$$

Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf einer endlichen Grundmenge  $\underline{\mathbf{X}}$  wird eindeutig durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p : \underline{\mathbf{X}} \rightarrow [0; 1] \quad (3.34)$$

durch

$$P(\underline{A}) = \sum_{x \in \underline{A}} p(x) \quad (3.35)$$

bestimmt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann ihrerseits durch die grundlegende Wahrscheinlichkeitszuweisung

$$p(x) = m(\{x\}) \quad (3.36)$$

dargestellt werden.

Der unscharfe Maßraum  $[\underline{\mathbf{X}}; \mathcal{S}; P]$  wird als Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet.

Ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über einem kartesischen Produkt  $\underline{\mathbf{X}} \times \underline{\mathbf{Y}}$  definiert, so werden die zugehörigen Randverteilungen mit

$$p_X(x) = \sum_{y \in \underline{\mathbf{Y}}} p(x, y) \quad (3.37)$$

und

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \underline{\mathbf{X}}} p(x, y) \quad (3.38)$$

erhalten. Die durch die Randverteilungen bestimmten Zufallsgrößen werden als nicht interaktiv bzw. unabhängig bezeichnet, falls

$$p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad (3.39)$$

gilt. Die Definition unabhängiger Zufallsvariablen ist also ein Spezialfall von Gleichung (3.32), die Nicht-Interaktivität von Evidenzgesamtheiten beschreibt.

Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie werden die Herdmengen  $\underline{A}$  üblicherweise mit Ereignissen in Verbindung gebracht. Aus Gleichung (3.36) ist ersichtlich, dass sich die Wahrscheinlichkeitstheorie mit präzisen (Gleichung (3.2)) und wegen Axiom 3 wohl unterscheidbaren Informationen befasst. Die Herdmengen müssen disjunkte Ereignisse beschreiben, die das betrachtete System vollständig erfassen. Genaue, aber variable Daten sind gewöhnlich das Ergebnis sorgfältiger Beobachtung physikalischer Erscheinungen [15]. Die Wahrscheinlichkeitstheorie bewertet Ereignisse  $\underline{A}$  daher hinsichtlich der bisherigen Häufigkeit, mit der sie in der Vergangenheit aufgetreten sind. Das Wahrscheinlichkeitsmaß kann daher als objektives Maß interpretiert werden.  $P(\underline{A}) = 1$  wird als „sicheres“ Eintreten von  $\underline{A}$  interpretiert, während  $P(\underline{A}) = 0$  das Eintreten von  $\underline{A}$  ausschließt.

## 3.5 Möglichkeitstheorie

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist erneut eine Evidenzgesamtheit und die Gleichungen (3.20) und (3.21). Liegen die Herdmengen  $\underline{A}_i$  ineinander

$$\underline{A}_1 \subset \underline{A}_2 \subset \cdots \subset \underline{A}_n \quad (3.40)$$

liegt der so genannte konsonante Fall vor. Das Glaubwürdigkeitsmaß bzw. das Plausibilitätsmaß werden dann als Möglichkeits- bzw. Notwendigkeitsmaß bezeichnet. Die Möglichkeitstheorie leitet sich also als Spezialfall der Evidenztheorie mit besonderen Anforderungen an den Träger der Evidenzgesamtheit ab.

Gegeben seien nun die Herdmengen nach Gleichung (3.40) mit  $\underline{A}_i \in 2^{\mathbf{X}}$  und zwei Mengen  $\underline{A}, \underline{B} \in 2^{\mathbf{X}}$ . Der Index  $i_1$  ist die größte natürliche Zahl  $i$ , für die  $\underline{A}_i \subset \underline{A}$  gilt. Analog dazu ist der Index  $i_2$  die größte natürliche Zahl  $i$ , für die  $\underline{A}_i \subset \underline{B}$  erfüllt ist. Daraus folgt, dass  $A_i \subset A \wedge A_i \subset B$  nur dann erfüllt ist, wenn  $i \leq \min(i_1; i_2)$  ist. Daher gilt für das Glaubwürdigkeitsmaß

$$\begin{aligned}
 Bel(\underline{A} \cap \underline{B}) &= \sum_{i=1}^{\min(i_1; i_2)} m(\underline{A}_i) \\
 &= \min \left( \sum_{i=1}^{i_1} m(\underline{A}_i); \sum_{i=1}^{i_2} m(\underline{A}_i) \right) \\
 &= \min (Bel(\underline{A}); Bel(\underline{B}))
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

und mit Gleichung (3.26) kann für das Plausibilitätsmaß

$$\begin{aligned}
 Pl(\underline{A} \cup \underline{B}) &= 1 - Bel((\underline{A} \cup \underline{B})^C) \\
 &= 1 - Bel(\underline{A}^C \cap \underline{B}^C) \\
 &= 1 - \min(Bel(\underline{A}^C); Bel(\underline{B}^C)) \\
 &= \max(1 - Bel(\underline{A}^C); 1 - Bel(\underline{B}^C)) \\
 &= \max(Pl(\underline{A}); Pl(\underline{B}))
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

abgeleitet werden. In Anlehnung an die Notation in [38] wird das Glaubwürdigkeitsmaß als Notwendigkeitsmaß  $N$  und das Plausibilitätsmaß als Möglichkeitsmaß  $\Pi$  bezeichnet. Als Analogon zu Gleichung (3.26) wird

$$\Pi(\underline{A}) = 1 - N(\underline{A}^C) \tag{3.43}$$

erhalten.

Die Eigenschaften des Möglichkeits- und des Notwendigkeitsmaßes lassen sich für alle



$\underline{A}, \underline{B} \in 2^{\underline{X}}$  zusammenfassen:

$$\Pi(\underline{A} \cup \underline{B}) = \max(\Pi(\underline{A}); \Pi(\underline{B})), \quad (3.44)$$

$$N(\underline{A} \cap \underline{B}) = \min(N(\underline{A}); N(\underline{B})), \quad (3.45)$$

$$\Pi(\underline{A} \cap \underline{B}) \leq \min(\Pi(\underline{A}); \Pi(\underline{B})), \quad (3.46)$$

$$N(\underline{A} \cup \underline{B}) \geq \max(N(\underline{A}); N(\underline{B})). \quad (3.47)$$

Darüber hinaus können die folgenden Beziehungen abgeleitet werden:

$$N(\underline{A}) \leq \Pi(\underline{A}), \quad (3.48)$$

$$\Pi(\underline{A}) + \Pi(\underline{A}^C) \geq 1, \quad (3.49)$$

$$N(\underline{A}) + N(\underline{A}^C) \leq 1, \quad (3.50)$$

$$\max(\Pi(\underline{A}); \Pi(\underline{A}^C)) = 1, \quad (3.51)$$

$$\min(N(\underline{A}); N(\underline{A}^C)) = 0, \quad (3.52)$$

$$\Pi(\underline{A}) < 1 \Rightarrow N(\underline{A}) = 0, \quad (3.53)$$

$$N(\underline{A}) > 0 \Rightarrow \Pi(\underline{A}) = 1. \quad (3.54)$$

Jedes Möglichkeitsmaß  $\Pi$  auf einer endlichen Grundmenge  $\underline{X}$  wird eindeutig durch eine Möglichkeitsdichtefunktion

$$\pi : \underline{X} \rightarrow [0; 1] \quad (3.55)$$

durch

$$\Pi(\underline{A}) = \max_{x \in \underline{A}} \pi(x) \quad (3.56)$$

bestimmt. Die Möglichkeitsdichtefunktion kann ihrerseits durch die grundlegende Wahrscheinlichkeitszuweisung

$$\pi(x) = \begin{cases} \sum_{j=i}^s m(\underline{A}_j), & \text{falls } x \in \underline{A}_i; x \notin \underline{A}_{i-1}, \\ 0, & \text{falls } x \in \underline{X} \setminus \underline{A}_s \end{cases} \quad (3.57)$$

dargestellt werden. Es kann nachgewiesen werden [89], dass Gleichung (3.57) eine bijektive Abbildung ist. Eine gegebene globale Wahrscheinlichkeitszuweisung bestimmt eindeutig eine Möglichkeitsdichtefunktion, und umgekehrt lässt sich aus einer Möglichkeitsdichtefunktion eindeutig die zugrunde liegende globale Wahrscheinlichkeitszuweisung ermitteln.

Möglichkeits- bzw. Notwendigkeitsmaße sind Plausibilitäts- bzw. Glaubwürdigkeitsmaße mit speziellen Anforderungen an die Herdmengen (vgl. Gleichung (3.40)). Aufgrund der Bestimmungsgleichungen des Glaubwürdigkeitsmaßes (Gleichung (3.20)) bzw. des Plausibilitätsmaßes (Gleichung (3.21)) auf Basis der globalen Wahrscheinlichkeitszuweisung, können die Maße auch als „obere“ bzw. „untere“ Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden [125, 38]. Die dualen Maße Möglichkeit und Notwendigkeit legen daher implizit eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mathcal{P} = \{P | \forall \underline{A}, N(\underline{A}) \leq P(A) \leq \Pi(\underline{A})\} \quad (3.58)$$

fest, die mit der Evidenzgesamtheit kompatibel sind. Für diese Wahrscheinlichkeitsmaße und speziell für die Grenzfälle  $N(\underline{A})$  und  $\Pi(\underline{A})$  können die Erwartungswerte auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie bestimmt werden. Gegeben sei eine Funktion  $\xi$  mit

$$\xi : \underline{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.59)$$

Der untere Erwartungswert  $E_*(\xi)$  wird dann mit

$$E_*(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot d\Pi(\{\omega | \xi(\omega) \leq v\}) \quad (3.60)$$

und der obere Erwartungswert  $E^*$  mit

$$E^*(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot dN(\{\omega | \xi(\omega) \leq v\}) \quad (3.61)$$

erhalten.

Ist eine Möglichkeitsdichtefunktion über einem kartesischen Produkt  $\underline{\mathbf{X}} \times \underline{\mathbf{Y}}$  definiert, so werden die zugehörigen Randverteilungen mit

$$\pi_X(x) = \max_{y \in \underline{\mathbf{Y}}} \pi(x, y) \quad (3.62)$$

und

$$\pi_Y(y) = \max_{x \in \underline{\mathbf{X}}} \pi(x, y) \quad (3.63)$$

erhalten. Dies folgt unmittelbar aus Gleichung (3.56). Umgekehrt kann bei gegebenen Randverteilungen  $\pi_X(x)$  und  $\pi_Y(y)$  für die kombinierte Möglichkeitsdichtefunktion  $\pi(x, y)$

$$\pi(x, y) \leq \pi_X(x) \quad (3.64)$$

und

$$\pi(x, y) \leq \pi_Y(y) \quad (3.65)$$

gefolgert werden. Durch Kombination der Gleichung (3.64) und Gleichung (3.65) wird die Bestimmungsgleichung der „größten“ kombinierten Möglichkeitsdichtefunktion

$$\pi(x, y) = \min[\pi_X(x); \pi_Y(y)] \quad (3.66)$$

erhalten. Ist Gleichung (3.66) erfüllt, so werden  $\underline{\mathbf{X}}$  und  $\underline{\mathbf{Y}}$  als nicht interaktiv bezeichnet. Gleichung (3.66) korrespondiert mit Gleichung (3.32), welche Nicht-Interaktivität im Rahmen der Evidenztheorie definiert, wobei die Multiplikation durch die Maximumbildung ersetzt ist. Die Kombinationsvorschrift nach *Dempster* kann im Rahmen der Möglichkeitstheorie nicht angewendet werden, da durch ihre Anwendung die Eigenschaft der Konsonanz verloren geht. Die kombinierte grundlegende Wahrscheinlichkeitszuweisung bildet i. A. keine konsonante Evidenzgesamtheit und kann daher nicht im Rahmen der Möglichkeitstheorie behandelt werden.

Aus Gleichung (3.57) ist ersichtlich, dass sich die Möglichkeitstheorie mit impräzisen (Gleichung (3.3)) aber wegen Gleichung (3.40) mit kohärenten Informationen befasst. Möglichkeitsmaße eignen sich daher gut zur Darstellung subjektiver Unsicherheiten [15]. In Analogie zu Abschnitt 3.3 drückt die Evidenzgesamtheit den epistemologischen Wissensstand aus. Die Konsonanzbedingung (Gleichung (3.40)) bedingt allerdings im Gegensatz zur Evidenztheorie vollständig widerspruchsfreies Wissen über ein betrachtetes System. Dies wird üblicherweise im Rahmen von Experteneinschätzungen erwartet. Zwar werden Experten normalerweise keine exakten Informationen angeben können, jedoch wird erwartet, dass der durch die Informationen repräsentierte Kenntnisstand „in eine Richtung weist“ [125]. Bei der Bewertung von Ereignissen  $\underline{A}$  mit Hilfe der Möglichkeitstheorie werden subjektive Einschätzungen in Verbindung mit dem Erkenntnisstand des Beobachters und ggf. (wenigen) objektiven Daten verknüpft. Das Möglichkeitsmaß bewertet die „Möglichkeit des Zutreffens von  $\underline{A}$ “. Falls  $\underline{A}$  uneingeschränkt eintreten kann, so wird es mit  $\Pi(\underline{A}) = 1$  bewertet. Diese Aussage ist jedoch nicht gleichbedeutend damit, dass  $\underline{A}$  auch eintritt.  $\Pi(\underline{A}) = 0$  drückt den Kenntnisstand aus, dass  $\underline{A}$  unmöglich ist.

### 3.6 Scharfe und unscharfe Mengen

*Cantor* definiert eine Menge  $\underline{M}$  als Zusammenfassung „von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von  $\underline{M}$  genannt werden) zu einem Ganzen“ [30]. Die Zugehörigkeit von Elementen  $m$  zur Menge  $\underline{M}$  kann entweder durch explizite Angabe der Elemente oder durch eine charakterisierende Eigenschaft  $\mathfrak{E}$

$$\underline{M} = \{m_i | m_i \text{ hat Eigenschaft } \mathfrak{E}\} \quad (3.67)$$

ausgedrückt werden. Diese Darstellungsweise setzt implizit eine Grundmenge  $\underline{X}$  voraus, deren Elemente  $m_i \in \underline{X}$  bzgl. der Zugehörigkeit zu  $\underline{M}$  bewertet werden. Dies erlaubt eine alternative, insbesondere bei unendlichen Grundbereichen vorteilhafte, Beschreibung der Zugehörigkeit der Elemente eines Grundbereichs  $\underline{X}$  zu einer Menge  $\underline{M}$  mittels der charakteristischen Funktion:

$$\forall x \in \underline{X} : \mu_{\underline{M}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \underline{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.68)$$

Aus heutiger Sicht leiten sich so definierte scharfe Mengen als Spezialfall der allgemeinen unscharfen Mengen ab. Unscharfe Mengen verallgemeinern die charakteristischen Funktion zu

$$\mu_M : \underline{X} \rightarrow [0; 1] \quad (3.69)$$

und erlauben dadurch eine graduelle Bewertung der Zugehörigkeit der Elemente der Grundmenge  $\underline{X}$  zu der unscharfen Menge  $\widetilde{M}$  (Abbildung 3.2).  $\mu_{\underline{M}}$  wird auch als Zugehörigkeitsfunktion bezeichnet.

Das Supremum der Zugehörigkeitsfunktion wird als Höhe (*hgt*) einer unscharfen Menge  $\underline{M}$  bezeichnet:

$$hgt(\underline{M}) = \sup_{x \in \underline{X}} m_{\underline{M}}(x). \quad (3.70)$$

Nimmt die Höhe einer Menge den Wert eins an, so wird die Menge normalisiert oder normiert genannt. Im Folgenden werden, falls nicht explizit darauf hingewiesen wird, ausschließlich normierte Zugehörigkeitsfunktionen betrachtet.

Der unscharfen Menge  $\widetilde{M}$  mit der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\widetilde{M}}$  können scharfe Teilmengen entnommen werden. Für reelle Zahlen  $0 \leq \alpha_k \leq 1$  werden mit

$$\underline{M}_{\alpha_k} = \{x \in \underline{\mathbf{X}} \mid \mu_{\widetilde{M}}(x) > \alpha_k\} \quad (3.71)$$

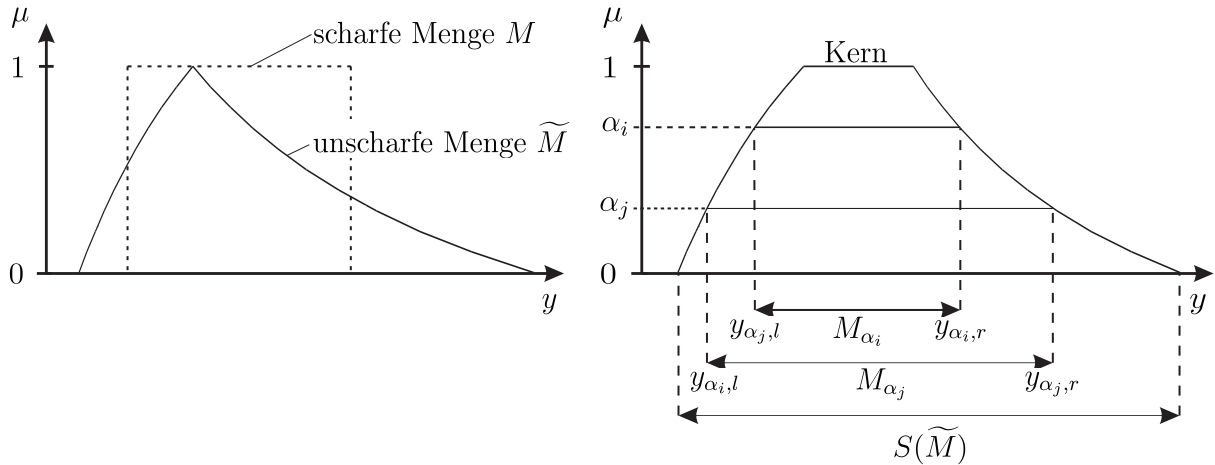
die  $\alpha$ -Schnitte  $M^{>\alpha}$  erhalten. Ein spezieller  $\alpha$ -Schnitt ist der Support  $S$  (Träger, Stützmenge), der alle Elemente mit  $\mu_{\widetilde{M}} > 0$  enthält:

$$S(\widetilde{M}) = \{x \in \underline{\mathbf{X}} \mid \mu_{\widetilde{M}}(x) > 0\}. \quad (3.72)$$

Für reelle Zahlen  $0 < \alpha_k \leq 1$  werden mit

$$\underline{M}_{\alpha_k} = \{x \in \underline{\mathbf{X}} \mid \mu_{\widetilde{M}}(x) \geq \alpha_k\} \quad (3.73)$$

die scharfen  $\alpha$ -Schnitte  $M^{\geq\alpha}$  erhalten. Der scharfe  $\alpha$ -Schnitt mit  $\alpha = 1$  wird Kern genannt.



**Abbildung 3.2:** links: scharfe und unscharfe Mengen; rechts:  $\alpha$ -Niveaumengen

Mit Hilfe der scharfen  $\alpha$ -Schnitte, auch  $\alpha$ -Niveaumengen genannt, können konvexe Fuzzy-Mengen charakterisiert werden. Eine unscharfe Menge  $\widetilde{M}$  ist konvex, falls ihre  $\alpha$ -Niveaumengen zusammenhängende Mengen bzw. im eindimensionalen Fall zusammenhängende Intervalle sind. Es gilt dann:

$$\mu_{\widetilde{M}}(x_2) > \min[\mu_{\widetilde{M}}(x_1); \mu_{\widetilde{M}}(x_3)] \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \underline{\mathbf{X}} \text{ mit } x_1 \leq x_2 \leq x_3. \quad (3.74)$$

Für konvexe normierte unscharfen Mengen gilt die Inklusionsbeziehung:

$$M_{\geq 1} \subseteq M_{\alpha_m} \subseteq M_{\alpha_n} \subseteq S(\widetilde{M}) \subseteq \underline{\mathbf{X}} \text{ mit } \alpha_m > \alpha_n. \quad (3.75)$$

Im Folgenden werden die Eigenschaften von wesentlichen Operationen mit unscharfen Mengen erörtert. Wie bereits bei der allgemeinen charakteristischen Funktion dargestellt, stellen sich die für scharfe Mengen bekannten Operationen Komplement, Durchschnitt und Vereinigung ebenfalls als Spezialfälle eines übergreifenden Konzepts dar. Die Operationen werden durch Abbildungen der Zugehörigkeitswerte der Elemente erklärt. Gegeben seien die unscharfen Mengen  $\underline{\tilde{A}}$ ,  $\underline{\tilde{B}}$  und  $\underline{\tilde{C}}$  über dem Grundbereich  $\underline{\mathbf{X}}$ .

Das Komplement  $\underline{\tilde{A}}^C$  von  $\underline{\tilde{A}}$  ist dann durch

$$\forall x \in \underline{\mathbf{X}} : \mu_{\underline{\tilde{A}}^C}(x) = 1 - \mu_{\underline{\tilde{A}}}(x) \quad (3.76)$$

definiert und weist folgende Eigenschaften auf:

$$(\underline{\tilde{A}}^C)^C = \underline{\tilde{A}}, \quad (3.77)$$

$$\underline{\tilde{A}} \subseteq \underline{\tilde{B}} \Leftrightarrow \underline{\tilde{A}}^C \subseteq \underline{\tilde{B}}^C. \quad (3.78)$$

Die Bildung der Vereinigung und des Durchschnitts unscharfer Mengen ist im Gegensatz zu scharfen Mengen nicht eindeutig festgelegt. Die Eigenschaften dieser Mengenoperationen werden durch die übergeordneten Konzepte der t-Norm (Durchschnittsbildung) und der t-Conorm (Vereinigungsbildung) festgelegt. Eine t-Norm (Dreiecksnorm) ist eine binäre Operation  $\mathbf{t} : [0; 1]^2 \rightarrow [0; 1]$ , welche für alle  $x, y, z \in [0; 1]$ , die folgenden Bedingungen erfüllt:

**Kommutativität**  $\mathbf{t}(x, y) = \mathbf{t}(y, x)$ ,

**Assoziativität**  $\mathbf{t}(x, \mathbf{t}(y, z)) = \mathbf{t}(\mathbf{t}(x, y), z)$ ,

**Monotonie**  $\mathbf{t}(x, y) \leq \mathbf{t}(x, z)$  falls  $y \leq z$ ,

**Randbedingung**  $\mathbf{t}(x, 1) = x$  und  $\mathbf{t}(x, 0) = 0$ .

Die zu einer t-Norm  $\mathbf{t}$  duale t-Conorm  $\mathbf{s}$  wird durch

$$\mathbf{s}(x, y) = 1 - \mathbf{t}(1 - x, 1 - y) \quad (3.79)$$

erhalten. Zu jeder t-Norm wird eine Durchschnittsbildung

$$\underline{\tilde{C}} := \underline{\tilde{A}} \cap_{\mathbf{t}} \underline{\tilde{B}} : \mu_{\underline{\tilde{C}}}(x) = \mathbf{t}(\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x), \mu_{\underline{\tilde{B}}}(x)) \forall x \in \underline{\mathbf{X}} \quad (3.80)$$

und zu jeder t-Conorm die korrespondierende Vereinigungsbildung

$$\underline{\tilde{C}} := \underline{\tilde{A}} \cup_s \underline{\tilde{B}} : \mu_{\underline{\tilde{C}}}(x) = \mathbf{s}(\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x), \mu_{\underline{\tilde{B}}}(x)) \forall x \in \underline{\mathbf{X}} \quad (3.81)$$

erhalten.

Nachfolgend sind einige ausgewählte t-Normen und die dualen t-Conormen zusammengestellt.

### Minimum und Maximum

$$\mathbf{t}_M(x, y) = \min(x, y) \quad (3.82)$$

$$\mathbf{s}_M(x, y) = \max(x, y) \quad (3.83)$$

### algebraisches Produkt und algebraische Summe

$$\mathbf{t}_A(x, y) = x \cdot y \quad (3.84)$$

$$\mathbf{s}_A(x, y) = x + y \quad (3.85)$$

### beschränktes Produkt und beschränkte Summe

$$\mathbf{t}(x, y)_B = \max[0, x + y - 1] \quad (3.86)$$

$$\mathbf{s}(x, y)_B = \min[1, x + y] \quad (3.87)$$

### drastisches Produkt und drastische Summe

$$\mathbf{t}(x, y)_D = \begin{cases} \max(x, y) & \text{falls } \max(x, y) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{s}(x, y)_D = \begin{cases} \min(x, y) & \text{falls } \min(x, y) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.89)$$

### Einstein-Produkt und Einstein-Summe

$$\mathbf{t}(x, y)_E = \frac{x \cdot y}{1 + (1 - x)(1 - y)} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{s}(x, y)_E = \frac{x + y}{1 + x \cdot y} \quad (3.91)$$

**Hamacher-Produkt und Hamacher-Summe**

$$\mathbf{t}(x, y)_{\mathbf{H}} = \frac{x \cdot y}{x + y - x \cdot y} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{s}(x, y)_{\mathbf{H}} = \frac{x + y - 2x \cdot y}{1 - x \cdot y} \quad (3.93)$$

**Lukasiewicz'sche t-Norm und Lukasiewicz'sche t-Conorm**

$$\mathbf{t}(x, y)_{\mathbf{L}} = \max(x + y - 1, 0) \quad (3.94)$$

$$\mathbf{s}(x, y)_{\mathbf{L}} = \min(x + y, 1) \quad (3.95)$$

Wegen der Kommutativität und der Assoziativität der t-Normen und t-Conormen gelten für die Durchschnittsbildung  $\cap_{\mathbf{t}}$  und die Vereinigungsbildung  $\cup_{\mathbf{s}}$  uneingeschränkt:

**Kommutativität**

$$\underline{\tilde{A}} \cap_{\mathbf{t}} \underline{\tilde{B}} = \underline{\tilde{B}} \cap_{\mathbf{t}} \underline{\tilde{A}} \quad (3.96)$$

$$\underline{\tilde{A}} \cup_{\mathbf{s}} \underline{\tilde{B}} = \underline{\tilde{B}} \cup_{\mathbf{s}} \underline{\tilde{A}} \quad (3.97)$$

**Assoziativität**

$$(\underline{\tilde{A}} \cap_{\mathbf{t}} \underline{\tilde{B}}) \cap_{\mathbf{t}} \underline{\tilde{C}} = \underline{\tilde{A}} \cap_{\mathbf{t}} (\underline{\tilde{B}} \cap_{\mathbf{t}} \underline{\tilde{C}}) \quad (3.98)$$

$$(\underline{\tilde{A}} \cup_{\mathbf{s}} \underline{\tilde{B}}) \cup_{\mathbf{s}} \underline{\tilde{C}} = \underline{\tilde{A}} \cup_{\mathbf{s}} (\underline{\tilde{B}} \cup_{\mathbf{s}} \underline{\tilde{C}}) \quad (3.99)$$

**Monotonie**

$$\underline{\tilde{A}} \subseteq \underline{\tilde{B}} \Rightarrow \underline{\tilde{A}} \cap_{\mathbf{t}} \underline{\tilde{C}} \subseteq \underline{\tilde{B}} \cap_{\mathbf{t}} \underline{\tilde{C}} \quad (3.100)$$

$$\underline{\tilde{A}} \subseteq \underline{\tilde{B}} \Rightarrow \underline{\tilde{A}} \cup_{\mathbf{s}} \underline{\tilde{C}} \subseteq \underline{\tilde{B}} \cup_{\mathbf{s}} \underline{\tilde{C}} \quad (3.101)$$

**Verknüpfung mit der leeren Menge  $\emptyset$  und der Grundmenge  $\mathbf{X}$** 

$$\underline{\tilde{A}} \cap_{\mathbf{t}} \emptyset = \emptyset; \underline{\tilde{A}} \cap \mathbf{X} = \underline{\tilde{A}}; \quad (3.102)$$

$$\underline{\tilde{A}} \cup_{\mathbf{s}} \emptyset = \underline{\tilde{A}}; \underline{\tilde{A}} \cup_{\mathbf{s}} \mathbf{X} = \mathbf{X} \quad (3.103)$$



**de Morgan'sche Gesetze**

$$\overline{(\tilde{A} \cap_t \tilde{B})} = \tilde{\underline{A}} \cup_s \tilde{\underline{B}} \quad (3.104)$$

$$\overline{(\tilde{A} \cup_s \tilde{B})} = \tilde{\underline{A}} \cap_t \tilde{\underline{B}} \quad (3.105)$$

Hingegen haben folgende Beziehungen nur Gültigkeit, wenn für die Durchschnittsbildung  $\cap_t = \cap_{t_M} = \cap$  (Gleichung (3.82)) und die Vereinigungsbildung  $\cup_s = \cup_{s_M} = \cup$  (Gleichung (3.83)) angewendet wird:

**Idempotenz**

$$\tilde{\underline{A}} \cap \tilde{\underline{A}} = \tilde{\underline{A}} \quad (3.106)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cup \tilde{\underline{A}} = \tilde{\underline{A}} \quad (3.107)$$

**Adjunktivität**

$$\tilde{\underline{A}} \cap (\tilde{\underline{B}} \cup \tilde{\underline{A}}) = \tilde{\underline{A}} \quad (3.108)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cup (\tilde{\underline{B}} \cap \tilde{\underline{A}}) = \tilde{\underline{A}} \quad (3.109)$$

**Distributivität**

$$\tilde{\underline{A}} \cap (\tilde{\underline{B}} \cup \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cap \tilde{\underline{A}}) \cup (\tilde{\underline{A}} \cap \tilde{\underline{C}}) \quad (3.110)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cup (\tilde{\underline{A}} \cap \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cup \tilde{\underline{A}}) \cap (\tilde{\underline{A}} \cup \tilde{\underline{A}}) \quad (3.111)$$

Die Distributivgesetze können in abgeschwächter Form in Kombination beliebiger t-Normen bzw. t-Conormen mit der Minimum- bzw. Maximumbildung angegeben werden:

$$\tilde{\underline{A}} \cup (\tilde{\underline{B}} \cap_t \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cup \tilde{\underline{A}}) \cap_t (\tilde{\underline{A}} \cup \tilde{\underline{C}}) \quad (3.112)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cup (\tilde{\underline{B}} \cup_s \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cup \tilde{\underline{A}}) \cup_s (\tilde{\underline{A}} \cup \tilde{\underline{C}}) \quad (3.113)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cup_s (\tilde{\underline{B}} \cap \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cup_s \tilde{\underline{A}}) \cap (\tilde{\underline{A}} \cup_s \tilde{\underline{C}}) \quad (3.114)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cap_t (\tilde{\underline{B}} \cup \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cap_t \tilde{\underline{A}}) \cup (\tilde{\underline{A}} \cap_t \tilde{\underline{C}}) \quad (3.115)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cap (\tilde{\underline{B}} \cap_s \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cap \tilde{\underline{A}}) \cap_s (\tilde{\underline{A}} \cap \tilde{\underline{C}}) \quad (3.116)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cap_t (\tilde{\underline{B}} \cap \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cap_t \tilde{\underline{A}}) \cap (\tilde{\underline{A}} \cap_t \tilde{\underline{C}}) \quad (3.117)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cup (\tilde{\underline{B}} \cup_s \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cup_s \tilde{\underline{A}}) \cup (\tilde{\underline{A}} \cup_s \tilde{\underline{C}}) \quad (3.118)$$

$$\tilde{\underline{A}} \cup_s (\tilde{\underline{B}} \cup \tilde{\underline{A}}) = (\tilde{\underline{A}} \cup_s \tilde{\underline{A}}) \cup (\tilde{\underline{A}} \cup_s \tilde{\underline{C}}) \quad (3.119)$$

Die für scharfe Mengen bekannten Beziehungen

$$\underline{\tilde{A}} \cap \underline{\tilde{A}}^C \neq \emptyset; \underline{\tilde{A}} \cup \underline{\tilde{A}}^C \neq \mathbf{X}. \quad (3.120)$$

verlieren für unscharfe Mengen vollständig an Gültigkeit.

Mit Hilfe unscharfer Mengen ist es möglich, impräzise Informationen, die sich durch die Abwesenheit scharfer Definitionsgrenzen auszeichnen, abzubilden. Der kontinuierliche Übergang von den Elementen, die das Bewertungskriterium der Menge  $\underline{\tilde{M}}$  uneingeschränkt erfüllen und daher sicher zu ihr gehören ( $\mu_{\underline{\tilde{M}}} = 1$ ), zu den Elementen die das Kriterium sicher nicht erfüllen ( $\mu_{\underline{\tilde{M}}} = 0$ ), kann durch Zugehörigkeitswerte  $0 < \mu_{\underline{\tilde{M}}} < 1$  realisiert werden. Der mit einem Element verknüpfte Zugehörigkeitswert kann daher als Grad der Übereinstimmung der Eigenschaften des Elementes mit dem durch  $\underline{\tilde{M}}$  verknüpften Konzept interpretiert werden. Im Rahmen technisch-physikalischer Anwendungen ist es oft notwendig, Informationen auf einer geeigneten Zahlenskala abzubilden. Im Folgenden wird daher davon ausgegangen, dass für die Grundmenge gilt:  $\underline{\mathbf{X}} = \mathbb{R}$ .

Eine unscharfe Information kann beispielsweise in Form eines sprachlichen Ausdrucks gegeben sein. Der Bedeutungsraum eines sprachlichen Ausdrucks hängt dabei nicht nur vom Kontext ab, sondern unterliegt darüber hinaus subjektiven Bewertungskriterien, die eine objektive (scharfe) Festlegung der Grenzen unmöglich machen. *Zadeh* führte vor diesem Hintergrund linguistische „Variablen“ ein [141, 142, 143]. *Bothe* [22] führt zur Definition linguistischer Variablen  $LV$  ein Mengensystem

$$V_L = \{A, \mathbf{X}, G, B\} \quad (3.121)$$

mit

$LV$ : Name der linguistischen Variable

$G$ : syntaktische Regeln, die (etwa in Form einer Grammatik) die linguistische Diskretisierung von  $V_L$  bestimmen und damit die Anzahl und Beschaffenheit der linguistischen Werte von  $V_L$  d. h. der Terme  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , festlegen,

$A$ : aus  $G$  resultierende linguistische Terme  $\alpha_i$ ,

$B$ : semantische Regeln, die jedem Term  $\alpha_i$  seine physikalische Bedeutung in Form von unscharfen Mengen  $\underline{\tilde{M}}_{\alpha_i}$  zuordnen,

$\mathbf{X}$ : eine (physikalisch relevante) Grundmenge mit den numerischen (scharfen) Elementen  $x \in \mathbf{X}$ .

Linguistische Variablen beschreiben also eine Menge von Termen, die durch eine gemeinsame Basisvariable, sowie syntaktische und semantische Regeln einen Zusammenhang erhalten. Die Basisvariable fixiert dabei den Kontext, in dem eine Information durch sprachliche Ausdrücke angegeben wird. Den linguistischen Termen werden  $B$  unscharfe Mengen  $\widetilde{M}_{\alpha_i}$  zugeordnet. Diese sind, wie eingangs dargestellt, in der Lage, unscharfe Bedeutungsgrenzen sprachlicher Ausdrücke abzubilden. Linguistische Variablen gewinnen insbesondere im Rahmen von regelbasierten Expertensystemen und Fuzzy-Regelungssystemen (vgl. Abschnitt 4.4) an Bedeutung.

Unscharfe Mengen auf der Grundmenge  $\underline{\mathbf{X}} = \mathbb{R}$  können auch als unscharfe Zahlen interpretiert werden. Diese Deutung unscharfer Mengen ist eng mit der Darstellung linguistischer Terme verwandt. Für die Aussage „Wir treffen uns ungefähr um 3 Uhr am Nachmittag“ kann die Uhrzeit des Treffens als unscharfe Zahl formuliert werden. Welche Abweichung von 3 Uhr noch als „ungefähr“ angesehen werden kann, unterliegt zweifellos subjektiven Bewertungskriterien und kann keinesfalls in Form einer scharfen Grenze spezifiziert werden. Der kontinuierliche Übergang von „ungefähr 3 Uhr“ zu „*nicht* ungefähr 3 Uhr“ kann durch Zugehörigkeitswerte im Intervall  $[0; 1]$  realisiert werden. Offensichtlich stimmen Zeitpunkte mit steigender Entfernung zu 3 Uhr immer weniger mit dem Konzept „ungefähr gleich 3 Uhr“ überein und werden daher mit fallenden Zugehörigkeitswerten bewertet. In diesem Sinne wird 3 Uhr, als beste Übereinstimmung mit einem Zugehörigkeitswert von 1 dargestellt.

Eine konvexe, normierte unscharfe Menge mit  $\underline{\mathbf{X}} = \mathbb{R}$  wird unscharfe Zahl genannt, wenn ihre Zugehörigkeitsfunktion mindestens stückweise stetig ist und für genau ein Element der Grundmenge den Funktionswert 1 annimmt. Dieses Element wird Gipfelpunkt genannt.

Analog dazu wird der Begriff des Intervalls auf unscharfe Intervalle erweitert. Eine konvexe, normierte unscharfe Menge mit  $\underline{\mathbf{X}} = \mathbb{R}$  wird unscharfes Intervall genannt, wenn ihre Zugehörigkeitsfunktion mindestens stückweise stetig ist und der Kern ein geschlossenes Intervall ist.

Die  $\alpha$ -Niveaumengen  $\underline{M}_{\alpha_k}$  einer konvexen normalisierten unscharfen Menge  $\widetilde{M} \in \underline{\mathbf{X}} = \mathbb{R}^n$  bilden die Sequenz  $\underline{M}_1 \subseteq \underline{M}_{\alpha_k} \subseteq \dots \subseteq \underline{M}_0 = \underline{S}(\widetilde{M})$  verschachtelter Mengen. Wird die Existenz einer grundlegenden Wahrscheinlichkeitszuweisung (vgl. Abschnitt 3.3) auf

diesen Mengen vorausgesetzt, so kann der Zugehörigkeitswert jedes Elements mit

$$\forall \underline{x} \in \underline{\mathbf{X}}, \quad \mu_{\underline{M}}(\underline{x}) = \sum_{\underline{x} \in M_{\alpha_i}} m(M_{\alpha_i}) \quad (3.122)$$

angegeben werden. Mit Gleichung (3.21) und den vorausgesetzten konsonanten Herdmengen kann gleichzeitig für die elementaren Mengen  $\{\underline{x}\}$  das Möglichkeitsmaß mit

$$\Pi(\{\underline{x}\}) = \sum_{\underline{x} \in M_{\alpha_i}} m(M_{\alpha_i}) \quad (3.123)$$

bestimmt werden. Die Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Menge  $\widetilde{M}$  induziert ein Möglichkeitsmaß für die Elemente der Grundmenge  $\underline{\mathbf{X}}$  und kann daher formal als Möglichkeitsdichtefunktion

$$\Pi(\{\underline{x}\}) = \widehat{\pi}(\underline{x}) = \mu_{\underline{M}}(\underline{x}) \quad (3.124)$$

interpretiert werden. Mit Hilfe von Gleichung (3.42) und der Möglichkeitsdichtefunktion, kann eine Möglichkeitsverteilungsfunktion

$$\pi(\underline{x} = (x_1; \dots; x_n)) = \Pi(\widetilde{\underline{x}} = \underline{t} = (t_1; \dots; t_n) \mid \underline{x}, \underline{t} \in \underline{\mathbf{X}} = \mathbb{R}^n; t_k < x_k; k = 1, \dots, n) \quad (3.125)$$

über  $\underline{\mathbf{X}}$  definiert werden:

$$\pi(\underline{x}) = \sup_{t_k < x_k; k=1, \dots, n} (\widehat{\pi}(\underline{t})). \quad (3.126)$$

Beim Übergang von der Zugehörigkeitsfunktion zur Möglichkeitsdichtefunktion (Gleichung (3.124)) ändert sich jedoch die mit dem Funktionswert verknüpfte Aussage. Während im ersten Fall die Übereinstimmung bestimmter Merkmale der Elemente der Grundmenge mit dem mit  $\widetilde{M}$  verknüpften Konzept bewertet wird, so wird  $\widehat{\pi}(\underline{x})$  im zweiten Fall als unscharfe Einschränkung der Werte einer Variable  $\underline{u}$  aufgefasst.  $\Pi(\{\underline{x}\}) = \mu_{\underline{M}}(\underline{x})$  gibt den Grad der Möglichkeit an, dass  $\underline{x} \in \underline{\mathbf{X}}$  Wert der Variablen  $\underline{u}$  ist [15].

Während bei der Festlegung des Zugehörigkeitsgrads eines Elementes zur Menge  $\widetilde{M}$  mittels Gleichung (3.76) gleichzeitig die Zugehörigkeit zur Komplementärmenge festgelegt wird, gilt dies bei der Interpretation als Möglichkeitsdichtefunktion nicht. Die Möglichkeit, dass  $\underline{x}$  Wert der Variablen  $\underline{u}$  ist, bestimmt mittels Gleichung (3.43) lediglich die Notwendigkeit, dass  $\underline{x}$  nicht Wert der Variablen  $\underline{u}$  ist.

## Kapitel 4

# Zustandsbeschreibung mit unscharfen Tragwerksparametern

„Schäden“ sind im weiteren Sinne individuelle Merkmale von Produkten. Um den Einfluss von Schäden auf die „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ [9] von Bauwerken bewerten zu können, müssen sie klassifiziert und quantifiziert werden. Dieser Abschnitt behandelt dazu grundlegende Vorgehensweisen mit besonderem Augenmerk auf die dabei auftretenden Unschärfen und Unsicherheiten.

Zunächst wird in Abschnitt 4.1 die Transformation von Bauwerkseigenschaften in Berechnungsparameter der numerischen Simulation als Grundlage für die Auswahl einer geeigneten Unsicherheitstheorie dargestellt. In Abschnitt 4.2 werden unscharfe Tragwerksparemeter auf der Basis von Messungen am Bauwerk abgeleitet. Als Ergänzung dazu wird anschließend in Abschnitt 4.3 die Quantifizierung des Schadens durch numerische Simulation der Schädigung des Tragwerks erörtert. Die Möglichkeiten zur Quantifizierung des Schadens werden durch regelbasierte Expertensysteme zur Bewertung des Bauwerkszustandes (Abschnitt 4.4) und durch Inkorporation von Erfahrungswissen (Abschnitt 4.5) vervollständigt. Von zentraler Bedeutung ist bei den dargestellten Methoden eine adäquate Modellierung methodeninhärenter Unsicherheiten.

## 4.1 Allgemeines

Die Zustandsbewertung von Brückenbauwerken der Verkehrsinfrastruktur findet im Rahmen regelmäßiger Bauwerksuntersuchungen oder nach außergewöhnlichen Einwirkungen (z. B. Brand, Explosion, Anprall, ...) auf das Bauwerk gemäß DIN 1076 statt. Der Zustand kann dabei u. U. erheblich vom idealen, der Bemessung zugrunde gelegten, Zustand abweichen. Er wird bzgl. der Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ [9] untersucht und bewertet.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Konzept verfolgt, das insbesondere die Kriterien „Standicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ mit Hilfe numerischer, an die Bemessung angelehnter, Verfahren objektiv und vergleichbar bewertet. Hierfür kommen im Rahmen baupraktischer Problemstellungen häufig numerische Näherungsverfahren, wie beispielsweise die „Finite-Elemente-Methode“ (vgl. Abschnitt 2.2) zum Einsatz. Mit Hilfe dieser Verfahren ist es möglich, die konstitutiven Beziehungen der Kontinuumsschädigungsmechanik (vgl. Abschnitt 2.1) in einer computerorientierten Form umzusetzen.

Die phänomenologische Beschreibung des Bauwerksverhaltens mit Hilfe geeigneter Prognosemodelle setzt dabei die Kenntnis relevanter Modellparameter voraus. Während bei der Bemessung eines Tragwerks i. A. normativ abgesicherte Parameter für die Simulation des Tragwerks herangezogen werden, und deren Realisierung durch geeignete Bauüberwachungsmaßnahmen sichergestellt wird, so sind die Modellgrößen für die Untersuchung deteriorierter Strukturen für jeden Einzelfall individuell zu ermitteln. Die Bestimmung des „Ist-Zustandes“ (zum Zeitpunkt  $t_0$ ) kann dabei als surjektive Abbildung

$$\underline{\mathfrak{E}} \rightarrow \underline{\mathfrak{M}} \tag{4.1}$$

beobachtbarer Eigenschaften  $\underline{\mathfrak{E}}$  des zu untersuchenden Bauwerks auf die berücksichtigten Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter  $\underline{\mathfrak{M}}$  aufgefasst werden.

Unter der Voraussetzung, dass die beobachtbaren Eigenschaften  $\underline{\mathfrak{E}}$  exakt bestimmt werden können, liegen auch die Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter  $\underline{\mathfrak{M}}$  als exakte numerische Werte vor. Gleichung (4.1) impliziert dann die Anwendung deterministischer Verfahren zur Prognose der „Standicherheit“ und der „Dauerhaftigkeit“. Relevante Bauwerkseigenschaften  $\underline{\mathfrak{E}}$  lassen sich i. A. jedoch lediglich impräzise bestimmen bzw. bleiben teilweise unbestimmt. Mit der Anwendung von Gleichung (4.1) wird dann implizit ein geeignetes Kalkül zur Beschreibung der Unsicherheiten (vgl. Abschnitt 3) festgelegt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird den beobachtbaren Eigenschaften  $\underline{\mathfrak{E}}$  die Charakteristik „Fuzzyness“ zugeschrieben und entsprechend den Darstellungen in Abschnitt 3 werden die Möglichkeitstheorie und die Theorie der unscharfen Mengen zur Verarbeitung der Informationen genutzt. Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter werden dadurch zu Fuzzy-Modellgrößen bzw. Fuzzy-Berechnungsparametern  $\widetilde{\mathfrak{M}}$ .

In Abschnitt 4.2 wird Gleichung (4.1) zunächst auf Eigenschaften  $\underline{\mathfrak{E}}$  angewendet, die mittels messtechnischer Verfahren direkt beobachtbar sind. In Abhängigkeit von spezifischen Messsituationen wird der Übergang von impräzisen Beobachtungen zu Fuzzy-Eingangsgrößen detailliert dargestellt. Einen wesentlichen Stellenwert bei der Beurteilung geschädigter Brücken nimmt im vorliegenden Konzept jedoch die Tatsache ein, dass es i. A. unmöglich ist, alle relevanten Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter mittels direkter Messung zu bestimmen. Daher werden in der vorliegenden Arbeit weitere Ansätze zur Informationsgewinnung verfolgt. Eine Möglichkeit der Erhöhung der Informationsdichte bzgl. eines Schadens ist die Simulation des Schädigungsvorganges. Dies wird in Abschnitt 4.3 mit Hinblick auf auftretende Impräzisionen infolge stark differierender Detaillierungsgrade zwischen der lokalen Schädigungssimulation und der Simulation des globalen Tragverhaltens dargestellt. In Abschnitt 4.4 wird der Einsatz von Expertensystemen, insbesondere für die Quantifizierung der Schädigung auf Grund sekundärer Schadensmerkmale diskutiert. Dabei wird der Einsatz von regelbasierten Fuzzy-Systemen untersucht. In Abschnitt 4.5 wird abschließend der Einfluss von Erfahrungswissen auf die Beurteilung geschädigter Strukturen beschrieben. Dabei wird insbesondere die Möglichkeit genutzt, subjektive Einschätzungen mit Hilfe von Fuzzy-Methoden mathematisch adäquat formulieren zu können.

Die folgenden Darstellungen betonen jeweils einen spezifischen Aspekt der Informationsgewinnung. In praktischen Anwendungsfällen liegen i. A. Mischformen der beschriebenen Situationen vor. Die diskutierten Methoden können dann in einem problemangepassten Vorgehen beliebig kombiniert werden.

## 4.2 Bewertung mittels direkter Messung am Bauwerk

Mit Hilfe der Möglichkeitstheorie bzw. der Theorie der unscharfen Mengen können sowohl objektive Informationen, als auch subjektive Bewertungen im Rahmen einer Brücken-

zustandsbewertung berücksichtigt werden. Fuzzy-Größen  $\widetilde{\mathfrak{M}}$  dürfen bereits auf Grund weniger objektiver Daten modelliert werden. Objektive Daten werden dabei üblicherweise durch direkte Messungen am Bauwerk erhalten. Messbare Eigenschaften  $\mathfrak{E}$  können mittels analoger oder digitaler Messgeräte erfasst und durch eine Bewertung auf Basis des Möglichkeitsmaßes auf Fuzzy-Modellgrößen bzw. Fuzzy-Berechnungsparameter  $\widetilde{\mathfrak{M}}$  abgebildet werden.

### 4.2.1 Unscharfer Messwert

Ein unscharfes Messergebnis kann direkt dazu benutzt werden, um den korrespondierenden Fuzzy-Berechnungsparameter zu modellieren. Nachfolgend werden mögliche Ursachen für das Vorliegen eines unscharfen Messwertes diskutiert und das prinzipielle Vorgehen zur Gewinnung der Zugehörigkeitswerte von  $\widetilde{\mathfrak{M}}$  wird dargestellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die Messergebnisse auf einer numerischen Skala abbilden bzw. als numerische Größen vom Messgerät ablesen lassen.

Im Wesentlichen lassen sich drei Fälle charakterisieren, die zu unscharfen Messungen führen:

1. Das Messergebnis beschreibt den Übergang zwischen zwei komplementären Zuständen.
2. Das Messergebnis kennzeichnet die unscharfe Position eines Wertes auf einer Skala.
3. Die Festlegung des Skalenwertes einer Messung beruht auf einer Ähnlichkeitsbetrachtung von Mess- und Referenzgrößen.

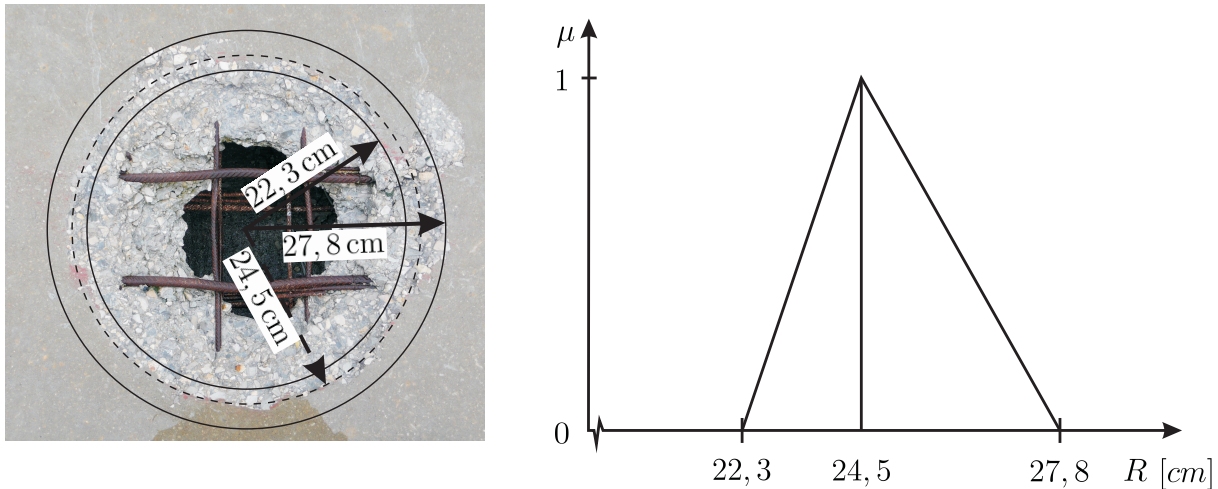
Eine detaillierte Darstellung des ersten Falles, am Beispiel einer unscharfen Wasserstandsmessung, ist in [19] enthalten. Die Messung des Wasserstandes wird mit Hilfe einer Messlatte, die in das Wasser getaucht wird, durchgeführt. Dabei ist der Bereich der Messlatte von Interesse, der den „fließenden“ Übergang vom nassen zum trockenen (nicht nassen) Bereich markiert. Der unscharfe Wasserstand kann aus der Bewertung der Zugehörigkeit diskreter Skalenwerte zu einem der beiden Zustände abgeleitet werden.

Der zweite Fall kann insbesondere infolge von Idealisierungen auftreten. Unter dem Begriff der Idealisierung wird in diesem Zusammenhang der Vorgang der Reduktion der



Komplexität, d. h. der Vereinfachung der Realität auf eine, der Problemstellung angepasste, Informationsdichte verstanden. Eine physikalisch-phänomenologische Beschreibung der Realität wird vielfach erst durch eine Modellierung „wesentlicher“ Einflüsse und durch die Vernachlässigung bzw. lediglich näherungsweise Berücksichtigung sekundärer Merkmale und Effekte möglich. Die Festlegung wesentlicher Einflüsse ist dabei problemabhängig und wird meistens a priori von Experten festgelegt. Die Durchführung einer ingenieurmäßigen Modellbildung folgt dabei *Albert Einstein*: „So einfach wie möglich. Aber nicht einfacher.“ Als exemplarisches Beispiel sei die Beurteilung der Schädigung einer Fahrbahnplatte infolge einer Kontaktdetonation dargestellt. Für die Beschreibung der Kratergeometrie ist es mit vertretbarem Aufwand weder möglich noch ist es für evtl. nachfolgende Simulationen der Gesamtstruktur der Brücke sinnvoll und erwünscht, die „exakte“ Geometrie des Kraters zu erfassen. I. A. wird unter der Annahme einer näherungsweisen rotationssymmetrischen Wellenausbreitung im Bauteil die Kratergeometrie zu einem Kreis „gerundet“. Die in Abbildung 4.1 links dargestellten konzentrischen Kreise sind mögliche Näherungen der Kratergeometrie. Der innere Kreis ( $R_{min} = 22,3 \text{ cm}$ ) ist dem Krater einbeschrieben und der äußere Kreis ( $R_{max} = 27,8 \text{ cm}$ ) ist eine Einhüllende der Kratergeometrie. Diese beiden Kreise sind extreme Bewertungen der Form des Kraters. Ihre korrespondierenden Radien legen somit den Bereich möglicher Radien der genäherten Kratergeometrie fest. Sie bilden den Support eines Fuzzy-Radius. Der gestrichelte Kreis hingegen kann als „beste“ Näherung interpretiert werden. Sein Radius wird demnach mit  $\mu = 1$  bewertet. Aus dem Support und diesem Modalwert lässt sich der in Abbildung 4.1 rechts dargestellte Fuzzy-Radius konstruieren.

Der dritte Fall kann auftreten, wenn die Abbildung einer Messung auf einer numerischen Skala nur unpräzise erfolgen kann. Beispielsweise ist der Farbwert eines Indikatorpapiers vom Experimentator mittels einer Referenzfarbskala auf den gemessenen pH-Wert zu übertragen. Die Farbe des Messstreifens stimmt dabei i. A. nicht exakt mit der Referenzfarbskala überein bzw. entzieht sich durch eine beschränkte Wahrnehmung des menschlichen Auges einer exakten Zuordnung. Die Ablesung des pH-Werts impliziert daher eine subjektive Bewertung der Ähnlichkeit der Farbe des Messstreifens und der Referenzfarbskala. Dabei ist es zweckmäßig, zunächst Bereiche auszuschließen, die sicher nicht mit dem Farbton des Teststreifens übereinstimmen. Die korrespondierenden pH-Werte werden mit dem Zugehörigkeitswert  $\mu = 0$  bewertet. Der am „besten“ übereinstimmende Farbton bzw. der korrespondierende pH-Wert wird mit der Zugehörigkeit  $\mu = 1$  bewertet. Farbtöne zwi-



**Abbildung 4.1:** Krater in Fahrbahnplatte: Idealisierungen der realen Geometrie; fuzzyfizierter Kraterradius (rechts)

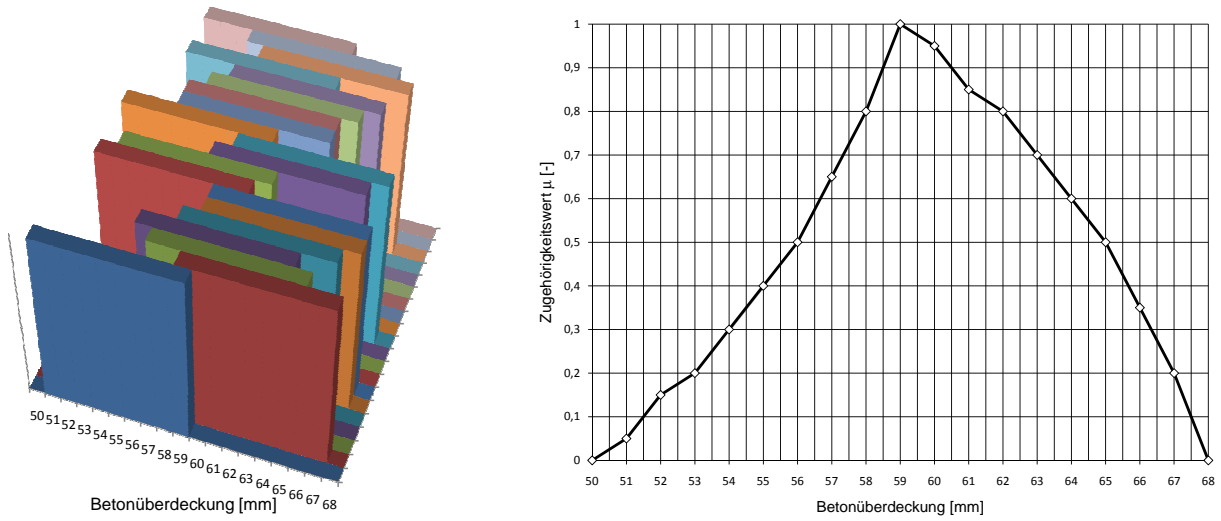
schen den ausgeschlossenen Bereichen und den am „besten“ übereinstimmenden Farbton werden graduell bewertet. Es ist intuitiv verständlich, dass Farbtöne auf dem Teststreifen mit wachsendem Abstand von dem mit  $\mu = 1$  bewerteten Ton mit fallenden Zugehörigkeitswerten bewertet werden. Die ungenaue Ablesung des Farbtons des Indikatorpapiers kann als fuzzyfizierter pH-Wert modelliert werden.

## 4.2.2 Fehlerbehaftete Messungen

Fehlerbehaftete Messwerte können durch beschränkte Genauigkeiten der verwendeten Messgeräte entstehen. Der erhaltene Messwert ist dann kein singulärer Wert, sondern ein Intervall. Dies kann beispielsweise bei der Bestimmung der Betonüberdeckung mit Hilfe des „PS 200 Ferroskan“ auftreten. Bei unbekanntem Durchmesser des Bewehrungsstahls liegt die Genauigkeit einer Tiefenmessung von 60 mm gemäß den Herstellerangaben bei  $\pm 4$  mm [3]. Die gemessene Betondeckung muss daher als Intervall [56; 64] mm angegeben werden.

Die Behandlung von Intervallen in numerischen Berechnungen wird ausführlich in [110] behandelt und stellt einen Spezialfall unscharfer Intervalle (Abschnitt 6) dar.

Für den Fall, dass mehrere fehlerbehaftete Einzelmessungen vorliegen, geben *Dubois & Prade* [38] ein Verfahren an, mit dem aus diesen impräzisen statistischen Informationen



**Abbildung 4.2:** Betonüberdeckung: Serie fehlerbehafteter Messungen (links), Fuzzy-Zahl  $\tilde{F}$  zur Konstruktion der Intervalle  $E_i$  (rechts)

ein Möglichkeitsmaß konstruiert werden kann. Im Folgenden wird angenommen, dass die Messwerte als geschlossene Intervalle  $\{I_k | k = 1, \dots, q\}$  vorliegen und ein Minimum an Konsistenz

$$\bigcap_{k=1}^q I_k \neq \emptyset \quad (4.2)$$

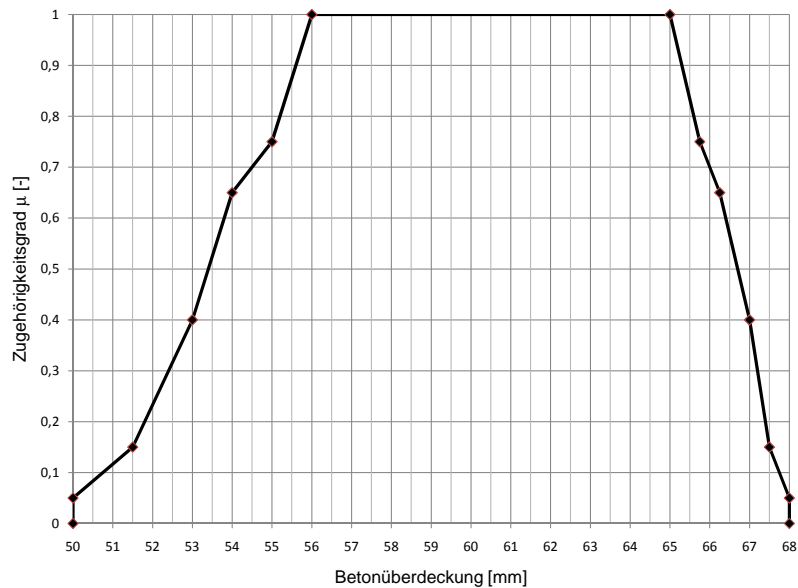
aufweisen. Die nicht leere Schnittmenge aller Intervalle  $I_k$  wird mit  $I_s$  und die Vereinigung aller Intervalle  $\bigcup_{k=1}^q I_k$  wird mit  $I_v$  bezeichnet. Dann lässt sich eine Sequenz verschachtelter Mengen  $E_i$  mit

$$I_s \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_q \subseteq I_v \quad (4.3)$$

finden. Als ein mögliches Vorgehen zur konkreten Wahl der  $E_i$  schlagen *Dubois & Prade* vor, aus den  $I_k$  eine unscharfe Menge  $\tilde{F}$  zu konstruieren und deren  $\alpha$ -Niveaumengen zur Festlegung der  $E_i$  zu verwenden. Die unscharfe Menge wird mit

$$\forall \omega \in I_v \quad \mu_{\tilde{F}}(\omega) = \frac{1}{q} [\text{Anzahl der } I_k, \text{ die } \omega \text{ enthalten}] \quad (4.4)$$

bestimmt. In Abbildung 4.2 ist links eine Serie von Messungen der Betonüberdeckung und rechts die daraus konstruierte unscharfe Menge  $\tilde{F}$  dargestellt. Jedes Intervall  $I_k$  wird nun eindeutig dem kleinsten  $E_i$  zugewiesen, das  $I_k$  vollständig enthält. Dieses Vorgehen entspricht der Konstruktion eines Histogramms mit scharfen Werten. Die verschachtelten



**Abbildung 4.3:** Fuzzyfizierte Betonüberdeckung

Mengen  $E_i$  übernehmen dabei die Funktion der disjunkten Mengen, die bei scharfen Werten zu ihrer Klassifizierung genutzt werden. Analog dazu werden die relativen Häufigkeiten im vorliegenden Fall mit

$$\forall i, \quad m(E_i) = \frac{1}{q} [\text{Anzahl der zugewiesenen } I_k] \quad (4.5)$$

bestimmt. Mit  $m(E_i)$  werden den  $E_i$  grundlegende Wahrscheinlichkeiten (vgl. Abschnitt 3.3) zugewiesen. Wegen der vorausgesetzten Konsonanz der  $E_i$  wird durch Gleichung (4.5) ein Möglichkeitsmaß sowie das duale Notwendigkeitsmaß definiert. Mit Gleichung (3.21) kann daraus die in Abbildung 4.3 dargestellte unscharfe Betonüberdeckung ermittelt werden.

### 4.2.3 Geringer Stichprobenumfang

Die Untersuchung und Beurteilung von Bestandsbauten ist häufig von der physikalischen Unmöglichkeit der Bestimmung wesentlicher Tragwerkparameter, bzw. von begrenzt verfügbaren Ressourcen zu ihrer Bestimmung, geprägt. Zerstörende Prüfverfahren, wie beispielsweise die Bestimmung der Betondruckfestigkeit durch Abdruckversuche an Bohrkernen, können unter wirtschaftlichen und praktischen Gesichtspunkten nur in sehr begrenztem Umfang durchgeführt werden. Aber auch zerstörungsfreie Prüfmethode, wie

beispielsweise die Bestimmung der Betondruckfestigkeit mittels des *Schmidt*'schen Rückprallhammers können insbesondere im Bereich von Schäden, mit stark variierenden Werten der Materialeigenschaften, u. U. kaum in einem Umfang durchgeführt werden, der eine statistisch gesicherte Aussage über den gemessenen Parameter zulässt.

Auch wenn auf der Grundlage von nur wenigen Messungen eine statistische Auswertung lediglich in begrenztem Maße möglich ist, so vermitteln die verfügbaren Informationen einem Experten bereits grundlegende Anhaltspunkte. Die wenigen verfügbaren objektiven Informationen können beispielsweise mit Erfahrungswissen, subjektiven Bewertungen und Analogiebetrachtungen vergleichbarer Situationen angereichert werden. Derart bestimmte Bauwerkseigenschaften sind entsprechend Abschnitt 3 mit Hilfe der Theorie der unscharfen Mengen bzw. der Möglichkeitstheorie zu behandeln. Direkt und indirekt messbare Bauwerkseigenschaften  $\underline{\mathfrak{E}}$  werden mit Gleichung (4.1) auf Fuzzy-Tragwerksparameter  $\widetilde{\mathfrak{M}}$  abgebildet.

Die Konstruktion unscharfer Tragwerksparameter auf der Grundlage weniger Daten durch einen Experten erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird, *Beer* [19] folgend, ein Erstentwurf auf der Basis der Messdaten durchgeführt. Dieser wird in einem zweiten Schritt bewertet und ggf. modifiziert. Obwohl im Rahmen praktischer Anwendungen eine strenge Trennung der beiden Arbeitsschritte kaum möglich ist, sondern sie vielmehr simultan durchgeführt werden, liegt der Fokus in diesem Abschnitt auf dem ersten Schritt, während der zweite Schritt in Abschnitt 4.5 dargestellt wird.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Messwerte als numerische Größen vorliegen und zwischen den messtechnisch untersuchten Bauwerkseigenschaften keine Korrelation besteht. Auf Grundlage der beobachteten (streuenden) Eigenschaften ist der Tragwerksparameter als unscharfe Größe zu modellieren. Die scharfen Einzelmessungen werden zu einer Fuzzy-Zahl bzw. einem Fuzzy-Intervall aggregiert.

Zwischen der Möglichkeitstheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie existieren Verbindungen, die sich beispielsweise in Abbildung 3.1 und Gleichung (3.58) widerspiegeln. Diese Verbindungen, die eine Transformation eines Möglichkeitsmaßes in ein korrespondierendes Wahrscheinlichkeitsmaß und umgekehrt ermöglichen, werden detailliert in Abschnitt 4.2.4 dargestellt. Sind für eine endliche Anzahl von Elementarereignissen  $\omega_i$ , mit  $i \leq n$ , die Wahrscheinlichkeiten  $p(\omega_i)$  bekannt, so können für die Elementarereignisse die korrespondierenden Möglichkeiten  $\pi(\omega_i)$  mit Gleichung (4.11) bestimmt werden.

Eine Abschätzung der Auftretenswahrscheinlichkeiten der Messwerte einer Bauwerksei-

genschaft kann mit Hilfe von Histogrammen durchgeführt werden. Zunächst wird der Definitionsbereich  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$  der Messreihe festgelegt und in  $n$  disjunkte Intervalle  $I_i$

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad (4.6)$$

unterteilt. Analog zum Vorgehen bei herkömmlichen statistischen Auswertungen werden die Messwerte den Intervallen  $I_i$  zugeordnet. Auf Grund des vorausgesetzten geringen Stichprobenumfangs, können aus der so gewonnenen Häufigkeitsverteilung jedoch lediglich Schätzungen für die Wahrscheinlichkeitswerte abgeleitet werden. Eine Beschreibung mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist u. U. nicht möglich. Die relativen Häufigkeiten können jedoch als objektive Grundlage für die Bestimmung einer, mit den Messdaten kompatiblen, Möglichkeitsdichtefunktion genutzt werden. Dazu werden die relativen Häufigkeiten als Schätzung der Auftretenswahrscheinlichkeiten der Mittelwerte jedes Intervalls interpretiert und mit Hilfe von Gleichung (4.11) in die epistemischen Möglichkeiten des Auftretens der Mittelwerte überführt. Die ermittelten Paare  $(\omega_i, \pi(\omega_i))$ , mit  $\omega \in \mathbb{R}$  sind Stützstellen der Möglichkeitsdichtefunktion. In Abschnitt 3 wurde dargestellt, dass eine Möglichkeitsdichtefunktion als unscharfe Menge  $\tilde{F}$  und daher als Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall interpretiert werden kann. Eine konkrete Wahl der Ansatzfunktionen für die Äste der Zugehörigkeitsfunktion der unscharfen Menge auf Basis der diskreten Möglichkeiten muss folgende Kriterien erfüllen:

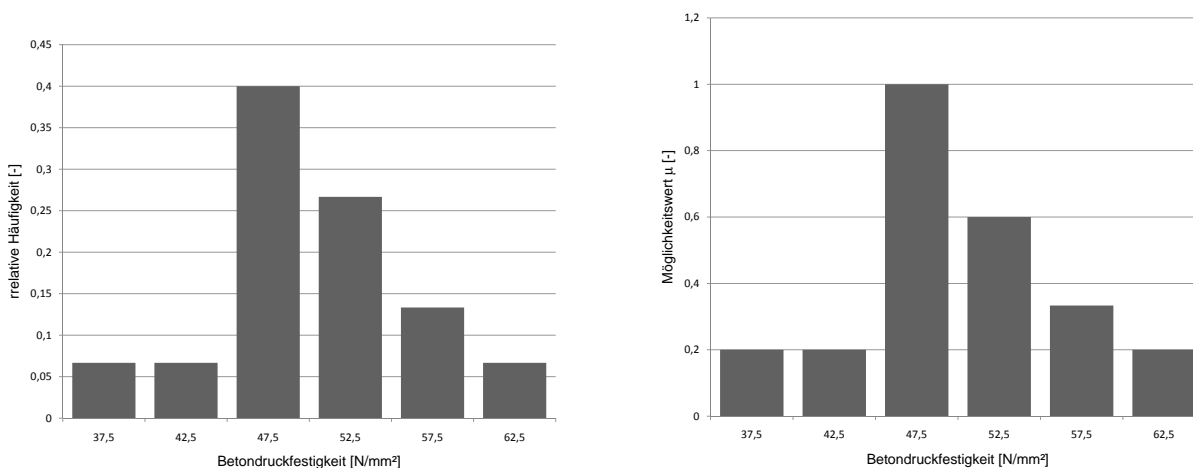
- $\tilde{F}$  ist konvex,
- $\max \mu_F = 1$ ,
- $S(\tilde{F})$  enthält alle auftretenden Messwerte,
- $\mu_F$  ist eine gute Näherung der Paare  $(\omega_i, \pi(\omega_i))$ .

Das Vorgehen wird am Beispiel der Bestimmung der Betondruckfestigkeit mit Hilfe eines *Schmidt*'schen Rückprallhammers an einer Brücke im Kosovo mit „mäßigen“ bis „schlechtem“ Zustand dargestellt. Wegen einer eingeschränkten Zugänglichkeit wurden lediglich 15 Messungen am Widerlager durchgeführt (Tabelle 4.1).

In Abbildung 4.4 links sind die relativen Häufigkeiten der Messwerte bei einer äquidistanten Einteilung der Intervalle  $I_i$  dargestellt. Die auf der Abszisse aufgetragenen Werte

**Tabelle 4.1:** Gemessene Betondruckfestigkeiten

Nummer	Druckfestigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]	Nummer	Druckfestigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]	Nummer	Druckfestigkeit [N/mm <sup>2</sup> ]
1	37	6	47	11	49
2	52	7	46	12	61
3	59	8	46	13	50
4	50	9	42	14	59
5	51	10	53	15	52

**Abbildung 4.4:** Betondruckfestigkeit: relative Häufigkeiten der Messwerte (links), transformierte Möglichkeitswerte der Messwerte (rechts)

entsprechen der Mittelwerten der Intervalle. Mit Hilfe von Gleichung (4.11) können diese in korrespondierende Möglichkeitswerte transformiert werden (Abbildung 4.4, rechts). Mittels geeigneter Ansatzfunktionen wird die erhaltene diskrete unscharfe Menge „geglättet“. Unter Berücksichtigung der oben angeführten Kriterien kann jeder beliebige parametrisierte Funktionsansatz beispielsweise mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate an die Stützstellen angepasst werden. Typische Ansatzfunktionen sind beispielsweise in Abbildung 6.13 dargestellt. Eine ausführliche Untersuchung mit verschiedenen Funktionsansätzen ist in [19] enthalten.

#### 4.2.4 Statistische Daten

Wie in Abschnitt 3 dargestellt, können die Möglichkeitstheorie und die Wahrscheinlichkeitstheorie formal als spezielle Formen der Evidenztheorie interpretiert werden (vgl. Abbildung 3.1). Möglichkeitsmaße und Wahrscheinlichkeitsmaße modellieren jedoch unterschiedliche Arten von Unsicherheiten. Es ist daher nicht möglich, beide Maße aussagenlogisch oder mittels eines Kalküls zu kombinieren. Die Anwendung von Gleichung (4.1) setzt daher implizit die Wahl **eines** geeigneten Modells zur Beschreibung der auftretenden Impräzisionen voraus. Sind die Unbestimmtheiten durch einen unvollständigen Kenntnisstand oder durch subjektive Bewertungen geprägt, so werden sie adäquat durch die Möglichkeitstheorie modelliert und Gleichung (4.1) bildet die Eigenschaften  $\underline{\mathfrak{E}}$  auf Fuzzy-Größen ab. Unbestimmtheiten infolge von zufälligem Systemverhalten sind mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie zu behandeln und Gleichung (4.1) bildet die Eigenschaften  $\underline{\mathfrak{E}}$  auf Zufallsgrößen ab. Treten in einer Problemstellung beide Formen der Unbestimmtheit auf, so ist eine Repräsentationsform zu wählen und Gleichung (4.1) enthält dann implizit eine Vorschrift zur Transformation von Möglichkeitsmaßen in Wahrscheinlichkeitsmaße oder umgekehrt. Der erste Fall führt auf stochastische Verfahren der Tragwerksanalyse und wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. Die Beurteilung beschädigter Brücken ist in erheblichem Maße durch epistemische Unsicherheiten geprägt. Daher wird die Möglichkeitstheorie als geeignete Methode zur Durchführung einer unscharfen Tragwerksanalyse angesehen und evtl. auftretende aleatorische Unsicherheiten werden im Rahmen der Möglichkeitstheorie approximiert.

Die Evidenztheorie drückt den Kenntnisstand über einen unbestimmten Sachverhalt, beispielsweise einen unscharfen Tragwerkparameter, mit Hilfe einer Evidenzgesamtheit  $(\text{supp } m, m)$  aus (vgl. Abschnitt 3). Der Träger  $\text{supp } m$  besteht aus scharfen Mengen  $\underline{A}_i$ , welchen mit der Mengenfunktion  $m$  grundlegende Wahrscheinlichkeiten zugewiesen werden. Diese werden als Grad des Vertrauens in den Wahrheitsgehalt der zu den Mengen korrespondierenden Aussagen bzw. Behauptungen interpretiert. Auf dieser Grundlage lassen sich die zwei dualen Maße Glaubwürdigkeit und Plausibilität ableiten. Bilden die Herdmengen  $\underline{A}_i$  eine Sequenz von ineinander liegenden Mengen, so liegt der konsonante Fall vor und das Glaubwürdigkeitsmaß bzw. das Plausibilitätsmaß gehen in das entsprechend Gleichung (3.15) bzw. (3.16) extreme Notwendigkeitsmaß bzw. Möglichkeitsmaß über. Sind die Herdmengen  $\underline{A}_i$  hingegen disjunkte einelementige Mengen, so liegt der dis-



sonante Fall vor, und das Glaubwürdigkeitsmaß bzw. das Plausibilitätsmaß kollabieren zum Wahrscheinlichkeitsmaß. Das Notwendigkeitsmaß bzw. Möglichkeitsmaß sind daher eine untere bzw. obere Schranke des Wahrscheinlichkeitsmaßes (Gleichung (3.58)).

*Dubois et al.* [34] formulieren für eine Transformation von Wahrscheinlichkeitsmaßen in Möglichkeitsmaße drei grundlegende Prinzipien:

**Konsistenz von Wahrscheinlichkeits- und Möglichkeitsmaßen:** Das Ergebnis der Transformation eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  in ein Möglichkeitsmaß  $\Pi$  auf der Grundmenge  $\underline{\mathbf{X}}$  muss entsprechend der obigen Ausführungen die Bedingung

$$P \in \mathcal{P}(\Pi) = \{P^*, \forall \underline{A} \subseteq \underline{\mathbf{X}}, P^*(\underline{A}) \leq \Pi(\underline{A})\} \quad (4.7)$$

erfüllen.

**Erhalt der Ordinale:** Bei der Transformation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p$  in eine Möglichkeitsverteilung  $\pi$  sollen Informationen bzgl. der Ordnung elementarer Ereignisse  $x$  hinsichtlich ihrer Wahrscheinlichkeiten weitestgehend erhalten bleiben. Diese Forderung wird in [40] in einer strikten Form

$$\pi(x) > \pi(x') \Leftrightarrow p(x) > p(x') \quad (4.8)$$

und einer abgeschwächten Form

$$p(x) > p(x') \Rightarrow \pi(x) > \pi(x') \quad (4.9)$$

angegeben.

**Informationserhalt:** Die Umwandlung von Wahrscheinlichkeitsmaßen in Möglichkeitsmaße ist mit einem Verlust an Informationen verbunden. Dies ist auf den unterschiedlichen Informationsgehalt der beiden Maße zurückzuführen (vgl. Abschnitt 3). Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $\underline{A}$  wird nach der Transformation durch ein Intervall  $[1 - \Pi(\underline{A}^C); \Pi(\underline{A})]$  (vgl. Gleichung (3.58)) approximiert. Um den Verlust an Informationen zu minimieren, ist aus den Möglichkeitsmaßen, welche Gleichung (4.7) erfüllen, das Maß auszuwählen, das für alle  $\underline{A} \in 2^{\underline{\mathbf{X}}}$  diese Intervalle minimiert. Die optimale Möglichkeitsverteilung  $\pi^{opt}(x)$  weist daher bzgl. aller Möglichkeitsverteilungen  $\pi(x)$ , die Bedingung 1 und 2 erfüllen, eine maximale Spezifität auf:

$$\forall \pi(x), \pi^{opt}(x) \leq \pi(x). \quad (4.10)$$

Für endliche Mengen  $\underline{X} = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n\}$  kann die Existenz einer Möglichkeitsverteilung  $\pi(\omega_i) = (\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \dots, \pi(\omega_n))$ , unter Beachtung der drei dargestellten Prinzipien, für eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Wahrscheinlichkeitswerten  $p(\omega_1) \geq p(\omega_2) \geq \dots \geq p(\omega_n)$  bewiesen werden [40]. Die Lösung ist bei Berücksichtigung von Gleichung (4.8) eindeutig und mit

$$\begin{aligned} \pi(\omega_1) &= 1, \\ \pi(\omega_i) &= \begin{cases} \sum_{j=i}^n p(\omega_j) & \text{falls } p(\omega_{i-1}) > p(\omega_i) \\ \pi(\omega_{i-1}) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

gegeben [42, 40, 39]. Wird lediglich die schwächere Bedingung (4.9) erfüllt, so ist die Transformation beim Auftreten gleicher Wahrscheinlichkeiten  $p(\omega_i) = p(\omega_{i+1})$  nicht mehr eindeutig.

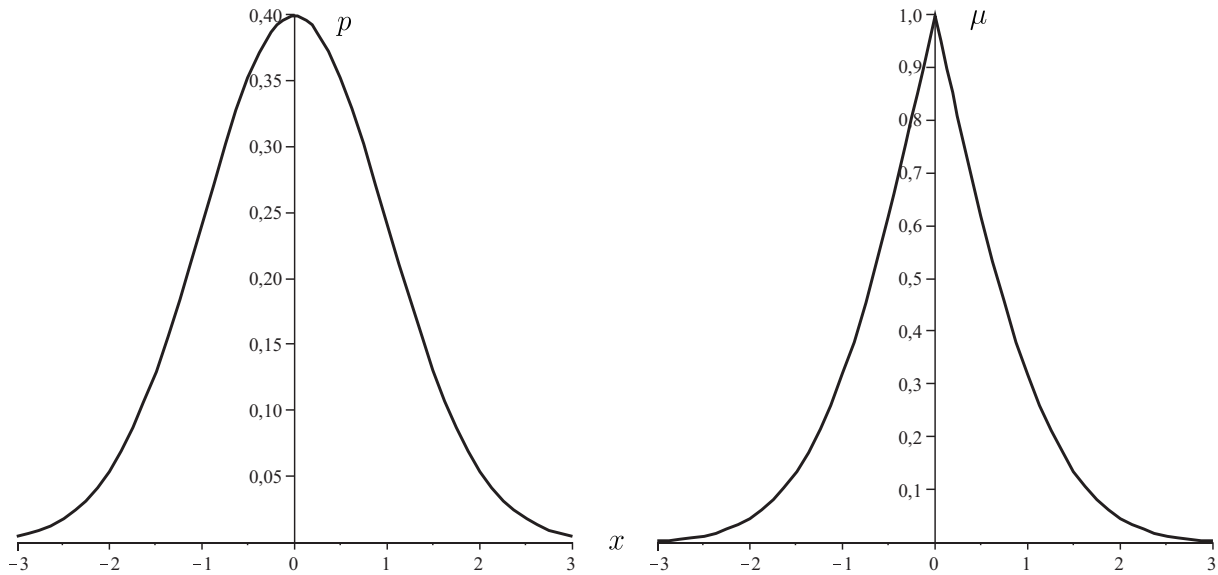
Die Transformationsbeziehung kann jedoch auch ohne die vorausgesetzte Ordnung  $p(\omega_1) \geq p(\omega_2) \geq \dots \geq p(\omega_n)$  der Elemente dargestellt werden. Diese Darstellung wurde in Abschnitt 4.2.3 zur Bestimmung einer Fuzzy-Größe auf der Grundlage eines Histogramms genutzt (Gleichung (4.11)). *Delgado & Moral* [35] haben nachgewiesen, dass ausschließlich normalisierte Möglichkeitsverteilungen das Konsistenz-Prinzip erfüllen. Dadurch wird durch die Transformation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Möglichkeitsverteilungen nachträglich die Forderung nach normierten unscharfen Mengen zur Darstellung unscharfer Tragwerkparameter gerechtfertigt.

Stetige (kontinuierliche) Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden unter Beachtung der drei grundlegenden Prinzipien zu stetigen (kontinuierlichen) Möglichkeitsverteilungen transformiert. Ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine unimodale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschrieben, so kann ein von *Dubois & Prade* [34] veröffentlichtes Verfahren zur Bestimmung der korrespondierenden Möglichkeitsdichtefunktion genutzt werden. Der Maximalwert der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x)$  wird mit  $x_0$  bezeichnet. Daraus folgt, dass  $p'(x) > 0$  im Intervall  $[a, x_0]$  und  $p'(x) < 0$  im Intervall  $[x_0, b]$  ist. Die Autoren definieren eine Hilfsfunktion  $f: [a, x_0] \rightarrow [x_0, b]$  mit

$$f(x) = \max\{y | p(y) \geq p(x)\}, \quad (4.12)$$

mit deren Hilfe die Transformationsbeziehung angegeben werden kann:

$$\pi(x) = \pi(f(x)) = \int_{-\infty}^x p(y) dy + \int_{f(x)}^{\infty} p(y) dy. \quad (4.13)$$



**Abbildung 4.5:** Standardnormalverteilung: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (links), spezifischste Möglichkeitsdichtefunktion (rechts)

Als Anwendungsbeispiel wird die Transformation einer normalverteilten Zufallsgröße in eine unscharfe Zahl dargestellt. Die Zufallsgröße sei durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad (4.14)$$

mit dem Mittelwert  $m$  und der Standardabweichung  $\sigma$  gegeben. In Abbildung 4.5 links ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für  $m = 0$  und  $\sigma = 1$  dargestellt. Die Funktion  $p(x)$  ist symmetrisch. Dadurch vereinfacht sich die Konstruktion der Hilfsfunktion  $f(x)$  zu

$$f(x) = 2 \cdot m - x. \quad (4.15)$$

Die Auswertung von Gleichung (4.13) mit  $x_0 = m = 0$  und  $\sigma = 1$  ergibt die in Abbildung 4.5 rechts dargestellte spezifischste Möglichkeitsdichtefunktion, welche die drei Prinzipien erfüllt. Die Möglichkeitsdichtefunktion  $\pi(x)$  kann jedoch wegen der beiden Integralausdrücke in Gleichung (4.13) nicht in geschlossener Form angegeben werden. Im Rahmen praktischer Anwendungen erscheint daher eine weniger stringente Auslegung des dritten Prinzips zweckmäßig.

*Civanlar & Trussel* [31] stellten ein Verfahren zur Konstruktion von Möglichkeitsdichtefunktionen  $\pi(x)$  aus gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen  $p(x)$  unter Beachtung

der ersten beiden Prinzipien vor, indem sie die Forderung nach der maximalen Spezifität von  $\pi(x)$  durch

$$\pi(x) = \begin{cases} \lambda p(x) & \text{falls } \lambda p(x) < 1 \\ 1 & \text{falls } \lambda p(x) \geq 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

ersetzen. Die Möglichkeitsdichtefunktion  $\pi(x)$  weist demnach einen zu  $p(x)$  affinen Verlauf auf, der für Funktionswerte größer 1 abgeschnitten wird. Der Multiplikator  $\lambda$  wird durch die Forderung der maximalen Spezifität von  $\pi(x)$  bestimmt. Als Kriterium verwenden die Autoren jedoch

$$\int \pi(x)^2 \rightarrow \min. \quad (4.17)$$

Der untere Grenzwert von  $\lambda$  wird durch das Konsistenz-Prinzip bestimmt. Für die in Abbildung 4.5 links dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung ermittelten *Civanlar & Trussel* als „optimalen“ Multiplikator  $\lambda = \sqrt{2\pi}$ . Damit kann die korrespondierende Möglichkeitsdichtefunktion mit

$$\pi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (4.18)$$

angegeben werden. Gleichung (4.18) motivierte die Bereitstellung parametrisierter Zugehörigkeitsfunktionen (vgl. Abbildung 6.13), um mittels statistischer Kenngrößen direkt korrespondierende Fuzzy-Größen zu konstruieren.

Gleichung (4.13) ermöglicht nicht nur die Transformation einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in eine Möglichkeitsdichtefunktion, sondern erlaubt eine Interpretation dieser Transformation auf der Basis von „Konfidenzintervallen“. *Dubois & Prade* [40] führen „Konfidenzintervalle“ als Zusammenfassung möglicher Realisierungen einer Zufallsgröße ein, die eine tatsächliche Realisierung mit einer definierten Wahrscheinlichkeit enthält. Bei unimodalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind dies Intervalle  $I_L = [a_L, a_L + L]$  mit der Länge  $L$ . Bei gegebener Länge  $L$  ist nun  $a_L$  derart zu bestimmen, dass die Wahrscheinlichkeit  $P(I_L)$  maximal wird. Es kann gezeigt werden, dass dann

$$p(a_L) = p(a_L + L) \quad (4.19)$$

gilt, und dass wegen der Eigenschaft

$$L_1 < L_2 \Rightarrow P(I_{L_1}) < P(I_{L_2}) \quad (4.20)$$

die Konfidenzintervalle  $I_\alpha$  mit  $P(I_\alpha) = \alpha$  eine Sequenz ineinander liegender Intervalle bilden [34]. Alle Intervalle enthalten dabei den Modalwert  $x_0$  von  $p(x)$ . Mit Hilfe von Gleichung (3.57) kann damit eine zu Gleichung (4.13) äquivalente Darstellung der Transformationsbeziehung mit

$$\pi(x) = \sup \{1 - P(I_\alpha), x \in I_\alpha\} \quad (4.21)$$

angegeben werden. Die Möglichkeitsdichtefunktion ist stetig und kodiert alle Konfidenzintervalle in ihrer Zugehörigkeitsfunktion. Konfidenzintervalle können beispielsweise von Experten angegeben werden oder mit Hilfe von Stichproben ermittelt werden. Für unbekannte Verteilungsfunktionen ermöglicht die Ungleichung von *Tschebyschow*

$$\forall a \geq 1, P(X \in [\mu - a\sigma, \mu + a\sigma]) \geq 1 - \frac{1}{a^2} \quad (4.22)$$

bei bekanntem Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  die Festlegung von Konfidenzintervallen. Dadurch kann eine direkte Modellierung der zur Verfügung stehenden Informationen als Fuzzy-Größe erfolgen.

### 4.3 Simulation des Schädigungsvorganges

Die messtechnische Erfassung des Bauwerkszustandes kann insbesondere nach großen diskontinuierlichen Veränderungen infolge außergewöhnlicher Einwirkungen (z. B. Brand, Impact, Explosion) oft nur approximativ erfolgen. Während oberflächliche Schädigungen detailliert erfasst werden können, bleibt eine quantitative Beschreibung der Materialdeterioration im Inneren von Bauteilen oft auf Mittelwerte beschränkt bzw. ist gänzlich unmöglich.

Unter der Voraussetzung, dass über den prinzipiellen Schädigungsmechanismus ausreichende Kenntnisse vorliegen, kann dann eine Simulation der Schädigungsevolution ein probates Hilfsmittel ergänzend zu messtechnischen Untersuchungen zur Quantifizierung der Schädigung sein. Werden die Simulationen a posteriori durchgeführt, so sind i. A. wesentliche Eingangsgrößen in die Berechnung unbekannt. Obwohl die in Abbildung 4.1 dargestellte Schädigung der Fahrbahnplatte von Experten leicht als Folge einer Kontakt-detonation identifiziert werden kann, so bleibt die eingesetzte Sprengstoffmenge unbestimmt. Unbekannte Berechnungsparameter können jedoch u. U. durch Parameterstudien bestimmt werden. Dies kann durch Vergleich der messtechnisch erfassten Schäden am

Bauwerk mit den prognostizierten Schäden erfolgen.

Auch wenn derartige Untersuchungen keine quantitativ exakten Aussagen über vorliegende Schädigungen erwarten lassen, so können die gewonnenen Erkenntnisse dennoch einen fundierten Einblick in die Phänomenologie und das Ausmaß des vorliegenden Schadens vermitteln. Besondere Bedeutung kommt der Simulation der Schädigungsevolution im Rahmen von a priori Untersuchungen der Vulnerabilität von Bestandsbauten zu. Bei der Untersuchung von beispielsweise Unfallszenarien oder Bedrohungsszenarien sind Simulationen die einzige verfügbare Informationsquelle um Schadenscharakteristik und -ausmaß für weiterführende Beurteilungen der „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ durchführen zu können.

Die physikalisch-phänomenologische Beschreibung des Vorgangs der Schädigung erfolgt i. A. mit speziellen Prognosewerkzeugen. Die Auswahl dieser Werkzeuge hängt von der zu simulierenden Schädigungsevolution ab. Die Durchführung der Simulation erfolgt üblicherweise mit einem unabhängigen Modul im Vorlauf der weiteren Untersuchung. Ergebnisgrößen der Simulation können Materialparameter des deteriorierten Materials oder die skalare Schädigungsvariable  $d$  (vgl. Abschnitt 2.1.5) an diskreten Punkten der Struktur sein. Diese Informationen müssen für eine weiterführende Nutzung in das zur Simulation des Gesamttragverhaltens einer Brücke genutzte Analysewerkzeug (z. B. FEM (vgl. Abschnitt 2.2)) übertragen werden.

Für die weiteren Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass sowohl die Simulation des Schädigungsvorganges als auch die Simulation des Gesamttragverhaltens mit, nicht notwendigerweise identischen, netzbasierten Verfahren wie beispielsweise

- der FEM (Finite Elemente Methode),
- der BEM (Randelementemethode),
- der FDM (Finite Differenzen Methode) oder
- dem Ritz-Galerkin Verfahren

durchgeführt wird. Die in den Simulationen verwendeten Netze können dabei, insbesondere bei der Simulation lokaler Schädigungen, erhebliche Unterschiede im Detaillierungsgrad aufweisen. Als Beispiel sei die Simulation einer Kontaktdetonation auf einer Betonfahrbahnplatte (vgl. Abbildung 4.1) angeführt. Die Simulation der Wellenausbreitung im

Bauteil und die Bestimmung der daraus resultierenden Schädigung des Materials kann zielführend mit „Hydrocodes“ [61, 66, 80] durchgeführt werden. Um die lokale Wirkung der Schockwelle im Material adäquat abzubilden, werden die numerischen Berechnungen mit Elementgrößen bis in den Subzentimeter-Bereich (Abbildung 4.6) durchgeführt. Trotz der resultierenden sehr hohen Elementanzahl pro Volumeneinheit können Analysen in akzeptablen Zeitspannen durchgeführt werden, wenn lediglich eine Teil der gesamten Struktur modelliert wird. Bei einer Simulation des Gesamttragverhaltens einer geschädigten Brücke mit Hilfe der FEM kann die Anzahl der Elemente wegen der erheblich größeren Dimensionen nur durch eine gröbere Diskretisierung reduziert werden. In Abbildung 4.7 ist die geschädigte Teilstruktur der Betonfahrbahnplatte als FEM-Modell dargestellt. Die detaillierten Ergebnisse der Schädigungssimulation müssen daher auf den geringeren Informationsgehalt des Rechenmodells der Gesamtstruktur verdichtet werden.

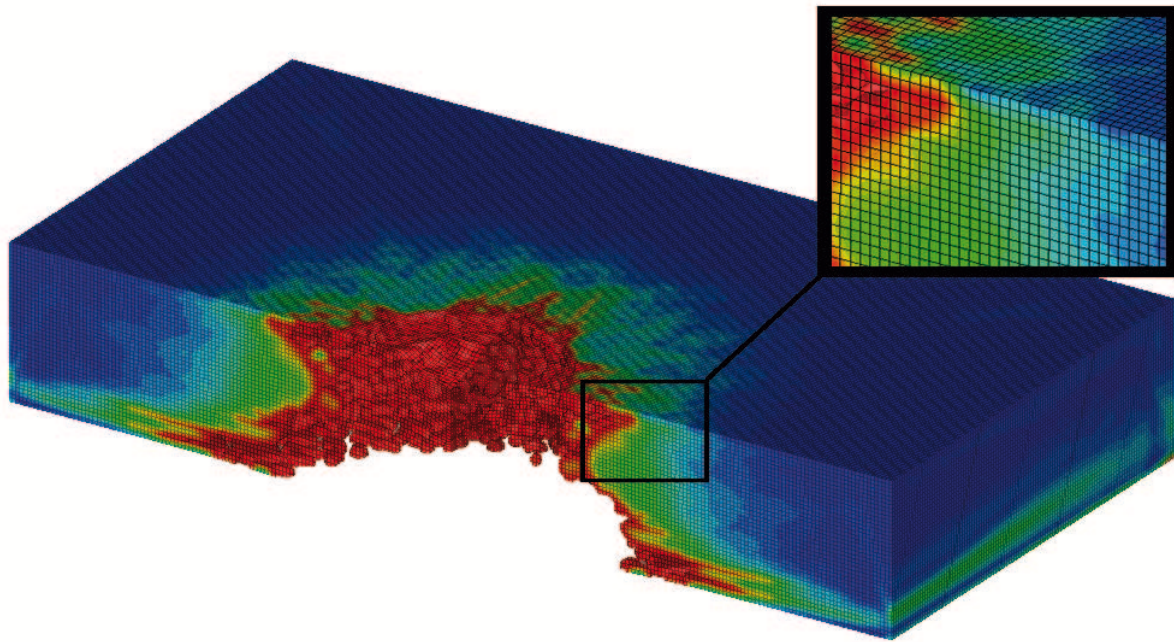
Bei dieser Übertragung kann es bei Anwendung konventioneller (scharfer) Simulationsmethoden wegen der Kondensation der Informationen zu erheblichen kaum quantifizierbaren Einbußen der Qualität der numerischen Modelle kommen. Im Folgenden wird daher ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes neuartiges Verfahren dargestellt, das den Verlust an Information durch Einsatz von Fuzzy-Methoden verringert.

Netzbasierende Methoden unterteilen einen zu analysierenden Körper  $\mathcal{B}$  in eine endliche Anzahl von disjunkten Teilgebieten

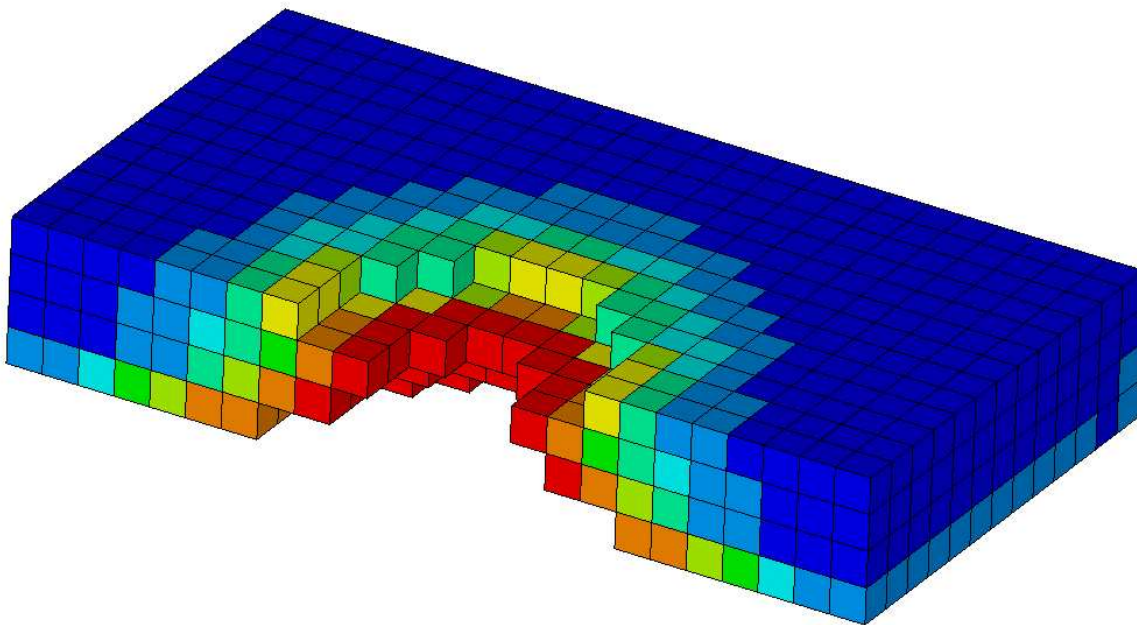
$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i \text{ mit } \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset, \quad i \neq j. \quad (4.23)$$

Die Gesamtheit der Teilgebiete  $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n\}$  wird als Netz bezeichnet. Ein Körper kann unter Einhaltung der Bedingung (4.23) und verfahrensbedingter Restriktionen mit beliebigen Netzen diskretisiert werden. Restriktionen ergeben sich beispielsweise durch die numerischen Integrationsverfahren, die bei Volumenelementen lediglich für ein Seitenverhältnis von 1:1:1 exakte Ergebnisse liefern. Zwei gegebene Netze eines Körpers  $\mathcal{B}$  können hinsichtlich ihrer Feinheit miteinander verglichen werden. Ein Netz  $\Omega$  weist über dem gesamten Körper  $\mathcal{B}$  eine feinere Diskretisierung auf als ein Netz  $\Theta$ , wenn die räumlichen Ausdehnungen aller Teilgebiete  $\mathcal{B}_j^\Omega$  kleiner sind als die der Teilgebiete  $\mathcal{B}_i^\Theta$ . Im Speziellen ist das Netz  $\Omega$  eine „Verfeinerung“ von  $\Theta$ , wenn es durch Unterteilung einiger oder aller Teilgebiete  $\mathcal{B}_i^\Theta$  von  $\Theta$  erhalten werden kann. Die Menge der Teilgebiete

$$\{\mathcal{B}_l^\Omega, \mathcal{B}_{l+1}^\Omega, \dots, \mathcal{B}_m^\Omega\} = \omega(\{\mathcal{B}_i^\Theta\}) \text{ mit } \mathcal{B}_i^\Theta = \bigcup_{k=l}^m \mathcal{B}_k^\Omega, \quad (4.24)$$



**Abbildung 4.6:** Betonfahrbahnplatte, Kontaktdetonation, Schädigungssimulation mit Hydrocode: feine Diskretisierung; Darstellung der Schädigung (dunkelblau=ungeschädigt - rot=stark geschädigt)



**Abbildung 4.7:** Betonfahrbahnplatte, Kontaktdetonation, FEM-Modell der geschädigten Platte: gröbere Diskretisierung; Darstellung der Schädigung (dunkelblau=ungeschädigt - rot=stark geschädigt)



in welche  $\mathcal{B}_i^\ominus$  unterteilt wird, muss entsprechend Gleichung (4.23) aus disjunkten und  $\mathcal{B}_i^\ominus$  vollständig überdeckenden Teilgebieten bestehen. Die Abbildung

$$\omega : \Theta \rightarrow \Omega \quad (4.25)$$

beschreibt dann eine Netzverfeinerung, während die Umkehrfunktion

$$\omega^{-1} : \Omega \rightarrow \Theta \quad (4.26)$$

den Übergang zu einer gröberen Einteilung mit weniger Teilgebieten/Elementen beschreibt.

Können zwei Netze mittels Gleichung (4.25) bzw. (4.26) ineinander überführt werden, so sind beide Netze kompatibel. In nicht kompatiblen Netzen  $\Phi$  und  $\Theta$  gibt es jeweils mindestens ein Teilgebiet  $\mathcal{B}_i^\Phi$  und  $\mathcal{B}_j^\ominus$ , für das

$$\mathcal{B}_i^\Phi \cap \mathcal{B}_j^\ominus \neq \emptyset \wedge \mathcal{B}_i^\Phi \cup \mathcal{B}_j^\ominus \neq \mathcal{B}_i^\Phi \wedge \mathcal{B}_i^\Phi \cup \mathcal{B}_j^\ominus \neq \mathcal{B}_j^\ominus \quad (4.27)$$

gilt. Für beliebige nicht kompatible Netze  $\Phi$  und  $\Psi$  mit endlich vielen Teilgebieten lässt sich jedoch immer eine gemeinsame Netzverfeinerung  $\Gamma$  finden. Durch sequentielle Anwendung von Gleichung (4.25) und (4.26)

$$\Phi \rightarrow \Gamma \rightarrow \Psi \quad (4.28)$$

kann damit die Transformation des Netzes  $\Phi$  in das inkompatible Netz  $\Psi$  vollständig durch Transformationen zwischen kompatiblen Netzen beschrieben werden.

Mit den Teilgebieten  $\mathcal{B}_i^\Phi$  eines Netzes  $\Phi$  sind im Rahmen numerischer Simulationen die Eigenschaften des durch sie repräsentierten Raumes verknüpft. Diese Eigenschaften sind in Abhängigkeit von den physikalischen Beschreibungen als Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter kodiert. Jedes Teilgebiet  $\mathcal{B}_i^\Phi$  ist daher mit einem Vektor  $\underline{\mathbf{m}}_i^\Phi$  von Parametern assoziiert. Die Transformation des Netzes  $\Phi$  in das Netz  $\Psi$  mit Hilfe von Gleichung (4.28) impliziert daher die Transformation der Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter

$$\underline{\mathfrak{M}}^\Phi \rightarrow \underline{\mathfrak{M}}^\Psi. \quad (4.29)$$

Bei der Durchführung einer Netzverfeinerung (Gleichung (4.25)) wird mit Gleichung (4.29) eine eindeutige Abbildungsvorschrift erhalten. Den neuen Teilgebieten  $\omega(\{\mathcal{B}_i^\ominus\})$  werden die Eigenschaften  $\underline{\mathbf{m}}_i^\ominus$  zugewiesen. Volumenbezogene Größen sind entsprechend der Raumanteile der neuen Teilgebiete  $\mathcal{B}_k^\Omega$  an  $\mathcal{B}_i^\ominus$  zu skalieren.

Bei einer Vergrößerung (Gleichung (4.26)) sind die Eigenschaften der Teilgebiete  $\omega(\{\mathcal{B}_i^\ominus\})$  zu aggregieren und dem Teilgebiet  $\mathcal{B}_i^\ominus$  zuzuweisen. Diese Aggregation der Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter ist eine surjektive Abbildung der Eigenschaften der Teilgebiete des feinen Netzes auf die Eigenschaften der Teilgebiete des groben Netzes. Ziel dieser Abbildung ist es, die differenzierten Informationen des feinen Netzes durch repräsentative Merkmale der Elemente des groben Netzes zu ersetzen. Die Wahl eines geeigneten Aggregationsoperators ist problemabhängig und die resultierende Abbildungsvorschrift nicht umkehrbar. Bei regelmäßigen Netzen werden repräsentative Parameter  $\mathbf{m}_{i,m}^\ominus \in \underline{\mathbf{m}}_i^\ominus$  häufig durch Mittelwertbildung aus den Parametern  $\mathbf{m}_{k,m}^\Omega \in \underline{\mathbf{m}}_k^\Omega$  des feinen Netzes abgeleitet. Jede Zelle des groben Netzes bildet dann die Eigenschaften der zusammengefassten Zellen im Mittel ab. Durch die Wahl anderer Aggregationsoperatoren werden Varianten der Transformation erhalten. Beispielsweise ist die Festlegung der repräsentativen Parameter durch den Median der Parameter der Zellen des feinen Netzes robuster gegen Ausreißer als die Mittelwertbildung.

Nach der Durchführung der Aggregation kann jedes Teilgebiet individuelle Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter  $\mathbf{m}_{i,m}^\ominus$  aufweisen. Üblicherweise ist die maximale Anzahl von unabhängigen Parametersätzen, beispielsweise von unterschiedlichen Materialeigenschaften, in Softwareprogrammen jedoch begrenzt. Daher werden die repräsentativen Eigenschaften der zusammengefassten Elemente anschließend klassifiziert. Hierfür wird der Wertebereich jedes Parameters in eine a priori festgelegte Anzahl  $n_m$  äquidistanter Bereiche unterteilt. Die Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter  $\mathbf{m}_{i,m}^\ominus$  werden anschließend jeweils einer der  $n_m$  Klassen (Bereiche) zugeordnet. Die  $n_m$  Mittelwerte der Klassen ersetzen nach einer Rücktransformation die originären Parameter, wodurch die Anzahl der unabhängigen Parameter begrenzt wird.

Das dargestellte Vorgehen ist zwar einfach umzusetzen, muss jedoch hinsichtlich des auftretenden Informationsverlustes kritisch bewertet werden. Die im ersten Schritt durchgeführte Zusammenfassung der Parameter der Teilgebiete  $\omega(\{\mathcal{B}_i^\ominus\})$  zu einem repräsentativen Wert, impliziert einen einheitlichen Einfluss der zusammengefassten Zellen  $\omega(\{\mathcal{B}_i^\ominus\})$  auf  $\mathcal{B}_i^\ominus$ . Tatsächlich wird das globale Verhalten des Zellkonglomerats bei unterschiedlichen Einwirkungen von den Eigenschaften der Teilgebiete und deren Positionen unterschiedlich beeinflusst. Ihr möglicher Einfluss wird durch das „Runden“ negiert. *Kosko* [95] bezeichnet dies als „Fehlpassung“ und sieht Fuzzy-Methoden als mögliche Darstellungsform des multivalenten Zustandes von  $\mathcal{B}_i^\ominus$ . Für die Klassifizierung und Rundung im zweiten Schritt

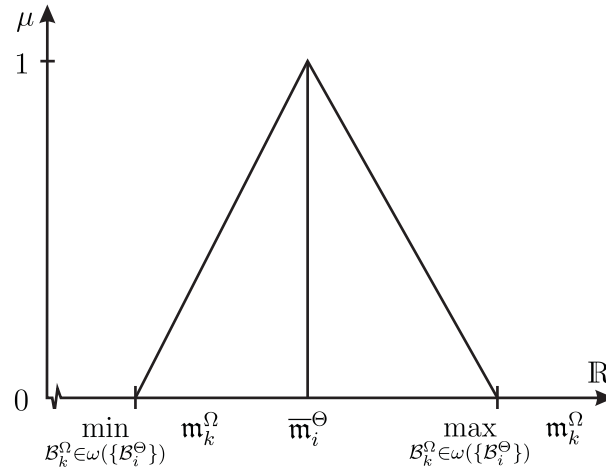
gelten die selben Kritikpunkte. Darüber hinaus birgt die starre, a priori durchgeführte, Einteilung der Klassen die Gefahr einer Über- bzw. Unterrepräsentation der einzelnen Klassen. Jede Klasse, die mindestens einen Wert enthält, wird in das numerische Modell übernommen. Die Anzahl der enthaltenen Elemente wird dabei nicht berücksichtigt. Bei stark variierenden Auftretenshäufigkeiten kann es daher zu einer übermäßigen Homogenisierung der Teilgebiete kommen. Dies kann zu weniger aussagekräftigen Modellen führen. Das im Folgenden dargestellte Verfahren wurde mit dem Ziel entwickelt, den Informationsverlust bei der Vergrößerung feiner Netze zu minimieren. Trotzdem wird eine mit dem oben dargestellten Verfahren vergleichbare Reduktion der Komplexität erreicht. Dies wird durch Fuzzifizierung der Parameter des Zellkonglomerats auf Basis der scharfen Parameter der einzelnen Zellen erreicht. Jeder Fuzzy-Parameter  $\tilde{\mathbf{m}}_{i,m}^\ominus$  bewertet den Grad, mit dem ein scharfer Wert repräsentativ für alle zusammengefassten Zellen ist. Die Transformation (Gleichung (4.29)) wird für jeden Parameter getrennt durchgeführt. Daher wird aus Gründen der Übersichtlichkeit  $\tilde{\mathbf{m}}_{i,m}^\ominus = \tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  eingeführt. Die Zugehörigkeitsfunktion jedes Fuzzy-Parameters  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  wird dabei in zwei Schritten gewonnen.

Zunächst wird der Support als geschlossenes Intervall, das alle auftretenden Werte enthält, bestimmt. Werte außerhalb dieses Intervalls werden mit dem Zugehörigkeitsgrad  $\mu = 0$  bewertet. Des Weiteren wird angenommen, dass die Gesamtheit der Zellen  $\omega(\{\mathcal{B}_i^\ominus\})$  am besten durch den gewichteten Mittelwert

$$\bar{\mathbf{m}}_i^\ominus = \frac{\sum_{\mathcal{B}_k^\ominus \in \omega(\{\mathcal{B}_i^\ominus\})} \mathbf{m}_k^\ominus \cdot V(\mathcal{B}_k^\ominus)}{\sum_{\mathcal{B}_k^\ominus \in \omega(\{\mathcal{B}_i^\ominus\})} V(\mathcal{B}_k^\ominus)} \quad (4.30)$$

mit den Parametern  $\mathbf{m}_k^\ominus$  und den Volumenanteilen  $V(\mathcal{B}_k^\ominus)$  repräsentiert wird. Dieser Wert wird mit dem Zugehörigkeitswert  $\mu = 1$  bewertet. Zwischenwerte der Zugehörigkeitsfunktion können vereinfacht durch lineare Verbindung des Modalwerts mit den Grenzen des Supports festgelegt werden (vgl. Abbildung 4.8). Durch dieses Vorgehen werden die Parameter des groben Netzes anschaulich durch Homogenisierung des heterogenen Zellverbandes bestimmt und trotz der Reduktion der Komplexität die Informationen über vorhandene Einzelwerte konserviert. Mittels der Bewertung des Einflusses einzelner Zellgruppen auf das Gesamtverhalten und insbesondere durch Abbildung der Streubreite der diskreten scharfen Parameter wird implizit ein Maß für die Güte der Zellvergrößerung erhalten.

Die erhaltenen Fuzzy-Parameter  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  werden im zweiten Schritt ebenfalls zu einer a prio-



**Abbildung 4.8:** Fuzzyfizierte Modellgröße bzw. Berechnungsparameter  $\tilde{m}_i^\Theta$

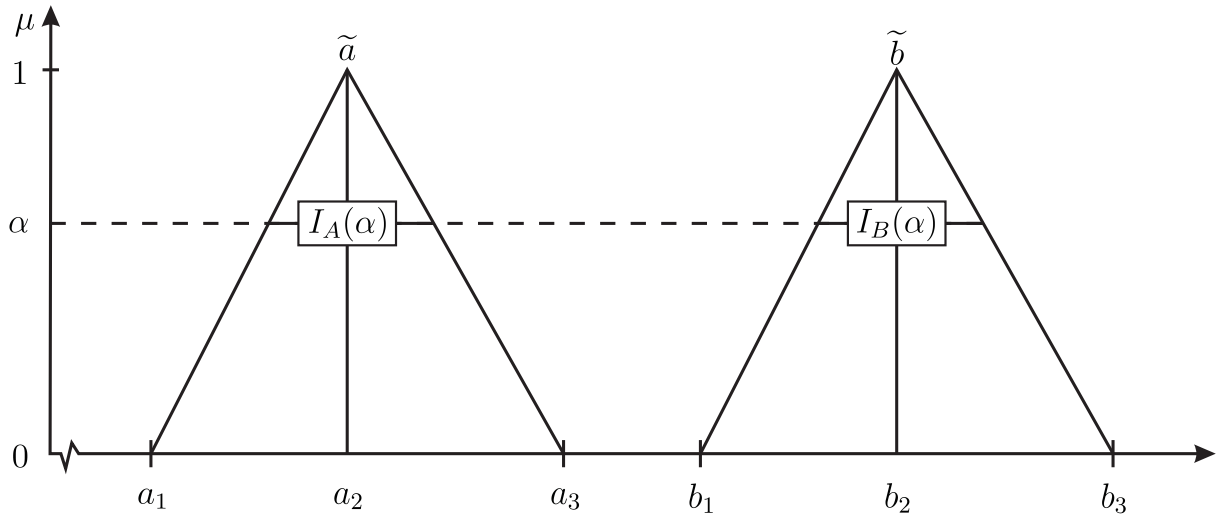
ri festgelegten Anzahl  $n_m$  repräsentativer Elemente zusammengefasst. Die dargestellten Nachteile der eingangs beschriebenen Unterteilung in starr festgelegte Klassen werden weitgehend durch den Einsatz eines Clusterverfahrens vermieden.

Die Zusammenfassung der Parameter zu Gruppen mit möglichst großer Ähnlichkeit zwischen den dazugehörenden Elementen wird mit dem k-Medoid-Clusterverfahren [84] realisiert. Dieses Verfahren gehört zu den deterministischen, partitionierenden Verfahren. Die Klassifizierung eines Parameters wird realisiert, indem zunächst  $n_m$  repräsentative Elemente  $\tilde{p}_1^\Theta, \dots, \tilde{p}_k^\Theta, \dots, \tilde{p}_{n_m}^\Theta \in \tilde{\mathfrak{P}}^\Theta \subset \tilde{\mathfrak{M}}^\Theta$  aus der Gesamtheit der Elemente  $\tilde{m}_i^\Theta$  des Datensatzes  $\tilde{\mathfrak{M}}^\Theta$  ausgewählt werden. Anschließend werden diesen repräsentativen Elementen nach dem Kriterium größtmöglicher Ähnlichkeit schrittweise weitere Elemente zugeordnet. Jedes repräsentative Element  $\tilde{p}_k^\Theta$  und die ihm zugeordneten Elemente  $\tilde{m}_i^\Theta$  bilden den Cluster  $C_k$ . Alle Cluster  $C_1, \dots, C_k, \dots, C_{n_m}$  bilden die Clusterkonfiguration  $\mathcal{C}$ . Das Ziel des Algorithmus ist es, eine Clusterkonfiguration zu bestimmen, so dass die kumulierten Unterschiede der Elemente  $\tilde{m}_i^\Theta$  jeweils zu ihren repräsentativen Elementen  $\tilde{p}_k^\Theta$

$$\sum_{k=1}^{n_m} \sum_{\tilde{m}_i^\Theta \in C_k} d(\tilde{p}_k^\Theta, \tilde{m}_i^\Theta) \Rightarrow Min \tag{4.31}$$

minimiert werden. Weisen die Parameter  $\tilde{m}_i^\Theta$  numerische Werte auf, so wird in praktischen Anwendungen die Unähnlichkeit  $d(\tilde{p}_k^\Theta, \tilde{m}_i^\Theta)$  oft mit Hilfe des *Euklid*'schen Abstandsmaßes beschrieben. Dieses Maß bewertet den Abstand von Punkten mit scharfen Koordinaten im mehrdimensionalen Raum.

Um das Clusterverfahren für die Zusammenfassung von Fuzzy-Modellgrößen bzw. Fuzzy-



**Abbildung 4.9:** Abstandsmaß zwischen Fuzzy-Größen: Bezeichnungen

Berechnungsparametern, wie beispielsweise die Fuzzy-Schädigungsvariable  $\tilde{d}_i^\ominus$ , nutzen zu können, ist es notwendig, die Unähnlichkeit  $d(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$  von Fuzzy-Größen zu quantifizieren. *Tran & Duckstein* [133] erweiterten hierfür das *Euklid'sche* Abstandsmaß für Intervalle  $I_A = [a_1, a_2]$  und  $I_B = [b_1, b_2]$

$$\begin{aligned} d_I^2(I_A, I_B) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{a_1 + a_2}{2} + x(a_2 - a_1) \right) - \left( \frac{b_1 + b_2}{2} + y(b_2 - b_1) \right) \right)^2 dx dy \\ &= \left( \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{b_1 + b_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

und wenden dieses auf die  $\alpha$ -Niveaus von zu vergleichenden Fuzzy-Zahlen an. Dabei kann der Einfluss der  $\alpha$ -Niveaus mit einer linearen Funktion  $f(\alpha) = 1 - \alpha$  gewichtet werden. Mit den in Abbildung 4.9 dargestellten Bezeichnungen definieren *Tran & Duckstein* das Abstandsmaß für zwei Fuzzy-Größen  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  als gewichteten Abstand der Intervalle der  $\alpha$ -Niveaus.

$$d^2(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{\int_0^1 d_I^2(I_a(\alpha), I_b(\alpha)) \cdot f(\alpha) d\alpha}{\int_0^1 f(\alpha) d\alpha} \quad (4.33)$$

Das mit Gleichung (4.32) gegebene Abstandsmaß für Intervalle ist, wie von den Autoren angegeben, symmetrisch und vereinfacht sich für scharfe Zahlen  $I_A = [a, a]$  und  $I_B = [b, b]$

zum *Euklid*'schen Abstandsmaß. Die geforderte Eigenschaft

$$d^2(I_A, I_A) = 0 \quad (4.34)$$

für beliebige Intervalle  $I_A$  hingegen wird wegen der unabhängigen Integration über die beiden Intervalle nicht erfüllt. Gleichung 4.32 ist daher keine Erweiterung des *Euklid*'schen Abstandsmaßes. Für das weitere Vorgehen wurde daher Gleichung (4.32) durch

$$\begin{aligned} d_I^2(I_A, I_B) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \left( \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right) + x(a_2 - a_1) \right) - \left( \left( \frac{b_1 + b_2}{2} \right) + x(b_2 - b_1) \right) \right)^2 dx \\ &= \left( \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right) - \left( \frac{b_1 + b_2}{2} \right) \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right) - \left( \frac{b_2 - b_1}{2} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

ersetzt [134].

Die zu klassifizierenden Parameter  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  liegen als Fuzzy-Dreieckszahlen vor. Diese speziellen Fuzzy-Größen werden lediglich durch die Angabe des Supports und des Modalwerts charakterisiert (vgl. Abbildung 4.9). Für zwei Fuzzy-Dreieckszahlen  $\tilde{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  und  $\tilde{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$  kann das Abstandsmaß durch Einsetzen von Gleichung (4.35) in Gleichung (4.33) unter Berücksichtigung des linearen Funktionsverlaufs der Äste mit

$$\begin{aligned} d^2(\tilde{a}, \tilde{b}) &= \frac{1}{6} [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + \\ &\quad a_1(a_2 + a_3 - b_2 - b_3) + a_2(a_3 - b_1 - b_3) - \\ &\quad a_3(b_1 + b_2) + b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3] \end{aligned} \quad (4.36)$$

angegeben werden.

Die Bestimmung der Clusterkonfiguration  $\mathcal{C}$  lässt sich in zwei Phasen unterteilen:

1. Bestimmung der Initialkonfiguration,
2. Optimierung der Clusterkonfiguration.

Die erste Phase beginnt mit der Festlegung des zentralen Elementes  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  als dem ersten repräsentativen Element. Dieses zeichnet sich durch eine minimale Unähnlichkeit

$$\sum_{\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus \in \tilde{\mathfrak{M}}^\ominus} d(\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus) \Rightarrow Min \quad (4.37)$$

zu allen anderen Elementen aus. Die verbleibenden  $n_m - 1$  repräsentativen Elemente  $\tilde{\mathbf{p}}_2^\ominus, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{n_m}^\ominus$  der Initialkonfiguration werden mit einem iterativen Vorgehen identifiziert. In

jedem Iterationszyklus wird ein weiteres Element  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  hinzugefügt, durch das die Zielfunktion (4.31) minimiert wird. Dieses Element wird in vier Schritten aus den verbleibenden Elementen ausgewählt:

1. Auswahl eines bislang noch nicht betrachteten Elements  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus \in \tilde{\mathfrak{M}}^\ominus$
2. Auswahl eines weiteren Elements  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus \in \tilde{\mathfrak{M}}^\ominus \wedge \tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus \neq \tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$ .  
Bestimmung des kleinsten Abstandes  $D_j$  von  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  zu einem repräsentativen Element.  
Berechnung des Abstandes  $d(\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus)$ .  
Ist der Abstand  $d(\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus) < D_j$ , wird das Element  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  zum neuen potentiellen Cluster mit dem Zentrum  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  hinzugefügt. Der Wert

$$C_{ji} = \max(D_j - d(\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus), 0) \quad (4.38)$$

ist ein Maß für die Verbesserung der Zielfunktion durch die Auswahl von  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$ .

3. Die Gesamtverbesserung der Zielfunktion bei Auswahl von  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  als neues repräsentatives Element wird durch Auswertung von Gleichung (4.38) für alle Elemente mit

$$s_i = \sum_{\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus \in \tilde{\mathfrak{M}}^\ominus \setminus \{\tilde{\mathbf{p}}^\ominus \cup \{\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus\}\}} C_{ji} \quad (4.39)$$

bestimmt.

4. Die Schritte 1 bis 3 sind für alle möglichen Clusterzentren  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus \in \tilde{\mathfrak{M}}^\ominus \setminus \tilde{\mathfrak{P}}^\ominus$  durchzuführen. Das Element  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$ , für das  $s_i$  maximiert wird, wird zur Menge der repräsentativen Elemente hinzugefügt.

Dieser Prozess wird solange wiederholt, bis  $n_m$  repräsentative Elemente der Initialkonfiguration gefunden wurden.

In der zweiten Phase wird die Initialkonfiguration optimiert. Dazu wird überprüft, ob alternative Clusterzentren eine Reduktion der Zielfunktion (4.31) bewirken.

Zunächst wird für ein repräsentatives Element  $\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus$  die Wirkung eines Tausches mit einem Element  $\tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus$  auf die Zielfunktion quantifiziert. Bei Betrachtung eines beliebigen Elements  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  wird die Wirkung des Tausches mit  $C_{jih}$  beschrieben. Zur Bestimmung von  $C_{jih}$  werden drei Fälle unterschieden:

1. Der Abstand von  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  zu den beiden Alternativen ist größer als der kleinste Abstand zu einem anderen Clusterzentrum.

$$\begin{aligned} \exists \tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus \in \tilde{\mathcal{P}}^\ominus \setminus \{\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus\} : \quad & d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus) < \max(d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus), d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus)) \\ \Rightarrow C_{jih} &= 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

2.  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  liegt im Einzugsgebiet von  $\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus$ , d. h.  $d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus) < \min_{\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus \in \tilde{\mathcal{P}}^\ominus \setminus \{\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus\}} d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus)$ . Das Maß  $C_{jih}$  wird in Abhängigkeit vom Abstand von  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  zum zweitnächsten repräsentativen Element  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  mit

$$C_{jih} = \begin{cases} d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus) - d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus) & \text{falls } d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus) < d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus) \\ d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus) - d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus) & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.41)$$

bestimmt.

3.  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  liegt nicht im Einzugsgebiet von  $\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus$ , aber im potentiellen Einzugsgebiet von  $\tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus$ :

$$C_{jih} = d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus) - d(\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus, \tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus) \quad (4.42)$$

Die dargestellte Berechnung von  $C_{jih}$  wird für alle nicht repräsentativen Elemente  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  durchgeführt und zur Gesamtauswirkung des Tausches von  $\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus$  und  $\tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus$

$$T_{ih} = \sum_j C_{jih} \quad (4.43)$$

addiert.

Nach dem beschriebenen Vorgehen werden alle potentiellen Tauschmöglichkeiten von  $\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus$  mit Elementen  $\tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus$  untersucht und  $T_{ih}$  bestimmt. Von Interesse dabei ist das Paar  $(\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus, \tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus)$ , welches  $T_{ih}$  minimiert. Ein Tausch führt zu einer Verbesserung der Zielfunktion, wenn  $T_{ih} < 0$  erfüllt ist. Dann werden die Elemente  $\tilde{\mathbf{p}}_i^\ominus$  und  $\tilde{\mathbf{m}}_h^\ominus$  vertauscht und ein neuer Zyklus wird durchgeführt. Dies erfolgt solange, bis kein Tausch zu einer Verbesserung der Zielfunktion führt.

Die so bestimmte optimale Clusterkonfiguration  $\mathcal{C}^{opt}$  besteht nun aus  $n_m$  Clustern mit den jeweiligen repräsentativen Elementen und den dazugehörigen Datenelementen. Die a priori festgelegte Anzahl  $n_m$  wird i. A. heuristisch bestimmt. Sie sollte mindestens der



vermuteten Anzahl der Cluster in der Datenstruktur entsprechen. Da die tatsächliche Anzahl der Cluster jedoch unbekannt ist, ist es sinnvoll die Datenanalyse mit unterschiedlichen Vorgaben für  $n_m$  durchzuführen. Dabei ist es zielführend in einer Nachlaufrechnung die Abstände der repräsentativen Elemente der Ausgangskonfiguration untereinander mit einer festgelegten Schranke zu vergleichen. Bei Unterschreitung des Grenzwertes, d. h. bei großer Ähnlichkeit der Clusterzentren, kann  $n_m$  reduziert werden. Mit dem neu ermittelten  $n_m$  ist dann das dargestellte Clusterverfahren zu wiederholen.

Ein repräsentatives Element  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  und die zugehörigen Elemente  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  bilden einen Cluster  $C_k$ . In vielen Anwendungen werden die Elemente eines Clusters durch das repräsentative Element  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  ersetzt, d. h. sie werden auf  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  „gerundet“. Durch die Zugehörigkeit zum selben Cluster wird ein hohes Maß an Ähnlichkeit der Elemente untereinander und zu dem repräsentativen Element ausgedrückt. Dadurch ist zwar ein geringer „Rundungsfehler“ zu erwarten, dennoch gehen bei diesem Vorgehen Informationen der Ausgangsdaten verloren.

In dieser Arbeit wird daher ein alternatives Vorgehen zur Zusammenfassung der Elemente eines Clusters vorgestellt. Im Rahmen der Netzvergrößerung von FEM-Modellen beschreiben die zusammenzufassenden Elemente  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  eines Clusters  $C_k$ , individuelle Eigenschaften der Teilgebiete  $\mathcal{B}_i^\ominus$ . Nach der Zusammenfassung der Elemente weisen die Teilgebiete dieselbe Eigenschaft  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  auf. Der differenzierte Ausgangszustand wird quasi homogenisiert. Der erwähnte Informationsverlust infolge der „Rundung“ kann dabei vermieden werden, wenn das repräsentative Element  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  die Eigenschaften  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  und  $\tilde{\mathbf{m}}_j^\ominus$  und  $\tilde{\mathbf{m}}_k^\ominus$  und ..., d. h. alle Elemente des Clusters  $C_k$  gleichzeitig abbildet. Durch den Einsatz der Fuzzy-Technologie ist es möglich diesen multivalenten Zustand zu beschreiben. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Elemente  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  eines Clusters Fuzzy-Größen sind, kann die aussagenlogische Und-Verknüpfung durch die Vereinigungsbildung

$$\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus = \bigcup_{\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus \in C_k} \tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus \quad (4.44)$$

ersetzt werden. Dadurch wird nicht nur eine verlustfreie Zusammenfassung der Elemente des Clusters  $C_k$  erreicht, sondern darüber hinaus wird durch die Unschärfe von  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$  ein implizites Maß für die Güte der Netzverfeinerung und der Cluster-Bildung erhalten. Die Güte der Netzverfeinerung bestimmt die Unschärfe der Fuzzy-Parameter  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  und durch Gleichung (4.44) direkt die Unschärfe repräsentativen Elemente  $\tilde{\mathbf{p}}_k^\ominus$ . Große Unschärfen der Fuzzy-Parameter  $\tilde{\mathbf{m}}_i^\ominus$  können beispielsweise durch die Zusammenfassung von Teilgebieten

mit stark unterschiedlichen Eigenschaften verursacht werden. Die Güte der ermittelten Cluster-Konfiguration wird durch die Ähnlichkeit der Elemente  $\tilde{m}_i^\theta$  der Cluster beschrieben. Cluster mit sehr unähnlichen Elementen führen durch die Vereinigungsbildung in Gleichung (4.44) zu repräsentativen Elementen mit größerer Unschärfe als Cluster mit ähnlichen Elementen.

Das dargestellte Verfahren kann zur Vergrößerung beliebiger Netze eingesetzt werden. Dem multivalenten Zustand der zusammengefassten Teilbereiche wird dabei durch den Einsatz von Fuzzy-Methoden und Methoden der explorativen Datenanalyse optimal Rechnung getragen.

## 4.4 Bewertung mittels Expertensystemen

Expertensysteme (engl.: expert systems) sind eine erfolgreiche Teildisziplin der „Künstlichen Intelligenz (KI)“ (engl.: artificial intelligence (AI)).

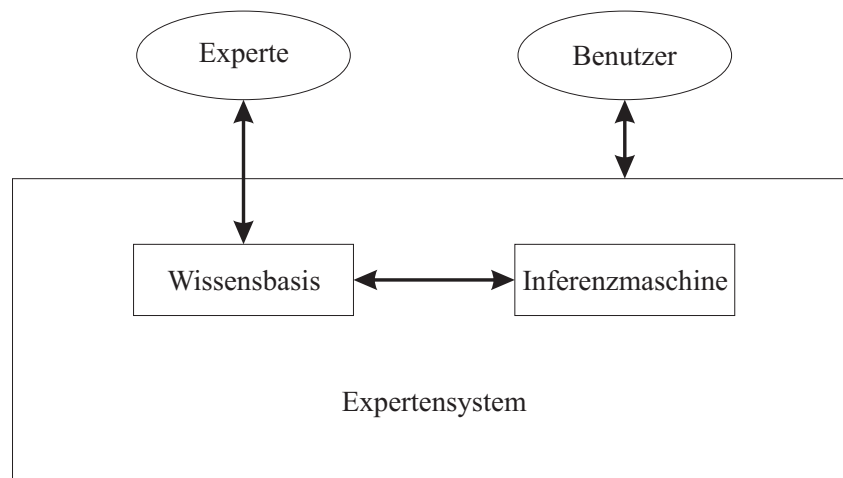
„Ziel der Expertensysteme ist es, dem Anwender Wissen und Fertigkeiten zur Verfügung zu stellen, über die normalerweise nur speziell ausgebildete oder erfahrene Personen (Experten) verfügen.“ [65]

Der Aufbau von Expertensystemen, auch „wissensbasierte Systeme“ (engl.: knowledge based systems) genannt, umfasst nach *Hartmann & Lehner* [77] mindestens

- eine Wissensbasis oder Wissensbank (engl.: knowledge base) und
- einen Schlußfolgerungs- bzw. Inferenzmechanismus (engl.: inference engine).

Die Wissensbasis enthält das problembezogene Wissen des Systems. Für eine zu lösende Problemstellung werden mit Hilfe der Inferenzmaschine auf der Grundlage der Wissensbasis Schlussfolgerungen gezogen und eine Problemlösung vorgeschlagen. Idealerweise wird gefordert, dass die beiden Komponenten unabhängig voneinander sind; d. h. im Besonderen sollte kein Problemlösungswissen in der Verarbeitungsstrategie der Inferenzmaschine enthalten sein.

Wissensbasierte Systeme können in Abhängigkeit von der Art der Wissensrepräsentation weiter unterteilt werden. Die folgenden Darstellungen beschränken sich dabei auf regelbasierte Expertensysteme. Diese bilden das problemspezifische Wissen in Form eines Systems



**Abbildung 4.10:** Minimalkonfiguration eines Expertensystems

von Inferenzregeln ab. Im einfachsten Fall kann eine Regel durch einen Bedingungs- und einen Aktionsteil („Wenn  $A_i$ , Dann  $B_j$ “) gegeben sein. Der Bedingungsteil wird Antezedent genannt und der Aktionsteil wird als Konsequent bezeichnet.

Werden bei der Auswertung der Regeln unscharfe Antezedenten und/oder unscharfe Konsequenzen berücksichtigt, so liegt ein unscharfes regelbasiertes System vor.

Unscharfe regelbasierte Expertensysteme, auch Fuzzy-Expertensysteme genannt, zeichnen sich durch eine Reihe von positiven Eigenschaften aus, die ihren Einsatz im Rahmen der Schädigungsquantifizierung von Brückentragwerken als Ergänzung zu den bereits dargestellten Methoden sinnvoll erscheinen lassen.

Fuzzy-Expertensysteme sind verhältnismäßig einfach umzusetzen und flexibel. Sie können problemlos an einen veränderten Kenntnisstand angepasst werden, und sie sind in der Lage, Expertenwissen direkt zu modellieren. Dies gilt auch und besonders für Probleme, für die mathematische Zusammenhänge nur schwer oder überhaupt nicht abgeleitet werden können. Durch die Repräsentation des Wissens in (unscharfen) regelbasierten Systemen als System von (unscharfen) Bedingungen und (unscharfen) Aktionen wird diese „modellfreie Approximation“ möglich. Für unscharfe regelbasierte Systeme wies *Kosko* [96] nach, dass sie jedes System modellieren können. Das FAT-Theorem (engl.: Fuzzy Approximation Theorem; fuzzy-logisches Theorem der Näherung) besagt, „dass ein fuzzy-logisches System sich einem kontinuierlichen System beliebig genau annähern kann (über einer „kompakten“ oder geschlossenen und beschränkten Menge). Dazu gehören alle Systeme, die man in der Integral- und Differentialgleichung untersucht, und nahezu alle Systeme,

die die Wissenschaft erforscht“ [95]. Ein weiterer Vorteil regelbasierter Systeme liegt in der Tatsache, dass das in einem System zusammengefasste problemspezifische Wissen in expliziter Form vorliegt. Im Gegensatz zu anderen Formen der Wissensrepräsentation (z. B. neuronale Netze), bei welchen das Wissen implizit, d. h. im System integriert vorliegt, kann die Wissensbasis direkt auf Plausibilität geprüft und ggf. angepasst werden. Darüber hinaus ermöglichen regelbasierte Expertensysteme die Implementierung eines Moduls zur Entscheidungsrekonstruktion. Dies ist besonders mit Hinblick auf die Beweissicherung im Rahmen der Beurteilung geschädigter Brücken hinsichtlich der Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ von großer Bedeutung.

Fuzzy-Systeme werden seit ca. 1980 erfolgreich eingesetzt. Als erstes gelang es *Ebrahim Mamdani*, einen Dampferzeuger mit einem Fuzzy-Expertensystem zu regeln, der mit konventioneller Regelungstechnik nicht zu kontrollieren war. Inzwischen wurden viele Produkte des täglichen Lebens mit Fuzzy-Technologie verbessert. Fuzzy-Systeme wurden beispielsweise in Waschmaschinen, Kameras und Camcorder integriert. Eine Liste ausgewählter Produkte kann *Kosko* [95] entnommen werden.

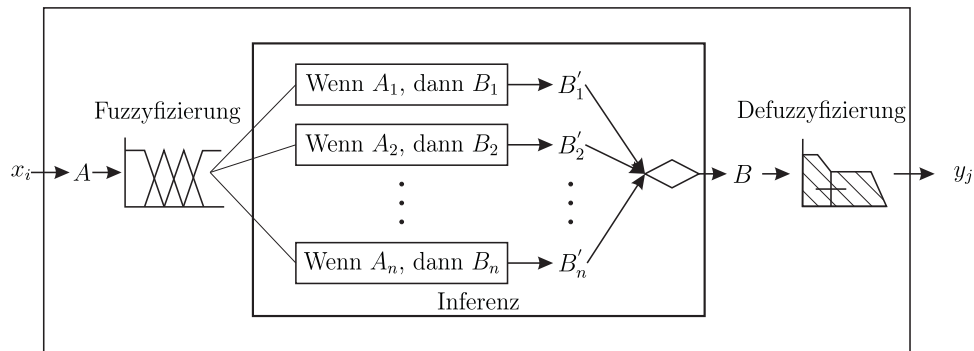
Im Brückenbau wurden Expertensysteme bislang erfolgreich im Rahmen des Bauwerksmanagements eingesetzt. Sie dienen der Unterstützung bei der Schadensdiagnose sowie bei der Planung von Instandsetzungsmaßnahmen [99, 132, 8, 145]. Im Bereich des konstruktiven Ingenieurbaus entwickelten beispielsweise *Schnellenbach-Held & Albert* [123] ein Expertensystem für den Entwurf und die Bemessung von Stahlbetontragwerken.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird jedoch nicht das Ziel verfolgt, Fuzzy-Expertensysteme zur Quantifizierung von Brückenschäden zu entwickeln. Es sollen lediglich ihre grundsätzlichen Fähigkeiten zur Ergänzung der bereits beschriebenen Methoden zur Zustandsbewertung aufgezeigt werden. Unscharfe regelbasierte Systeme lassen sich nahtlos in das hier dargestellte Gesamtsystem zur Beurteilung geschädigter Brücken integrieren.

Der grundsätzliche Aufbau von Fuzzy-Systemen ist mit den Komponenten

- Fuzzyfizierung,
- Inferenz und
- Defuzzyfizierung

in Abbildung 4.11 dargestellt. Dieser insbesondere in der Regelungstechnik („Fuzzy-Controller“) eingesetzte Systemaufbau kann praktisch unverändert in das Gesamtsystem integriert werden. Lediglich die Defuzzifizierung wird im Rahmen dieser Arbeit durch ein Fuzzyfizienzmodul ersetzt. Die Komponenten und ihre Funktionsweisen werden nachfolgend erörtert.



**Abbildung 4.11:** Aufbau eines Fuzzy-Expertensystems; (un)scharfer Eingangswert  $x_i$ , Fuzzyfizierung, Inferenz, Defuzzyfizierung, scharfer Ausgangswert  $y_j$

#### 4.4.1 Fuzzyfizierung

Das Vokabular unscharfer regelbasierter Systeme besteht aus linguistischen Termen und Variablen (vgl. Abschnitt 3.6). Mit ihrer Hilfe werden sprachliche Ausdrücke in Form von unscharfen Mengen abgebildet. Das in der Wissensbasis enthaltene System von Regeln verknüpft diese linguistischen Terme (Antezedent) mit den entsprechenden Konsequenzen.

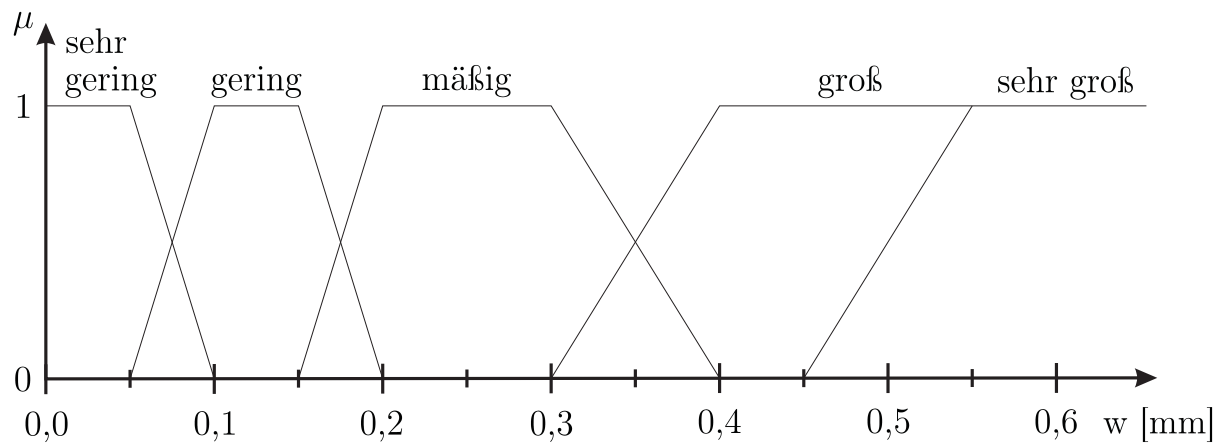
Benutzereingaben in Fuzzy-Expertensysteme können in Form von scharfen und unscharfen Größen erfolgen. Unter Fuzzyfizierung wird dabei i. A. die Umwandlung der scharfen Eingangsgrößen in unscharfe Größen des Systems verstanden. Ein scharfer Eingangswert wird mit Hilfe der Zugehörigkeitsfunktionen der unscharfen Mengen der linguistischen Terme diesen Termen graduell zugeordnet.

Zur Festlegung der Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Terme wurden zahlreiche problemangepasste Methoden mit Erfolg eingesetzt. Linguistische Terme sind Teil der Wissensbasis und sollen daher das problemspezifische Wissen abbilden. Der gegenwärtige Wissensstand kann beispielsweise mit Hilfe von Expertenbefragungen und anschließender Datenauswertung ermittelt werden. In [135, 148, 21, 36, 147] sind detaillierte Vorgehensweisen und Fallbeispiele enthalten. In Ergänzung dazu, insbesondere bei geringem Umfang der Befragung, sind weitere Informationsquellen für die Festlegung der Zugehörigkeitsfunktionen heranzuziehen. Die Durchführung der Wissensakquisition kann durch Fachliteratur, Vorschriften und Normen, wissenschaftliche Standards und weitere Quellen ergänzt werden. *Lücken* [99] legte beispielsweise die linguistische Variable „Rissbreite“ auf Grundlage der Unterteilung der Rissbreite im Schadenskatalog der Richtlinie RI-EBW-

PRÜF [28]

- Rissbreiten  $< 0,1$  mm
- Rissbreiten zwischen  $0,1$  mm und  $0,2$  mm
- Rissbreiten zwischen  $0,2$  mm und  $0,4$  mm
- Rissbreiten  $> 0,4$  mm

und normativen Grenzwerten einschlägiger Stahlbeton- und Spannbetonnormen [6, 10, 7] fest (Abbildung 4.12).



**Abbildung 4.12:** Linguistische Variable „Rissbreite“; Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Terme

Mit Hilfe linguistischer Modifikationsoperatoren ist es möglich, linguistische Terme entsprechend dem natürlichen Sprachgebrauch algorithmisch zu transformieren. Beispiele für Modifikatoren, welche die Lage der Gipfelpunkte bzw. der Träger unscharfer Mengen  $\tilde{A}$  unverändert lassen, und korrespondierenden sprachlichen Modifikatoren sind [22]:

- sehr  $\tilde{A} \rightarrow \mu_A(x)^2$ ,
- sehr sehr  $\tilde{A} \rightarrow \mu_A(\mu_A(x)^2)^2$ ,
- ziemlich  $\tilde{A} \rightarrow \mu_A(x)^{\frac{1}{2}}$ ,
- nicht  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}^C$ .

Des Weiteren lassen sich linguistische Terme entsprechend dem umgangssprachlichen Gebrauch durch „und“ und „oder“ verknüpfen. Die aussagenlogischen Operatoren werden dabei i. A. in Operatoren für unscharfe Mengen

$$A \text{ und } B \rightarrow A \cap B$$

$$A \text{ oder } B \rightarrow A \cup B$$

transformiert. Dabei ist zu unterscheiden, ob die zu verknüpfenden Terme der selben linguistischen Variable angehören oder nicht. Im ersten Fall können prinzipiell alle Paare von t-Normen und t-Conormen (vgl. Abschnitt 3.6) angewendet werden. Im zweiten Fall sind die zu verknüpfenden Terme zunächst mittels Zylindererweiterung (Gleichung (6.3)) auf die selbe Grundmenge zu erweitern. Die eigentliche Verknüpfung erfolgt dann analog zum ersten Fall.

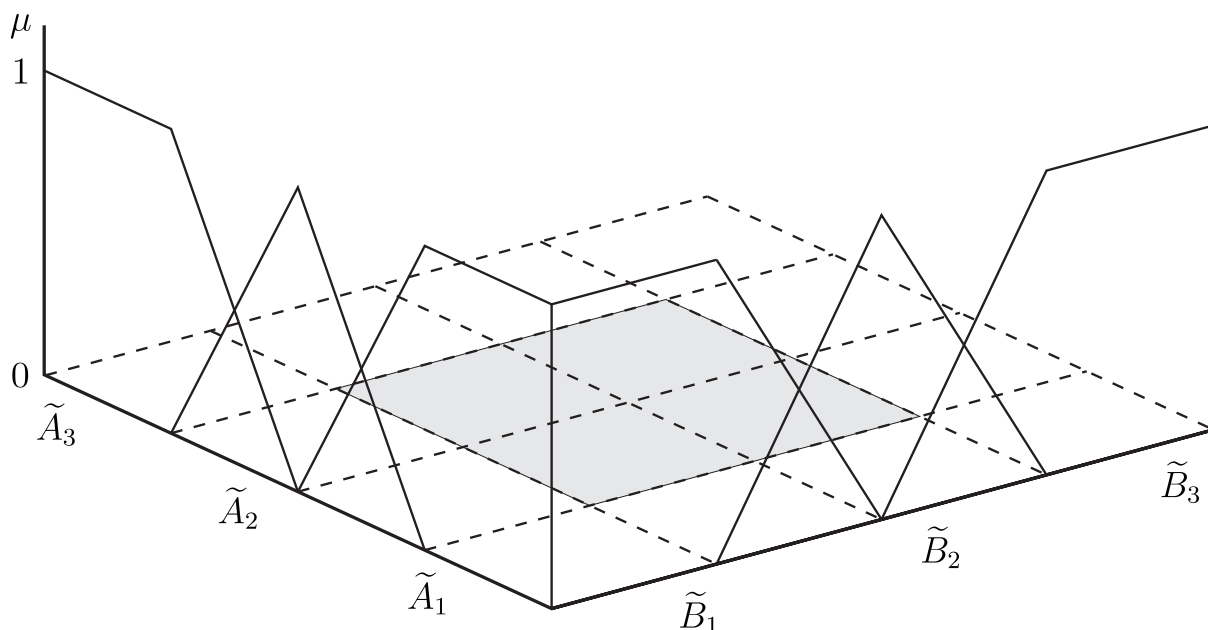
#### 4.4.2 Inferenz

Linguistische Terme der Eingangsvariablen werden mittels Regeln auf linguistische Terme der Ausgangsvariablen abgebildet. Die Gesamtheit der Regeln und linguistischen Variablen ist die Wissensbasis des Systems.

Eine sehr kompakte Möglichkeit der Repräsentation der Fuzzy-Regeln stellt ein „fuzzy-logisches assoziatives Gedächtnis“ (FAM) (engl.: fuzzy associative memory) dar. *Kosko* [95] verwendet diesen Begriff, „um zu beschreiben, wie ein fuzzy-logisches System funktioniert, nämlich parallel und partiell.“ Wie in Abbildung 4.11 bereits dargestellt, werden stets alle Regeln des Systems angewendet (parallel). Der Einfluss der Konsequenten auf das Gesamtergebnis wird in der Phase der Aggregation mit dem Aktivierungsgrad, der sich aus der Fuzzyfizierung ergibt, gewichtet (partiell). Für eine linguistische Eingangsvariable  $A$  und eine linguistische Ausgangsvariable  $B$  ist in Abbildung 4.13 eine Visualisierung der FAM dargestellt. Auf den Achsen sind die unscharfen Mengen der linguistischen Terme aufgetragen. Ihre Schnittmengen repräsentieren den Beitrag einer Regel zum Gesamtergebnis.

Für die Auswertung der einzelnen Regeln unter Berücksichtigung des verknüpften Wahrheitswertes/Aktivierungsgrades  $a$  und der Zusammenfassung der jeweiligen Konsequenzen zum Fuzzy-Ergebnis sind Operatorenpaare zu wählen. Ein häufig eingesetztes Schema





**Abbildung 4.13:** Fuzzy-logisches assoziatives Gedächtnis (FAM): linguistische Eingangsvariable  $A$  und linguistische Ausgangsvariable  $B$ ; Einflussbereich der Regel „Wenn  $\tilde{A}_2$ , dann  $\tilde{B}_2$ “

benutzt Minimum- und Maximum-Operatoren zur Abbildung der logischen Implikation „und“ und „oder“. Der Konsequent einer Regel wird dann durch Abschneiden der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu(x) = \min(\mu(x), a)$  für Werte, die größer als der Aktivierungsgrad  $a$  sind, erhalten. Der Aktivierungsgrad wird in praktischen Anwendungen häufig mit einem Vertrauenswert modifiziert. Dadurch kann, insbesondere bei mehreren unterschiedlichen Informationsquellen (Experten), ihre Glaubhaftigkeit in die Regelauswertung integriert werden.

Wird für die Auswertung einer Regel der Minimum-Operator angewendet, so ist für die Zusammenfassung der Maximum-Operator einzusetzen (*Mamdani-Interferenz*). Wie bereits in Abschnitt 4.4.1 dargestellt, können theoretisch alle Paare von t-Normen und t-Conormen (vgl. Abschnitt 3.6) und auch alternative Inferenzverfahren [94] genutzt werden. Der Einsatz des Minimum- und Maximum-Operators ist jedoch umfassend untersucht und es ist die einzige Kombination, für die uneingeschränkt die Gültigkeit des Distributivgesetzes angenommen werden kann (vgl. Abschnitt 3.6).

### 4.4.3 (De-)Fuzzyfizierung

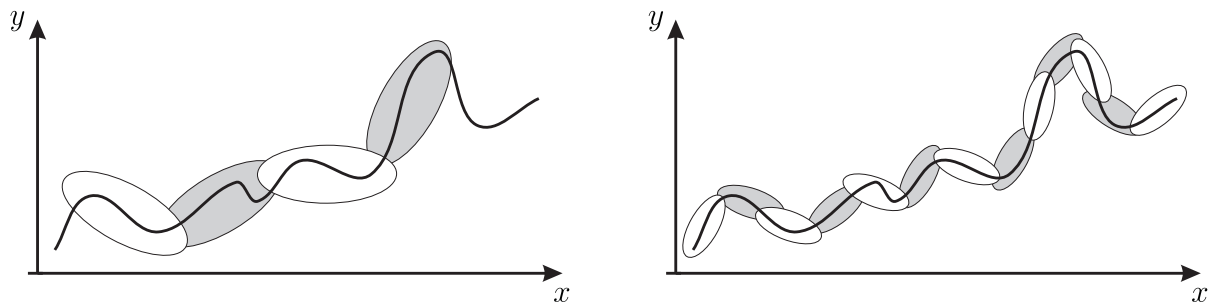
Die zusammengefasste unscharfe Ergebnisgröße ist als linguistischer Term anzusehen. Für den Einsatz in der Regelungstechnik ist dieses unscharfe Ergebnis in eine scharfe Stellgröße des Regelkreises zu transformieren. Das Ergebnis muss defuzzyfiziert werden. In [83] sind zahlreiche gängige Verfahren zur Defuzzyfizierung von Fuzzy-Ergebnisgrößen dargestellt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist der Einsatz von Fuzzy-Expertensystemen jedoch als Teilmodul der Zustandsbestimmung geschädigter Brücken vorgesehen. Die unscharfen Ergebnisgrößen werden daher wie unscharfe Messwerte behandelt.

Wird die Fuzzy-Ergebnisgröße als Fuzzy-Modellgröße bzw. Fuzzy-Berechnungsparameter interpretiert, so muss sie den in Abschnitt 3.6 dargestellten Bedingungen genügen. Sie muss eine konvexe und normierte unscharfe Menge sein. Da die Fuzzy-Ergebnisgröße i. A. aus mehreren linguistischen Termen aggregiert wird, kann dies für beliebige Inferenzmechanismen nicht vorausgesetzt werden. Im „Fuzzyfizierungs-Modul“ werden die Fuzzy-Ergebnisgrößen ggf. normiert und die nicht-konvexen Zugehörigkeitsfunktionen durch Hüllkurven ersetzt. Der dadurch implizierte Fehler ist dabei von untergeordneter Bedeutung, da i.d.R. nur die extremalen Werte der Ergebnisgrößen von Interesse sind, nicht jedoch mögliche Zwischenwerte.

Die dadurch erhaltenen Fuzzy-Modellgrößen bzw. Fuzzy-Berechnungsparameter können direkt als Eingangsgrößen in die unscharfe Tragwerksanalyse (vgl. Abschnitt 6) eingehen. Auf diese Weise können nicht nur die Unschärfe der Eingangswerte in das System, sondern auch die Güte des Expertensystems selbst auf die Ergebnisgröße abgebildet werden. Wie bereits dargestellt, kann sich ein fuzzy-logisches System jedem kontinuierlichen System annähern. Die Güte der Approximation hängt dabei entscheidend von der Anzahl der Regeln in der Regelbasis ab. Aus der Darstellung der FAM (Abbildung 4.13) wird ersichtlich, dass mit den Regeln der gesamte Problembereich überdeckt wird. Wenige Regeln führen daher zu großen Bereichen (Abbildung 4.14, links) und zu einer schlechteren Approximation des Problems. Bei einer erhöhten Anzahl der Regeln (Abbildung 4.14, rechts) werden die Bereiche kleiner und das Problem wird besser approximiert.

Durch dieses Vorgehen wird ein Maß für die Güte des Fuzzy-Expertensystems implizit in der Ergebnisgröße abgebildet und der Einfluss des Kenntnisstandes (ausgedrückt durch die Regelbasis) auf die Genauigkeit der Beurteilung geschädigter Brücken kann objektiv



**Abbildung 4.14:** Approximation eines Systems durch „Regelflecken“: links, gröbere Näherung mit wenigen Regeln; rechts, feinere Näherung mit mehr Regeln

nachvollzogen werden.

## 4.5 Inkorporation von Erfahrungswissen

Brücken werden gemäß DIN 1076 [9] regelmäßigen Prüfungen unterzogen. Das durchführende Personal (Bauingenieure und Bautechniker) ist für diese Aufgabe speziell geschult und sammelt im Laufe der Jahre viel Erfahrung an.

Eine der wesentlichen Leistungen des menschlichen Gehirns ist die Fähigkeit, mit neuen unbekanntem Situationen umgehen zu können. Dazu wird erworbenes Fachwissen und angesammelte Erkenntnis aus bereits erlebten (ähnlichen) Situationen (Erfahrung) genutzt und in einem deduktiven Vorgehen auf die neue Situation angewendet. Der Versuch der Nachbildung dieser Fähigkeit bildet die Grundlage der in Abschnitt 4.4 dargestellten Fuzzy-Expertensysteme.

Die Einschätzung eines Schadens auf Grund weniger objektiver Fakten (Messdaten) durch einen Fachmann, erfolgt dabei durch Analogieschlüsse von ähnlichen bereits untersuchten Schäden, angereichert mit Kenntnissen über mögliche Schadensursachen bzw. Schädigungsmechanismen. Diese Einschätzungen hängen wesentlich von den Fähigkeiten des Experten ab und sind, trotz der objektiven Faktenbasis, subjektiv geprägt. Durch den Einsatz von Fuzzy-Methoden kann diese wichtige Informationsquelle dennoch in einem formalisierten Bewertungsschema eingesetzt werden.

Das menschliche Gehirn ist bei der Verarbeitung von Fakten, der Bewertung von Situationen und dem Einschätzen von Sachverhalten äußerst leistungsfähig. Dennoch weist es Kapazitätsgrenzen auf. Es kann nur eine begrenzte Anzahl von Fakten bewerten und in

Verbindung zueinander setzen. Ist die Anzahl von Einflussfaktoren zu gross und/oder weist das System der gegenseitigen Beeinflussungen eine zu große Komplexität auf, so neigt das Gehirn zu übermäßigen Vereinfachungen einzelner Einflussgrößen und Abhängigkeiten, um die (zu) große Informationsmenge verarbeiten zu können.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind auf Grund der strikten Trennung zwischen der Zustandsbeschreibung (Abschnitt 4 und Abschnitt 5) und der Zustandsbewertung (Abschnitt 6 und Abschnitt 8) ausschließlich deskriptive Merkmale der Struktur (Schäden, Schadensausmaß) und nicht deren Auswirkung auf die Zustandsnote einzuschätzen. Einzelne Bauteile bzw. lokale Schäden können individuell untersucht und eingeschätzt werden. Die Beurteilung ihres kumulativen Einflusses auf die Zustandsbeurteilung hingegen wird von den Fachleuten nicht erwartet. Die fachmännische Einschätzung kann sich daher auf wenige Einflussgrößen und moderat komplexe Modelle stützen. Dadurch sind zutreffendere Expertisen zu erwarten.

In Abschnitt 4.2 wurden Methoden dargestellt, mit denen auf der Basis objektiver Daten (Messergebnisse) unscharfe Modellgrößen bzw. Berechnungsparameter abgeleitet wurden. Diese Daten, aber auch die Ergebnisgrößen der in Abschnitt 4.4 erörterten Fuzzy-Expertensysteme, sind vom Fachpersonal zu bewerten und ggf. zu korrigieren. Dies gilt insbesondere für den Erstentwurf unscharfer Parameter auf der Basis weniger Messwerte (Abschnitt 4.2.3). Die vorliegende Fuzzy-Größe ist vom Experten auf Plausibilität zu überprüfen. Dabei findet aus theoretischer Sicht ein Übergang von der Deutung als unscharfe Menge zur Interpretation als Möglichkeitsdichtefunktion statt. Letztere bewertet scharfe Werte direkt bzgl. der Möglichkeit des Auftretens. Wird eine Fuzzy-Größe als Möglichkeitsdichtefunktion interpretiert, so kann wegen Gleichung (3.43) aus der Kenntnis der Möglichkeit  $\Pi(A)$  nicht mehr auf die Möglichkeit des konträren Ereignisses  $\Pi(A^C)$  geschlossen werden. Eine Korrektur der Möglichkeitsdichtefunktion wird durch Anheben einzelner Zugehörigkeitswerte oder durch Erweiterung von  $\alpha$ -Niveaus durchgeführt. Wegen der in Abschnitt 4.2.3 festgelegten maximalen Spezifität des Erstentwurfes soll die modifizierte Möglichkeitsdichtefunktion stets oberhalb der Zugehörigkeitsfunktion des Erstentwurfes liegen.

# Kapitel 5

## Zustandsprognose

Durch die Nutzung und Umwelteinflüsse verschlechtert sich der Zustand eines jeden Bauwerks kontinuierlich. Wiederkehrende Einwirkungen lassen Brücken „altern“ und erfordern den Einsatz von Ressourcen zum Erhalt der Bausubstanz.

Nach einer kurzen Einführung in die Problematik in Abschnitt 5.1 werden in Abschnitt 5.2 ausgewählte Schädigungsprozesse dargestellt. Dabei wird auf die chemischen und physikalischen Vorgänge bei diesen zeitabhängigen Prozessen eingegangen. In Abschnitt 5.3 werden anschließend auf der Basis dieser Erkenntnisse Prognosemodelle für die Schadenentwicklung abgeleitet.

### 5.1 Allgemeines

Brücken sind ein wichtiger Bestandteil der Verkehrsinfrastruktur und ihre Errichtung ist mit dem Einsatz von erheblichen Ressourcen verbunden. Die Brückenbauwerke des Bundes summieren sich zu einem Anlagevermögen von ca. 40 Mrd. Euro. Sie werden daher mit dem Ziel einer, im Vergleich zu anderen Bauwerken, hohen Lebensdauer konzipiert. Während dieser Dauer sind die Bauwerke neben nicht wiederkehrenden Einwirkungen (z. B. Anprall, Feuer, ...) auch wiederkehrenden Einflüssen ausgesetzt. Nicht wiederkehrende Einwirkungen führen i. A. zu erheblichen diskontinuierlichen Veränderungen des Bauwerkszustandes. Dieser muss im Einzelfall mit den in Abschnitt 4 dargestellten Methoden erfasst werden. Dem gegenüber kann der Einfluss wiederkehrender Einwirkungen auf den Bauwerkszustand für Zeitpunkte in der Zukunft näherungsweise prognostiziert

werden. Eine realitätsnahe Prognose der zeitabhängigen Deterioration der Bauwerke ist eine wesentliche Voraussetzung für den zielgerichteten Einsatz von Ressourcen für Instandhaltungsmaßnahmen (vgl. Abbildung 5.1). Der Erhalt der Bausubstanz verursacht Kosten, die in den Haushalt eingestellt werden müssen. Die Festlegung des volkswirtschaftlich optimalen Zeitpunktes für Erhaltungsmaßnahmen ist von großer Bedeutung für das Brückenmanagement und die Minimierung von Kosten.

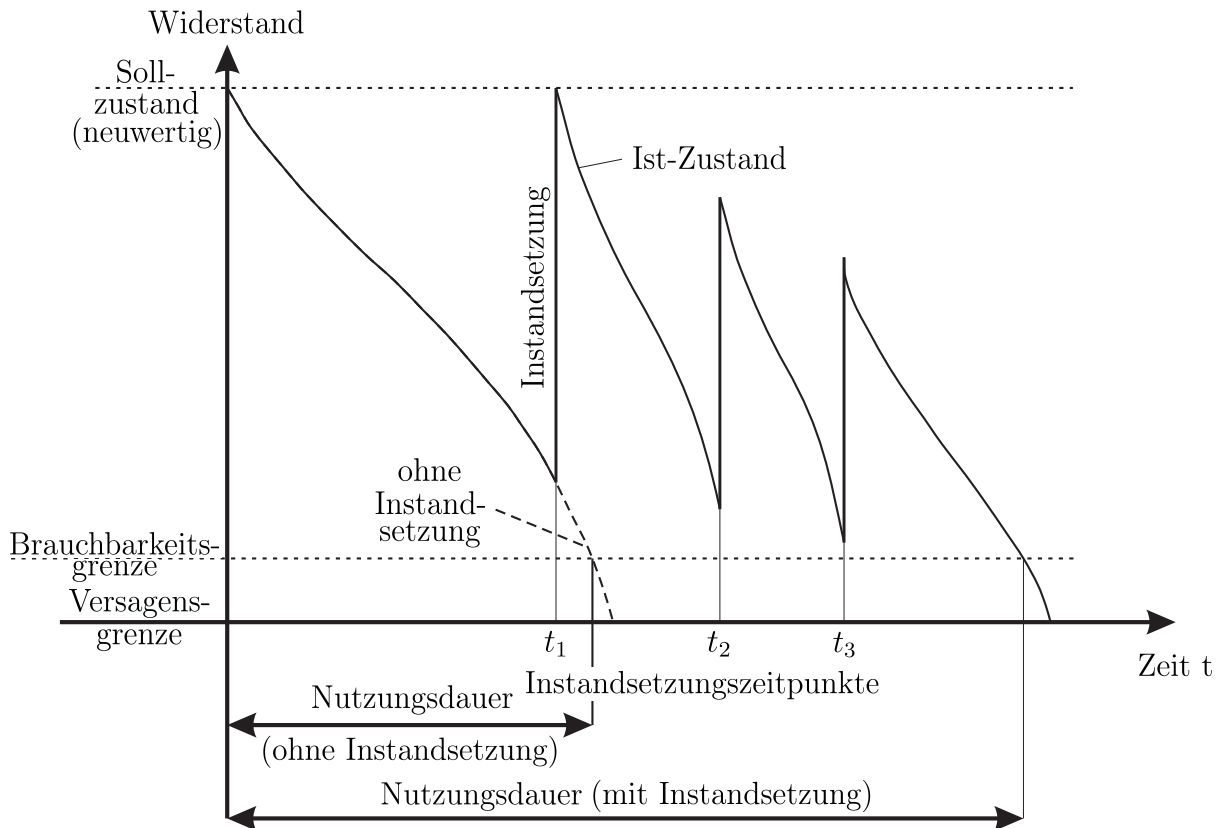


Abbildung 5.1: Brückenbauwerke, Nutzungsdauer und Instandsetzung (nach [68])

## 5.2 Ausgewählte zeitabhängige Schädigungsprozesse

Die Ursachen kontinuierlicher Schädigungsprozesse in Brückentragwerken und insbesondere in Stahlbetonkonstruktionen können physikalischer Natur sein bzw. mit chemisch-reaktiven Prozessen zusammenhängen.

Physikalische Schädigungsprozesse führen bei unveränderter chemischer Zusammensetzung

zung des Werkstoffs zu Veränderungen der Gefügestruktur auf mikroskopischer bzw. makroskopischer Ebene und beeinflussen dadurch das makroskopische Werkstoffverhalten. Für poröse Materialien ist der „Frost-Tau-Wechsel“ ein wichtiger Schädigungsmechanismus. Der „Frost-Tau-Wechsel“ bezeichnet den klimatischen Wechsel von Temperaturen um den Gefrierpunkt von Wasser. Mineralisch gebundene Baustoffe, wie z. B. Beton, besitzen eine poröse, kapillare Struktur und sind nicht wasserdicht. Wird Beton Temperaturen unter  $0^\circ\text{C}$  ausgesetzt, so kann das Kapillarwasser von der flüssigen in die feste Phase übergehen. Dieser Übergang ist mit einer Volumenzunahme von ca. 9% verbunden. In Verbindung mit der thermisch bedingten Volumenveränderung des Werkstoffs selbst, können dadurch lokale Spannungskonzentrationen auftreten, welche die Materialfestigkeit überschreiten und zu Rissen bzw. Abplatzungen führen. Die Volumenzu- bzw. abnahme während eines „Frost-Tau-Wechsels“ führt zusätzlich zu einem kapillaren Pumpeffekt, der die Wasseraufnahme, und damit indirekt die Schädigung, weiter steigert. Für die Schädigung ist somit die Anzahl der Frost-Tau-Wechsel entscheidend. Kann diese für zukünftige Zeitpunkte bestimmt werden, so kann auch die zu erwartende Schädigung näherungsweise prognostiziert werden.

Neben dem eben beschriebenen Schädigungsmechanismus können durch die sehr großen inneren Oberflächen der porösen Struktur von Beton auch trocknungsinduzierte Schädigungen auftreten. „Hygrisch induzierte Spannungen in den Nano-, Mikro- und Kapillarporen beeinflussen das makroskopische Festigkeits- und Steifigkeitsverhalten von Beton und führen infolge von Verformungsbehinderungen zu Schädigungen auf der Meso- und der Makro-Ebene“ [107]. Eine Beschreibung der Schädigung kann im Rahmen eines von *Meschke* [107] dargestellten Vorgehens auf der Basis eines Mehrphasenmodells, das sich aus einer festen Phase (Zuschlag und Zement), einer flüssigen Phase (Porenwasser) und einer gasförmigen Phase (Gemisch aus Luft und Wasserdampf) zusammensetzt, erfolgen. Die Wechselwirkungen auf den unterschiedlichen Skalen beschreibt *Meschke* auf makroskopischer Ebene mit der Hilfe von Zustandsvariablen und der Festlegung einer Funktion der freien Energiedichte  $\Psi$

$$\Psi = \Psi(\varepsilon - \varepsilon^p - \varepsilon^f, m_l - \varrho_l \phi_l^p, d, \gamma_f, T) + U(\alpha_R, \alpha_{DP}). \quad (5.1)$$

Mit den externen Variablen (linearisierter Verzerrungstensor  $\varepsilon$ , Feuchtegehalt  $m_l$  und Temperatur  $T$ ) sowie den internen Zustandsvariablen (plastischer Verzerrungstensor  $\varepsilon^p$ , Kriechverzerrungen  $\varepsilon^f$ , irreversibler Anteil der Porosität  $\phi_l^p$ , isotroper Schädigungsparameter  $d$ , Mikrogleitung in den Nanoporen  $\gamma_f$  und die inneren Variablen  $\alpha_R$  und  $\alpha_{DP}$ )

bildet diese Funktion die Grundlage zur Ableitung der konstitutiven Beziehungen zur Berücksichtigung der Kopplung zwischen mechanischen, hygri-schen und kriechbedingten Verformungen bzw. Schädigungen.

Bei metallischen Werkstoffen ist der physikalische Schädigungsvorgang der Materialermüdung von besonderer Bedeutung. Sie beschreibt einen langsam voranschreitenden Schädigungsprozess in einem Werkstoff unter Umgebungseinflüssen wie wechselnde mechanische Belastung bzw. wechselnde Temperatur. Im Brückenbau kann insbesondere die isotherme mechanische Ermüdung, ausgelöst durch den nicht ruhenden Verkehr, bemessungsrelevant werden. Thermische Ermüdung infolge wechselnder Temperaturen, z. B. infolge des Jahreszeitenwechsels, sind dabei i. A. von untergeordneter Bedeutung. Der Prozess der mechanischen Schädigung beginnt mit lokalen Versetzungsbewegungen, die bereits bei Beanspruchungen unterhalb der Streckgrenze vor allem an der Bauteiloberfläche an Querschnittsübergängen und Oberflächenkerben oder im Volumen an Werkstoffinhomogenitäten wie Einschlüssen, Poren, Ausscheidungen, Dispersionen etc. durch lokale Spannungsüberhöhungen auftreten. Lokale plastische Verzerrungen sind die Folge. Diese können sich bei weiterer zyklischer Beanspruchung konzentrieren. Daraus können sich Mikro- und in der Folge Makrorisse bilden, die schließlich zum Bauteilversagen führen können. Dieser Schädigungsprozess kann bereits bei Spannungen, die deutlich unter der statischen Festigkeit liegen, beginnen. Das Werkstoffverhalten oder Bauteilverhalten unter zyklischer Beanspruchung kann experimentell mit dem *Wöhler*-Versuch bestimmt werden. Maßgebende Einflussgrößen sind neben den Materialeigenschaften u. A. die Spannungsamplitude und die Mittelspannung der zyklischen Beanspruchung sowie die Anzahl der Lastwechsel. Sowohl die Spannungsamplitude als auch die Mittelspannung werden während eines Versuchs konstant gehalten. Die zu ermittelnde Größe ist die ertragbare Lastspielzahl bis eine definierte Schädigung (Versagen) auftritt. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Lastwechsel bis zum Bruch und der Spannungsamplitude wird als *Wöhlerkurve* bezeichnet. Aus ihr kann für ein Material bzw. Bauteil bei gegebener Spannungsamplitude die Anzahl der Lastwechsel bis zum Eintreten des Versagens abgelesen werden. Auf dieser Grundlage können beispielsweise für Brücken Lebensdauerprognosen erstellt werden. Ist die Verkehrsentwicklung prognostizierbar, so ist die Anzahl der Lastwechsel in einem Beobachtungszeitraum vorhersagbar. Zusammen mit den auftretenden Spannungen im Bauwerk kann damit eine Lebensdauer oder ein Schädigungszustand zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt bestimmt werden.



Chemische Schädigungsprozesse verändern die Materialeigenschaften des Werkstoffes, indem das Ausgangsmaterial chemisch umgewandelt wird. Die Reaktionsprodukte weisen i. A. schlechtere Eigenschaften als das Ursprungsmaterial auf, bzw. führen durch Volumenzunahme zu örtlichen Spannungskonzentrationen. Im letzten Fall werden sie auch als chemisch treibende Angriffe bezeichnet. „Als typischer Vertreter chemisch treibender Angriffe in Betonstrukturen kann die Alkali-Silika Reaktion angesehen werden“ [107]. Sie bezeichnet eine chemische Reaktion zwischen Alkalien des Zementsteins im Beton und Betonzuschlägen mit alkalilöslicher Kieselsäure. Dabei entsteht ein quellfähiges Gel, das zu enormen Quelldrücken und zu örtlichen Überbeanspruchungen führen kann, wodurch das Betongefüge zerstört wird. Dieser Vorgang kann auf der Basis der Bilanzgleichungen (Impuls und Massenbilanz) modelliert und daher prognostiziert werden. Weitere Beispiele treibender Angriffe sind das Magnesiatreiben, das Kalktreiben und das Sulfat-Treiben. Durch Bildung von Ettringit beim Sulfat-Treiben wird ebenfalls infolge einer starken Volumenzunahme das Betongefüge geschädigt.

Lösende Angriffe hingegen verschlechtern die Betoneigenschaften durch Zersetzung des Zementsteins. Säuren, austauschfähige Salze, Meerwasser, organische Fette und Öle und weitere in der Umgebung von Betonbauwerken vorkommende Stoffe wandeln schwer lösliche Bestandteile des Betons von der Oberfläche ausgehend in leicht lösliche Stoffe um, die beispielsweise vom Regenwasser ausgewaschen werden können. Die dadurch verursachte Gefügauflockerung führt nicht nur zu einer nachhaltigen Verschlechterung der mechanischen Kenngrößen des Materials, sondern wegen der Vergrößerung der Angriffsfläche auch zu einer Beschleunigung des Lösungsprozesses.

Eine indirekte Schädigung von Betonstrukturen wird durch die „Carbonatisierung“ hervorgerufen. Die Carbonatisierung bezeichnet die chemische Umwandlung der alkalischen Bestandteile des Zementsteines durch Kohlendioxid  $\text{CO}_2$  der Umgebungsatmosphäre in Calciumcarbonat. Dabei sinkt der pH-Wert des Zementsteines ab und es erfolgt eine Veränderung der Porenstruktur des Zementsteins. Die chemische Umwandlung erfolgt in drei Teilschritten:

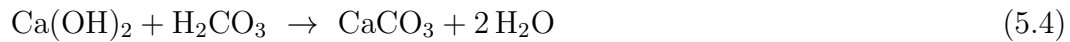
1. Lösen des kristallinen Portlandit



2. Lösen von  $\text{CO}_2$  im alkalischen Porenwasser



### 3. Neutralisation von $\text{Ca}(\text{OH})_2$ durch $\text{H}_2\text{CO}_3$



Problematisch ist diese chemische Reaktion insbesondere wegen der Reduktion des pH-Wertes des Zementsteines. Beton weist nach der Herstellung einen pH-Wert von ca. 12,5 auf, wodurch sich auf der Oberfläche des im Beton eingebetteten Bewehrungsstahls eine Passivierungsschicht bildet, die den Stahl dauerhaft vor Bewehrungskorrosion (siehe unten) schützt. Durch die Herabsetzung des pH-Wertes auf Werte unter 10 wird die Oxidschicht um den Betonstahl aufgelöst (Depassivierung) und er beginnt zu korrodieren. Die Carbonatisierung beginnt an den Bauteiloberflächen und schreitet mit einer spezifischen Geschwindigkeit in das Bauteilinnere fort. Die Geschwindigkeit ist dabei im Wesentlichen von folgenden Faktoren abhängig:

**Exposition des Betons:** Trockene Betone in Innenräumen oder an witterungsgeschützten Einbauorten carbonatisieren langsamer als Betone, die der freien Bewitterung ausgesetzt sind.

**Alter des Betons:** Die Carbonatisierungsgeschwindigkeit verringert sich mit zunehmendem Betonalter nach dem Wurzel-Zeit-Gesetz. Aufgrund dieses Zusammenhangs lassen sich Aussagen zum Carbonatisierungsfortschritt treffen.

**Porosität des Betons:** Aufgrund der größeren Oberfläche carbonatisieren poröse Betone schneller als dichte Betone.

Die Zeitspanne bis die Carbonatisierungsfront die Betondeckung durchquert und den Bewehrungsstahl erreicht hat wird Einleitungsphase genannt. Ihr folgt die Schädigungsphase, in welcher der Bewehrungsstahl ungeschützt den Umgebungseinflüssen ausgesetzt ist.

Ungeschützte und unbehandelte metallische Werkstoffe reagieren mit ihrer Umgebung; sie korrodieren. Die Reaktion von Metallen in Gegenwart von Wasser (Luftfeuchtigkeit) mit Sauerstoff wird als Sauerstoffkorrosion bezeichnet. Das Korrosionsprodukt, das dabei aus Eisen oder Stahl entsteht, wird „Rost“ genannt. Der häufige Einsatz dieser Materialien und insbesondere von Stahl im Brückenbau sowie die unvermeidbare Gegenwart von Feuchtigkeit begründen die große Bedeutung, die diesem Korrosionstyp im Rahmen der Zustandsprognose von Brückentragwerken zukommt. Chemisch betrachtet setzt sich

Rost aus Eisen(II)-oxid, Eisen(III)-oxid und Kristallwasser zusammen. Rost ist somit ein wasserhaltiges Oxid des im Stahl enthaltenen Eisens. Im Gegensatz zu anderen metallischen Werkstoffen wie Chrom, Aluminium oder Zink schützt dieses Oxid nicht vor weiterer Zersetzung. Vielmehr wirkt es sich günstig auf das zur Oxidation notwendige feuchte Milieu aus. Rost bildet lockere Gefüge geringer Festigkeit. Mit einer Dichte von ca.  $3,5 \text{ g/cm}^3$  weist Rost bei identischer Masse ca. das doppelte Volumen des Ausgangsmaterials ( $\rho_{\text{Stahl}} = 7,85 \text{ g/cm}^3$ ) auf. Tatsächlich steigt das Volumen des Rostes aber auf Grund der Porosität auf das 7-fache an, wodurch eine große, wasserbindende und damit zusätzlich rostbeschleunigende Oberfläche gebildet wird.

Allein in den Vereinigten Staaten verursacht Korrosion Kosten in Höhe von ca. 276 Mrd. \$ pro Jahr [2]. Stahl muss daher gegen Korrosion geschützt werden. Aus dem elektrochemischen Modell der Rostbildung lassen sich drei Maßnahmen zum Schutz von Stahl gegen Korrosion ableiten: Fernhalten von Feuchtigkeit, Fernhalten von Sauerstoff und Abbau der Potenzialdifferenz in Lokalelementen (bei Kontakt mit anderen Metallen). Im Rahmen der praktischen Umsetzung der Schutzmaßnahmen unterscheidet man aktiven und passiven Korrosionsschutz. Aktiver kathodischer Korrosionsschutz schützt das Bauteil mit Hilfe einer Opfer- oder Schutzanode. Diese besteht aus einem unedleren Metall als das Bauteil und löst sich daher bevorzugt auf. Ein Beispiel für diese Maßnahme ist die Verzinkung von Stahl. Passiven Korrosionsschutz erreicht man durch einen geeigneten Überzug des Werkstoffes, um den Zugriff korrodierender Medien zu vermeiden. Beispiele für diesen Maßnahmentyp sind die Passivierung des Bewehrungsstahls im nicht carbonatisierten Beton (siehe oben) oder das Aufbringen von Korrosionsschutzfarbe im Stahlbau. Dabei kann es bereits infolge von kleinen Fehlstellen des Korrosionsschutzes wegen der Volumenzunahme des Rostes zu großflächigen Beschädigungen der Ummantelung kommen und in der Folge zu einer deutlichen Erhöhung der Korrosionsgeschwindigkeit (vgl. Abbildung 5.2).

### 5.3 Modelle zur Prognose von Schadensentwicklungen

Prognosemodelle dienen zur Vorhersage der Veränderung eines Systemzustandes. Sie werden beispielsweise bei der Wettervorhersage eingesetzt. Im Rahmen des Bauwerksmanagements ist es für den zielgerichteten Einsatz von Ressourcen für Instandhaltungsmaßnah-



**Abbildung 5.2:** Starke Stahlkorrosion und Abplatzungen infolge der Volumenzunahme des Rostes

men an Brückenbauwerken von Interesse, die Deteriorationen der Bauwerke realitätsnah zu prognostizieren. Dabei stehen im Gegensatz zu Abschnitt 4 zeitabhängige Zustandsänderungen infolge wiederkehrender Umwelteinflüsse im Vordergrund (vgl. Abschnitt 5.2). Prognosemodelle zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines Schadens werden im Folgenden in Abhängigkeit vom methodischen Ansatz in zwei Modellgruppen unterteilt:

- probabilistisch
- phänomenologisch.

Probabilistisch basierte Modelle greifen auf beobachtete Zustandsänderungen existierender Bauwerke zurück, während phänomenologische Modelle den Schädigungsmechanismus auf Basis der chemischen und physikalischen Zusammenhänge beschreiben. In beiden Fällen wird i. A. ausgehend vom gegenwärtigen Zustand (Ist-Zustand) der Systemzustand zu einem zukünftigen Zeitpunkt  $t$  extrapoliert. Beide Ansätze werden nachfolgend skizziert. Sorgfältige Beobachtungen bilden, wie in Abschnitt 3 dargestellt, die Grundlage der Beschreibung von Systemen mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansätze. **Probabilistisch basierte** Modelle zur Prognose von Schadensentwicklungen an Brücken stützen sich auf die Annahme, dass sich ähnliche Bauwerke unter ähnlichen Umgebungsbedingungen auch ähnlich verhalten. Beobachtete Schadensentwicklungen an Bauwerken des Bestandes werden genutzt, um Aussagen über das zukünftige Verhalten eines vorliegenden Schadens machen zu können. Die Beschreibung der kontinuierlichen Veränderung des Brückenzustandes kann erheblich vereinfacht werden, wenn lediglich diskrete markante

Schadenszustände betrachtet werden. Der Übergang von einem Zustand zum nächsten kann mit Hilfe der *Markov*-Ketten-Theorie [23] beschrieben werden. Eine *Markov*-Kette ist ein stochastischer Prozess, der in diskreten Zeitschritten abläuft. Dabei wird jeweils von einem Zustand in einen nächsten übergegangen. Ist die Menge  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  der Zustände endlich, so liegt eine endliche *Markov*-Kette vor. Bei *Markov*-Ketten erster Ordnung hängt die Wahrscheinlichkeit für den Zustand zum Zeitpunkt  $t+1$  nur vom aktuellen Zustand zum Zeitpunkt  $t$  und nicht von der vorangegangenen Prozessgeschichte ab. Die *Markov*-Kette wird dann durch das Paar  $M = (S, P)$  beschrieben.  $P$  ist eine quadratische Matrix, welche die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen enthält. Für alle  $i, j \in S$  ist  $P_{ij}$  als Wahrscheinlichkeit zu interpretieren, dass  $M$  in einer definierten Zeitperiode vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  übergeht. Es gilt daher für alle  $i, j \in S$   $0 \leq P_{ij} \leq 1$  und  $\sum_j P_{ij} = 1$ . Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $P_{ij}$  können aus den bei Bauwerksinspektionen anfallenden Zustandsdaten abgeleitet und sukzessive durch neue Daten verbessert werden.

Die *Markov*-Ketten-Theorie wurde beispielsweise von *Forkert* [48] und *Lounis* [101] zur Prognose von Schadensentwicklungen an Brücken eingesetzt. *Forkert* entwickelte auf Basis der Theorie ein Modell zur Vorhersage der Entwicklung von Beschichtungsschäden an Stahlbrücken. *Lounis* behandelte mit seinem Modell die chloridinduzierte Bewehrungskorrosion an Stahlbeton- und Spannbetonbrücken. *Lounis* sieht in seinem Modell die Möglichkeit einer Anfangsschädigung vor.

Die bislang dargestellte und in den beiden Arbeiten eingesetzte *Markov*-Ketten-Theorie modelliert die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Systemzustand eintritt. Dabei sind sowohl der Ausgangs- als auch der Zielzustand scharf, d. h. es wird implizit vorausgesetzt, dass sie durch exakte Kenngrößen beschrieben werden können. Wie in Abschnitt 4 dargestellt, ist die Zustandsbestimmung von Bauwerken jedoch mit Unsicherheiten verbunden. Wird den beobachtbaren Eigenschaften  $\underline{\mathfrak{C}}$  in Gleichung (4.1) die Charakteristik „Fuzzyness“ zugeschrieben, so beschreiben sie den aktuellen Fuzzy-Zustand  $\tilde{s}_t$ . Die Verknüpfung unscharfer Systemzustände kann mit Hilfe einer von *Symeonaki & Stamou* [131] veröffentlichten Erweiterung der *Markov*-Ketten-Theorie erfolgen.

**Phänomenologische** Prognosemodelle beschreiben die Entwicklung von Schäden auf der Grundlage der chemischen und physikalischen Schädigungsmechanismen und den maßgebenden Prozessparametern. Letztere sind für jeden Einzelfall individuell zu bestimmen. Exemplarisch wird nachfolgend ein Modell zur Beschreibung des Korrosionsverhaltens

von Betonstahl skizziert. Dieses Modell basiert auf der grundlegenden Arbeit von *Tuutti* [136] und wurde von *Petryna* [117] zur Berücksichtigung der expliziten Korrosion-Schädigungsvariable  $d_{cor}$  umformuliert. Es beschreibt den in Abschnitt 5.2 beschriebenen Vorgang der Depassivierung des Bewehrungsstahls infolge der Carbonatisierung des Betons und der einsetzenden Korrosion. Entsprechend werden in dem Modell, ausgehend vom ungerissenen Zustand des Betons, zwei Zeitperioden unterschieden: die Einleitungsphase und die Schädigungsphase. In der Einleitungsphase wird der pH-Wert des Betons durch Reaktion des Zementsteins mit dem Kohlendioxid der Umgebungsluft gesenkt. Diese Phase ist abgeschlossen, wenn die Karbonatisierungsfrent den Bewehrungsstahl erreicht und dadurch der alkalische Korrosionsschutz verloren geht. Die Dauer  $t_0$  der Einleitungsphase wird im Wesentlichen durch die Betonüberdeckung und die Geschwindigkeit der Karbonatisierung bestimmt. Für die Berechnung der Einleitungsphase stehen anerkannte Modelle zur Verfügung. Eine gute Näherung bietet das sogenannte „Wurzel-t-Gesetz“ [62]. In der Schädigungsphase beginnt die material- und umgebungsabhängige Korrosion der Bewehrung, die zu einer Reduktion des Stahlquerschnitts führt. Wegen des komplexen Vorganges der Stahlkorrosion und den vielen Einflussfaktoren (z. B. Feuchte, Chloridkonzentration, ...) ist eine Bestimmung der zeitabhängigen Korrosionsgeschwindigkeit  $k_s$  nur näherungsweise möglich. *Petryna* nimmt  $k_s$  während der Schädigungsphase vereinfachend als konstant an und kann dadurch mit

$$A_s(t) = \begin{cases} n \frac{\pi D_0^2}{4} & \text{falls } t \leq t_0 \\ n \frac{\pi (D_0 - 2k_s t)^2}{4} & \text{falls } t_0 < t \leq t_f \\ 0 & \text{falls } t > t_f = \frac{D_0}{2k_s} \end{cases} \quad (5.5)$$

eine zeitabhängige Bewehrungsstahlfläche von  $n$  Stäben mit dem Nenndurchmesser  $D_0$  angeben. Eine zu Abschnitt 2.1.5 korrespondierende Formulierung der Schädigung der Stahlstäbe wird durch die Einführung der Korrosion-Schädigungsvariable  $d_{cor}$  und durch die Umformulierung von Gleichung (5.5) zu

$$A_s(t) = A_s(0)(1 - d_{cor}) \quad \Rightarrow \quad d_{cor} = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq t_0 \\ \left( \frac{2k_s t}{D_0} \right) & \text{falls } t_0 < t \leq t_f \\ 1 & \text{falls } t > t_f \end{cases} \quad (5.6)$$

erreicht.

Phänomenologische Modelle beschreiben, wie am obigen Beispiel gezeigt, den Zusammenhang von schädigenden Einflussgrößen und Parametern des numerischen Modells eines Brückentragwerks explizit in Form von algebraischen Ausdrücken. Sie können daher

nahtlos in bestehende Berechnungs- und Nachweisekonzepte integriert werden. Die schädigenden Einflussgrößen werden i. A. am Bauwerk bestimmt. Dies kann entweder durch direkte Messung (z. B. Karbonatisierungstiefe) oder durch Auswertung mehrerer sekundärer Merkmale erfolgen (z. B. der Feuchte und des Chlorideintrags für die Quantifizierung der Korrosionsgeschwindigkeit  $k_s$ ). In Abschnitt 4 wurde ausführlich der durch Gleichung (4.1) charakterisierte Übergang der Beobachtungsgrößen zu quantitativen Modellparametern und der Umgang mit auftretenden Unsicherheiten diskutiert. Wird Beobachtungsgrößen die Charakteristik „Fuzzyness“ zugeschrieben, so können diese Unsicherheiten einfach in die Prognosemodelle integriert werden. Die algebraischen Ausdrücke werden „fuzzyfiziert“. In Abbildung 5.3 ist der fuzzyfizierte Funktionsverlauf der Bewehrungskorrosion dargestellt. Dabei wurde die Dauer der Einleitungsphase  $\tilde{t}_0$  und die Korrosionsgeschwindigkeit  $\tilde{k}_s$  als Fuzzy-Parameter berücksichtigt. Die Dicke der bereits korrodierten Schicht des Bewehrungsstabes zu einem Zeitpunkt  $t_k$  wird in der vorliegenden Formulierung ebenfalls als Fuzzy-Größe erhalten. Dabei ist zu beobachten, dass die Streuung der Größe mit zunehmendem  $t$  ebenfalls zunimmt. Dies erfolgt in Übereinstimmung mit der menschlichen Intuition. Menschen verbinden i. A. mit der Prognose von Ereignissen, die in weiterer Zukunft liegen, größere Unsicherheit als mit Ereignissen in näherer Zukunft.

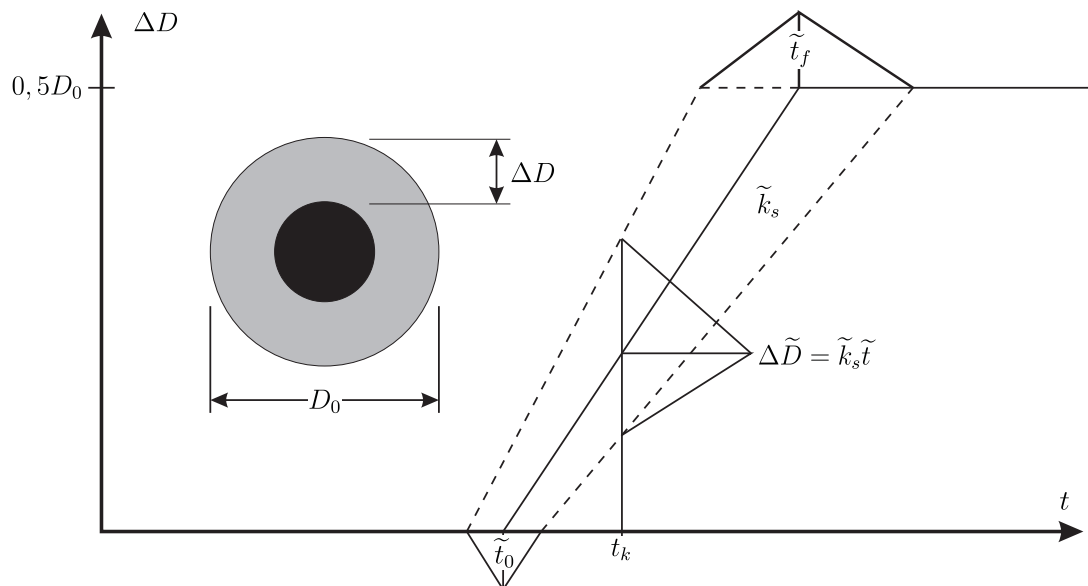


Abbildung 5.3: „Fuzzyfiziertes“ Korrosionsmodell für Betonstahl





## Kapitel 6

# Unscharfe Tragwerksanalyse mit der Fuzzy-Finite-Elemente-Methode

Im Rahmen einer unscharfen Tragwerksanalyse wird das Verhalten eines realen Brückentragwerks auf Basis der in Abschnitt 4 bestimmten, bzw. in Abschnitt 5 prognostizierten Tragwerksparameter simuliert. Die deterministischen Algorithmen für statische und dynamische Berechnungen werden „fuzzyfiziert“, d. h. zur Abbildung der Fuzzy-Eingangsgrößen auf die Fuzzy-Ergebnisgrößen erweitert. In Abschnitt 6.1 werden zunächst die Grundlagen für die Erweiterung von arithmetischen zu fuzzy-arithmetischen Operationen erörtert. Anschließend werden in Abschnitt 6.2 bestehende Verfahren zur Anwendung von Fuzzy-Methoden in numerischen Analysen dargestellt. In Abschnitt 6.3 wird dann ausführlich das im Rahmen der vorliegenden Arbeit neu entwickelte Verfahren diskutiert. Dies umfasst neben einer detaillierten Beschreibung der Implementierungsstrategie in eine Software-Bibliothek eine kritische Diskussion der Möglichkeiten direkter Fuzzyfizierung beliebiger Algorithmen. Abschnitt 6.4 schließt mit einer Gegenüberstellung der dargestellten bestehenden Verfahren und der neu entwickelten Fuzzy-Arithmetik mit besonderem Augenmerk auf ihre Effizienz.

### 6.1 Das Erweiterungsprinzip

Die Finite Elemente Methode ist ein weit verbreitetes Verfahren zur numerischen Simulation komplexer Tragwerke, wie sie im Brückenbau auftreten. Mit ihrer Hilfe ist es möglich,

Eingangsgrößen (z. B. Abmessungen, Materialeigenschaften, Lasten, ...) auf die gesuchten Zielgrößen (z. B. Schnittkräfte, Verformungen, Eigenfrequenzen, ...) abzubilden. Die Zielgrößen werden durch Lösung eines im allgemeinen nichtlinearen Gleichungssystems, eines Eigenwertproblems oder mittels expliziter Lösungsstrategien ermittelt. Unabhängig von der vorliegenden Problemformulierung ist die Transformation der Eingangsgrößen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  auf die Zielgrößen  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  durch die Abbildungsvorschrift

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

gegeben. Der Operator  $f$  repräsentiert die vereinfachte mathematische Darstellung des physikalischen Verhaltens des Tragwerks. Der Vektor der Eingangsgrößen  $\underline{x}$  kann in dieser Formulierung neben den eigentlichen Eingangsgrößen auch Modellparameter enthalten. Werden die scharfen Eingangs- und Modellparameter gemäß Abschnitt 4 und 5 zu Fuzzy-Größen erweitert, so wird auch die Abbildungsvorschrift fuzzyfiziert:

$$\underline{\tilde{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m) = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n). \quad (6.2)$$

Zadeh [141] schlug für den Übergang von  $f$  zu  $\tilde{f}$  das „Erweiterungsprinzip“ vor. Die Fuzzy-Größen (unscharfe Zahlen oder Intervalle)  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  werden dabei als unscharfe Mengen  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$  auf den Grundmengen  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  aufgefasst. Sind die Fuzzy-Größen unabhängig, so spannen sie den  $n$ -dimensionalen Raum der Eingangsgrößen  $\underline{\mathbf{X}}$  auf. Jede unscharfe Eingangsmenge  $\tilde{X}_i$  mit der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_i(x_i)$  mit  $x_i \in \mathbf{X}_i$  wird dann mittels „Zylindererweiterung“

$$\underline{\tilde{X}}_{i,zyl} = \mu_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \mu_i(x_i) \quad \forall x_k \in \mathbf{X}_k; 1 \leq k \leq n \quad (6.3)$$

auf die Dimension des Raums der Eingangsgrößen erweitert. Die Schnittmenge

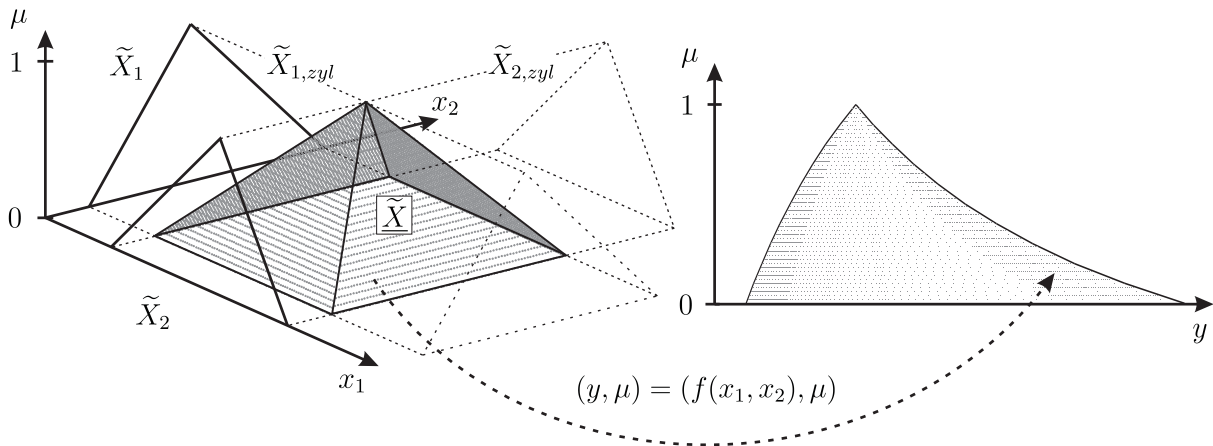
$$\underline{\tilde{X}} = \bigcap_{i=1}^n \underline{\tilde{X}}_{i,zyl} \quad (6.4)$$

entspricht dem unscharfen kartesischen Produkt der Fuzzy-Mengen  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$  im Produktraum  $\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_1 \times \dots \times \mathbf{X}_n$  und bildet die unscharfe Eingangsmenge in die Abbildungsvorschrift

$$(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_m) = \tilde{f}(\underline{\tilde{X}}). \quad (6.5)$$

Diese ist das mengentheoretische Pendant zur Gleichung (6.2).

Für die Schnittmengenbildung in Gleichung (6.4) kann prinzipiell jede Durchschnittsbil-



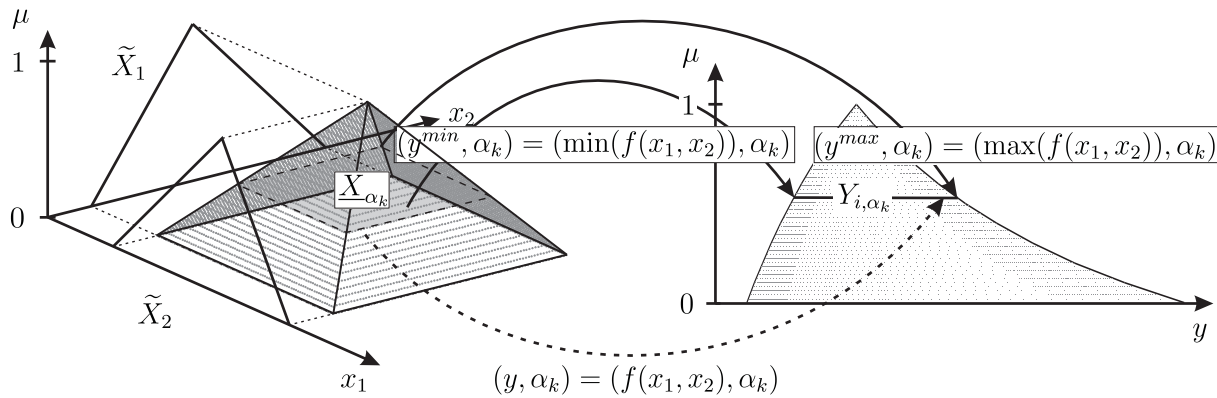
**Abbildung 6.1:** Unscharfes kartesisches Produkt im Eingangsraum und Abbildung in den Ergebnisraum mit Hilfe des Erweiterungsprinzips

dung  $\cap_t$  auf Basis einer t-Norm (vgl. Abschnitt 3.6) verwendet werden. Mit der nicht-interaktiven Mengenverknüpfung durch den MIN-Operator lässt sich das Erweiterungsprinzip in einer, gegenüber der von *Zadeh* vorgestellten, verallgemeinerten Form darstellen:

$$\begin{pmatrix} \mu(y_1) \\ \dots \\ \mu(y_m) \end{pmatrix}^T = \begin{cases} \sup_{(y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n)} \min \{ \mu(x_1), \dots, \mu(x_n) \} & \text{falls } \exists (y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.6)$$

In Abbildung 6.1 ist die Bildung des unscharfen kartesischen Produkts im zweidimensionalen, von zwei Fuzzy-Dreieckszahlen aufgespannten Eingangsraum und die Transformation in den eindimensionalen Ergebnisraum exemplarisch dargestellt. Die Punkte sind diskrete Ergebnisse der Abbildung gemäß Gleichung (6.6). Die Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße entspricht der oberen Einhüllenden aller diskreten Punkte.

Eine direkte punktweise Auswertung des Erweiterungsprinzips ist wegen der Supremumbildung in Gleichung (6.6) jedoch nur für diskrete Größen sinnvoll. Eingangsgrößen einer Strukturberechnung von Brückentragwerken sind im Allgemeinen jedoch reellwertig. Da aus numerischen Gründen mehrfache Instanzen der Komponenten des Ergebnisvektors  $(y_1, \dots, y_m)$  nicht sicher zu identifizieren sind und daher die Einhüllende nicht eindeutig zu bestimmen ist, beschränkt sich die Anwendbarkeit dann auf Funktionsoperatoren  $f$ , die in allen Variablen  $x_i$  streng monoton sind [93].



**Abbildung 6.2:** Abbildung des  $\alpha_k$ -Niveaus der unscharfen Eingangsmenge auf das  $\alpha_k$ -Niveau der Ergebnismenge

Beer [19] zeigte, dass Gleichung (6.6) ohne Einschränkung auf die scharfen  $\alpha$ -Niveaumengen  $\underline{X}_{\alpha_k}$  mit der Bedingung  $\mu(x_i) \geq \alpha_k$  angewendet werden kann. Für jedes  $\alpha$ -Niveau beschreibt das Erweiterungsprinzip dann die Abbildung der  $\alpha$ -Niveaumenge  $\underline{X}_{\alpha_k}$  der Fuzzy-Eingangsmenge  $\tilde{X}$  auf die  $\alpha$ -Niveaumengen  $Y_{i,\alpha_k}$  der Fuzzy-Ergebnismenge  $\tilde{Y}_i$

$$\underline{X}_{\alpha_k} \rightarrow Y_{i,\alpha_k} \quad (6.7)$$

Die „schichtweise“ Interpretation des Erweiterungsprinzips transformiert die Supremumbildung in Gleichung (6.6) zu einer globalen Minimum- bzw. Maximumbildung (Abbildung 6.2). Die untere Intervallgrenze des  $\alpha_k$ -Niveaus einer Komponente des Ergebnisvektors entspricht dem minimal auftretenden Funktionswert von  $f$  über dem Definitionsbereich  $\underline{X}_{\alpha_k}$ . Analog dazu wird die obere Intervallgrenze durch den maximalen Funktionswert festgelegt. Die Anwendung der Abbildungsvorschrift (6.7) auf eine endliche Anzahl von  $\alpha$ -Niveaus diskretisiert das Erweiterungsprinzip und bildet die Grundlage für eine praktische computerorientierte Umsetzung der Fuzzy-Arithmetik.

## 6.2 Lösungsverfahren mit deterministischer Grundlösung

Die Eingangsgrößen  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  in Gleichung (6.2) sind für die weiteren Betrachtungen als unabhängig vorauszusetzen. Die Auswertung des unscharfen Abbildungsoperators  $\tilde{f}$  wird

durch wiederholte Auswertung des scharfen Operators  $f$  ersetzt. Der Operator  $f$  ist die mathematische Beschreibung des zu untersuchenden deterministischen Systemverhaltens. Sie kann dabei in beliebiger formaler Darstellung gegeben sein. Beispielsweise als gewöhnliche Gleichung oder als komplexer Algorithmus, wie bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungssystemen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente. Der Operator  $f$  unterliegt keinen Einschränkungen, solange sich das Problem in Form von Gleichung (6.2) darstellen lässt.

Die Eigenschaften des Operators  $f$  haben signifikanten Einfluss auf die Durchführung der Sequenz scharfer Auswertungen von  $f$  und die Aggregation der scharfen Ergebnisgrößen zu Fuzzy-Ergebnisgrößen. In [19] wurden die Charakteristika des Abbildungsoperators für die Eigenschaften

- Eindeutigkeit,
- Bijektivität,
- Stetigkeit und
- Monotonie

untersucht.

**Eindeutigkeit** kann wegen der üblicherweise als numerischer Algorithmus vorliegenden Problemformulierung nicht in jedem Fall sicher gestellt werden. Selbst bei, aus mathematischer Sicht, eindeutigen Abbildungen kann es auf Grund beschränkter Zahlengenauigkeiten von Computern zu Rundungsfehlern kommen. Durch Abschneiden der nicht darstellbaren Dezimalstellen werden unterschiedliche (Zwischen-)Ergebnisse zu einem identischen Wert zusammengefasst. Im Rahmen von Strukturanalysen treten aber auch nicht eindeutige Abbildungsoperatoren auf. Untersuchungen von Verzweigungsproblemen und die Analyse des Systemverhaltens im überkritischen Bereich sind Beispiele dafür.

Der Abbildungsoperator besitzt die Eigenschaft der **Bijektivität** wenn er injektiv und surjektiv ist. Sind die Fuzzy-Eingangsgrößen nicht diskret, so kann dies nur der Fall sein, wenn die Dimension des Ergebnisraums  $\underline{Y}_{\alpha_k}$  größer oder gleich der Dimension des Eingangsraums  $\underline{X}_{\alpha_k}$  ist. Aber auch dann kann Bijektivität nicht sicher gestellt werden.

**Stetigkeit** des Operators  $f$  kann im Allgemeinen nicht vorausgesetzt werden. Bei unsteitigen Operatoren kann es zu nicht zusammenhängenden  $\alpha$ -Niveaumengen  $\underline{Y}_{\alpha_k}$  im Ergebnisraum kommen. Durch die Durchführung der Optimierungsaufgabe auf jedem  $\alpha$ -Niveau,

anstelle der Auswertung des Erweiterungsprinzips nach Gleichung (6.6) werden die nicht zusammenhängenden  $\underline{Y}_{\alpha_k}$  durch eine Einhüllende ersetzt. Die Ergebnismenge wird vergrößert und dadurch auch das Fuzzy-Ergebnis. Beer [19] schätzt den möglichen Fehler bei Problemen der Baustatik als untergeordnet ein, da „nur die extremalen Werte der Ergebnisgrößen (z. B. statische und kinematische Variable, Sicherheitsniveau, Lebensdauer) von Interesse“ sind.

Die **Monotonie**eigenschaft hat signifikanten Einfluss auf die Durchführung der Suche nach dem globalen Minimum  $y_{j,\alpha_k}^{\min}$  und Maximum  $y_{j,\alpha_k}^{\max}$  der Lösungsfunktion auf jedem  $\alpha_k$ -Niveau. Mögliche Orte der Lösungspunkte, die zu den gesuchten Extrema führen, können bei Kenntnis der Monotonieeigenschaften des Abbildungsoperators a priori bestimmt werden. Jede monotone Abhängigkeit zwischen einer Eingangsgröße  $x_i$  und den Zielgrößen  $y_j$  reduziert die Dimension des durch die Eingangsgrößen aufgespannten Raumes. Die zu  $x_i$  korrespondierende Koordinate des Lösungspunktes von  $y_i$  nimmt die Intervallgrenzen an, d. h. der Lösungspunkt liegt auf einer Seite des Hyperquaders. Besteht zwischen allen Eingangsgrößen  $x_i$  und den Ergebnisgrößen  $y_i$  eine monotone Abhängigkeit, so liegen die gesuchten Lösungspunkte in den Ecken von  $\underline{X}_{\alpha_k}$ . In diesem Fall reduziert sich die Menge aller möglichen Orte der Lösungspunkte im n-dimensionalen Raum der Eingangsgrößen auf  $2^n$  Elemente. Eine a priori Bestimmung der Monotonieeigenschaften eines beliebigen Operators ist im Rahmen baupraktisch relevanter Problemstellungen jedoch nur in Ausnahmefällen möglich.

Die im Folgenden dargestellten ausgewählten Lösungsverfahren haben zum Ziel, die unscharfe Abbildung (6.2) direkt durchzuführen. Hierfür bilden sie mit Hilfe der scharfen Abbildung (6.1) diskrete  $\alpha$ -Niveaumengen des unscharfen kartesischen Produkts der unabhängigen Fuzzy-Eingangsgrößen  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  auf scharfe  $\alpha$ -Niveaumengen der Ergebnisgrößen  $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m$  ab. Die Ergebnisgrößen sind im Allgemeinen Fuzzy-Zahlen oder Fuzzy-Intervalle, sodass die  $\alpha$ -Niveaumengen reellwertige geschlossene Intervalle  $[y_{i_{\alpha_k,l}}, y_{i_{\alpha_k,r}}]$  sind. Die Intervallgrenzen ergeben sich aus dem Minimum  $y_{i_{\alpha_k,l}}$  bzw. dem Maximum  $y_{i_{\alpha_k,r}}$  des Funktionals  $f$  über dem Definitionsbereich der  $\alpha$ -Niveaumenge der Eingangsgrößen. Die Lösungsverfahren unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Methode, mit der die Intervallgrenzen ermittelt werden.

### 6.2.1 Die Transformationsmethode

Die Transformationsmethode von *Hanss* [73, 75] liegt in ihrer Grundform in einer „reduzierten“ und einer „allgemeinen“ Variante vor. Die reduzierte Transformationsmethode entspricht im Wesentlichen dem Vorgehen bei der Vertex-Methode [37]. Die möglichen Orte für die Lösungspunkte der Extremwertsuche werden auf die Ecken der  $\alpha$ -Niveaus der Eingangsmenge im  $n$ -dimensionalen Eingangsraum beschränkt. Bei  $n$  unabhängigen Eingangsvariablen, die in  $m$   $\alpha$ -Niveaus unterteilt sind, ergibt sich die Komplexität des Algorithmus zu:

$$\mathcal{O}(m \cdot 2^n). \quad (6.8)$$

Die Anwendung der reduzierten Variante setzt jedoch voraus, dass der Operator  $f$  für  $n > 1$  hinsichtlich aller Variablen im Definitionsbereich des Supports ein monotonen Verhalten aufweist. Wird hingegen für alle Variablen ein nicht-monotonen Verhalten von  $f$  erwartet, so ist die allgemeine Transformationsmethode einzusetzen. Zusätzlich zur Auswertung der Ecken des kartesischen Produkts der  $\alpha$ -Niveaus der Eingangsmengen werden noch weitere mögliche Lösungspunkte auf den Flächen des  $n$ -dimensionalen Hyperquaders berücksichtigt. Im Unterschied zur reduzierten Variante dürfen mit der allgemeinen Transformationsmethode keine Fuzzy-Intervalle sondern ausschließlich Fuzzy-Zahlen verarbeitet werden. Für diese gibt *Hanss* eine einfache Vorschrift zur Konstruktion der zusätzlichen Auswertepunkte an. Für jede Fuzzy-Eingangsgröße  $\tilde{x}_j$  sind der Modalwert ( $\mu_1 = 1$ ) und die Intervallgrenzen für  $\mu_2$  auszuwerten. Für die weiteren  $\alpha_k$ -Niveaus werden die Auswertepunkte, zusätzlich zu den Intervallgrenzen, durch Mittelwertbildung benachbarter Punkte des  $\alpha_{k-1}$ -Niveaus mit  $\alpha_{k-1} > \alpha_{k1}$  bestimmt. Jede Fuzzy-Eingangsgröße weist somit auf jedem  $\alpha_k$ -Niveau  $k$  Auswertepunkte auf. Für die Abbildung eines Operators  $f$ , der lediglich hinsichtlich einer Anzahl  $\bar{n}$  mit  $0 \leq \bar{n} < n$  ein nicht-monotonen Verhalten aufweist, führt *Hanss* die „erweiterte Transformationsmethode“ ein. Sie ist eine Kombination der reduzierten und der allgemeinen Transformationsmethode. Zusätzliche Punkte werden lediglich für die  $\bar{n}$  nicht-monotonen Eingangsgrößen ausgewertet. Die Komplexität der erweiterten Transformationsmethode kann mit

$$\mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^m m^{\bar{n}} \cdot 2^{n-\bar{n}}\right) \quad (6.9)$$

angegeben werden.

### 6.2.2 Die $\alpha$ -Level-Optimierung

Das Verfahren der  $\alpha$ -Level-Optimierung [19, 108] formuliert die Suche nach dem kleinsten und dem größten Funktionswert des Operators  $f$  über dem Definitionsbereich  $\underline{X}_{\alpha_k}$  als Optimierungsproblem. Es sind die Zielfunktionen

$$y_j = f_j(x_1; \dots; x_n) \Rightarrow \text{Min} \mid (x_1; \dots; x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k} \quad (6.10)$$

$$y_j = f_j(x_1; \dots; x_n) \Rightarrow \text{Max} \mid (x_1; \dots; x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k} \quad (6.11)$$

mit den Nebenbedingungen  $(x_1; \dots; x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k}$  zu erfüllen. Als Lösungstechnik setzt *Beer* eine Kombination aus Evolutionsstrategie, Gradientenmethode und Monte Carlo Simulation ein.

Die Komponente  $\tilde{y}_j$  des Ergebnisvektors  $\tilde{y}$  wird schrittweise durch Lösung von Gleichung (6.10) und (6.11) auf den  $m$   $\alpha$ -Niveaus ermittelt. Der Startpunkt einer jeden Optimierung wird mit Hilfe einer gleichverteilten Zufallszahl im Definitionsbereich des jeweiligen  $\alpha$ -Levels bestimmt. In einer durch Steuerparameter festgelegten und im Verhältnis zur  $\alpha$ -Niveaumenge kleinen Umgebung um den Startpunkt wird ebenfalls mittels Zufall ein neuer Punkt erzeugt. Dieser neue Punkt wird als Mutation des Eltern-Punktes interpretiert. Hat die Mutation bessere Eigenschaften, d. h. der Zielfunktionswert  $y_j = f_j(x_1; \dots; x_n)$  bietet bzgl. des Optimierungsziels eine Verbesserung, so wird sie zum neuen Eltern-Punkt, andernfalls wird sie verworfen. In die so eingeschlagene Richtung wird solange fortgeschritten, bis keine weitere Verbesserung eintritt. Dann wird erneut ein zufälliger Nachkommenpunkt erzeugt. Tritt nach einer vorgegebenen maximalen Anzahl von Versuchen keine Verbesserung ein, so wird die Größe der Umgebung um den Ausgangspunkt reduziert. Dies wird so lange durchgeführt, bis eine vorgegebene minimale Größe erreicht ist. Der Eltern-Punkt wird dann als Lösung der Optimierungsaufgabe interpretiert.

### 6.2.3 Fuzzy-Arithmetik mit Hilfe von dünn besetzten Gittern

*Klimke & Wohlmuth* [86] versuchen den Berechnungsaufwand dadurch zu reduzieren, dass sie die Extremwertsuche nicht auf dem Funktionsverlauf des Funktionals  $f_j$  (Gleichung (6.1)) durchführen, sondern mit Hilfe einer Interpolationsfunktion  $I_j(f_j)$ . Als eindimensionale Ansatzfunktion wählen sie eine abschnittsweise lineare Funktion. Mit Hilfe eines



von *Smolyak* [128] entwickelten Ansatzes lässt sich diese auf beliebige Dimensionen erweitern. Die Bestimmung der Interpolationsfunktion  $I_j(f_j)$  wird mit Hilfe einer Dünngitter-Interpolation [85] für jede Komponente des Ergebnisvektors  $y_j$  durchgeführt. Der Definitionsbereich der Interpolationsfunktion ist das scharfe kartesische Produkt der Supports der Fuzzy-Eingangsgrößen. Die Güte der abschnittsweisen linearen Approximation hängt vom Funktionsverlauf von  $f$  und der Anzahl und Lage der ausgewerteten Stützstellen ab. Das in von *Klimke & Wohlmuth* verwendete dünn besetzte Gitter benötigt für die Bestimmung der Approximationsfunktion  $I_j(f_j)$  eine moderate Anzahl von Stützstellen. Unter der Voraussetzung, dass die Komplexität von  $I_j(f_j)$  deutlich geringer ist als die des Funktionals  $f$  ( $\mathcal{O}(I(f)) \in \mathcal{O}(f)$ ), kann daher bei der Suche nach den Extremwerten eine Reduktion der Berechnungsdauer erwartet werden. Die Durchführung des Optimierungsproblems (Gleichungen (6.10) und (6.11)) wird für jede Komponente des Ergebnisvektors und für jedes  $\alpha$ -Niveau durch

$$y_j = I_j(f_j)(x_1; \dots; x_n) \Rightarrow \text{Min} \mid (x_1; \dots; x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k} \quad (6.12)$$

$$y_j = I_j(f_j)(x_1; \dots; x_n) \Rightarrow \text{Max} \mid (x_1; \dots; x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k} \quad (6.13)$$

ersetzt. Als Verfahren für die Suche nach den Extremalwerten der Funktion schlagen *Klimke & Wohlmuth* nach Auswertung etlicher Methoden eine Variante eines Koordinatensuchverfahrens (Kompass-Suche [92]) vor. Dieses Verfahren identifizieren die Autoren als das Effizienteste, es kann jedoch das Auffinden eines globalen Extremums nicht in jedem Fall garantieren.

Verfahren, welche die unscharfe Abbildung (6.2) mit Hilfe des scharfen Abbildungsoperators (6.1) durchführen, zeichnen sich durch ihre universelle Einsetzbarkeit aus. Der scharfe Operator  $f$  kann in beliebiger formaler Notation gegeben sein. Im Speziellen kann  $f$  als Algorithmus gegeben sein. Über geeignete Schnittstellen lassen sich daher Lösungsverfahren der Baustatik und Dynamik in Form von Computer-Programmen für die unscharfe Tragwerksanalyse nutzen.

Bei Anwendung von Gleichung (6.1) stehen über die Eigenschaften von  $f$  kaum a priori Informationen zur Verfügung (siehe oben). Die Lösungsverfahren mit deterministischer Grundlösung können die Problemkomplexität kaum einschränken. Sie benötigen zur Lösung der Extremwertsuche allgemeingültige Algorithmen, die eine bestimmte Anzahl von „Versuchen“, d. h. Auswertungen von  $f$ , benötigen, um die Lösung mit ausreichender Genauigkeit zu ermitteln. Nicht alle Ergebnisse der Versuche legen die Ergebnisgrößen fest.

Einige von ihnen sind „Fehlversuche“. Für jeden Versuch muss jedoch der bei realen Problemen der Bauwerksanalyse rechenintensive Operator  $f$  ausgewertet werden.

## 6.3 Fuzzy-Arithmetik

Anders als im vorangegangenen Abschnitt wird der Operator  $f$  im Folgenden als sequentielle Abfolge von elementaren arithmetischen Operationen interpretiert. Ist  $f$  als Algorithmus gegeben, so können zusätzlich noch Fallunterscheidungen in der Sequenz enthalten sein.

Die elementaren arithmetischen Operationen werden direkt fuzzyfiziert und in fuzzyarithmetische Grundoperationen konvertiert. Mit diesen Operationen ist es möglich, Algorithmen zur Abbildung unscharfer Eingangsgrößen auf unscharfe Ergebnisgrößen in formal identischer Weise wie dies von herkömmlicher scharfer Arithmetik bekannt ist zu verwenden.

Die implizite Fuzzyfizierung wird gegenüber der in Abschnitt 6.2 dargestellten expliziten Fuzzyfizierung von Algorithmen auf dem höchsten Abstraktionsniveau, den elementaren arithmetischen Operationen durchgeführt. Ein fuzzyfizierter Algorithmus setzt sich aus Sequenzen dieser Operationen zusammen. Dadurch wird nicht nur der Algorithmus, zumindest in impliziter Form, bekannt, sondern die Kenntnis der Eigenschaften jeder arithmetischen Verknüpfungsoperation ermöglicht darüber hinaus eine äußerst effiziente computerorientierte Umsetzung der Fuzzy-Arithmetik.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die theoretischen Grundlagen für die Durchführung von elementaren fuzzyarithmetischen Operationen hergeleitet. In Abschnitt 6.3.1 werden die auf *Dubois & Prade* [38] zurückgehenden Grundlagen der Fuzzy-Arithmetik mit unabhängigen Fuzzy-Operanden dargestellt. Abschnitt 6.3.2 erweitert diesen Ansatz zur Verarbeitung von Fuzzy-Größen in beliebigen Algorithmen ohne vorherige Umformulierung, wodurch in Abschnitt 6.3.3 der Körper der Fuzzy-Größen definiert werden kann. In Abschnitt 6.3.4 werden Anwendungsgrenzen bei der Fuzzyfizierung beliebiger Algorithmen dargestellt. Die Umsetzung der theoretischen Grundlagen in eine Softwarebibliothek wird in Abschnitt 6.3.5 diskutiert. Die beiden wesentlichen Leitmotive bei den folgenden Darstellungen sind die korrekte Abbildung von Fuzzy-Eingangsgrößen auf Fuzzy-Ergebnisgrößen ohne vorherige Umformung der Abbildungsvorschrift und die

Entwicklung einer Problemformulierung, die eine hardwarenahe und dadurch effiziente Umsetzung der Theorie in eine Anwendungssoftware ermöglicht.

### 6.3.1 Verknüpfung unabhängiger Fuzzy-Größen

Die elementaren arithmetischen Operatoren lassen sich in die Klasse der einstelligen  $\circ$  (z. B.  $\circ \in \{\sqrt{\cdot}, \log, \dots\}$ ) und der zweistelligen  $\diamond$  (z. B.  $\diamond \in \{+, -, \cdot, \div, \dots\}$ ) Operatoren unterteilen. Für einstellige Operatoren kann das Erweiterungsprinzip (Gleichung (6.6)) zu

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=\circ(x)} \{\mu(x)\} & \text{falls } \exists y = \circ(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.14)$$

vereinfacht werden. Für zweistellige Operatoren, die zwei unabhängige Fuzzy-Größen miteinander verknüpfen, wird das vereinfachte Erweiterungsprinzip

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=x_1 \diamond x_2} \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\} & \text{falls } \exists y = x_1 \diamond x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.15)$$

erhalten. Schließlich erhält man für gemischte Verknüpfungen zwischen einer Fuzzy-Größe und einem Skalar  $c \in \mathbb{R}$  die Präfix-Variante

$$\mu(y) = \begin{cases} \mu(x) & \text{falls } \exists y = c \diamond x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.16)$$

bzw. die Suffix-Variante

$$\mu(y) = \begin{cases} \mu(x) & \text{falls } \exists y = x \diamond c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.17)$$

von Gleichung (6.6).

Anstatt das Erweiterungsprinzip direkt auszuwerten, können die elementaren arithmetischen Operationen, wie bereits dargestellt, schichtweise auf der Ebene der scharfen  $\alpha$ -Niveaus durchgeführt werden (Gleichung (6.7)). Bei der Verknüpfung von zwei unabhängigen Fuzzy-Größen mit dem Operator  $\diamond$  vereinfachen sich die  $\alpha$ -Niveaus zu Rechtecken in dem durch die beiden Operanden aufgespannten zweidimensionalen Eingangsraum (Abbildung 6.2). Für gemischte zweistellige und einstellige Operationen vereinfachen sich die  $\alpha$ -Niveaus zu geschlossenen Intervallen  $[x_{\alpha_k,l}, x_{\alpha_k,r}]$ .

Für die weiteren Betrachtungen wird zunächst vorausgesetzt, dass die elementaren Operatoren auf dem gesamten Support der Eingangsmengen (Gleichung (6.14), (6.16) und (6.17)), bzw. auf dem scharfen kartesischen Produkt des Supports der Eingangsmengen (Gleichung (6.15)), definiert sind, einen stetigen Funktionsverlauf und ein monotonen Verhalten hinsichtlich aller Operanden aufweisen. Die Fuzzy-Eingangsgrößen für die zweistelligen Operatoren müssen zudem unabhängig voneinander sein. Sowohl diese Einschränkung, als auch die Voraussetzung des monotonen Verhaltens der elementaren Operatoren werden in Abschnitt 6.3.2 wieder aufgehoben. Unstetige Operatoren werden in Abschnitt 6.3.4 behandelt.

Weisen die Operatoren ein monotonen Verhalten auf, so kann die in Abschnitt 6.2 beschriebene aufwendige Bestimmung der Lösungspunkte der Extremwertsuche quasi a priori erfolgen. Für jedes  $\alpha_k$ -Niveau liegen die Lösungspunkte bei einstelligen und gemischten zweistelligen Operatoren auf den Intervallgrenzen  $\{x_{\alpha_k,l}, x_{\alpha_k,r}\}$ . Bei zweistelligen Fuzzy-Operatoren liegen sie in zwei der vier Ecken der scharfen kartesischen Produkte der  $\alpha_k$ -Niveaus der Operanden  $\tilde{x}_1$  und  $\tilde{x}_2$ . Wird darüber hinaus gefordert, dass die Monotonieeigenschaften zweistelliger Operatoren über dem gesamten scharfen kartesischen Produkt der Träger der Eingangsgrößen identisch sein müssen, d. h. entweder fallend oder steigend, so kann die Lage der Lösungspunkte a priori ermittelt werden. Der Wert der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße einer fuzzy-arithmetischen Operation kann dann schichtweise, für jedes  $\alpha_k$ -Niveau direkt aus den Werten der Zugehörigkeitsfunktionen der Argumente bestimmt werden. Die geforderten Monotonieeigenschaften können beispielsweise durch Beschränkung des Definitionsbereichs der Fuzzy-Eingangsmengen auf  $\mathbb{R}^+$  für die Operatoren  $\circ \in \{\sqrt{\cdot}, \log, \dots\}$  und  $\diamond \in \{+, -, \cdot, \div, \dots\}$  erfüllt werden. In den Tabellen 6.1 bis 6.4 sind für die, in den Gleichungen (6.14) bis (6.17) dargestellten, vereinfachten Formen des Erweiterungsprinzips die zu betrachtenden Kombinationen der Zugehörigkeitswerte in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft des Operators zusammengefasst. Die Bezeichnungen sind Abbildung 6.3 zu entnehmen. Sind die Zugehörigkeitswerte der Argumente als Funktionen gegeben, so können diese Funktionen direkt auf die Zugehörigkeitsfunktionen der Ergebnisgröße abgebildet werden. Dabei ist eine Darstellung von Fuzzy-Zahlen und Fuzzy-Intervallen in der so genannten L/R-Darstellung zweckmäßig. *Dubois & Prade* [41, 38] führten dafür die Hilfsfunktionen  $L, R: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  zur Beschreibung von  $\mu_l(x)$  bzw.  $\mu_r(x)$  für Werte von  $x$  kleiner bzw. größer als die Elemente des Kerns  $[x_l, x_r]$  ein.  $L$

**Tabelle 6.1:** Bestimmung der Intervallgrenzen des  $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für einstellige Operatoren (Gleichung (6.14))

Monotonieeigenschaft	$y_{\alpha_k}^L$	$y_{\alpha_k}^R$
$\frac{d\circ(x_1)}{dx_1} \geq 0$	$\circ(x_{1,\alpha_k}^L)$	$\circ(x_{1,\alpha_k}^R)$
$\frac{d\circ(x_1)}{dx_1} < 0$	$\circ(x_{1,\alpha_k}^R)$	$\circ(x_{1,\alpha_k}^L)$

**Tabelle 6.2:** Bestimmung der Intervallgrenzen des  $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für zweistellige Operatoren (Gleichung (6.15))

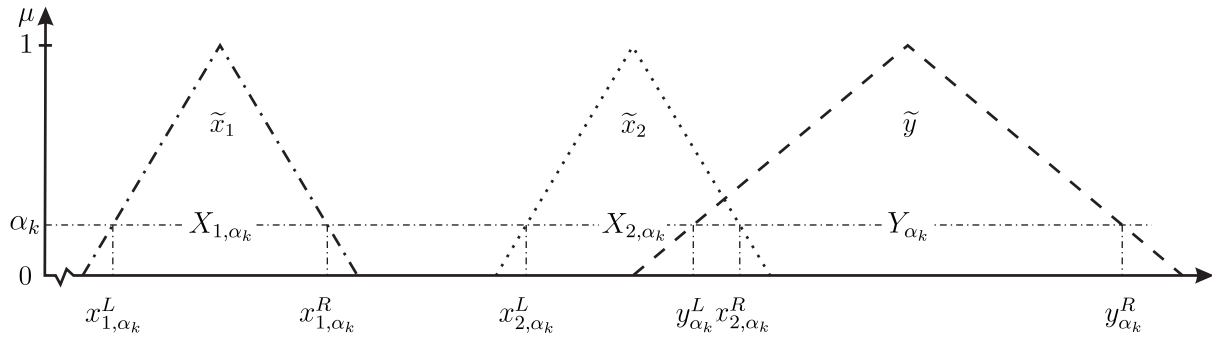
Monotonieeigenschaft	$y_{\alpha_k}^L$	$y_{\alpha_k}^R$
$\frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_1} \geq 0 \wedge \frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_2} \geq 0$	$x_{1,\alpha_k}^L \diamond x_{2,\alpha_k}^L$	$x_{1,\alpha_k}^R \diamond x_{2,\alpha_k}^R$
$\frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_1} \geq 0 \wedge \frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_2} < 0$	$x_{1,\alpha_k}^L \diamond x_{2,\alpha_k}^R$	$x_{1,\alpha_k}^R \diamond x_{2,\alpha_k}^L$
$\frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_1} < 0 \wedge \frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_2} \geq 0$	$x_{1,\alpha_k}^R \diamond x_{2,\alpha_k}^L$	$x_{1,\alpha_k}^L \diamond x_{2,\alpha_k}^R$
$\frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_1} < 0 \wedge \frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_2} < 0$	$x_{1,\alpha_k}^R \diamond x_{2,\alpha_k}^R$	$x_{1,\alpha_k}^L \diamond x_{2,\alpha_k}^L$

**Tabelle 6.3:** Bestimmung der Intervallgrenzen des  $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für gemischte zweistellige Operatoren (Gleichung (6.16))

Monotonieeigenschaft	$y_{\alpha_k}^L$	$y_{\alpha_k}^R$
$\frac{d(c \diamond x_1)}{dx_1} \geq 0$	$c \diamond x_{1,\alpha_k}^L$	$c \diamond x_{1,\alpha_k}^R$
$\frac{d(c \diamond x_1)}{dx_1} < 0$	$c \diamond x_{1,\alpha_k}^R$	$c \diamond x_{1,\alpha_k}^L$

**Tabelle 6.4:** Bestimmung der Intervallgrenzen des  $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für gemischte zweistellige Operatoren (Gleichung (6.17))

Monotonieeigenschaft	$y_{\alpha_k}^L$	$y_{\alpha_k}^R$
$\frac{d(x_1 \diamond c)}{dx_1} \geq 0$	$x_{1,\alpha_k}^L \diamond c$	$x_{1,\alpha_k}^R \diamond c$
$\frac{d(x_1 \diamond c)}{dx_1} < 0$	$x_{1,\alpha_k}^R \diamond c$	$x_{1,\alpha_k}^L \diamond c$



**Abbildung 6.3:** Bestimmung der Intervallgrenzen des  $\alpha_k$ -Niveaus der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  und der Eingangsgrößen  $\tilde{x}_1$  und  $\tilde{x}_2$

bzw.  $R$  beschreiben eine Klasse von antitonen Funktionen, für die lediglich

$$L(0) = 1 \wedge L(1) = 0 \quad (6.18)$$

$$R(0) = 1 \wedge R(1) = 0 \quad (6.19)$$

gefordert wird. Die Zugehörigkeitsfunktion eines Fuzzy-Intervalls  $I$  lässt sich damit in parametrisierter Form mit

$$\mu_I(x) = \begin{cases} L\left(\frac{x_l - x}{\alpha}\right) & \forall x \leq x_l \\ R\left(\frac{x - x_r}{\beta}\right) & \forall x \geq x_r \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.20)$$

angeben. Gleichung (6.20) beschreibt eine sehr allgemeine Klasse von Fuzzy-Intervallen mit nicht notwendigerweise kompaktem Support. Konkrete Zugehörigkeitsfunktionen werden durch eine geeignete Wahl von Funktionsansätzen für  $L$  bzw.  $R$  und durch die Festlegung des Kerns  $[x_l, x_r]$  sowie der linksseitigen ( $\alpha$ ) und rechtsseitigen ( $\beta$ ) Streubreite erhalten. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit werden im Folgenden, entgegen der von *Dubois & Prade* eingeführten Notation, beliebige Ansatzfunktionen für die Äste einer Zugehörigkeitsfunktion mit  $L$  und  $R$  bezeichnet. Mit Hilfe der modifizierten L/R-Darstellung können dann arithmetische Operationen analog zu den Darstellungen in Tabelle 6.1 bis 6.4 als Verknüpfung der linken bzw. rechten Äste der Zugehörigkeitsfunktionen in analytischer Form angegeben werden (Tabellen 6.5 bis 6.8).  $L_\nabla$  bzw.  $R_\nabla$  mit  $\nabla \in \{x_1, x_2, y\}$  bezeichnen die linken bzw. rechten Äste der Zugehörigkeitsfunktionen der entsprechenden Fuzzy-Größe.

**Tabelle 6.5:** Bestimmung der Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für einstellige Operatoren (Gleichung (6.14))

Monotonieeigenschaft	$L_y$	$R_y$
$\frac{d\circ(x_1)}{dx_1} \geq 0$	$(\circ((L_{x_1})^{-1}))^{-1}$	$(\circ((R_{x_1})^{-1}))^{-1}$
$\frac{d\circ(x_1)}{dx_1} < 0$	$(\circ((R_{x_1})^{-1}))^{-1}$	$(\circ((L_{x_1})^{-1}))^{-1}$

**Tabelle 6.6:** Bestimmung der Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für zweistellige Operatoren (Gleichung (6.15))

Monotonieeigenschaft	$L_y$	$R_y$
$\frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_1} \geq 0 \wedge \frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_2} \geq 0$	$((L_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1})^{-1}$	$((R_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1})^{-1}$
$\frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_1} \geq 0 \wedge \frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_2} < 0$	$((L_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1})^{-1}$	$((R_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1})^{-1}$
$\frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_1} < 0 \wedge \frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_2} \geq 0$	$((R_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1})^{-1}$	$((L_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1})^{-1}$
$\frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_1} < 0 \wedge \frac{\partial(x_1 \diamond x_2)}{\partial x_2} < 0$	$((R_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1})^{-1}$	$((L_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1})^{-1}$

**Tabelle 6.7:** Bestimmung der Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für gemischte zweistellige Operatoren (Gleichung (6.16)) mit  $c \in \mathbb{R}$

Monotonieeigenschaft	$L_y$	$R_y$
$\frac{d(c \diamond x_1)}{dx_1} \geq 0$	$(c \diamond (L_{x_1})^{-1})^{-1}$	$(c \diamond (R_{x_1})^{-1})^{-1}$
$\frac{d(c \diamond x_1)}{dx_1} < 0$	$(c \diamond (R_{x_1})^{-1})^{-1}$	$(c \diamond (L_{x_1})^{-1})^{-1}$

**Tabelle 6.8:** Bestimmung der Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße  $\tilde{y}$  in Abhängigkeit von der Monotonieeigenschaft für gemischte zweistellige Operatoren (Gleichung (6.17)) mit  $c \in \mathbb{R}$

Monotonieeigenschaft	$L_y$	$R_y$
$\frac{d(x_1 \diamond c)}{dx_1} \geq 0$	$((L_{x_1})^{-1} \diamond c)^{-1}$	$((R_{x_1})^{-1} \diamond c)^{-1}$
$\frac{d(x_1 \diamond c)}{dx_1} < 0$	$((R_{x_1})^{-1} \diamond c)^{-1}$	$((L_{x_1})^{-1} \diamond c)^{-1}$

Die hier betrachteten arithmetischen Operatoren sind Teil einer Sequenz (z. B. eines Algorithmus) mit einer beliebigen Anzahl vorangegangener Operationen. Der tatsächliche Funktionsverlauf von  $L$  bzw.  $R$  hängt also von den (unbekannten) vorangegangenen Operationen und deren (unbekannten) Argumenten ab. Mit den definitionsgemäß monotonen Operatoren kann nach beliebig vielen vorausgegangenen Operationen für  $L$  lediglich ein isotoner und für  $R$  ein antitoner Funktionsverlauf gefolgert werden. Insbesondere im Rahmen einer computerorientierten Umsetzung ist die Darstellung aller Elemente der Menge der isotonen bzw. antitonen Funktionen jedoch kaum möglich. Eine Implementierung fuzzy-arithmetischer Operatoren wird sich i. A. auf die Darstellung von, meist parametrisierten, Teilmengen dieser Menge beschränken. Daher werden an die konkret verwendeten Funktionen  $L$  und  $R$  weitere Anforderungen formuliert.

Um die Operationen unabhängig von der „Vorgeschichte“ umsetzen zu können, ist es sinnvoll, die Abbildungen der Äste der Zugehörigkeitsfunktionen der Operanden auf die Äste der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße als zyklische Abbildung zu betrachten. Betrachtet man beispielsweise eine isotone einstellige Operation (Tabelle 6.5), so bedeutet dies, dass falls  $L_{x_1}$  bzw.  $R_{x_1}$  einer Klasse von Funktionen angehören ( $L_{x_1} \in \underline{F}_L$  bzw.  $R_{x_1} \in \underline{F}_R$ ), dann muss mit

$$\begin{aligned} L_y &= (\circ((L_{x_1})^{-1}))^{-1} \\ R_y &= (\circ((R_{x_1})^{-1}))^{-1} \end{aligned} \quad (6.21)$$

auch  $L_y \in \underline{F}_L$  bzw.  $R_y \in \underline{F}_R$  gelten. Mit den antitonen einstelligen Fuzzy-Operatoren in Tabelle 6.5 kann daraus direkt die Forderung

$$L_y \wedge R_y \in \underline{F} = \underline{F}_L = \underline{F}_R \quad (6.22)$$

abgeleitet werden. Schließlich führen die zweistelligen Operatoren (Tabelle 6.6) mit  $L_{x_1}$ ,  $L_{x_2}$ ,  $R_{x_1}$ ,  $R_{x_2} \in \underline{F}$  zur Forderung

$$\begin{aligned} L_y &= ((L_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1})^{-1} \in \underline{F} \\ R_y &= ((R_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1})^{-1} \in \underline{F}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die Menge  $\underline{F}$  der Ansatzfunktionen für die linken bzw. rechten Äste der Zugehörigkeitsfunktionen von Fuzzy-Größen muss also für einstellige und zweistellige Operatoren das Axiom der Abgeschlossenheit erfüllen.



Mit linearen Funktionsansätzen [15] für  $L$  und  $R$  können diese Forderungen näherungsweise erfüllt werden. Zudem ermöglichen lineare Ansätze eine besonders einfache Darstellung von Fuzzy-Zahlen und Fuzzy-Intervallen sowie deren mathematische Verknüpfungen. Für die Darstellung eines Fuzzy-Intervalls  $\tilde{a}$  sind lediglich die Grenzen des Kerns  $[a_1, a_2]$  und des Supports  $[a_0, a_3]$  nötig:

$$\tilde{a} = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle . \quad (6.24)$$

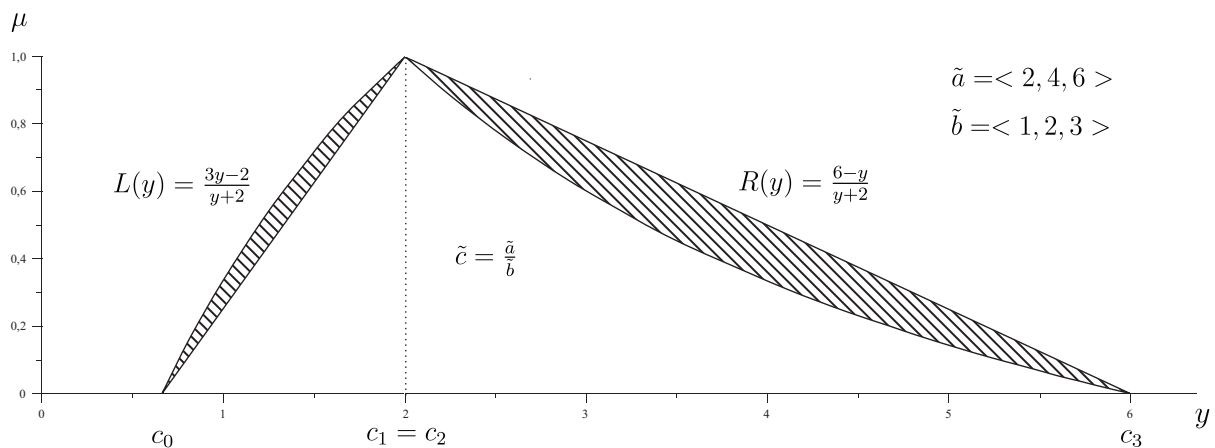
Die Addition und Subtraktion von zwei Fuzzy-Größen  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  kann nun einfach durch

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \langle a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle \quad (6.25)$$

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \langle a_0 - b_3, a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_0 \rangle \quad (6.26)$$

dargestellt werden.

Arithmetische Operationen mit Fuzzy-Größen mit linearen Funktionsansätzen ergeben i. A. jedoch Fuzzy-Größen, deren Äste nicht Elemente der Klasse der linearen Funktionen sind. Eine Approximation des tatsächlichen Funktionsverlaufs mit einem linearen Ansatz stellt die Abgeschlossenheit der Operationen gemäß Tabelle 6.5 bis 6.8 sicher. Die Fuzzy-Ergebnisgröße  $\tilde{c}$  wird durch lineare Verbindung der kleinsten bzw. größten Elemente des Supports ( $c_0$  bzw.  $c_3$ ) und des Kerns ( $c_1$  bzw.  $c_2$ ) erhalten. Der dadurch verursachte Fehler (vgl. schraffierte Fläche in Abbildung 6.4) wird in [63] für einige ausgewählte arithmetische Operationen mit bis zu 300% beziffert.



**Abbildung 6.4:** Fehler durch Approximation von  $L$  und  $R$  mit linearen Funktionsansätzen

Um diesen Fehler zu reduzieren, schlugen *Giachetti & Young* [64] eine parametrisierte

Darstellung von Fuzzy-Größen mit polynomialen Ansatzfunktionen für die Äste vor. Die Darstellung einer Fuzzy-Größe  $\tilde{a}$  wird gegenüber Gleichung (6.24) um drei Parameter erweitert:

$$\tilde{a} = \langle a_0, a_1, a_2, a_3, \lambda, \rho, n \rangle. \quad (6.27)$$

Die ersten vier Parameter entsprechen, analog zur obigen Darstellung, den Grenzen des Kerns und des Supports. Die Parameter  $\lambda$  und  $\rho$  sind durch

$$\lambda = \frac{a_1}{a_0} \quad (6.28)$$

und

$$\rho = \frac{a_2}{a_3} \quad (6.29)$$

definiert. Der Parameter  $n$  gibt den Grad des Polynoms der Ansatzfunktionen  $L$  und  $R$  an. Bei der Durchführung arithmetischer Operationen mit zwei Fuzzy-Größen  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  werden die sechs Parameter direkt verknüpft. Die Division ist in [64] beispielsweise mit

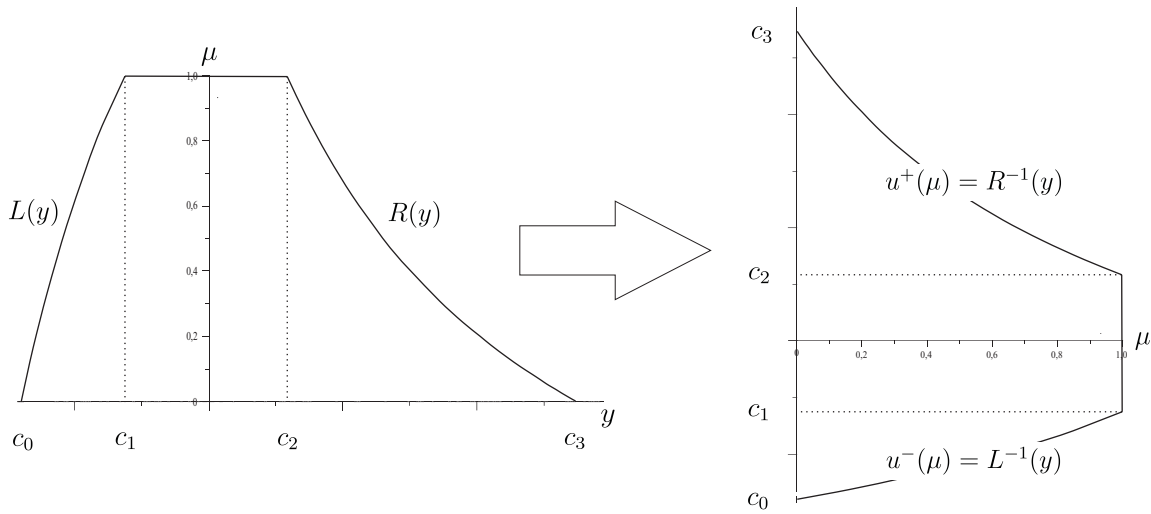
$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \langle \frac{a_0}{b_3}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_3}{b_0}, \sqrt[n_a+n_b+1]{\lambda_a^{n_a} \left(\frac{1}{\rho_b}\right)^{n_b+1}}, \sqrt[n_a+n_b+1]{\rho_a^{n_a} \left(\frac{1}{\lambda_b}\right)^{n_b+1}}, n_a + n_b + 1 \rangle \quad (6.30)$$

angegeben. Dieses Vorgehen entspricht der Umsetzung der Fuzzy-Arithmetik mit linearen Funktionsansätzen und zusätzlicher Überlagerung eines Polynoms:

$$G = \left( (-\alpha)^{\frac{(-1)^{n-1}}{2}} \sum_{i=2}^n (-\alpha)^i \right) - \left( \frac{(-1)^n + 1}{2} \right) \alpha \quad \text{mit} \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (6.31)$$

Dieses Polynom wird mit Hilfe der Parameter  $\lambda$  und  $\rho$  skaliert. Die Darstellung des Funktionsverlaufs ist dabei in den Definitionsbereich der Zugehörigkeitswerte transformiert (Abbildung 6.5). Die Autoren können mit diesem Verfahren für eine exemplarische Division von  $\tilde{a} = \langle 70, 100, 130, 1.43, 0.77, 1 \rangle$  durch  $\tilde{b} = \langle 4, 10, 16, 2.5, 0.63, 1 \rangle$  den relativen Fehler zwischen dem analytischen und dem approximierten Ergebnis von maximal 29 % bei linearen Ansätzen auf maximal 8 % reduzieren. Allerdings schränken die Autoren die Anwendbarkeit ihres Verfahrens auf Fuzzy-Größen mit moderater Steigung der Ansatzfunktion  $L$  und  $R$  ( $\lambda < 3.33$  und  $\rho > 0.50$ ) ein.

Ein ähnliches Vorgehen schlagen *Guerra & Stefanini* [69] vor. Sie transformieren ebenfalls die Darstellung der Fuzzy-Größen in den Definitionsbereich der  $\alpha$ -Niveaus (Abbildung



**Abbildung 6.5:** Darstellung eines Fuzzy-Intervalls und Transformation in den Definitionsbereich der  $\alpha$ -Niveaus

6.5). Die Autoren unterteilen den Definitionsbereich, d. h. das Intervall  $[0, 1]$ , in endlich viele nicht notwendigerweise äquidistante Abschnitte. Die Äste der transformierten Fuzzy-Größe werden durch Interpolationspolynome, die an den Stützstellen  $(\alpha_i)$  die Funktionswerte  $(u_i)$  sowie die Werte der ersten Ableitung  $(d_i)$  der Ausgangsfunktion annehmen, approximiert. *Guerra & Stefanini* geben für die Auswahl der Interpolationspolynome alternativ monotone kubische Splines

$$\begin{aligned}
 p(t_\alpha) &= u_{i-1}h_0(t_\alpha) + d_{i-1}h_1(t_\alpha) + d_i h_2(t_\alpha) + u_i h_3(t_\alpha) \\
 \text{mit } h_0(t) &= (1-t)^2(1+2t), \quad h_1(t) = t(1-t)^2, \\
 h_2(t) &= -t^2(1-t), \quad h_3(t) = t^2(3-2t), \quad t_\alpha = \frac{\alpha - \alpha_{i-1}}{\alpha_i - \alpha_{i-1}},
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

gebrochen rationale kubische Splines

$$\begin{aligned}
 p(t_\alpha) &= \frac{u_{i-1}(t)^3 + v u_{i-1} t_\alpha (t)^2 + d_{i-1} t_\alpha (t)^2 + w u_i t_\alpha^2 (t) - d_i t_\alpha^2 (t) + u_i t_\alpha^3}{(t)^3 + v t_\alpha (t)^2 + w t_\alpha^2 (t) + t_\alpha^3} \\
 \text{mit } t &= 1 - t_\alpha, \quad t_\alpha = \frac{\alpha - \alpha_{i-1}}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}, \quad v = \frac{d_{i-1} + d_i}{u_i - u_{i-1}} r, \quad w = \frac{d_{i-1} + d_i}{u_i - u_{i-1}} s, \quad r, s \geq 1
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

und gemischte kubisch-exponentielle *Hermite*'sche Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned}
 p(t_\alpha) &= u_{i-1} + (u_i - u_{i-1} - \frac{d_{i-1} + d_i}{a+1}) t_\alpha^2 (3 - 2t_\alpha) + \frac{d_{i-1}(1 - (1-t)^{a+1})}{a+1} + \frac{d_i}{a+1} t_\alpha^{a+1} \\
 \text{mit } t_\alpha &= \frac{\alpha - \alpha_{i-1}}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}, \quad a > \frac{d_{i-1} + d_i}{u_i - u_{i-1}} - 1
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

an. Für die Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einem Skalar werden die Approximationsfunktionen des Ergebnisses durch Komponentenvergleich (Gleichung (6.32)) bzw. durch Auswertung der Funktionswerte sowie der ersten Ableitungen an den Stützstellen (Gleichung (6.34) und (6.33)) ermittelt. Für die Gruppe arithmetischer Operationen, für die sich der Typ der Ergebnisfunktion gegenüber den Argumenten ändert (z. B.  $\cdot$ ,  $\div$ ), führen die Autoren neue Zwischenknoten zur Ergebnisverbesserung ein, falls ein vorgegebener Toleranzwert überschritten wird. Für den Spezialfall mit lediglich zwei Stützstellen ( $\alpha_0 = 0$  und  $\alpha_1 = 1$ ) geben die Autoren eine zu [64] analoge parametrisierte Darstellung von Fuzzy-Größen und deren arithmetischen Grundoperationen mit acht Parametern an. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass eine Durchführung arithmetischer Operationen mit Hilfe von parametrisierten Fuzzy-Größen, wie sie beispielsweise in Gleichung (6.25) und (6.26) dargestellt ist, nicht zielführend ist. Die Notwendigkeit, dass die Funktionsansätze der Äste der Fuzzy-Größen die Gleichungen (6.21) bis (6.23) erfüllen müssen, kann zu Unterschieden zwischen dem approximierten und dem exakten Verlauf der Äste nach einer Operation führen. Durch höherwertige Funktionsansätze kann dieser Effekt zwar reduziert werden, dennoch können sich die Unterschiede im Verlauf einer numerischen Simulation zu signifikanten Abweichungen akkumulieren und das Ergebnis unbrauchbar machen. Darüber hinaus ist die Forderung nach gleichen Monotonieeigenschaften über dem gesamten scharfen kartesischen Produkt der Träger der Fuzzy-Eingangsgrößen von zweistelligen Operatoren für eine Anwendung in praxisrelevanten Problemstellungen zu restriktiv. Ohne diese Einschränkung kann jedoch weder Tabelle 6.2 noch Tabelle 6.6 angewendet werden. Die Bestimmung des linken und des rechten Astes der Fuzzy-Ergebnisgröße einer zweistelligen fuzzy-arithmetischen Operation ist mit

$$L_y = (\min((L_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1}, (L_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1}, (R_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1}, (R_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1}))^{-1} \quad (6.35)$$

$$R_y = (\max((L_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1}, (L_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1}, (R_{x_1})^{-1} \diamond (L_{x_2})^{-1}, (R_{x_1})^{-1} \diamond (R_{x_2})^{-1}))^{-1} \quad (6.36)$$

durchzuführen. Durch die Minimum- bzw. Maximumbildung sind die Äste der Ergebnisgröße nicht mehr notwendigerweise stetig differenzierbar. Die bislang dargestellten Funktionsansätze sind daher zur Beschreibung der Ergebnisäste nicht geeignet.

Eine Klasse von Funktionen, welche die Gleichungen (6.21) bis (6.23) ohne Einschränkungen erfüllt, ist die Klasse der abschnittsweise linearen Funktionen. Mit diesen Funktionen

können beliebige stetige Funktionsverläufe durch lineare Ansatzfunktionen, die auf nicht notwendigerweise äquidistanten Subintervallen des Definitionsbereichs definiert sind, approximiert werden. An den Intervallgrenzen nehmen die Funktionswerte der Approximationsfunktionen den Wert der Ausgangsfunktion an, wodurch ein stetiger Verlauf sichergestellt wird. Durch geeignete Wahl der Stützstellen können stetige Funktionen beliebig genau approximiert werden. Die Approximationsfunktion ist jedoch nur abschnittsweise stetig differenzierbar. An den Intervallgrenzen weist die erste Ableitung Unstetigkeitsstellen auf. Die Abbildung nicht stetig differenzierbarer Funktionen, wie sie durch Gleichung (6.36) und (6.36) auftreten können, ist dadurch problemlos möglich.

Mit Hilfe der Durchführung elementarer fuzzy-arithmetischer Operationen durch Verknüpfung der Äste der Eingangsgrößen (vgl. Tabelle 6.5, 6.7 und 6.8 sowie Gleichung (6.36) bzw. (6.36) wird die multiple Auswertung eines gesamten Algorithmus, auf der die in Abschnitt 6.2 dargestellten Verfahren basieren, in wiederholte Auswertungen derselben Operationen mit unterschiedlichen Daten konvertiert. Innerhalb jeder arithmetischen Grundoperation (z. B.  $\diamond \in \{+, -, \cdot, \div, \dots\}$ ) ist der Operator ( $\diamond$ ) mit den Funktionswerten der Äste an den Stützstellen auszuwerten. Dies wird im Rahmen der *Flynn'schen* Taxonomie [47, 44] als SIMD (Single Instruction, Multiple Data) bezeichnet. Die insbesondere bei Großrechnern beziehungsweise Supercomputern verbreitete Rechnerarchitektur ermöglicht es, viele gleichartige Operationen auf verschiedenen Datensätzen quasi parallel durchzuführen und dadurch eine signifikante Verkürzung der Berechnungsdauern zu erreichen. Viele moderne Mikroprozessoren (wie PowerPC und x86) besitzen inzwischen SIMD-Erweiterungen, das heißt spezielle zusätzliche Befehlssätze, die mit einem Befehlsaufruf gleichzeitig mehrere gleichartige Datensätze verarbeiten. Durch die implizite Umformulierung eines Algorithmus bei Anwendung der Fuzzy-Arithmetik ist wegen der hardware-optimierten Durchführung der Berechnungen daher eine erhebliche Effizienzsteigerung gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung zu erwarten.

### 6.3.2 Interaktion zwischen Fuzzy-Größen

Für die weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass die Fuzzy-Eingangsgrößen einer Sequenz von arithmetischen Operationen in einer L/R-Darstellung vorliegen und dass die Funktionsansätze für  $L$  und  $R$  den Gleichungen (6.21) bis (6.23) genügen. Ferner sind die Fuzzy-Eingangsgrößen voneinander unabhängig und es besteht keine Interaktion.

Gegenstand der Betrachtungen ist

$$\tilde{y}_1 = \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} \quad (6.37)$$

als exemplarischer Auszug einer beliebigen Sequenz von Operationen. Sei  $\tilde{x}_1$  und  $\tilde{x}_2$  als Fuzzy-Dreieckszahl mit  $\tilde{x}_1 = \langle 1, 2, 3 \rangle$  und  $\tilde{x}_2 = \langle 3, 4, 5 \rangle$  gegeben, so kann das Ergebnis der Gleichung schrittweise ermittelt werden. Unter Verwendung von Tabelle 6.6 und bei Betrachtung der Tatsache, dass die Addition das Axiom der Abgeschlossenheit für lineare Funktionsansätze erfüllt, kann das Zwischenergebnis exakt als Fuzzy-Dreieckszahl  $\tilde{z} = \langle 4, 6, 8 \rangle$  angegeben werden. Die anschließende Division führt schließlich auf das analytische Ergebnis der Sequenz:

$$\tilde{y}_1: \mu_{y_1}(y) = \begin{cases} \frac{7-y}{y+1} & 3 < y < 7 \\ \frac{3y-4}{y+2} & \frac{4}{3} < y \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (6.38)$$

Gruppiert man Gleichung (6.37) mittels Äquivalenzumformung um

$$\tilde{y}_2 = 1 + \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} \quad (6.39)$$

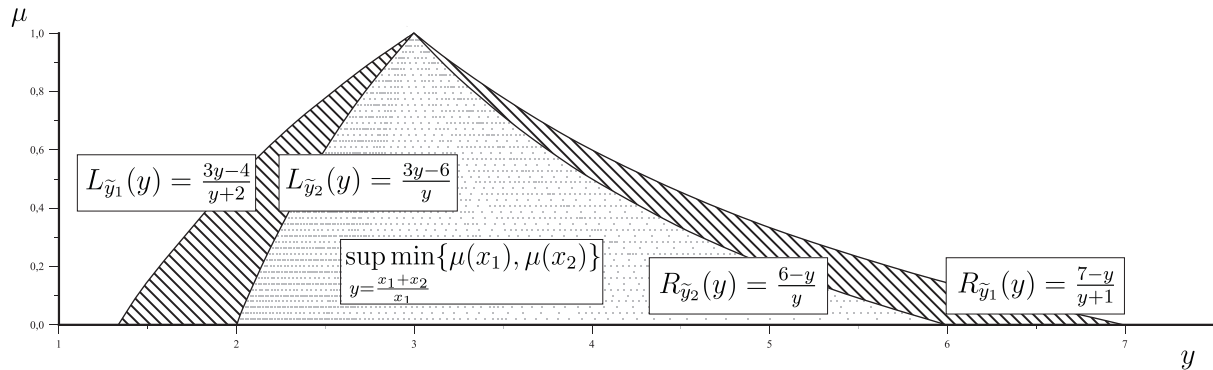
so erhält man bei identischem Vorgehen als Ergebnisgröße

$$\tilde{y}_2: \mu_{y_2}(y) = \begin{cases} \frac{6-y}{y} & 3 < y < 6 \\ \frac{3y-6}{y} & 2 < y \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (6.40)$$

In Abbildung 6.6 sind beide Ergebnisse graphisch dargestellt. Zusätzlich sind als graue Punkte diskrete Lösungen der direkten Auswertung des Erweiterungsprinzips (Gleichung (6.6)) abgebildet. Die schraffierte Fläche zwischen den beiden Lösungen in der Abbildung entspricht einer künstlichen Unschärfe, die auf Grund der Problemformulierung hinzukommt.

Die Anwendung der Tabellen 6.1 bis 6.4 bzw. der Tabellen 6.5 bis 6.8 zur Bestimmung der maßgebenden Kombination der Argumente entspricht der Durchführung der Abbildung mit Hilfe der Intervallarithmetik auf jedem  $\alpha$ -Niveau. Die Intervallarithmetik besitzt jedoch nicht alle Eigenschaften der gewöhnlichen Zahlenarithmetik. So sind Operationen mit Intervallen  $I$ ,  $J$  und  $K$  im Allgemeinen lediglich subdistributiv [110]:

$$I \cdot (J + K) \subseteq I \cdot J + I \cdot K. \quad (6.41)$$



**Abbildung 6.6:** Künstliche Unschärfe durch mehrfaches Auftreten von Variablen in arithmetischen Ausdrücken

Das Erweiterungsprinzip (6.6) setzt implizit voraus, dass die Fuzzy-Operanden unabhängig voneinander sind. Werden innerhalb einer Sequenz von arithmetischen Operationen die Zwischenergebnisse mit dem Erweiterungsprinzip weiterverarbeitet (z. B. Gleichung (6.37)), so werden sie, ihre „Vorgeschichte“ vernachlässigend, ebenfalls als unabhängig betrachtet. Das Erweiterungsprinzip ist eine Abbildung ohne „Gedächtnis“. Die Darstellung von Gleichung (6.37) in der Notation von Gleichung (6.6)

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=\frac{x_1+x_2}{x_1}} \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\} & \text{falls } \exists y = \frac{x_1+x_2}{x_1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.42)$$

führt bei sequentieller Betrachtungsweise zu

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=\frac{x_1+x_2}{x_3}} \min\{\mu(x_1), \mu(x_2), \mu(x_3)\} & \text{falls } \exists y = \frac{x_1+x_2}{x_3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.43)$$

mit  $\tilde{x}_3 = \langle 1, 2, 3 \rangle$ . Die Dimension des Eingangsraumes wird bei jeder mehrfachen Instanz einer Variablen erhöht und impliziert dadurch eine größere Unschärfe der Ergebnisgröße. Als Folge davon verlieren bei Anwendung der Tabellen 6.1 bis 6.4 bzw. der Tabellen 6.5 bis 6.8 einfache algebraische Grundzusammenhänge ihre Gültigkeit:

$$\tilde{a} - \tilde{a} \neq 0 \quad \not\Leftarrow \quad (6.44)$$

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} \neq 1 \quad \not\Leftarrow. \quad (6.45)$$

Die Operanden der beiden dargestellten zweistelligen Operationen werden als unabhängige Größen behandelt. Sie sind jedoch nicht unabhängig voneinander, sondern es besteht

zwischen ihnen eine Interaktion.

Ein allgemeiner Ansatz zur Berücksichtigung interaktiver Variablen in zweistelligen fuzzyarithmetischen Operationen ist die Verallgemeinerung des vereinfachten Erweiterungsprinzips (6.15) zu [90]:

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=x_1 \diamond x_2} \min\{\mu(x_1), \mu(x_2), R(x_1, x_2)\} & \text{falls } \exists y = x_1 \diamond x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (6.46)$$

$R(x_1, x_2)$  ist eine beliebige zweistellige (un)scharfe Relation und dient als Einschränkung des unscharfen kartesischen Produkts der beiden Eingangsgrößen. Bei „schichtweiser“ Betrachtung

$$Y_{\alpha_k} = \{x_1 \diamond x_2 \mid (x_1, x_2) \in (X_{1,\alpha_k} \times X_{2,\alpha_k}) \cap R_{\alpha_k}\} \quad (6.47)$$

ist die Verkleinerung des Definitionsbereichs der arithmetischen Operation durch die Schnittmengenbildung gekennzeichnet. Die Relation  $R(x_1, x_2)$  kann jeden beliebigen Zusammenhang zwischen  $x_1$  und  $x_2$  ausdrücken. *Klir & Cooper* [88] geben als Beispiele für scharfe Relationen

$$\mu_{R_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.48)$$

$$\mu_{R_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.49)$$

$$\mu_{R_3}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 \leq x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.50)$$

$$\mu_{R_4}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 = f(x_2), \text{ mit } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.51)$$

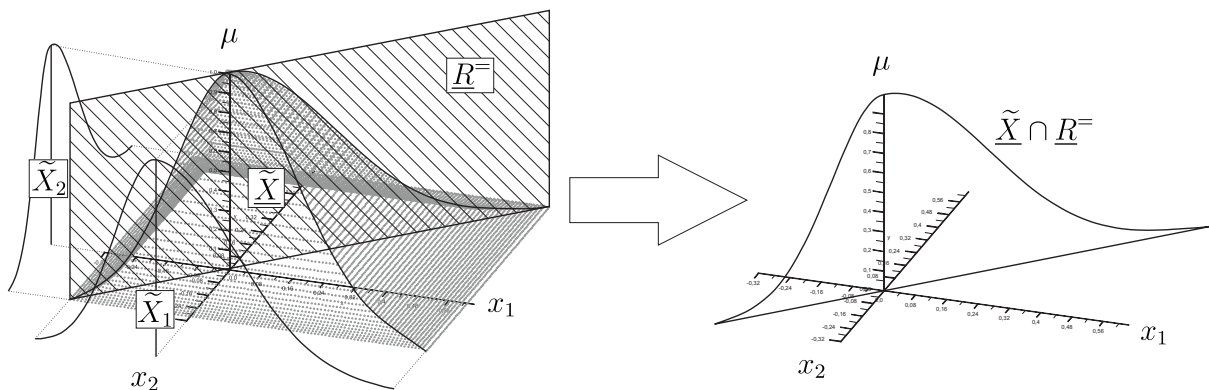
an. Für eine unscharfe Relation führen sie exemplarisch

$$\mu_{R_5}(x_1, x_2) = \max\left(0, 1 - \frac{|x_1 - x_2|}{c}\right) \quad (6.52)$$

ein. Diese Relation entspricht der formalen Darstellung von: „ $x_1$  ist ungefähr gleich  $x_2$ “. Der scharfe reellwertige Parameter  $c$  bestimmt dabei die maximale zulässige betragsmäßige Differenz von  $x_1$  und  $x_2$ , welche noch mit Zugehörigkeitswerten  $\mu(x) \geq 0$  bewertet wird.



Unter den möglichen Relationen ist besonders die „Gleichheitsbedingung“ (engl.: equality constrained)  $R^=$  (Gleichung (6.48)) bei der Durchführung arithmetischer Operationen von Interesse. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, zweistellige Operationen mit identischen Fuzzy-Größen ohne Überschätzung (engl.: overestimation) der Unschärfe der Ergebnisgrößen durchzuführen. Durch die Einführung der Gleichheitsrelation wird das unscharfe kartesische Produkt von identischen Eingangsgrößen auf zulässige Kombinationen eingeschränkt. Dies führt zu einer Reduktion der Dimension des Eingangsraumes. In Abbildung 6.7 ist der Übergang vom unscharfen kartesischen Produkt im zweidimensionalen Eingangsraum auf die korrekte unscharfe Eingangsmenge im eindimensionalen Subraum dargestellt. Mit der Einführung des, auf interaktive Variablen ausgedehnten, Erweiterungsprinzips und der Gleichheitsrelation  $R^=$  erhalten algebraische Rechenregeln für zweistellige fuzzy-arithmetische Operationen (z. B.  $\tilde{x} - \tilde{x} = 0$ ,  $\frac{\tilde{a}}{a} = 1$ ) ihre Gültigkeit zurück.



**Abbildung 6.7:** Unscharfes kartesisches Produkt ohne (links) und mit (rechts) Berücksichtigung der Gleichheitsrelation  $R^=$

Der von *Klir & Cooper* [88] betrachtete Spezialfall der Verknüpfung identischer Variablen in zweistelligen arithmetischen Operationen dient als Grundlage der im Folgenden dargestellten induktiven Herleitung einer allgemeingültigen unscharfen Arithmetik. Eine solche Rechenvorschrift muss neben den bereits dargestellten Verknüpfungen von unabhängigen bzw. identischen Größen auch Mischformen konsistent behandeln. Zur Verdeutlichung wird erneut das Beispiel in Gleichung (6.37) betrachtet, das bislang noch nicht korrekt behandelt werden kann. Nach der Auswertung von  $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$  sind der Zähler und der Nenner weder voneinander unabhängig, noch sind sie identisch. Zwischen ihnen besteht eine Interaktion; sie sind „partiell“ identisch. Mit der Einführung der Gleichheitsrelation  $R^=$  kann

Gleichung (6.43) in eine zu Gleichung (6.46) äquivalente Darstellung überführt werden:

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=\frac{x_1+x_2}{x_3}} \min\{\mu(x_1), \mu(x_2), \mu(x_3), R_{1,3}^-(x_1, x_3)\} & \text{falls } \exists y = \frac{x_1+x_2}{x_3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.53)$$

Die Gleichheitsrelation  $R^-$  reduziert die Dimension des unscharfen kartesischen Produkts um genau die durch  $\tilde{x}_3$  hinzugefügte Dimension.

Im allgemeinen Fall liegen zwei zu verknüpfende Fuzzy-Größen als Ergebnisse vorangegangener Funktionsauswertungen vor:

$$\tilde{z}_1 = \tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \quad (6.54)$$

$$\tilde{z}_2 = \tilde{f}_2(\tilde{x}_{n+1}, \dots, \tilde{x}_m). \quad (6.55)$$

$\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  sind unabhängige Eingangsgrößen in  $\tilde{f}_1$  und  $\tilde{x}_{n+1}, \dots, \tilde{x}_m$  sind unabhängige Eingangsgrößen in  $\tilde{f}_2$ . Allerdings kann zwischen den Eingangsgrößen der Funktionale paarweise Interaktion auftreten. Im Speziellen können Variablen paarweise identisch sein:

$$\tilde{x}_i \equiv \tilde{x}_j \quad \text{mit} \quad i \in \{1, \dots, n\} \wedge j \in \{n+1, \dots, m\}. \quad (6.56)$$

Jede Identität ist mittels einer Gleichheitsrelation

$$\mu_{R_{i,j}^-}(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i = x_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.57)$$

einzuführen. Damit lässt sich die Abbildung  $\tilde{y} = \tilde{z}_1 \diamond \tilde{z}_2$  in einer zu Gleichung (6.46) analogen Form darstellen:

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=z_1 \diamond z_2} \min\{\mu(z_1), \mu(z_2), R_{i,j}^-(x_i, x_j), \dots, R_{l,m}^-(x_l, x_m)\} & \text{falls } \exists y = z_1 \diamond z_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.58)$$

Bei schichtweiser Betrachtung geht Gleichung (6.47) in

$$Y_{\alpha_k} = \{z_1 \diamond z_2 \mid (z_1, z_2) \in (Z_{1,\alpha_k} \times Z_{2,\alpha_k}) \cap R_{i,j,\alpha_k} \cap \dots \cap R_{l,m,\alpha_k}\} \quad (6.59)$$

über.

Da gerade so viele Gleichheitsrelationen eingeführt werden, wie mehrfache Instanzen von Variablen auftreten, weist das unscharfe kartesische Produkt die korrekte Dimension auf

und eine Überschätzung der Unschärfe der Ergebnisgröße wird vermieden. Die Eingangsgrößen in die beiden Funktionale sind jeweils voneinander unabhängig und werden durch die eingeführten Gleichheitsrelationen paarweise verknüpft. Bei der Durchführung einer zweistelligen fuzzy-arithmetischen Operation müssen daher die Eingangsgrößen, von denen die beiden Operanden abhängen, bekannt sein. Diese Information muss jeder Operator auf das jeweilige (Zwischen-)Ergebnis übertragen. Die vereinfachten Formen des Erweiterungsprinzips (Gleichung (6.14) bis (6.17)) sind daher mit Gleichung (6.54) und (6.55) für einstellige Operatoren in

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=\circ(z_1)} \{\mu(z_1)\} & \text{falls } \exists y = \circ(z_1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.60)$$

und für zweistellige Operatoren, die zwei unabhängige Fuzzy-Größen miteinander verknüpfen, in

$$\mu(y) = \begin{cases} \sup_{y=z_1 \diamond z_2} \min\{\mu(z_1), \mu(z_2)\} & \text{falls } \exists y = z_1 \diamond z_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.61)$$

zu überführen. Für die gemischte Präfix-Variante wird

$$\mu(y) = \begin{cases} \mu(z_1) & \text{falls } \exists y = c \diamond z_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.62)$$

und für die gemischte Suffix-Variante

$$\mu(y) = \begin{cases} \mu(z_1) & \text{falls } \exists y = z_1 \diamond c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.63)$$

erhalten. Mit den Gleichungen (6.60), (6.61), (6.58), (6.62), und (6.63) stehen nun die notwendigen Abbildungsvorschriften zur Durchführung arithmetischer Operationen mit Fuzzy-Größen zur Verfügung. Sie fügen der Abbildung mittels des Erweiterungsprinzips ein „Gedächtnis“ hinzu. Für jede der Fuzzy-Zielgrößen (z. B. Schnittkräfte, Verformungen, Eigenfrequenzen, ...) kann damit eindeutig festgestellt werden, von welchen Fuzzy-Eingangsgrößen (z. B. Abmessungen, Materialeigenschaften, Lasten, ...) sie beeinflusst wird. Dieser Informationsgewinn gegenüber der herkömmlichen scharfen Zahlenarithmetik ermöglicht weitergehende Systemanalysen (siehe Abschnitt 7 und 8).

Um in einer effizienten Implementierung das in Abschnitt 6.3.1 dargestellte „single instruction, multiple data (SIMD)“ Paradigma anwenden zu können, sind die dargestellten

vereinfachten Formen des Erweiterungsprinzips (Gleichungen (6.60), (6.61), (6.58), (6.62), und (6.63)) in eine zu Abschnitt 6.3.1 analoge Form der direkten Verknüpfung der Äste der Eingangsgrößen zu überführen. Die Berücksichtigung der Gleichheitsrelationen  $R_{i,j}^-(x_i, x_j)$  in Gleichung (6.58) zur Verknüpfung von Fuzzy-Größen mit „Vorgeschichte“ macht jedoch eine Modifikation des dargestellten Vorgehens nötig.

Die Kenntnis des Monotonieverhaltens einstelliger und zweistelliger Operatoren über dem gesamten Definitionsbereich wurde in den Tabellen 6.5 bis 6.7 genutzt, um die beiden maßgebenden Kombinationen der zu verknüpfenden Äste a priori zu bestimmen und dadurch den linken und den rechten Ast der Ergebnisgröße gezielt zu berechnen. Die potentiellen Ergebnisäste der irrelevanten Kombinationen werden bei diesem Vorgehen ignoriert. Bei Berücksichtigung der Gleichheitsrelationen  $R_{i,j}^-(x_i, x_j)$  in Gleichung (6.58) kann dieses Vorgehen nicht aufrecht erhalten werden. Durch die Kondensation der potentiellen Ergebnisäste auf die beiden tatsächlichen Äste des Zwischenergebnisses können maßgebliche, durch die Gleichheitsrelationen  $R_{i,j}^-(x_i, x_j)$  nachfolgender zweistelliger Operatoren festgelegte, Verknüpfungskombinationen verloren gehen. Da i. A. nicht bekannt ist, welche Verknüpfungen im weiteren Verlauf einer Sequenz fuzzy-arithmetischer Operationen maßgebend werden, bedeutet dies, das alle potentiellen Ergebnisäste bewahrt und zusammen mit der Information, von welchen Fuzzy-Eingangsgrößen das Zwischenergebnis abhängt, an die folgenden Operatoren weitergereicht werden müssen. Dadurch wird im Verlauf der arithmetischen Sequenz das unscharfe kartesische Produkt der Fuzzy-Operanden im Raum der Eingangsgrößen sukzessive aufgebaut. Die potentiellen Äste der Fuzzy-Zwischenergebnisgrößen entsprechen dabei der Abbildung der Kanten des unscharfen kartesischen Produkts in den Raum der Fuzzy-Ergebnisgröße als Lösung der bislang ausgewerteten Teilsequenz eines Algorithmus.

Der linke bzw. der rechte Ast einer Fuzzy-Ergebnisgröße ist nach der Durchführung einer Berechnung durch Minimum- bzw. Maximumbildung über alle vorliegenden potentiellen Ergebnisäste zu bestimmen. Da die Äste Abbildungen der Kanten des unscharfen kartesischen Produkts sind, wird dabei implizit vorausgesetzt, dass für jedes Zwischenergebnis auf jedem  $\alpha_k$ -Niveau das globale Minimum bzw. Maximum in einer der Ecken des scharfen kartesischen Produkts der  $\alpha_k$ -Niveaus der Eingangsgrößen liegt. Nachfolgend wird gezeigt, dass diese Voraussetzung unter den selben Annahmen wie in Abschnitt 6.3.1, d. h. dass sich die Sequenz aus monotonen Operatoren zusammensetzt, erfüllt ist. Für zweistellige Operatoren wird darüber hinaus zunächst gefordert, dass die Monotonieeigenschaften

über dem gesamten scharfen kartesischen Produkt der Träger der Eingangsgrößen identisch sein müssen.

Bei sequentieller Durchführung fuzzy-arithmetischer Operationen liegt die Eingangsgröße  $\tilde{z}_1$  eines einstelligen Operators (Gleichung (6.60)) i. A. als Ergebnis vorangegangener Operationen (Gleichung (6.54)) vor. Für jedes  $\alpha_k$ -Niveau der Ergebnisgröße kann die Monotonieeigenschaft für jede unabhängige Eingangsgröße  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  im Definitionsbereich  $x_i \in A_{\alpha_k}(\tilde{x}_i)$  mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \circ (f_1(x_1; \dots; x_n)) = \left( \frac{d}{dt} \circ (t) \left| \begin{array}{l} \\ t = f_1(x_1; \dots; x_n) \end{array} \right. \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f_1(x_1; \dots; x_n) \right) \quad (6.64)$$

bestimmt werden. Ist das scharfe Funktional  $f_1$  für alle  $x_1, \dots, x_n$  über dem jeweiligen  $\alpha_k$ -Niveau monoton, so bleibt diese Eigenschaft bei Anwendung monotoner Operatoren wegen  $\frac{d}{dt} \circ (t) \geq 0 \wedge \frac{d}{dt} \circ (t) \leq 0$  erhalten. Die möglichen Koordinaten der globalen Extrema für jedes  $\alpha_k$ -Niveau können auf die Ecken des scharfen  $\alpha_k$ -Niveaus des Eingangsraumes eingegrenzt werden. Die Äste der Ergebnisgröße können direkt mittels der Äste der Eingangsgrößen bestimmt werden.

Die Monotonieeigenschaften der Ergebnisgrößen gemischter zweistelliger Operatoren zur Verknüpfung von Skalaren mit Fuzzy-Größen werden für die Präfix-Variante durch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (c \diamond (f_1(x_1; \dots; x_n))) = \left( \frac{\partial}{\partial t} (c \diamond t) \left| \begin{array}{l} \\ t = f_1(x_1; \dots; x_n) \end{array} \right. \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f_1(x_1; \dots; x_n) \right) \quad (6.65)$$

und für die Suffix-Variante durch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} ((f_1(x_1; \dots; x_n) \diamond c)) = \left( \frac{\partial}{\partial t} (t \diamond c) \left| \begin{array}{l} \\ t = f_1(x_1; \dots; x_n) \end{array} \right. \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f_1(x_1; \dots; x_n) \right) \quad (6.66)$$

beschrieben. Wegen der vorausgesetzten Monotonie des Operators  $\diamond$  bleibt für ein monotonen Funktional  $f_1$  diese Eigenschaft bei der Abbildung auf das Zielfunktional erhalten. Die Lage der Extrema ist analog zu den einstelligen Operatoren quasi bekannt.

Bei Anwendung monotoner zweistelliger Operatoren und speziell von  $\diamond \in \{+, -, \cdot, \div\}$  zur Verknüpfung unabhängiger Fuzzy-Größen kann die Eigenschaft der Monotonie im gesamten Definitionsbereich uneingeschränkt vorausgesetzt werden. Die zu verknüpfenden

Fuzzy-Größen liegen gemäß Gleichung (6.54) und Gleichung (6.55) als Ergebnisse vorangegangener Funktionsauswertungen vor. Da die Eingangsgrößen in  $\tilde{f}_1$  und  $\tilde{f}_2$  unabhängig voneinander sind, gilt für jedes  $\alpha_k$ -Niveau falls  $i \in \{1; \dots; n\}$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t}(t \diamond f_2(x_{n+1}; \dots; x_m)) \left| \begin{array}{l} t = f_1(x_1; \dots; x_n) \end{array} \right. \right) \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_1; \dots; x_n) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f_1(x_1; \dots; x_n) \diamond f_2(x_{n+1}; \dots; x_m)) = \quad (6.67)$$

und falls  $i \in \{n+1; \dots; m\}$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t}(f_1(x_1; \dots; x_n) \diamond t) \left| \begin{array}{l} t = f_2(x_{n+1}; \dots; x_m) \end{array} \right. \right) \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x_{n+1}; \dots; x_m) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f_1(x_1; \dots; x_n) \diamond f_2(x_{n+1}; \dots; x_m)) = \quad (6.68)$$

Sind die Funktionale  $f_1$  und  $f_2$  für alle  $x_i$  mit  $i \in \{1, \dots, m\}$  monoton, so ist auch die Verknüpfung  $f_1 \diamond f_2$  für alle  $x_i$  monoton. Daher müssen die globalen Extrema der Verknüpfung  $f_1 \diamond f_2$  für jedes  $\alpha$ -Niveau in den Ecken des scharfen kartesischen Produkts liegen.

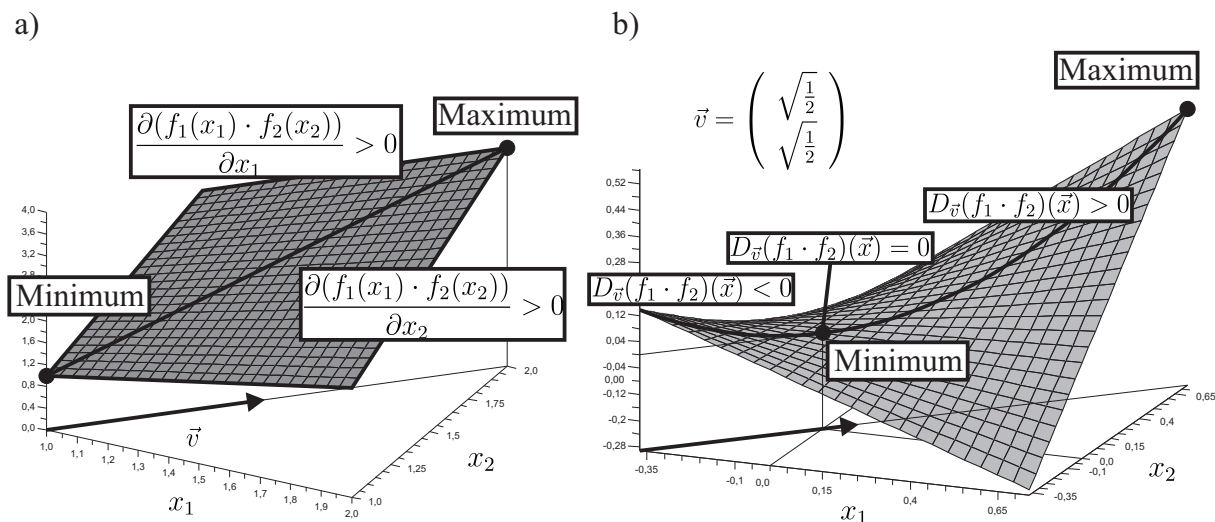
Bei mehrfach auftretenden Variablen wird der Definitionsbereich des Funktionals durch die Gleichheitsrelationen  $R_{i,j}^-$  eingeschränkt und die Dimension entsprechend reduziert. Die partiellen Ableitungen werden durch Richtungsableitungen

$$D_{\underline{v}}(f_1 \diamond f_2)(\underline{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_1 \diamond f_2)(\underline{x} + h\underline{v}) - (f_1 \diamond f_2)(\underline{x})}{h} \quad (6.69)$$

mit  $\underline{v} = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$  mit  $|\underline{v}| = 1$

ersetzt. Die Dimension  $p$  des Richtungsvektors  $\underline{v}$  entspricht der Anzahl der Eingangsgrößen in  $f_1$  und  $f_2$ . Jede Gleichheitsrelation  $R_{i,j}^-$  ersetzt die partiellen Ableitungen nach  $x_i$  und  $x_j$  durch eine Richtungsableitung mit  $v_i = \sqrt{\frac{1}{2}}$  und  $v_j = \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Wegen der vorausgesetzten gleichbleibenden Monotonieeigenschaften über dem gesamten scharfen kartesischen Produkt der Träger der Operanden ist der Funktionsverlauf in Richtung  $\underline{v}$  ebenfalls monoton. Die Koordinaten potentieller globaler Extrema in Richtung  $\underline{v}$  fallen daher mit den Ecken des scharfen kartesischen Produkts zusammen (vgl. Abbildung 6.8a).

Es wurde bislang gezeigt, dass die grundlegende Vorgehensweise von *Dubois & Prade*, die Auswertung des Erweiterungsprinzips (Gleichung (6.6)) in eine direkte Verknüpfung der Äste der Operanden innerhalb einer Sequenz elementarer arithmetischer Operationen zu transformieren, prinzipiell für beliebige algebraische Ausdrücke, insbesondere mit mehrfach auftretenden Instanzen von Variablen, erweitert werden kann. Es muss jedoch sichergestellt werden, dass in jedem Teilschritt der Sequenz lediglich in allen Variablen

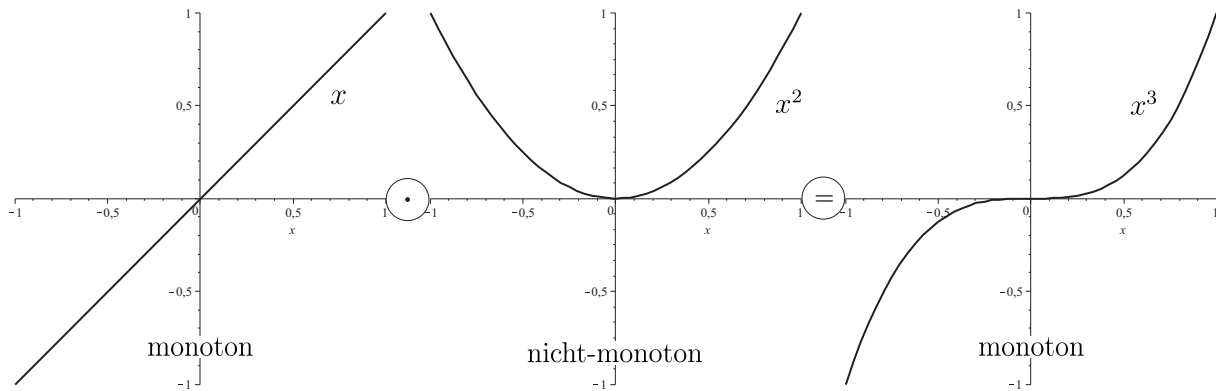


**Abbildung 6.8:** Darstellung der Monotonieeigenschaften bei Verknüpfung von partiell identischen Fuzzy-Größen mit a) gleichbleibender und b) nicht gleichbleibender Monotonieeigenschaft

monotone Operatoren ausgewertet werden und zudem für zweistellige Operatoren das Monotonieverhalten über dem gesamten scharfen kartesischen Produkt der Träger der Operanden unverändert bleibt. Insbesondere die letzte Einschränkung ist im Rahmen der Durchführung praxisrelevanter numerischer Untersuchungen jedoch kaum umzusetzen.

Wird sie jedoch, wie bereits am Ende von Abschnitt 6.3.1 für unabhängige Operanden dargestellt, aufgehoben, so ist der Funktionsverlauf in Richtung  $\underline{v}$  nicht mehr notwendigerweise monoton. Lokale bzw. globale Extremwerte können dann auf einer Hyperfläche oder im Inneren des kartesischen Produkts auftreten. In Abbildung 6.8b ist dies am Beispiel der multiplikativen Verknüpfung einer Fuzzy-Zahl mit sich selbst dargestellt. In der Abbildung ist der Funktionsverlauf des Operators über dem Support abgebildet. Die zweidimensionale Eingangsmenge degeneriert durch die eingeführte Gleichheitsrelation  $R_{1,2}^-$  zu einer Geraden. Das lokale Minimum des Funktionsverlaufs entlang dieser Geraden entspricht dem Lösungspunkt des linken Astes der Ergebnisgröße und liegt im Inneren der Eingangsmenge.

Treten also in einer Sequenz arithmetischer Operationen mehrfache Instanzen von mindestens einer Variablen auf, d. h. es sind (partiell) identische Operanden mit Gleichung (6.58) zu verknüpfen, so können die globalen Minima und Maxima selbst bei monotonen zweistelligen Operatoren im Inneren des scharfen kartesischen Produkts der Operanden liegen. Die Umsetzung von Gleichung (6.58) durch Verknüpfung der Äste der Eingangsgrößen



**Abbildung 6.9:** Verknüpfung von nicht-monotonem mit monotonem Funktional

ßen unter Berücksichtigung der Gleichheitsrelation kann dann zu einem falschen Ergebnis führen.

Typische Beispiele für Sequenzen mit mehrfachen Instanzen von Variablen sind Reihenentwicklungen zur Approximation (nicht) monotoner einstelliger Operatoren (z. B.  $\sin(\tilde{z}_1)$ ,  $\cos(\tilde{z}_1)$ , ...) und zweistelliger (gemischter) Operatoren (z. B.  $\tilde{z}_1^{\tilde{z}_2}$ ,  $c^{\tilde{z}_1}$ ,  $\tilde{z}_1^c$ , ...). Ein gegebener Funktionsverlauf kann unter Berücksichtigung einer entsprechenden Anzahl von Reihengliedern in einem bestimmten Intervall beliebig genau approximiert werden. Als Beispiel sei die Näherung der Kosinus-Funktion mit Hilfe der *Taylor*-Reihenentwicklung dargestellt:

$$\cos(\tilde{z}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tilde{z}_1^{2n}}{(2n)!} = \frac{\tilde{z}_1^0}{0!} - \frac{\tilde{z}_1^2}{2!} + \frac{\tilde{z}_1^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{\tilde{z}_1^2}{2} + \frac{\tilde{z}_1^4}{24} - \dots \quad (6.70)$$

Durch das mehrfache Auftreten von  $\tilde{z}_1$  ist es nicht mehr möglich, die Lage des globalen Minimums und Maximums eines  $\alpha$ -Niveaus a priori zu bestimmen (vgl. Abbildung 6.8b). Wie in dem Beispiel der *Taylor*-Reihenentwicklung der Kosinus-Funktion ersichtlich, treten in einem algebraischen Ausdruck i. A. endlich viele zweistellige Operatoren mit (partiell) identischen Operanden auf. Wird nun eine Fuzzy-Zahl  $\tilde{z}_1$ , deren zugrundeliegendes Funktional  $f_1$  (vgl. Gleichung (6.54) in einer Variable  $x_i$  nicht-monoton ist mit einer zweiten Fuzzy-Zahl  $\tilde{z}_2$ , die ebenfalls von  $x_i$  abhängig ist, verknüpft, so kann das Ergebnisfunktional

$$f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_n) \diamond f_2(x_{n+1}, \dots, x_m)) \quad (6.71)$$

erneut bzgl.  $x_i$  ein monotonen Verhalten aufweisen (vgl. Abbildung 6.9). Werden nicht-monotone Zwischenergebnisse zugelassen, so ist es für die Betrachtung der Entwicklung



des Monotonieverhaltens der zugrundeliegenden Funktionale der Fuzzy-Operanden in einer Sequenz arithmetischer Operationen zweckmäßig, das Ergebnisfunktional  $f(x_1, \dots, x_k)$  der Sequenz zu betrachten. Ist  $f$  das Endergebnis der Auswertungen der Sequenz, so ist im Raum der Eingangsgrößen, aufgespannt durch  $x_1, \dots, x_k$ , das unscharfe kartesische Produkt der Fuzzy-Eingangsgrößen  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$  entwickelt worden und seine Kanten wurden in den Raum der Ergebnisgröße abgebildet. Fällt nun für jedes  $\alpha$ -Niveau sowohl das globale Minimum als auch das globale Maximum von  $f$  mit dem Funktionswert von jeweils einer abgebildeten Kante zusammen, so wurde die globale Optimierungsaufgabe durch gezielte Auswertung von  $f$  an a priori festgelegten Koordinaten ersetzt.

Unabhängig von dem Monotonieverhalten der Zwischenergebnisse ist für die Bestimmung der Lager der Lösungspunkte der Extremwertsuche für jedes  $\alpha$ -Niveau lediglich das Monotonieverhalten von  $f$  maßgebend. Für Fuzzy-Ergebnisgrößen bedeutet dies, dass für jedes  $\alpha$ -Niveau die Koordinaten der Lösungspunkte, d. h. des globalen Minimums bzw. Maximums, für jede monotone Eingangsgröße  $\tilde{x}_i$  mit  $1 \leq i \leq k$  den Maximalwert oder den Minimalwert des  $\alpha$ -Niveaus  $\{x_{i,\alpha}^L; x_{i,\alpha}^R\}$  (Abbildung 6.3) der jeweiligen Variable annehmen. Jede nicht-monotone Variable löst diese Restriktion und führt quasi einen Freiheitsgrad ein, so dass die Koordinaten der Lösungspunkte auf einer Hyperfläche des scharfen kartesischen Produkts des  $\alpha$ -Niveaus zu liegen kommen. Nur falls das Funktional hinsichtlich aller Eingangsgrößen nicht monoton ist, können die Lösungspunkte im Inneren des scharfen kartesischen Produkts liegen.

Die Verarbeitung von Fuzzy-Eingangsgrößen in herkömmlichen Algorithmen und algebraischen Ausdrücken als Sequenz elementarer einstelliger und zweistelliger Operationen durch Verknüpfung der Äste ermöglicht eine effiziente Durchführung der Berechnungen. Dies ist nicht nur auf die bereits in Abschnitt 6.3.1 erörterte hardware-optimierte Umsetzung der Verknüpfungsoperationen sondern auch auf den sukzessiven Aufbau des Produktraumes der Fuzzy-Eingangsgrößen im Verlauf der Auswertung einer Sequenz arithmetischer Operationen zurückzuführen. Wie bei den Verfahren mit deterministischer Grundlösung (vgl. Abschnitt 6.2), wird der Berechnungsaufwand maßgeblich von der Dimension des Raumes der Eingangsgrößen bestimmt. Diese steigt im Verlauf der Auswertung eines algebraischen Ausdrucks sukzessive auf die Dimension des, der deterministischen Verfahren zugrundeliegenden, Produktraumes an. Dadurch sind wesentlich weniger Gleitkommaoperationen zur Auswertung des selben Algorithmus nötig.

Für monotone Funktionale  $f$  kann die dargestellte Fuzzy-Arithmetik mit Hilfe der Ver-

knüpfung der Äste der Fuzzy-Eingangsgrößen äußerst effizient durchgeführt werden. Für Funktionale  $f$ , die bzgl. mindestens einer Variablen ein nicht-monotones Verhalten aufweisen, sind zusätzliche Maßnahmen zur Bestimmung der korrekten globalen Minima und Maxima zu treffen. Die Tatsache, dass das Monotonieverhalten des Algorithmus durch  $f(x_1, \dots, x_k)$  implizit gegeben ist und, wie oben dargestellt, lediglich für die Koordinaten der nicht-monotonen Variablen eine Extremwertsuche durchgeführt werden muss, kann dazu zielgerichtet eingesetzt werden. Die Umsetzung dieser Vorgaben unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Informationen wird in Abschnitt 6.3.5 dargestellt.

### 6.3.3 Der Körper der Fuzzy-Größen

Auf der Basis der Gleichungen (6.60), (6.61), (6.58), (6.62) und (6.63) kann die Menge  $\mathbb{F}$  der Fuzzy-Größen definiert werden.  $\mathbb{F}$  umfasst Fuzzy-Zahlen (unimodale unscharfe Mengen über  $\mathbb{R}$ ) und Fuzzy-Intervalle. Ferner enthält sie die Menge der scharfen Zahlen (Singletons)

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{F} \tag{6.72}$$

und der scharfen Intervalle

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{F}. \tag{6.73}$$

Für die auf die Menge  $\mathbb{F}$  definierten Operationen „+“ und „ $\cdot$ “ sind folgende Axiome erfüllt:

1. Axiom der Abgeschlossenheit

Zwei beliebigen Elementen  $\tilde{a} \in \mathbb{F}$ ,  $\tilde{b} \in \mathbb{F}$  ist genau ein Element  $\tilde{a} + \tilde{b} \in \mathbb{F}$  bzw.  $\tilde{a} \cdot \tilde{b} \in \mathbb{F}$  zugeordnet.

2. Axiom der Assoziativität

Für beliebige Elemente  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{F}$  gilt:

$$(\tilde{a} + \tilde{b}) + \tilde{c} = \tilde{a} + (\tilde{b} + \tilde{c}) \text{ bzw.}$$

$$(\tilde{a} \cdot \tilde{b}) \cdot \tilde{c} = \tilde{a} \cdot (\tilde{b} \cdot \tilde{c})$$

3. Axiom des neutralen Elementes  $\tilde{e}$

Für alle  $\tilde{a} \in \mathbb{F}$  gilt:

$$\tilde{e} + \tilde{a} = \tilde{a} + \tilde{e} = \tilde{a} \text{ mit } e = 0 \text{ bzw.}$$

$$\tilde{e} \cdot \tilde{a} = \tilde{a} \cdot \tilde{e} = \tilde{a} \text{ mit } e = 1$$

## 4. Axiom der Existenz des Inversen (des reziproken Elements)

Zu jedem  $\tilde{a} \in \mathbb{F}$  gibt es ein inverses Element  $\tilde{\tilde{a}} \in \mathbb{F}$ , so dass

$$\tilde{\tilde{a}} + \tilde{a} = \tilde{a} + \tilde{\tilde{a}} = 0 \text{ bzw.}$$

$$\tilde{\tilde{a}} \cdot \tilde{a} = \tilde{a} \cdot \tilde{\tilde{a}} = 1$$

Darüber hinaus gilt für beliebige Elemente aus  $\mathbb{F}$  und den Verknüpfungen „+“ und „·“ das Kommutativitätsgesetz:

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{b} + \tilde{a} \tag{6.74}$$

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \tilde{b} \cdot \tilde{a}. \tag{6.75}$$

$(\mathbb{F}, +)$  und  $(\mathbb{F}, \cdot)$  bilden also eine kommutative oder *Abel'sche* Gruppe. Darüber hinaus wurde durch die Einführung der Gleichheitsrelation  $R^=$  die Eigenschaft der Distributivität sichergestellt. Die Menge  $\mathbb{F}$  der Fuzzy-Größen bildet also den Körper  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ , da gilt:

1.  $\mathbb{F}$  ist bzgl. „+“ eine *Abel'sche* Gruppe mit dem neutralen Element 0.
2.  $\mathbb{F} \setminus \{0\}$  ist bzgl. „·“ eine *Abel'sche* Gruppe.
3.  $\tilde{a} \cdot (\tilde{b} + \tilde{c}) = \tilde{a} \cdot \tilde{b} + \tilde{a} \cdot \tilde{c}$  mit  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{F}$

### 6.3.4 Anwendungsgrenzen bei der Fuzzyifizierung von Algorithmen

Mit Hilfe des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  lassen sich scharfe arithmetische Ausdrücke in ihr fuzzyarithmetisches Pendant konvertieren. Wegen der mit  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  verglichenen komplexeren Struktur des Körpers der Fuzzy-Größen, ist jedoch bei einigen in Algorithmen eingesetzten Konstrukten mit Einschränkungen bzgl. der Allgemeingültigkeit zu rechnen. Im Folgenden werden exemplarisch zwei Problemfelder diskutiert.

Nicht stetige Operatoren führen zu nicht stetigen Funktionsverläufen der Ergebnisgrößen. Die Funktionsverläufe werden daher i. A. durch abschnittsweise stetige Funktionen zwischen den Unstetigkeitsstellen zusammengesetzt. Als Beispiel wird der Querkraftverlauf des in Abbildung 6.10 dargestellten statischen Systems betrachtet. Der Einfeldträger hat die (scharfe) Spannweite  $l = 10$  m und ist beidseitig gelenkig gelagert. Er ist durch eine

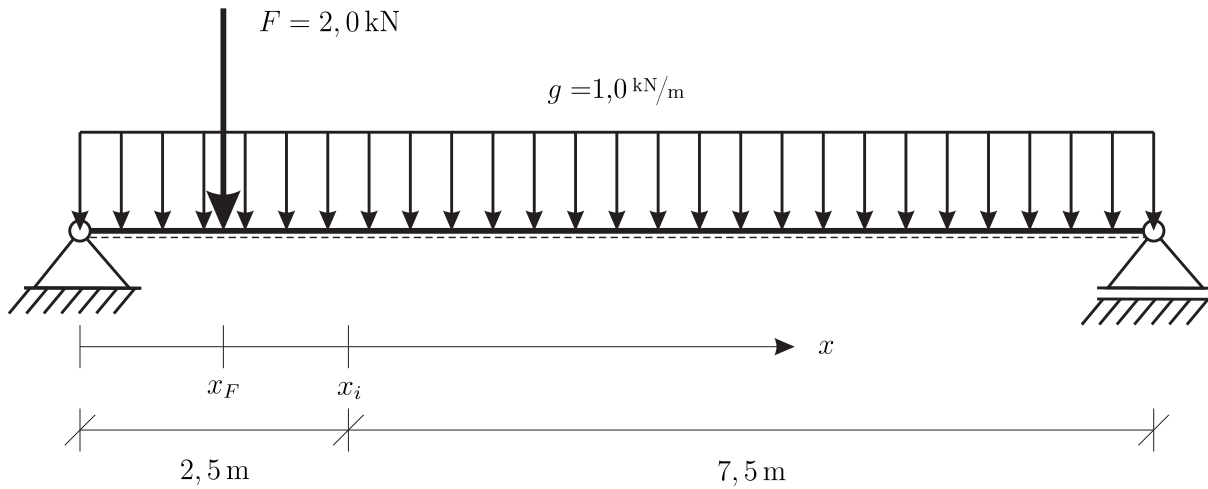


Abbildung 6.10: statisches System mit Belastung

Gleichstreckenlast mit  $g = 1,0 \text{ kN/m}$  und eine Einzellast  $F = 2 \text{ kN}$  belastet. Gesucht ist die Querkraft im Viertelpunkt, wobei der Ort der Einzellast durch  $x_F$  bestimmt wird. Die Querkraft im Viertelpunkt  $x_i$  ergibt sich zu

$$Q_i(x) = \begin{cases} 2,5 - 0,2 \cdot x_F \text{ [kN]} & \text{falls } x_F < x_i \\ 4,5 - 0,2 \cdot x_F \text{ [kN]} & \text{falls } x_F > x_i \end{cases} \quad (6.76)$$

Für  $x_F = x_i$  weist die Querkraft eine Unstetigkeitsstelle auf.

Sei nun der Ort der Einzellast durch die Fuzzy-Größe  $\tilde{x}_F$  gegeben. Gleichung (6.76) wird dann formal in

$$\tilde{Q}_i(x) = \begin{cases} 2,5 - 0,2 \cdot \tilde{x}_F \text{ [kN]} & \text{falls } \tilde{x}_F < x_i \\ 4,5 - 0,2 \cdot \tilde{x}_F \text{ [kN]} & \text{falls } \tilde{x}_F > x_i \end{cases} \quad (6.77)$$

überführt. Die Vergleichsoperatoren „<“ bzw. „>“ sind *Bool*'sche Operatoren. So ergibt z. B. der Operator „<“ den Wert „wahr“, falls der Wert von  $x_F$  kleiner ist als der Wert von  $x_i$  und sonst den Wert „falsch“. Eine nahe liegende fuzzyfiziert Variante des Operators kann mit

$$\tilde{x}_F < x_i = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \forall x \in S(\tilde{x}_F) \text{ gilt : } x < x_i \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.78)$$

eingeführt werden. Für den Operator „>“ gilt dann entsprechend

$$\tilde{x}_F > x_i = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \forall x \in S(\tilde{x}_F) \text{ gilt : } x > x_i \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.79)$$

Bei diesem Beispiel wird ein Problem bei der Verallgemeinerung zweiwertiger Operatoren auf ihr Fuzzy-Pendant deutlich. Denn während für scharfe Zahlen  $x \in \mathbb{R}$

$$\{x|x < x_i\} \cup \{x|x > x_i\} = \mathbb{R} \setminus \{x_i\} \quad (6.80)$$

gilt, kann für Fuzzy-Größen  $\tilde{x} \in \mathbb{F}$  bei Verwendung der Operatoren gemäß Gleichung (6.78) und (6.79) lediglich die schwächere Aussage

$$\{\tilde{x}|\tilde{x} < x_i\} \cup \{\tilde{x}|\tilde{x} > x_i\} \subset \mathbb{F} \setminus \{x_i\} \quad (6.81)$$

gewährleistet werden. Unscharfe Größen deren Support die Unstetigkeitsstelle enthält, werden mit dieser Formulierung nie ausgewertet. Dieser Ansatz ist daher unbrauchbar. Fuzzy-Zahlen und Intervalle sind unscharfe Mengen auf der Grundmenge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Die Operatoren ( $<$ ,  $>$ , ...) zur Definition der stetigen Teilabschnitte unstetiger Funktionen müssen daher als unscharfe Mengenfunktionen aufgefasst werden:

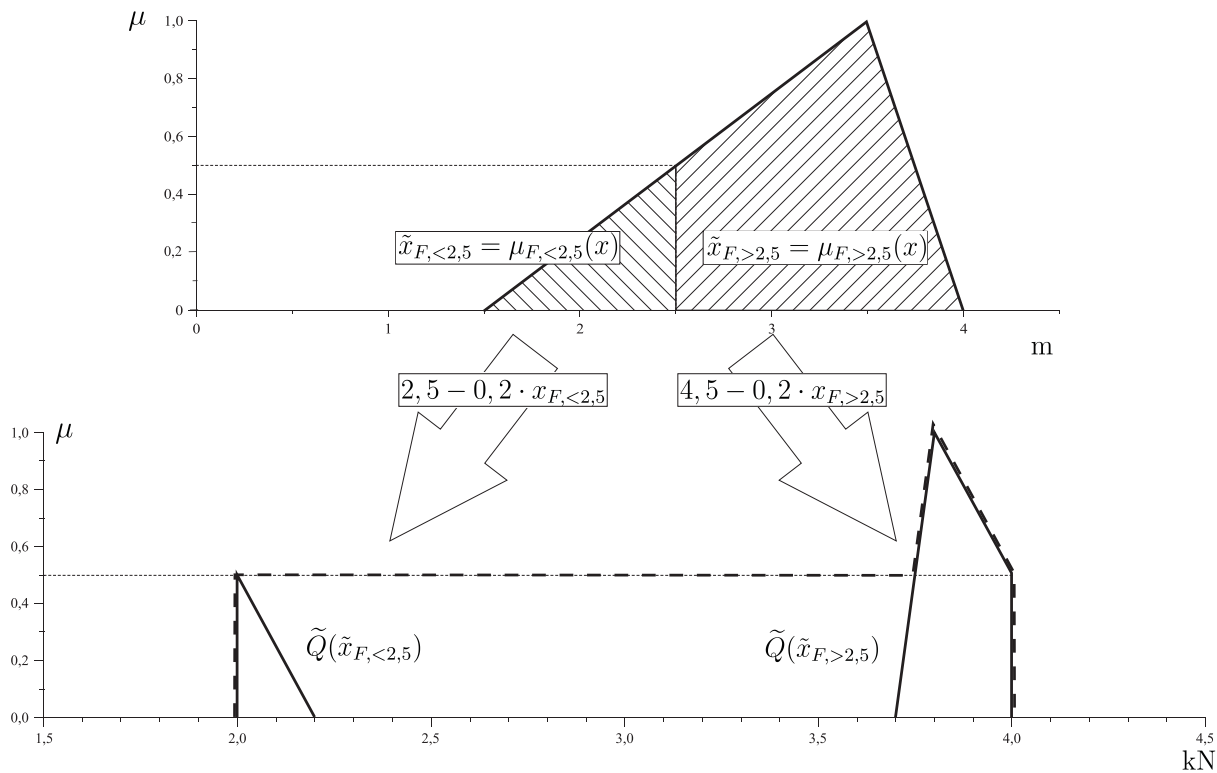
$$\mu_{<x_i}(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{falls } x < x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.82)$$

$$\mu_{>x_i}(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{falls } x > x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.83)$$

Wird zusätzlich die Forderung nach konvexen und normierten unscharfen Größen (siehe Abschnitt 3.6) aufgehoben, so ist es möglich, unstetige Fuzzy-Operatoren formal wie ihre scharfen Varianten zu behandeln.

Für das Beispiel in Abbildung 6.10 wird nun angenommen, dass der unscharfe Ort der Einzellast durch die Fuzzy-Dreieckszahl  $\tilde{x}_P = \langle 1, 5; 3, 5; 4, 0 \rangle$  gegeben ist. Die Anwendung der Mengenfunktionen (Gleichung (6.82) bzw. (6.83)) führt auf die in Abbildung 6.11 dargestellten unscharfen Teilmengen von  $\tilde{x}_F$ . Im Allgemeinen führt eine solche Teilmengebildung zu subnormalen unscharfen Mengen. Da das Erweiterungsprinzip eine Mengenfunktion ist, können diese, obwohl sie die Kriterien für Fuzzy-Größen nicht erfüllen ( $\text{hgt} = 1$ ), verarbeitet werden. Die „Teil-Fuzzy-Größen“ werden auf die entsprechenden stetigen Teilabschnitte des abschnittsweise definierten Operators angewendet. In Abbildung 6.11 sind die „Teil-Fuzzy-Größen“ und die Ergebnisgröße dargestellt.

Die beiden Teilergebnisse müssen anschließend zur Fuzzy-Ergebnisgröße zusammengefasst werden. Die Bildung der Vereinigungsmenge führt dabei auf nicht konvexe unscharfe Mengen auf der Grundmenge  $\mathbb{R}$ . Im Rahmen der Beurteilung geschädigter Brückentragwerke



**Abbildung 6.11:** Abschnittsweise Abbildung der unscharfen Teilmengen der Fuzzy-Eingangsgröße  $\tilde{x}_F$  auf die Ergebnisgröße  $\tilde{Q}$

sind i. d. R. jedoch nur die Randbereiche der Fuzzy-Ergebnisgrößen von Interesse. Die beiden Teilergebnisse werden daher zu einer konvexen und normalisierten Fuzzy-Größe durch Minimum- bzw. Maximumbildung auf den  $\alpha$ -Niveaus der Teilgrößen zusammengefasst (gestrichelte Fuzzy-Größe in Abbildung 6.11).

In dem vorangegangenen Beispiel der nicht stetigen Abbildung zeichnete sich bereits eine Einschränkung in der Wiederverwendbarkeit von bestehendem Programmcode ab. Nicht jeder numerische Algorithmus ist geeignet, um Fuzzy-Größen zu verarbeiten. (Zwischen-)Ergebnisse fuzzy-arithmetischer Operationen sind von den Eingangsgrößen und speziell von den Produkträumen dieser Größen abhängig. Erst durch die Berücksichtigung dieser Abhängigkeiten wird die Eigenschaft der Distributivität des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  gewährleistet. Die Abhängigkeit der Ergebnisgrößen von einer Eingangsgröße oder mehreren Eingangsgrößen zieht sich als „Gedächtnisspur“ durch den Algorithmus. Algorithmen, bei denen der Informationsfluss der Abhängigkeiten nicht durchgängig realisiert werden kann, sind grundsätzlich für die Verarbeitung von Fuzzy-Größen ungeeignet. Als ebenso

problematisch sind *Bool*'sche Operatoren zu bewerten, wenn sie nicht, wie oben beschrieben, umgesetzt werden. Oft treten beide Problemklassen in Kombination auf. Beispielsweise bei der Eigenwertermittlung nach dem Verfahren von *Lanczos* [98]. Dabei handelt es sich um ein iteratives Verfahren. Die eigentliche Eigenwertermittlung wird mit Hilfe einer sukzessive aufgebauten Tridiagonalmatrix durchgeführt, deren Eigenwerte den gesuchten Eigenwerten des Problems entsprechen. Ein mögliches Verfahren zur Auffindung des  $n$ -ten Eigenwertes der Tridiagonalmatrix ist die Bisektionsmethode. Zunächst wird die *Sturm*'sche Kette des charakteristischen Polynoms  $f(x)$  der Tridiagonalmatrix, dessen  $n$ -te Nullstelle dem gesuchten  $n$ -ten Eigenwert entspricht, entwickelt. Die *Sturm*'sche Kette von  $f(x)$  ist eine endliche Folge von Polynomen  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$ , wobei der Grad dieser Polynome streng monoton abnimmt. Die Reihenglieder werden mit

$$P_0(x) = f(x) \tag{6.84}$$

und

$$P_1(x) = f'(x) \tag{6.85}$$

rekursiv durch eine Variante des euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers mittels einer Division mit Rest ( $Q_n(x)$ ) bestimmt:

$$P_n(x) = Q_n(x)P_{n+1}(x) - P_{n+2}(x). \tag{6.86}$$

Wird die Folge  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$  an den Stellen  $x = a$  und  $x = b$  mit  $a < b$  ausgewertet, so gibt die Differenz der Anzahl der Vorzeichenwechsel  $\sigma(a) - \sigma(b)$  der Folge die Anzahl der Nullstellen im halboffenen Intervall  $(a, b]$  an. Auf der Grundlage dieser Information kann jeder Eigenwert durch fortgesetzte Intervallhalbierung eines beliebigen Ausgangsintervalls, welches lediglich den gesuchten Eigenwert sicher enthalten muss, mit vorgegebener Genauigkeit approximiert werden. Enthält die Tridiagonalmatrix jedoch Fuzzy-Größen, so ist das Verfahren nicht anwendbar. Das erste Problem tritt bei der Bestimmung der Vorzeichenwechsel der *Sturm*'schen Kette auf. Während reellen Zahlen, im *Bool*'schen Sinne, entweder ein positives oder negatives Vorzeichen (Nullglieder werden bei der Auswertung ignoriert) zugeordnet werden kann, gilt dies für Fuzzy-Größen i. A. nicht mehr. Eine Fuzzy-Größe  $\tilde{x}$  kann die Null enthalten (d. h.  $\{0\} \in S(\tilde{x})$ ) und daher sowohl positiv als auch negativ sein. Dadurch verliert der Ausdruck  $\sigma(a) - \sigma(b)$  seine Eindeutigkeit und kann nicht mehr als Entscheidungskriterium der Intervallhalbierung dienen. Das zweite Problem ergibt sich durch die Intervallhalbierung selbst. Die

Halbierung des Ausgangsintervalls führt auf ein neues Teilintervall. Nach endlich vielen Halbierungen ist das Teilintervall beliebig klein und seine Grenzen hängen ausschließlich von den (beliebigen) Grenzen des Ausgangsintervalls ab. Sind diese speziell reelle Zahlen, so konvergiert die Intervallhalbierung ebenfalls gegen eine reelle Zahl. Dies widerspricht jedoch der Vorstellung, dass unscharfe Tridiagonalmatrizen unscharfe Eigenwerte haben. Die „Gedächtnisspur“ kann bei der Wahl des Ausgangsintervalls unterbrochen werden. Daher kann die korrekte Funktionalität der Methode nicht sichergestellt werden.

Wird die Bisektionsmethode zur Bestimmung der Eigenwerte einer symmetrischen Tridiagonalmatrix jedoch beispielsweise durch den von *Reinsch & Bauer* [137] veröffentlichten Algorithmus („Rational QR Transformation with Newton Shift for Symmetric Tridiagonal Matrices“) ersetzt, so gelingt es auf Basis des Verfahrens von *Lanczos* die  $n$  kleinsten Eigenwerte eines Fuzzy-Finiten-Elemente-Modells zu ermitteln.

### 6.3.5 Software-Implementierung des Körpers der Fuzzy-Größen

Es wurde gezeigt, dass mit dem Körper  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  fuzzy-arithmetische Operationen analog zur scharfen Zahlenarithmetik durchgeführt werden können. Dies ist eine Grundvoraussetzung für einen praktikablen Einsatz des Unschärfemaßes mit der Charakteristik „Fuzzyness“ bei der numerischen Analyse und Bewertung von geschädigten Tragwerken und insbesondere von Brücken. Die Möglichkeit der Erweiterung scharfer arithmetischer Operationen zu unscharfen Rechenvorschriften ermöglicht eine einfache Erweiterung bestehender Algorithmen und insbesondere von bestehenden Programmcodes zur Behandlung unscharfer Größen.

Um Unschärfe bei der Untersuchung und Bewertung geschädigter Strukturen berücksichtigen zu können, sind geeignete Hilfsmittel nötig. Numerische Untersuchungen von Ingenieurbauwerken können für baupraktisch relevante Problemstellungen vielfach nur mit Computersystemen sinnvoll durchgeführt werden. Dies gilt insbesondere für die Durchführung von Berechnungen mit Fuzzy-Größen. Die dargelegten theoretischen Eigenschaften des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  der Fuzzy-Größen sind daher in eine geeignete Software zu implementieren. Um einen möglichst variablen Einsatz der „erweiterten Fuzzy-Arithmetik“ in unterschiedlichen Problemfeldern zu gewährleisten, wurde jedoch kein „Fuzzy-Finites-Element-Programm“ mit auf die aktuelle Problemstellung beschränkten Fähigkeiten entwickelt, sondern Ziel war es, die Grundlage für eine einfache „Fuzzyifizierung“ künftiger Softwa-



reapplikationen, aber auch von bestehenden Quellcodes zu schaffen.

Eine breite Anwendung der hier vorgestellten innovativen Technik zur Berücksichtigung von Unschärfe der Charakteristik „Fuzzyness“ in numerischen Algorithmen kann jedoch nur dann erwartet werden, wenn einerseits die praktische Umsetzung der mathematischen Grundlagen bei der Neuentwicklung von fuzzyfizierten Algorithmen einfach anwendbar ist, bzw. bestehende Quellcodes mit wenigen Eingriffen angepasst werden kann, und andererseits ein Höchstmaß an Effizienz bei der Durchführung numerischer Analysen erreicht wird. Beiden Anforderungen wird mit der im Folgenden dargestellten Implementierung im vollen Umfang Rechnung getragen.

Die Implementierung der Fuzzy-Zahlen und Fuzzy-Intervalle erfolgte mit der objektorientierten Programmiersprache C++ [130]. Hierbei ist im Wesentlichen das Programmierparadigma „Objektorientierung“ von Interesse. Es sieht die Kapselung von Daten und Funktionen, die auf diese Daten angewendet werden können, in einer Klasse von semantisch gleichen Objekten vor und ermöglicht die Überladung (engl.: *overloading*) von Operatoren und Funktionen. Ein ähnlicher Ansatz wurde bereits 1995 von *Anile et al.* [14] veröffentlicht. Die Implementierung wies jedoch erhebliche Einschränkungen in der Anwendbarkeit auf. Insbesondere führten mehrfache Instanzen der selben Variablen in einem arithmetischen Ausdruck zu einer künstlichen Erhöhung der Unschärfe der Ergebnisgrößen (vgl. Abbildung 6.6).

Die programmtechnische Umsetzung der Eigenschaften von Fuzzy-Größen erfolgte in einer Klasse „FQ“ (**F**uzzy **Q**uantity), die alle möglichen konkreten Ausprägungen von Fuzzy-Zahlen und Fuzzy-Intervallen abbildet. Der so eingeführte Datentyp FQ lässt sich analog zu den nativen Datentypen (z. B. Gleitkommazahl „float“) verwenden. Durch die Erweiterung benötigter Operatoren und Funktionen (z. B. +, −, sin, ...) um eine Schnittstelle für den neuen Datentyp (engl.: *overloading*) können Fuzzy-Algorithmen quasi identisch zur herkömmlichen Programmierung erstellt werden. In Abbildung 6.12 ist beispielsweise der Programmcode für die Bestimmung der Nullstellen der quadratischen Funktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mit  $a \neq 0$  mit

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (6.87)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (6.88)$$

dargestellt. Die auf der linken Seite von Abbildung 6.12 dargestellte Funktion entspricht dabei einer herkömmlichen Gleitkommaberechnung (float), während auf der rechten Seite die gleiche Situation mit Fuzzy-Größen dargestellt ist. Änderungen im Programmcode sind lediglich bei der Deklaration (Typzuweisung) der Variablen nötig, da der Compiler während des Übersetzens automatisch aus den überladenen Schnittstellen den korrekten Funktionsaufruf auswählt.

```
#include <cmath.h>
void root (float a, float b, float c,
           float& x1, float& x2)
{
    float tmp = b * b - 4. * a * c;
    if (tmp < 0) exit (0);
    // keine reelle Nullstelle

    x1 = (-b + sqrt (tmp)) / 2. / a;
    x2 = (-b - sqrt (tmp)) / 2. / a;
}
```

```
#include <FuzzyQuantity.h>
void root (FQ a, FQ b, FQ c,
           FQ& x1, FQ& x2)
{
    FQ tmp = b * b - 4. * a * c;
    if (tmp < 0) exit (0);
    // keine reelle Nullstelle

    x1 = (-b + sqrt (tmp)) / 2. / a;
    x2 = (-b - sqrt (tmp)) / 2. / a;
}
```

**Abbildung 6.12:** Nullstellenbestimmung mit Gleitkommazahlen (links) und mit Fuzzy-Größen (rechts)

Die Fuzzyfizierung der bestehenden Programmierung kann im Wesentlichen durch „Suchen und Ersetzen“ der Typdeklarationen erfolgen. Lediglich bei der Konstruktion von Fuzzy-Größen sind wegen des größeren Informationsgehaltes im Vergleich zu scharfen Zahlen Unterschiede festzustellen. Eine Fuzzy-Größe kann nicht mehr durch eine einfache Wertzuweisung initialisiert werden, statt dessen sind die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgrößen (z. B. Abmessungen, Materialeigenschaften, Lasten, ...) entsprechend ihrer Unschärfe festzulegen. Für Standardzugehörigkeitsfunktionen sind einfache Konstruktoren implementiert, mit deren Hilfe die Fuzzy-Eingangsgrößen durch Angabe weniger Parameter erzeugt werden können. In einem fuzzyfizierten Programmcode stehen folgende Prototypen zur Verfügung:

**Standardtypen** float, double, int, complex

**allgemeine Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall** direkte Bestimmung der Zugehörigkeitsfunktion durch Angabe der Intervallgrenzen der  $\alpha_k$ -Niveaus.

**Fuzzy-Dreieckszahl/-Intervall**

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-k_l}{s_l} & \text{falls } k_l - s_l \leq x < k_l \\ 1 & \text{falls } k_l \leq x \leq k_r \\ 1 + \frac{x-k_r}{s_r} & \text{falls } k_r \leq x < k_r + s_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.89)$$

Abbildung 6.13a.

**quadratische Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall**

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{x-k_l}{s_l}\right)^2 & \text{falls } k_l - s_l \leq x < k_l \\ 1 & \text{falls } k_l \leq x \leq k_r \\ 1 + \left(\frac{x-k_r}{s_r}\right)^2 & \text{falls } k_r \leq x < k_r + s_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.90)$$

Abbildung 6.13b.

**Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall mit Gauß'scher Zugehörigkeitsfunktion**

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-k_l)^2}{2\sigma_l^2}} & \text{falls } k_l - 3\sigma_l \leq x < k_l \\ 1 & \text{falls } k_l \leq x \leq k_r \\ e^{-\frac{(x-k_r)^2}{2\sigma_r^2}} & \text{falls } k_r \leq x < k_r + 3\sigma_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.91)$$

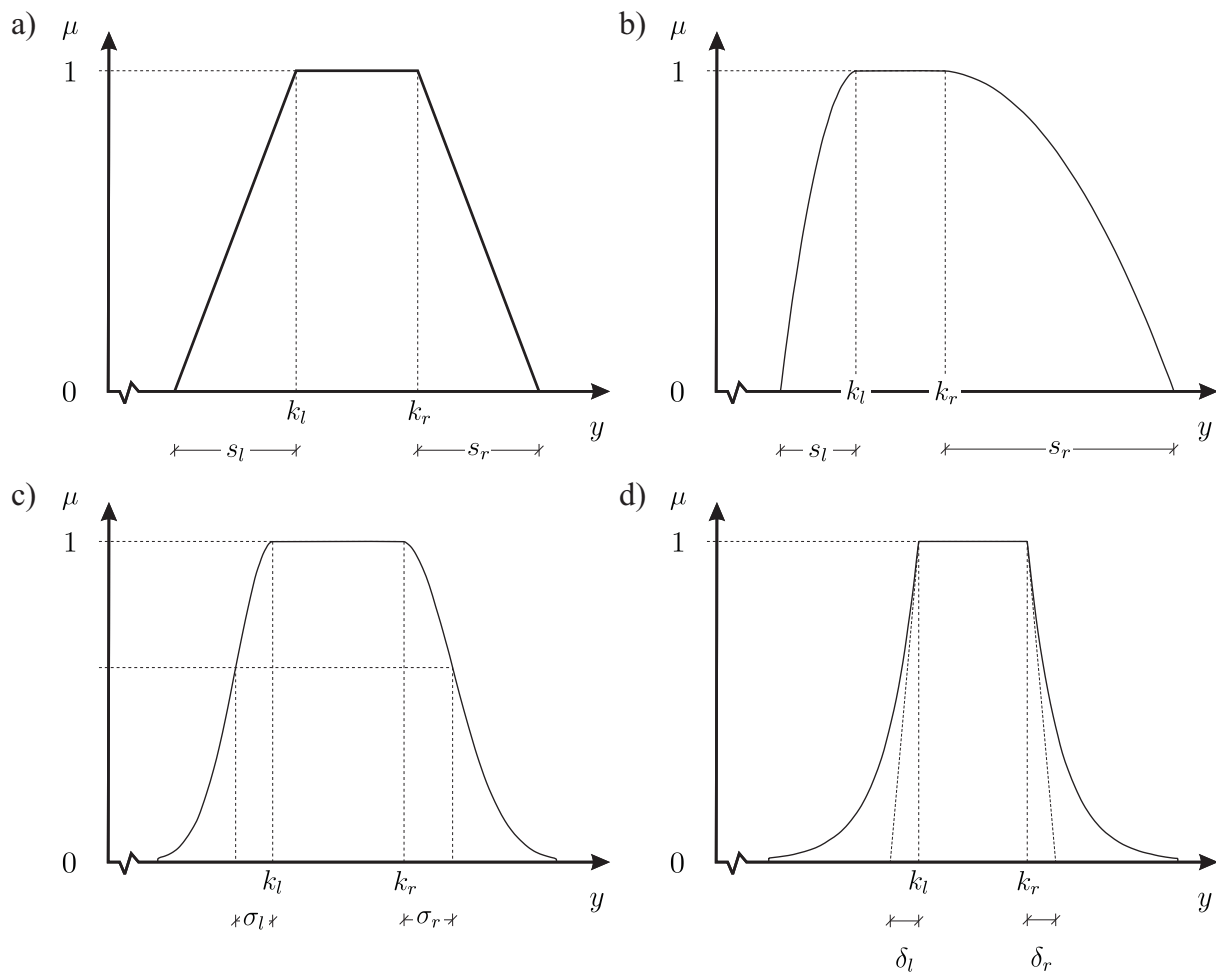
Abbildung 6.13c.

**Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall mit exponentieller Zugehörigkeitsfunktion**

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} e^{\frac{k_l-x}{\delta_l}} & \text{falls } k_l - 4,5\delta_l \leq x < k_l \\ 1 & \text{falls } k_l \leq x \leq k_r \\ e^{\frac{k_r-x}{\delta_r}} & \text{falls } k_r \leq x < k_r + 4,5\delta_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.92)$$

Abbildung 6.13d.

Neben den Standardoperationen (+, −, · und ÷) wurde eine erhebliche Anzahl weiterer Operatoren mit einer Schnittstelle für Fuzzy-Größen ausgestattet. Mit den in den Tabellen 6.9 bis 6.12 angegebenen Operatoren kann nahezu jeder im Bauingenieurwesen



**Abbildung 6.13:** (a) Fuzzy-Dreieckszahl/-Intervall; (b) quadratische Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall; (c) Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall mit *Gauß*'scher Zugehörigkeitsfunktion; (d) Fuzzy-Zahl bzw. Fuzzy-Intervall mit exponentieller Zugehörigkeitsfunktion

anzutreffende Algorithmus zur Verarbeitung von Fuzzy-Größen erweitert werden. Die Implementierung dieser fuzzy-arithmetischen Operatoren erfolgte mit dem Ziel, neben einer einfachen und flexiblen Einsetzbarkeit, eine, insbesondere im Vergleich zu den Verfahren mit deterministischer Grundlösung, optimale Effizienz bei der numerischen Simulation von Strukturen unter Berücksichtigung von Unschärfe zu erreichen. Die direkte Fuzzyifizierung der Rechenoperationen erhöht beispielsweise die Effizienz durch Vermeidung redundanter Bandbreitenoptimierungen im Vorlauf zur Gleichungslösung im Rahmen einer Finite-Elemente-Simulation. Im Gegensatz zu den in Abschnitt 6.2 dargestellten Verfahren wird diese auf der Graphentheorie basierende Matrixumformung für eine Berechnung auch nur einmal durchgeführt. Darüber hinaus wird das als Algorithmus vorliegende

**Tabelle 6.9:** Einstellige Operatoren

Operator	alternative Implementierung
$e^{\tilde{x}}$	-
$\sqrt{\tilde{x}}$	-
$\log(\tilde{x})$	-
$\ln(\tilde{x})$	-
$ \tilde{x} $	-
$\sin(\tilde{x})$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tilde{x}^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos(\tilde{x})$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tilde{x}^{2n}}{(2n)!}$
$\arcsin(\tilde{x})$	-
$\arccos(\tilde{x})$	-
$\tan(\tilde{x})$	-

Operator	alternative Implementierung
$\cot(\tilde{x})$	-
$\arctan(\tilde{x})$	-
$\arccos(\tilde{x})$	-
$\sinh(\tilde{x})$	-
$\cosh(\tilde{x})$	$\frac{1}{2} (e^{\tilde{x}} + e^{-\tilde{x}})$
$\operatorname{arcsinh}(\tilde{x})$	$\ln(\tilde{x} + \sqrt{\tilde{x}^2 + 1})$
$\operatorname{arccosh}(\tilde{x})$	$\ln(\tilde{x} + \sqrt{\tilde{x}^2 - 1})$
$\tanh(\tilde{x})$	-
$\operatorname{coth}(\tilde{x})$	-
$\operatorname{arctanh}(\tilde{x})$	-
$\operatorname{arccoth}(\tilde{x})$	-

**Tabelle 6.10:** Zweistellige Operatoren

Operator	alternative Implementierung
$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$	-
$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$	-
$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$	-
$\tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2$	-
$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$	-
$\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$	-

Operator	alternative Implementierung
$\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2$	-
$\tilde{x}_1 > \tilde{x}_2$	-
$\tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2$	-
$\tilde{x}_1^{\tilde{x}_2}$	$e^{\tilde{x}_1 \cdot \log(\tilde{x}_2)}$
$\min(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$	-
$\max(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$	-

**Tabelle 6.11:** Gemischt-zweistellige Präfix-Operatoren mit  $c \in \mathbb{R}$ 

Operator	alternative Implementierung	Operator	alternative Implementierung
$c + \tilde{x}$	-	$c = \tilde{x}$	-
$c - \tilde{x}$	-	$c < \tilde{x}$	-
$c \cdot \tilde{x}$	-	$c \leq \tilde{x}$	-
$c \div \tilde{x}$	-	$c > \tilde{x}$	-
$c^{\tilde{x}}$	$e^{c \cdot \log(\tilde{x})}$	$c \geq \tilde{x}$	-

**Tabelle 6.12:** Gemischt-zweistellige Suffix-Operatoren mit  $c \in \mathbb{R}$ 

Operator	alternative Implementierung	Operator	alternative Implementierung
$\tilde{x} + c$	-	$\tilde{x} = c$	-
$\tilde{x} - c$	-	$\tilde{x} < c$	-
$\tilde{x} \cdot c$	-	$\tilde{x} \leq c$	-
$\tilde{x} \div c$	-	$\tilde{x} > c$	-
$\tilde{x}^c$	$e^{\tilde{x} \cdot \log(c)}$	$\tilde{x} \geq c$	-

Problem nicht durch mehrmalige Berechnung der scharfen Grundform gelöst, sondern automatisch in eine für moderne Computer-Architekturen optimierte Form umformuliert (vgl. Abschnitt 6.4). Ein weiterer Vorteil des hier beschriebenen Vorgehens ist die äußerst flexible Implementierung der arithmetischen Operatoren. Diese ermöglicht es, den Berechnungsaufwand in Abhängigkeit von vom vorhandenen a priori Wissen bzgl. der Monotonieeigenschaften der zu behandelnden Problemstellung zu minimieren. Entsprechend dem Kenntnisstand ist es möglich, fuzzy-arithmetische Operationen im Rahmen numerischer Simulationen in drei Modi durchzuführen:

- monotoner Modus (Abschnitt 6.3.5.1)
- selektiv-nicht-monotoner Modus (Abschnitt 6.3.5.2)
- adaptiver Modus (Abschnitt 6.3.5.3)

Mit Hilfe des „monotonen Modus“ ist für eine Berechnung die kürzeste Dauer zu erwarten. Allerdings muss sichergestellt sein, dass das Funktional  $f$  (Gleichung (6.1)) in allen

Variablen monoton ist. Unabhängig vom Monotonieverhalten ist dieser Modus auch dann einsetzbar, wenn lediglich eine Fuzzy-Eingangsgröße betrachtet wird. Die Abbildung der Fuzzy-Eingangsgrößen auf die Fuzzy-Ergebnisgrößen kann dann äußerst effizient durch Abbildung der Kanten des unscharfen kartesischen Produkts der  $\alpha$ -Niveaus der Eingangsgrößen durchgeführt werden.

Der zweite Modus findet Anwendung, falls das Funktional in einer oder mehr identifizierten Variablen nicht-monoton ist. Wie bereits erläutert, liegen in diesem Fall die Lösungspunkte der Optimierungsaufgabe i. A. nicht in den Ecken des scharfen kartesischen Produkts der  $\alpha$ -Niveaus der Eingangsgrößen. Die in Abschnitt 6.2 beschriebene aufwendige Bestimmung des globalen Minimums und Maximums kann jedoch erheblich effizienter gestaltet werden, da lediglich die Koordinaten variabel sind, die zu den bekannten nicht-monotonen Eingangsgrößen korrespondieren. Die a priori vorhandenen Informationen werden optimal eingesetzt, um die Problemgröße und den damit verbundenen Berechnungsaufwand zu minimieren.

Schließlich ermöglicht der dritte Berechnungsmodus eine effiziente Durchführung von Berechnungen mit Funktionalen  $f$  bzw. Algorithmen, für die keine Monotonieeigenschaften im Voraus ermittelt werden können. Dabei wird die Tatsache genutzt, dass die Abbildungsvorschrift durch die sequentielle Abfolge von arithmetischen Grundoperationen implizit bekannt ist. Es kann daher während einer Berechnung im „monotonen Modus“ zusätzlich das Monotonieverhalten bestimmt werden. Ist das Funktional  $f$  in allen Variablen monoton, so sind die ermittelten Ergebnisgrößen korrekt, andernfalls ist die Berechnung mit den nun bekannten nicht-monotonen Variablen im „selektiv-nicht-monotonen Modus“ zu wiederholen.

Im Folgenden wird die Umsetzung der dargestellten theoretischen Zusammenhänge in eine praxistaugliche Software dargestellt.

#### 6.3.5.1 Der monotone Modus

Die wesentliche im Rahmen dieser Arbeit erbrachte Innovation des hier eingeführten „monotonen Modus“ ist eine effiziente Implementierung der Gleichungen (6.60), (6.61), (6.58), (6.62), und (6.63) zur Berücksichtigung von Abhängigkeiten zwischen Variablen. Diese in Abschnitt 6.3.2 entwickelten Gleichungen ermöglichen die Durchführung fuzzy-arithmetischer Operationen mit interaktiven Variablen. Erst durch ihre Einführung ist es

möglich, arithmetische Ausdrücke ohne vorausgehende Umformungen korrekt auszuwerten. Die Gleichungen (6.60), (6.61), (6.58), (6.62), und (6.63) fügen die bislang fehlende Eigenschaft der Distributivität hinzu und ermöglichen dadurch die Definition des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ . In dieser algebraischen Struktur werden die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division analog zu den reellen Zahlen durchgeführt, wodurch Algorithmen und insbesondere computerorientierte Rechenvorschriften in ihrer üblichen Struktur und Notation genutzt werden können.

Die Gleichheitsrelation  $R^=$  in Gleichung (6.46) dient zur Verknüpfung identischer Variablen in zweistelligen arithmetischen Ausdrücken. Identische Variablen werden dabei durch den Kontext identifiziert [87]. Im einfachsten Fall tragen identische Variablen die selbe Bezeichnung. Durch Zuweisungs- und Kopieroperatoren können bei Computeralgorithmen jedoch auch identische Variablen verknüpft werden, ohne dass sie die selbe Bezeichnung tragen. Während bei scharfen Zahlen (Abbildung 6.14 oben) lediglich der Wert einer Variable das Ergebnis einer Operation beeinflusst, ist bei Fuzzy-Größen auch die Abhängigkeit zwischen Variablen zu berücksichtigen (Abbildung 6.14 unten). Die Variablen  $a$  und  $b$  sind unabhängig. Entsprechend Tabelle 6.6 werden der linke bzw. der rechte Ast der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße der Subtraktion  $a - b$  mit  $L_a - R_b$  bzw.  $R_a - L_b$  bestimmt. Der Support der Ergebnisgröße enthält zwar die scharfe „0“, die Größe selbst ist jedoch nicht identisch Null. Die Restriktion durch die Gleichheitsrelation bei der Subtraktion  $a - c$  schließt obige Kombinationsmöglichkeiten aus. Der linke bzw. der rechte Ast der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße sind mit  $L_a - L_c = L_a - L_a$  bzw.  $R_a - R_c = R_a - R_a$  zu bestimmen. Die Ergebnisgröße ist identisch Null.

Eine unscharfe Größe kann als unscharfe Einschränkung der Werte, die ein Parameter (Variable) annehmen kann, interpretiert werden. Bei identischen Variablen bedeutet dies, dass sie gleichgerichtet streuen. Nimmt eine Variable einen konkreten (scharfen) Wert an, so nimmt auch die andere (identische) Variable den selben scharfen Wert mit dem selben Zugehörigkeitswert an. Dies wird durch die Einschränkung des unscharfen kartesischen Produkts mit Hilfe der Gleichheitsrelation sichergestellt. Sind die beiden zu verknüpfenden Variablen selbst Ergebnisse einer vorangegangenen arithmetischen Operation, so ist bei schichtweiser Betrachtung Gleichung (6.59) anzuwenden. Die Gleichheitsrelationen  $R_{i,j,\alpha_k}^-$  bis  $R_{l,m,\alpha_k}^-$  stellen auch hier die selbe Ausprägung identischer unscharfer Parameter sicher. Diese unscharfen Parameter sind unscharfe Eingangsgrößen (z. B. Abmessungen, Materialeigenschaften, Lasten, ...) der numerischen Analyse. Für die Implementierung



```

#include <FuzzyQuantity.h>
void main ()
{
// Arithmetik mit scharfen Zahlen
double a (1.0);
double b (1.0);
double c = a;

if (a-b == 0.0) print(‘korrektes Ergebnis’);
if (a-c == 0.0) print(‘korrektes Ergebnis’);

// Arithmetik mit Fuzzy-Zahlen
FQ a (0.5,1.0,1.5); // Konstruktion einer Fuzzy-Dreieckszahl <0.5,1.0,1.5>
FQ b (0.5,1.0,1.5); // Konstruktion einer Fuzzy-Dreieckszahl <0.5,1.0,1.5>
FQ c=a; // Zuweisung der Variablen a an c

if (a-b == 0.0) print(‘falsches Ergebnis’);
if (a-c == 0.0) print(‘korrektes Ergebnis’);
}

```

Abbildung 6.14: Indirekte Identität von Variablen

bedeutet dies eine Unterscheidung zwischen den unabhängigen Eingangsgrößen und den (Zwischen-)ergebnissen. Jede unabhängige Eingangsgröße, d. h. jede Fuzzy-Größe, die mit Hilfe eines Konstruktors (Abbildung 6.13) instanziiert wird, erhält eine systemweit eindeutige Identifikationsnummer  $ID$  mit  $ID \in \mathbb{N}^+$ . Bei jeder einstelligen oder zweistelligen Verknüpfung, Zuweisung oder Kopie werden die Identifikationsnummern der beteiligten Größen auf die Ergebnisgrößen übertragen. Bei zweistelligen Operatoren wird die aufsteigend geordnete Liste durch Bildung der Vereinigungsmenge der Listen der beiden Operanden erhalten. Jede Fuzzy-Größe erhält mit der Menge der Identifikationsnummern daher die Information, von welchen Eingangsgrößen sie abhängig ist. Die Identifikationsnummern einer Fuzzy-Größe können als Indizes der unscharfen Eingangsgrößen aufgefasst werden, die ihren Produktraum aufspannen (vgl. Abbildung 6.1). Die Listeneinträge sind also das bereits erwähnte „Gedächtnis“, das sich bei jedem Algorithmus von den Eingangsgrößen bis zu den Ergebnisgrößen entwickelt.

Wird nun Gleichung (6.59) für die Verknüpfung von zwei Fuzzy-Größen  $\tilde{z}_1$  und  $\tilde{z}_2$  angewendet, so verbinden die Listeneinträge von  $\tilde{z}_1$  die Fuzzy-Größen  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  (Gleichung (6.54)) mit den entsprechenden Elementen der Menge der Fuzzy-Eingangsgrößen  $\{\tilde{x}_1^e, \dots, \tilde{x}_k^e\}$ . Die Listeneinträge von  $\tilde{z}_2$  stellen analog dazu eine Verbindung zwischen  $\tilde{x}_{n+1}, \dots, \tilde{x}_m$  (Gleichung (6.55)) und den entsprechenden Elementen aus  $\{\tilde{x}_1^e, \dots, \tilde{x}_k^e\}$  her. Die Kardinalität der Vereinigungsmenge der Listen gibt die Dimension  $n$  des Produktraums der Ergebnisgröße an. Die Kardinalität der Schnittmenge hingegen bestimmt die Anzahl der in Gleichung (6.59) einzuführenden Gleichheitsrelationen  $R_{i,j,\alpha_k}^-$ . Die Summe  $m$  der

Mächtigkeiten der Listen entspricht daher der Dimension des Produktraums ohne Berücksichtigung von Interaktion. Jede zweistellige Gleichheitsrelation  $R_{i,j,\alpha_k}^-$  wird mittels Zylindererweiterung auf die Dimension dieses Produktraums erweitert. Die so erzeugten Hyperflächen stehen paarweise senkrecht aufeinander. Jede schneidet das scharfe kartesische Produkt des  $\alpha_k$ -Niveaus der Eingangsgrößen durch  $2^{m-1}$  Ecken. Die Schnittmenge der Gleichheitsrelationen und des scharfen kartesischen Produkts enthält alle möglichen Lösungspunkte zur Bestimmung des globalen Minimums und Maximums. Bei monotonen Operatoren kann ihre Lage a priori auf die Ecken des scharfen kartesischen Produkts eingeschränkt werden. Mögliche Lösungspunkte liegen also auf den verbleibenden  $2^n$  Ecken der Schnittmenge der Gleichheitsrelationen und des scharfen kartesischen Produkts. Dadurch verlieren die Beziehungen in den Tabellen 6.1 bis 6.4 bzw. 6.5 bis 6.8 ihre Gültigkeit. Da i. A. nicht a priori bestimmt werden kann, welche Gleichheitsrelationen bei der nächsten arithmetischen Operation mit der Ergebnisgröße auftreten, kann kein potentieller Lösungspunkt ignoriert werden. Es sind daher alle möglichen Minima und Maxima auszuwerten und zusammen mit den Koordinaten der Lösungspunkte zu speichern. Dies kann allerdings ohne Betrachtung der Monotonieigenschaften des Operators erfolgen. Die Koordinaten der Lösungspunkte werden zweckmäßig durch Angabe der verknüpften Äste der Zugehörigkeitsfunktionen angegeben. Um auszudrücken, dass die Äste lediglich potentielle Lösungen darstellen und nicht dem linken oder rechten Ast zugewiesen werden können, werden sie im Folgenden mit  $LR_i$  mit  $1 \leq i \leq 2^n$  bezeichnet.

Bei Berücksichtigung von Interaktion wird das Optimierungsproblem nicht in jedem Rechenschritt ausgewertet, sondern es werden alle möglichen Lösungspunkte gesammelt. Eine Fuzzy-Größe enthält also neben der Liste mit  $n$  Identifikationsnummern für jedes  $\alpha_k$ -Niveau  $2^n$  potentielle Extrema und deren Koordinaten. Sie sind die Ergebnisse der Auswertungen der gesamten vorangegangenen Sequenz arithmetischer Operationen mit den Kanten des  $n$ -dimensionalen unscharfen kartesischen Produkts der  $n$  Fuzzy-Eingangsgrößen als Operanden. Die zugehörigen Koordinaten bestimmen die jeweilige Kante des unscharfen kartesischen Produkts. Die Koordinaten sind Tupel der Form  $(A_{x_1}, A_{x_2}, \dots, A_{x_n})$  mit  $A_{x_i} \in \{L, R\}$ . Eine Verknüpfung von zwei partiell identischen Fuzzy-Größen  $\tilde{z}_1$  und  $\tilde{z}_2$  bedeuten nun eine selektive paarweise Verknüpfung der Äste der Operanden. Ist  $\tilde{z}_1$  von  $n_1$  und  $\tilde{z}_2$  von  $n_2$  Eingangsgrößen abhängig und befinden sich unter diesen  $i$  identische Paare, so müssen aus den  $2^{n_1+n_2}$  möglichen Kombinationen die  $2^i = 2^{n_1+n_2-i}$  Kombinationen, die den  $R_{i,j}^-$ , ...,  $R_{l,m}^-$  Gleichheitsrelationen genügen,

identifiziert werden. Derartige Kombinationen zeichnen sich durch die Übereinstimmung der entsprechenden Koordinaten aus. Sind beispielsweise die  $i$  Identifikationsnummern  $\{ID_j^{\tilde{z}_1}, ID_k^{\tilde{z}_1}, \dots, ID_l^{\tilde{z}_1}\}$  mit  $1 \leq j < k < l \leq n_1$  von  $\tilde{z}_1$  paarweise mit den  $i$  Identifikationsnummern  $\{ID_q^{\tilde{z}_2}, ID_r^{\tilde{z}_2}, \dots, ID_s^{\tilde{z}_2}\}$  mit  $1 \leq q < r < s \leq n_2$  von  $\tilde{z}_2$  identisch, so müssen auch die Einträge in den Koordinatentupeln  $(\dots, A_{x_{ID_j^{\tilde{z}_1}}}^{\tilde{z}_1}, \dots, A_{x_{ID_k^{\tilde{z}_1}}}^{\tilde{z}_1}, \dots, A_{x_{ID_l^{\tilde{z}_1}}}^{\tilde{z}_1}, \dots)$  bzw.  $(\dots, A_{x_{ID_q^{\tilde{z}_2}}}^{\tilde{z}_2}, \dots, A_{x_{ID_r^{\tilde{z}_2}}}^{\tilde{z}_2}, \dots, A_{x_{ID_s^{\tilde{z}_2}}}^{\tilde{z}_2}, \dots)$  identisch sein, um die korrespondierenden Äste verknüpfen zu dürfen. Eine einfache lineare Suche nach Ästen mit übereinstimmenden Teilsequenzen der Koordinaten weist dabei eine Komplexität von

$$\mathcal{O}(i \cdot 2^{n_1+n_2}) \quad (6.93)$$

auf. Insbesondere bei einer großen Anzahl von Fuzzy-Eingangsgrößen kann dieser Vorgang einen signifikanten Einfluss auf die Gesamtrechenzeit haben. Eine lineare Suche muss jedoch nur dann erfolgen, wenn über die Reihenfolge der Einträge keine Kenntnisse vorliegen. Gelingt es, die Menge der Äste durch die Einführung einer Ordnungsrelation in ein geordnetes Tupel (Vektor) zu transformieren, so können die zu verknüpfenden Äste direkt und ohne Suche entnommen werden. Hierzu werden die Einträge in den Koordinatentupeln umkodiert. Eine Referenz auf den linken Ast einer Fuzzy-Größe wird durch den Wert „0“ und eine Referenz auf den rechten Ast durch den Wert „1“ ersetzt. Diese Darstellung der Koordinaten entspricht mit  $(A_{x_1}, A_{x_2}, \dots, A_{x_n})$  mit  $A_{x_i} \in \{0, 1\}$  dann formal einer Binärzahl. Aus Effizienzgründen ist die Darstellung der Koordinaten jedoch als invertierte Binärzahl implementiert, so dass ein Koordinatentupel eineindeutig mit

$$Z = \sum_{i=1}^n A_{x_i} \cdot 2^{i-1} \quad (6.94)$$

in eine natürliche Zahl  $Z \in \mathbb{N}_0^+$  transformiert werden kann. Die Äste einer Fuzzy-Größe werden entsprechend  $Z$  aufsteigend in einem geordneten Tupel (Vektor) gespeichert. Die Koordinaten der Äste sind durch Gleichung (6.94) implizit in der Position  $Z$  innerhalb des Vektors gegeben und müssen daher nicht zusätzlich gespeichert werden.

Bei der Verknüpfung von zwei Fuzzy-Größen sind, entsprechend der Dimension  $n$  des Produktraums der beiden Größen, für die Ergebnisgröße  $2^n$  Äste zu ermitteln. Für jeden Ast wird entsprechend der Ordnungszahl  $Z$  das zugehörige Koordinatentupel ermittelt. Aus Effizienzgründen wurde die Umrechnung vom Dezimalsystem ins inverse Dualsystem für alle möglichen  $Z$  bereits bei der Konstruktion der Fuzzy-Eingangsgrößen durchgeführt

und die Ergebnisse ebenfalls in einem geordneten Tupel (Vektor) hinterlegt. Aus diesen Koordinaten und den Listen der Identifikationsnummern der beiden zu verknüpfenden Größen werden die entsprechenden Koordinaten der Äste der Ergebnisgröße ermittelt. Durch die Umrechnung ins Dezimalsystem können die Positionen der Äste im Tupel direkt bestimmt und dadurch ihre Verknüpfung effizient durchgeführt werden. Die benötigte Rechenzeit zur Transformation einer inversen Binärzahl in das Dezimalsystem verhält sich linear gegenüber der Anzahl der Stellen der Binärzahl. Die Komplexität der Zuordnung der Äste der Eingangsgrößen zu den Ästen der Ergebnisgröße kann daher mit

$$\mathcal{O}((n_1 + n_2) \cdot 2^{n_1+n_2-i}) \quad (6.95)$$

angegeben werden.

Die Implementierungsstrategie wird im Folgenden mit Hilfe des einfachen Beispiels der Nullstellenbestimmung einer quadratischen Funktion (Gleichung (6.87)) dargestellt. Die Variablen  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  und  $\tilde{c}$  werden dabei als unabhängige Eingangsgrößen mit  $0 \notin S(\tilde{a})$ ,  $0 \notin S(\tilde{b})$  und  $0 \notin S(\tilde{c})$  angenommen.

Zunächst wird der Ausdruck unter der Wurzel ausgewertet. Die Operatorpräzedenz der in der Mathematik und Informatik üblichen Infixnotation bleibt auch für Elemente des Körpers der Fuzzy-Größen unverändert. Aus Darstellungsgründen und ohne Verlust der Allgemeingültigkeit wird dennoch zuerst der Term  $4 \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{c}$  ausgewertet. Das Zwischenergebnis  $\tilde{z}_1$  der Multiplikation des Skalars mit  $\tilde{a}$  wird durch Auswertung von  $4 \cdot LR_i$  für die beiden Äste  $LR_i$  von  $\tilde{a}$  erhalten. Die Reihenfolge der Äste bleibt dabei unverändert. Die Zwischenergebnisgröße  $\tilde{z}_1$  erhält die einelementige Liste der Identifikationsnummern von  $\tilde{a}$ . Suffix-Operationen mit Skalaren werden in gleicher Weiser durchgeführt.

Im nächsten Schritt wird das Zwischenergebnis  $\tilde{z}_1$  mit der Eingangsgröße  $\tilde{c}$  verknüpft. Die beiden Operanden weisen unterschiedliche Identifikationsnummern auf, d. h. sie sind voneinander unabhängig. Jeder Ast von  $\tilde{z}_1$  ist mit jedem Ast von  $\tilde{c}$  zu kombinieren. Dabei ist jedoch auf die Reihenfolge zu achten, in der die Ergebnisse abgelegt werden. Die gewählte Ordnungsrelation gibt die Reihenfolge der Koordinatentupel vor. Es sind also für jede Verknüpfung die entsprechenden Äste der beiden Operanden zu lokalisieren. Die Verknüpfung von unabhängigen Größen wird in gleicher Weise behandelt, wie die Verknüpfung von partiell identischen Größen. Sie wird später im Detail dargestellt.

Die Auswertung von  $\tilde{b}^2$  kann für  $k \in \mathbb{N}^+$  als Produktentwicklung  $\tilde{x}^k = \prod_{i=1}^k \tilde{x}$  implementiert werden. Im  $i$ -ten Schritt ist der Ausdruck  $\tilde{x}^{i-1} \cdot \tilde{x}$  auszuwerten. Zwischen den beiden Ope-

randen besteht Interaktion; sie sind quasi identisch. Der hier verwendete Identitätsbegriff geht über die von *Klir & Cooper* festgelegte Feststellung der Gleichheit des Kontextes hinaus. Die Identität von zwei Fuzzy-Größen bedeutet, dass sie von den selben Fuzzy-Eingangsgrößen abhängen. Bei der Verknüpfung derartiger Größen bleibt die Dimension des Produktraums der Ergebnisgröße gegenüber den beiden Operanden unverändert. Die selektive Auswahl der zu verknüpfenden Ästen vereinfacht sich zu einer bijektiven Abbildung. Jeder Ast des ersten Operanden ist mit genau einem Ast des zweiten Operanden, mit jeweils identischen Koordinatentupeln zu verknüpfen. Aufgrund der gewählten Ordnungsrelation liegen die zu verknüpfenden Äste bereits in der selben Reihenfolge vor. Ihre Verknüpfung kann effizient in einem einfachen Schleifendurchlauf ohne zusätzliche Positionsbestimmung erfolgen.

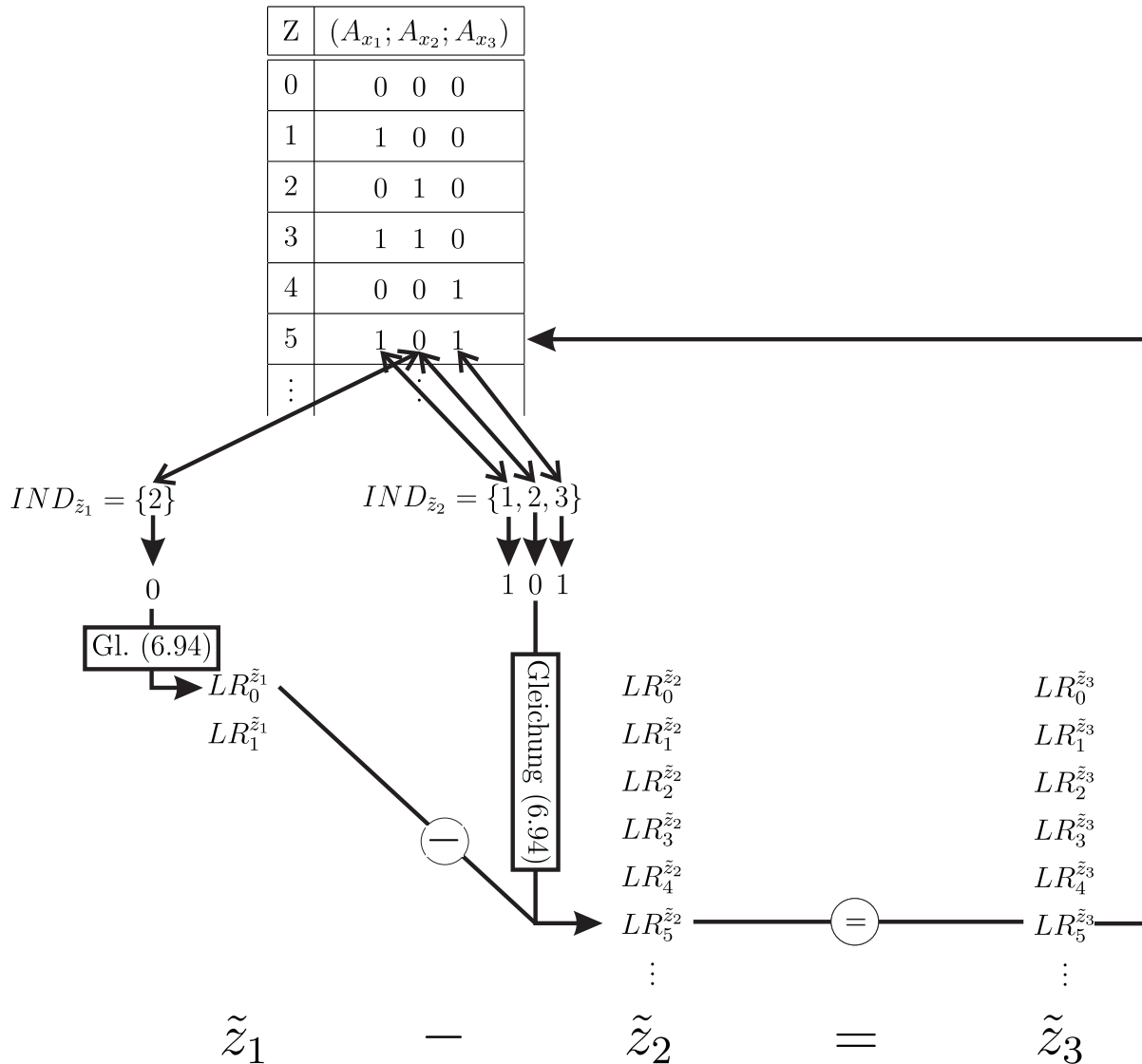
Einstellige Operatoren (Tabelle 6.9) sind entweder als Reihenentwicklung implementiert oder sie werten die Äste einer Fuzzy-Größe direkt aus. Im ersten Fall gilt der vorherige Absatz entsprechend. Im zweiten Fall, wie beispielsweise die Auswertung der Wurzel im Zähler, wird der Operator auf jeden Ast angewendet. Da sich bei einstelligen Operatoren weder die Dimension des Produktraums, noch die Reihenfolge der Äste ändert, kann dies ebenfalls in einem Schleifendurchlauf über alle Äste erfolgen.

Die Auswertung des Zählers und die anschließende Division durch den Nenner sind Operationen mit partiell identischen Variablen und daher mit Hilfe von Gleichung (6.59) auszuwerten. Dies wird exemplarisch am Beispiel des Zählers dargestellt. Die Auswertung von  $\tilde{z}_3 = \tilde{z}_1 - \tilde{z}_2$  mit  $\tilde{z}_1 = -\tilde{b}$  und dem Ergebnis der Auswertung des Wurzelausdrucks  $\tilde{z}_2$  ist Gegenstand der folgenden Betrachtung. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit wird angenommen, dass die Variablen  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  und  $\tilde{c}$  in dieser Reihenfolge erzeugt wurden, d. h.  $\tilde{a}$  die Identifikationsnummer „1“,  $\tilde{b}$  die Identifikationsnummer „2“ und  $\tilde{c}$  die Identifikationsnummer „3“ aufweist. Das Zwischenergebnis  $\tilde{z}_2$  verfügt daher über die Liste  $ID_{\tilde{z}_2} = \{1, 2, 3\}$ . Die Festlegung der Identifikationsnummern von  $\tilde{z}_3$  erfolgt durch die Bildung der Vereinigungsmenge von  $ID_{\tilde{z}_1}$  und  $ID_{\tilde{z}_2}$ :

$$ID_{\tilde{z}_3} = \{1, 2, 3\} = \{2\} \cup \{1, 2, 3\}. \quad (6.96)$$

Zusätzlich werden für die Durchführung der Verknüpfung zwei aufsteigend geordnete Indexlisten erzeugt, welche die Position der Listeneinträge von  $ID_{\tilde{z}_1}$  und  $ID_{\tilde{z}_2}$  in der Liste  $ID_{\tilde{z}_3}$  enthalten:  $IND_{\tilde{z}_1} = \{2\}$  und  $IND_{\tilde{z}_2} = \{1, 2, 3\}$ . Die Dimension des Produktraums der Ergebnisgröße  $\tilde{z}_3$  und dadurch die Anzahl der Äste wird durch die Kardinalität von  $ID_{\tilde{z}_3}$  bestimmt. Die acht Äste werden der Reihe nach durch selektive Verknüpfung der

Äste von  $\tilde{z}_1$  mit denen von  $\tilde{z}_2$  bestimmt. Für die Bestimmung des  $Z$ -ten Astes der Ergebnisgröße  $\tilde{z}_3$  wird im ersten Schritt die dem Index  $Z$  entsprechende invertierte Binärzahl benötigt (Abbildung 6.15). Mit Hilfe der Indexlisten wird für die beiden Operanden im

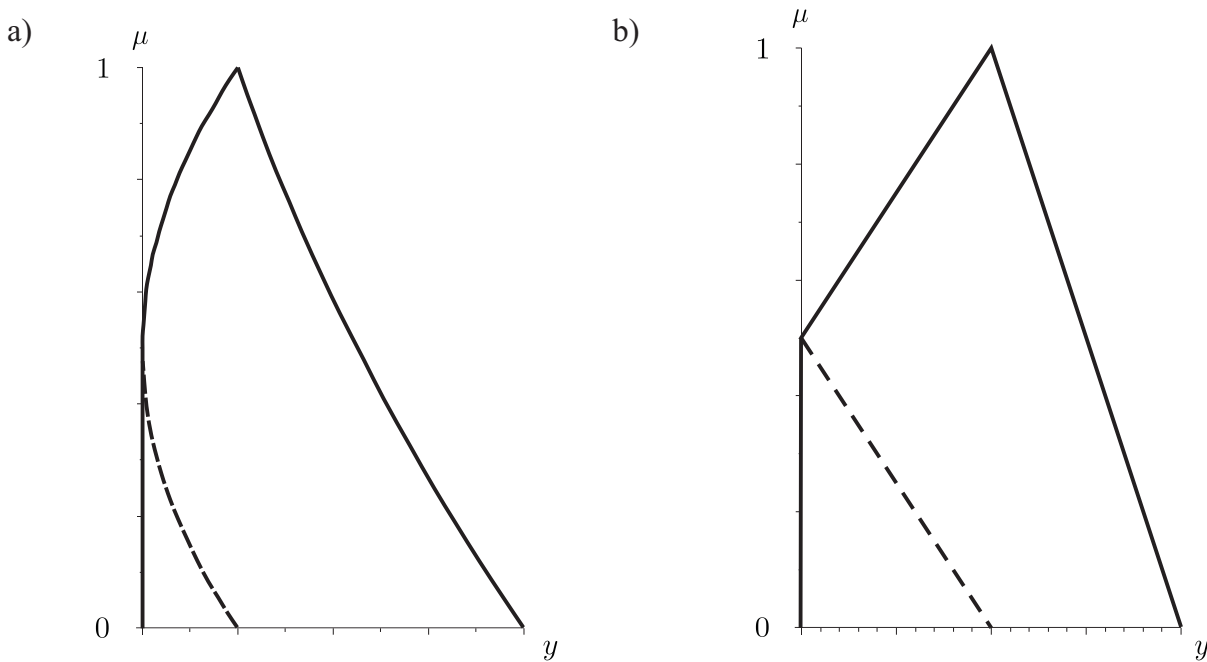


**Abbildung 6.15:** Schematische Darstellung der selektiven Verknüpfung der Äste partiell identischer bzw. unabhängiger Fuzzy-Größen

zweiten Schritt aus der invertierten Binärzahl jeweils ein der Kardinalität von  $ID_{\tilde{z}_1}$  bzw.  $ID_{\tilde{z}_2}$  entsprechendes Subtupel extrahiert. Die Einträge der gewonnenen Tupel entsprechen den Koordinaten des potentiellen Lösungspunktes im Teilraum des jeweiligen Operanden. Die Subräume werden durch die in den Listen mit Identifikationsnummern referenzierten

Fuzzy-Eingangsgrößen aufgespannt. Die Einhaltung der Gleichheitsrelationen  $R_{i,j}^-$  erlaubt nur die Verknüpfung von Ästen, die eben diese Koordinaten aufweisen. Die entsprechenden Äste werden im vierten Schritt durch Umwandlung der Koordinaten in eine Positionsangabe (Gleichung (6.94)) ermittelt. Schließlich wird das Ergebnis der Verknüpfung der beiden Äste  $LR_i^{\tilde{z}_3} = LR_i^{\tilde{z}_1} \diamond LR_m^{\tilde{z}_2}$  an Position  $Z = l$  des Vektors gespeichert.

Neben der Effizienz der Identifikation der zu verknüpfenden Äste hat die Durchführung der Verknüpfungen selbst einen signifikanten Einfluss auf die Berechnungsdauer fuzzyarithmetischer Operationen. Die Implementierung der Verknüpfungsoperationen hängt von der Darstellung der Äste ab. Die Wahl eines geeigneten Funktionsansatzes zur Darstellung der Äste wird durch die Forderung der Klassenzugehörigkeit bei zyklischen Abbildungen (Gleichung (6.21) bis (6.23)) und zusätzlichen Anforderungen durch nicht monotone Verknüpfungen bestimmt. Obwohl bei Anwendung des „monotonen Modus“ das Funktional  $f$  (Gleichung (6.1)) definitionsgemäß in allen Eingangsgrößen monoton ist, können Zwischenergebnisse der Berechnung in beliebig vielen Variablen ein nicht monotones Verhalten aufweisen. Diese Zwischenergebnisse dürfen zwar nicht ausgewertet werden, dennoch müssen ihre Äste  $LR_i$  korrekt dargestellt werden, um sie weiterverarbeiten zu können. In Abbildung 6.16 sind für eine Fuzzy-Dreieckszahl  $\tilde{a} = \langle -1, 1, 2 \rangle$  die Ergebnisse der zweistelligen Operation  $\tilde{a} \cdot \tilde{a}$  und der einstelligen Operation  $|\tilde{a}|$  dargestellt. Die gestrichelten Linien stellen die als Zwischenergebnisse erhaltenen Verknüpfungen der Äste dar. Es ist zu erkennen, dass bei Berücksichtigung der Gleichheitsrelation  $R_{i,j}^-$  (Gleichung (6.61)) der Verlauf der Äste nicht mehr notwendigerweise monoton ist. Die Äste sind nicht mehr durch eine Funktion beschreibbar und können zudem Unstetigkeitsstellen in der ersten Ableitung aufweisen. Die Darstellung der Approximation der Äste wird im Rahmen der Implementierung daher über dem Definitionsbereich der Zugehörigkeitswerte  $\mu$  mit abschnittswisen linearen Funktionsansätzen durchgeführt. Diese erfüllen die Bedingung der Klassenzugehörigkeit (Gleichungen (6.21) bis (6.23)) für alle Verknüpfungsoperationen und sind in der Lage, nicht monotone Äste, wie in Abbildung 6.16 dargestellt, abzubilden. Durch eine geeignete Wahl der Stützstellen kann jeder Funktionsverlauf beliebig genau approximiert werden. An jeder Stützstelle ist allerdings der Verknüpfungsoperator auszuwerten. Ein nahe liegender Ansatz zur Verringerung der Rechenzeiten ist daher die Minimierung dieser Stützstellen. Dies kann durch ein adaptives Vorgehen gewährleistet werden. Die Verknüpfung von zwei Liniensegmenten der Äste zweier Fuzzy-Größen erfolgt dabei in zwei Schritten. Zunächst ist die relative Abweichung des exakten Funktionsver-



**Abbildung 6.16:** Darstellung der Äste der Ergebnisgrößen von a)  $\tilde{a} \cdot \tilde{a}$  und b)  $|\tilde{a}|$  mit  $\tilde{a} = \langle -1, 1, 2 \rangle$

laufs der Verknüpfung der beiden Geradensegmente von einer linearen Approximation zu bestimmen. Wird ein festgelegter Grenzwert überschritten, so ist am Ort der maximalen Abweichung ein Zwischenknoten einzufügen. Das Ergebnis der Verknüpfung wird dann mit zwei Liniensegmenten dargestellt. Ist die Abweichung ausreichend gering, so genügt eine Approximation des Ergebnisses mit einem Liniensegment. Um diese Auswertung durchführen zu können, ist es in einem vorbereitenden Schritt notwendig, die beiden zu verknüpfenden Äste hinsichtlich der Stützstellen zu synchronisieren. Dies ist mit zusätzlichem Aufwand verbunden. Darüber hinaus bedarf die adaptive Steuerung der Approximation, insbesondere bei nicht linearen Operatoren, einen nicht vernachlässigbaren numerischen Aufwand, verglichen mit der Auswertung des Operators an den Stützstellen. Bei der Durchführung der Multiplikation von zwei Liniensegmenten  $y_1 = m_1 \cdot x + t_1$  und  $y_2 = m_2 \cdot x + t_2$  wird der relative Fehler im Intervall  $[a, b]$  mit

$$err = \frac{m_1 (m_2 (a - b))^2}{m_1 m_2 (b + a)^2 + 2 (b + a) (t_1 m_2 + m_1 t_2) + 4 t_1 t_2} \quad (6.97)$$

bestimmt. Dafür sind, entsprechend Gleichung (6.97), 19 Gleitkommaoperationen (engl.: floating point operations FLOP) nötig. Die Position der evtl. einzufügenden Stützstelle kann vereinfacht mit  $s = \frac{a+b}{2}$  (2 FLOPs) und der zugehörige Funktionswert mit (10



FLOPs)

$$f(s) = m_1 m_2 \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + (t_1 m_2 + m_1 t_2) \left( \frac{a+b}{2} \right) + t_1 t_2 \quad (6.98)$$

bestimmt werden.

Ein Effizienzvorteil gegenüber einer Implementierung mit unveränderlichen Stützstellen ist also erst dann zu erwarten, wenn durch ein Liniensegment 19 bis 31 Segmente mit unveränderlichen Intervallgrenzen zusammengefasst werden. Hinzu kommt der Aufwand zur Synchronisation der Intervallgrenzen von zwei zu verknüpfenden Ästen, so dass keine Reduktion des Berechnungsaufwandes zu erwarten ist, und daher einer Implementierung mit unveränderlichen nicht notwendigerweise äquidistanten Stützstellen der Vorrang eingeräumt wurde.

Diese ermöglicht darüber hinaus eine speicheroptimierte Implementierung der Datenstruktur der Äste. Da die Intervallgrenzen für alle Äste gleich sind und unveränderlich festliegen, müssen sie nicht für jeden Ast, sondern lediglich einmal gespeichert werden. Der Speicherbedarf kann so annähernd halbiert werden. Die Funktionswerte an den Stützstellen der Äste werden in einem kontinuierlichen Speicherbereich abgelegt. Die Reihenfolge der Werte korrespondiert mit den global gespeicherten Intervallgrenzen. Die Länge  $l$  des benötigten Feldes hängt mit

$$l = m \cdot 2^n \quad (6.99)$$

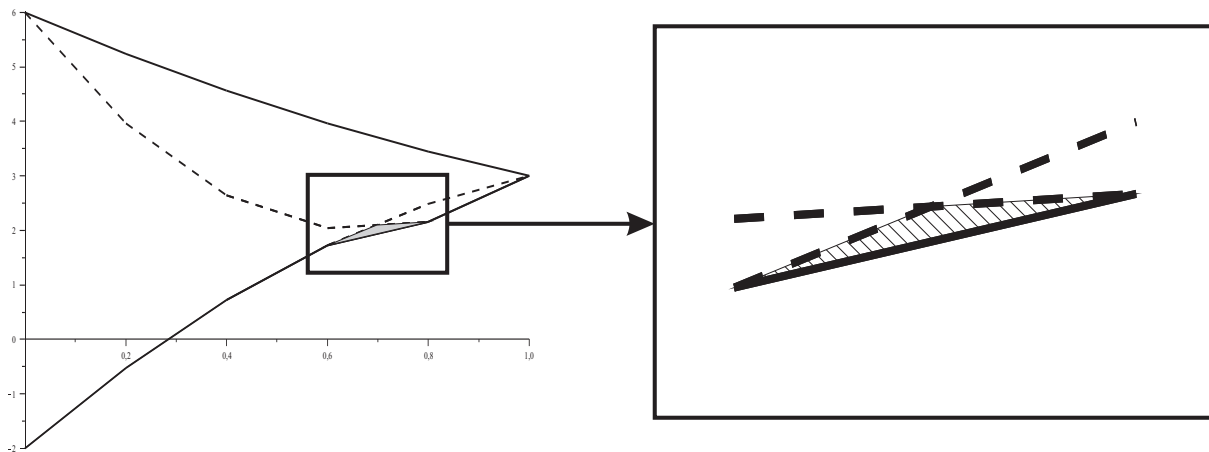
lediglich von der festgelegten Anzahl  $m$  der  $\alpha$ -Niveaus und der Anzahl  $n$  der Eingangsgrößen, von denen eine Fuzzy-Größe abhängt, ab. Während der Durchführung numerischer Berechnungen werden sehr viele Instanzen von Fuzzy-Größen temporär erzeugt und wieder aufgelöst. Bei jeder Erzeugung muss der Speicherbereich mit einer Länge entsprechend Gleichung (6.99) vom System angefordert werden und bei jeder Auflösung zurückgegeben werden. Insbesondere die Allokation von Speicher ist im Vergleich zu Gleitkommaoperationen eine sehr ressourcenintensive Operation, welche die Performanz signifikant negativ beeinflussen kann. Die Einführung eines „Speicher-Pools“ transformiert die Bereitstellung des für die Äste einer Fuzzy-Größe benötigten Speichers zu einer  $\mathcal{O}(1)$ -Operation. Speicher-Pools sind für die Verwaltung von Speicherbereichen festgelegter Länge optimiert. Sie dienen bei Speicheranforderungen als Puffer zwischen der Applikation und dem Betriebssystem. Die Effizienzsteigerung wird dadurch erzielt, dass der Speicher-Pool die ressourcenintensive Allokation von Speicher blockweise durchführt und freigegebenen Speicher

nur bei Bedarf an das Betriebssystem zurückgibt. Der Speicher wird in einer verketteten Liste verwaltet. Bei einer Anforderung seitens der Applikation, d. h. bei Erzeugung einer Fuzzy-Größe, wird lediglich der erste, als frei markierte, Speicherbereich zurückgegeben. Ein weiterer Vorteil der Datenhaltung in einem kontinuierlichen Speicherbereich kann durch Parallelverarbeitung auf Anweisungsebene (engl.: Instruction-level parallelism (ILP)) gewonnen werden. Viele moderne Prozessoren unterstützen beispielsweise SIMD-Erweiterungen (Single Instruction Stream, Multiple Data Streams), die mit einem Befehlsaufruf gleichzeitig mehrere gleichartige Datensätze verarbeiten. Durch die quasi parallele Ausführung der gleichen Operation auf den Daten in dem Speicherbereich kann der Rechenzeitbedarf für die Operationen signifikant reduziert werden (vgl. Abschnitt 6.2).

Nach der Durchführung numerischer Berechnungen liegen die Fuzzy-Ergebnisgrößen in einer für die Berechnung optimierten Form vor. In dieser Form bestehen die Fuzzy-Größen aus einem Vektor mit Identifikationsnummern und einem Vektor mit Funktionswerten an den Stützstellen der Äste  $LR_i$ . Die Einträge des ersten Vektors referenzieren die Fuzzy-Eingangsgößen, von denen die Fuzzy-Ergebnisgröße abhängt. Die Funktionswerte geben in Verbindung mit den korrespondierenden Zugehörigkeitswerten der Stützstellen die Lösungen des Algorithmus in den Ecken der diskreten  $\alpha_k$ -Niveaus an. Um die Fuzzy-Ergebnisgrößen als Fuzzy-Zahlen bzw. Fuzzy-Intervalle interpretieren zu können, müssen ihre Äste in einer Nachlaufberechnung kondensiert und evtl. korrigiert werden.

Die Kondensation der Äste entspricht der Durchführung der Optimierungsaufgabe in Gleichung (6.10) bzw. Gleichung (6.11). Diese vereinfacht sich im vorliegenden Fall jedoch drastisch zu einer Minimum- bzw. Maximumbildung über den endlich vielen Ästen. Da alle Äste  $LR_i$  identische Stützstellen aufweisen, d. h. die Funktionswerte auf den selben diskreten  $\alpha_k$ -Niveaus bereitstellen, kann die Bestimmung des globalen Minimums (linker Ast) bzw. des globalen Maximums (rechter Ast) eines  $\alpha_k$ -Niveaus effizient durch Vergleich der jeweiligen Funktionswerte erfolgen. Die derart bestimmten Äste sind dann untere bzw. obere Einhüllende aller Äste  $LR_i$ . An Orten, an denen sich Äste schneiden, kann durch dieses Vorgehen künstliche Unschärfe zur Ergebnisgröße hinzugefügt werden. In Abbildung 6.17 ist die künstliche Unschärfe (schraffierte Fläche) einer Fuzzy-Ergebnisgröße mit fünf  $\alpha$ -Niveaus dargestellt.

Um diesen Effekt insbesondere bei einer geringen Anzahl von ausgewerteten  $\alpha$ -Niveaus zu vermeiden, steht eine alternative Implementierung zur Kondensation der Äste zur Verfügung. Diese vergleicht die Äste segmentweise. Schneiden sich zwei Segmente, so springt



**Abbildung 6.17:** Darstellung der durch die einfache Kondensation bedingten künstlichen Unschärfe

das globale Minimum bzw. Maximum zwischen den beiden  $\alpha$ -Niveaus von einer Kante des unscharfen kartesischen Produkts zu einer anderen. Der Zugehörigkeitswert des  $\alpha$ -Niveaus, das die Unstetigkeitsstelle markiert, wird durch den Schnittpunkt der beiden Liniensegmente approximiert. An dieser Stelle wird in den linken bzw. rechten Ast der Zugehörigkeitsfunktion der Ergebnisgröße eine zusätzliche Stützstelle eingefügt.

Die für jede Fuzzy-Ergebnisgröße ermittelten linken und rechten Äste der Zugehörigkeitsfunktionen beschreiben für in allen Variablen monotone Operatoren  $f$  (Gleichung (6.1)) die Streuung der betrachteten Ergebnisgröße in Abhängigkeit von den Streuungen der Fuzzy-Eingangsgrößen. Sind die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgrößen konvex und normiert, so werden auch die Fuzzy-Ergebnisgrößen durch eine konvexe und normierte Zugehörigkeitsfunktion beschrieben.

Die Intervallgrenzen  $\{x_{i,\alpha_k}^L, x_{i,\alpha_k}^R\}$  der diskreten  $\alpha_k$ -Niveaus, auf denen das Funktional für alle Fuzzy-Größen ausgewertet wird, werden mit der selben maschinenabhängigen Genauigkeit ermittelt, die bei der Durchführung einer Berechnung mit scharfen Zahlen erreicht werden kann. Die Güte der Approximation der Zugehörigkeitsfunktion hängt lediglich von der gewählten Anzahl der  $\alpha_k$ -Niveaus ab. In Bereichen mit starker Krümmung der Äste kann die Approximation durch geringeren Abstand der  $\alpha_k$ -Niveaus verbessert werden (siehe „adaptiver Modus“). Eine Erhöhung der  $\alpha_k$ -Niveaus wirkt sich auf Grund der hardwarenahen Implementierung deutlich unterlinear auf die Berechnungsdauer aus (vgl. Abschnitt 6.4).

Der „monotone Modus“ kann auch für nicht monotone Operatoren  $f$  eingesetzt werden,

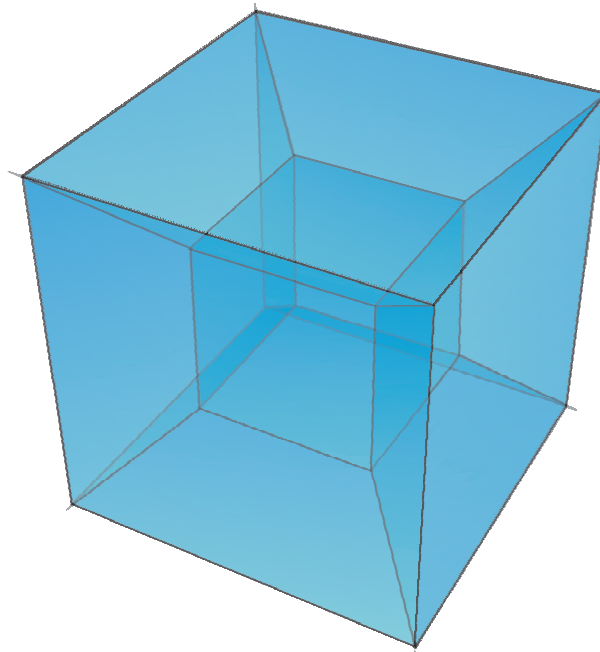
falls nur eine Fuzzy-Eingangsgröße ausgewertet wird. In diesem Fall sind die ermittelten Äste der Zugehörigkeitsfunktion zu korrigieren. Dieser Fall entspricht formal der Auswertung eines Operators  $f$ , der bzgl. aller Eingangsgrößen ein nicht monotones Verhalten aufweist und wird daher im Rahmen des „selektiv nicht monotonen Modus“ behandelt.

### 6.3.5.2 Der selektiv nicht monotone Modus

Im „selektiv nicht monotonen Modus“ ist es, in Ergänzung zum bereits dargestellten „monotonen Modus“, möglich, Funktionale  $f$  (Gleichung (6.1)) bzw. Algorithmen mit einer oder mehreren nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen zu behandeln. Für jedes auszuwertende diskrete  $\alpha_k$ -Niveau sind das globale Minimum und das globale Maximum über dem durch die Fuzzy-Eingangsgrößen festgelegten Definitionsbereich zu bestimmen. Im Gegensatz zum „monotonen Modus“ können mögliche Koordinaten der Lösungspunkte nicht a priori bestimmt werden. Die Lösungspunkte müssen nicht notwendigerweise in den Ecken der scharfen  $\alpha_k$ -Niveaus im Raum der Eingangsgrößen liegen. Im allgemeinen Fall der Auswertung eines Funktionals  $\tilde{f}$  mit  $n$  Fuzzy-Eingangsgrößen, das bzgl.  $m$  Fuzzy-Größen mit  $0 \leq m < n$  ein monotones Verhalten aufweist, können die zu den Extremalwerten eines  $\alpha_k$ -Niveaus korrespondierenden Lösungspunkte im Inneren des  $n$ -dimensionalen scharfen kartesischen Produkts der  $\alpha$ -Niveaus der Eingangsgrößen ( $m = 0$ ) bzw. auf einer begrenzenden Hyperfläche ( $m > 0$ ) liegen. Entsprechend der Anzahl  $m$  der monotonen Eingangsgrößen kann für  $m > 1$  die mögliche Lage eines Lösungspunktes jedoch eingeschränkt werden, da für jede der  $m$  monotonen Eingangsgrößen  $\tilde{x}_i$  die entsprechende Koordinate des Lösungspunktes eine der Intervallgrenzen  $\{x_{i,\alpha_k}^L, x_{i,\alpha_k}^R\}$  (vgl. Abbildung 6.3) annimmt. Hierzu ist eine geometrische Deutung des Teilraums  $\underline{X}_{\alpha_k}$  des  $\mathbb{R}^n$  hilfreich. Durch Skalierung kann der Teilraum in einen Hyperwürfel transformiert werden (Abbildung 6.18). Ein  $n$ -dimensionaler Hyperwürfel wird von 0-dimensionalen, 1-dimensionalen, 2-dimensionalen, ...,  $(n-2)$ -dimensionalen und  $(n-1)$ -dimensionalen Elementen begrenzt. Die Anzahl  $x$  der Grenzelemente wird durch die Dimension  $n$  des Teilraums  $\underline{X}_{\alpha_k}$  und die Dimension  $k$  des Grenzelementes bestimmt:

$$x = \frac{n!}{k!} \cdot 2^{n-k} \quad (6.100)$$

In Abhängigkeit von der Anzahl  $k = n - m$  nicht-monotoner Eingangsgrößen kann die Lage eines Lösungspunktes auf eines der  $k$ -dimensionalen Grenzelemente (vgl. Tabelle



**Abbildung 6.18:** Darstellung des Schlegeldiagramms eines Tesserakts (4-dimensionaler Hyperwürfel)

6.13) eingegrenzt werden. Ist zudem bekannt, welche der  $m$  Eingangsgrößen ein monotoneres Verhalten aufweisen, so reduziert sich die Anzahl der zu betrachtenden Grenzelemente entsprechend Tabelle 6.14.

Für jedes  $\alpha_k$ -Niveau konnte mit Hilfe der Kenntnis der Monotonieeigenschaften des Operators bzgl. der Eingangsgrößen die Problemdimension reduziert werden. Die möglichen Orte der Lösungspunkte im  $n$ -dimensionalen Raum der Eingangsgrößen konnten auf  $(m - n)$ -dimensionale Teilräume eingeschränkt werden. Innerhalb dieser Teilräume können die korrespondierenden  $n - m$  Koordinaten der Lösungspunkte jedoch beliebige Werte annehmen. Im Gegensatz zum „monotonen Modus“ können die möglichen Koordinaten der Lösungspunkte nicht a priori bestimmt werden. Eine Erweiterung der bereits dargestellten Implementierung zur Behandlung allgemeiner nicht-monotoner Operatoren kann jedoch nur unter der Voraussetzung erfolgen, dass bei jeder arithmetischen Operation die Koordinaten der Auswertepunkte a priori bestimmbar sind. Daher werden bei dem dargestellten Vorgehen die exakten Lösungspunkte durch eine endliche Anzahl von Auswertepunkten approximiert. Auf jedem  $\alpha_k$ -Niveau nicht-monotoner Fuzzy-Eingangsgrößen werden zusätzliche Auswertepunkte eingefügt. Die Anzahl der Punkte ist auf jedem  $\alpha_k$ -Niveau einer Fuzzy-Größe identisch, kann jedoch zwischen den Eingangsgrößen variieren. Werden

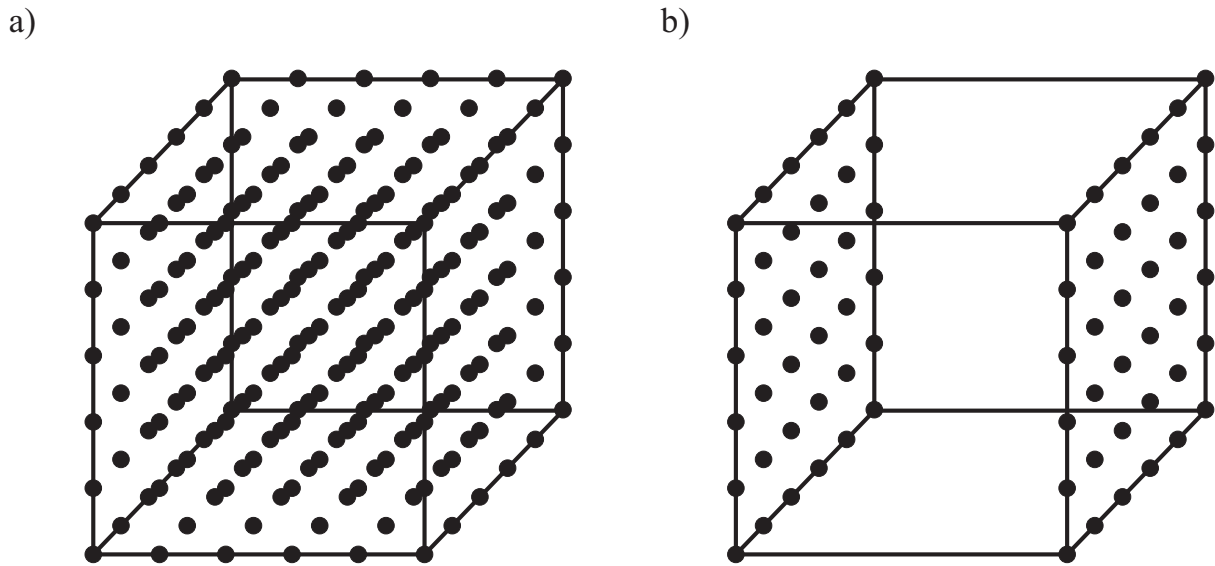
**Tabelle 6.13:** Anzahl der  $k$ -dimensionalen Grenzelemente von  $n$ -dimensionalen Hyperwürfeln

$n$	Dimension $k$ der Grenzelemente									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2									
2	4	4								
3	8	12	6							
4	16	32	24	8						
5	32	80	80	40	10					
6	64	192	240	160	60	12				
7	128	448	672	560	280	84	14			
8	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16		
9	512	2304	4608	5376	4032	2016	672	144	18	
10	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360	960	180	20

**Tabelle 6.14:** reduzierte Anzahl der  $k$ -dimensionalen Grenzelemente von  $n$ -dimensionalen Hyperwürfeln bei bekannter nicht-monotoner Fuzzy-Eingangsgröße

$n$	Dimension $k$ der Grenzelemente									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2									
2	4	2								
3	8	4	2							
4	16	8	4	2						
5	32	16	8	4	2					
6	64	32	16	8	4	2				
7	128	64	32	16	8	4	2			
8	256	128	64	32	16	8	4	2		
9	512	256	128	64	32	16	8	4	2	
10	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2

zwei Fuzzy-Größen verknüpft, so geht der  $n$ -dimensionale Raum der Eingangsgrößen in einen  $(n - m)$ -dimensionalen Subraum mit endlichen diskreten Elementen über. Analog dazu werden auch die  $k$ -dimensionalen Grenzelemente, die mögliche Orte der Lösungspunkte sind, diskretisiert. Die Anzahl der Auswertepunkte hängt dabei entscheidend von der Dimension der diskretisierten Teilräume ab (Abbildung 6.19). Unter der vereinfach-

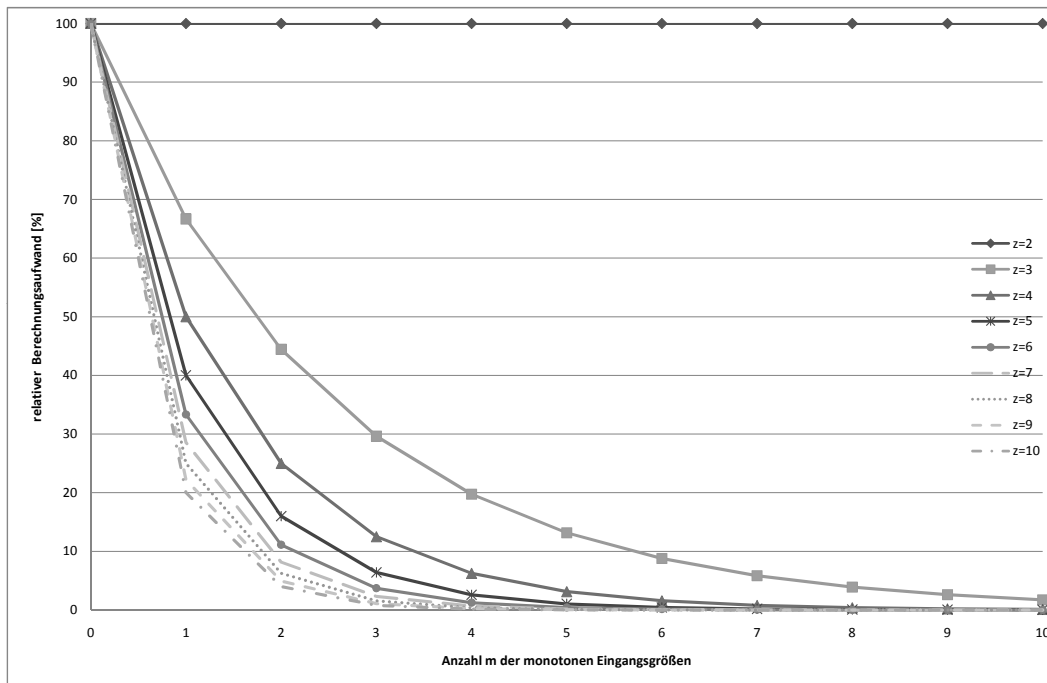


**Abbildung 6.19:** Darstellung der diskreten Auswertepunkte im dreidimensionalen Raum der Eingangsgrößen bei Berücksichtigung von a)  $m = 0$  und b)  $m = 1$  monotonen Eingangsgrößen

chenden Annahme, dass die Anzahl  $z_i$  der Auswertepunkte auf den  $p$   $\alpha_k$ -Niveaus der  $\tilde{x}_i$  Eingangsgrößen identisch  $z$  gewählt wurde, kann die Gesamtzahl  $N$  der Auswertepunkte im  $n$ -dimensionalen Raum der Eingangsgrößen, unter welchen  $m$  Größen monoton sind, mit

$$N = \sum_{i=0}^{i < p} z^{n-m} \cdot 2^m \quad (6.101)$$

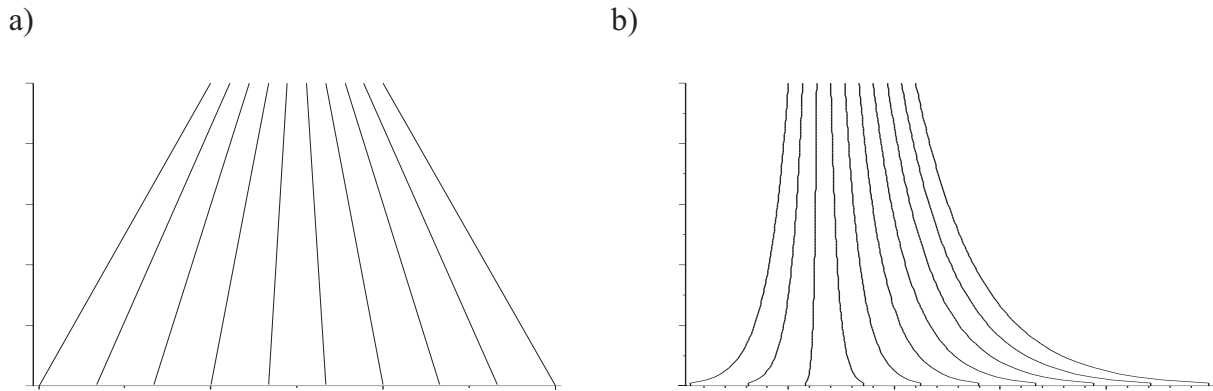
angegeben werden. Die Reduktion der Problemdimension durch Berücksichtigung monotoner Eingangsgrößen, führt zu einer signifikant geringeren Anzahl von Funktionsauswertungen und daher zu erheblich geringeren Analysedauern. Dieser günstige Effekt nimmt mit steigender Anzahl von Auswertepunkten  $z$  und monotonen Größen  $m$  zu (Abbildung 6.20). Der wesentliche Vorteil des hier vorgestellten Verfahrens besteht in der gezielten Reduktion der Problemdimension durch Inkorporation vorhandener a priori Kenntnis über das Monotonieverhalten des Funktionals oder des Algorithmus. Ist bekannt, in welchen



**Abbildung 6.20:** Reduktion des Berechnungsaufwands einer Analyse mit 10 Fuzzy-Eingangsgrößen in Abhängigkeit von der Anzahl  $m$  monotoner Größen und der Anzahl  $z$  der Zwischenpunkte nicht-monotoner Größen je  $\alpha$ -Niveau

Eingangsgrößen  $f$  nicht monoton ist, so sind lediglich für diese Zwischenpunkte auf den  $\alpha_k$ -Niveaus auszuwerten. Dies führt, im Vergleich zu einer vollständigen Suche im  $n$ -dimensionalen scharfen  $\alpha_k$ -Niveau, zu erheblich weniger Funktionsauswertungen und dadurch zu kürzeren Analysezeiten (Abbildung 6.20). Darüber hinaus ermöglicht die unabhängige Festlegung der Anzahl von Zwischenästen für jede nicht-monotone Eingangsgröße eine optimale Berücksichtigung der Streubreite der Fuzzy-Eingangsgrößen. Fuzzy-Größen mit großem Support erhalten mehr Zwischenpunkte als Größen mit kleiner Streuung. Eine minimale Anzahl von zusätzlichen Auswertepunkten bei in allen Koordinatenrichtungen gleicher Approximationsgüte ist die Folge. Die Zwischenknoten der Fuzzy-Eingangsgrößen auf den  $\alpha_k$ -Niveaus werden formal durch Zwischenäste eingeführt (Abbildung 6.21). Ohne weitere Spezifikationen werden diese zusätzlichen Äste bei der Instanziierung einer Fuzzy-Eingangsgröße (Abbildung 6.13) derart angeordnet, dass sie jedes  $\alpha_k$ -Niveau äqui-





**Abbildung 6.21:** Nicht monotone Fuzzy-Größen; Anordnung der Zwischenäste

distant unterteilen. Dadurch ist es möglich, das in Abbildung 6.15 dargestellte Implementierungsschema mit geringfügigen Erweiterungen zu übernehmen. Die Implementierung der Verknüpfungsoperationen gemäß den Tabellen 6.9, 6.11, 6.12 und von identischen Fuzzy-Größen wird praktisch unverändert eingesetzt. Lediglich für die Verknüpfung partiell identischer bzw. unabhängiger Fuzzy-Größen muss das vorliegende Verfahren erweitert werden. Das erweiterte Verfahren ist in Abbildung 6.22 dargestellt. Beispielhaft ist erneut die Verknüpfung  $\tilde{z}_3 = \tilde{z}_1 - \tilde{z}_2$  dargestellt. Dabei werden die Fuzzy-Eingangsgrößen  $\tilde{b}$  und  $\tilde{c}$  als potentiell nicht-monoton und die Fuzzy-Eingangsgröße  $\tilde{a}$  als monoton behandelt. Die Anzahl der Äste der nicht-monotonen Eingangsgrößen richtet sich nach der Größe ihrer Unschärfe und ist daher i. A. für jede nicht-monotone Größe unterschiedlich. In dem Schema in Abbildung 6.22 sind beide nicht-monotonen Fuzzy-Größen mit je fünf Ästen dargestellt. Die gewählte Anzahl der Äste jeder Eingangsgröße wird in ein Tupel an der zur  $ID$  korrespondierenden Position eingetragen. Monotone Größen erhalten zwei Äste. Mit Hilfe dieses Vektors  $Z$  und des Vektors der Identifikationsnummern  $ID_{\tilde{z}_3}$  der Ergebnisgröße  $\tilde{z}_3$  kann die Anzahl der Äste von  $\tilde{z}_3$  mit

$$N = \prod_{i=1}^{i \leq |ID|} z_{ID_i} \quad (6.102)$$

bestimmt werden. Um zu einer beliebigen Position des Vektors der Ergebnisäste von  $\tilde{z}_3$  die zu verknüpfenden Äste der Operanden zu bestimmen, wird analog zum „monotonen Modus“ das in Abbildung 6.22 dargestellte Schema genutzt. Aufgrund der unterschiedlichen Anzahl der Äste der Eingangsgrößen ist dieses jedoch zu erweitern. Die Anzahl  $N$  der Einträge des Vektors wird durch Gleichung (6.102) bestimmt. Die Einträge der Tupel verweisen dabei auf die entsprechenden Äste der Eingangsgrößen und nehmen Werte von 0

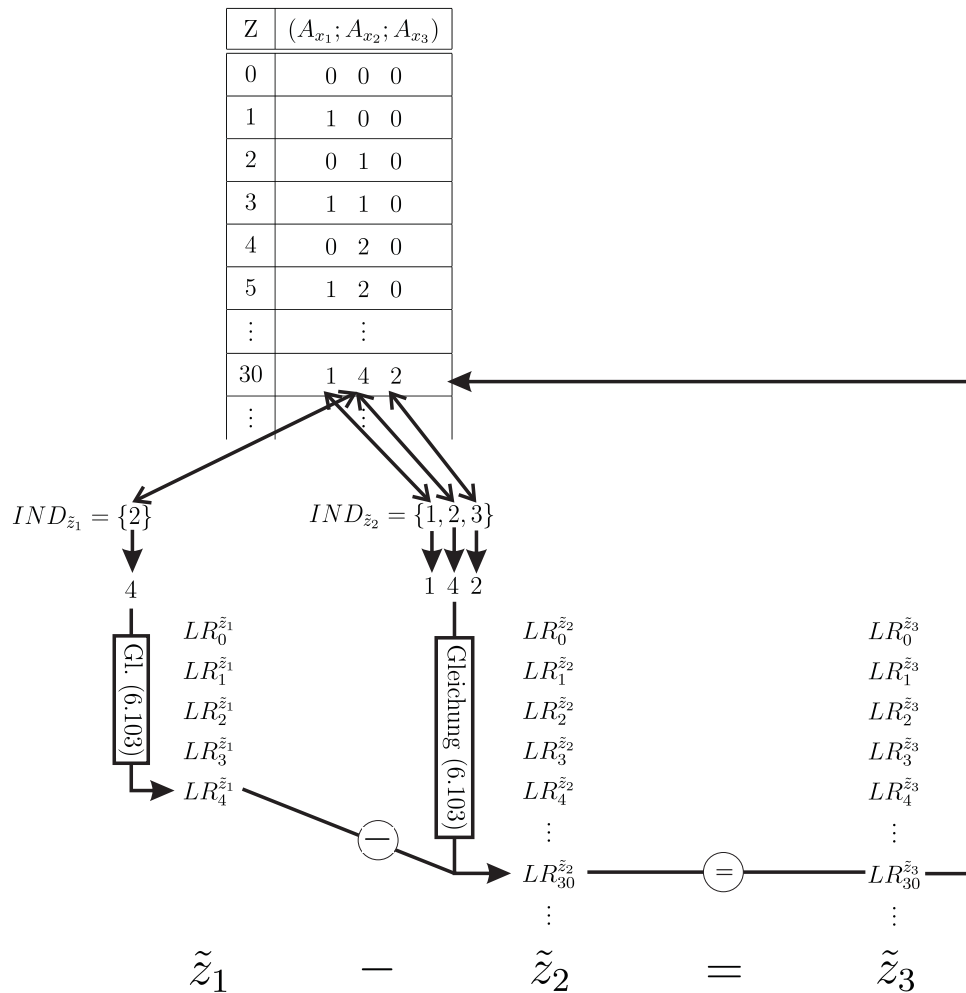
bis  $z_i - 1$  an. Mit Hilfe des modifizierten Schemas werden analog zum „monotonen Modus“ die zu den Operanden korrespondierenden Subtupel extrahiert. Die Rücktransformation der beiden Subtupel in natürliche Zahlen, welche die Positionen der zu verknüpfenden Äste bestimmen, muss gegenüber Gleichung (6.94) ebenfalls modifiziert werden. Die Subtupel können nicht mehr als invertierte Binärzahl interpretiert werden, sondern sind vielmehr als Zahlen in einem allgemeinen Stellenwertsystem mit gemischten Basen (engl.: mixed radix system MSR) zu behandeln. In einer invertierten Darstellung erfolgt die Abbildung  $MRS \rightarrow \mathbb{N}_0^+$  der Stellenwertzahl auf die Position des Astes mit

$$Z = a_1 + a_2 z_1 + a_3 z_1 z_2 + \dots + a_n z_1 z_2 \dots z_{n-1}. \quad (6.103)$$

Die potentiell unterschiedliche Anzahl der Äste der Fuzzy-Eingangsgrößen bedingt ebenfalls eine Anpassung der mittels Speicher-Pools realisierten programminternen Speicher-verwaltung. Diese wirkt sich, wie bereits dargestellt, durch die einmalige Allokation von Speicherbereichen mit vorgegebener Länge und der Wiederverwendung dieses Speichers positiv auf das Laufzeitverhalten aus. Die Länge der Speicherbereiche ergibt sich dabei im Wesentlichen durch die Anzahl der Äste einer Größe. Ist ein monotonen Fuzzy-(Zwischen)ergebnis von  $n$  Eingangsgrößen abhängig, so enthält es  $2^n$  Äste. Es sind also  $n$  Speicher-Pools für unterschiedlich lange Speicherbereiche bereitzustellen. Für den allgemeinen Fall mit unterschiedlicher Anzahl von Ästen der Eingangsgrößen erhöht sich die Anzahl  $N$  an unterschiedlich großen Speicherbereichen auf

$$N = \sum_{n=1}^m \sum_{r=1}^n \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (6.104)$$

Nach der Durchführung arithmetischer Operationen liegen Fuzzy-Ergebnisgrößen in einer berechnungsoptimierten Form vor. Die Liste mit den Ergebnisästen (Abbildung 6.22) enthält für jedes  $\alpha_k$ -Niveau mögliche Approximationen der globalen Minima und Maxima. Die Kondensation der Äste zum linken und rechten Ast der L/R-Darstellung der Fuzzy-Ergebnisgröße wurde bereits im „monotonen Modus“ dargestellt. Aufgrund der signifikant höheren Anzahl an Ästen wird im „selektiv nicht monotonen Modus“ die schnelle Kondensation mittels Minimum- bzw. Maximumbildung bevorzugt. Bei schichtweiser Auswertung der diskreten  $\alpha_k$ -Niveaus sind, wie bereits dargestellt, bei der Bestimmung der Lage der Lösungspunkte im  $n$ -dimensionalen Raum der Eingangsgrößen zwei Fälle zu unterscheiden. Weist das betrachtete Funktional bzgl. aller Fuzzy-Eingangsgrößen ein nicht-monotonen Verhalten auf, so können die Lösungspunkte im Inneren des scharfen



**Abbildung 6.22:** Schematische Darstellung der selektiven Verknüpfung der Äste partiell identischer bzw. unabhängiger nicht-monotoner Fuzzy-Größen

kartesischen Produkts liegen. Bei mindestens einer monotonen Eingangsgröße liegen die Lösungspunkte auf den, entsprechend der Anzahl  $n - m$  der nicht-monotonen Größen,  $(n - m)$ -dimensionalen Grenzelementen. Bei geometrischer Interpretation liegen sie also auf der Oberfläche des  $n$ -dimensionalen kartesischen Produkts. Im ersten Fall wird der Teilraum  $\underline{X}_{\alpha_k}$  der Eingangsgrößen mit einem vollständigen Gitter von Auswertepunkten diskretisiert (Abbildung 6.19a). Jeder dieser Punkte ist eine mögliche Näherung der Lösungspunkte. Die optimale Näherung des globalen Minimums bzw. Maximums für das  $\alpha_k$ -Niveau wird mit Hilfe der oben beschriebenen Kondensation ermittelt. Ein weiteres  $\alpha_{k+1}$ -Niveau, mit  $\alpha_k > \alpha_{k+1}$ , diskretisiert den Teilraum  $\underline{X}_{\alpha_{k+1}}$  mit der selben Anzahl von Auswertepunkten. Wegen der Eigenschaft der Monotonie bzgl. der Inklusion der Teil-

räume wird dadurch auch das  $\alpha_k$ -Niveau erneut diskretisiert. Wegen der unterschiedlichen Einteilung des  $\alpha_{k+1}$ -Niveaus der Eingangsgröße (Abbildung 6.20) gegenüber dem  $\alpha_k$ -Niveau, erfolgt diese i. A. an unterschiedlichen Koordinaten wie zuvor. Es ist daher möglich, dass ein Auswertepunkt des  $\alpha_k$ -Niveaus näher an einem exakten Lösungspunkt liegt, als alle Auswertepunkte des  $\alpha_{k+1}$ -Niveaus. Der entsprechende Ast  $LR_i$  weist an dieser Stelle ein lokales Extremum auf und verletzt dadurch die Forderung nach Konvexität von Fuzzy-Zahlen und Fuzzy-Intervallen. Im zweiten Fall (Abbildung 6.19b) verändern die Lösungspunkte mindestens die zu den monotonen Größen korrespondierenden Koordinaten beim Übergang vom  $\alpha_k$ -Niveau zum  $\alpha_{k+1}$ -Niveau. Die Diskretisierung der zu den nicht-monotonen Größen korrespondierenden Koordinaten ändert sich analog zum ersten Fall. Dadurch ist es ebenfalls möglich, dass auf dem  $\alpha_{k+1}$ -Niveau ein geringerer Maximalwert bzw. höherer Minimalwert ermittelt wird. Zur Vermeidung dieses Effekts werden die beiden Äste jeder Fuzzy-Ergebnisgröße mit Hilfe der rekursiven Beziehungen

$$L(\alpha_{k+1}) = \min(L(\alpha_{k+1}); L(\alpha_k)) \quad R(\alpha_{k+1}) = \max(R(\alpha_{k+1}); R(\alpha_k)) \quad (6.105)$$

beginnend bei  $\alpha_0 = 1$  korrigiert.

Im Gegensatz zur Auswertung der Abbildungsvorschrift  $\tilde{f}$  mit ausschließlich monotonen Eingangsgrößen, ist der „selektiv nicht monotone Modus“ ein approximatives Verfahren. Da die Koordinaten der Lösungspunkte nicht a priori bekannt sind, die Lage der Stützstellen, an denen  $f$  ausgewertet wird, jedoch zu Beginn festgelegt wird, werden lediglich Punkte in der Nähe der exakten Lösungspunkte ausgewertet und deren Funktionswerte als näherungsweise globale Minima bzw. Maxima interpretiert. Die Güte der Approximation hängt im wesentlichen vom Abstand der Lösungs- und der Auswertepunkte ab. Dieser Abstand kann über die Anzahl der auszuwertenden  $\alpha$ -Niveaus und die Anzahl der Äste der nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen beliebig klein und dadurch das Berechnungsergebnis beliebig genau eingestellt werden. Durch die für alle  $n$  Fuzzy-Eingangsgrößen identische Anzahl von Stützstellen wird der Abstand der ineinander liegenden  $n$ -dimensionalen scharfen kartesischen Produkte und durch die Anzahl der Äste die Anordnung der Auswertepunkte auf ihren Hyperflächen bestimmt. Eine gleichmäßige Verteilung der Auswertepunkte in den Koordinatenrichtungen führt dabei zu optimalen Approximationsergebnissen. Die Anzahl der Äste nicht monotoner Fuzzy-Eingangsgrößen ist also derart zu wählen, dass die  $\alpha_k$ -Niveaus der Größen in möglichst gleiche Intervalle unterteilt werden. Die Anzahl der notwendigen Äste hängt also von der Unschärfe der

Fuzzy-Größe ab. Die Implementierung mit variabler Anzahl von Ästen ermöglicht es, insbesondere bei nicht-monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen mit stark unterschiedlich großen Streuungen, die Anzahl der Rechenoperationen bei gleichbleibender Approximationsgüte in allen Koordinatenrichtungen zu minimieren. Die benötigte Dauer für eine Analyse kann dadurch signifikant reduziert werden.

### 6.3.5.3 Der adaptive Modus

Der „adaptive Modus“ wird eingesetzt, falls keine a priori Kenntnisse über das auszuwertende Funktional bzw. den Algorithmus vorliegen. Ist es nicht möglich, vor einer Berechnung monotone und nicht-monotone Eingangsgrößen zu identifizieren, so kann, im Sinne einer konservativen Annahme, der „selektiv nicht monotone Modus“ mit ausschließlich nicht-monotonen Eingangsgrößen ( $m = 0$ ) zur Analyse herangezogen werden. Dieses Vorgehen führt jedoch insbesondere dann, wenn das Funktional tatsächlich nur bzgl. weniger Eingangsgrößen ein nicht-monotones Verhalten aufweist, zu unwirtschaftlichen Berechnungsdauern (Abbildung 6.20).

Der „adaptive Modus“ nutzt daher zur Abschätzung der Monotonieeigenschaften die Tatsache, dass das Funktional bzw. der Algorithmus infolge der sequentiellen Auswertung fuzzy-arithmetischer Grundoperationen implizit gegeben ist. Die Grundidee zur Identifikation der nicht-monotonen Eingangsgrößen beruht auf einem Vergleich der Vorzeichen der partiellen Ableitungen des Funktionals an diskreten Koordinaten im Raum der Eingangsgrößen. Zur Erörterung wird beispielhaft das Funktional  $h(x)$  betrachtet, das lediglich von einer Variable abhängt. Kann festgestellt werden, dass die Werte der ersten Ableitung an zwei Punkten  $x_i$  und  $x_j$  ( $i \neq j$ ) unterschiedliches Vorzeichen aufweisen, so kann daraus die Existenz von mindestens einem lokalen Extremum zwischen den Punkten gefolgert werden. Das Funktional  $h(x)$  ist im Intervall  $[x_i; x_j]$  nicht monoton. Der Umkehrschluss ist jedoch nicht möglich. Die Bedingung

$$\operatorname{sgn}(h'(x_i)) = \operatorname{sgn}(h'(x_j)) \quad (6.106)$$

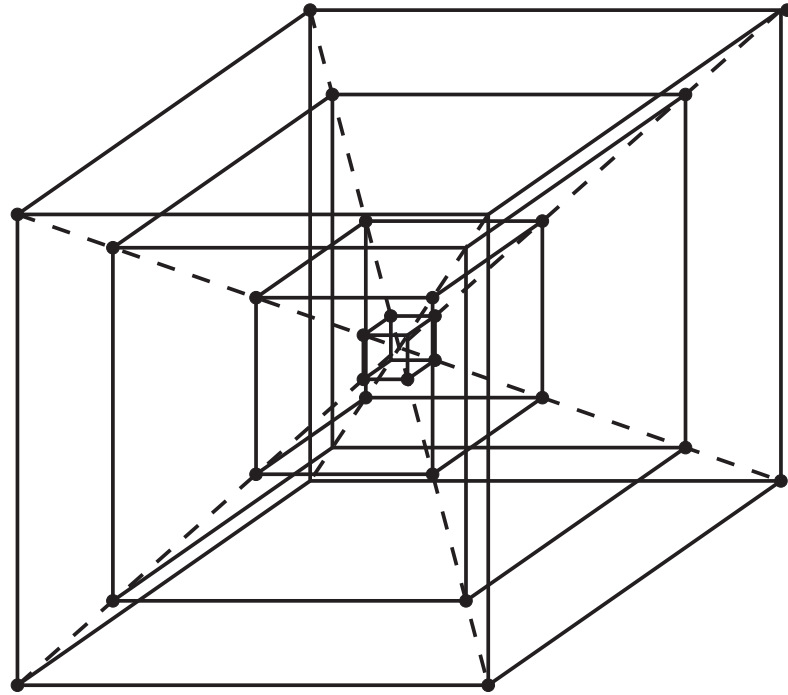
ist für die Annahme eines monotonen Verhaltens im betrachteten Intervall notwendig, aber nicht hinreichend. Ist der Abstand zwischen den Punkten  $x_i$  und  $x_j$  ausreichend groß, so kann sich zwischen ihnen evtl. eine Welle mit einer geraden Anzahl von lokalen Extrema ausbilden. Um diesen Fall zu identifizieren, sind zusätzlich Punkte zwischen den

Intervallgrenzen  $x_i$  und  $x_j$  auszuwerten.

Für mehrdimensionale Funktionale  $f(x_1; \dots; x_n)$  ist die erste Ableitung durch partielle Ableitungen nach den Eingangsgrößen zu ersetzen. Wird ein diskretes  $\alpha_k$ -Niveau einer beliebigen Fuzzy-Größe betrachtet, so entspricht das scharfe Funktional entsprechend Gleichung (6.54) der gesamten Sequenz vorausgegangener scharfer Funktionsauswertungen. Der Definitionsbereich von  $f(x_1; \dots; x_n)$  wird durch das scharfe kartesische Produkt der  $\alpha_k$ -Niveaus  $A_{\alpha_k}(\tilde{x}_i)$  der Eingangsgrößen  $\tilde{x}_i$  festgelegt. Analog zum eindimensionalen Funktional  $h(x)$  wird das Monotonieverhalten von  $f(x_1; \dots; x_n)$  durch Vergleich der Vorzeichen der lokalen Steigungen an diskreten Koordinaten des Definitionsbereichs ermittelt. Das Monotonieverhalten wird getrennt für die Koordinatenrichtungen des  $n$ -dimensionalen Funktionals untersucht. Für die Koordinatenrichtung  $x_i$  werden die Koordinaten eines zu vergleichenden Punktpaars durch Variation der entsprechenden Koordinate  $x_i \mapsto x_i + \delta$  erhalten. Mit der Bedingung

$$\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial(f(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n))}{\partial x_i} \right) \neq \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial(f(x_1; \dots; x_i + \delta; \dots; x_n))}{\partial x_i} \right) \quad (6.107)$$

kann unterschiedliches Monotonieverhalten an den beiden Punkten identifiziert werden. Das Funktional  $f(x_1; \dots; x_n)$  ist dann bzgl. der Eingangsgröße  $x_i$  nicht-monoton. Die Auswahl der Punktpaare aus dem Definitionsbereich unterliegt keinen Einschränkungen. Es wird lediglich gefordert, dass entlang jeder Koordinatenrichtung eine ausreichende Anzahl von Punktpaaren ausgewertet wird, und dass die Ergebnisse dieser Auswertungen repräsentativ für das Monotonieverhalten des Funktionals im gesamten Definitionsbereich sind. Als mögliche Punkte im Raum der Eingangsgrößen zur Bestimmung der lokalen Monotonieigenschaften des Funktionals können daher die Stützstellen der Äste  $LR_i$  einer Fuzzy-Größe identifiziert werden. Die diskreten  $\alpha_k$ -Niveaus der  $n$  Fuzzy-Eingangsgrößen werden durch Bildung des kartesischen Produkts zu achsenparallelen  $n$ -dimensionalen Teilräumen des  $\mathbb{R}^n$ . Für  $\alpha_k > \alpha_{k+1} > \dots > \alpha_n$  gilt  $\underline{X}_{\alpha_k} \subseteq \underline{X}_{\alpha_{k+1}} \subseteq \dots \subseteq \underline{X}_{\alpha_n}$ . Die Hyperquader liegen ineinander. Die Äste der (Zwischen-)Ergebnisgrößen enthalten bei Anwendung des „monotonen Modus“ ausschließlich Punkte der Ecken der scharfen  $\alpha_k$ -Niveaus im Produktraum der Eingangsgrößen. Die Äste verbinden die Ecken der verschachtelten achsenparallelen Hyperquader. Aus Abbildung 6.23 ist ersichtlich, dass jeder der  $2^n$  Eckpunkte des  $n$ -dimensionalen Teilraums  $\underline{X}_{\alpha_k}$  durch eindimensionale Grenzelemente mit seinen Nachbarknoten verbunden ist. Diese  $n$  Kanten spannen den Raum der Eingangsgrößen auf. Jedes Ästepaar, das durch die Kanten der  $\alpha_k$ -Niveaus direkt verbunden ist, kann daher zur Auswertung der Monotonieigenschaften genutzt werden. Um die Monotonieigen-



**Abbildung 6.23:** Dreidimensionaler Raum der Eingangsgrößen, ineinanderliegende scharfe kartesische Produkte und Äste der (Zwischen-)Ergebnisgrößen (gestrichelte Linie)

schaften des Funktional für  $n$  Fuzzy-Eingangsgrößen zu bestimmen, sind ausgehend von einem beliebigen Ast mindestens seine  $n$  Nachbaräste auszuwerten und zu vergleichen. Im Rahmen der Implementierung wurde der Ast mit den Koordinaten  $(A_{x_1}; \dots; A_{x_n})$  mit  $A_{x_i} = 0$  als Ausgangspunkt gewählt. Für diesen Ast sind die partiellen Ableitungen nach den  $n$  Koordinatenrichtungen für jede Stützstelle zu bestimmen. Die  $n$  Ästepaare zur Bestimmung des Monotonieverhaltens in Richtung der  $n$  Koordinaten werden mit diesem und den benachbarten Ästen (vgl. Abbildung 6.23) gebildet. In Richtung  $x_i$  wird daher der Ast mit den Koordinaten  $(A_{x_1}; \dots; A_{x_i}; \dots; A_{x_n})$  mit  $A_{x_i} = 1$  benötigt. Für diesen Ast müssen die partiellen Ableitungen des Funktional nach  $x_i$  bestimmt werden. Der Vergleich der Ästepaare erfolgt durch Auswertung von Gleichung (6.107) für jedes  $\alpha_k$ -Niveau. Wird mindestens einmal ein unterschiedliches Vorzeichen der Ableitungen festgestellt, so ist das unscharfe Funktional  $\tilde{f}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$  bzgl.  $\tilde{x}_i$  nicht-monoton.

Zur Erläuterung wird das Funktional

$$\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2) = 0,01 \cdot \tilde{x}_1^3 + 0,17 \cdot \tilde{x}_1^2 + 0,48 \cdot \tilde{x}_1 + 0,01 \cdot \tilde{x}_2^3 + 0,13 \cdot \tilde{x}_2^2 + 0,03 \cdot \tilde{x}_2 + 0,65$$

(6.108)

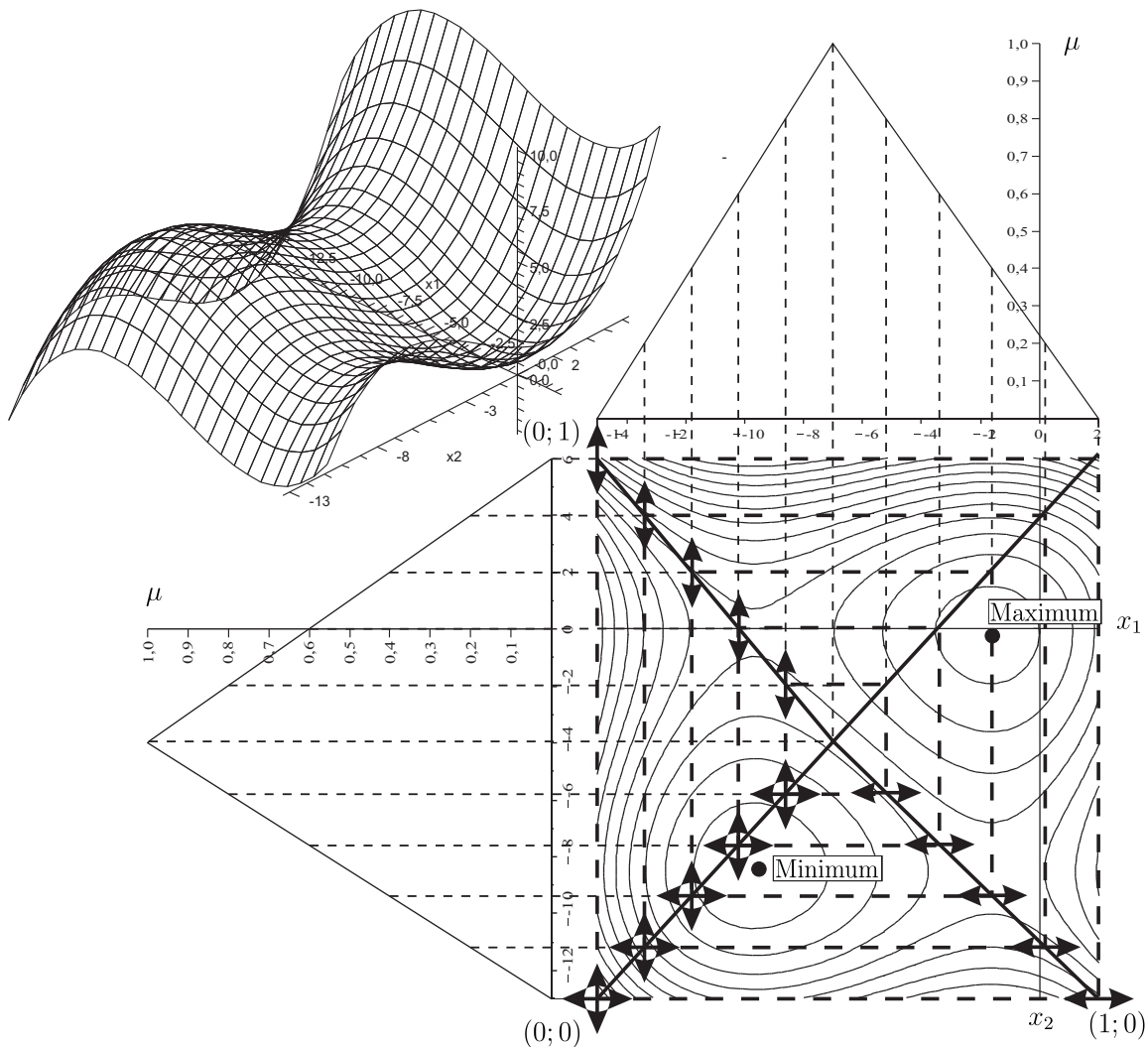
mit den Fuzzy-Dreieckszahlen  $\tilde{x}_1 = \langle -15; -7; 2 \rangle$  und  $\tilde{x}_2 = \langle -13; -4; 6 \rangle$  betrachtet. In Abbildung 6.24 sind die Isohypsen des Funktionsgraphs über dem Support der Eingangsgrößen, sowie das lokale Minimum  $(x_1; x_2) = (-1,653; -0,117)$  und das lokale Maximum  $(x_1; x_2) = (-9,681; -8,550)$  dargestellt. Die Fuzzy-Eingangsgrößen sind in sechs  $\alpha_k$ -Niveaus unterteilt. Die zweidimensionalen Teilräume  $X_{\alpha_k}$  sind als zentrisch angeordnete gestrichelte Rechtecke abgebildet. Wie bereits erläutert, sind ihre Ecken Auswertepunkte der Äste. Die zu bestimmenden partiellen Ableitungen sind durch Doppelpfeile symbolisiert. In der Abbildung ist zu erkennen, dass die durch die Äste der Fuzzy-Eingangsgrößen bestimmten Punktepaare in jeder Koordinatenrichtung den gesamten Definitionsbereich erfassen. Die variablen Intervalllängen gewährleisten eine hohe Sicherheit bei der Identifikation nicht-monotoner Eingangsgrößen. Die Zuverlässigkeit, mit der nicht-monotone Größen identifiziert werden, erhöht sich mit der Anzahl der  $\alpha$ -Niveaus, mit denen die Eingangsgrößen diskretisiert werden. Eine lineare Erhöhung der Anzahl der  $\alpha$ -Niveaus wirkt sich dabei deutlich unterlinear auf die Berechnungsdauer aus (vgl. Abschnitt 6.4). Die Vorzeichen der Ableitungen an den in Abbildung 6.24 dargestellten Punkten sind in Tabelle 6.15 zusammengefasst. Die Angabe erfolgt paarweise für die zu vergleichenden Äste für jedes  $\alpha_k$ -Niveau. Die auftretenden Vorzeichenwechsel in beiden Paaren signalisieren

**Tabelle 6.15:** Vorzeichen der partiellen Ableitungen an den Stützstellen der Äste der Fuzzy-Ergebnisgröße von Gleichung (6.108)

	$\text{sgn} \left( \frac{\partial(f(x_1;x_2))}{\partial x_1} \right)$			$\text{sgn} \left( \frac{\partial(f(x_1;x_2))}{\partial x_2} \right)$	
$\alpha$	(0;0)	(1;0)	$\alpha$	(0;0)	(0;1)
0.0	1	1	0.0	1	1
0.2	1	1	0.2	1	1
0.4	1	1	0.4	1	1
<b>0.6</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>0.6</b>	<b>-1</b>	<b>1</b>
0.8	-1	-1	0.8	-1	-1

ein nicht-monotones Verhalten des Funktional (Gleichung (6.108)) bzgl. beider Fuzzy-Eingangsgrößen. Das Funktional ist im „selektiv nicht monotonen Modus“ mit  $m = 0$  auszuwerten. In Abbildung 6.25 sind die Ergebnisse einer Berechnung im „monotonen Modus“ und im „selektiv nicht monotonen Modus“ gegenübergestellt. Die Punkte in beiden Ab-

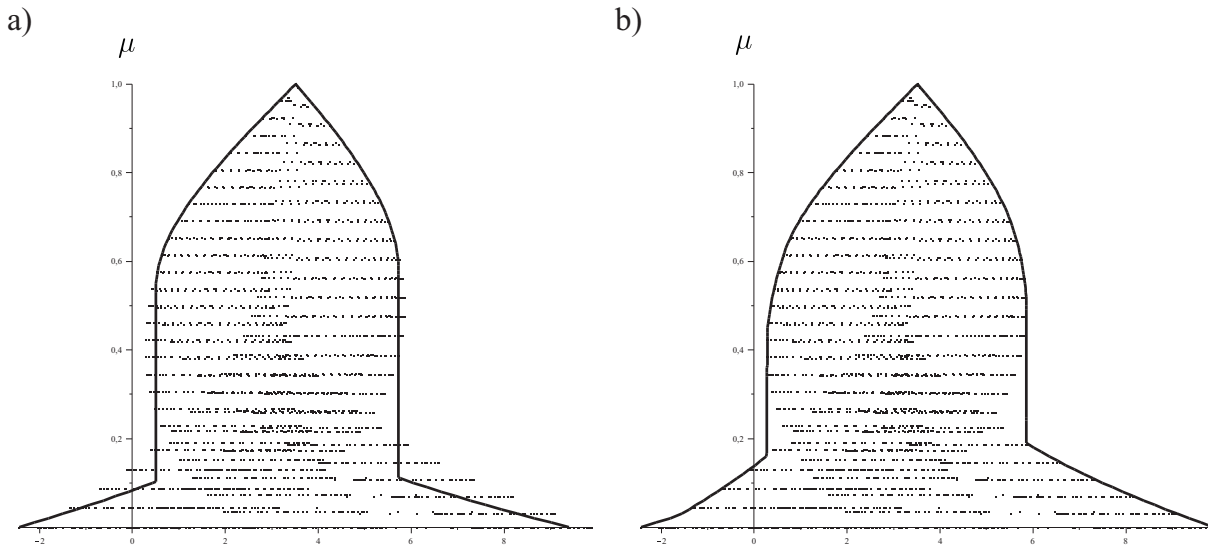




**Abbildung 6.24:** Isohypsen; Ableitungen des Funktionsgraphs (6.108)

bildungen sind Ergebnisse diskreter Auswertungen des Erweiterungsprinzips (Gleichung (6.6)) mit 2500 Auswertungen.

Für jede Ergebnisgröße  $z_i$  eines Funktionals  $f$  (Gleichung (6.1)) beschreibt das scharfe Funktional  $f_i$  die Abbildung diskreter Punkte aus dem Raum der Eingangsgrößen in den Raum der Ergebnisgröße. Dieses Funktional ist i. A. jedoch nicht bekannt. Bei Anwendung numerischer Lösungsverfahren existiert keine geschlossene Formulierung. Es ist lediglich implizit gegeben. Die Bestimmung der Steigungen in den diskreten Punkten erfolgt daher sukzessive durch sequentielle Auswertung der elementaren fuzzy-arithmetischen Operationen. Die Grundlage für dieses Vorgehen bildet der „monotone Modus“. Jede Verknüpfungsoption gemäß den Gleichungen (6.60) bis (6.63) ist um die Bestimmung der par-



**Abbildung 6.25:** Ergebnisgröße  $\tilde{z}$  von Gleichung (6.108), diskrete Auswertung mit dem Erweiterungsprinzip, a) Falsches Ergebnis mit dem „monotonen Modus“, b) Korrektes Ergebnis mit dem „selektiv nicht monotonen Modus“

tiellen Ableitungen an den Stützstellen der Äste (vgl. Abbildung 6.24) zu erweitern. Die Fuzzy-Operanden  $\tilde{z}_1$  und  $\tilde{z}_2$  der Verknüpfungen liegen i. A. als Ergebnis vorangegangener Auswertungen vor (Gleichung (6.54) bzw. (6.55)). Für das Funktional  $f_1(x_1; \dots; x_n)$  sind an den festgelegten Koordinaten die Funktionswerte und die benötigten partiellen Ableitungen bekannt. Fuzzy-Eingangsgrößen weisen als Ausgangspunkt der Sequenz für  $f_1$  den Sonderfall der Identität  $f_1: x \rightarrow x$  mit  $f_1'(x) = 1$  auf. Im Folgenden werden die grundlegenden Beziehungen zur Abbildung der partiellen Ableitungen von  $f_1$  auf das Zielfunktional für die Verknüpfungsoperationen gemäß den Gleichungen (6.60) bis (6.63) dargestellt.

Einstellige fuzzy-arithmetische Operationen  $\circ$  bilden die partiellen Ableitungen der Ausgangsfunktion  $f_1$  entsprechend Gleichung (6.64) auf das Zielfunktional ab. Die Funktionswerte sowie die partiellen Ableitungen an den Auswertepunkten sind aus vorangegangenen Verknüpfungen bzw. durch die Anfangsbedingungen von Fuzzy-Eingangsgrößen bekannt. Im Folgenden werden die diskreten Funktionswerte von  $f_1(x_1; \dots; x_n)$  zu Ästen  $LR_i^x$  zusammengefasst und die den Koordinaten entsprechenden Richtungsableitungen mit  $LR_i'^x$  bezeichnet. Gleichung (6.64) ist für jeden implementierten einstelligen Operator auszuwerten. Für  $\circ = \text{arccosh}$  werden beispielsweise die gesuchten Ableitungen  $LR_i'^z$  mit

$$LR_i'^z = \frac{LR_i'^x}{\sqrt{LR_i^x - 1} \sqrt{LR_i^x + 1}} \quad (6.109)$$

ermittelt. Weitere Berechnungsvorschriften für die implementierten einstelligen Operatoren können Tabelle A.1 entnommen werden.

Bei der Verknüpfung von Skalaren mit Fuzzy-Größen werden erneut die Präfix-Variante (Gleichung (6.65)) und die Suffix-Variante (Gleichung (6.66)) unterschieden. Bei Anwendung des Operators  $\diamond = /$  wird beispielsweise für Gleichung (6.65) die Abbildungsvorschrift

$$LR_i^z = -\frac{c \cdot LR_i^{x'}}{(LR_i^x)^2} \quad (6.110)$$

erhalten. Weitere Abbildungsvorschriften können den Tabellen A.2 und A.3 entnommen werden.

Bei der Implementierung zweistelliger fuzzy-arithmetischer Operatoren ist zu differenzieren, in welchen Koordinatenrichtungen die Ableitungen bestimmt werden sollen. Repräsentiert die Koordinatenrichtung eine Fuzzy-Eingangsgröße, von der nur ein Operand abhängt, so ist Gleichung (6.67) oder Gleichung (6.68) anzuwenden. Sind beide Operanden von dieser Größe abhängig, so ist diese Abhängigkeit bei der Bestimmung der Ableitungen zu berücksichtigen. Für die folgende Betrachtung wird angenommen, dass das Funktional des ersten Operanden mit  $f_1(x_1; \dots; x_n)$  und das des zweiten Operanden mit  $f_2(x_m; \dots; x_o)$  gegeben ist. Die Variablen  $x_i$  mit  $m \leq i \leq n$  entsprechen den gemeinsamen Fuzzy-Eingangsgrößen  $\tilde{x}_i$ . Für die Kontrolläste der Ergebnisgröße sind die Ableitungen in Richtung der Koordinaten  $x_i$  zu bestimmen. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden. Ist  $1 \leq i \leq m$  erfüllt, so ist Gleichung (6.67) anzuwenden. Für  $n \leq i \leq o$  gilt entsprechend Gleichung (6.68). Ist  $m \leq i \leq n$  erfüllt, so ist Gleichung

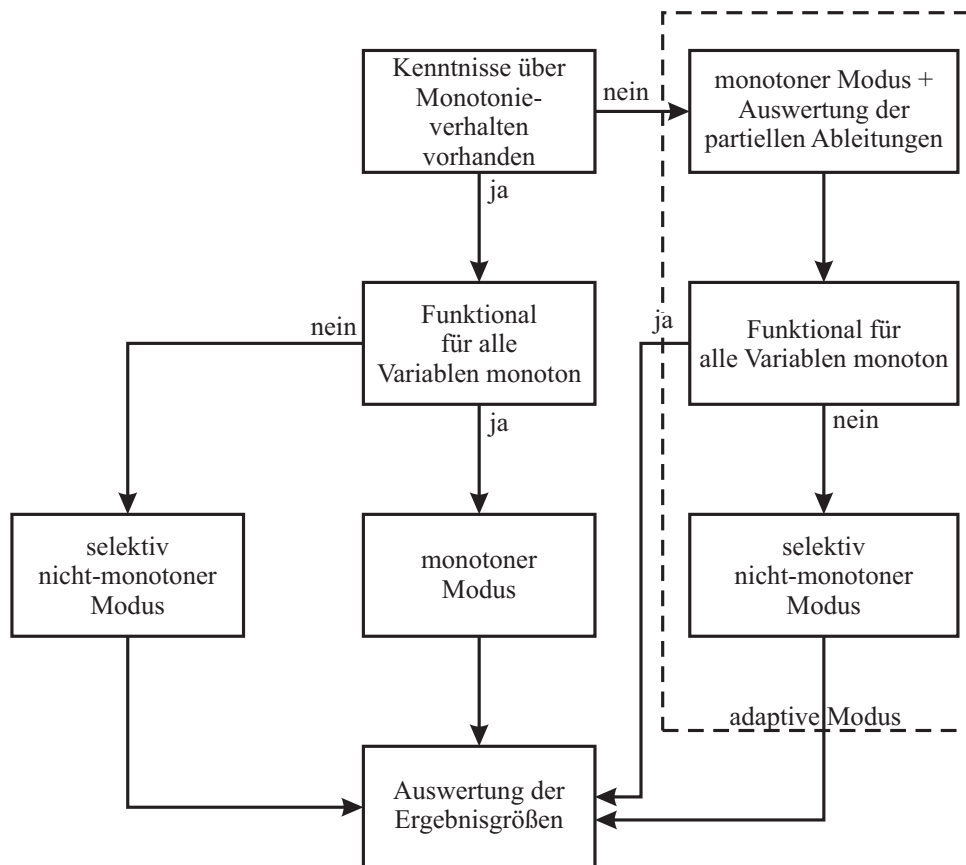
$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} (f_1(x_1; \dots; x_n) * f_2(x_{n+1}; \dots; x_m)) = \\ & \left( \frac{\partial}{\partial t} (t * f_2(x_{n+1}; \dots; x_m)) \Bigg|_{t = f_1(x_1; \dots; x_n)} \right) \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i} (x_1; \dots; x_n) \right) + \\ & \left( \frac{\partial}{\partial t} (f_1(x_1; \dots; x_n) * t) \Bigg|_{t = f_2(x_{n+1}; \dots; x_m)} \right) \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_i} (x_{n+1}; \dots; x_m) \right) \end{aligned} \quad (6.111)$$

auszuwerten. Die Verknüpfung der Äste wird exemplarisch für die Division von zwei Fuzzy-Größen mit

$$LR_i^z = \frac{LR_i^{x_1}}{LR_i^{x_2}} - \frac{LR_i^{x_1} \cdot LR_i^{x_2'}}{(LR_i^{x_2})^2} \quad (6.112)$$

erhalten. In den Tabellen A.4, A.5 und A.6 sind die Abbildungsvorschriften für alle implementierten zweistelligen fuzzy-arithmetischen Operationen zusammengestellt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass mit den drei dargestellten Berechnungsmodi unscharfe Tragwerksanalysen mit Hilfe der direkt fuzzyfizzierten Finite-Elemente-Methode einfach und effizient durchgeführt werden können. Insbesondere die gezielte Reduktion der Problemdimension durch Inkorporation der Kenntnis der Monotonieeigenschaften des Systems führt zu einer signifikanten Verkürzung der Berechnungsdauern. Die Monotonieeigenschaften können entweder a priori bekannt sein oder mit Hilfe des „selektiv nicht monotonen Modus“ ermittelt werden. In Abbildung 6.26 ist der allgemeine Ablauf einer numerischen Berechnung zusammengefasst.



**Abbildung 6.26:** Ablaufschema einer numerischen Berechnung mit der neu entwickelten Fuzzy-Arithmetik

## 6.4 Effizienzvergleich der methodischen Ansätze

Die in Abschnitt 6.2 und 6.3 dargestellten Ansätze zur Erweiterung einer beliebigen Abbildungsvorschrift  $f$  (Gleichung (6.1)) zu einer Fuzzy-Abbildungsvorschrift  $\tilde{f}$  (Gleichung (6.2)) wandeln beide das von *Zadeh* vorgeschlagene Erweiterungsprinzip (Gleichung (6.6)) in ein Optimierungsproblem um, das getrennt für jedes diskrete  $\alpha$ -Niveau gelöst werden muss. Die Anzahl der  $\alpha$ -Niveaus bestimmt dabei die Genauigkeit mit der die tatsächlichen Zugehörigkeitsfunktionen der Fuzzy-Ergebnisgrößen approximiert werden. Die Entwicklung des neuen methodischen Ansatzes der Fuzzy-Arithmetik (vgl. Abschnitt 6.3) erfolgte mit dem Ziel numerische Analysen von Tragwerken im Allgemeinen und von beschädigten Brücken im Besonderen unter Berücksichtigung von Fuzzy-Tragwerksparemtern effizienter, d. h. in kürzerer Zeit als mit den bestehenden Verfahren (vgl. Abschnitt 6.2) durchführen zu können. Der methodeninhärente Effizienzvorteil der in dieser Arbeit entwickelten Fuzzy-Arithmetik gegenüber den Lösungsverfahren mit deterministischer Grundlösung liegt dabei im Abstraktionsniveau der Fuzzyfizierung.

Die Verfahren der erstgenannten Gruppe behandeln die Abbildungsvorschrift  $\tilde{f}$  als Einheit. Durch multiple Auswertungen der scharfen Abbildungsvorschrift  $f$  werden separat für jedes  $\alpha$ -Niveau endlich viele Bildpunkte aus diskreten Tupeln der (mehrdimensionalen) scharfen Eingangsmenge bestimmt. Die in Abschnitt 6.2 dargestellten Verfahren unterscheiden sich lediglich in der Nutzung der Bildpunkte zur Auffindung des globalen Minimums und Maximums. Durch die direkte Fuzzyfizierung des Operators  $f$  zeichnen sich diese Verfahren durch ihre vielseitige Einsetzbarkeit aus. Sie können immer dann eingesetzt werden, wenn sich das zu untersuchende unscharfe Problem in Form von Gleichung (6.2) formulieren lässt. Die Anzahl der notwendigen Auswertungen von  $f$  bei der Suche nach den globalen Extrema des jeweiligen  $\alpha$ -Niveaus bestimmt maßgeblich die Effizienz des Verfahrens bzgl. der Rechenzeit. Dabei erweist sich die Vielseitigkeit von  $f$  als problematisch. Für die Durchführung der Optimierungsaufgabe stehen quasi keine Informationen über die Eigenschaften des Operators  $f$  zur Verfügung. Die Algorithmen zur Lokalisierung der globalen Minima und Maxima von  $f$  müssen für eine relativ große Problemklasse robust und zuverlässig funktionieren. Eine Optimierung der Algorithmen ist deshalb nur in sehr begrenztem Umfang möglich. Je nach Verfahren sind daher eine nicht zu vernachlässigende Anzahl von Hilfsbildpunkten notwendig, um das Verhalten von  $f$  zu erfassen und die Lösungspunkte des Optimierungsproblems ermitteln zu können. Die

Lokalisation der korrekten Lösungspunkte kann i. A. jedoch nicht garantiert werden.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte und implementierte Fuzzy-Arithmetik (vgl. Abschnitt 6.3) setzt die Elemente des Körpers der Fuzzy-Größen  $(F, +, \cdot)$  und auf ihn definierte arithmetische Grundoperationen in eine computerbasierte Lösung um. Die scharfen Verknüpfungen der scharfen Größen in der Abbildungsvorschrift  $f$  werden durch unscharfe Operatoren mit scharfen und unscharfen Operanden ersetzt. Die Abbildungsvorschrift  $f$  wird also in ihrer Gesamtheit fuzzyfiziert. Die Fuzzy-Abbildungsvorschrift  $\tilde{f}$  setzt sich dabei aus elementaren ein- und zweistelligen Fuzzy-Operatoren zusammen. Obwohl über die globalen Eigenschaften von  $\tilde{f}$ , wie oben dargestellt, i. A. keine a priori Kenntnisse zur Verfügung stehen, so sind die Abbildungseigenschaften und insbesondere die Monotonieeigenschaften der elementaren Operatoren bekannt. Da sich  $\tilde{f}$  als Sequenz dieser elementaren Operatoren darstellt, ist die Abbildungsvorschrift implizit gegeben und Rückschlüsse auf das Monotonieverhalten von  $\tilde{f}$  werden möglich. Durch Nutzung dieser Kenntnis kann eine optimale Effizienz der Implementierung erreicht werden. Für die Durchführung von Fuzzy-Tragwerksanalysen stehen in Abhängigkeit vom a priori zur Verfügung stehenden Wissen bzgl. des Monotonieverhaltens von  $\tilde{f}$  drei Modi zur Verfügung: der monotone, der selektiv nicht monotone und der adaptive Modus.

Der monotone Modus kann eingesetzt werden, wenn bekannt ist, dass die Abbildungsvorschrift  $f$  in allen Eingangsgrößen ein monotonen Verhalten aufweist. Da bei monotonen Operatoren die möglichen Lagen der Lösungspunkte a priori bekannt sind, kann der Berechnungsaufwand minimiert werden. Die Koordinaten der globalen Extrema im Raum der Eingangsgrößen fallen für jedes  $\alpha$ -Niveau mit zwei der Ecken des scharfen kartesischen Produkts der  $\alpha$ -Niveaus der Eingangsgrößen zusammen. Die Anzahl der durchzuführenden scharfen Abbildungen auf jedem  $\alpha$ -Niveau bei der Verknüpfung von zwei Fuzzy-Größen beträgt daher  $2^n$ . Der Skalar  $n$  gibt dabei die Dimension des Raums der Fuzzy-Eingangsgrößen des zweistelligen Fuzzy-Operators an. Diese Anzahl repräsentiert das theoretische Minimum der notwendigen scharfen Verknüpfungen.

Ist die Abbildungsvorschrift  $f$  bzgl. mindestens einer Eingangsgröße nicht monoton und sind die nicht monotonen Eingangsgrößen bekannt, so ist der selektiv nicht monotone Modus einzusetzen. In diesem Modus werden ausschließlich für die nicht monotonen Variablen zusätzliche Hilfspunkte zur Approximation der globalen Minima und Maxima der  $\alpha$ -Niveaus ausgewertet. Durch die optimale Ausnutzung der bekannten Monotonieeigenschaften der Abbildungsvorschrift, steigt der Berechnungsaufwand lediglich in dem

selben Maß, mit dem die Problemkomplexität steigt. Insbesondere bei einer geringen Anzahl nicht monotoner Eingangsgrößen ist dadurch lediglich ein moderater Anstieg der Berechnungsdauer zu erwarten. Im Gegensatz dazu berücksichtigen beispielsweise die  $\alpha$ -Level-Optimierung (vgl. Abschnitt 6.2.2) und die Fuzzy-Arithmetik mit Hilfe von dünn besetzten Gittern (vgl. Abschnitt 6.2.3) dieses Wissen nicht.

Im allgemeinen Fall liegen vor einer Analyse jedoch keine a priori Kenntnisse über die Monotonieeigenschaften der Abbildungsvorschrift vor. In diesem Fall kann mit Hilfe des adaptiven Modus mit einem zweistufigen Vorgehen eine effiziente Lösung gefunden werden. Im ersten Schritt wird die Analyse im monotonen Modus durchgeführt. Durch die sequentielle Auswertung des Algorithmus ist dieser in impliziter Form gegeben. Diese Information wird genutzt, um parallel zur Auswertung der Fuzzy-Abbildungsvorschrift ihr Monotonieverhalten zu bestimmen. Wird die Abbildungsvorschrift als bzgl. aller Fuzzy-Eingangsgrößen monoton identifiziert, so führt die Berechnung im monotonen Modus bereits auf das korrekte Ergebnis und die Analyse kann beendet werden. Ansonsten sind die nicht monotonen Eingangsgrößen nun bekannt und die Berechnung kann im selektiv nicht monotonen Modus wiederholt werden.

Neben der Reduzierung der Rechenoperationen bietet die Einführung des neuen Datentyps der Fuzzy-Größe (FQ) auch die Möglichkeit, die Durchführung der Rechenoperationen selbst durch eine hardwarenahe Umsetzung signifikant zu beschleunigen. Durch eine adäquate Datenhaltung können beispielsweise die Vorteile der Vektorisierung aktiviert werden. Moderne Rechnerarchitekturen unterstützen eine effiziente Durchführung von gleichen Operationen auf unterschiedlichen Daten (SIMD). Eine signifikante Verkürzung der Laufzeit von Programmen kann die Folge sein.

Darüber hinaus führt die direkte Fuzzyifizierung von Algorithmen zu einer Reduktion der Berechnungsdauer durch Vermeidung von Redundanzen. Anders als bei den Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen, bei denen diese Grundlösungen mehrfach mit unterschiedlichen Datensätzen ausgewertet werden, kann durch die gezielte Fuzzyifizierung ausschließlich der Rechenoperationen eine Redundanz des auszuführenden Programmcodes vermieden werden. Speziell im Rahmen der Fuzzy-Finite-Elemente-Methode ist dies beispielsweise die Durchführung der Bandbreitenoptimierung der Matrix, die das zu lösende Gleichungssystem formuliert. Algorithmen zur Bandbreitenoptimierung wie beispielsweise von *Sloan* [126] oder von *Cuthill & McKee* [32], basieren auf der Graphentheorie zur Umordnung der Matrixeinträge, um die Bandbreite zu verringern. Dadurch wird der benö-

tigte Speicher für die Darstellung mit einer dünn besetzten Matrix (engl.: sparse-matrix) und gleichzeitig die nötige Rechenzeit zur Lösung des Gleichungssystems reduziert. Die Umordnung hängt lediglich von der Position der Einträge, nicht jedoch von den Zahlenwerten ab. Sie muss daher nur einmal durchgeführt werden.

Werden die Eigenwerte und Eigenformen von unscharfen Modellen mit unscharfen Parametern bestimmt, so ergibt sich ein weiterer Vorteil der impliziten Fuzzyifizierung des benutzten Algorithmus. Bei der Durchführung einzelner unabhängiger Stichproben, beispielsweise bei einer stochastischen Simulation mittels Monte-Carlo-Simulation oder bei den Fuzzy-Lösungsverfahren mit deterministischer Grundlösung, muss die korrekte Zuordnung des ermittelten Eigenwerts zur korrespondierenden Eigenform sichergestellt werden. Selbst bei gleichem Sortierkriterium der Eigenwertausgabe (z. B. aufsteigend) kann nicht sichergestellt werden, dass die zum  $i$ -ten Eigenwert gehörende Eigenform eines Parametersatzes auch bei Berechnung mit einem anderen Parametersatz zum  $i$ -ten Eigenwert korrespondiert. Um die scharfen Eigenwerte zu einer unscharfen Größe zusammenfassen zu können, sind die zusammengehörenden Eigenwerte mittels Ähnlichkeitsbetrachtungen der korrespondierenden Eigenformen zu identifizieren. Bei Verwendung der Fuzzy-Arithmetik kann dies entfallen.

Nachfolgend wird ein Effizienzvergleich der Verfahren mit deterministischer Grundlösung (vgl. Abschnitt 6.2) mit der in dieser Arbeit entwickelten und implementierten Fuzzy-Arithmetik (vgl. Abschnitt 6.3) durchgeführt. Die Effizienz der Verfahren wird durch die Geschwindigkeit, mit der sie eine Sequenz fuzzy-arithmetischer Operationen auswerten können, bestimmt. Als Sequenz fuzzy-arithmetischer Operationen wird eine Fuzzy-Finite-Elemente-Analyse verwendet. Die numerische Simulation wird für eine zweistegige Plattenbalkenbrücke in Verbundbauweise mit 30 m Spannweite als praxisnahes Beispiel durchgeführt. Die Brücke ist als Trägerrost mit Stabelementen modelliert. In der Längstragrichtung werden die beiden Hauptträger durch zwei Stäbe abgebildet und in der Quertragrichtung wird die Fahrbahnplatte durch 30, je einen Meter breite Streifen, approximiert. Das Modell besteht aus 302 Elementen und weist 1636 Freiheitsgrade auf. Ziel dieser Untersuchung ist es, das Effizienzverhalten bzgl. der Berechnungsgeschwindigkeit der Implementierung bei Variation der Berechnungsparameter festzustellen. Die zu variierenden Parameter sind die Anzahl  $n$  der unabhängigen Fuzzy-Eingangsgrößen sowie die Anzahl  $m$  der  $\alpha$ -Niveaus, d. h. die Diskretisierungsfeinheit der Darstellung der Fuzzy-Größen. Die Anzahl der Fuzzy-Größen wird variiert, indem entsprechend der gewählten Anzahl  $n$



den Querstreifen des Trägerrosts jeweils ein unabhängiger Fuzzy-Elastizitätsmodul zugewiesen wird. Die Fuzzy-Elastizitätsmodule wurden aus Gründen der Vergleichbarkeit der Berechnungsdauern als Fuzzy-Pendant der scharfen Parameter festgelegt. Das verwendete Finite-Elemente-Programm wurde für die Durchführung der Analyse wie in Abschnitt 6.3 dargestellt im Rahmen dieser Arbeit zu einem Fuzzy-Finite-Elemente-Programm erweitert. Die scharfe Originalversion des Programms zur Berechnung mit scharfen Gleitkommazahlen dient dabei als Referenz. Mit ihr werden die deterministischen Grundlösungen der Verfahren aus Abschnitt 6.2 berechnet. Die Berechnungen wurden auf einer SGI Altix 4700 [5] durchgeführt.

Die numerische Analyse wird mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode unter der Annahme eines linearen Materialverhaltens durchgeführt. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit einem präkonditionierten Konjugierte-Gradienten-Verfahren. Als Präkonditionierer wird eine „shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung“ (SICT) (vgl. Abschnitt 2.3.4) eingesetzt. Als Maß zur Bewertung der Effizienz der beiden methodischen Ansätze wird die Geschwindigkeitserhöhung (engl.: speedup)

$$S(n, m) = \frac{T_{det}(n, m)}{T_{FQ}(n, m)}, \quad (6.113)$$

die durch den Einsatz der Fuzzy-Arithmetik gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht werden kann, herangezogen. Der speedup wird mit der Rechenzeit der deterministischen Verfahren ( $T_{det}(n, m)$ ) und der Fuzzy-Arithmetik ( $T_{FQ}(n, m)$ ) bestimmt. Der Parameter  $n$  gibt die Anzahl der unabhängigen Fuzzy-Eingangsgrößen und  $m$  die Anzahl der  $\alpha$ -Niveaus mit welchen die Fuzzy-Größen diskretisiert werden an. Für die Berechnung des Verformungsverhaltens ist a priori bekannt, dass die Ergebnisgrößen, d. h. die Knotenverformungen bzgl. der Fuzzy-Eingangsgrößen ein monotonen Verhalten aufweisen.  $T_{det}(n, m)$  kann daher mit Hilfe der Dauer einer scharfen Berechnung  $T_{det}$  mit

$$T_{det}(n, m) = T_{det} \cdot m \cdot 2^n \quad (6.114)$$

bestimmt werden. Gleichung (6.114) gibt die theoretische Untergrenze der Berechnungsdauer der Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen an. In Abbildung 6.27 ist der speedup der Fuzzy-Arithmetik gegenüber der mit Gleichung (6.114) bestimmten theoretischen Untergrenze der Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen und der Anzahl  $m$  der  $\alpha$ -Niveaus dargestellt.

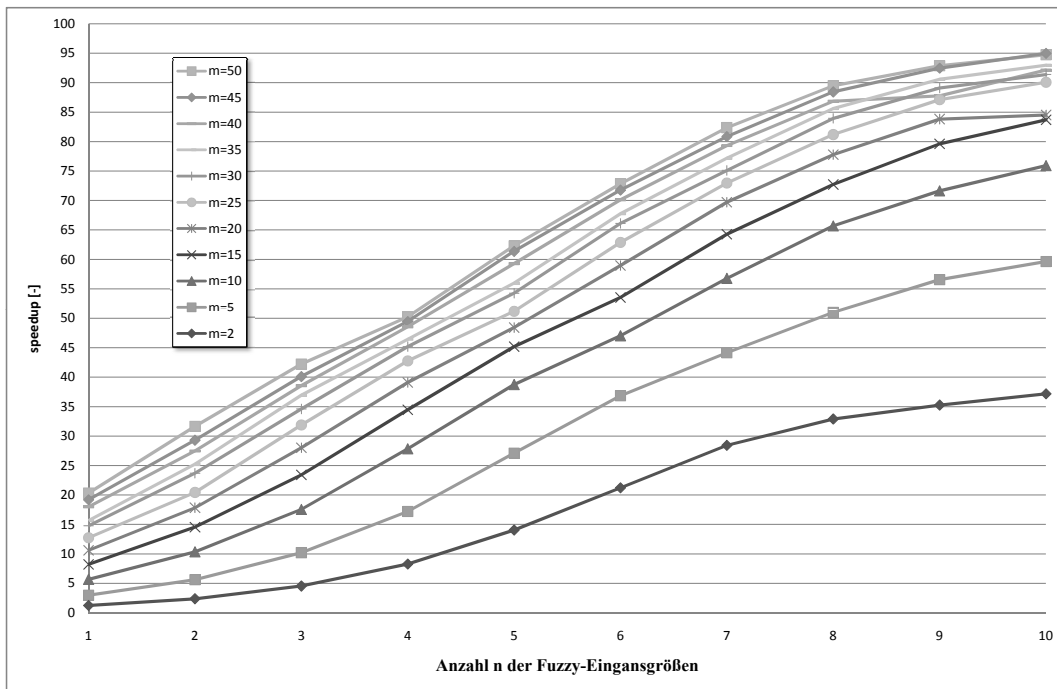


Abbildung 6.27: Speedup des monotonen Modus

Die Implementierung der in dieser Arbeit dargestellten Fuzzy-Arithmetik zeigt ein für den Einsatz in der Praxis äußerst positives Systemverhalten. Der speedup der Analyse steigt mit zunehmender Anzahl  $n$  von Fuzzy-Eingangsgrößen und gleichzeitig mit der Erhöhung der Anzahl  $m$  der  $\alpha$ -Niveaus an. Die numerische Analyse des vorliegenden Brückentragwerks kann mit den Verfahren mit deterministischer Grundlösung bis zu ca. 95 mal länger dauern als eine mit Hilfe der Fuzzy-Arithmetik durchgeführte Berechnung.

Die Tatsache, dass die Effizienz der Implementierung mit steigendem Berechnungsaufwand, d. h. mit zunehmender Anzahl von Fuzzy-Eingangsgrößen und  $\alpha$ -Niveaus, steigt, kann mit dem günstigen Zusammenwirken der bereits erörterten hardware-optimierten Durchführung der Gleitkommaoperationen sowie mit der Minimierung von Redundanzen erklärt werden. Die Anzahl der Gleitkommaoperationen wird u. A. durch den sukzessiven Aufbau des Produktraums der Fuzzy-Eingangsgrößen und durch Vermeidung von redundanten Kontrollflüssen im Programm (z. B. optimierte Speicherverwaltung, einmalige Bandbreitenoptimierung) reduziert. Daher kann das Systemverhalten auch nicht durch Gleichung (6.114) beschrieben werden. Das Systemverhalten kann zweckmäßig mit einer relativen Analysedauer dargestellt werden. In Abbildung 6.28 wird bei Variation der Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(1, m)$  dar-

gestellt. Der mit „exponentiell“ bezeichnete Graph gibt dabei die entsprechend Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an. In Abbildung 6.29 wird  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(n, 2)$  illustriert. Der Graph mit der Bezeichnung „linear“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an. In den beiden Abbildungen ist ersichtlich, dass sich der Berechnungsaufwand der Implementierung der Fuzzy-Arithmetik deutlich unterlinear bzgl. der Erhöhung der  $\alpha$ -Niveaus verhält und die Berechnungsdauer signifikant weniger steigt als die entsprechend Gleichung (6.114) zu erwartende Exponentialfunktion.

Ein wesentlicher Bestandteil bei der Durchführung einer Simulation mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode ist die Lösung eines (linearen) Gleichungssystems. Dazu stehen zahlreiche Lösungsverfahren zur Verfügung, von denen einige exemplarisch in Abschnitt 2.3 erörtert wurden. Die Auswahl eines geeigneten Lösungsverfahrens ist dabei problemabhängig und kann die Gesamtdauer einer numerischen Analyse signifikant beeinflussen. Um den Einfluss des eingesetzten Lösungsverfahrens auf die Effizienz der Fuzzy-Arithmetik quantifizieren zu können, wurden beispielhaft die in Abschnitt 2.3 dargestellten Verfahren untersucht. Dabei handelt es sich um ein direktes Lösungsverfahren (*Cholesky*-Zerlegung (C)) und drei Varianten des präkonditionierten CG-Verfahrens (SICT, RICT und SAINV). Analog zu den obigen Darstellungen ist in Abbildung 6.30 der speedup (Gleichung (6.113)) der Fuzzy-Arithmetik im Vergleich zu den Verfahren mit deterministischer Grundlösung (Gleichung (6.114)) dargestellt. Der speedup weist erhebliche Unterschiede zwischen den eingesetzten Verfahren auf. Der höchste speedup ist bei Einsatz der stabilisierten Variante des approximativen inversen Präkonditionierers (SAINV) zu verzeichnen. Allerdings ist dieser wegen der signifikant höheren Berechnungsdauer, sowohl in der scharfen als auch in der fuzzyfizzierten Version (vgl. Anhang B), für die Durchführung der Verformungsberechnung ungeeignet. Bei vergleichbaren Berechnungsdauern der scharfen Algorithmen weist die SICT-Version des CG-Verfahrens einen ca. doppelt so hohen speedup, verglichen mit der RICT-Version und mit der direkten Gleichungslösung (C), auf. Die fuzzyfizierte SICT-Version des CG-Verfahrens führte bei dem vorliegenden Beispiel nicht nur zu einer hervorragenden Effizienz, sondern auch zur geringsten Berechnungsdauer einer Fuzzy-Tragwerksanalyse, obwohl die direkte Gleichungslösung (C) in der scharfen Version eine geringfügig geringere Analysedauer aufweist.

Eine Erklärung für die erheblichen Unterschiede des erzielten speedups der Verfahren kann in dem methodischen Vorgehen zur Lösung des linearen Gleichungssystems gefunden wer-

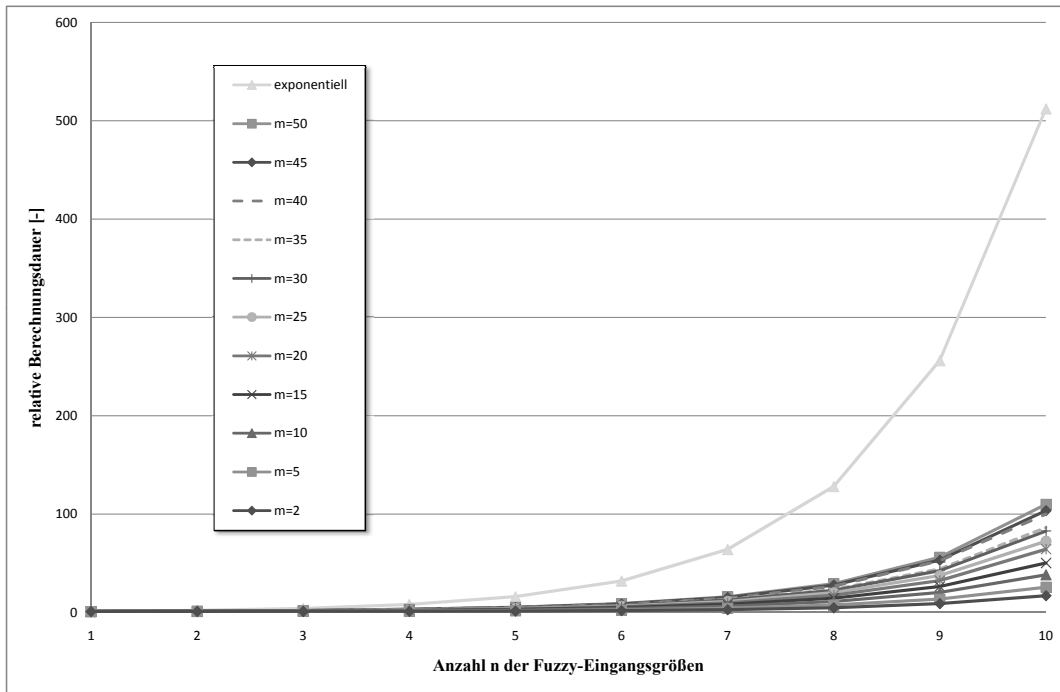


Abbildung 6.28: Systemverhalten des monotonen Modus in Abhängigkeit von  $n$

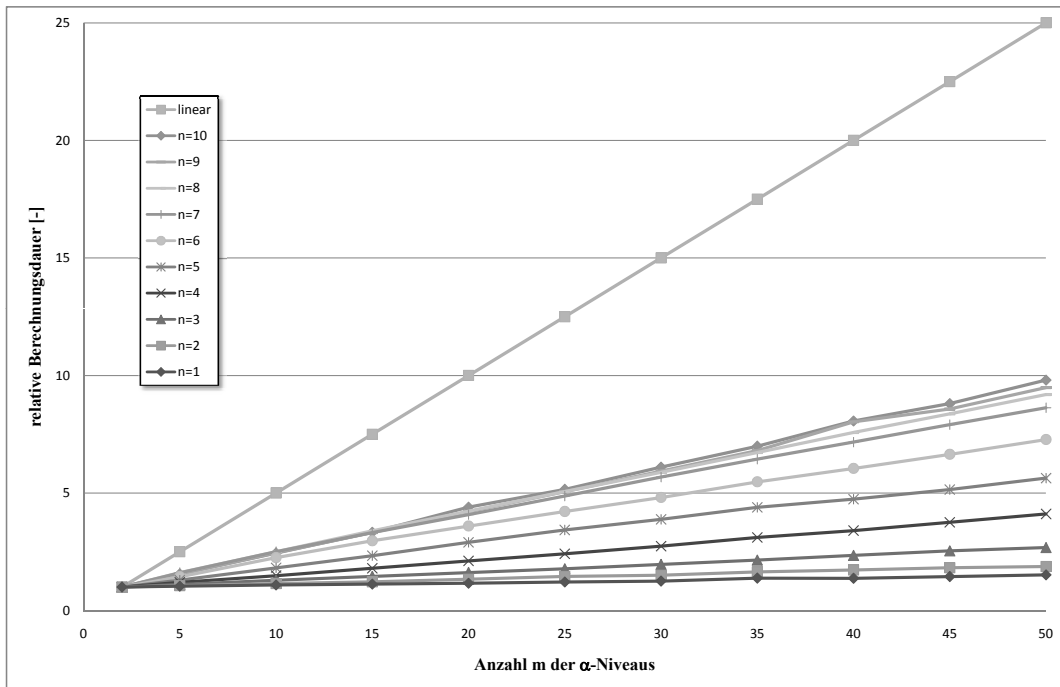


Abbildung 6.29: Systemverhalten des monotonen Modus in Abhängigkeit von  $m$

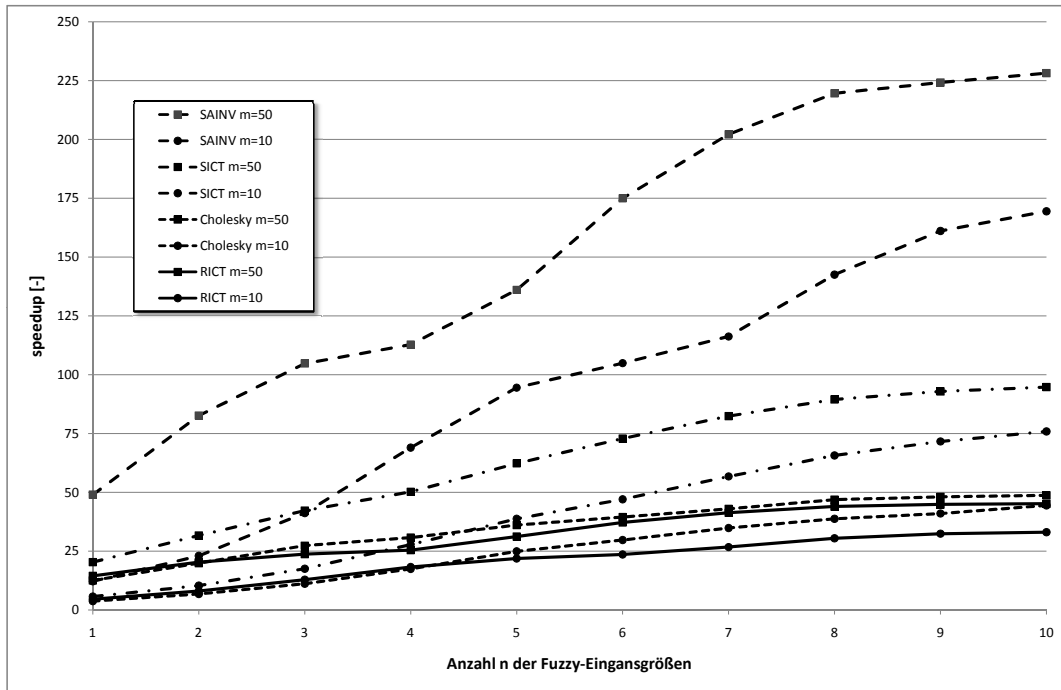


Abbildung 6.30: Speedup des monotonen Modus in Abhängigkeit vom Lösungsverfahren

den. Aus mathematischer Sicht müssen die Verfahren zwar zum selben Ergebnis führen, die algorithmische Umsetzung und dadurch die Sequenz arithmetischer Operationen unterscheidet dich dabei jedoch erheblich. Dies kann sich insbesondere bei der numerischen Simulation lokal geschädigter Tragwerke auf die Analysedauer auswirken. Wie bei der verwendeten Test-Konfiguration sind die Fuzzy-Eingangsgrößen auf eine begrenzte Anzahl von (geschädigten) Elementen konzentriert. Während der Berechnung des Lösungsvektors des linearen Gleichungssystems wird, wie bereits dargestellt, für jede Ergebnisgröße der Produktraum sukzessive entwickelt. Da der Berechnungsaufwand einer elementaren fuzzyarithmetischen Operation mit der Dimension der Räume der Eingangsgrößen steigt, kann sich eine günstige Reihenfolge der Operationen in einer Sequenz günstig auf die Effizienz und die Berechnungsdauer auswirken. Der Einfluss der Reihenfolge auf den Berechnungsaufwand soll am Beispiel der einfachen Verknüpfung der beiden Fuzzy-Größen  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  mit den Skalaren  $c$  und  $d$

$$\tilde{y} = \left( (\tilde{a} + \tilde{b}) + c \right) + d \quad (6.115)$$

verdeutlicht werden. Werden die beiden Fuzzy-Größen jeweils mit zehn  $\alpha$ -Niveaus diskretisiert, so sind für die Auswertung des innersten Klammerausdrucks gemäß Gleichung

(6.114) 40 scharfe Operationen nötig. Das Fuzzy-Zwischenergebnis weist vier Äste auf, wodurch die Verknüpfung mit dem Skalar  $c$  ebenfalls 40 Operationen benötigt. Nach der Addition von  $d$  sind demnach 120 scharfe Operationen durchgeführt worden. Diese Anzahl entspricht dem Berechnungsaufwand der Verfahren auf Basis deterministischer Lösungen. Wird die Sequenz jedoch mittels Äquivalenzumformung in

$$\tilde{y} = (\tilde{a} + \tilde{b}) + (c + d) \quad (6.116)$$

überführt, so sind lediglich 81 Operationen nötig. Die Verknüpfung von  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  benötigt weiterhin 40 Operationen, die Addition von  $c$  und  $d$  jedoch lediglich eine und die Verknüpfung der beiden Zwischenergebnisse erneut 40. Durch die Umformung des algebraischen Ausdrucks konnte eine gemischte zweistellige fuzzy-arithmetische Operation eingespart und dadurch der Berechnungsaufwand erheblich reduziert werden. Analog zu dem illustrativen Beispiel, kann der positive Einfluss der Vermeidung fuzzy-arithmetischer Operationen infolge unterschiedlicher algorithmischer Umsetzung auch bei den Lösungsverfahren beobachtet werden. In Tabelle 6.16 sind für die drei relevanten Lösungsverfahren die Anteile der fuzzy-arithmetischen Operationen an der Gesamtzahl der arithmetischen Operationen angegeben. Der sehr hohe speedup, der mit dem Einsatz des „shifted incom-

**Tabelle 6.16:** Anteil der Fuzzy-Operationen an der Gesamtzahl arithmetischer Operation, Angaben in Prozent

	Anzahl n der Fuzzy-Eingangsgrößen									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SICT	15,06	17,34	19,62	21,90	24,18	26,46	28,74	31,02	33,30	35,58
RICT	27,21	29,16	31,11	33,06	35,01	36,96	38,91	40,86	42,82	44,77
C	24,56	26,55	28,57	30,59	32,61	34,63	36,65	38,67	40,69	42,71

plete *Cholesky*“ (SICT) Präkonditionierers erreicht wird, kann nun durch den niedrigen Anteil fuzzy-arithmetischer Operationen qualitativ erklärt werden. Die damit verbundene signifikante Reduktion der Berechnungsdauer kann jedoch nur bei Verwendung der impliziten Fuzzy-Arithmetik aktiviert werden und ist daher ein methodeninhärenter Vorteil gegenüber den Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen.

Zur Darstellung des Systemverhaltens des selektiv nicht monotonen Modus wird ebenfalls

die Verformungsberechnung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode herangezogen. Die Berechnungen erfolgten stets mit fünf unabhängigen Fuzzy-Eingangsgrößen, die mit jeweils fünf  $\alpha$ -Niveaus diskretisiert wurden. Der zu variierende Parameter ist die Anzahl  $\bar{n}$  der nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen. Diese wurden mit fünf Ästen diskretisiert. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit einem präkonditionierten konjugierten Gradientenverfahren. Als Präkonditionierer wird eine „shifted“ incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) (vgl. Abschnitt 2.3.4) eingesetzt.

Zunächst wird das Systemverhalten mit der Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung 6.31 ist bei Variation der Anzahl  $\bar{n}$  der nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  bezogen auf  $T_{FQ}(1)$  dargestellt. Analog zum monotonen Modus kann die Anzahl der notwendigen scharfen Operationen abgeschätzt werden. Mit der Analysedauer  $T_{FQ}(1)$  und der Gleichung

$$T_{det}(\bar{n}) = T_{det} \cdot 5 \cdot 2^{5-\bar{n}} \cdot 5^{\bar{n}} \quad (6.117)$$

ist es daher möglich, auf die theoretische Dauer  $T_{det}$  einer Verformungsberechnung mit scharfen Kenngrößen zu schließen. Durch erneute Anwendung von Gleichung (6.117) kann somit eine theoretisch zu erwartende relative Berechnungsdauer ermittelt werden. Der zugehörige Graph ist mit „exponentiell“ gekennzeichnet. Das bereits für den monotonen Modus dargestellte hervorragende Systemverhalten zeigt sich in Abbildung 6.31 ebenfalls für den selektiv nicht monotonen Modus. Die relative Berechnungsdauer des selektiv nicht monotonen Modus steigt deutlich geringer an als die auf der Grundlage von Gleichung (6.117) ermittelte. Mit steigender Anzahl  $\bar{n}$  nicht monotoner Fuzzy-Eingangsgrößen und damit steigendem Berechnungsaufwand nimmt der Unterschied der relativen Berechnungsdauern zu Gunsten der Fuzzy-Arithmetik zu.

Der speedup (Gleichung 6.113)) der mit der impliziten Fuzzy-Arithmetik gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(\bar{n})$  der scharfen Lösung. Die Bestimmung von  $T_{det}(\bar{n})$  ist dabei vom eingesetzten Verfahren abhängig. Für die erweiterte Transformationsmethode (vgl. Abschnitt 6.2.1) wird  $T_{det}(\bar{n})$  mit Gleichung (6.9) bestimmt. Die Genauigkeit dieses Verfahrens bei der Approximation der globalen Extrema entspricht dabei für das  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha = 0$  (Support) der Genauigkeit des impliziten Verfahrens. Für  $\alpha$ -Niveaus mit  $\alpha > 0$  hingegen weist die implizite Fuzzy-Arithmetik jedoch eine signifikant höhere Genauigkeit auf. Um die selbe Genauigkeit auf der Basis deterministischer Grundlösungen zu erreichen, sind eine durch Gleichung (6.117) festgelegte Anzahl

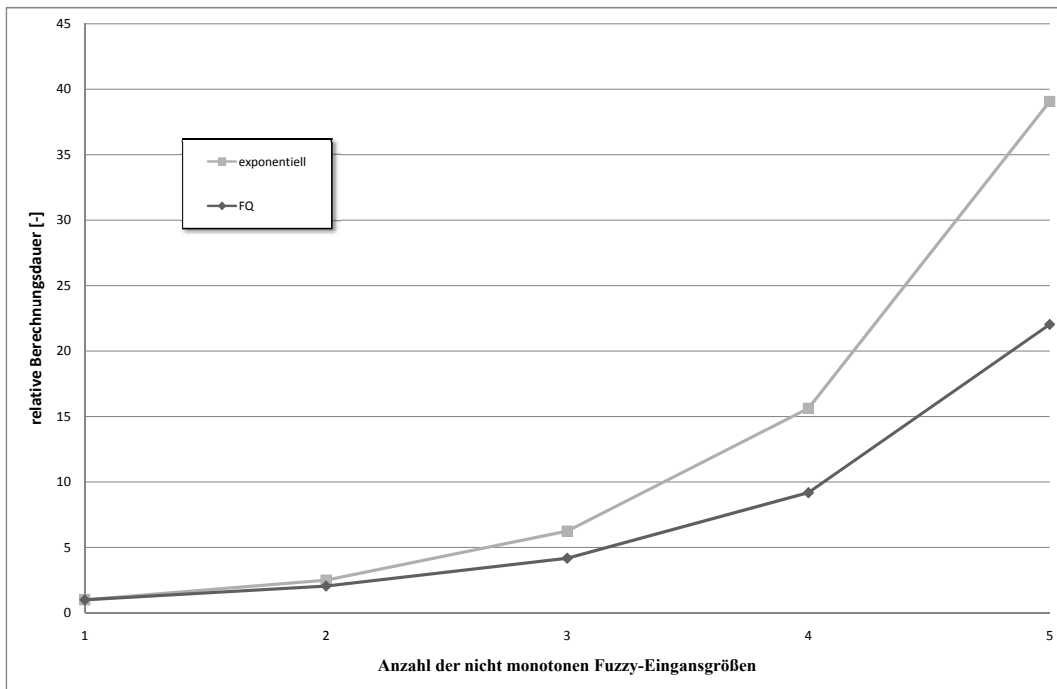


Abbildung 6.31: Systemverhalten des nicht monotonen Modus in Abhängigkeit von  $\bar{n}$

von Auswertungen nötig. Der entsprechende speedup ist in Abbildung 6.32 mit „äquivalente deterministische Lösung“ bezeichnet. Wird Fuzzy-Arithmetik mit der Hilfe dünn besetzter Gitter (vgl. Abschnitt 6.2.3) durchgeführt, so hängt die Anzahl scharfer Funktionsauswertungen von der Dimension des Raums der Fuzzy-Eingangsgrößen und dem Verfeinerungsniveau  $d$  ab. In Abbildung 6.32 ist der speedup des impliziten Verfahrens gegenüber der Methode auf der Basis von dünn besetzten Gittern für übliche Verfeinerungsniveaus ( $d \in \{3, 4, 5, 6\}$ ) und der daraus resultierenden Anzahl scharfer Auswertungen (241, 801, 2433, 6993) dargestellt.

Die hochperformante Implementierung des Körpers der Fuzzy-Größen  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  zeigt auch im selektiv nicht monotonen Modus eine signifikante Reduktion der Berechnungszeiten verglichen mit den auf deterministischen Grundlösungen basierenden Verfahren. So kann eine deterministisch basierte Lösung mit äquivalenter Genauigkeit, wie in Abbildung 6.32 dargestellt, bis zu ca. 68 mal länger dauern. Die Gründe hierfür wurden bereits ausführlich bei der Diskussion des monotonen Modus erörtert. Obwohl die positiven Eigenschaften des monotonen Modus in gleicher Weise auch für den nicht monotonen Modus zum Tragen kommen, ist eine Berechnung nur ca. 20 mal schneller als eine Analyse mit der erweiterten Transformationsmethode. Der speedup bleibt jedoch bei Variation der nicht monotonen



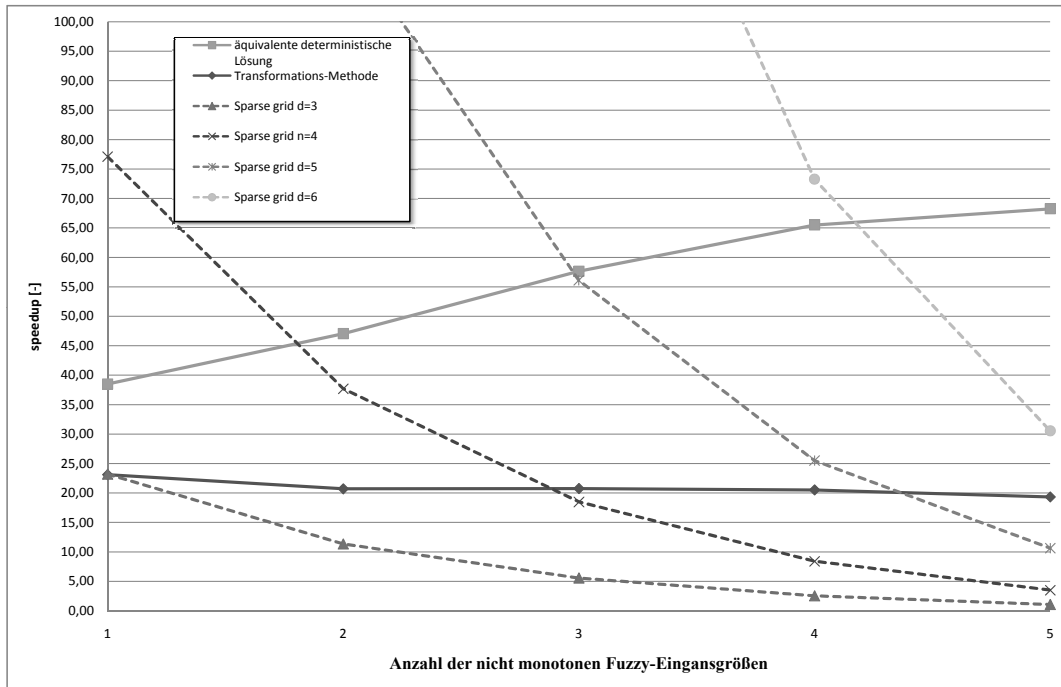


Abbildung 6.32: Speedup des nicht monotonen Modus in Abhängigkeit von  $\bar{n}$

Eingangsgrößen quasi konstant. Und das, obwohl mit steigender Anzahl  $\bar{n}$ , wegen der geringeren Genauigkeit der Transformationsmethode, die Anzahl der scharfen Auswertungen signifikant weniger steigt als mit der Fuzzy-Arithmetik. Fuzzy-Arithmetik mit der Hilfe dünn besetzter Gitter kann wegen der festgelegten Stützstellen der Interpolationsfunktion nicht zwischen monotonen und nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen unterscheiden. Die Anzahl der nötigen Stützstellen ist lediglich von der Dimension des Eingangsraumes, d. h. von der Anzahl der Fuzzy-Eingangsgrößen und vom Verfeinerungsniveau  $d$  abhängig. Dies wirkt sich insbesondere bei einer geringen Anzahl nicht monotoner Größen, verglichen mit der Implementierung des Körpers der Fuzzy-Größen  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ , signifikant negativ auf die Berechnungsdauer aus. Selbst mit einem Verfeinerungsniveau  $d = 4$  ist eine Berechnung mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahren ca. 77 mal schneller als mit Hilfe der dünn besetzten Gitter. Diese Diskrepanz reduziert sich zwar bei steigender Anzahl nicht monotoner Fuzzy-Eingangsgrößen, doch selbst bei einer Berechnung mit ausschließlich nicht monotonen Größen weist der selektiv nicht monotone Modus, in Abhängigkeit von  $d$  noch immer einen speedup von 1 bis 30 auf. Bei der Berechnung von realen Problemstellungen kann die Implementierung des Körpers der Fuzzy-Größen  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  wegen ihrer Flexibilität die Performanz, verglichen mit den Verfahren auf Basis deter-

ministischer Grundlösungen, weiter steigern. Während bei der Transformationsmethode die Anzahl der Auswertepunkte auf den  $\alpha$ -Niveaus direkt an die Anzahl der  $\alpha$ -Niveaus gekoppelt ist und bei dem Verfahren mit dünn besetzten Gittern die Anzahl der Stützstellen durch die Wahl des Verfeinerungsniveaus in allen Koordinatenrichtungen des Raums der Eingangsgrößen festgelegt ist, weist die Fuzzy-Arithmetik dieser Arbeit keine derartigen Einschränkungen auf. Die Anzahl der auszuwertenden Zwischenäste kann für jede nicht monotone Fuzzy-Eingangsgröße individuell und unabhängig von der Anzahl der  $\alpha$ -Niveaus vorgegeben werden. Dadurch ist es möglich, Fuzzy-Eingangsgrößen entsprechend der Größe ihrer Streuung zu diskretisieren. Dies kann insbesondere bei Berechnungen mit überwiegend gering streuenden Eingangsgrößen und nur wenigen Größen mit großer Unschärfe ohne Verlust an Genauigkeit zu deutlich kürzeren Berechnungsdauern führen.

In den vergangenen Jahren ist die Leistungsfähigkeit von Computern ständig verbessert worden. Diese Entwicklung wird häufig mit dem *Moorschen Gesetz* [12] beschrieben. *Gordon Moore* stellte auf Grund empirischer Beobachtungen fest, dass sich die Integrationsdichte, d. h. die Anzahl der Transistoren pro Flächeneinheit, alle 18 bis 24 Monate verdoppelt. Eine mögliche Konsequenz dieser Entwicklung ist die Zusammenführung von mehreren Prozessorkernen auf einem Chip, die parallel arbeiten und dadurch mehr Leistung erbringen. Unter ökonomischen Gesichtspunkten ist es daher sinnvoll, rechenintensive Software, wie die numerische Analyse von Strukturen unter Berücksichtigung der Unschärfe, auf mehreren Prozessoren parallel zu nutzen und dadurch in kürzerer Zeit zu Ergebnissen zu gelangen. Der Zeitgewinn, d. h. die Differenz der Analysezeit  $T(1, N)$  eines Problems der Größe  $N$  auf einem Prozessor und der Analysezeit  $T(p, N)$  eines Problems mit der selben Größe auf  $p$  Prozessoren, hängt wesentlich von der Problemformulierung in Kombination mit der verwendeten Hardware ab. Als Maß zur Bewertung der Effizienz einer parallelen Verarbeitung wird der parallele speedup

$$S(p, N) = \frac{T(1, N)}{T(p, N)} \quad (6.118)$$

eingeführt. Wird für die Verarbeitung eines Problems auf  $p$  Prozessoren ein paralleler speedup von  $S(p, N) = p$  erreicht, so ist die Anwendung „gut skalierbar“ und  $S(p, N)$  wird als idealer oder linearer speedup bezeichnet. Für praktische Problemstellungen ist ein idealer speedup jedoch eine obere Grenze, da i. d. R. nur ein bestimmter Anteil des Programms parallelisierbar ist. Wird mit  $f$  der sequentielle Anteil des Programms, d. h. der Anteil der nicht parallel abgearbeitet werden kann, bezeichnet, so kann der parallele

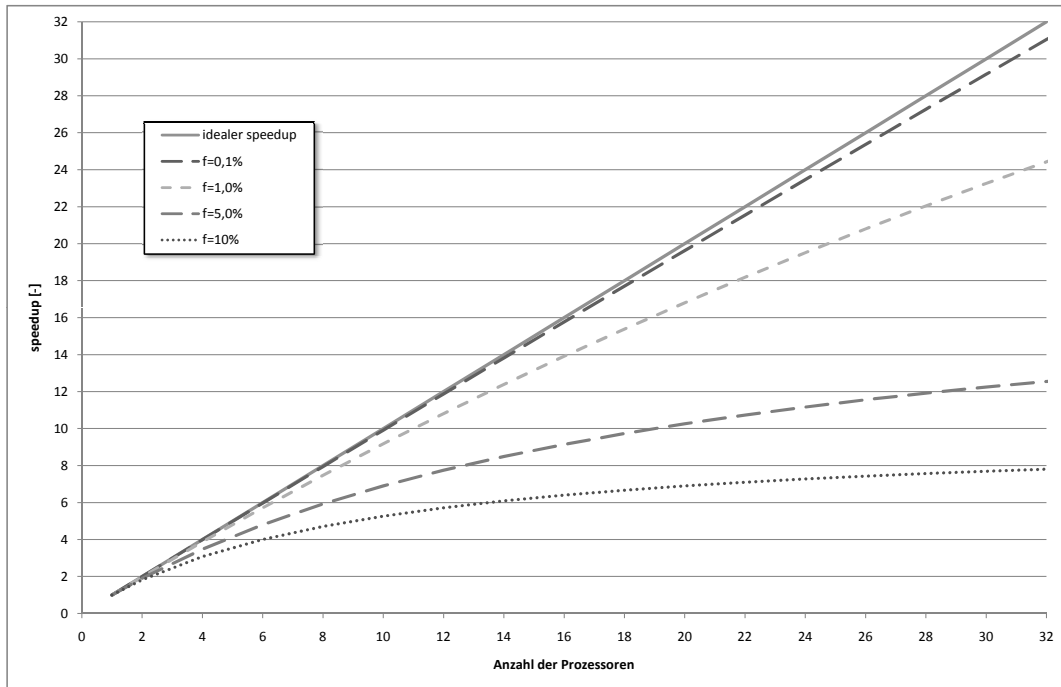


Abbildung 6.33: Amdahlsches Gesetz

speedup mit der Hilfe des *Amdahlschen* Gesetzes

$$S(p, N) = \frac{T(1, N)}{T(p, N)} = \frac{1}{f + \frac{1-f}{p}} \quad (6.119)$$

abgeschätzt werden. In Abbildung 6.33 ist der erreichbare speedup in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren und dem Anteil des sequentiellen Anteils des Programms dargestellt. Eine auf mehrere Prozessoren verteilte Berechnung ist i. A. mit einem zusätzlichen Kommunikationsaufwand verbunden, der den parallelen speedup ebenfalls negativ beeinflusst. Der Kommunikationsaufwand ist dabei i. A. von der Anzahl  $p$  der eingesetzten Prozessoren abhängig. Wird der Anteil der Kommunikation mit  $o(p)$  bezeichnet, so kann Gleichung (6.119) in die Gleichung

$$S(p, N) = \frac{T(1, N)}{T(p, N)} = \frac{1}{f + o(p) + \frac{1-f}{p}} \quad (6.120)$$

überführt werden. Es ist zu beobachten, dass die Beschleunigung bei steigender Anzahl der Prozessoren immer stärker vom sequentiellen Anteil des Algorithmus und der Prozessorkommunikation abhängt. Bei der Festlegung von  $p$  für die parallele Verarbeitung einer Problemstellung ist daher darauf zu achten, dass für jeden Prozessor ein im Verhältnis

zum Kommunikationsaufwand ausreichend großer Anteil am gesamten Problemlösungsaufwand verbleibt. Andernfalls werden zu viele Systemressourcen für die Kommunikation aufgewendet. Neben dem speedup wird daher zur objektiven Bewertung der Güte einer parallelen Software als zusätzliche Kenngröße die Effizienz

$$E(p, N) = \frac{S(p, N)}{p} \quad (6.121)$$

eingeführt. Für eine ökonomisch optimale Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Ressourcen sind möglichst hohe Effizienzgrade anzustreben.

Entsprechend Gleichung (6.120) ist bei gegebenem sequentiellen Programmanteil  $f$  die Problemgröße  $N$  der maßgebende Faktor für die Festlegung der Anzahl der Prozessoren  $p$ , um eine entsprechend Gleichung (6.121) wirtschaftliche Ressourcennutzung zu gewährleisten. Im Rahmen der Implementierung der Fuzzy-Arithmetik kann die relevante Problemgröße einfach abgeschätzt werden. Sie hängt nicht von der zu lösenden Problemstellung, beispielsweise der Anzahl der Freiheitsgrade bei einer numerischen Simulation, ab, sondern wird durch die Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen und durch die Anzahl  $m$  der  $\alpha$ -Niveaus bestimmt. Für den monotonen Modus kann  $N$  mit

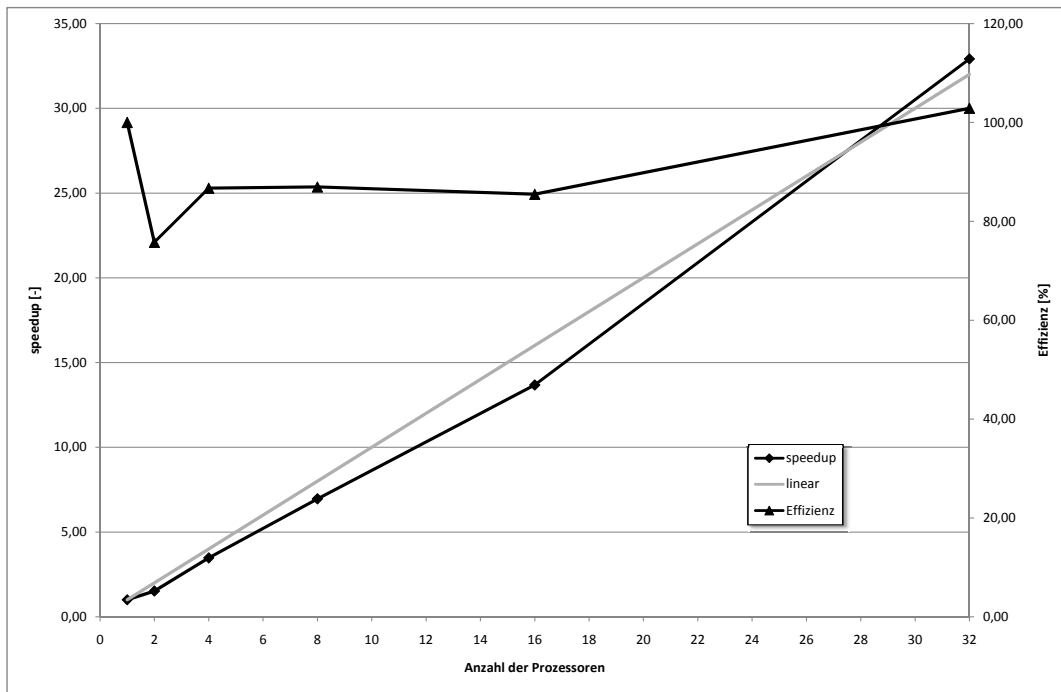
$$N \approx m \cdot 2^n \quad (6.122)$$

abgeschätzt werden. Für den selektiv nicht monotonen Modus ist  $N$  in Abhängigkeit von der Anzahl  $z_i$  der Äste der  $\bar{n}$  nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen mit

$$N \approx m \cdot 2^{n-\bar{n}} \cdot \prod_{i=1}^{\bar{n}} z_i \quad (6.123)$$

zu bestimmen.

Für die Untersuchung des Systemverhaltens der parallelisierten Implementierung des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  der Fuzzy-Größen wurde die bereits diskutierte Verformungsberechnung im monotonen Modus herangezogen. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit einem präkonditionierten Konjugierte-Gradienten-Verfahren. Als Präkonditionierer wurde eine „shifted“ incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) (vgl. Abschnitt 2.3.4) eingesetzt. Die Berechnungen wurden mit 15 Fuzzy-Eingangsgrößen und 50  $\alpha$ -Niveaus durchgeführt. Der zu variierende Parameter ist dabei die Anzahl der Prozessoren. In Abbildung 6.34 sind der parallele speedup (Gleichung (6.118)) und die Effizienz (Gleichung (6.121)) des parallelisierten monotonen Modus in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren dargestellt. Die Darstellung verdeutlicht das hervorragende Systemverhalten der Implementierung. Der



**Abbildung 6.34:** Speedup und Effizienz des parallelisierten monotonen Modus in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren

erreichte speedup liegt nahe dem in grauer Farbe dargestellten linearen speedup. Bis zu  $p = 16$  fällt der speedup mit wachsender Anzahl der Prozessoren entsprechend Gleichung (6.120) ab. Es kann jedoch beobachtet werden, dass die Effizienz einen gleichbleibenden Wert von ca. 90 % aufweist. Bei der parallelen Verarbeitung mit 32 Prozessoren wird sogar ein speedup von 32,91 und eine Effizienz von 102,86 % erreicht. Die Überschreitung der theoretischen Grenzwerte wird als „überlinearer speedup“ (engl.: super linear speedup) bezeichnet. Er kann darauf zurückgeführt werden, dass durch die Verwendung mehrerer Prozessoren auch anderer Systemressourcen in höherem Maße zur Verfügung stehen. Neben dem Arbeitsspeicher eines Computers, in dem Datenobjekte, also Programme und die von diesen in Mikroprozessoren zu verarbeitenden Nutzdaten, abgelegt werden, benutzen moderne Prozessoren eine Hierarchie von Puffer-Speichern (engl.: cache). Diese Speicher können im Vergleich mit dem Arbeitsspeicher nur wenige Daten aufnehmen, weisen jedoch eine deutlich kürzere Zugriffszeit auf. Durch die Erhöhung der Anzahl der Prozessoren wird auch die akkumulierte Größe dieser Speicher erhöht, wodurch mehr Daten mit kürzeren Zugriffszeiten verarbeitet werden können. Dies kann einen überlinearen speedup bewirken.

Die in dieser Arbeit dargestellte Implementierung der Fuzzy-Arithmetik (Abschnitt 6.3) ist ein effektives Verfahren zur Erweiterung von Computer-Algorithmen zur Verarbeitung von Fuzzy-Eingangsgrößen. Im Gegensatz zu den Verfahren mit deterministischer Grundlösung benötigt man zum Einsatz der Fuzzy-Arithmetik Zugriff auf den Quellcode. Das Verfahren ist daher als Ergänzung zu den etablierten Fuzzy-Berechnungsverfahren (vgl. Abschnitt 6.2) insbesondere für die Entwicklung zukünftiger Software bzw. für die Erweiterung bestehenden Quellcodes anzusehen. Der besondere Vorteil der durch den Einsatz direkt fuzzyfizierter Algorithmen erlangt wird, liegt neben dem Vorliegen einer geschlossenen Lösung insbesondere in der dargestellten signifikanten Verringerung der Berechnungsdauern. Dies wird durch die implementierte effiziente Parallelisierung, mit der jeder fuzzyfizierte Algorithmus automatisch auf mehreren Prozessoren gleichzeitig ausgeführt werden kann, vervollständigt.

## Kapitel 7

# Generierung und Validierung von Berechnungsmodellen geschädigter Brückentragwerke

Die quantitative Beschreibung der Lastabtragungsmechanismen eines Tragwerks wird i. A. mit der Hilfe von statischen bzw. dynamischen Modellen durchgeführt. Die Erfassung der wesentlichen Eigenschaften des Systems sowie deren Überführung in ein adäquates Berechnungsmodell sind Kernaufgaben des Ingenieurwesens und erfordern umfangreiche Kenntnisse und Erfahrung. Dies gilt insbesondere für die Modellierung beschädigter Brückentragwerke. Die durch Abstraktion und Idealisierung abgeleiteten Berechnungsmodelle dienen dabei als Analysewerkzeug zur Prognose des Verhaltens der realen Tragwerke. Sie müssen daher zuverlässig und robust die Realität mit einer ausreichenden Genauigkeit approximieren. Dieser Abschnitt behandelt dazu grundlegende Vorgehensweisen mit besonderem Augenmerk auf die Bewertung der Analysemodelle.

In Abschnitt 7.1 wird zunächst die Modellbildung geschädigter Tragwerke skizziert. Dabei steht insbesondere die Berücksichtigung lokaler Schädigungen im Rahmen verschiedener Modellierungsstrategien (1D, 2D, 3D) im Vordergrund. In Abschnitt 7.2 wird anschließend ein Verfahren zur Systemidentifikation von Fuzzy-Tragwerksmodellen durch Rückkopplung der rechnerischen mit den gemessenen Strukturantworten vorgestellt. Auf der Basis dieses Verfahrens wird in Abschnitt 7.3 ein quantitatives Kriterium zur Beurteilung der Prognosegenauigkeit des Berechnungsmodells eingeführt.

## 7.1 Modellbildung

In der Mathematik und in den Naturwissenschaften bezeichnen Modelle „vereinfachende bildl. oder mathematische Darstellungen von Strukturen oder Verlaufsformen“ [11]. Modelle bilden dabei i. d. R. lediglich Ausschnitte der gesamten Realität ab und zeichnen sich durch Abstraktion aus, d. h. durch die Vernachlässigung bestimmter Merkmale und Wechselwirkungen mit der Umgebung. Modellbildung beschreibt nun den Vorgang der Identifikation der maßgebenden Merkmale und Wechselwirkungen sowie deren Zusammenfassung zu einer Beschreibung des Systemverhaltens. Damit eng verbunden ist die Festlegung von Aspekten, die das Modell in der Lage sein soll abzubilden. Im Rahmen der hier dargestellten Analyse geschädigter Brücken bedeutet dies die Erfassung der wesentlichen Lastabtragungsmechanismen des Tragwerks und die Ableitung eines Berechnungsmodells. Dabei werden die vielfältigen und z. T. nur näherungsweise erfassbaren Eigenschaften einer geschädigten Brücke abstrahiert und idealisiert.

Eine Brücke kann zunächst im allgemeinsten Sinne als materiegefüllter Körper im euklidischen Raum aufgefasst werden. Dieser Körper steht i. A. mit anderen Körpern in Interaktion. Er wird erst dann zu einer Brücke, wenn ihm diese Funktion zugeschrieben wird. Damit eng verbunden ist die Festlegung von primären Zielaspekten, die ein Modell in der Lage sein muss, mit einer der Fragestellung adäquaten Genauigkeit zu beschreiben. Bei der Beurteilung der Standsicherheit, Verkehrssicherheit und Dauerhaftigkeit von Brücken sind die Bestimmung von Spannungs- und Verzerrungszuständen des Körpers von besonderem Interesse. Primäre Einflussgrößen des Modells sind die Geometrie, die Abmessungen und die Materialeigenschaften des Körpers und des Baugrunds sowie Einwirkungen auf das Bauwerk (z. B. Verkehrslasten, Wind, Temperatur, ...). Sekundäre Zielaspekte, wie z. B. die zeitabhängige Bewehrungsstahlkorrosion infolge der Karbonatisierung des Betons, beschreiben i. A. Veränderungen der primären Einflussgrößen. Sie können in Submodelle ausgelagert werden und sind nicht Gegenstand der weiteren Betrachtungen.

Die materiegefüllten Teilkörper einer Brücke (Bauteile) erhalten durch ihre Anordnung im Kontext des Tragsystems und bei Betrachtung des Zielaspekts „Standsicherheit“ Funktionen der Lastabtragung. Einwirkungen auf das Bauwerk führen dabei zu Verformungen der Körper. Auf Materialebene werden Zusammenhänge zwischen Spannungen und Verzerrungen mit Hilfe der Kontinuumsmechanik beschrieben. Diese wird in Abhängigkeit von den zugrunde gelegten Materialeigenschaften u. a. in die Teilgebiete Elastizitäts-, Plastizitäts



und Schädigungstheorie (vgl. Abschnitt 2.1) unterteilt. Sie haben zahlreiche Teilmodelle unterschiedlichen Abstraktions- und Idealisierungsgrades hervorgebracht. Die allgemeine Kontinuumsmechanik kann insbesondere im Rahmen der Strukturmechanik zur Schalen- bzw. Balkentheorie vereinfacht werden. Die Schalentheorie dient der Modellierung flächiger Strukturen. Durch vereinfachende Annahmen über die Verzerrungsveränderung in Dickenrichtung können dreidimensionale Strukturen zweidimensional behandelt werden. Mit Hilfe der Balkentheorie können Körper modelliert werden, die in einer Richtung eine signifikant größere Ausdehnung als in den beiden anderen Richtungen aufweisen. Spannungen und Verzerrungen in diesen beiden Richtungen werden vernachlässigt; der Körper wird durch ein eindimensionales Modell beschrieben.

Im Rahmen einer numerischen Analyse mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode können Teilmodelle einer Brücke (Bauteile) als Volumenmodelle (3D), Flächenmodelle (2D) und Stabstrukturen (1D) modelliert werden. Um im Rahmen baupraktischer Problemstellungen verträgliche Zeitspannen für die Durchführung einer Analyse zu erreichen, wird i. A. das mathematisch-mechanische Modell zur Beschreibung einer Substruktur eingesetzt, das bei größtmöglicher Abstraktion und Idealisierung noch ausreichend genaue Aussagen ermöglicht. Beispielsweise werden Widerlager häufig mit Volumen- oder Schalenelementen diskretisiert, während Einzelstützen oder der Überbau mit Stäben abgebildet werden. Eine praxistaugliche Modellierungsstrategie zur Abbildung geschädigter (Teil-)Strukturen muss daher auch bei hybriden Berechnungsmodellen, d. h. unabhängig von den eingesetzten Strukturelementen, anwendbar sein.

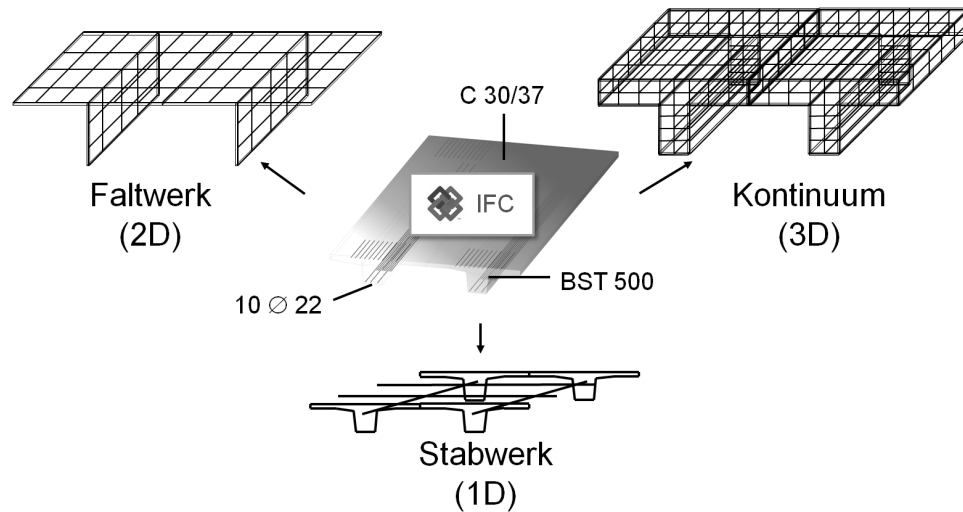
Schäden sind keine singulären Merkmale, sondern sie besitzen wie die Bauteile eine räumliche Ausdehnung. In dieser Arbeit wird daher ein objektorientierter Modellierungsansatz auf der Ebene der materiegefüllten Körper einer Struktur (Brücke) vorgeschlagen. Bauteile werden als Objekte mit Eigenschaften und Verbindungen (Interaktionen) mit anderen Objekten des Modells aufgefasst. Wesentliche Eigenschaften der Objekte sind die geometrische Lage und Ausdehnung im euklidischen Raum sowie die Eigenschaften des Materials, mit dem der Raum gefüllt ist. Schäden können in diesem Konzept einfach als weitere Eigenschaft in das Modell integriert werden. Sie weisen ebenfalls eine geometrische Ausdehnung auf und modifizieren lokal die Materialeigenschaften eines Objekts. Die Modifikation der Materialeigenschaften kann beispielsweise mit Hilfe der isotropen Schädigungsvariable  $d$  (vgl. Abschnitt 2.1) beschrieben werden oder durch explizite Angabe der Materialeigenschaften im Bereich der Schädigung erfolgen. Dieser objektorientierte Model-

lierungsansatz ist in ein Computer-Datenmodell zu überführen. Das Datenmodell hat die Aufgabe, die während einer Bauwerksprüfung gewonnenen Daten zusammenzuführen und für weiterführende Analysen bereitzustellen. Die Daten können, wie in den Abschnitten 4 und 5 dargestellt, aus einer großen Zahl unterschiedlicher Quellen stammen. Sie können beispielsweise durch direkte Messungen am Bauwerk, durch Schädigungssimulationen, mit der Hilfe von Expertensystemen oder durch Prognosemodelle gewonnen werden. Analog dazu existieren zahlreiche Analysewerkzeuge zur Beurteilung der Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“, die problembezogen eingesetzt werden können. Das Datenmodell muss daher nicht nur in der Lage sein, den Erkenntnisstand konsistent abbilden zu können, sondern darüber hinaus ist eine flexible Schnittstellenkonfiguration zur Kommunikation mit den möglichen Analysewerkzeugen zu fordern.

Ein Datenmodell, das diese Spezifikationen erfüllt, sind die „Industry Foundation Classes“ (IFC) [4]. Im Rahmen dieses ISO-zertifizierten Datenmodells werden alle am Bauwerk existierenden Bauteile als Objekte definiert und in Programmen, die diesen Standard unterstützen, auch wieder als solche interpretiert. Die Etablierung dieses Datenmodells als Industriestandard wird mit dem Ziel einer durchgängigen Datennutzung für integrierte Prozesse unter Verwendung moderner IT-Lösungen verfolgt. Das Datenmodell dient dabei als standardisierte Schnittstelle zur Aggregation und zum Austausch von Informationen zwischen den Projektbeteiligten. Die Vertreter unterschiedlicher Disziplinen (z. B. Bauingenieure, Architekten, ...) können für ihre Arbeit benötigte Informationen aus dem Gesamtmodell extrahieren und die Ergebnisse ihrer Analysen wieder in das Modell einfügen.

Zur Durchführung der Analysen ist es i. A. notwendig, die Modellinformationen aufzubereiten. Beispielsweise sind für Untersuchungen des Tragverhaltens mechanische Modelle aus den Modellinformationen abzuleiten. Hierfür wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Algorithmus zur Automatisierung dieses Modellierungsprozesses entsprechend den einzusetzenden Strukturelementen (1D, 2D, 3D) entwickelt. Der Algorithmus transformiert die dreidimensionalen materiegefüllten Körper in ein System von Strukturelementen mit den entsprechenden mechanisch-mathematischen Berechnungsparametern (Abbildung 7.1). Das nachfolgend beschriebene Vorgehen wird auf die einzelnen materiegefüllten Körper (Bauteile) angewendet und ist daher auch für hybride Modelle geeignet.

Bei der Verwendung von dreidimensionalen Strukturelementen (Volumenelemente) wird der Körper des Bauteils in eine endliche Anzahl von Teilräumen, den finiten Elementen,

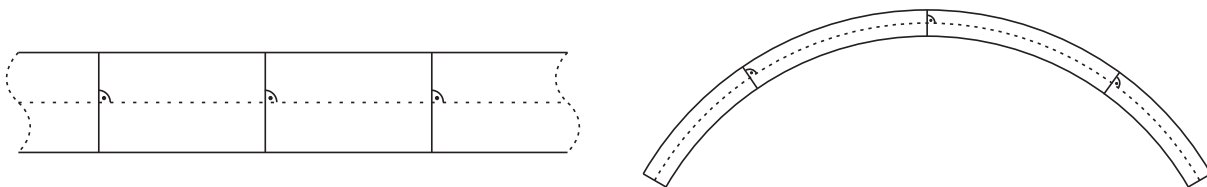


**Abbildung 7.1:** Brückenmodellierung, Transformation des Datenmodells (IFC) in numerisches Simulationsmodell

unterteilt. Die Durchführung dieser Unterteilung (Vernetzung) ist mit modernen Computern unproblematisch und stellt den Stand der Technik dar. Es steht eine große Anzahl von Algorithmen zur Vernetzung beliebiger Kubaturen mit finiten Elementen zur Verfügung. Den finiten Elementen sind die Eigenschaften, des durch sie umschlossenen Raumes des Körpers zuzuweisen. Dabei wird i. d. R. eine Homogenisierung der im Raum veränderlichen Materialeigenschaften durchgeführt. Der dabei auftretende Informationsverlust kann durch eine Beschreibung der Berechnungsparameter als Fuzzy-Größen reduziert werden. Das grundsätzliche Vorgehen zur Zusammenfassung von Eigenschaften des Kontinuums zu endlichen repräsentativen Volumenelementen ist ausführlich in Abschnitt 4.3 dargestellt. Die beschriebene Strategie zur Kondensation scharfer Berechnungsparameter bei der Vergrößerung von Netzen kann einfach zur Durchführung der Homogenisierung erweitert werden. Es ist dafür lediglich in Gleichung (4.30) die diskrete Summenbildung durch Integration über das Volumen des finiten Elements zu ersetzen. Werden die Materialeigenschaften des Körpers und insbesondere die Schädigung hingegen mit Fuzzy-Größen beschrieben, so ist die Homogenisierung einfach mit den bekannten Methoden scharfer Tragwerksanalysen durchführbar. Mit Hilfe der in Abschnitt 6 dargestellten Fuzzy-Arithmetik, können die Fuzzy-Berechnungsparameter beispielsweise durch Mittelwertbildung über dem Volumen des Elements bestimmt werden.

Durch den Einsatz von 1D bzw. 2D Strukturelementen kann die benötigte Zeit für eine

numerische Simulation, verglichen mit einer Diskretisierung mit Volumenelementen, signifikant verringert werden. Durch die oben beschriebene Idealisierung der mechanischen Eigenschaften eines Körpers wird die Komplexität des numerischen Modells verringert. Dabei wird angestrebt, den Übergang von dreidimensionalen materiegefüllten Körpern zu ein- bzw. zweidimensionalen mechanischen Teilmodellen weitestgehend automatisiert durchzuführen. Dies muss für beliebige geometrische Formen der Körper erfolgen und es sind bei dieser Idealisierung die Einflüsse infolge der (unscharfen) Beschreibung der Schädigung zu berücksichtigen. Das entwickelte Verfahren wird am Beispiel der Idealisierung mit Stabelementen dargestellt. Das Vorgehen ist generell auch für zweidimensionale Strukturelemente einsetzbar. Bei einer Modellierung mit eindimensionalen Stabelementen wird der materiegefüllte Körper der Bauteile auf die eindimensionale Stabachse und repräsentative mechanische Kenngrößen ( $\widetilde{EI}$ ,  $\widetilde{EA}$ ,  $\widetilde{GI}_T$ ,  $\widetilde{GA}'$ ) abstrahiert. Die Achse eines Stabes ist diejenige Linie, „welche die Schwerpunkte aller senkrecht zu ihr gedachten ebenen Schnitte (Querschnitte) durch den Stab enthält.“ [102] Sie ist zumeist implizit durch die Definition eines Stabes als ein Körper, „welcher von einer ebenen Figur, dem Querschnitt, so beschrieben wird, daß der Schwerpunkt der Figur eine Linie, die Stabachse, beschreibt, zu welcher die Figur stets senkrecht bleibt“ [103], gegeben. Für einfache durch Parallelverschiebung eines Querschnitts (Extrusion) bzw. durch Verschiebung entlang einer beliebigen räumlichen Kurve (Sweep-Verfahren) erzeugten Körpern kann die Stabachse aus den beiden Definitionen einfach und intuitiv abgeleitet werden (vgl. Abbildung 7.2). Für beliebige Körper, die weder durch eine Extrusion noch durch ein Sweep-Verfahren



**Abbildung 7.2:** Stab, Stabachse, links Extrusionskörper (gerader Stab), rechts Sweep-Körper (Bogen)

konstruiert wurden, kann die Stabachse mittels der Definitionen nicht direkt abgeleitet werden. Derartige Körper können beispielsweise lokale Veränderungen aufweisen, wie sie insbesondere bei der Modellierung von geschädigten Tragwerksteilen auftreten können (vgl. Abbildung 7.6).

Gegenstand der nachfolgenden Darstellungen ist daher ein im Rahmen dieser Arbeit neu

entwickelter allgemeingültiger Algorithmus zur Bestimmung der Stabachse von Körpern mit beliebiger geometrischer Form. Die Körper deren Stabachse bestimmt werden soll können aus einer beliebigen Anzahl von Teilkörpern mit jeweils individuellen Materialeigenschaften bestehen. Dadurch ist die Berücksichtigung arbiträrer Materialverteilungen im Gesamtkörper, wie sie beispielsweise infolge von lokalen Schäden oder im Verbundbau auftreten können, möglich.

Der universell einsetzbare Algorithmus umfasst drei Phasen: Initialisierung, Bestimmung der maßgebenden Querschnitte sowie deren Schwerpunkte und die Interpolation der Schwerpunkte zur Stabachse.

In der Initialisierungsphase wird der Körper dessen Stabachse bestimmt werden soll analysiert und der Startpunkt des Algorithmus ermittelt. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Körper mittels der „Boundary Representation (BRep)“, d. h. durch seine begrenzenden Oberflächen beschrieben wird. Aufgrund dieser allgemeinen Darstellungsform können kaum Informationen über die Form des Körpers abgeleitet werden. Als Startpunkt für den Algorithmus wurde daher ein beliebiger Punkt im Inneren des Körpers gewählt. Für prismatische und ähnliche Körper ist ihr Schwerpunkt ein einfach zu ermittelnder Ausgangspunkt der Berechnung.

Der so bestimmte Ausgangspunkt ist für beliebige Körper i. A. kein Punkt der Stabachse. Es wird daher im ersten Schritt der zweiten Phase in seiner Umgebung der erste Lösungspunkt gesucht. Gemäß obiger Definition der Stabachse ist dieser ein Querschnittschwerpunkt. Die Bestimmung des maßgebenden Querschnitts erfolgt dabei mit Hilfe einer Analogiebetrachtung bzgl. der Hauptachsentransformation der Bezugsachsen eines ebenen Querschnitts. Die Trägheitsmomente nehmen im Hauptachsensystem Extremwerte an. D. h. die Ableitungen der Funktionen der Trägheitsmomente in Abhängigkeit vom Drehwinkel müssen den Wert Null annehmen. Jede Lösung der Gleichung

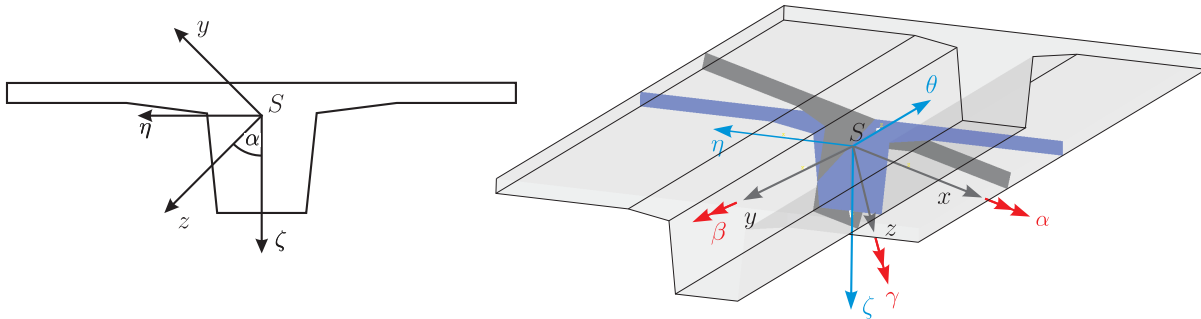
$$\frac{dI_\eta(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dI_\zeta(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \alpha_0 \pm n \cdot \frac{\pi}{2}; \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (7.1)$$

ist ein möglicher Drehwinkel. Das Hauptachsensystem wird erhalten, indem das Schwerpunktskoordinatensystem um den Winkel  $\alpha$  gedreht wird (vgl. Abbildung 7.3 links).

Im räumlichen Fall sind, ausgehend von einem beliebigen lokalen Koordinatensystem, dessen Ursprung der Startpunkt ist, zwei Winkel zu bestimmen, um die das Koordinatensystem gedreht werden muss. Die Bestimmung der Winkel erfolgt analog zu dem oben beschriebenen Vorgehen in der Ebene. Als maßgebende Bedingung zur Festlegung der räumlichen Lage der Schnittebene wurde zur Reduktion des Berechnungsaufwands jedoch

die Minimierung der ideellen Querschnittsfläche des durch den Schnitt der Ebene mit dem Körper erhaltenen Querschnitts zu Grunde gelegt (vgl. Abbildung 7.3 rechts):

$$\frac{\partial A(\beta, \gamma)}{\partial \beta \partial \gamma} = 0 \Leftrightarrow \beta = \beta_0 \pm n \cdot \frac{\pi}{2} \wedge \gamma = \gamma_0 \pm n \cdot \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{N}_0. \quad (7.2)$$

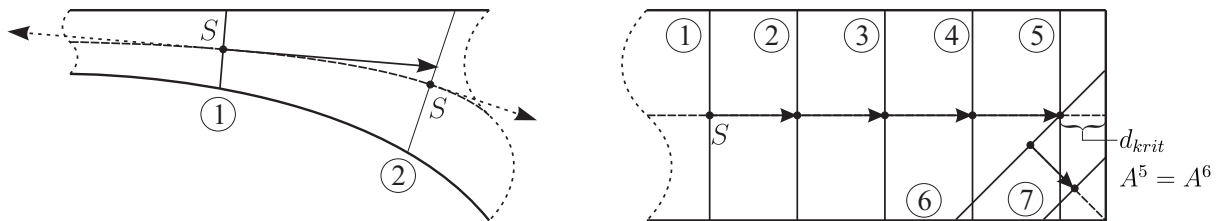


**Abbildung 7.3:** Bestimmung des Hauptachsensystems am Querschnitt (links) und räumlich (rechts)

Da  $A(\beta, \gamma)$  und insbesondere die partiellen Ableitungen nach den Winkeln  $\beta$  und  $\gamma$  i. A. nicht bekannt sind, sind die gesuchten Winkel  $\beta_0$  und  $\gamma_0$  iterativ zu bestimmen. Zum Einsatz kommt ein Suchalgorithmus, der durch sukzessive Auswertung der Funktion  $A(\beta, \gamma)$  für diskrete Werte von  $\beta$  und  $\gamma$  zuverlässig die Koordinaten des nächstgelegenen lokalen Minimums der Funktion findet. Der Algorithmus wird detailliert in Abschnitt 7.2 beschrieben. Die gefundenen Koordinaten des lokalen Minimums von  $A(\beta, \gamma)$  sind die gesuchten Drehwinkel  $\beta_0$  und  $\gamma_0$ , um die das Koordinatensystem gedreht werden muss. Durch den Schnitt der so erhaltenen Ebene mit dem Körper wird dann ein Querschnitt erhalten. Der Schwerpunkt des erhaltenen Querschnitts ist der gesuchte Lösungspunkt und eine Stützstelle der gesuchten Stabachse. Von dem Querschnittsschwerpunkt ausgehend wird in Richtung der Flächennormalen mit vorgegebener Schrittweite ein neuer Punkt bestimmt (vgl. Abbildung 7.4 links). Die Flächennormale ist im Schwerpunkt  $S$  tangential zur Stabachse. Sie wird später für die Interpolation der Stützstellen verwendet. Mit diesem neuen Ausgangspunkt beginnt der Zyklus erneut, bis die begrenzende Oberfläche des Körpers erreicht wird. Der zu Beginn des Zyklus ermittelte Querschnitt teilt den Körper in zwei disjunkte Gebiete. Daher ist für eine vollständige Bestimmung der Stützstellen der Stabachse der Zyklus für die zweite Körperhälfte, entgegen der Flächennormalen, zu

wiederholen.

Mit dem dargestellten Vorgehen werden bei stabförmigen Körpern ( $l \gg b, h$ ) sukzessive diskrete Stützstellen der Stabachse ermittelt. Wie in Abbildung 7.2 dargestellt durchdringt sie die begrenzende Oberfläche des Körpers. Die Flächen, die die Durchstoßpunkte enthalten werden im Weiteren als Endquerschnitte bezeichnet. Im Bereich dieser Endquerschnitte verliert die technische Biegetheorie ihre Gültigkeit (Prinzip von *Saint-Venant*) und auch der vorgeschlagene Algorithmus ermittelt falsche Lösungspunkte. Bei einem kritischen Abstand  $d_{krit}$  vom Endquerschnitt existieren benachbarte Querschnitte mit identischer Fläche. Der Abstand  $d_{krit}$  ist von der Bauteilgeometrie abhängig. An diesem Punkt weist die ermittelte Stabachse eine Unstetigkeitsstelle auf. Die fortgesetzte konsequente Suche nach dem Querschnitt mit der minimalen Fläche führt auf eine Stabachse, die beispielsweise bei einem geraden Stab mit quadratischem Querschnitt in einem der Eckpunkte mündet (vgl. Abbildung 7.4 rechts). Eine Korrektur des Vorgehens in den „Endbereichen“ des Körpers ist notwendig. Dazu müssen diese Bereiche zunächst identifiziert werden. Die



**Abbildung 7.4:** Bestimmung der Stabachse (links); Lösungsverhalten im Randbereich (rechts)

Körper der Bauteile eines Brückenmodells werden üblicherweise mit Hilfe der „Boundary Representation (BRep)“ dargestellt. Dabei wird der Körper durch seine Berandung im dreidimensionalen Raum festgelegt. Die Endquerschnitte sind Teile dieser Berandung. Es stehen jedoch keine Informationen für ihre direkte Identifikation zur Verfügung. Darüber hinaus ist die Festlegung eines ausreichend großen Abstandes von diesen Endquerschnitten von den Abmessungen des Bauteils in den beiden sekundären Richtungen abhängig und daher nicht a priori festlegbar. Deshalb wurde ein Verfahren zur Identifikation der kritischen Endbereiche implementiert, das als Eingangsgrößen lediglich die bei der Suche des maßgebenden Querschnitts (siehe oben) ohnehin anfallenden Flächenmaße benötigt. Dazu wird die unbekannte Funktion der Fläche  $A(\beta, \gamma)$  betrachtet. Für unendlich lange prismatische Körper mit beliebigem, jedoch in Längsrichtung gleichbleibendem, Querschnitt

kann die Fläche  $A(\beta, \gamma)$  mit

$$A(\beta, \gamma) = \left| \frac{\hat{A}}{\cos(\beta) \cos(\gamma)} \right| \text{ mit } \hat{A} = A(0, 0) = A_{min} \quad (7.3)$$

angegeben werden. Wird Gleichung (7.3) in das lokale Koordinatensystem, mit dem in jedem Zyklus die Suche nach dem maßgebenden Querschnitt gestartet wird, transformiert und werden zusätzlich die ideellen Flächen durch ihre Inversen ersetzt, so wird die Ausgangsgleichung des Verfahrens erhalten:

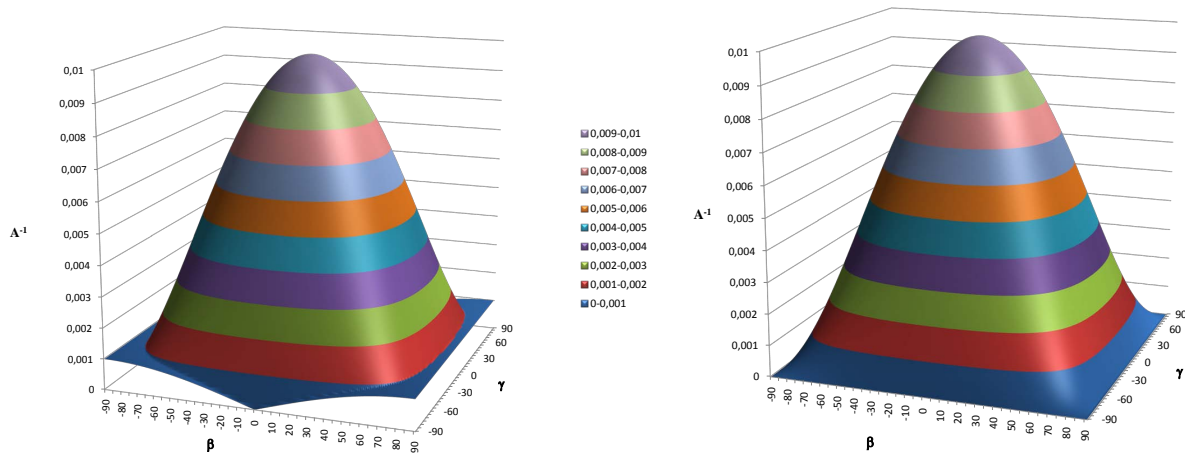
$$A^{-1}(A_{min}^{-1}, \beta_0, \gamma_0, \beta, \gamma) = A_{min}^{-1} \cos(\beta_0 - \beta) \cos(\gamma_0 - \gamma) \quad (7.4)$$

mit  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta_0 - \beta, \gamma_0 - \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ .

In Abbildung 7.5 ist der durch Gleichung (7.4) gegebene idealisierte Funktionsgraph ( $\beta_0 = 0, \gamma_0 = 0$ ) der gemessenen inversen ideellen Querschnittsfläche eines Quaders ( $l : b : h = 1000 : 100 : 1$ ) gegenübergestellt. Mit Ausnahme der Randbereiche zeigen die beiden Graphen einen identischen Verlauf. Die Randbereiche sind dadurch gekennzeichnet, dass der Querschnitt, dessen Fläche ermittelt wird, eine der Stirnseiten des Quaders schneidet. Genau derartige Querschnitte dürfen jedoch nicht für die Bestimmung der Stützstellen der Stabachse herangezogen werden. Aus dieser Überlegung lässt sich das Kriterium zur Identifikation der kritischen Endbereiche eines Körpers ableiten. Ein Startpunkt bzw. der Ursprung eines lokalen Koordinatensystems wird demnach als im kritischen Randbereich liegend identifiziert, falls die Summe der Fehlerquadrate zwischen den „gemessenen“ und den mit Gleichung (7.4) bestimmten inversen Flächen einen vorgegebenen Toleranzwert übersteigt.

Die Eingangsgrößen in Gleichung (7.4), die inverse minimale Fläche  $A_{min}^{-1}$  und die Winkel  $\beta_0$  bzw.  $\gamma_0$  sind dabei aus dem oben beschriebenen Suchalgorithmus näherungsweise bekannt. Wegen der zur Beschleunigung des Verfahrens verwendeten geringen Genauigkeit bei der Suche nach dem Querschnitt mit der minimalen Fläche können sie jedoch signifikante Abweichungen zu den tatsächlichen Werten aufweisen. Daher können sie nicht direkt mit Gleichung (7.4) zur Festlegung der Referenzfunktion verwendet werden. Der Parametervektor  $\underline{a} = (A_{min}^{-1}; \beta_0; \gamma_0)$  wird daher auf der Basis der im Verlauf der Durchführung des Suchalgorithmus bestimmten inversen Flächen  $\underline{y} = (A^{-1}(\beta_1, \gamma_1); \dots; A^{-1}(\beta_m, \gamma_m))$  mit der Hilfe einer nichtlinearen Regression [129] ermittelt. Werden die Koordinaten, an welchen die Flächen bestimmt wurden, zu einer  $m \times 2$  Matrix  $\underline{X}$  zusammengefasst, so kann die





**Abbildung 7.5:** Inverse Fläche; links Quader ( $l : b : h = 1000 : 100 : 1$ ), rechts Quader ( $l : b : h = \infty : 100 : 1$ )

Bestimmungsgleichung von  $\underline{a}$  mit

$$g(\underline{a}) = f(\underline{a}, \underline{X}) - \underline{y} \quad (7.5)$$

formuliert werden:

$$S(\underline{a}) = \|g(\underline{a})\|_2^2 = \sum_{i=1}^m g_i^2(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow Min. \quad (7.6)$$

Die Bestimmung des Parametervektors  $\underline{a}$  wird durch Linearisierung von  $g(\underline{a})$  in Gleichung (7.6) in ein iteratives Verfahren überführt. Wird die *Taylor*-Entwicklung von  $g(\underline{a})$  im Startpunkt  $\underline{a}^0$  nach dem linearen Glied abgebrochen, so wird statt Gleichung (7.6) das Optimierungsproblem

$$\sum_{i=1}^m \left( g_i(\underline{a}^{(0)}) + \left( \frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right) \cdot (\underline{a}^{(1)} - \underline{a}^{(0)}) \right)^2 \Rightarrow Min. \quad (7.7)$$

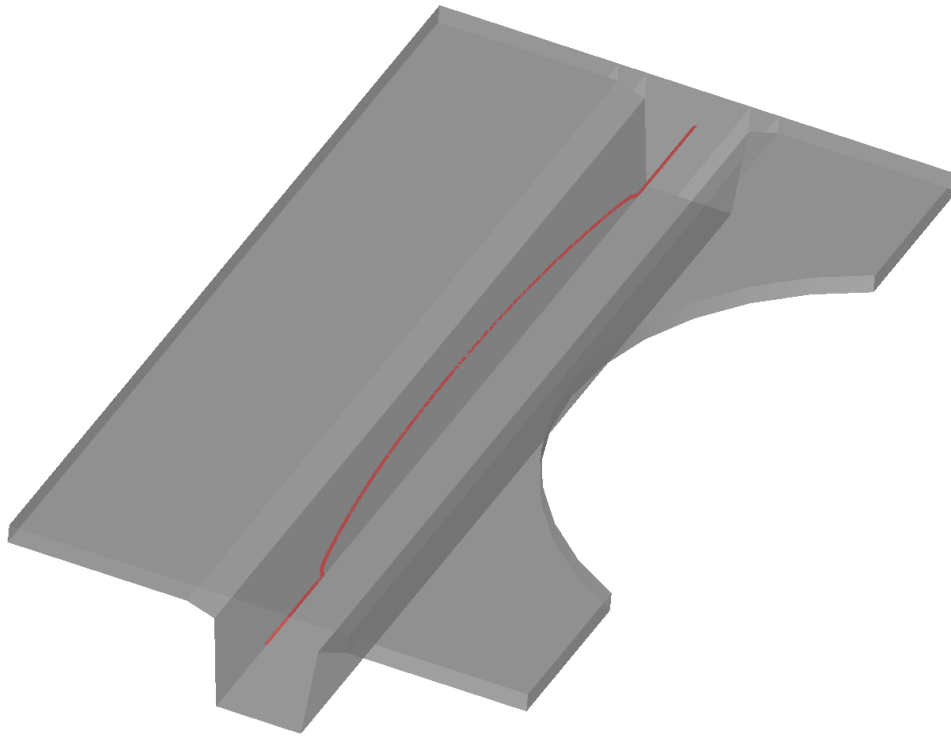
erhalten. Der Startvektor  $\underline{a}^0$  ist das Ergebnis des Suchalgorithmus. Dadurch ist gewährleistet, dass er in der Nähe der Lösung des Optimierungsproblems liegt und das so die Konvergenz des iterativen Lösungsverfahrens sichergestellt ist. Dieses kann aus Gleichung (7.7) zu

$$\begin{aligned} \underline{a}^{t+1} &= \underline{a}^t - \Delta \underline{a}^t & (7.8) \\ \text{mit } \Delta \underline{a}^t &= (G_t^T G_t)^{-1} G_t^T g(\underline{a}^t) \\ \text{und } G_t &= \left( \frac{\partial g_i}{\partial \underline{a}_k^t} \right) \end{aligned}$$

abgeleitet werden.

Mit Hilfe des ermittelten Parametervektors  $\underline{a}$  ist es nun möglich, das Maß der Übereinstimmung von Gleichung 7.4 mit den tatsächlich ermittelten inversen Flächen zu bestimmen. Liegt das akkumulierte Fehlerquadrat der Abweichungen unterhalb eines vorgegeben Grenzwertes, so liegt der gefundene maßgebende Querschnitt außerhalb der kritischen Randbereiche und sein Schwerpunkt kann als Stützstelle der Stabachse genutzt werden. Liegt der Querschnitt innerhalb einem der kritischen Randbereiche, so wird das Ergebnis des Suchalgorithmus verworfen. Statt dessen wird vom letzten gültigen Querschnitt ausgehend die nahegelegene Stirnfläche identifiziert. Diese muss sich in dem durch den Normalenvektor des Querschnitts aufgespannten Halbraum befinden. Kommen dabei mehrere Flächen in Frage, so wird diejenige ausgewählt, deren Flächennormale den geringsten Winkel mit dem Normalenvektor des Querschnitts einschließt. Schließlich werden die Schwerpunkte des Querschnitts und der identifizierten Stirnfläche durch eine äquidistant unterteilte Gerade verbunden. Der Normalenvektor im Schwerpunkt der Stirnfläche spannt eine Ebene auf, die sukzessive in die ermittelten Teilpunkte verschoben wird. Durch den Schnitt dieser Ebenen mit dem Körper werden Querschnitte erhalten, deren ideale Schwerpunkte als Stützstellen der Stabachse im Randbereich interpretiert werden. Auf eine Bestimmung des Normalenvektors wird im Randbereich jedoch verzichtet.

Die berechneten Schwerpunkte werden anschließend durch einen B-Spline approximiert. Der B-Spline wird durch die Stützstellen (Schwerpunkte) und durch die Flächennormalen der Schnittebenen bestimmt. Dadurch kann die Anzahl der nötigen Schnitte für eine ausreichend genaue Approximation der Stabachse minimiert werden. Abbildung 7.6 zeigt die Darstellung der Stabachse in einem geometrisch geschädigten Körper. Wie in der Abbildung zu sehen ist, ermöglicht der dargestellte Algorithmus eine Berücksichtigung des Einflusses lokaler Querschnittsänderungen, z. B. infolge von lokalen Schäden, bei der Ableitung der Stabachse für beliebige prismatische Körper. Dies ist eine notwendige Voraussetzung für die Durchführung einer Simulation geschädigter Brückentragwerke mit Hilfe der Stabwerkstheorie.



**Abbildung 7.6:** Brücke, numerische Berechnung, Darstellung der Stabachse in einem geometrisch geschädigten Körper

## 7.2 Modellkalibrierung

In Abhängigkeit von der eingesetzten Modellierungsstrategie (vgl. Abschnitt 7.1) werden die Eigenschaften eines zu untersuchenden Brückentragwerks durch spezifische Modellgrößen und Berechnungsparameter beschrieben. Diese werden idealerweise aus messbaren Bauwerkseigenschaften abgeleitet (vgl. Abschnitt 4.2). Eine direkte Messung relevanter Merkmale kann jedoch nicht immer durchgeführt werden (z. B. Einspanngrad des Überbaus am Widerlager). In diesen Fällen kann die Nutzung der in der Strukturantwort enthaltenen Informationen ergänzend als Datenquelle zur Generierung des Simulationsmodells herangezogen werden. Durch Rückkopplung des Verhaltens des Rechenmodells mit dem der realen Struktur können Modellparameter „kalibriert“ werden.

Im Rahmen einer Modellkalibrierung werden ausgewählte Modellgrößen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mit dem Ziel bestimmt, dass prognostizierte und gemessene Strukturantworten  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  möglichst genau übereinstimmen. Wird das Berechnungsmodell in der Notation von Abschnitt 6 durch den Operator  $f$  (Gleichung (6.1)) repräsentiert, so kann die „Rückrech-

nung“ von den Messwerten zu den Modellgrößen formal durch

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (7.9)$$

dargestellt werden. Eine analytische Bestimmung der Umkehrfunktion gelingt jedoch nur in Ausnahmefällen. Viele baupraktisch relevante Abbildungsvorschriften (z. B. Eigenwertermittlung) sind nicht in geschlossener Form, sondern lediglich als Algorithmus gegeben und entziehen sich daher einer Formulierung gemäß Gleichung (7.9). Werden darüber hinaus Fuzzy-Modellgrößen  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  und Fuzzy-Strukturantworten  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m)$  betrachtet, so dürfen auch die Umkehrfunktionen invertierbarer Abbildungsvorschriften nicht mehr direkt zur Bestimmung der Modellgrößen herangezogen werden. Der Grund hierfür ist in dem Erweiterungsprinzip (Gleichung (6.6)) zu finden. Die Fuzzy-Eingangsgrößen  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  von  $\tilde{f}$  sind definitionsgemäß unabhängig voneinander. Die Fuzzy-Ergebnisgrößen  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m)$  werden durch die Abbildungsvorschrift  $\tilde{f}$  und die Fuzzy-Eingangsgrößen bestimmt. Jedes  $\tilde{y}_i$  ist von mindestens einer Eingangsgröße abhängig und daher sind die Ergebnisgrößen i. A. partiell identisch; d. h. es besteht Interaktion. Wird die unscharfe Modellkalibrierung nun mit der Umkehrfunktion  $\tilde{f}^{-1}$  durchgeführt, so werden die Fuzzy-Strukturantworten  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m)$  als Fuzzy-Eingangsgrößen in  $\tilde{f}^{-1}$  interpretiert. Entsprechend Gleichung (6.6) werden sie als unabhängige Entitäten behandelt. Dies widerspricht jedoch der dargestellten partiellen Identität der Größen. Diese Diskrepanz führt zu einer Überschätzung der Unschärfe der Fuzzy-Ergebnisgrößen (Modellparameter) und daher zu unbrauchbaren Ergebnissen.

Die in dieser Arbeit neu entwickelte Fuzzy-Modellkalibrierung basiert daher auf einem iterativen Vorgehen, das lediglich die zur Verfügung stehende Modellgleichung  $\tilde{f}$

$$(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m) = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \quad (7.10)$$

nutzt. Der Algorithmus kann sowohl analytische Abbildungsvorschriften als auch algorithmische Darstellungsformen verarbeiten. Darüber hinaus ermöglicht die Problemformulierung gemäß Gleichung (7.10) eine einfache Zusammenfassung mehrerer unterschiedlicher Modellgleichungen zur Bestimmungsgleichung  $\tilde{f}$  der Kalibrierung. So können Strukturantworten, die mit unterschiedlichen Berechnungsmodellen ermittelt werden (z. B. Spannungen, Eigenwerte, Verformungen), gleichzeitig zur Bestimmung der „optimalen“ Fuzzy-Modellgrößen genutzt werden.

Der im Folgenden dargestellte neu entwickelte Algorithmus zur Durchführung einer

Fuzzy-Modellkalibrierung nutzt den Informationsgehalt der mit dem „monotonen Modus“ (vgl. Abschnitt 6) ermittelten theoretischen Fuzzy-Strukturantworten, um die Fuzzy-Eingangsgroßen (Modellgrößen) sukzessive zu verbessern. Die Kenntnis der partiellen Ableitungen der Antwortgrößen nach den Modellparametern (Sensitivität), ist im Gegensatz zu bekannten Kalibrierungsverfahren [70] auf Basis einer *Taylor*-Reihenentwicklung nicht nötig. In jedem Iterationszyklus werden getrennt für jedes  $\alpha_k$ -Niveau die Grenzen des scharfen kartesischen Produkts der scharfen  $\alpha_k$ -Niveaus der Eingangsgroßen neu bestimmt. Bei der Ermittlung des neuen kartesischen Produkts wird der quadrierte relative Abstand der Äste der rechnerischen von den gemessenen Strukturantworten minimiert. Diese Optimierung wird solange wiederholt, bis die relative Veränderung der neu bestimmten Fuzzy-Eingangsgroßen gegenüber dem vorherigen Iterationsschritt einen vorgegebenen Toleranzwert unterschreitet. Jeder Iterationszyklus des Algorithmus gliedert sich im Wesentlichen in drei Stufen:

- Berechnung der Strukturantworten,
- Bestimmung der Zielfunktion und
- Minimierung des Fehlers.

In der ersten Stufe werden mit den zur Verfügung stehenden Modellgleichungen die theoretischen Fuzzy-Strukturantworten ermittelt. Als Fuzzy-Eingangsgroßen werden jeweils die Ergebnisse der Optimierung des vorangegangenen Zyklus verwendet. Im ersten Zyklus sind die Modellgrößen abzuschätzen. Dabei ist auf eine möglichst realistische Festlegung zu achten, da sie das Konvergenzverhalten des Algorithmus signifikant beeinflussen kann. Nach der Auswertung aller Berechnungsmodelle werden die rechnerischen Strukturantworten (z. B. Spannungen, Eigenwerte, Verformungen) in einem Vektor zusammengefasst. Es ist darauf zu achten, dass alle eingesetzten Berechnungsmodelle bzgl. aller Fuzzy-Eingangsgroßen ein monotonen Verhalten aufweisen. Die Abbildung der Fuzzy-Eingangsgroßen auf die Fuzzy-Ergebnisgrößen sind ausschließlich mit dem „monotonen Modus“ (vgl. Abschnitt 6) durchzuführen.

Die zweite und dritte Stufe werden in einer Schleife über die  $\alpha$ -Niveaus der Fuzzy-Eingangsgroßen wiederholt. Die folgenden Betrachtungen gelten daher für ein beliebiges  $\alpha_k$ -Niveau. Mit Hilfe der Berechnungsmodelle werden auf diesem Niveau Punkte aus dem Raum der Eingangsgroßen auf die Ergebnisgrößen (Strukturantworten) abgebildet. Für

die weiteren Überlegungen ist es hilfreich, diese Abbildung als System von Abbildungen

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \dots &= \dots \\
 y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

zu formulieren. Jede theoretische Strukturantwort wird durch eine Abbildungsvorschrift  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bestimmt. Die Abbildungsvorschriften sind i. A. jedoch nicht bekannt und liegen zudem i. d. R. nicht in geschlossener Form sondern als Algorithmus vor. Wie in Abschnitt 6 bereits ausführlich erläutert, liegen die Fuzzy-Ergebnisgrößen  $\tilde{y}_i$  nach der Auswertung einer Sequenz arithmetischer Operationen  $\tilde{f}_i$  in einer berechnungsoptimierten Form vor. In dieser Form bestehen die Fuzzy-Größen aus einem Vektor mit Identifikationsnummern und einem Vektor mit Funktionswerten an den Stützstellen der Äste  $LR_j$ . Die Einträge des ersten Vektors referenzieren die Fuzzy-Eingangsgrößen, von denen die Fuzzy-Ergebnisgröße abhängt. Die Funktionswerte geben in Verbindung mit den korrespondierenden Zugehörigkeitswerten der Stützstellen die Lösungen des Algorithmus in den Ecken der diskreten  $\alpha_k$ -Niveaus an. Darüber hinaus sind durch den Vektor mit Identifikationsnummern und der Ordnungsrelation (Gleichung (6.94)), mit der die Positionen der Äste  $LR_j$  in der Datenstruktur bestimmt werden, die Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  der korrespondierenden Eingangsgrößen bekannt. Jedes Tupel repräsentiert eine Ecke des scharfen kartesischen Produkts der  $\alpha_k$ -Niveaus der Eingangsgrößen. Die Koordinaten  $x_i$  in den  $2^n$  Tupeln entsprechen den linken  $x_{i,\alpha_k}^L$  bzw. rechten  $x_{i,\alpha_k}^R$  Intervallgrenzen des  $\alpha_k$ -Niveaus der Fuzzy-Eingangsgröße  $\tilde{x}_i$  (vgl. Abbildung 6.3).

Dies kann als „ $2^n$ -Faktorenversuch“ [122] interpretiert werden. Diese aus der statistischen Versuchsplanung bekannte Konzeption wird häufig eingesetzt, um den Einfluss von Prozessparametern auf eine Zielgröße abzuschätzen. Um den experimentellen Aufwand insbesondere bei einer großen Anzahl von zu untersuchenden Prozessparametern (Faktoren) zu reduzieren, wird bei einem  $2^n$ -Faktorenversuch jeder Faktor lediglich auf zwei Stufen eingestellt. Der Versuchsplan ist so aufgebaut, dass für jedes Niveau eines Faktors beide Niveaus der anderen Faktoren untersucht werden. Dadurch erhält man Versuchsergebnisse bei allen möglichen Kombinationen der untersuchten Faktorenstufen. Im vorliegenden Fall entsprechen die  $n$  Faktoren den  $n$  Eingangsgrößen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  und ihre Niveaus

den linken  $x_{i,\alpha_k}^L$  bzw. rechten  $x_{i,\alpha_k}^R$  Intervallgrenzen. Die  $2^n$  Versuchsergebnisse entsprechen dann den Funktionsauswertungen von  $f_i$  in den  $2^n$  Ecken des scharfen kartesischen Produkts. Der Einfluss der Faktoren auf das Untersuchungsergebnis wird mit Hilfe von Maßzahlen angegeben. Dabei wird zwischen Maßzahlen für direkte Wirkungen und für Wechselwirkungen unterschieden. Direkte Wirkungen eines Faktors geben die Veränderung des Versuchsergebnisses infolge der Veränderung des Niveaus des Faktors an. Alle anderen Faktoren bleiben dabei unverändert. Dies soll an einem Beispiel mit  $n = 3$  Faktoren erörtert werden. Werden die eingestellten Niveaus der Faktoren mit 0 und 1 bezeichnet, so liegen vier Paare zur Bestimmung des Einflusses des ersten Faktors vor:

$$\begin{aligned}
 (0, 0, 0) &\leftrightarrow (1, 0, 0) \\
 (0, 1, 0) &\leftrightarrow (1, 1, 0) \\
 (0, 0, 1) &\leftrightarrow (1, 0, 1) \\
 (0, 1, 1) &\leftrightarrow (1, 1, 1).
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Der Effekt  $E_1$  des ersten Faktors wird nun mit

$$\begin{aligned}
 E_1 = \frac{1}{8} [ &f_i(1, 0, 0) - f_i(0, 0, 0) + f_i(1, 1, 0) - f_i(0, 1, 0) + \\
 &f_i(1, 0, 1) - f_i(0, 0, 1) + f_i(1, 1, 1) - f_i(0, 1, 1) ]
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

bestimmt. Bei dieser Definition der Effekte ändert sich die Zielgröße um den Wert des Effekts, z. B.  $E_1$ , wenn beispielsweise der erste Faktor vom Mittelwert auf die höhere Stufe verändert wird. Als Wechselwirkung wird die Beeinflussung der Wirkung eines Faktors durch die Einstellung eines oder mehrerer anderer Faktoren bezeichnet. Analog zu Gleichung (7.13) kann beispielsweise die Wechselwirkung zwischen dem ersten und dem zweiten Faktor mit

$$\begin{aligned}
 E_{12} = \frac{1}{8} [ &(f_i(1, 1, 0) - f_i(0, 1, 0) + f_i(1, 1, 1) - f_i(0, 1, 1)) - \\
 &(f_i(1, 0, 0) - f_i(0, 0, 0) + f_i(1, 0, 1) - f_i(0, 0, 1))]
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

ermittelt werden.

Ausgestattet mit den berechneten Effekten und Wechselwirkungen ist es nun möglich, die unbekannt Funktionen  $f_i$  in Gleichung (7.11) zu approximieren. Dazu wird zunächst jedes  $f_i$  in einer *Taylor-Reihe* um das Zentrum  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  des Versuchsplans

entwickelt:

$$\begin{aligned}
 \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \\
 &\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}} (x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} (x_n - \bar{x}_n) + \\
 &\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \Big|_{\bar{x}} (x_{n-1} - \bar{x}_{n-1})(x_n - \bar{x}_n) + \\
 &\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \Big|_{\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3) + \dots \quad . \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

Im Weiteren werden ausschließlich die Glieder der Reihenentwicklung berücksichtigt, in denen jede Variable linear vorkommt. Den Differentialquotienten 1. Ordnung werden dann die direkten Effekte, den Differentialquotienten 2. Ordnung die Zweifaktorenwechselwirkungen und den Differentialquotienten 3. Ordnung die Dreifaktorenwechselwirkungen zugeordnet. Mit  $z_i = (x_i - \bar{x}_i)$  geht Gleichung (7.15) dann in

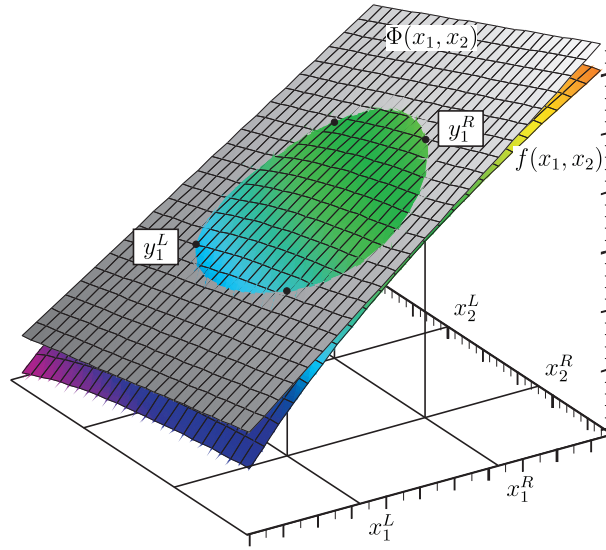
$$\begin{aligned}
 \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= M + E'_1 z_1 + E'_2 z_2 + E'_3 z_3 + \dots \\
 &+ E'_{12} z_1 z_2 + E'_{13} z_1 z_3 + E'_{23} z_2 z_3 + \dots \\
 &+ E'_{123} z_1 z_2 z_3 + E'_{134} z_1 z_3 z_4 + \dots \quad (7.16)
 \end{aligned}$$

über. Die Konstanten in der Gleichung sind proportional zu den Maßzahlen für die Effekte. Die  $n$ -fache Multilinearform stellt im  $n + 1$ -dimensionalen Raum eine Hyperfläche vom Typ eines hyperbolischen Paraboloids (Sattelfläche) dar. Jede Funktion  $f_i$  wird durch eine Sattelfläche durch die Messpunkte angenähert (vgl. Abbildung 7.7). Das System der Abbildungen (7.11) kann daher durch

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 y_2 &= \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \dots &= \dots \\
 y_m &= \Phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.17)
 \end{aligned}$$

approximiert werden. Dieses Vorgehen ist dabei unabhängig von der Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen und der Anzahl  $m$  der Fuzzy-Ergebnisgrößen.





**Abbildung 7.7:** Approximation einer Antwortfunktion  $f(x_1, x_2)$  durch eine zweifache Multilinearform  $\Phi(x_1, x_2)$

Mit den Approximationsfunktionen  $\Phi_i$  kann nun abgeschätzt werden, wie sich Veränderungen der scharfen  $\alpha$ -Schnitte der Fuzzy-Eingangsgrößen auf die scharfen  $\alpha$ -Schnitte der jeweiligen Fuzzy-Ergebnisgröße auswirken. Der linke bzw. rechte Ast der Ergebnisgröße wird dabei, wie in Abschnitt 6.3 dargestellt, durch Minimum- bzw. Maximumbildung

$$y_{j,\alpha_k}^L = \Phi_i(x_1; \dots; x_n) \Rightarrow \text{Min} | (x_1; \dots; x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k} \quad (7.18)$$

$$y_{j,\alpha_k}^R = \Phi_i(x_1; \dots; x_n) \Rightarrow \text{Max} | (x_1; \dots; x_n) \in \underline{X}_{\alpha_k} \quad (7.19)$$

über dem scharfen kartesischen Produkt der  $\alpha_k$ -Niveaus der Eingangsgrößen bestimmt. Wegen der vorausgesetzten Monotonie der Berechnungsmodelle liegen die zu  $y_{j,\alpha_k}^L$  bzw.  $y_{j,\alpha_k}^R$  korrespondierenden Koordinaten im Raum der Eingangsgrößen in den Ecken des kartesischen Produkts. Sind mit  $\nabla \in \{L, R\}$  die Koordinaten  $(x_1^\nabla, x_2^\nabla, \dots, x_n^\nabla)$  von  $y_{j,\alpha_k}^\nabla$  bekannt, so ist dadurch festgelegt, welche Intervallgrenzen der  $\alpha_k$ -Niveaus der Eingangsgrößen sich bei Veränderung auf  $y_{j,\alpha_k}^\nabla$  auswirken. Diese Intervallgrenzen sind derart zu verändern, dass sich die rechnerische Strukturantwort  $y_{j,\alpha_k}^\nabla$  dem Messwert  $y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^\nabla$  annähert. Als Maß für die Übereinstimmung wird das Quadrat der relativen Abweichung

$$\Delta_j^\nabla = \left( \frac{y_{j,\alpha_k}^\nabla - y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^\nabla}{y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^\nabla} \right)^2 \quad (7.20)$$

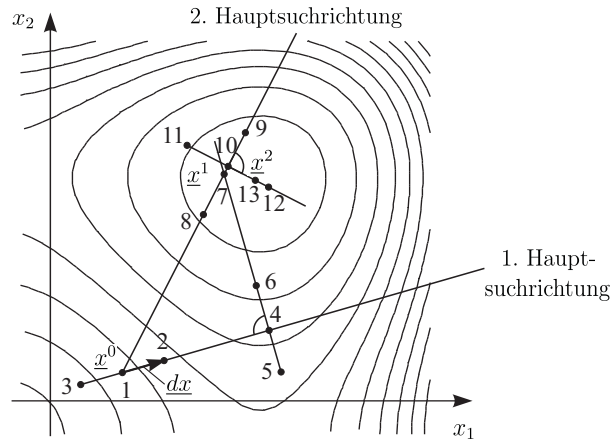
eingeführt. Für jedes Paar von berechneter und gemessener Strukturantwort werden mit Gleichung (7.20) auf jedem  $\alpha_k$ -Niveau zwei Bestimmungsgleichungen für die Intervallgrenzen der Fuzzy-Eingangsgrößen erhalten. Bei  $n$  Fuzzy-Eingangsgrößen sind auf jedem  $\alpha_k$ -Niveau  $2n$  Intervallgrenzen zu bestimmen. Jede der Bestimmungsgleichungen weist entsprechend den Gleichungen (7.18) und (7.19)  $n$  unbekannte Intervallgrenzen als Eingangsgrößen auf. Die Veränderung einer Intervallgrenze einer Fuzzy-Eingangsgröße wird sich daher, insbesondere wenn mehr Messergebnisse als Eingangsgrößen vorliegen, auf mehr als eine Ergebnisgröße auswirken. Aus diesem Grund können die einzelnen  $\Delta_j^\nabla$  nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Eine gleichzeitige Bewertung der Veränderung der Intervallgrenzen der Fuzzy-Eingangsgrößen gelingt durch Akkumulation der Fehlerquadrate zu einer Gesamtabweichung der rechnerischen von den gemessenen scharfen oder unscharfen Strukturantworten:

$$\begin{aligned} \Delta(x_1^L, x_1^R, \dots, x_n^L, x_n^R) = \\ \Delta_1^L(x_1^\nabla, \dots, x_n^\nabla) + \Delta_1^R(x_1^\nabla, \dots, x_n^\nabla) + \Delta_2^L(x_1^\nabla, \dots, x_n^\nabla) + \\ \Delta_2^R(x_1^\nabla, \dots, x_n^\nabla) + \dots + \Delta_n^L(x_1^\nabla, \dots, x_n^\nabla) + \Delta_n^R(x_1^\nabla, \dots, x_n^\nabla). \end{aligned} \quad (7.21)$$

In der dritten Stufe werden nun auf der Basis der Bestimmungsgleichung (7.21) neue Intervallgrenzen der Fuzzy-Eingangsgrößen auf dem  $\alpha_k$ -Niveau ermittelt. Gleichung (7.21) kann wie oben dargestellt als Maß für die relative Abweichung der rechnerischen von den gemessenen Strukturantworten interpretiert werden. Als Bedingung zur Festlegung optimaler Intervallgrenzen wird daher

$$\Delta(x_1^L, x_1^R, \dots, x_n^L, x_n^R) \Rightarrow \text{Min} \quad (7.22)$$

abgeleitet. Die Suche nach dem Minimum der Funktion wird mit einem Optimierungsalgorithmus durchgeführt. Das Grundprinzip des eingesetzten Verfahrens ist in Abbildung 7.8 dargestellt. Der Ausgangspunkt ( $\underline{x}^0$ ) der iterativen Suche des Minimums ist durch die Intervallgrenzen der Fuzzy-Eingangsgrößen gegeben. Von diesem Punkt ausgehend sucht der Algorithmus entlang der ersten Hauptsuchrichtung ( $\underline{dx}$ ) nach einem lokalen Minimum. Die Hauptsuchrichtung wird zunächst als gegeben vorausgesetzt. Ihre Festlegung wird später erörtert. Die Berechnung der Position des Minimums entlang der Suchrichtung wird mit der Hilfe einer parabolischen Extrapolation durchgeführt. Ausgehend von  $\underline{x}^0$  werden in positiver und negativer Suchrichtung die beiden Funktionswerte  $\Delta(\underline{x}^0 - \underline{dx})$



**Abbildung 7.8:** Prinzip der Funktionsweise des Optimierungsalgorithmus

und  $\Delta(\underline{x}^0 + \underline{dx})$  berechnet. Mit dem Funktionswert  $\Delta(\underline{x}^0)$  kann nun über eine parabolische Extrapolation oder Interpolation

$$\underline{x}^{min} = \underline{x}^0 + \frac{\underline{dx}}{|\Delta(\underline{x}^0 - \underline{dx}) - 2\Delta(\underline{x}^0 + \underline{dx})| \cdot \frac{\Delta(\underline{x}^0 - \underline{dx}) - \Delta(\underline{x}^0 + \underline{dx})}{2}} \quad (7.23)$$

das Minimum entlang  $\underline{dx}$  (Punkt 4) approximiert werden. Nach der Suche entlang dieser ersten Richtung wird mit Hilfe einer *Gram-Schmidt*-Orthogonalisierungsprozedur eine zweite (Neben-)Richtung bestimmt, die durch den extrapolierten Punkt  $\underline{x}^{min}$  und senkrecht zur ersten Suchrichtung verläuft. Entlang dieser Suchrichtung wird erneut mit der Hilfe von Gleichung (7.23) näherungsweise ein lokales Minimum ermittelt (Punkt 7). Bei  $n$  Fuzzy-Eingangsgrößen werden in gleicher Weise insgesamt  $2n - 1$  Nebensuchrichtungen (die jeweils orthogonal zu den vorhergehenden Richtungen verlaufen) und nacheinander die entsprechenden Koordinaten der Minima bestimmt. Dieses Vorgehen wird in weiteren Optimierungsstufen wiederholt, bis die Veränderung der Koordinaten des Minimums gegenüber der letzten Optimierungsstufe einen vorgegebenen Toleranzwert unterschreitet. Die Koordinaten des Lösungspunktes entsprechen dann den Intervallgrenzen der Fuzzy-Eingangsgrößen, die zu einer minimalen Gesamtabweichung der rechnerischen von den gemessenen Strukturantworten führen.

Mit dem dargestellten Optimierungsalgorithmus wird zuverlässig ein in der Nähe des Ausgangspunktes  $\underline{x}^0$  befindliches lokales Minimum gefunden. Ohne weitere Maßnahmen kann beim Vorliegen mehrerer lokaler Minima von  $\Delta(x_1^L, x_1^R, \dots, x_n^L, x_n^R)$  jedoch nicht garantiert werden, dass die gefundene Lösung das globale Minimum, wie in Gleichung (7.22) gefordert, der Gütefunktion ist. Die Problematik kann jedoch weitestgehend durch eine

geeignete Wahl des Startpunktes  $\underline{x}^0$  vermieden werden. Dadurch ist die obige Forderung nach realistischen Anfangswerten der Fuzzy-Eingangsgrößen motiviert.

Ebenfalls positiv auf das Konvergenzverhalten des Verfahrens wirkt sich eine günstige Wahl der Anfangssuchrichtung aus. In dem hier dargestellten Vorgehen wird sie auf der Basis der in der zweiten Stufe ermittelten Effekte bestimmt. Die für jede Strukturantwort berechneten Effekte werden zu Tupeln  $(E_1^j, \dots, E_n^j)$  zusammengefasst und vektoriell addiert. Durch diese Aggregation wird sichergestellt, dass die Hauptsuchrichtung entlang der größten (mittleren) Gradienten der Gütefunktion verläuft. Dadurch werden tendenziell die Intervallgrenzen der Fuzzy-Eingangsgrößen stärker verändert, die auch einen größeren Einfluss auf die Ergebnisgrößen haben. Durch die Vermeidung übermäßig großer Variationen der Eingangsgrößen mit untergeordnetem Einfluss auf das Optimierungsergebnis wird der Algorithmus stabilisiert und dadurch effizienter.

Die Formulierung der Extremwertsuche in Gleichung (7.22) als Optimierungsproblem, setzt implizit voraus, dass die Anzahl der auszuwertenden Strukturantworten mindestens der Anzahl der zu kalibrierenden Fuzzy-Eingangsgrößen entspricht. Liegen weniger Messwerte vor, d. h. das System der Abbildungen (7.11) ist unterbestimmt, so ist die Bestimmung optimaler Fuzzy-Eingangsgrößen i. A. nicht eindeutig. Doch auch wenn die Anzahl der Messungen mit der Anzahl der Fuzzy-Eingangsgrößen übereinstimmt, kann eine eindeutige Lösung nicht garantiert werden. In diesen Fällen wird daher eine gegenüber der oben dargestellten Optimierungsprozedur geringfügig veränderte Suche durchgeführt. Ihr Ausgangspunkt ist ebenfalls  $\underline{x}^0$  mit der Hauptsuchrichtung  $\underline{dx}$ . Die Suche nach dem lokalen Minimum wird allerdings auf diese Hauptsuchrichtung beschränkt. Diese Maßnahme transformiert  $\Delta(x_1^L, x_1^R, \dots, x_n^L, x_n^R)$  implizit zu einer eindimensionalen Gütefunktion, wodurch die Lösbarkeit gewährleistet wird. Durch die Festlegung von  $\underline{dx}$  auf der Basis der Effekte wird zudem sichergestellt, dass die ermittelte Lösung durch möglichst geringe Variation der Ausgangswerte gewonnen wurde.

Durch die Zusammenfassung der Bestimmungsgleichungen zu Gleichung (7.21) und die gleichzeitige Optimierung aller unbekanntenen Größen wird die Konsistenz des kartesischen Produkts der Eingangsgrößen auf dem  $\alpha_k$ -Niveau sichergestellt. Die unterschiedlichen  $\alpha$ -Niveaus werden jedoch unabhängig voneinander betrachtet. Es sind daher zusätzliche Maßnahmen nötig, um sicherzustellen, dass nach jedem Iterationszyklus verbesserte Fuzzy-Eingangsgrößen erhalten werden, die den Definitionen gemäß Abschnitt 3.6 genügen. In jeder Iteration werden die  $\alpha$ -Niveaus, beginnend mit dem Support und aufsteigend

bis zum Kern, verarbeitet. Die einzige Konsistenzbedingung, die bei der Bearbeitung des Supports ( $\alpha_k = 0$ ) berücksichtigt werden muss, fordert, dass die linken bzw. rechten Intervallgrenzen der Fuzzy-Eingangsgrößen auch nach der Durchführung der Optimierungsprozedur linke bzw. rechte Intervallgrenzen bleiben. Dies wird durch eine Einschränkung des Definitionsbereichs der Unbekannten bei der Durchführung der Suche nach dem Minimum der Gütefunktion erreicht. So dürfen die zu einer Fuzzy-Eingangsgröße korrespondierenden Koordinaten für  $x_j^L$  bzw.  $x_j^R$  den Mittelwert der Intervallgrenzen nicht über- bzw. unterschreiten:

$$x_{j,\text{Opt}}^L < \frac{x_j^L + x_j^R}{2} \quad (7.24)$$

$$x_{j,\text{Opt}}^R > \frac{x_j^L + x_j^R}{2}. \quad (7.25)$$

Darüber hinaus wird der zulässige Bereich der Koordinaten für die Suche nach dem Minimum auf

$$x_{j,\text{Opt}}^L \geq \frac{3 \cdot x_j^L - x_j^R}{2} \quad (7.26)$$

$$x_{j,\text{Opt}}^R \leq \frac{3 \cdot x_j^R - x_j^L}{2} \quad (7.27)$$

beschränkt. Diese Einschränkung stellt keine Konsistenzbedingung dar, sondern kann als Dämpfung zu großer Veränderungen der Intervallgrenzen interpretiert werden. Die Approximationsfunktionen  $\Phi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  des Systemverhaltens (Gleichung (7.17)) stimmen lediglich an den Stützstellen, d. h. in den Ecken des scharfen kartesischen Produkts, mit den (unbekannten) Antwortfunktionen  $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  überein. Mit wachsendem Abstand von diesen Stützstellen kann es zu zunehmenden Abweichungen der Approximationsfunktionen vom realen Verlauf kommen. Die Bestimmung eines optimalen Punktes  $\underline{x}^{\text{min}}$  mit zu großem Abstand vom Ausgangspunkt  $\underline{x}^0$  kann daher zu einer fehlerhaften Interpretation des Systemverhaltens und dadurch zu einer Verschlechterung der Konvergenzeigenschaften des Algorithmus führen. Die eingeführte Dämpfung hingegen stabilisiert das Verfahren. Für die weiteren  $\alpha$ -Niveaus wird analog zum Support ebenfalls sichergestellt, dass nach der Durchführung der Optimierungsprozedur die linke bzw. rechte Intervallgrenze die Bedingungen (7.24) und (7.25) erfüllen. Die für den Support eingeführte Dämpfung ist nicht

mehr nötig und wird durch

$$x_{j,\text{Opt},\alpha_n}^L \geq x_{j,\text{Opt},\alpha_m}^L \quad (7.28)$$

$$x_{j,\text{Opt},\alpha_n}^R \leq x_{j,\text{Opt},\alpha_m}^R \quad (7.29)$$

mit  $\alpha_n > \alpha_m$  ersetzt. Dadurch wird die in Abschnitt 3.6 geforderte Monotonie der Äste der Fuzzy-Größen sichergestellt.

Das dargestellte unscharfe Kalibrierungsverfahren ist in der Lage, auf der Basis unscharfer am realen Bauwerk gemessener Antwortgrößen Rückschlüsse auf Fuzzy-Modellgrößen zu ziehen. Einer der wesentlichen Vorteile des Verfahrens ist die große Flexibilität bei der Auswahl der Messgrößen. Es können alle Reaktionen des Bauwerks, welche auch mit einem Berechnungsmodell abgebildet werden können, für die Kalibrierung herangezogen werden. Dabei ist es nicht notwendig, dass die rechnerischen Strukturantworten mit dem selben Berechnungsmodell ermittelt werden. Es können beliebig viele analytische und/oder numerische Modelle kombiniert werden. Das Verfahren kann darüber hinaus unabhängig von der Anzahl  $m$  der Messungen bzw. der Anzahl  $n$  der Fuzzy-Modellgrößen eingesetzt werden. Für  $m < n$  wird durch die unidirektionale Suche in Richtung der größten Gradienten eine der möglichen Lösungen bestimmt. Für  $n = m$  kann das Verfahren als eine Erweiterung der von *Hanns* [74] veröffentlichten „inversen Fuzzy-Arithmetik“ betrachtet werden. Am effektivsten wird das Verfahren jedoch für  $m > n$  eingesetzt. Durch die Optimierungsprozedur ist es dann in der Lage, Fehlpassungen zwischen Modell und Realität auszugleichen.

### 7.3 Modellvalidierung

In Abschnitt 7.1 wurde die Ableitung von Modellen zur Analyse bzw. zur Prognose von Teilaspekten der Realität als Prozess der Abstraktion und Idealisierung der Wirklichkeit verstanden. Bei der Ableitung von Berechnungsmodellen beschädigter Brückentragwerke wird dieser Prozess maßgeblich vom Verständnis der Lastabtragungsmechanismen des realen Bauwerks und der Identifikation und Quantifizierung wesentlicher Einflussgrößen geprägt. Diese sind jedoch nicht immer eindeutig zu erkennen. Eine Fehleinschätzung führt jedoch zu inkonsistenten Analysemodellen. Eine Beurteilung der Kriterien „Stand-sicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ auf der Basis fehlerhafter Modelle

kann dann eine geringe Aussagekraft aufweisen und im schlimmsten Fall zur Gefährdung von Leib und Leben führen. Zur Vermeidung dieser Risiken kann die Korrektheit des Rechenmodells durch Rückkopplung mit der realen Konstruktion validiert werden. Stimmt das rechnerisch prognostizierte Verhalten des Modells mit dem in der Realität beobachteten ausreichend genau überein, so wird davon ausgegangen, dass auch nicht beobachtbare Zustände (z. B. Spannungszustände) ausreichend genau wiedergegeben werden. Berechenbares und messbares Bauwerksverhalten können beispielsweise das Antwortverhalten der Struktur und insbesondere Verformungen und Schwingungen sein.

Als problematisch kann sich dabei die Festlegung von Kriterien erweisen, die zur Beurteilung einer ausreichenden Übereinstimmung der theoretischen und der gemessenen Strukturantworten herangezogen werden. Der Grund dafür liegt in der variablen Sensitivität der verschiedenen Messgrößen. Die Auswirkungen von Variationen der Eingangsgrößen sind dabei nicht nur von der betrachteten Strukturantwort abhängig, sondern werden darüber hinaus von dem untersuchten Tragsystem beeinflusst. Sie können daher nicht a priori bestimmt werden.

Zur Vermeidung dieser Problematik wird in dieser Arbeit eine alternative Vorgehensweise zur Validierung der Berechnungsmodelle vorgeschlagen. Die Grundidee basiert darauf, nicht die Strukturantworten zur Bewertung der Güte der Modelle heranzuziehen, sondern, ähnlich wie bei der Modellkalibrierung, mit ihrer Hilfe Rückschlüsse auf die Eingangsgrößen zu ziehen. Diese „rückgerechneten“ Modellgrößen können dann mit den gemessenen Größen verglichen werden. Bei den Modellgrößen handelt es sich üblicherweise um objektive Merkmale eines Bauwerks (z. B. Materialeigenschaften, Abmessungen, ...). Für die Festlegung tolerierbarer Abweichungen des Ist-Zustandes dieser Merkmale vom theoretischen Soll-Zustand existieren anerkannte Konventionen. Auf dieser objektiven Basis kann die Güte des Berechnungsmodells quantifiziert werden.

Die vorgeschlagene Vorgehensweise der Modellvalidierung ähnelt der in Abschnitt 7.2 beschriebenen Modellkalibrierung. Sie unterscheiden sich jedoch signifikant in der Interpretation der zur Verfügung stehenden Informationen. Bei der Modellkalibrierung wird die Korrektheit der zugrunde liegenden Berechnungsmodelle vorausgesetzt. Mangelhafte Übereinstimmung zwischen rechnerischen und gemessenen Strukturantworten wird ausschließlich einer unzulänglichen Bestimmung der Eingangsgrößen zugeschrieben. Das Ziel der Modellkalibrierung ist es daher auch, die Modellgrößen (ausgehend von den Messwerten) zu variieren, um eine möglichst gute Übereinstimmung der Strukturantworten zu

erreichen. Bei der Modellvalidierung wird ebenfalls davon ausgegangen, dass die gemessenen unscharfen Bauwerksreaktionen das Verhalten des realen Bauwerks wiedergeben. Messfehler sind dabei durch geeignete Maßnahmen auszuschließen. Darüber hinaus werden ebenfalls Fehler bzw. Störeinflüsse bei der Bestimmung der unscharfen Modellgrößen ausgeschlossen. Mängel in der Prognosegenauigkeit, d. h. Differenzen zwischen den berechneten und den gemessenen Strukturantworten, sind daher ausschließlich dem Berechnungsmodell zuzuschreiben.

Diese alternative Interpretation der Abbildung der Fuzzy-Eingangsgrößen auf die Fuzzy-Ergebnisgrößen mit Hilfe des unscharfen Operators  $\tilde{f}$  (vgl. Gleichung (6.2)) erfordert eine Anpassung des in Abschnitt 7.2 dargestellten Algorithmus. Da die gemessenen Strukturantworten definitionsgemäß das Systemverhalten objektiv beschreiben, wird gefordert, dass die korrespondierenden Fuzzy-Ergebnisgrößen für jeden scharfen Wert mindestens den selben Zugehörigkeitsgrad wie die unscharfen Messgrößen aufweisen. Die mit diesem Kriterium bestimmten Fuzzy-Eingangsgrößen bilden daher Einhüllende über alle unscharfen Systemzustände, die durch Paare von berechneten und gemessenen Strukturantworten ausgedrückt werden. Bei der in Abschnitt 7.2 dargestellten iterativen Bestimmung der Fuzzy-Eingangsgrößen wird dies durch eine Modifikation der Bestimmungsgleichung (7.21) berücksichtigt. Um sicherzustellen, dass die Koordinatenpaare  $(x_{j,\alpha_k}^L, x_{j,\alpha_k}^R)$  Intervalle festlegen, die alle möglichen mit den Messergebnissen kompatiblen Zustände erfassen, wird die Bestimmung der Summanden (Gleichung (7.20)) durch

$$\Delta_j^L = \begin{cases} w \cdot \left( \frac{y_{j,\alpha_k}^L - y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^L}{y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^L} \right)^2 & \text{falls } y_{j,\alpha_k}^L > y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^L \\ \left( \frac{y_{j,\alpha_k}^L - y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^L}{y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^L} \right)^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Delta_j^R = \begin{cases} w \cdot \left( \frac{y_{j,\alpha_k}^R - y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^R}{y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^R} \right)^2 & \text{falls } y_{j,\alpha_k}^R < y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^R \\ \left( \frac{y_{j,\alpha_k}^R - y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^R}{y_{j,\alpha_k,\text{mess}}^R} \right)^2 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.30)$$

ersetzt. Der skalare Faktor  $w \gg 1$  wirkt dabei als Penalty-Funktion.

Bei einem Vergleich von Gleichung (7.30) mit Gleichung (7.20) kann festgestellt werden, dass die Modellvalidierung und die Modellkalibrierung für „exakte“ Berechnungsmodelle zu identischen Fuzzy-Eingangsgrößen führen. In der Praxis kann eine Übereinstimmung der rechnerischen Prognosen mit dem realen Bauwerksverhalten jedoch i. A. nicht vorausgesetzt werden. In diesen Fällen unterscheiden sich die ermittelten Fuzzy-Eingangsgrößen.



Gleichung (7.30) kann dann als extreme Bewertung des Auftretens der Messwerte interpretiert werden. Während Gleichung (7.20) dafür sorgt, dass die Fuzzy-Ergebnisgrößen im Mittel mit den Messwerten übereinstimmen, führt Gleichung (7.30) zu einhüllenden Fuzzy-Ergebnisgrößen. Zwischen den im Rahmen der Modellkalibrierung bestimmten Größen  $\tilde{x}_{i,Kal}$  und den zur Modellvalidierung genutzten Größen  $\tilde{x}_{i,Val}$  besteht der Zusammenhang:

$$\tilde{x}_{i,Kal} \subseteq \tilde{x}_{i,Val}. \quad (7.31)$$

Daraus kann abgeleitet werden, dass die Größe der Streuung (Unschärfe) der ermittelten Fuzzy-Eingangsgroßen positiv mit der Fehlpassung des Berechnungsmodells korreliert. Für die Bewertung der Unschärfe werden die Fuzzy-Eingangsgroßen entsprechend Abschnitt 3.6 als unscharfe Mengen aufgefasst. Zur Quantifizierung des Unschärfemaßes von Mengensystemen stehen zahlreiche Ansätze zur Verfügung [115, 91]. Die wichtigsten Maßsysteme für Unschärfe werden durch die Entropie- und Energiemaße gebildet. Die folgenden Darstellungen beschränken sich auf eindimensionale unscharfe Mengen.

Entropiemaße  $d$  bewerten die Abweichung einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  vom Typ der scharfen Menge. Alle scharfen Mengen werden daher mit

$$d(\tilde{A}) = 0 \quad \text{falls } \mu_A : \mathbf{X} \rightarrow \{0, 1\} \quad (7.32)$$

bewertet. Die „unschärfste“ Menge wird dadurch charakterisiert, dass für jedes Element die Zugehörigkeit und die Nicht-Zugehörigkeit gleich bewertet werden:

$$d(\tilde{A}) = \max \quad \text{falls } \mu_A : \mathbf{X} \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} \right\}. \quad (7.33)$$

Für den Vergleich der Unschärfe von zwei Mengen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \mu_B \leq \mu_A \quad \text{falls } \mu_A < \frac{1}{2} \\ \mu_B \geq \mu_A \quad \text{falls } \mu_A > \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow d(\tilde{A}) \geq d(\tilde{B}). \quad (7.34)$$

Für die tatsächliche Festlegung der Mengenfunktion  $d$  existieren zahlreiche Ansätze. Hier soll exemplarisch das modifizierte *Shannon'sche* Entropiemaß für stetige Fuzzy-Mengen angegeben werden:

$$d_S(\tilde{A}) = -c \int_{x=-\infty}^{x=\infty} (\mu(x) \cdot \ln(\mu(x)) + (1 - \mu(x)) \cdot \ln((1 - \mu(x)))) dx. \quad (7.35)$$

Der Parameter  $c$  ist dabei als positive reelle Zahl frei wählbar. Das *Shannon'sche* Unschärfemaß kann als Maß für die „Steilheit“ der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu(x)$  der Menge interpretiert werden.

Bei Energiemaßen  $e$  ist die Bezugsmenge für die Festlegung des Maßwertes 0 die leere Menge  $\emptyset$ :

$$e(\emptyset) = 0. \tag{7.36}$$

Sie bewerten die Abweichung einer Menge  $\tilde{A}$  von der leeren Menge. Folglich wird als „unschärfste“ Menge der Grundbereich  $\mathbf{X}$

$$e(\mathbf{X}) = \max \tag{7.37}$$

angesehen. Als Vergleichsrelation zur Bewertung der Unschärfe von zwei Mengen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  dient die Beziehung

$$\mu_A \leq \mu_B \Rightarrow e(\tilde{A}) \leq e(\tilde{B}). \tag{7.38}$$

Auch für die Festlegung von  $e$  stehen verschiedene Ansätze zur Verfügung. In [15] wird beispielsweise die Kardinalität

$$e(\tilde{A}) = \int_{x \in S(\tilde{A})} \mu(x) dx \tag{7.39}$$

als Maß vorgeschlagen. Für eindimensionale Fuzzy-Mengen kann bei dieser Festlegung das Energiemaß als die von der Zugehörigkeitsfunktion und der Abszisse begrenzte Fläche interpretiert werden.

*Czogala, Gottwald & Pedrycz* [33] sehen in den beiden dargestellten Familien von Unschärfemaßen aus erkenntnistheoretischer Sicht äquivalente konzeptionelle Ansätze. Auf Grund der dargestellten Eigenschaften der Entropie- und Energiemaße werden die mit den Mengenfunktionen verknüpften Aussagen jedoch unterschiedlich interpretiert. Entropiemaße bewerten nach *Bothe* [22] die „Flankensteilheit“ der Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  und dadurch deren Abweichung von einer scharfen Menge. Die Mengenfunktion  $d$  quantifiziert daher die Unschärfe (Fuzziness) von  $\tilde{A}$ . Das Maß für die Unschärfe von Fuzzy-Größen ist dabei von der Größe des Kerns unabhängig. Wird beispielsweise für die Fuzzy-Intervalle  $\tilde{A} = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$  und  $\tilde{B} = \langle 1, 2, 4, 5 \rangle$  die Unschärfe mit Gleichung (7.35) und  $c = 1$  bestimmt, so wird in beiden Fällen die Maßzahl 1 ermittelt. Werden die beiden Fuzzy-Intervalle hingegen mit Gleichung (7.39), d. h. auf der Basis

eines Energiemaßes, bewertet, so wird  $e(\tilde{A}) = 2 < e(\tilde{B}) = 3$  erhalten. Wegen des größeren Kerns unterscheidet sich  $\tilde{B}$  mehr von der leeren Menge als  $\tilde{A}$ . *Hanns* [75] interpretiert Gleichung (7.39) daher als Ungenauigkeit der Menge  $\tilde{A}$ .

Im Rahmen der Modellvalidierung wird die unscharfe Menge  $\tilde{A}$  als Fuzzy-Größe  $\tilde{x}_i$ , d. h. als Fuzzy-Intervall bzw. Fuzzy-Zahl, die einer Modellgröße (z. B. Materialparameter) zugeordnet ist, interpretiert. Die Fuzzy-Modellgrößen werden durch „Rückrechnung“ auf der Basis von Gleichung (7.30) ermittelt. Bei dieser Vorgehensweise werden die Fuzzy-Eingangsgrößen derart eingestellt, dass jede rechnerische Antwortgröße mindestens mit dem Zugehörigkeitswert des Messwerts bewertet wird. Jedes  $\alpha_k$ -Niveau der Fuzzy-Eingangsgrößen beschreibt also alle möglichen Systemzustände, die mit den Messgrößen kompatibel sind. Den so ermittelten Fuzzy-Eingangsgrößen  $\tilde{x}_{i,Val}$  werden also sowohl die Datenunschärfe als auch die Modellunschärfe zugeschrieben. Je größer die Modellunschärfe, d. h. je größer die Diskrepanzen zwischen theoretischem und tatsächlichem Strukturverhalten sind, desto größer werden die  $\alpha_k$ -Niveaus und dadurch die Kardinalitäten der Fuzzy-Eingangsgrößen  $\tilde{x}_{i,Val}$ . Eine Quantifizierung der Modellunschärfe wird daher mit Hilfe von Gleichung (7.39) durchgeführt.

Das hier vorgeschlagene Konzept zur quantitativen Validierung des Berechnungsmodells basiert auf der vergleichenden Bewertung der gemessenen unscharfen Modellgrößen  $\tilde{x}_{i,Mess}$  mit den rechnerisch ermittelten  $\tilde{x}_{i,Val}$ . Jede Modellgröße wird dabei unabhängig von den anderen Paaren  $(\tilde{x}_{i,Mess}, \tilde{x}_{i,Val})$  auf Übereinstimmung überprüft. Zur Quantifizierung der Übereinstimmung werden zwei Maße eingeführt, die unterschiedliche Aspekte folgender Aussage betonen: „das Berechnungsmodell bildet die Fuzzy-Eingangsgrößen mit ausreichender Genauigkeit auf die unscharfen Antwortgrößen ab“.

Das erste Maß wird mit

$$\tilde{V}_1^i = \left| \frac{\tilde{x}_{i,Val} - \tilde{x}_{i,Mess}}{\tilde{x}_{i,Mess}} \right| \quad (7.40)$$

als relative Abweichung der gemessenen Eingangsgrößen von den rechnerisch ermittelten erhalten. Für exakt übereinstimmende Größen wird  $V_1^i = 0$  erhalten. Ein Paar  $(\tilde{x}_{i,Mess}, \tilde{x}_{i,Val})$  weist eine größere Übereinstimmung als ein Paar  $(\tilde{x}_{j,Mess}, \tilde{x}_{j,Val})$  auf, falls mit  $V_1^i, V_1^j \in \mathbb{F}$  die Ungleichung  $V_1^i < V_1^j$  erfüllt ist. Bei der Auswertung von Gleichung (7.40) ist darauf zu achten, dass die Größen  $\tilde{x}_{i,Mess}$  und  $\tilde{x}_{i,Val}$  den selben Sachverhalt ausdrücken. Beide geben den Grad der Möglichkeit an, mit dem die korrespondierende Modellgröße bestimmte Werte annehmen kann. Die beiden Variablen in Gleichung

(7.40) sind daher nicht unabhängig. Wird die semantische Identität der beiden Variablen nicht berücksichtigt, so wird bei der Auswertung der relativen Abweichung die auftretende Unschärfe überschätzt (vgl. Gleichung (6.44) und (6.45)). Im Rahmen der in Abschnitt 6.3.5 dargestellten Implementierung der Fuzzy-Arithmetik wird die Identität der Fuzzy-Größen durch Gleichsetzten der Identifikationsnummern berücksichtigt. Der Raum der Eingangsgrößen in Gleichung (7.40) wird dadurch zu einem eindimensionalen Raum reduziert. Durch die Betragsfunktion in der Gleichung ist die vorausgesetzte Monotonie fuzzy-arithmetischer Operatoren nicht gewährleistet. Eine Auswertung von Gleichung (7.40) im „monotonen Modus“ ist jedoch uneingeschränkt möglich, da lediglich eine Fuzzy-Eingangsgröße berücksichtigt wird (vgl. Abschnitt 6.3.5).

Mit dem zweiten Maß

$$V_2^i = \frac{e(\tilde{x}_{i,Val}) - e(\tilde{x}_{i,Mess})}{e(\tilde{x}_{i,Mess})} \quad (7.41)$$

wird die Modellunschärfe quantifiziert. Den rechnerisch  $\tilde{x}_{i,Val}$  ermittelten Fuzzy-Größen wird sowohl die Daten- als auch die Modellunschärfe zugewiesen. Die Unschärfe der Fuzzy-Größe wird mit Gleichung (7.39) bestimmt. Unter der Annahme, dass die enthaltene Datenunschärfe mit  $e(\tilde{x}_{i,Mess})$  ermittelt werden kann, gibt  $V_2^i$  die mit  $\tilde{x}_i$  verknüpfte Modellunschärfe an.

Die beiden eingeführten Maße bilden gemeinsam eine objektive Grundlage zur Beurteilung der Güte der eingesetzten Berechnungsmodelle. Die beiden Maße bewerten unterschiedliche Facetten der evtl. vorhandenen Modellungenauigkeit. Das Maß für die relative Abweichung der Messgrößen von den „rückgerechneten“ Größen bewertet die relative Lage der beiden Fuzzy-Größen auf dem Zahlenstrahl. Eine große Abweichung führt zu einem großen Wert für  $\tilde{V}_1^i$ . Im Gegensatz dazu dient Gleichung (7.41) zum Taxieren der Signifikanz bei der Festlegung der Werte einer Modellgröße. Beide Maße konvergieren für exakte Übereinstimmung gegen Null.

Die Bewertung der Modellgüte auf der Ebene objektiv messbarer Größen hat den Vorteil, dass Grenzwerte für zulässige Größen von  $\tilde{V}_1^i$  und  $V_2^i$  unabhängig vom zugrunde gelegten Berechnungsmodell festgelegt werden können. Die zu bewertenden Modellgrößen sind i. d. R. die gleichen Berechnungsparameter, die in einer herkömmlichen Bemessung beim Neubau einer Struktur eingehen. Daher können für Gleichung (7.40) Grenzwerte aus den normativen Bestimmungen für zulässige Toleranzen entnommen werden. Für die Beurteilung der Unschärfe existieren keine Anhaltspunkte in der Literatur. Als heuristischer

Ansatz wird hier

$$V_2^i \leq 1 \tag{7.42}$$

vorgeschlagen. Durch diese Festlegung wird ein ausgewogenes Verhältnis zwischen der Genauigkeit bei der Bestimmung der Eingangsgrößen und der geforderten Genauigkeit der Berechnungsmodelle angestrebt. Die Einhaltung der Ungleichung gewährleistet, dass die Prognosegenauigkeit in der selben Größenordnung wie die Genauigkeit der Modellgrößen liegt. Ein Modell wird daher als ausreichend genau die Wirklichkeit abbildend bewertet, wenn für alle Paare von  $(\tilde{x}_{i, Mess}, \tilde{x}_{i, Val})$  sowohl  $\tilde{V}_1^i$  innerhalb der vorgegebenen Toleranzen liegt als auch die Ungleichung (7.42) erfüllt ist.

Das dargestellte Verfahren bildet die Basis zur objektiven Bewertung der Prognosegenauigkeit unscharfer Modelle. Die wesentliche Neuerung dieses Ansatzes besteht darin, nicht die Übereinstimmung der Strukturantworten direkt zu bewerten, sondern die gemessenen Antwortgrößen in äquivalente Eingangsgrößen zu transformieren. Diese werden mit aus der Zustandsbeschreibung eines Bauwerks abgeleiteten (unscharfen) Tragwerksparametern verglichen. Als Bewertungskriterium werden sowohl die relative Abweichung als auch die Unschärfe der Größen genutzt. Die Bewertung der Eingangsgrößen ermöglicht eine objektive Festlegung von zulässigen Toleranzen auf der Basis normativer Regelwerke für die Erstellung von Neubauten.



# Kapitel 8

## Zustandsbewertung

Im vorliegenden Kapitel erfolgt die Zusammenführung der in den vorangegangenen Kapiteln erarbeiteten Bausteine der Zustandsbestimmung (vgl. Abschnitt 4), der Zustandsprognose (vgl. Abschnitt 5), der unscharfen Tragwerksanalyse (vgl. Abschnitt 6) und der Validierungsmethoden des Analysemodells (vgl. Abschnitt 7) zum Konzept der Fuzzy-Zustandsbewertung.

In Abschnitt 8.1 wird dafür zunächst das gegenwärtig eingesetzte Bewertungsverfahren auf der Basis regelmäßiger Bauwerksprüfungen skizziert. Dabei sind insbesondere die in der „Richtlinie zur einheitlichen Erfassung, Bewertung, Aufzeichnung und Auswertung von Ergebnissen der Bauwerksprüfung nach DIN 1076“ enthaltenen Kriterien für die Zustandsbewertung von Interesse. In Abschnitt 8.3 wird im Anschluss das neue Konzept zur Zustandsbewertung von beschädigten Brücken unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerksparameter vorgestellt. Dabei wird neben der Beschreibung des methodischen Vorgehens auch auf die Anknüpfungspunkte an das etablierte System der Bauwerksüberwachung von Brücken und anderen Ingenieurbauten im Zuge von Straßen und Wegen eingegangen.

### **8.1 Zustandsbewertung nach DIN 1076 und RI-EBW-PRÜF**

„Zur bundesweiten Vereinheitlichung von Planungsverfahren und zur Verbesserung der Wirtschaftlichkeit im Rahmen der Erhaltung der Bauwerke des Bundesfernstraßennet-

zes realisiert das Bundesministerium für Verkehr- Bau- und Wohnungswesen in Zusammenarbeit mit den Ländern ein umfassendes, aus Teilmodulen bestehendes Bauwerks-Management-System (BMS) für Bundes- und Länderverwaltungen“ [25]. Wesentliche Grundlage einer effektiven Erhaltungsplanung sind in Deutschland die Ergebnisse der regelmäßigen Bauwerksprüfungen nach DIN 1076 [9] der einzelnen Brückenbauwerke (Objektebene). Die Auswertung der Prüfungsergebnisse ergibt einen Überblick über erforderliche Maßnahmen. Der Zustand jedes Bauwerks wird durch eine Zustandsnote charakterisiert. Diese Note dient auf der Netzebene der „Reihung nach Dringlichkeit [und] ermöglicht sowohl den sparsamen wirtschaftlichen Einsatz der Haushaltsmittel als auch deren vorausschauende Bedarfsermittlung und ist somit Grundlage für die Aufstellung von Erhaltungsprogrammen sowie für mittel- und langfristige Haushaltsplanung“ [112]. Die Aufnahme und Bewertung von Schäden an Ingenieurbauwerken erfolgt auf der Grundlage der „Richtlinie zur einheitlichen Erfassung, Bewertung, Aufzeichnung und Auswertung von Ergebnissen der Bauwerksprüfung nach DIN 1076“ (RI-EBW-PRÜF) [28]. Sie dient nicht nur der Vereinfachung sondern stellt insbesondere eine bundeseinheitliche Durchführung der Zustandsbewertung sicher. Der Zustand der Bauwerke wird dabei getrennt für die Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ evaluiert.

Das Kriterium **Standicherheit** bewertet nach RI-EBW-PRÜF den zum Zeitpunkt der Untersuchung aktuellen Zustand des Bauwerks hinsichtlich der schadlosen Aufnahme planmäßiger Beanspruchungen. Das Bauwerk wird als standsicher eingestuft, wenn der Bauwerkswiderstand (Bauteilzustand, Baustoffqualität, Bauteilabmessungen) und die auftretenden planmäßigen Beanspruchungen den Annahmen der Bemessung bzw. einer Tragfähigkeitseinstufung entsprechen.

Die **Verkehrssicherheit** bewertet die Bauwerksausbildung hinsichtlich des Gefahrenpotentials bei bestimmungsgemäßer Nutzung sowohl für Verkehrsteilnehmer und Fahrzeuge als auch für Personen und Sachen im Umfeld des Bauwerks. Die Verkehrssicherheit ist gegeben, wenn bei Würdigung der im Verkehr üblichen Sorgfalt zum Zeitpunkt der Prüfung keine Gefährdung infolge der Nutzung zu erwarten ist, bzw. Verkehrsteilnehmer durch geeignete Maßnahmen auf Gefahrensituationen aufmerksam gemacht werden.

Im Gegensatz zu den ersten beiden Kriterien bezieht der Aspekt **Dauerhaftigkeit** die zeitliche Entwicklung der Widerstandsfähigkeit des Bauwerks bzw. einzelner Bauteile gegenüber Einwirkungen in die Zustandsbewertung ein. Die Dauerhaftigkeit eines Bauwerks



ist gegeben, wenn es lediglich geringfügige Mängel bzw. Schäden aufweist, die im Zuge üblicher Instandsetzungsmaßnahmen beherrschbar sind und daher keine Einschränkung der planmäßigen Nutzung des Bauwerks im Rahmen der angestrebten Nutzungsdauer zu erwarten ist.

Die Zustandsnoten für Ingenieurbauwerke nach DIN 1076 [9] bewerten den Gesamtzustand eines Bauwerks mit Zahlenwerten zwischen 1,0 und 4,0. Die Noten sind unter Berücksichtigung der Schadensauswirkung auf die „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ der Konstruktion wie folgt definiert:

**sehr guter Bauwerkszustand (Note 1,0-1,4):** Die **Standicherheit**, **Verkehrssicherheit** und **Dauerhaftigkeit** des Bauwerks sind gegeben.

**Laufende Unterhaltung** erforderlich.

**guter Bauwerkszustand (Note 1,5-1,9):** Die **Standicherheit** und **Verkehrssicherheit** des Bauwerks sind gegeben.

Die **Dauerhaftigkeit** mindestens einer **Bauteilgruppe** kann **beeinträchtigt** sein. Die **Dauerhaftigkeit** des Bauwerkes **längerfristig geringfügig beeinträchtigt** werden.

**Laufende Unterhaltung** erforderlich.

**befriedigender Bauwerkszustand (Note 2,0-2,4):** Die **Standicherheit** und **Verkehrssicherheit** des Bauwerks sind gegeben.

Die **Standicherheit** und/oder **Dauerhaftigkeit** mindestens einer **Bauteilgruppe** können **beeinträchtigt** sein.

Die **Dauerhaftigkeit** des Bauwerkes kann **längerfristig beeinträchtigt** werden. Eine **Schadensausbreitung** oder **Folgeschädigung** des Bauwerks, die **langfristig** zu erheblichen **Standicherheits-** und/oder **Verkehrssicherheitsbeeinträchtigungen** oder erhöhtem Verschleiß führt, ist **möglich**.

**Laufende Unterhaltung** erforderlich.

**Mittelfristig Instandsetzung** erforderlich.

Maßnahmen zur **Schadensbeseitigung** oder **Warnhinweise** zur Aufrechterhaltung der **Verkehrssicherheit** können **kurzfristig** erforderlich sein.

**ausreichender Bauwerkszustand (Note 2,5-2,9):** Die **Standicherheit** des Bauwerks ist gegeben.

Die **Verkehrssicherheit** des **Bauwerks** kann **beeinträchtigt** sein.

Die **Standssicherheit** und/oder **Dauerhaftigkeit** mindestens einer **Bauteilgruppe** können **beeinträchtigt** sein.

Die **Dauerhaftigkeit** des **Bauwerks** kann **beeinträchtigt** sein. Eine **Schadensausbreitung** oder **Folgeschädigung** des **Bauwerks**, die **mittelfristig** zu erheblichen **Standssicherheits-** und/oder **Verkehrssicherheitsbeeinträchtigungen** oder erhöhtem **Verschleiß** führt, ist dann **zu erwarten**.

**Laufende Unterhaltung** erforderlich.

**Kurzfristig Instandsetzung** erforderlich.

Maßnahmen zur **Schadensbeseitigung** oder **Warnhinweise** zur Aufrechterhaltung der **Verkehrssicherheit** können **kurzfristig** erforderlich sein.

**nicht ausreichender Bauwerkszustand (Note 3,0-3,4):** Die **Standssicherheit** und/oder **Verkehrssicherheit** des **Bauwerks** sind **beeinträchtigt**.

Die **Dauerhaftigkeit** des **Bauwerks** kann **nicht mehr gegeben** sein. Eine **Schadensausbreitung** oder **Folgeschädigung** kann **kurzfristig** dazu führen, dass die **Standssicherheit** und/oder **Verkehrssicherheit** nicht mehr gegeben sind.

**Laufende Unterhaltung** erforderlich.

**Umgehend Instandsetzung** erforderlich.

Maßnahmen zur **Schadensbeseitigung** oder **Warnhinweise** zur Aufrechterhaltung der **Verkehrssicherheit** oder **Nutzungseinschränkungen** sind **umgehend** erforderlich.

**ungenügender Bauwerkszustand (Note 3,5-4,0):** Die **Standssicherheit** und/oder **Verkehrssicherheit** des **Bauwerks** sind **erheblich beeinträchtigt** oder **nicht mehr gegeben**.

Die **Dauerhaftigkeit** des **Bauwerks** kann **nicht mehr gegeben** sein. Eine **Schadensausbreitung** oder **Folgeschädigung** kann **kurzfristig** dazu führen, dass die **Standssicherheit** und/oder **Verkehrssicherheit** nicht mehr gegeben sind oder dass sich ein irreparabler **Bauwerksverfall** einstellt.

**Laufende Unterhaltung** erforderlich.

**Umgehende Instandsetzung** bzw. **Erneuerung** erforderlich.

Maßnahmen zur **Schadensbeseitigung** oder **Warnhinweise** zur Aufrechterhaltung der **Verkehrssicherheit** oder **Nutzungseinschränkungen** sind **sofort** er-

forderlich.

Die Ermittlung der Gesamtzustandsnote eines Bauwerks erfolgt auf der Basis der Bewertung der Einzelschäden. Jeder bei einer Brückenprüfung erfasste Einzelschaden wird getrennt nach den Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ über eine Zahlenskala bewertet. Der Wert 0 gibt an, dass der Schaden keinen Einfluss auf das entsprechende Kriterium hat. Der stärkste negative Einfluss wird mit dem Wert 4 kodiert. In Tabelle 8.1 sind exemplarisch die Definitionen der Zahlenwerte für die Bewertung des Kriteriums Standicherheit angegeben.

**Tabelle 8.1:** Definitionen der Schadensbewertung nach dem Kriterium Standicherheit [28]

Bewertung	Beschreibung
0	Der Mangel/Schaden hat <b>keinen Einfluss</b> auf die Standicherheit des <b>Bauteils/Bauwerks</b>
1	Der Mangel/Schaden <b>beeinträchtigt</b> die Standicherheit des <b>Bauteils</b> , hat jedoch <b>keinen Einfluss</b> auf die Standicherheit des <b>Bauwerks</b> . Einzelne geringfügige Abweichungen in Bauteilzustand, Baustoffqualität oder Bauteilabmessungen und geringfügige Abweichungen hinsichtlich der planmäßigen Beanspruchung liegen noch <b>deutlich im Rahmen der zulässigen Toleranzen</b> . <b>Schadensbeseitigung</b> im Rahmen der <b>Bauwerksunterhaltung</b> .
2	Der Mangel/Schaden <b>beeinträchtigt</b> die Standicherheit des <b>Bauteils</b> , hat jedoch nur <b>geringen Einfluss</b> auf die Standicherheit des <b>Bauwerks</b> . Die Abweichungen in Bauteilzustand, Baustoffqualität oder Bauteilabmessungen oder hinsichtlich der planmäßigen Beanspruchung aus der Bauwerksnutzung <b>haben die Toleranzgrenzen erreicht</b> bzw. <b>in Einzelfällen überschritten</b> . <b>Schadensbeseitigung mittelfristig</b> erforderlich.

Bewertung	Beschreibung
3	<p>Der Mangel/Schaden <b>beeinträchtigt</b> die Standsicherheit des <b>Bauteils</b> und des <b>Bauwerks</b>. Die Abweichungen in Bauteilzustand, Baustoff Qualität oder Bauteilabmessungen oder hinsichtlich der planmäßigen Beanspruchung aus der Bauwerksnutzung <b>übersteigen die zulässigen Toleranzen</b>.</p> <p>Erforderliche Nutzungseinschränkungen sind nicht vorhanden oder unwirksam.</p> <p>Eine <b>Nutzungseinschränkung</b> ist <b>gegebenenfalls umgehend</b> vorzunehmen.</p> <p><b>Schadensbeseitigung kurzfristig</b> erforderlich.</p>
4	<p>Die Standsicherheit des <b>Bauteils</b> und des <b>Bauwerks</b> ist <b>nicht mehr gegeben</b>.</p> <p>Erforderliche Nutzungseinschränkungen sind nicht vorhanden oder unwirksam.</p> <p><b>Sofortige Maßnahmen</b> sind während der Bauwerksprüfung erforderlich.</p> <p>Eine <b>Nutzungseinschränkung</b> ist <b>umgehend</b> vorzunehmen.</p> <p>Die <b>Instandsetzung</b> oder <b>Erneuerung</b> ist <b>einzuleiten</b>.</p>

Die Richtlinie RI-EBW-PRÜF [28] erleichtert dem durchführenden Bauwerksprüfer die Festlegung der numerischen Schadensbewertung durch die Bereitstellung eines umfassenden Schadenskatalogs. Für zahlreiche Schadensbeispiele sind die Bewertungszahlen für die Standsicherheit (S), die Verkehrssicherheit (V) und die Dauerhaftigkeit (D) vorgegeben. Dabei ist beispielsweise bereits berücksichtigt, dass stets gilt:  $D \geq S$ . Können die planmäßigen Beanspruchungen nicht mehr schadlos aufgenommen werden, so ist die Nutzungsdauer und dadurch die Dauerhaftigkeit beeinträchtigt.

Im Anschluss an diese Schadensbewertung ermittelt das Programmsystem SIB-Bauwerke [111] unter Berücksichtigung aller Einzelschadensbewertungen und der Aspekte Standsicherheit, Verkehrssicherheit und Dauerhaftigkeit eine Zustandsnote. Der in [71] dargestellte Algorithmus ermittelt dafür zunächst für jeden Einzelschaden eine Zustandszahl  $Z_i^E$ . Die drei Maßzahlen S, V und D werden mittels eines Bewertungsschlüssels zu einer Basiszustandszahl zusammengefasst. Da bei der Festlegung von S, V und D stets von

einer mittleren Schadensausbreitung ausgegangen wird, ist für kleine bzw. große Schadensausbreitungen die Basiszahl um den Wert 0,1 zu reduzieren bzw. zu erhöhen. Für die in der ASB, Teilsystem Bauwerksdaten [26] definierten Bauteilgruppen werden die Zustandsnoten  $Z_i^E$  im Anschluss zu  $Z_j^{BG}$  zusammengefasst. Dabei ist der gravierendste Einzelschaden, d. h. die größte Zustandsnote  $Z_{max}^E$ , sowie die Anzahl  $m$  der dokumentierten Schäden in der Bauteilgruppe entscheidend. Für den Überbau wird die Zustandsnote  $Z_{UB}^{BG}$  beispielsweise mit

$$Z_{UB}^{BG} = \begin{cases} Z_{max}^E - 0,1 & \text{falls } m < 5 \\ Z_{max}^E + 0,1 & \text{falls } m > 15 \\ Z_{max}^E & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.1)$$

ermittelt. Für alle anderen Bauteilgruppen wird die entsprechende Zustandsnote  $Z_j^{BG}$  analog bestimmt. Der Zu- bzw. Abschlag in Gleichung (8.1) erfolgt jedoch schon bei  $m > 5$  bzw.  $m < 3$ . Schließlich wird auf der Grundlage der Zustandsnoten der Bauteilgruppen  $Z_j^{BG}$  die Gesamtzustandsnote  $Z$  des Brückenbauwerks bestimmt. Der Ausgangspunkt hierfür ist die am schlechtesten bewertete Bauteilgruppe. Die korrespondierende Zustandszahl  $Z_{max}^{BG}$  bestimmt unter Berücksichtigung des Anteils  $p$  der geschädigten Baugruppen die Note  $Z$  des Bauwerks:

$$Z = \begin{cases} Z_{max}^{BG} - 0,1 & \text{falls } p < 0,25 \\ Z_{max}^{BG} + 0,1 & \text{falls } p > 0,50 \\ Z_{max}^{BG} & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.2)$$

## 8.2 Bewertung des Verfahrens nach RI-EBW-PRÜF

Die steigenden Anforderungen an eine optimierte Erhaltungsplanung der Ingenieurbauwerke und insbesondere der Brücken des Bundes und der Länder spiegeln sich u. a. in der Entwicklung der RI-EBW-PRÜF wider. So war das Verfahren nach RI-EBW-PRÜF (Ausgabe 1994) noch durch „eine detaillierte Schadenserfassung und die mehr oder weniger subjektive Vergabe einer globalen Zustandsnote“ [71] gekennzeichnet. Durch die Entwicklung eines Bauwerks-Management-Systems (BMS), das den Bund und die Länder in die Lage versetzen soll, neben einen Überblick über den Zustand der Bauwerke auf Netzebene auch Aussagen zum Finanzbedarf zu erlangen und Strategien, Ziele sowie Rahmenbedingungen in der Erhaltungspraxis zu verwirklichen, ergab sich jedoch die Notwendigkeit einer detaillierten Schadenserfassung und Bewertung nach möglichst einheitlichen Kriterien. Dies

wurde durch die mehrfache Überarbeitung der RI-EBW-PRÜF (Ausgabe 1998, 2004 und 2007) und insbesondere durch die Bereitstellung eines umfangreichen Beiseispielkatalogs für typische Schäden und deren Bewertung angestrebt. Die Umsetzung der Richtlinie und des Beiseispielkatalogs in das Programmsystem SIB-Bauwerke [111] ermöglicht es dem Prüfingenieur die Schäden direkt am Bauwerk mittels eines „notebooks“ aufzunehmen und zu bewerten. Bei der Einstufung eines Schadens nach den Kriterien Standsicherheit (S), Verkehrssicherheit (V) und Dauerhaftigkeit (D) kann sich der Prüfingenieur auf ca. 450 Einzelbeispiele stützen. Für diese häufig vorkommenden Schadensbilder sind Musterbewertungen für S, V und D vorgenommen worden.

Diese Bewertungen stellen jedoch eine generalisierte Einschätzung der Auswirkungen von Deteriorationen des Bauwerkszustandes auf die Merkmale Standsicherheit (S), Verkehrssicherheit (V) und Dauerhaftigkeit (D) auf der Basis von Erfahrungswissen dar. Dabei bleiben teilweise Informationen der detaillierten Schadenserfassung unberücksichtigt. So wird beispielsweise die Bedeutung einer geschädigten Bauteilgruppe für das Gesamttragssystem des Bauwerks bei der Ermittlung der Zustandsnote vernachlässigt. Derzeit werden alle Baugruppen als gleichbedeutend behandelt [71]. In gleicher Weise bleibt der Ort eines festgestellten Einzelschadens innerhalb einer Bauteilgruppe, obwohl er im Rahmen der Bauwerksprüfung aufgenommen und dokumentiert wird, bei der Festlegung von S, V und D unberücksichtigt. Beispielsweise unterstellt die Bewertung fortgeschrittener Korrosion der Tragbewehrung (S=3, D=3) implizit den selben Einfluss auf die Standsicherheit und die Dauerhaftigkeit des Tragwerks, unabhängig von der tatsächlichen Beanspruchung der Bewehrung am Schadensort. Der Prüfingenieur kann zwar grundsätzlich durch eine Korrektur der vorgegebenen Einzelschadensbewertung derartige Einflüsse berücksichtigen, ist dann jedoch erneut gezwungen die Auswirkungen eines Schadens auf die Standsicherheit und Dauerhaftigkeit des Tragwerks abzuschätzen. Diese Abschätzung, wie auch die Einordnung eines untersuchten Einzelschadens zu einem Schadensbeispiel, beispielsweise eines Korrosionsschadens in eine der drei Stufen (beginnende bzw. fortgeschrittene Querschnittsminderung, teilweiser Ausfall), kann nur subjektiv erfolgen und ist daher von der Persönlichkeit und vom Erfahrungsschatz des Brückenprüfers abhängig. Dies führt in der Konsequenz jedoch dazu, dass die im Rahmen der Bauwerksprüfungen ermittelten Zustandsnoten an Objektivität und Vergleichbarkeit einbüßen und daher in der Praxis oftmals nicht wie gefordert zur Dringlichkeitsreihung von Erhaltungsmaßnahmen herangezogen werden können.

## 8.3 Fuzzy-Zustandsbewertung

Der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte konzeptionelle Ansatz zur Zustandsbewertung geschädigter Brücken unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerksparameter hat zum Ziel, die Bestimmung der Zustandsnoten der Bauwerke weitestgehend zu objektivieren und durch die Berücksichtigung individueller Merkmale die Aussagekraft der Zustandsbewertung zu erhöhen.

Dies wird durch die Realisierung von zwei Teilmodulen erreicht. Im ersten Schritt wird analog zu dem in Abschnitt 8.1 dargestellten Vorgehen eine Schadenserfassung und Schadensbewertung durchgeführt. Die Schadensbewertung umfasst dabei insbesondere die Quantifizierung des Schadensumfangs (z. B. Querschnittminderung des Bewehrungsstahls durch Korrosion). Dabei auftretende Unschärfen, Unsicherheiten bzw. subjektive Bewertungen werden auf der Basis der Möglichkeitstheorie ausschließlich beobachtbaren Eigenschaften des Bauwerks zugeordnet. Im zweiten Schritt werden die Auswirkungen der Einzelschäden auf die Standsicherheit (S) und Dauerhaftigkeit (D) des Bauwerks bewertet. Die Maßzahlen S und D werden dabei im Gegensatz zum Verfahren der RI-EBW-PRÜF jedoch nicht durch den Bauwerksprüfer subjektiv festgelegt, sondern durch ein numerisches Verfahren, das an der Bemessung des Bauwerks orientiert ist, objektiv ermittelt.

Der Ist-Zustand der Brücke zum Zeitpunkt der Prüfung wird mit den in der DIN 1076 angegebenen Hilfsmitteln bestimmt. Sind vorhandene Beschädigungen mit den Methoden der Bauwerksprüfung nach DIN 1076 nicht ausreichend erfassbar, so ist ggf. eine objektbezogene Schadensanalyse [25] mit geeigneten zerstörungsfreien bzw. zerstörungsfreien Prüfmethoden durchzuführen. Die dabei auftretenden Unschärfen und Unsicherheiten bei der Bestimmung maßgebender Kenngrößen werden, wie bereits ausführlich in Abschnitt 4 dargestellt, mit dem Unschärfemaß „Fuzziness“ bewertet. Fuzzy-Größen dürfen bereits anhand weniger objektiver Messungen bestimmt werden (vgl. Abschnitt 4). Darüber hinaus erlaubt die Möglichkeitstheorie explizit die subjektiven Bewertungen des Prüfenieurs bei der Festlegung der unscharfen Kenngrößen (vgl. Abschnitt 3.5) zu berücksichtigen. Die Erfahrung der Bauwerksprüfer und das vorhandene Fachwissen werden somit nachvollziehbar in die Analyse integriert. Da jedoch lediglich der Zustand und nicht dessen mögliche Auswirkung auf die Aspekte Standsicherheit, Verkehrssicherheit und Dauerhaftigkeit unscharf bewertet wird, bleiben die getroffenen Festlegungen transparent und validierbar. Dies gilt ebenfalls, wenn der Bauwerkszustand mit der Hilfe von Verhaltensmodellen, wie

in Abschnitt 5 erörtert, in die Zukunft extrapoliert wird. Gegenstand dieser Prognosen sind stets beobachtbare bzw. messbare Größen, deren Übereinstimmungen mit den theoretischen Vorhersagen bei folgenden regelmäßigen Bauwerksprüfungen validiert werden können.

Die Bewertungen von Schäden des Brückenbauwerks insbesondere bzgl. der Standsicherheit und der Dauerhaftigkeit werden durch eine an der Tragwerksplanung orientierten Auswertung der Lastabtragung objektiv erfasst. Die Abbildung der den Zustand beschreibenden unscharfen Kenngrößen auf die unscharfen Beanspruchungen und unscharfen Beanspruchbarkeiten erfolgt mit der in Abschnitt 6 dargestellten unscharfen Tragwerksanalyse auf der Basis der neu entwickelten hocheffizienten Implementierung der Fuzzy-Arithmetik.

### 8.3.1 Grundlagen

Im Rahmen der Tragwerksplanung werden gemäß DIN 1055-100 [113] zwei einzuhaltende Grenzzustände definiert: Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit.

Grenzzustände der Tragfähigkeit sind Zustände, deren Überschreiten rechnerisch zum Einsturz oder ähnlichen Arten des Tragwerksversagens führt. Die Anforderungen an die Grenzzustände der Tragfähigkeit betreffen:

- die Sicherheit von Personen und
- die Sicherheit des Tragwerks sowie seiner Einrichtungen.

Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit entsprechen Bedingungen, bei deren Überschreitung die festgelegten Nutzungsanforderungen eines Tragwerks oder eines seiner tragenden Teile nicht mehr erfüllt sind. Die Gebrauchstauglichkeitsanforderungen betreffen:

- die Funktion des Bauwerks oder seiner Teile,
- das Wohlbefinden von Personen und
- das optische Erscheinungsbild.

Daneben kann die Einhaltung von Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit eine notwendige Voraussetzung zum dauerhaften Erhalt der Tragfähigkeit sein (z. B. Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton- und Spannbetonbau).



Die Unterschiede in den Definitionen der Grenzzustände nach DIN 1055-100 und der in der RI-EBW-PRÜF enthaltenen Begriffsbestimmungen für die Standsicherheit, die Verkehrssicherheit und die Dauerhaftigkeit geben die unterschiedlichen Zielsetzungen der Regelwerke wieder. Die DIN 1055-100 regelt die Erstellung von Bauwerken und fordert daher, dass Bauwerke so entworfen und ausgeführt werden müssen, dass sie während der vorgesehenen Nutzungsdauer neben ihrer Tragfähigkeit auch ihre Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit bei angemessenem Unterhaltungsaufwand behalten. Im Gegensatz dazu dient die RI-EBW-PRÜF dazu, den „Status quo“ eines Bauwerks zu bewerten. Dieser kann jedoch u. U. bereits erheblich von dem „idealen“ Zustand von Neubauten abweichen. Die in der RI-EBW-PRÜF enthaltenen Begriffsbestimmungen für Standsicherheit, Verkehrssicherheit und Dauerhaftigkeit reflektieren daher differenzierter über den Bauwerkszustand, als die Definitionen der Grenzzustände nach DIN 1055-100. So wird der Aspekt der Verkehrssicherheit in der DIN 1055-100 nicht eigenständig behandelt. Die gefahrlose und bestimmungsgemäße Nutzung und der Schutz Dritter wird implizit durch die Einhaltung der Grenzzustände der Tragfähigkeit und der Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit sowie durch zusätzliche Regelwerke (z. B. Brandschutzverordnung) gewährleistet. Die Dauerhaftigkeit wird in der DIN 1055-100 zwar explizit gefordert, ihre Gewährleistung wird in den bauartspezifischen Bemessungsnormen jedoch implizit durch die Berücksichtigung der Grenzzustände der Tragfähigkeit und der Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit sichergestellt. Lediglich der Grenzzustand der Tragfähigkeit und das Merkmal der Standsicherheit weisen quasi identische Aussagen auf.

Aus diesem Grund bildet der Nachweis der Tragfähigkeit der geschädigten Brücke das zentrale Element des Konzeptes der neuen Fuzzy-Zustandsbewertung bzgl. der Aspekte Standsicherheit und Dauerhaftigkeit.

### 8.3.2 Schadensbewertung

Die **Standsicherheit** eines Brückenbauwerks wird mit Hilfe des rechnerischen Nachweises der schadlosen Aufnahme planmäßiger Beanspruchungen beurteilt. Ausgangspunkt der Beurteilung ist die Bestimmung des Ist-Zustandes des Bauwerks. Dies geschieht im Rahmen der regelmäßigen Bauwerksprüfungen nach DIN 1076. Werden dabei komplexe, schwerwiegende oder unklare Schadensbilder vorgefunden, so kann eine darüber hinausgehende detaillierte objektbezogene Schadensanalyse erforderlich werden. Dabei kommen

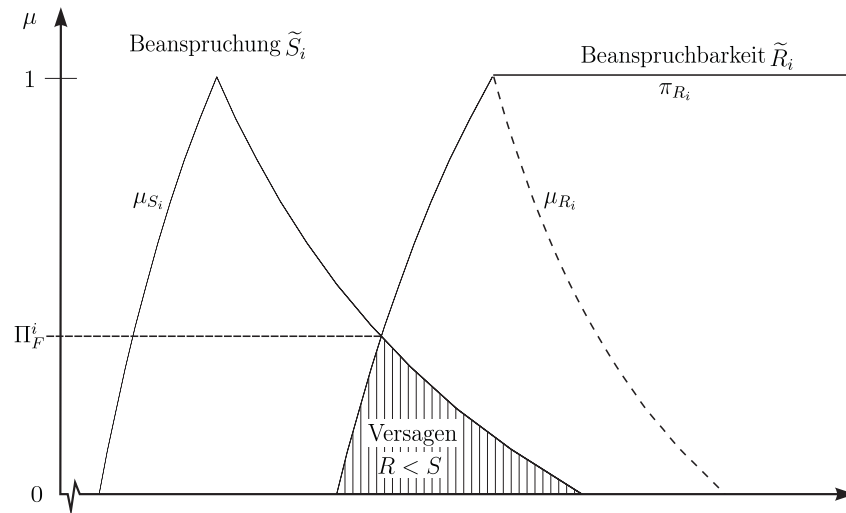
i. d. R. zerstörungsfreie bzw. zerstörungsarme Prüfmethode zum Einsatz. Trotz des Einsatzes moderner Messtechnik können i. A. nicht alle relevanten Daten akquiriert werden. Die Messung streuender Größen kann in der Praxis kaum in einer ausreichenden Anzahl wiederholt werden, um eine statistische Auswertung durchführen zu können. Darüber hinaus können Messergebnisse unscharf vorliegen (z. B. bildgebende Radar-Verfahren) oder bestimmte Merkmale entziehen sich vollständig einer Messung und sind daher auf der Basis von Erfahrungswissen subjektiv zu bewerten. Ein mathematischer Ansatz zur konsistenten Verarbeitung solcher Daten ist mit der Möglichkeitstheorie und der Theorie der unscharfen Mengen gegeben. In Abschnitt 4 wurde ausführlich die Bestimmung unscharfer Tragwerksparameter in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden objektiven Messdaten diskutiert. Darüber hinaus ermöglicht der Einsatz der Möglichkeitstheorie und der Theorie der unscharfen Mengen die Nutzung weiterer Informationsquellen wie beispielsweise die in Abschnitt 4 dargestellten Schädigungssimulationen, Expertensysteme und insbesondere subjektive Einschätzungen des Prüfsachverständigen auf der Basis seiner langjährigen Erfahrung. Den mit den Informationsquellen verbundenen subjektiven und objektiven Unsicherheiten bei der Festlegung von Tragwerksparametern wird durch die Formulierung als Fuzzy-Tragwerksparameter Rechnung getragen. Eine Darstellung als Zufallsgrößen hingegen ist wegen der subjektiven Unsicherheiten nicht möglich.

Auf der Grundlage der Fuzzy-Tragwerksparameter werden mit dem in Abschnitt 6 dargestellten neuartigen Fuzzy-Kalkül die Beanspruchungen des Bauwerks berechnet. Die Beanspruchbarkeiten der Bauteile sind entweder aus fuzzyfizierten Eingangsgrößen berechenbar, oder sie werden direkt festgelegt. Die Standsicherheit wird durch Vergleich der Beanspruchungen ( $\tilde{S}$ ) mit den Widerständen ( $\tilde{R}$ ) der Bauteile der Struktur bewertet. Im Raum der Fuzzy-Eingangsgrößen wird der Grenzzustand der Standsicherheit analog zu den bekannten probabilistischen Verfahren durch die Grenzzustandsfunktion  $g(\underline{x}) = 0$  gekennzeichnet, die den Überlebensbereich ( $g(\underline{x}) \geq 0$ ) vom Versagensbereich ( $g(\underline{x}) < 0$ ) trennt. Die Grenzzustandsfunktion ist i. A. jedoch nicht geschlossen formulierbar. Statt dessen werden, wie in Abbildung 8.1 dargestellt, ausgewählte Fuzzy-Beanspruchungen ( $\tilde{S}_i$ ) mit den korrespondierenden Fuzzy-Beanspruchbarkeiten ( $\tilde{R}_i$ ) verglichen. Der schraffierte Bereich in Abbildung 8.1 repräsentiert alle möglichen Zustände, die zu einem Verlust der Standsicherheit führen und wird durch die Bedingung  $\tilde{R}_i < \tilde{S}_i$  charakterisiert. Für die Bestimmung der Versagensmöglichkeit  $\Pi_F^i$  werden die Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_{R_i}$  der Fuzzy-Größen  $\tilde{R}_i$  als Möglichkeitsdichtefunktionen  $\hat{\pi}_{R_i}$  interpretiert (vgl. Gleichung

(3.124)) und aus ihnen mit Gleichung (3.126) die Möglichkeitsverteilungsfunktionen  $\pi_{R_i}$  ermittelt. Mit

$$\Pi_F^i = \sup \min(\mu_{S_i}, \pi_{R_i}) \quad (8.3)$$

kann daraus schließlich die Versagensmöglichkeit  $\Pi_F^i$  für das betrachtete Paar aus Fuzzy-Beanspruchung und Fuzzy-Beanspruchbarkeit bestimmt werden.



**Abbildung 8.1:** Versagensmöglichkeit  $\Pi_F^i$ ; Vergleich der Fuzzy-Beanspruchung ( $\tilde{S}_i$ ) mit den mit der Fuzzy-Beanspruchbarkeit ( $\tilde{R}_i$ )

Durch Auswertung aller Paare ( $\tilde{R}_i, \tilde{S}_i$ ) wird mit

$$\Pi_F = \max(\Pi_F^i) \quad (8.4)$$

die Versagensmöglichkeit  $\Pi_F$  des Tragwerks bestimmt. Wird mit  $\Pi_F$  die Aussage „das Tragwerk versagt“ verknüpft, so kann eine Interpretation der Versagensmöglichkeit auf der Grundlage von Abschnitt 3.5 erfolgen. Mit

$$\Pi_F = 0 \quad (8.5)$$

wird dann Versagen des Tragwerks ausgeschlossen. Die Konstruktion kann für den angenommenen Bauwerkszustand die planmäßigen Beanspruchungen sicher in den Baugrund abführen. Wird hingegen

$$\Pi_F = 1 \quad (8.6)$$

ermittelt, so ist das Bauwerk nicht sicher. Versagen kann uneingeschränkt eintreten. Diese Aussage ist jedoch nicht gleichbedeutend damit, dass das Bauwerk garantiert seine Standsicherheit verliert. Zwischenwerte für  $\Pi_F$

$$0 < \Pi_F < 1 \quad (8.7)$$

bewerten den möglichen Verlust der Standsicherheit graduell.

Diese Bewertung der Möglichkeit des Tragwerksversagens kann in eine Schadensbewertung entsprechend der in Tabelle 8.1 angegebenen Definitionen überführt werden. Unter Beachtung der verbalen Beschreibung, des durch den Zahlenwert charakterisierten Zustandes wird eine Schadensbewertung nach dem Kriterium Standsicherheit auf der Basis der errechneten Versagensmöglichkeit durch

$$S = \begin{cases} 0 & \text{falls } \Pi_F = 0 \\ 4 \cdot \Pi_F & \text{falls } 0 < \Pi_F < 1 \\ 4 & \text{falls } \Pi_F = 1 \end{cases} \quad (8.8)$$

vorgeschlagen.

Die **Dauerhaftigkeit** wird im Rahmen des neuen Konzepts als Maß der Veränderung der Standsicherheit interpretiert. Mit Hilfe der in Abschnitt 5 dargestellten Modelle zur Prognose der Schädigungsentwicklung wird der aktuelle Zustand eines Bauwerks in die Zukunft extrapoliert. Auf der Basis des ermittelten Zustands erfolgt dann eine erneute Bewertung der Standsicherheit. Als Prognosezeitraum kann dafür die vorgesehene Nutzungsdauer der Brücke oder der Zeitraum bis zur nächsten Hauptuntersuchung gewählt werden. Die ermittelte Standsicherheit  $S$  unter Berücksichtigung der Veränderung des Brückenzustandes wird dann als Maß für die Dauerhaftigkeit  $D$  interpretiert:

$$D = S(t_{nutz}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \Pi_F = 0 \\ 4 \cdot \Pi_F & \text{falls } 0 < \Pi_F < 1 \\ 4 & \text{falls } \Pi_F = 1 \end{cases} \quad (8.9)$$

Mit diesem Vorgehen wird also die Veränderung der Standsicherheit im gewählten Prognosezeitraum als maßgebendes Kriterium für die Dringlichkeitsreihung von Maßnahmen bewertet. Dabei wird automatisch die Forderung  $D \geq S$  der RI-EBW-PRÜF erfüllt. Die Prognosemodelle und insbesondere die Modellparameter können und müssen im Rahmen dieses Vorgehens durch Beobachtung der realen Veränderungen der Bausubstanz kalibriert werden (vgl. Abschnitt 7.2). Dazu ist es sinnvoll, die Zustandsänderungen für die Zeitpunkte der regelmäßigen Bauwerksprüfungen zu prognostizieren und mit dem Zustand

des Bauwerks zu vergleichen. Sind auf Grund zu großer Abweichungen der Prognosewerte von dem beobachteten Zustand Korrekturen an den Prognosemodellen vorzunehmen, so kann auf der Basis der modifizierten Prognosen die Einschätzung der Standsicherheit zum Zeitpunkt  $t_{nutz}$  wiederholt und die Bewertung der Dauerhaftigkeit entsprechend angepasst werden.

Für die Bewertung der **Verkehrssicherheit** liefert das dargestellte Vorgehen nur unzulängliche Kriterien. Der rechnerische Nachweis der schadlosen Aufnahme planmäßiger Beanspruchungen hat lediglich die Bewertung der Sicherheit des Bauwerks selbst zum Ziel und kann daher nicht zur Beurteilung der Gefährdung der Bauwerksnutzer dienen. Dies kann an einem Beispiel aus dem Schadenskatalog der RI-EBW-PRÜF verdeutlicht werden: „Absturzsicherung für Lärmschutzelemente schadhaft“ ( $S=0, V=1, D=0$ ). In diesem Fall liegt eine potentielle Gefährdung der Verkehrsteilnehmer vor, obwohl weder die Standsicherheit noch die Dauerhaftigkeit beeinträchtigt werden. Zur Festlegung der Schadensbewertung nach dem Kriterium Verkehrssicherheit wird daher auf den vorliegenden Beispielkatalog und die Festlegungen der RI-EBW-PRÜF zurückgegriffen.

### 8.3.3 Zustandsbewertung

Nachdem jeder Einzelschaden getrennt für die Kriterien „Standsicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ bewertet wurde, sind die Zustandszahlen zu einer Gesamtzustandsnote zusammenzuführen. Hierfür wird auf das in Abschnitt 8.1 dargestellte Vorgehen und insbesondere auf den in [71] dargestellten Bewertungsschlüssel zur Bestimmung der Basiszustandszahl in Abhängigkeit von der Schadensbewertung zurückgegriffen. Mit seiner Hilfe kann das Tripel  $(S, V, D)$  in die Zustandsnote  $Z_i^E$  überführt werden. Da für  $S$  und  $D$  entsprechend den Gleichungen (8.8) und (8.9) reellwertige Maßzahlen zulässig sind, werden Zwischenwerte durch lineare Interpolation ermittelt. Die in Abhängigkeit vom Schadensumfang vorzunehmenden Korrekturen der Basiszustandszahlen, sind in dem vorliegenden Konzept auf Grund der direkten Bewertung der Einzelschäden nicht notwendig. Die Zusammenfassung der Zustandszahlen der Einzelschäden einer Baugruppe (vgl. Gleichung (8.1)) und die Aggregation der Zustandsbewertungen der Bauteilgruppen zur Gesamtzustandsnote des Bauwerks (vgl. Gleichung (8.2)) erfolgt analog zu dem in Abschnitt 8.1 dargestellten Vorgehen.

### 8.3.4 Weiterführende Analysen im Rahmen des BMS

Das Bauwerks-Management-System dient der Planung und dem Controlling von Erhaltungsmaßnahmen bzw. Strategien, der Vorbereitung von Maßnahmen und deren Realisierung. *Krieger* [97] identifiziert als wesentliche Eingangsgrößen für die Bewertungsverfahren des BMS auf Objekt- und Netzebene die, aus den im Verlauf der Bauwerksprüfungen und im Rahmen von detaillierten objektbezogenen Schadensanalysen ermittelten Daten, abgeleiteten Informationen wie u. a.

- Zustandsnoten,
- Angaben zur Schadens- und Zustandsentwicklung und
- mögliche Varianten von Erhaltungsmaßnahmen.

Im Folgenden wird kurz skizziert, wie das erörterte Verfahren der Fuzzy-Zustandsbewertung zielführend eingesetzt werden kann um diese Informationen abzuleiten.

Die Bereitstellung der Zustandszahlen von Einzelschäden und der Zustandsnoten der Gesamtbauwerke wurde bereits ausführlich in den Abschnitten 8.3.2 und 8.3.3 erörtert. Insbesondere die Zustandszahlen dienen als einheitliche Vergleichsbasis für nachgeschaltete Bewertungsverfahren des BMS [72].

Eine quantitative Beschreibung der Schadens- und Zustandsentwicklung von Bauwerken wird insbesondere für die Festlegung des optimalen Eingreifzeitpunktes benötigt. Die zeitvariante Deterioration der Struktur kann mit der Hilfe von phänomenologischen Verhaltensmodellen prognostiziert werden. „Bei der Festlegung von Verhaltensmodellen als Grundlage für netzweit einzusetzende Bewertungsverfahren des BMS geht es weniger um das wirklichkeitsnahe Beschreiben von Schädigungsmechanismen unterschiedlicher Materialien - dieses ist hingegen zweckdienlich für detaillierte objektbezogene Analysen -, sondern vielmehr um zielführende Ansätze zum Beschreiben der Zustandsentwicklung von Bauteilen“ [72]. *Haardt* schlägt unter Berücksichtigung der Randbedingungen des BMS den Einsatz von deterministischen Modellen, wie sie bereits in Abschnitt 5 erörtert und in Abschnitt 8.3.2 zur Bewertung des Kriteriums „Dauerhaftigkeit“ eingesetzt wurden, vor. Auftretende Unsicherheiten bei der Festlegung der Eingangsgrößen in die Modellgleichungen, beispielsweise für die anzunehmende Korrosionsgeschwindigkeit, können durch den Einsatz der Fuzzy-Technologie auch und insbesondere bei unzureichender Fakten-

lage über die tatsächlichen Gegebenheiten in Verbindung mit Experteneinschätzungen berücksichtigt werden. Die Prognose der Schadens- und Zustandsentwicklung eines Bauwerks ist integraler Bestandteil des erarbeiteten Ansatzes. Die Darstellung der zeitlichen Veränderung des Bauwerkszustandes auf der einheitlichen Basis der Zustandszahlen von Einzelschäden und der Zustandsnoten der Gesamtbauwerke, wie sie in [72] dargestellt ist, erfolgt daher einfach durch wiederholte Fuzzy-Zustandsbewertungen des Bauwerks an diskreten Zeitpunkten in der Zukunft.

Für die Festlegung von Erhaltungsmaßnahmen steht im Rahmen des BMS ein Maßnahmenkatalog zur Verfügung. Dieser verknüpft mögliche Maßnahmen mit Schadensbildern. Die Maßnahmen reichen dabei von kleineren Instandsetzungsarbeiten bis hin zum Ersatz von Bauteilen. Wie aus Abbildung 5.1 ersichtlich, führt die Durchführung einer Maßnahme zu einer sprunghaften Verbesserung des Bauwerkszustandes. Diese Verbesserung kann auf der Ebene der Schadensbewertung durch Anpassung von Modellgrößen bzw. durch Variation der Schädigungsmodelle berücksichtigt werden. Beispielsweise hat zwar die Betonsanierung im Bereich freiliegender Bewehrung keinen Einfluss auf die durch Korrosion verringerte Querschnittsfläche des Bewehrungsstahls, wirkt sich jedoch durch Wiederherstellung der Passivierung positiv auf die Dauerhaftigkeit aus. Im Rahmen der Fuzzy-Zustandsbewertung ist daher nach der Instandsetzung das Korrosionsschädigungsmodell durch die Beschreibung der Karbonatisierung zu ersetzen.

Ein weiterer Vorteil des entwickelten Konzeptes zur Zustandsbewertung unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerkparameter ist die Möglichkeit die Wirksamkeit von Nutzungseinschränkungen zu untersuchen. Beschränkungen der zulässigen Geschwindigkeit bzw. der Belastung (zul. Gesamtgewicht der Fahrzeuge) reduzieren die Beanspruchungen der Bauteile des Tragwerks. Diese Reduktion kann bei dem vorliegenden Verfahren berücksichtigt werden und durch eine Verringerung der Versagensmöglichkeit quantifiziert werden. Wie in Abschnitt 8.3.2 erörtert, bildet die ermittelte Versagensmöglichkeit die Grundlage zur Bestimmung der Zustandsnote des Bauwerks. Die Wirksamkeit von Maßnahmen kann nun durch die Angabe einer Zustandsnote unter Berücksichtigung der vorgesehenen Nutzungseinschränkung angegeben und verglichen werden.

### 8.3.5 Sensitivitätsanalyse

Das in Abschnitt 6.3 erörterte „Gedächtnis“ der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Fuzzy-Arithmetik erlaubt für jede Fuzzy-Ergebnisgröße die Identifikation der sie beeinflussenden Fuzzy-Eingangsgrößen. Zusammen mit den bekannten Lösungen der Abbildungsvorschrift (Gleichung (6.2)) kann daraus ein Maß für den Einfluss der Unschärfe der  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  auf jedes der  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m)$  ermittelt werden.

Bei der Fuzzy-Zustandsbewertung und den weiterführenden Analysen im Rahmen des BMS handelt es sich bei den Fuzzy-Eingangsgrößen um Modellgrößen, die i. d. R. auf Grund von wenigen Messungen am Bauwerk bzw. durch Experteneinschätzung subjektiv festgelegt werden und daher mehr oder weniger stark streuen. Die Fuzzy-Ergebnisgrößen der Analysen sind im wesentlichen die ermittelten Versagensmöglichkeiten und die daraus abgeleiteten Zustandszahlen von Einzelschäden bzw. die Zustandsnoten des Gesamtbauwerks. Wie in Abschnitt 3 dargestellt, bilden die Fuzzy-Eingangsgrößen epistemische Unsicherheiten ab. Diese sind vom Kenntnisstand des Beobachters abhängig. Wird der Kenntnisstand beispielsweise durch zusätzliche Datenerhebungen am Bauwerk verbessert, so führt dies i. d. R. zu einer Reduktion der Streuungen der Modellgrößen. Dabei haben jedoch unterschiedliche Fuzzy-Eingangsgrößen unterschiedlichen Einfluss auf die Fuzzy-Ergebnisgrößen. Das Ziel der Sensitivitätsanalyse ist es nun, maßgebende Einflussgrößen zu identifizieren und dadurch den Aufwand der Datenerhebung zu minimieren. Nachfolgend wird das auf [76] basierende Vorgehen repräsentativ für eine Fuzzy-Ergebnisgröße  $\tilde{y}_i$  skizziert.

Zunächst werden mit

$$\eta_i^{\alpha_k} = \frac{1}{2^{n-1}(y_{i,\alpha_k}^R - y_{i,\alpha_k}^L)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{l=1}^{2^{i-1}} (LR_{s_2}^{\alpha_k} - LR_{s_1}^{\alpha_k}) \quad (8.10)$$

mit  $s_1 = k + (l - 1)2^{n-i+1}$   
und  $s_2 = k + (2l - 1)2^{n-i}$

die Einflüsse der Unsicherheit der  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  auf die Unsicherheit von  $\tilde{y}$  auf jedem  $\alpha_k$ -Niveau bestimmt. Mit  $LR_s$  werden dabei die entsprechend der Ordnungsrelation (6.94) strukturierten Lösungen des Abbildungsoperators auf den Kanten des unscharfen kartesischen Produkts der  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  im Raum der Eingangsgrößen (vgl. Abbildung 6.15) bezeichnet. Sind die Fuzzy-Eingangsgrößen mit  $p + 1$   $\alpha_k$ -Niveaus diskretisiert



( $\alpha_0 = 0 < \alpha_k < \alpha_p = 1$ ), so wird das relative Einflussmaß der  $i$ -ten Fuzzy-Eingangsgröße durch Zusammenfassung der  $\alpha_k$ -Niveaus und Normalisierung durch

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^{p-1} \mu_j \left| \eta_i^{\alpha_p} (y_{i,\alpha_p}^R + y_{i,\alpha_p}^L) \right|}{\sum_{q=1}^n \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j \left| \eta_i^{\alpha_p} (y_{q,\alpha_p}^R + y_{q,\alpha_p}^L) \right|} \quad (8.11)$$

bestimmt. Mit Gleichung (8.11) sind die Einflussfaktoren  $\rho_i$  für alle Fuzzy-Eingangsgrößen von  $\tilde{y}_i$  zu bestimmen, wobei stets

$$\sum_{i=1}^n \rho_i = 1 \quad (8.12)$$

sichergestellt ist. Die Faktoren können als Maß für den relativen Einfluss der Unschärfe der ( $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ ) auf die Unschärfe der Ergebnisgröße  $\tilde{y}_i$  interpretiert werden.

## 8.4 Bewertung der Fuzzy-Zustandsbewertung

Der wesentliche Vorteil der Fuzzy-Zustandsbewertung liegt in der konsequenten Trennung zwischen der (unscharfen) Zustandsbeschreibung eines Tragwerks und der Bewertung des Zustands bzgl. der Kriterien „Standssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“.

Die Quantifizierung von Schadensmerkmalen (z. B. Querschnittminderung infolge Korrosion, Größe des Abplatzung, usw.) im Rahmen der Zustandsbeschreibung ist analog dem Vorgehen der RI-EBW-PRÜF teilweise subjektiv und daher von der Persönlichkeit und vom Erfahrungsschatz des Brückenprüfers abhängig. Dabei auftretende objektive und subjektive Unsicherheiten werden bei der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Fuzzy-Zustandsbewertung jedoch ausschließlich bei den Modellgrößen bzw. Berechnungsparametern (vgl. Abschnitt 4) berücksichtigt. Die ermittelten Fuzzy-Modellgrößen bzw. Fuzzy-Berechnungsparameter sind dabei ausschließlich deskriptiven Schadensmerkmalen zugeordnet. Eine Validierung der getroffenen Festlegungen kann daher im Rahmen von Folgeuntersuchungen durch erneute Begutachtung unabhängig und vergleichbar durchgeführt werden. Dadurch wird trotz der expliziten Berücksichtigung subjektiver Wertungen die Grundlage für eine objektiv nachvollziehbare Zustandsbewertung geschaffen.

Die aus der Fuzzy-Zustandsbeschreibung abgeleiteten unscharfen Tragwerksparameter werden dann mittels einer unscharfen Tragwerksanalyse unter Einsatz der entwickelten

Fuzzy-Arithmetik (Abschnitt 6.3) objektiv und nachvollziehbar auf die maßgebenden Beurteilungskriterien, die Fuzzy-Beanspruchungen ( $\tilde{S}_i$ ) und die Fuzzy-Beanspruchbarkeiten ( $\tilde{R}_i$ ) abgebildet. Aus diesen beiden Größen werden anschließend die scharfen Zustandszahlen für die Einzelschäden und daraus die scharfe Zustandsnote des Gesamtbauwerks abgeleitet. Die Bewertung des unscharfen Systemzustandes hinsichtlich der Standsicherheit und Dauerhaftigkeit wird als mathematisch eindeutige und daher objektive Abbildung realisiert. Darüber hinaus wird durch den Einsatz eines unscharfen mechanischen Modells der Konstruktion der tatsächliche Einfluss von Schäden auf die Lastabtragung erfasst und dadurch evtl. vorhandene Systemreserven in der Bewertung berücksichtigt.

Die Berücksichtigung individueller Bauwerks- und Schadenseigenschaften bei der Durchführung unscharfer Tragwerksanalysen führt zu realistischeren Zustands- und Schadensbewertungen. Die Ergebnisqualität der Analysen wird dabei maßgeblich von der Qualität der Eingangsgrößen bestimmt. Diese werden ausschließlich von messbaren bzw. beobachtbaren Größen abgeleitet und sind daher validierbar. Die Bewertungsergebnisse, d. h. die Zustandsnoten werden dadurch vergleichbarer.

Die für die Zustandsbeschreibung benötigten Informationen werden im Rahmen der regelmäßigen Bauwerksprüfungen bzw. bei objektbezogenen Schadensanalysen bereits weitestgehend beschafft. Der Einsatz von Modellen zur Prognose der Schädigungsentwicklung auf der Basis von phänomenologischen Modellen ist bereits integraler Bestandteil des BMS. Die bewährten deterministischen Verhaltensmodelle werden im Rahmen der Fuzzy-Zustandsbewertung zu Fuzzy-Verhaltensmodellen erweitert. Dadurch ist es möglich bei der Schadensentwicklungsprognose Unsicherheit bei der Festlegung der Einflussgrößen mathematisch kohärent zu berücksichtigen. Da die unscharfen Zustandsbeschreibungen analog zur RI-EBW-PRÜF zu einer scharfen Zustandsnote zusammengefasst werden, kann das vorgestellte Verfahren nahtlos in das BMS integriert werden.

# Kapitel 9

## Anwendungsbeispiele

Die entwickelten Algorithmen für die unscharfe Tragwerksanalyse mit der „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“, für die Modellkalibrierung und für die Modellvalidierung können für nahezu beliebige baustatische Probleme angewendet werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden sie insbesondere für die Zustandsbeurteilung geschädigter Brücken herangezogen. In diesem die Arbeit abschließenden Kapitel wird das entwickelte Konzept der Zustandsbeurteilung geschädigter Brücken unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerksparameter an zwei konkreten Beispielen dargestellt.

Das erste Beispiel illustriert den Einsatz und die Vorteile der Fuzzy-Zustandsbewertung im Rahmen des BMS durch eine vergleichende Schadensbewertung an zwei exemplarischen Brücken sowie einer Schadensentwicklungsanalyse kombiniert mit der Bewertung einer Sanierungsmaßnahme.

Das zweite Beispiel dokumentiert die Flexibilität und das breite Einsatzspektrum der Fuzzy-Zustandsbewertung durch die Analyse eines Schadens, der außerhalb der Anwendungsgrenzen des Standardverfahrens nach RI-EBW-PRÜF liegt. Dabei wird neben der Möglichkeit, quasi beliebige Schadensmodelle nutzen zu können, insbesondere auch der zielführende Einsatz der Algorithmen zur Modellvalidierung gezeigt.

## 9.1 Beispiel 1

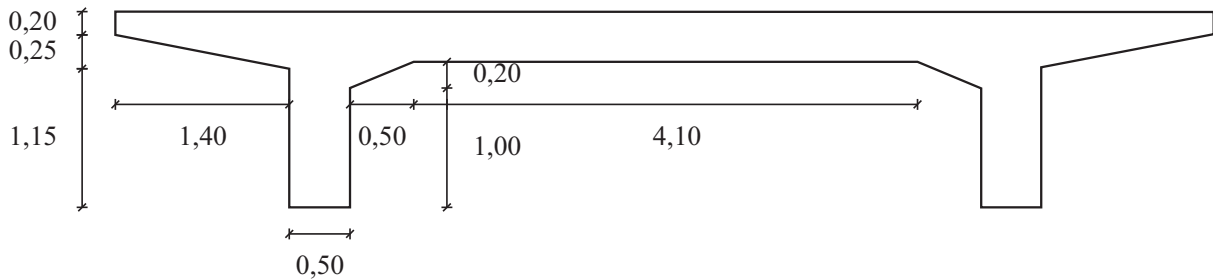
### 9.1.1 Schadens- und Zustandsbeschreibung der Brücke 1

Bei der Brücke 1 handelt es sich um eine zweistegige Plattenbalkenbrücke in Stahlbetonbauweise mit fünf Feldern (14,00 m, 18,00 m, 18,00 m, 18,00 m, 14,00 m). Der Überbau weist in Längsrichtung einen konstanten Querschnitt auf und ist als Durchlaufträger ausgeführt. Die Fahrbahnbreite beträgt 6,40 m. Die Endauflager sind gelenkig ausgeführt.



**Abbildung 9.1:** Brücke 1, Ansicht

Die Querschnittsabmessungen sind Abbildung 9.2 zu entnehmen. Die angegebenen Maßketten sind in der Einheit Meter dargestellt.



**Abbildung 9.2:** Brücke 1, Querschnittsabmessungen [m]

In Tabelle 9.1 sind die Angaben zur Bewehrungsverteilung im Brückenüberbau zusammengefasst.

**Tabelle 9.1:** Brücke 1, statisch relevante Bewehrung

	Feld 1	Auflager 2	Feld 2	Auflager 3	Feld 3
Lagen [-]	2	1	2	1	2
Anzahl [-]	7	18	7	18	7
Durchmesser [mm]	32	32	32	32	32
Fläche [cm <sup>2</sup> ]	112,6	144,8	112,6	144,8	112,6
	Auflager 4	Feld 4	Auflager 5	Feld 5	
Lagen [-]	1	2	1	2	
Anzahl [-]	18	7	18	7	
Durchmesser [mm]	32	32	32	32	
Fläche [cm <sup>2</sup> ]	144,8	112,6	144,8	112,6	

Die Betongüte des Überbaus wurde als B 300 identifiziert und die Stahlgüte der Tragbewehrung weist Eigenschaften eines Betonstahls I auf.

Die Brücke weist zahlreiche Schäden, wie beispielsweise Betonabplatzungen und freiliegende Bewehrungsstellen auf. Im Besonderen wird der Einzelschaden freiliegender Tragbewehrung am rechten der beiden Stege (vgl. Abbildung 9.1) untersucht. Der Schaden befindet sich vom zugewandten Widerlager aus betrachtet (vgl. Abbildung 9.1) im zweiten Feld. Die Photodokumentation in Abbildung 9.3 zeigt Detailaufnahmen des Schadens.



Abbildung 9.3: Brücke 1, Schadensdokumentation

### 9.1.2 Schadens- und Zustandsbeschreibung der Brücke 2

Bei der Brücke 2 handelt es sich um eine zweistegige Plattenbalkenbrücke in Stahlbetonbauweise mit neun Feldern (15,50 m, 18,45 m, 18,45 m, 18,45 m, 18,45 m, 18,45 m, 18,45 m, 18,45 m, 15,50 m). Der Überbau weist in Längsrichtung einen konstanten Querschnitt auf und ist als Durchlaufträger ausgeführt. Die Fahrbahnbreite beträgt 7,20 m. Die Endauflager sind gelenkig ausgeführt.



Abbildung 9.4: Brücke 2, Ansicht

Die Querschnittsabmessungen sind Abbildung 9.5 zu entnehmen. Die angegebenen Maßketten sind in der Einheit Meter dargestellt. In Tabelle 9.2 sind die Angaben zur Bewehrungsverteilung im Brückenüberbau zusammengefasst.

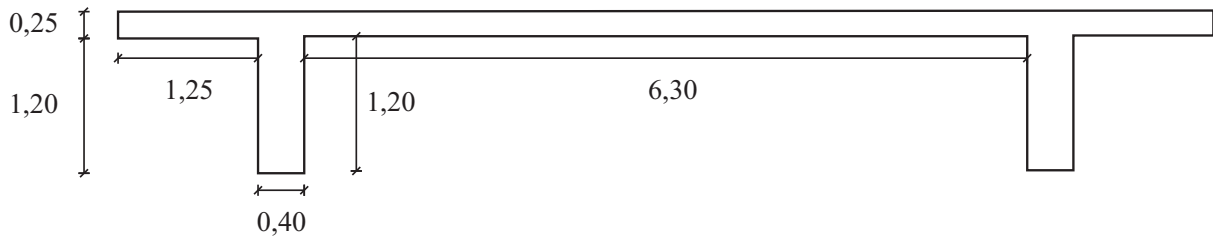


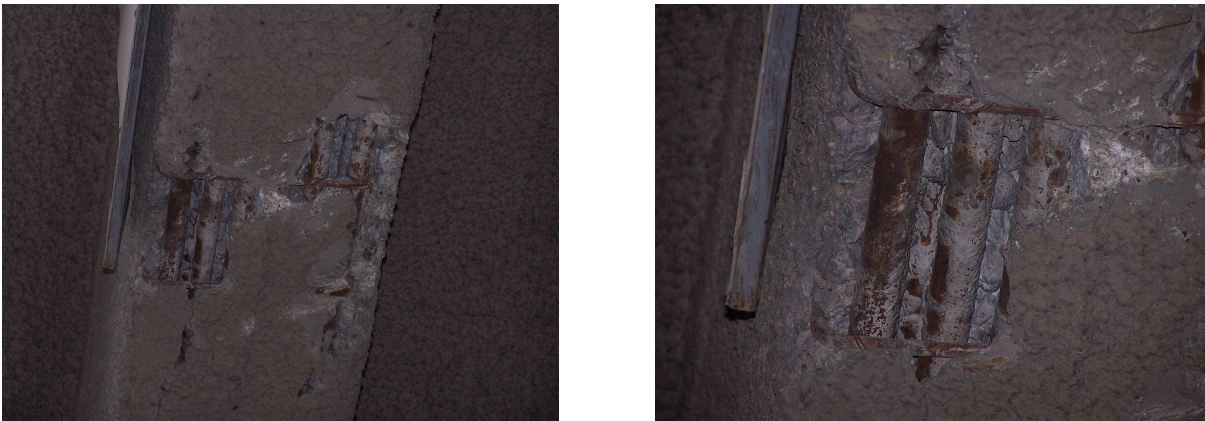
Abbildung 9.5: Brücke 2, Querschnittsabmessungen [m]

Tabelle 9.2: Brücke 2, statisch relevante Bewehrung

	Feld 1	Aufl. 2	Feld 2	Aufl. 3	Feld 3	
Lagen [-]	2	1	2	1	2	
Anzahl [-]	6	14	6	14	6	
Durchmesser [mm]	32	32	32	32	32	
Fläche [cm <sup>2</sup> ]	96.5	112.6	96.5	112.6	96.5	
	Aufl. 4	Feld 4	Aufl. 5	Feld 5	Aufl. 6	Feld 6
Lagen [-]	1	2	1	2	1	2
Anzahl [-]	14	6	14	6	14	6
Durchmesser [mm]	32	32	32	32	32	32
Fläche [cm <sup>2</sup> ]	112.6	96.5	112.6	96.5	112.6	96.5
	Aufl. 7	Feld 7	Aufl. 8	Feld 8	Aufl. 9	Feld 9
Lagen [-]	1	2	1	2	1	2
Anzahl [-]	14	6	14	6	14	6
Abstand [mm]	29	25	29	25	29	25
Durchmesser [mm]	32	32	32	32	32	32
Fläche [cm <sup>2</sup> ]	112.6	96.5	112.6	96.5	112.6	96.5

Die Betongüte des Überbaus wurde als B 300 identifiziert und die Stahlgüte der Tragbewehrung weist Eigenschaften eines Betonstahls II auf.

Die Brücke weist zahlreiche Schäden, wie beispielsweise Betonabplatzungen und freiliegende Bewehrungsstellen auf. Im Besonderen wird der Einzelschaden freiliegender Tragbewehrung am linken der beiden Stege (vgl. Abbildung 9.4) untersucht. Der Schaden befindet sich vom zugewandten Widerlager aus betrachtet (vgl. Abbildung 9.4) im ersten Feld. Die Photodokumentation in Abbildung ?? zeigt Detailaufnahmen des Schadens.



**Abbildung 9.6:** Brücke 2, Schadensdokumentation

### 9.1.3 Schadens- und Zustandsbewertungen

Das Ziel der Schadens- und Zustandsbewertungen ist es, wie in Kapitel 8 dargestellt, Zustandsnoten für die Bauwerke zu ermitteln, die auf Netzebene zur Durchführung einer Dringlichkeitsreihung von Maßnahmen genutzt werden können. Nachfolgend wird die Ermittlung der Zustandsnoten für die Brücken aus den vorangegangenen Abschnitten zunächst entsprechend dem Vorgehen nach der RI-EBW-PRÜF dargestellt und anschließend wird der Einsatz der in dieser Arbeit entwickelten Fuzzy-Zustandsbewertung erörtert. Abschließend werden die Ergebnisse verglichen und diskutiert.

#### 9.1.3.1 RI-EBW-PRÜF

Zur Bewertung der dargestellten Einzelschäden der beiden Brücken wird der Beispielkatalog der RI-EBW-PRÜF herangezogen. In Tabelle 9.3 ist der für die Schadensbewertungen



relevante Auszug des Katalogs dargestellt.

**Tabelle 9.3:** RI-EBW-PRÜF, Schadenskatalog, Auszug

BSP ID	Bauwerksart, Hauptbauteil / Konstruktions- Bauteilergänzung oder Hauptbaustoff / Schaden	S	V	D
002-00	<b>Brücken, Überbau /*/ Beton außer Betondeckung /*</b>	<b>S</b>	<b>V</b>	<b>D</b>
002-02	Abplatzungen im oberflächennahen Bereich mit oder ohne freil. Bewehrung, <b>D = 1-2</b>	0	0	
002-03	Abplatzungen wie vor, aber über Verkehrsraum <b>V = 1-3, D = 1-2</b>	0		
002-04	freiliegende Tragbewehrung mit korrodierter Bewehrung (keine nennenswerte Querschnittsminderung)	1	0	2
002-05	Tragbewehrung liegt im karbonatisierten Bereich und ist korrodiert (nicht Spannbewehrung)	1	0	3
002-06	freiliegende Tragbewehrung mit korrodierter Bewehrung (einsetzende Querschnittsminderung)	2	0	3
002-07	stark korrodierte Tragbewehrung (fortgeschrittene Querschnittsminderung)	3	0	3
002-08	stark korrodierte Tragbewehrung (teilweiser Ausfall von Tragbewehrung)	4	0	4

Für die Schadensbewertung von Brücke 1 (vgl. Abbildung 9.3) ist festzuhalten, dass die Tragbewehrung frei liegt und erhebliche Spuren der Korrosion aufweist. Die Korrosion der Bewehrungsstäbe ist dabei unterschiedlich weit fortgeschritten. Die drei rechten Stäbe in Abbildung 9.3 links weisen eine starke Querschnittsminderung als die linken Stäbe auf. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die rechten Stäbe bei der Prüfung bereits ohne Betonummantelung vorgefunden wurden, während die linken Stäbe durch Abklopfen des lockeren Betons erst freigelegt wurden. Die Quantifizierung der tatsächlichen Querschnittsminderung bzw. die Einordnung in eine der drei Stufen (002-04, 002-06, 002-07) aus Tabelle 9.3 auf der Basis einer visuellen Begutachtung kann nicht eindeutig erfolgen. Die Festlegung wird vom Brückenprüfer subjektiv getroffen. In diesem Fall scheint eine freiliegende Tragbewehrung mit korrodierter Bewehrung mit einsetzender Querschnitts-

minderung vorzuliegen ( $S = 2$ ,  $D = 3$ ). Da die Brücke ein nicht beschiffbares Gewässer überquert, wird die Bewertung der Verkehrssicherheit mit  $V = 0$  vorgenommen. Mit diesen Angaben wird die Basiszustandszahl für den Einzelschaden zu  $Z_1 = 2,8$  ermittelt. Diese ist wegen der als eher großflächig einzustufenden Schädigung auf  $Z_1 = 2,9$  zu erhöhen.

Für die Schadensbewertung von Brücke 2 (vgl. Abbildung 9.6) ist festzuhalten, dass die Tragbewehrung frei liegt und Spuren der Korrosion aufweist. Die Bewehrungsstäbe zeigen dabei alle vergleichbare Spuren der Korrosion. Auf Grund der Farbgebung der Stäbe ist dabei eher von einer freiliegenden korrodierten Tragbewehrung ohne nennenswerte Querschnittsminderung ( $S = 1$ ,  $D = 2$ ) auszugehen. Da die Brücke eine stark befahrene Hauptverkehrsstraße überquert und von weiteren Betonabplatzungen und in der Folge von herabstürzenden Trümmern ausgegangen werden muss, ist die Bewertung der Verkehrssicherheit entsprechend Beispiel *BSP – ID = 002 – 03* mit  $V = 3$  vorzunehmen. Um die Ergebnisse der Schadensbewertungen besser vergleichen zu können, wird jedoch die Bewertung der Verkehrssicherheit vernachlässigt ( $V = 0$ ). Dies entspricht der Bestimmung der Substanzkennzahl nach RI-EBW-PRÜF. Mit diesen Angaben wird die Basiszustandszahl für den Einzelschaden zu  $Z_2 = 2,2$  ermittelt. Diese ist wegen der als eher großflächig einzustufenden Schädigung auf  $Z_2 = 2,3$  zu erhöhen.

### 9.1.3.2 Fuzzy-Zustandsbewertung

Die Umsetzung der RI-EBW-PRÜF in das Programmsystem SIB-Bauwerke ermöglicht es dem Prüfenieur, die während einer Brückenprüfung aufgenommenen Schäden noch vor Ort zu dokumentieren und die Zustandsnote des Bauwerks zu ermitteln. Durch die rasante Leistungssteigerung von Computern in den vergangenen Jahren [12], ist auch die Umsetzung der numerisch aufwendigeren Fuzzy-Zustandsbewertung (vgl. Abschnitt 8.3) auf Notebooks möglich geworden. Die notwendigen Berechnungen können mittels einer automatisierten Software problemlos auf handelsüblichen tragbaren Computern durchgeführt werden. Die Zustandsnote eines untersuchten Bauwerks als Ergebnis der Auswertungen steht dem Brückenprüfer daher ebenfalls vor Ort zur Verfügung.

Die wesentlichen Module der in dieser Arbeit entwickelten und dargestellten Zustandsbewertung unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerkparameter wurden in einem Software-Tool (Bridge Assessment Code) umgesetzt [53] und erfolgreich bei der Einschät-

zung von Brücken erprobt. Die Dateneingabe zur Schadensbeschreibung kann dabei sowohl am Notebook selbst als auch mittels eines oder mehrerer so genannter Pocket-PCs erfolgen. Die Pocket-PCs und das Notebook sind durch ein lokales drahtloses Netzwerk miteinander verbunden und ermöglichen dadurch eine parallele Dateneingabe der an der Brückenprüfung teilnehmenden Mitarbeiter [55]. Die während einer Brückenprüfung zusammengetragenen Daten werden verlustfrei in dem Programmsystem in ein dreidimensionales Datenmodell gespeichert. Dieses objektorientierte Datenmodell enthält neben den geometrischen Informationen über die Brücke auch die Material- und Bewehrungseigenschaften. Mit den in Abschnitt 7.1 dargestellten Algorithmen wird dann automatisch aus dem virtuellen Brückenmodell das numerische Rechenmodell abgeleitet und die Versagensmöglichkeit der Brücke entsprechend Abschnitt 8.3 ermittelt.

Die wesentliche Innovation der Fuzzy-Zustandsbewertung ist die Trennung der unscharfen Schadens- und Zustandsbeschreibung eines Bauwerks von der automatisierten Bewertung des Zustands bzgl. der Kriterien „Standicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ (vgl. Abschnitt 8.3). Das Aufgabenspektrum während einer Brückenprüfung fokussiert sich dadurch auf die Einschätzung des Brückenzustandes, welche sich sowohl auf objektive Daten (Messung) als auch auf subjektive Einschätzungen stützen kann. Auf Grund des detaillierten Datenmodells der Software und der algorithmischen Umsetzung der Zustandsbewertung auf der Basis eines numerischen Tragwerksmodells können die detaillierten Daten der Schadens- und Zustandserfassung direkt bei der Festlegung einer Zustandsnote berücksichtigt werden. Die Objektivität der Zustandsbewertung wird erhöht und gleichzeitig die Genauigkeit bei der Beurteilung der Auswirkungen von Schäden auf die Kriterien „Standicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ gesteigert. Dadurch ist die Fuzzy-Zustandsbewertung im Gegensatz zu dem Vorgehen nach RI-EBW-PRÜF in der Lage, die ohnehin während einer Brückenprüfung dokumentierten Schadensdaten in ihrer Gesamtheit für die Zustandsbewertung zu verwenden.

Die Schadens- und Zustandsbeschreibung der **Brücke 1** wurde bereits in Abschnitt 9.1.1 dargestellt. Im Rahmen der Dokumentation der detaillierten Schadens- und Zustandserfassung werden u. a. Angaben über die Art, das Ausmaß und den Ort jedes vorgefundenen Einzelschadens gemacht und graphisch dargestellt (Abbildung 9.7).

Eine genaue visuelle Inspektion der lokalen Schädigung (vgl. Abbildung 9.3) zeigt deutliche Unterschiede im Zustand der sichtbaren Bewehrungsstäbe. Es ist zu erkennen, dass die drei rechten Stäbe der unteren Lage (vgl. Abbildung 9.8) sowie der sichtbare Stab

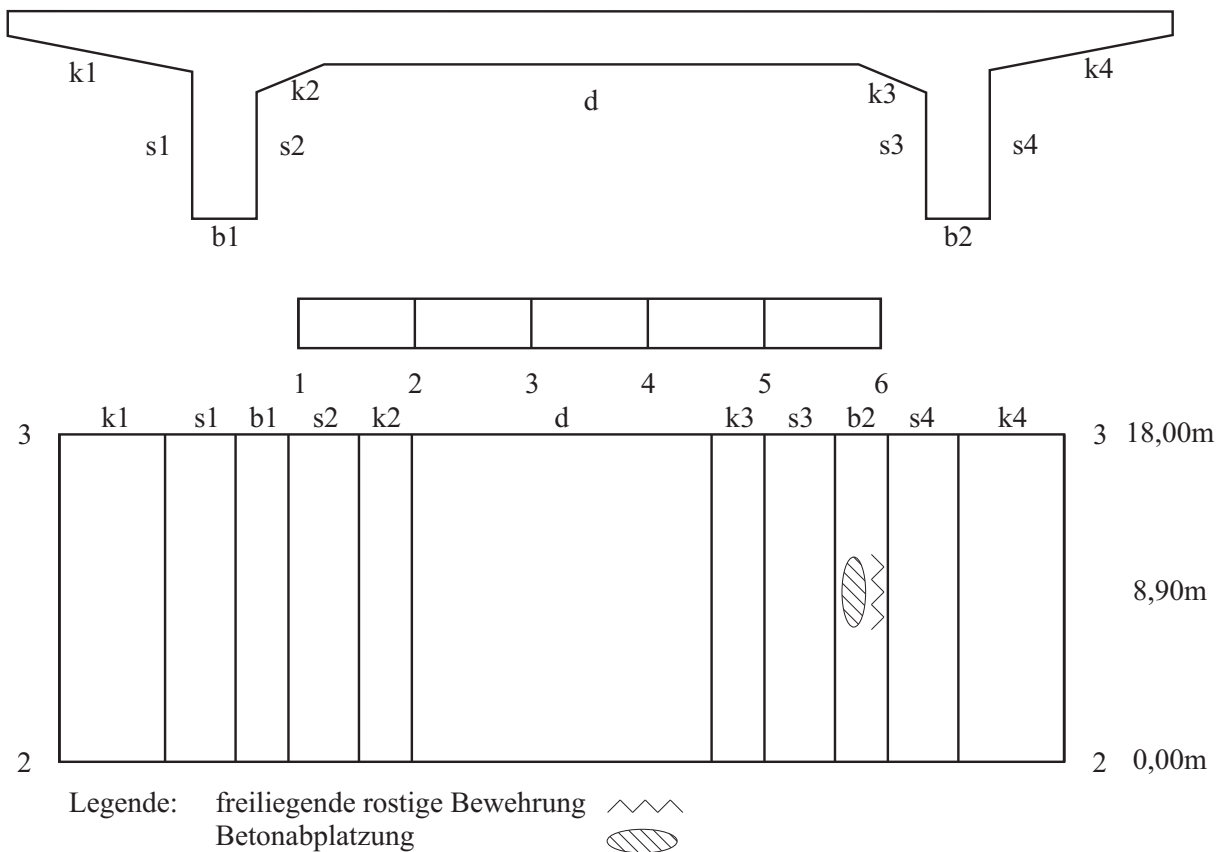
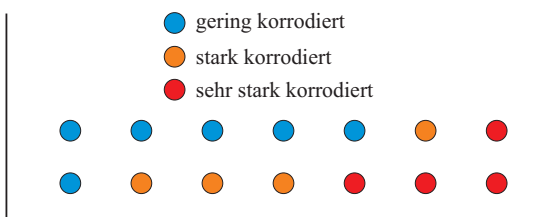


Abbildung 9.7: Brücke 1, Schadensskizze, Auszug

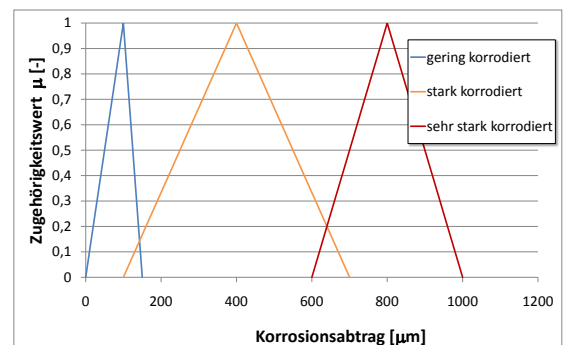
der oberen Bewehrungslage bereits sehr stark korrodiert sind. Die Stahloberfläche weist bereits tiefe Narben infolge des Rostabtrages auf. Diese Stäbe lagen zum Zeitpunkt der Prüfung bereits frei und waren offensichtlich schon einige Zeit der Witterung ausgesetzt. Die links davon befindlichen drei Stäbe der unteren Lage wurden durch Abklopfen des lockeren Betons freigelegt. Auf Grund der vorhandenen Korrosionsschicht ist zu vermuten, dass die passivierende Wirkung des Betons schon seit einiger Zeit aufgehoben war. Die Stäbe weisen daher deutliche Spuren der Korrosion auf. Sie sind jedoch weniger gravierend als bei den zuvor untersuchten Stäben. Der am linken Rand des Stegs befindliche Bewehrungsstab sowie die fünf nicht sichtbaren Stäbe der oberen Bewehrungslage sind noch weitestgehend im Beton eingebettet. Der insgesamt schlechte Zustand des Betons veranlasst jedoch zu der Vermutung, dass die Karbonatisierungsfrente den Stahl bereits erreicht hat und dieser sich im Anfangsstadium der Korrosion befindet.

Die unterschiedlich weit fortgeschrittene Korrosion der Tragbewehrung wird im Rahmen der Zustandsbewertung berücksichtigt. Für die Durchführung der Analysen sind dabei

quantitative Angaben zur Querschnittsminderung notwendig. Ohne aufwendige Messungen bzw. Probenentnahmen ist eine genaue Angabe der Stärke der Rostschicht jedoch nicht möglich. Das Fachwissen und der Erfahrungsschatz des Brückenprüfers ermöglichen dennoch eine fundierte Einschätzung der Situation auf der Grundlage der dargestellten Ergebnisse der visuellen Inspektion. Bei einer genauen Betrachtung der sehr stark korrodierten Stäbe kann die Tiefe der Narben mit etwas weniger als 1 mm angegeben werden. Diese subjektive Bewertung des Stahlabtrags der Bewehrungsstäbe wird durch die Modellierung als Fuzzy-Dreieckszahl  $\langle 600, 800, 1000 \rangle \mu\text{m}$  berücksichtigt (vgl. Abbildung 9.9). Der Stahlabtrag der deutlich weniger korrodierten Stäbe wird mit ca. der Hälfte der sehr stark korrodierten Stäbe, allerdings mit etwas größerer Streuung festgelegt. Die Einschätzung der gering korrodierten Stäbe, die nicht sichtbar im Beton eingebettet liegen, erfolgt analog zur Brücke 2 und wird dort erörtert.



**Abbildung 9.8:** Brücke 1, Schadensskizze, Bewehrung

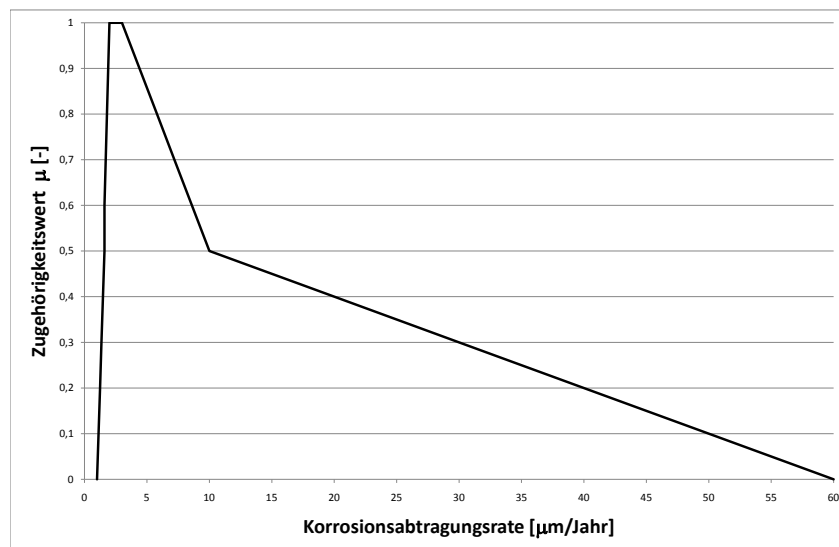


**Abbildung 9.9:** Brücke 1, Bewehrung, Korrosionsabtrag

Mit den detaillierten Daten der Schadenserfassung wird anschließend eine unscharfe Tragwerksanalyse durchgeführt. Durch Gegenüberstellung der (unscharfen) Beanspruchungen mit den unscharfen Beanspruchbarkeiten wird für den betrachteten Einzelschadensfall die Versagensmöglichkeit  $\Pi_F = 0,38$  ermittelt. Mit Gleichung 8.8 ergibt sich daraus die Zustandsbewertung nach dem Kriterium „Standicherheit“ zu  $S = 1,54$ .

Die Dauerhaftigkeit der Brücke wird entsprechend Abschnitt 8.3.2 durch eine Veränderung der Standicherheit bewertet. Als Prognosezeitraum wird das Intervall zwischen zwei Brückenhauptprüfungen (6 Jahre) festgelegt. Während dieser Zeit wird die Korrosion der freiliegenden Bewehrungsstäbe fortschreiten. Dieser Fortschritt kann mit dem in Abschnitt 5.3 erörterten Korrosionsmodell dargestellt werden. Der entscheidende Parameter ist dabei die über den Betrachtungszeitraum konstante Korrosionsgeschwindigkeit. Diese kann bei

spielsweise aus der während der bereits durchgeführten Brückenprüfungen dokumentierten Entwicklung der Korrosion abgeleitet werden. Liegen keine Daten vor auf deren Grundlage die Korrosionsgeschwindigkeit abgeleitet werden kann, so ist sie unter Berücksichtigung der lokalen Gegebenheiten abzuschätzen. Dabei können Angaben aus der Literatur als Anhaltswerte dienen. Beispielsweise gibt *Schwarz* [124] die Korrosionsgeschwindigkeit im karbonatisierten Beton mit  $1 \mu\text{m}/\text{Jahr}$  bis  $10 \mu\text{m}/\text{Jahr}$  an. *Haardt* [72] hingegen beziffert die Abtragungsrate in Abhängigkeit von der Betondeckung auf  $3 \mu\text{m}/\text{Jahr}$  bis  $60 \mu\text{m}/\text{Jahr}$ . *Jungwirth et al.* [82] schließlich geben den gleichmäßigen Rostabtrag von frei liegenden Stäben bei Witterungsbeanspruchung in der Größenordnung von ca.  $30 \text{g}/\text{m}^2 \text{Jahr}$  an. Dies entspricht bei den vorliegenden Bewehrungsstäben mit einem Durchmesser von 32 mm einer Abtragungsrate von ca.  $1,6 \mu\text{m}/\text{Jahr}$ . Die Abtragungsrate steigt jedoch bei Verringerung des Durchmessers, d. h. bei fortschreitender Korrosion an. Diese Angaben lassen sich zu drei Konfidenzintervallen  $[1,0;60,0] \mu\text{m}/\text{Jahr}$ ,  $[1,6;10,0] \mu\text{m}/\text{Jahr}$  und  $[2,0;3,0] \mu\text{m}/\text{Jahr}$  zusammenfassen. Diese ineinander liegenden Intervalle bilden die Grundlage zur Konstruktion der in Abbildung 9.10 dargestellten Fuzzy-Abtragungsrate zur Abschätzung des Korrosionsfortschritts.



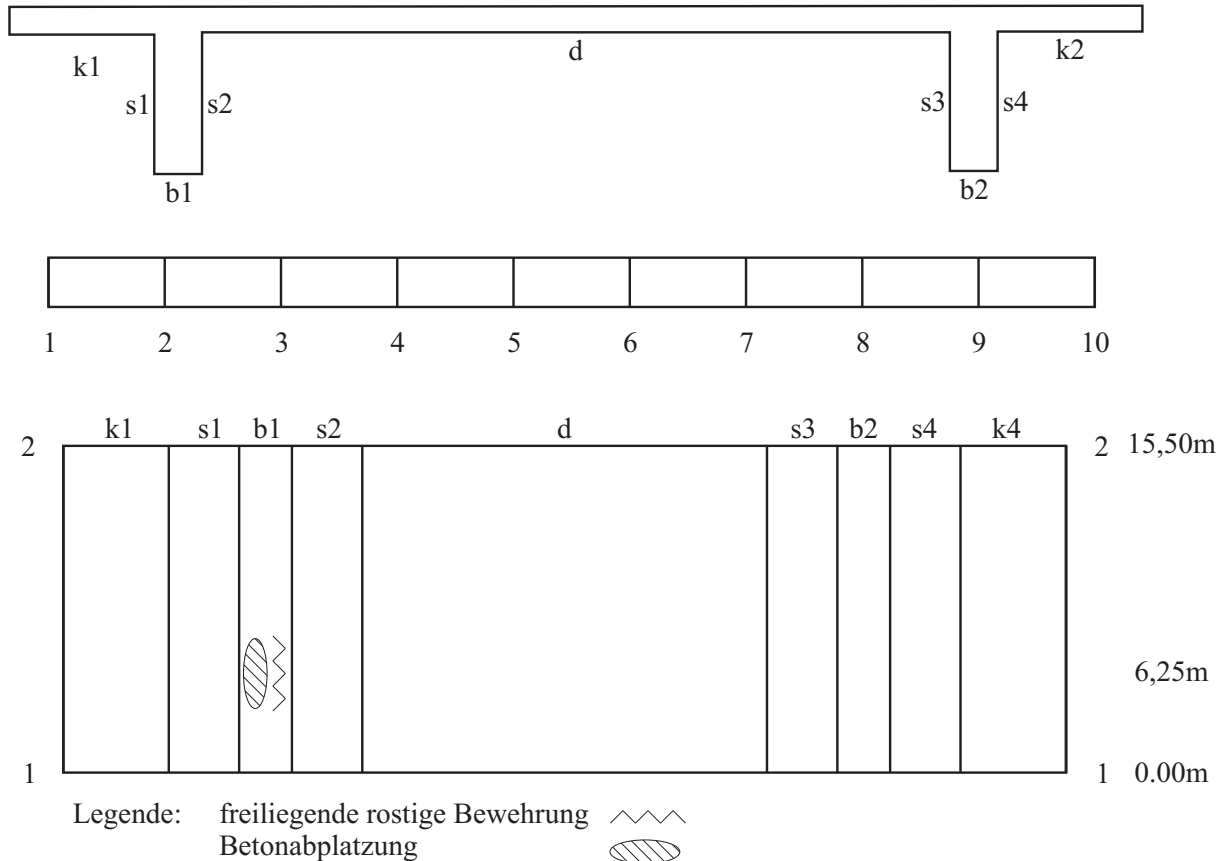
**Abbildung 9.10:** Bewehrung, Korrosion, Fuzzy-Abtragungsrate

Zur Durchführung der Analysen wird die Korrosionsgeschwindigkeit vereinfachend

für alle Stäbe als identisch angenommen. Die damit ermittelte Versagensmöglichkeit  $\Pi_F(6\text{Jahre}) = 0,67$  ergibt die Zustandsbewertung nach dem Kriterium „Dauerhaftigkeit“ zu  $D = 2,66$ .

Mit Hilfe des Bewertungsschlüssels [71] und linearer Interpolation der Zwischenwerte werden die ermittelten Zustandsbewertungen zur Zustandszahl für den Einzelschaden  $Z_1 = 2,6$  zusammengefasst.

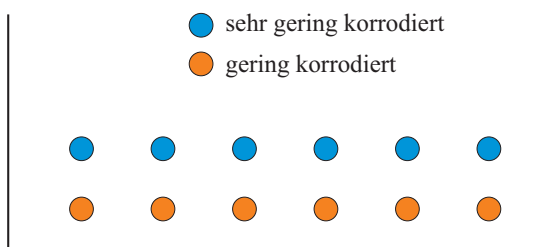
Die Schadens- und Zustandsbeschreibung der **Brücke 2** wurde ebenfalls bereits in Abschnitt 9.1.1 dargestellt. Die im Rahmen der Dokumentation der detaillierten Schadens- und Zustandserfassung erstellte graphische Darstellung des vorgefundenen Einzelschadens ist in Abbildung 9.11 dargestellt.



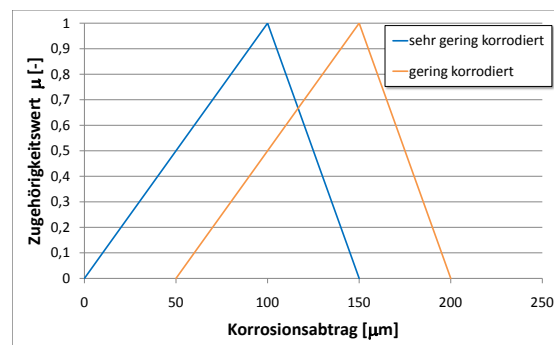
**Abbildung 9.11:** Brücke 2, Schadensskizze, Auszug

Die Festlegung der Querschnittsminderung der Bewehrungsstäbe durch den erfolgten Rostabtrag findet ebenfalls auf Grund der visuellen Inspektion der lokalen Schädigung (vgl. Abbildung 9.6) statt. Die Farbgebung der sichtbaren Bewehrungsstäbe deutet dabei auf

eine eher geringe Querschnittsminderung hin. Zur Festlegung des bereits erfolgten Rostabtrags wird dabei auf Erfahrungswerte von *Broomfield* [24] zurückgegriffen. Der Autor gibt den Rostabtrag, der zu Rissbildung und Abplatzung des Betons führt, mit ca.  $100 \mu\text{m}$  an und weist darauf hin, dass dieser Wert erheblich von der tatsächlich vorliegenden konstruktiven Durchbildung abhängt. Auf Grund der vorhandenen Schäden des Betons wird dieser Rostabtrag der oberen Bewehrungslage (vgl. Abbildung 9.12) zugeschrieben. Für die untere, stärker korrodierte Bewehrungslage wird ein geringfügig erhöhter Rostabtrag angenommen (vgl. Abbildung 9.13).



**Abbildung 9.12:** Brücke 2, Schadensskizze, Bewehrung



**Abbildung 9.13:** Brücke 2, Bewehrung, Korrosionsabtrag

Mit den detaillierten Daten der Schadenserfassung wird anschließend eine unscharfe Tragwerksanalyse durchgeführt. Durch Gegenüberstellung der (unscharfen) Beanspruchungen mit den unscharfen Beanspruchbarkeiten wird für den betrachteten Einzelschadensfall die Versagensmöglichkeit  $\Pi_F = 0,63$  ermittelt. Mit Gleichung 8.8 ergibt sich daraus die Zustandsbewertung nach dem Kriterium „Standicherheit“ zu  $S = 2,50$ .

Zur Bewertung der Dauerhaftigkeit wird der Korrosionsfortschritt vereinfachend für alle Stäbe als identisch angenommen und mit der für die Brücke 1 abgeleiteten Korrosionsgeschwindigkeit bewertet. Die damit ermittelte Versagensmöglichkeit  $\Pi_F(6\text{Jahre}) = 1,00$  ergibt die Zustandsbewertung nach dem Kriterium „Dauerhaftigkeit“ zu  $D = 4,00$ .

Mit Hilfe des Bewertungsschlüssels [71] und linearer Interpolation der Zwischenwerte werden die ermittelten Zustandsbewertungen zur Zustandszahl für den Einzelschaden  $Z_2 = 3,4$  zusammengefasst.



### 9.1.3.3 Ergebniszusammenfassung

Die Ergebnisse einer detaillierten Schadens- und Zustandserfassung sowie die darauf aufbauende Bewertung des Zustandes nach den Kriterien „Standssicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ werden zur Zustands- bzw. Substanzkennzahl zusammengefasst. Diese geschieht mit dem Ziel, auf der Netzebene ein einfach zu handhabendes Kriterium zur Verfügung zu stellen, um den Zustand der Ingenieurbauwerke vergleichen und die Reihenfolge von Maßnahmen entsprechend der Dringlichkeit festlegen zu können. In Abschnitt 8.1 sind die nach RI-EBW-PRÜF festgelegten Notenbereiche und die entsprechenden verbalen Zustandsbeschreibungen zusammengefasst.

Die Zustandsbewertung der beiden Beispielbrücken mit dem Verfahren nach RI-EBW-PRÜF unter Zuhilfenahme des Beispielkatalogs (vgl. Abschnitt 9.1.3.1) ergibt für die erste Brücke einen ausreichenden Zustand (Note 2,9) und für die zweite Brücke einen befriedigenden Zustand (Note 2,3). Daraus kann auf Netzebene für die erste Brücke eine höhere Dringlichkeit für Erhaltungsmaßnahmen abgeleitet werden als für die zweite Brücke.

Die Anwendung der neuen Fuzzy-Zustandsbewertung unter Berücksichtigung der individuellen Schadensmerkmale und der konstruktiven Durchbildungen der Tragwerke (vgl. Abschnitt 9.1.3.2) ergibt für die erste Brücke ebenfalls einen ausreichenden Zustand (Note 2,6). Der Zustand der zweiten Brücke wird hingegen als nicht ausreichend (Note 3,4) bewertet. Dadurch wird eine umgekehrte Priorisierung von Instandhaltungsmaßnahmen für die beiden Bauwerke im Vergleich zum Verfahren nach RI-EBW-PRÜF ermittelt.

**Tabelle 9.4:** Zustandsbewertung, Ergebniszusammenfassung

	RI-EBW-PRÜF		Fuzzy-Zustandsbewertung	
	Note	Beschreibung	Note	Beschreibung
Brücke 1	2,9	ausreichend	2,6	ausreichend
Brücke 2	2,3	befriedigend	3,4	nicht ausreichend

Die signifikanten Unterschiede in den Ergebnissen der Zustandsbewertungen der beiden Verfahren werden nachfolgend diskutiert.

Beide Verfahren gruppieren den Zustand der Brücke 1 in den selben Notenbereich mit der

Beschreibung „ausreichender Zustand“ ein. Die Fuzzy-Zustandsbewertung tendiert dabei jedoch eher zum „befriedigenden Zustand“, während das Verfahren nach RI-EBW-PRÜF das Bauwerk am Übergang zum „nicht ausreichenden Zustand“ einordnet. Eine mögliche Ursache für diesen Unterschied können Diskrepanzen bei der Schadensbeschreibung sein. Die Auswahl einer Zustandsbeschreibung aus dem Beispielkatalog (vgl. Tabelle 9.3) ist, wie bereits dargestellt, nicht eindeutig und mit Subjektivität behaftet. Dies gilt insbesondere für die Abgrenzung zwischen den Schadensbeispielen (002-04, 002-06, 002-07) zur Festlegung des Grades der Korrosion. Die Übergänge zwischen „keine nennenswerte“, „einsetzende“ und „fortgeschrittene“ Querschnittsminderung der Bewehrungsstäbe sind fließend und der Beispielkatalog enthält keine Hinweise für eine Quantifizierung der verbalen Charakterisierungen. Lediglich in [72] ist der Hinweis „entspricht 20 % Verlust“ für fortgeschrittene Korrosion zu finden. Wird die Querschnittsminderung mit den bei der Fuzzy-Zustandsbewertung einfließenden Angaben bestimmt, wobei der Modalwert der Fuzzy-Korrosionsabträge verwendet wird, so ergibt sich ein Verlust von ca. 4,7 %. Die Einordnung in die Kategorie „einsetzender Querschnittsminderung“ ( $BSP - ID = 002 - 06$ ) und die Festlegung der Fuzzy-Korrosionsabträge ist also konsistent. Tatsächlich ist die detaillierte Festlegung der Korrosionszustände im Rahmen der Fuzzy-Zustandsbewertung tendenziell sogar ungünstiger als die gemittelte globale Bewertung nach RI-EBW-PRÜF. In dem vorliegenden Beispiel (vgl. Abbildung 9.8) weist nämlich die untere Bewehrungslage mit dem größeren statischen Hebelarm deutlich stärkere Querschnittsminderungen als die obere Lage auf. Die unterschiedlichen Schadensbewertungen der beiden Verfahren sind daher auf methodeninhärente Unterschiede zurückzuführen. Dabei ist insbesondere die direkte (unscharfe) Beurteilung der Standsicherheit im Rahmen der Fuzzy-Zustandsbewertung und der damit verbundene höhere Informationsgehalt, der bei der Bewertung berücksichtigt wird, zu nennen. Die algorithmische Umsetzung des Vergleichs der durch Schäden verringerten Beanspruchbarkeiten mit den berechneten Beanspruchungen des Tragwerks erlaubt genauere und realistischere Einschätzungen des Bauwerkszustandes. Als Nebenprodukt des numerischen Ansatzes liefert die Software u. a. Hinweise auf den Ort der größten Beanspruchung. Für die Brücke 1 wurde dieser Ort am zweiten Auflager ermittelt. Die am Schadensort befindliche Feldbewehrung hingegen ist rechnerisch nicht ausgelastet. Die Fuzzy-Zustandsbewertung ist in der Lage, diese Systemreserven zu identifizieren und bei der Festlegung der Schadensbewertung „Standsicherheit“ zu berücksichtigen. Der Abbau der Reserven infolge fortgesetzter Korrosion wird durch die Schadensbewertung „Dauer-

haftigkeit“ berücksichtigt. In Anbetracht der konstruktiv bedingten Tragfähigkeitsreserven ist daher das Ergebnis der Fuzzy-Zustandsbewertung (befriedigend bis ausreichend, Standsicherheit nicht beeinträchtigt) trotz des erheblichen Schadens plausibler als die Einschätzung nach RI-EBW-PRÜF (ausreichend bis nicht ausreichend, Standsicherheit beeinträchtigt).

Bei der Brücke 2 ist der Unterschied der Zustandsnoten noch gravierender als bei dem ersten Beispiel. Mit der Fuzzy-Zustandsbewertung wird der Zustand als „nicht ausreichend“ an der Grenze zu „ungenügend“ eingestuft. Das Verfahren nach RI-EBW-PRÜF hingegen bewertet den Zustand der Brücke als „befriedigend“ jedoch mit einer Tendenz zu „ausreichend“. Der Grund für die schlechte Zustandsbewertung des Fuzzy-Verfahrens liegt ebenfalls in der ganzheitlichen Beurteilung des Gesamtbauwerks. Als Ergebnis der numerischen Analyse des Tragwerks mit dem Software-Tool (Bridge Assessment Code) ergibt sich eine völlig andere Situation als bei der Brücke 1. Der Ort der maximalen Ausnutzung und der Schadensort sind koinzident. Die festgestellte Korrosion vermindert also die Beanspruchbarkeit an dem für die Tragfähigkeit des Gesamtsystems maßgebenden Ort. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das System bereits im ungeschädigten Zustand eine rechnerische Ausnutzung von ca. 98,2% aufweist, wird der große negative Einfluss der Korrosion auf die Standsicherheit deutlich. Zum Zeitpunkt der Brückenprüfung führt selbst die geringe Korrosion der Bewehrung (vgl. Abbildung 9.13) zu einer Querschnittminderung von ca. 1,6% (mit den Modalwerten der Fuzzy-Korrosionsabträge berechnet). Dadurch sind die Systemreserven schon beinahe aufgebraucht. Mit der angesetzten Abtragsrate für den Korrosionsabtrag wird im zeitlichen Verlauf schließlich so viel Bewehrungsstahl abgetragen, dass die Standsicherheit gefährdet ist. Dies drückt sich in der Bewertung des Kriteriums „Dauerhaftigkeit“ mit dem Wert 4 aus. Da als Prognosezeitraum für die Bewertung der Dauerhaftigkeit die Zeitspanne bis zur nächsten Hauptuntersuchung gewählt wurde, liegt Gefahr im Verzug, der mit dem etablierten Verfahren nicht identifiziert wird. Die Bewertung mit dem Verfahren nach RI-EBW-PRÜF für dieses Beispiel ist zu günstig. Die Fuzzy-Zustandsbewertung hingegen liefert auf der Basis einer unscharfen und teilweise subjektiven Zustandsbeschreibung eine objektiv nachvollziehbare und der Gefährdungssituation entsprechende Zustandsbewertung.

Die Umkehrung der Dringlichkeitsreihung der Instandhaltungsmaßnahmen bei Einsatz der Fuzzy-Zustandsbewertung im Vergleich zum Verfahren nach der RI-EBW-PRÜF ist eine folgerichtige Konsequenz aus den dargestellten individuellen Schadenssituationen und

konstruktiven Durchbildungen. Die Fuzzy-Zustandsbewertung ist in der Lage, diese individuellen Gegebenheiten unter Berücksichtigung der bei der Schadenserfassung auftretenden Unschärfen adäquat zu erfassen und in eine plausible und für die Priorisierung auf Netzebene verwendbare Zustandsnote umzusetzen. Das in dem Programmsystem SIB-Bauwerke umgesetzte Verfahren der RI-EBW-PRÜF stellt hingegen eine generalisierte Einschätzung der Auswirkungen von Deteriorationen des Bauwerkszustandes auf die Merkmale Standsicherheit (S), Verkehrssicherheit (V) und Dauerhaftigkeit (D) auf der Basis von Erfahrungswissen dar, ohne den individuellen Gegebenheiten Rechnung tragen zu können.

Ein weiterer wesentlicher Vorteil des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Konzepts der Fuzzy-Zustandsbewertung ergibt sich aus der Trennung der unscharfen Schadens- und Zustandsbeschreibung eines Bauwerks von der automatisierten Zustandsbewertung. Die Brückenprüfer müssen nicht mehr die Auswirkung einer Deterioration auf die Kriterien „Standsicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ bewerten, sondern können sich auf die Einschätzung des Zustandes selbst konzentrieren. Dabei auftretende Unschärfen und Unsicherheiten werden ausschließlich beobachtbaren Größen (z. B. Korrosionsabtrag) zugeordnet. Die Transformation von unscharfen Beobachtungen in Fuzzy-Größen ist dabei transparent und validierbar (vgl. Abschnitt 4). Darüber hinaus kann die Entwicklung von Schäden im Rahmen der regelmäßigen Bauwerksprüfung verfolgt und dadurch geschätzte zeitabhängige Größen (z. B. Abtragsrate für den Korrosionsabtrag) validiert und ggf. kalibriert werden.

Das Verfahren nach RI-EBW-PRÜF generalisiert und mittelt Schadenseinschätzungen auf der Basis von Erfahrungswissen, während die Fuzzy-Zustandsbewertung ohne nennenswerten Mehraufwand in der Lage ist, individuelle Schadenssituationen zu berücksichtigen und dadurch eine vollständigere und realistischere Zustandseinschätzung abzugeben.

#### **9.1.4 Zustandsentwicklung und Bewertung einer Erhaltungsmaßnahme**

In diesem Abschnitt wird aufbauend auf den Ergebnissen der Schadens- und Zustandsbewertung (vgl. Abschnitt 9.1.3.2) für die Beispielbrücke 1 als weiterführende Analyse im Rahmen des BMS beispielhaft die Entwicklung des Zustandes auf Grund des Einzelschadens der freiliegenden Bewehrung bestimmt und die Auswirkungen einer Instandsetzungsmaßnahme auf die Zustandsnote und die Nutzungsdauer analysiert.

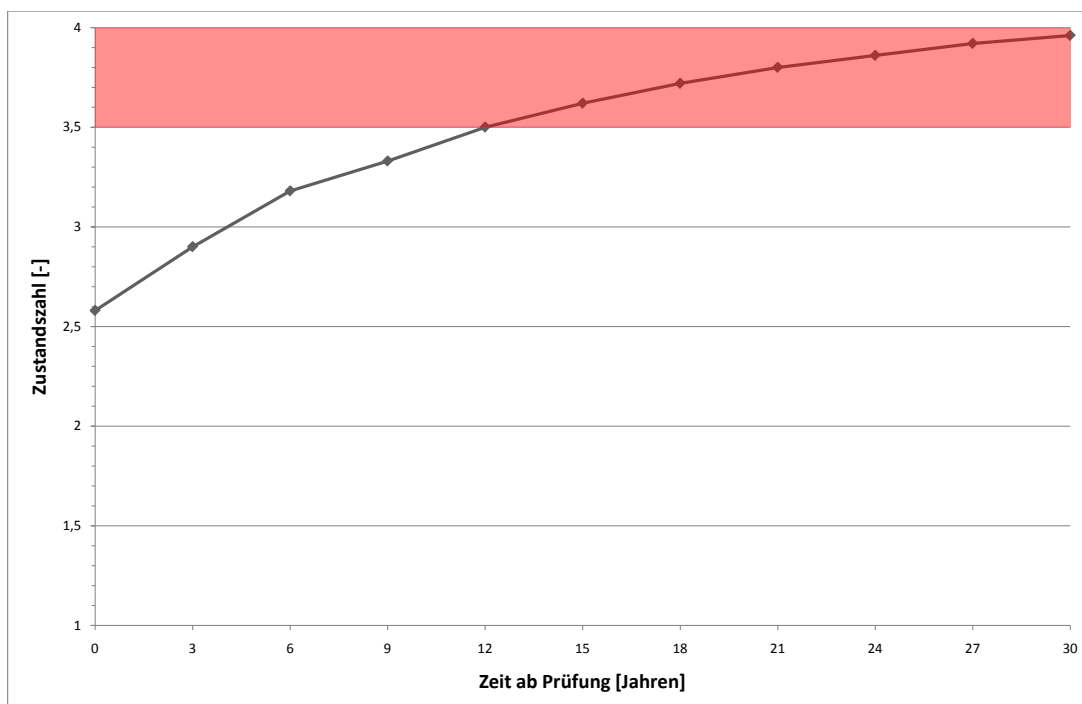
Eine ausreichend genaue Prognose der Zustandsentwicklung bildet die Grundlage für die mittel- und langfristige Planung von Erhaltungsmaßnahmen im Rahmen des Bauwerks-Management-Systems. Mit ihrer Hilfe kann der optimale Eingreifzeitpunkt unter Berücksichtigung des Budgetierungs- und Planungszeitraums ermittelt werden. Die Darstellung der Zustandsentwicklung erfolgt dabei zweckmäßig durch die Angabe der zu erwartenden Veränderung (Vergrößerung) der Zustandsnote eines Bauteils bzw. des Bauwerks in Abhängigkeit von der Zeit. Im Rahmen des BMS sind dafür die phänomenologischen Prognosemodelle (vgl. Abschnitt 5 bzw. [72]) in Schädigungsmodelle zu überführen. Dazu werden die phänomenologischen Modelle ausgewertet und der Zeitpunkt des Erreichens definierter Systemzustände festgehalten. Diese Systemzustände korrespondieren mit den Schadensbeispielen der RI-EBW-PRÜF. Beispielsweise werden bei der Beurteilung der Karbonatisierung des Betons das Erreichen der in Tabelle 9.5 dargestellten Zustände festgehalten. Mit Hilfe der Musterbewertungen kann dann für die entsprechenden Zeitpunkte des Erreichens eines Systemzustandes eine Zustandszahl angegeben werden. Die Zustandsentwicklung wird durch lineare Interpolation der singulären Zustandsbewertungen erhalten.

**Tabelle 9.5:** RI-EBW-PRÜF, Schadenskatalog, Karbonatisierung

BSP ID	Bauwerksart, Hauptbauteil / Kontruktionsteil / Bauteilergänzung oder Hauptbaustoff / Schaden	S	V	D
004-00	<b>Brücken, Überbau</b> /*/ <b>Beton</b> / <b>Karbonatisiert</b>	<b>S</b>	<b>V</b>	<b>D</b>
004-03	Karbonatisierungstiefe beträgt 1/3 der Betondeckung	0	0	1
004-01	Karbonatisierungstiefe beträgt 2/3 der Betondeckung	0	0	2
004-02	Karbonatisierungsfront reicht an Tragbewehrung heran	0	0	3

Da die phänomenologischen Modelle zur Schadensentwicklungsprognose bereits integraler Bestandteil der Fuzzy-Zustandsbewertung sind, kann diese Transformation entfallen. Statt dessen wird die Zustandsentwicklung unter Berücksichtigung der individuellen Schadenssituation und der konstruktiven Durchbildung durch eine inkrementelle Auswertung der Fuzzy-Zustandsbewertung an diskreten Zeitpunkten automatisch erhalten. Die Auswertzeitpunkte müssen dabei weder äquidistant sein noch unterliegen sie sonstigen Einschränkungen. Um die prognostizierte Schadensentwicklung mit dem Verhalten des Bauwerks

vergleichen zu können und geschätzte zeitabhängige Größen (z. B. Abtragsrate für den Korrosionsabtrag) validieren und ggf. kalibrieren zu können, empfiehlt es sich allerdings, einen Abstand der Auswertezeitpunkte von drei Jahren vorzusehen. Dieses Intervall entspricht dem Abstand zwischen zwei Brückenprüfungen. In Abbildung 9.14 ist die Entwicklung der Zustandszahl der Brücke 1 unter Berücksichtigung des in Abschnitt 9.1.1 erörterten Schadensbildes dargestellt. Diese Zustandsentwicklung zeigt die fortschreitende Korrosion, ohne dass eine Erhaltungsmaßnahme durchgeführt wird. Mit dem einfachen Korrosionsmodell aus Abschnitt 5 zeigt sich dabei eine tendenziell rückläufige Schadenentwicklung. Das gutmütige Verhalten der Korrosion des Bewehrungsstahls lässt sich durch die Modellannahme der konstanten Rate für den Korrosionsabtrag erklären. In jedem Zeitintervall wird dadurch der Radius jedes Bewehrungsstabes um das selbe Maß reduziert. Dies wirkt sich besonders anfänglich, bei noch größeren Radien, überproportional auf die Minderung der Querschnittsfläche aus. Werden die Radien kleiner, so nimmt auch die Querschnittsminderung ab und der negative Einfluss auf die Beanspruchbarkeit reduziert sich sukzessive.



**Abbildung 9.14:** Brücke 1, Entwicklung der Zustandszahl

Aus der Abbildung 9.14 lässt sich die Restnutzungsdauer des Bauwerks ablesen. Dazu ist für die Zustandszahl ein Schwellenwert festzulegen, der nicht überschritten werden darf.

In [72] wird dieser Schwellenwert mit  $Z \geq 3,5$  festgelegt. Das Erreichen dieser Zustandszahl signalisiert sofortigen Handlungsbedarf. Unter der Voraussetzung, dass die Brücke diesen Zustand nicht erreichen darf (roter Bereich), lässt sich aus Abbildung 9.14 für das Bauwerk noch eine Restnutzungsdauer von ca. zwölf Jahren ablesen.

Ist für das Bauwerk eine Nutzungsdauer geplant, die über die ermittelte Restnutzungsdauer (ohne Instandhaltungsmaßnahmen) hinausgeht, so ist der Schaden mit geeigneten Maßnahmen zu beheben um dadurch die Restnutzungsdauer zu erhöhen. Hier wird exemplarisch eine Erneuerung des schadhaften Betons analysiert. Eine derartige Maßnahme setzt natürlich voraus, dass die Ursache für die Betonschädigung nicht wiederkehrt. Die Wiederherstellung der passivierenden Wirkung des alkalischen Milieus im Beton wirkt sich zwar nicht auf die Korrosion des Bewehrungsstahls aus, also auf die Standsicherheit, jedoch wird durch sie die Dauerhaftigkeit des Bauteils erhöht. Im Rahmen der Fuzzy-Zustandsbewertung kann die Bewertung der Wirksamkeit der Maßnahme und ihre Auswirkung auf die Restnutzungsdauer einfach durch Berücksichtigung des wiederhergestellten Korrosionsschutzes durchgeführt werden. Das Korrosionsmodell aus Abschnitt 9.1.3.2 wird dafür durch ein kombiniertes Karbonatisierungs- und Korrosionsmodell ersetzt. Die Karbonatisierung des Betons kann mit dem sogenannten „Wurzel-t-Gesetz“ (vgl. Abschnitt 5) beschrieben werden. Einer der wesentlichen Eingangsparameter ist dabei die Diffusionskonstante. Sie hängt u. a. von den Betoneigenschaften ab und ist i. A. nur schwer zu bestimmen. Unsicherheiten bei der Quantifizierung der Diffusionskonstante werden im Rahmen dieses Beispiels durch die Modellierung als Fuzzy-Dreieckszahl  $\langle 2,00 \cdot 10^{-4}; 2,50 \cdot 10^{-4}; 3,00 \cdot 10^{-4} \rangle \text{ cm}^2/\text{s}$  berücksichtigt. Der  $\text{CO}_2$ -Gehalt der Luft ( $0,8 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3$ ) und der Anteil der karbonatisierbaren Substanz ( $0,126 \text{ g/cm}^3$ ) werden aus [72] übernommen. In Abbildung 9.15 ist die Fuzzy-Eindringtiefe der Karbonatisierungsfront in den Beton in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Nach dem die Karbonatisierungsfront den Bewehrungsstahl erreicht hat, schreitet dessen Korrosion fort. Bei einer Betondeckung von 1,50 cm ist damit entsprechend Abbildung 9.15 nach ca. 19 bis 28 Jahren zu rechnen.

Mit Hilfe der Fuzzy-Zustandsbewertung können nun unter Berücksichtigung des kombinierten Schädigungsmodells die Schadens- und Zustandsentwicklung in Abhängigkeit verschiedener Eingreifzeitpunkte analysiert werden. Exemplarisch werden die Fälle untersucht:

- keine Maßnahme,

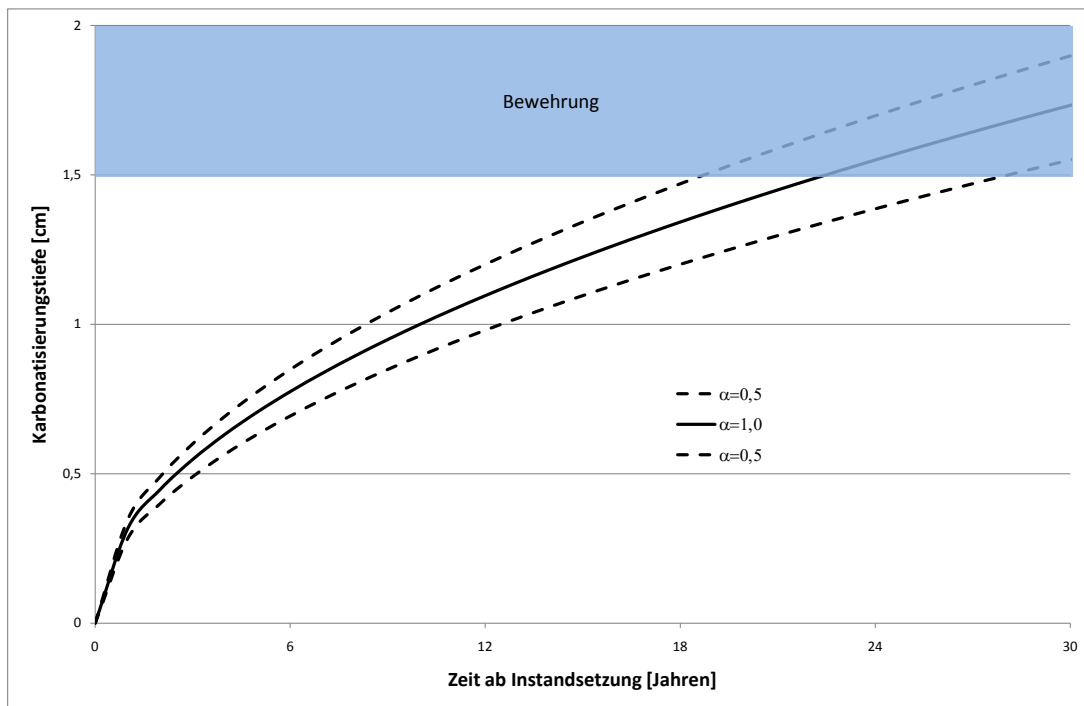


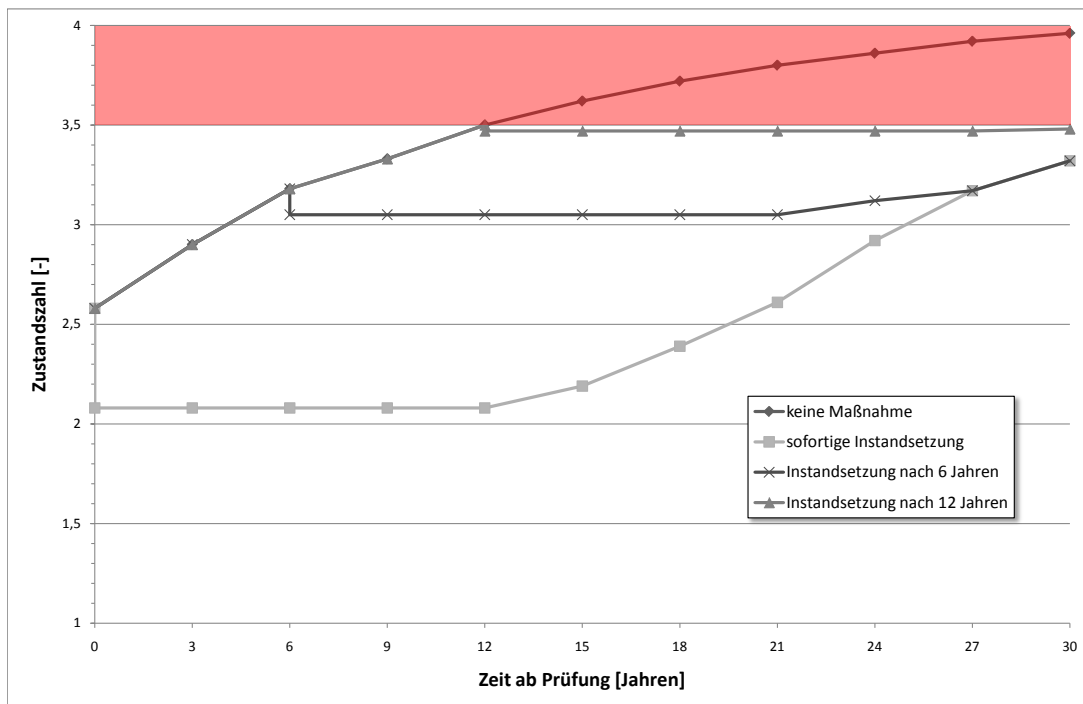
Abbildung 9.15: Schadensentwicklung, Karbonatisierung

- sofortige Instandsetzung,
- Instandsetzung nach 6 Jahren und
- Instandsetzung nach 12 Jahren.

Die Ergebnisse der Analyse sind in Abbildung 9.16 zusammengefasst. Die Entwicklung der Zustandszahl ohne die Durchführung einer Maßnahme wurde bereits erörtert. Bei dieser Variante wird nach ca. 12 zwölf Jahren der als kritisch definierte Zustand des Bauwerks erreicht.

Wird die Instandsetzungsmaßnahme dagegen umgehend durchgeführt, so verringert sich die Zustandszahl signifikant. Diese Verringerung ist ausschließlich auf die Verbesserung der Dauerhaftigkeit zurückzuführen. Der Bewehrungsstahl ist vor weiterer Korrosion geschützt und es ist daher zunächst keine Reduktion der Beanspruchbarkeit zu erwarten. Solange die Karbonatisierungsfrente die Bewehrung noch nicht erreicht hat, bleibt dieser „Status quo“ erhalten und wird in Abbildung 9.16 durch eine konstante Zustandszahl dargestellt. Die nach ca. 19 Jahren steigende Möglichkeit, dass die Karbonatisierungsfrente die Bewehrung erreicht, wird ca. ab dem zwölften Jahr nach Instandsetzung durch





**Abbildung 9.16:** Brücke 1, Instandsetzungsmaßnahmen, Variantenbewertung, Entwicklung der Zustandszahl

eine erhöhte Bewertung des Kriteriums „Dauerhaftigkeit“ signalisiert, wodurch die Zustandszahl moderat steigt. Diese Entwicklung wird ab dem 19. Jahr nach Instandsetzung durch eine Verschlechterung des Kriteriums „Standicherheit“ infolge der steigenden Möglichkeit tatsächlich stattfindender Bewehrungskorrosion überlagert. Die Fortsetzung der durch die Querschnittsminderung bedingten Reduktion der Beanspruchbarkeit resultiert zunächst in einer überproportionalen Vergrößerung der Zustandszahl, bis sich ca. ab dem 28. Jahr nach Instandsetzung eine ähnliche Entwicklung wie ohne Maßnahme einstellt. Der temporäre Schutz der Bewehrung bewirkt im großen zeitlichen Maßstab lediglich eine Translation der Zustandsentwicklung in positiver Richtung auf der Zeitachse.

Die Analysen der Maßnahmenvarianten, die Brücke nach sechs bzw. nach zwölf Jahren instandzusetzen, zeigen eine ähnliche Zustandsentwicklung wie die sofortige Maßnahme. Dabei ist die Translation infolge der „Konservierung“ der Bewehrung zu erkennen. Die Zustandsentwicklung für die Instandhaltung nach zwölf Jahren zeigt in dem dargestellten Zeitfenster einen konstanten Verlauf. Die Karbonatisierungsfront hat den Stahl noch nicht erreicht. Lediglich bei 30 Jahren ist ein leichter Anstieg der Zustandszahl zu erkennen, der das allmähliche Herannahen der Front an die Bewehrung anzeigt. Die Zustandsentwick-

lung für die Betonsanierung nach sechs Jahren zeigt ebenfalls das anfängliche Plateau im Anschluss an die Maßnahme. Anschließend steigt die Zustandszahl und verläuft schließlich deckungsgleich mit der Zustandsbewertung der sofortigen Maßnahme. Dies verdeutlicht den behelfsmäßigen Charakter der untersuchten Instandhaltungsmaßnahme. Durch die Betonsanierung wird nicht die Bewehrungskorrosion und dadurch die Standsicherheit beeinflusst, sondern lediglich die Dauerhaftigkeit durch ein befristetes „Einfrieren“ des Zustandes der Bewehrung verbessert. Unabhängig vom gewählten Eingreifzeitpunkt wird die Zustandsbewertung daher nach einem ausreichenden zeitlichen Abstand nach der Sanierung die selbe Entwicklung nehmen. Außerdem ist in Abbildung 9.16 eine deutliche Verringerung der Initialverbesserung der Zustandsbewertung nach erfolgter Maßnahme mit steigendem Abstand zum Prüfzeitpunkt zu erkennen. Dies ist auf die bereits erörterte Modellannahme der konstanten Abtragsrate für den Korrosionsabtrag zurückzuführen. Je später die Maßnahme durchgeführt wird, desto mehr Stahl wurde bereits in Eisenoxid umgewandelt. Die Konservierung des verbleibenden Bewehrungsquerschnitts wirkt sich daher vergleichsweise geringer auf die Dauerhaftigkeit aus, als zu einem früheren Zeitpunkt der Instandhaltung. Dadurch wird die Zustandszahl in einem geringeren Umfang reduziert.

Die bewährten deterministischen Verhaltensmodelle werden im Rahmen der Fuzzy-Zustandsbewertung zu Fuzzy-Verhaltensmodellen erweitert. Dadurch ist es möglich bei der Schadensentwicklungsprognose Unsicherheit bei der Festlegung der Einflussgrößen mathematisch kohärent zu berücksichtigen. Der dargestellte auf einer unscharfen Tragwerksanalyse basierende innovative Ansatz ermöglicht dann die Abbildung der zeitvarianten unscharfen Systemzustände der Bauwerke in die im Rahmen des Bauwerks-Management-Systems geforderten Eingangsgrößen (z. B. Zustandszahl, Zustandsentwicklung). Der methodische Ansatz zeichnet sich dabei in besonderem Maße durch seine Flexibilität, Objektivität und Validierbarkeit aus.

## 9.2 Beispiel 2

Nach einer Beschreibung des Untersuchungsobjekts in Abschnitt 9.2.1 wird in Abschnitt 9.2.2 auf die Bestimmung des Ist-Zustandes des Bauwerks und die Ableitung der Fuzzy-Tragwerkparameter eingegangen. Die Modellierung des numerischen Rechenmodells für

den ungeschädigten Zustand und die Durchführung einer Simulation des Tragverhaltens mit der „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“ sind Gegenstand von Abschnitt 9.2.3. In Abschnitt 9.2.4 wird die Anwendung des Algorithmus zur Validierung des Berechnungsmodells erörtert. In Abschnitt 9.2.5 wird schließlich die Auswirkung einer lokalen Schädigung der Struktur auf das Tragverhalten untersucht. Die lokale Schädigung wird im Rahmen dieses Beispiels durch eine Kontaktdetonation hervorgerufen. Auf der Grundlage einer Simulation des Schädigungsvorgangs wird das Fuzzy-Berechnungsmodell der geschädigten Brücke abgeleitet. Mit einer Simulation des Tragverhaltens der geschädigten Konstruktion wird die Versagensmöglichkeit des Bauwerks bestimmt. Sie dient zur abschließenden Bewertung der „Standicherheit“ und zur Festlegung der Zustandsnote des Bauwerks.

### 9.2.1 Konstruktionsbeschreibung

Bei dem Untersuchungsobjekt handelt es sich um eine zweistegige Plattenbalkenbrücke in Verbundbauweise. Der Überbau überspannt ein Feld mit einer Spannweite von 30 m und weist eine Breite von 4 m auf. Die Brücke wurde mit dem Ziel errichtet, die Auswirkungen von lokalen Schädigungen an der Betonfahrbahnplatte auf das Tragverhalten der Konstruktion untersuchen zu können. Aus diesem Grund weist die Konstruktion einige Besonderheiten auf, die nachfolgend erörtert werden.

Die Stege des Überbaus sind als HEB 1000 Profile ausgeführt. Die Fahrbahnplatte wird durch zehn modulare Stahlbetonplatten mit jeweils ca. 3 m Länge und einer Breite von 4 m gebildet. Die Betonfahrbahnplatte ist mit einer konstanten Dicke von 20 cm ausgeführt. Um eine lösbare schubfeste Verbindung zwischen den einzelnen Plattenelementen und den beiden HEB 1000 Profilen herstellen zu können, sind in die Platten jeweils zwei 1/2 HEA 340 Profile einbetoniert. Die Lastübertragung zwischen einer Betonplatte und den beiden 1/2 HEA 340 Profilen wird durch Betondübel sichergestellt. Die Flansche der 1/2 HEA 340 Profile und der beiden Längsträger (HEB 1000) werden durch Passschrauben schubfest verbunden, wodurch quasi ein monolithischer Querschnitt entsteht. Die Kontaktfugen zwischen den einzelnen Platten sind mit einer schwindarmen Zementsuspension verfüllt. Die Belastung der Brückenüberbaus erfolgt mit der Hilfe von hydraulischen Pressen. Dazu sind aufgehende Gewindestangen angebracht, die durch einen Querträger oberhalb der Fahrbahnplatte verbunden werden. Die hydraulischen Pressen werden zwischen den Querträgern und der Fahrbahnplatte eingebracht. Mit der erzeugten Druckkraft der Pressen

wird dadurch einerseits eine definierte Belastung des Brückenüberbaus erzielt und andererseits wird nach dem Prinzip „actio et reactio“ der Querträger und die Gewindestangen mit der selben Belastung beansprucht. Der Kraftschluss wird durch eine Gegenkonstruktion aus Stahlbetonträgern im Baugrund hergestellt.

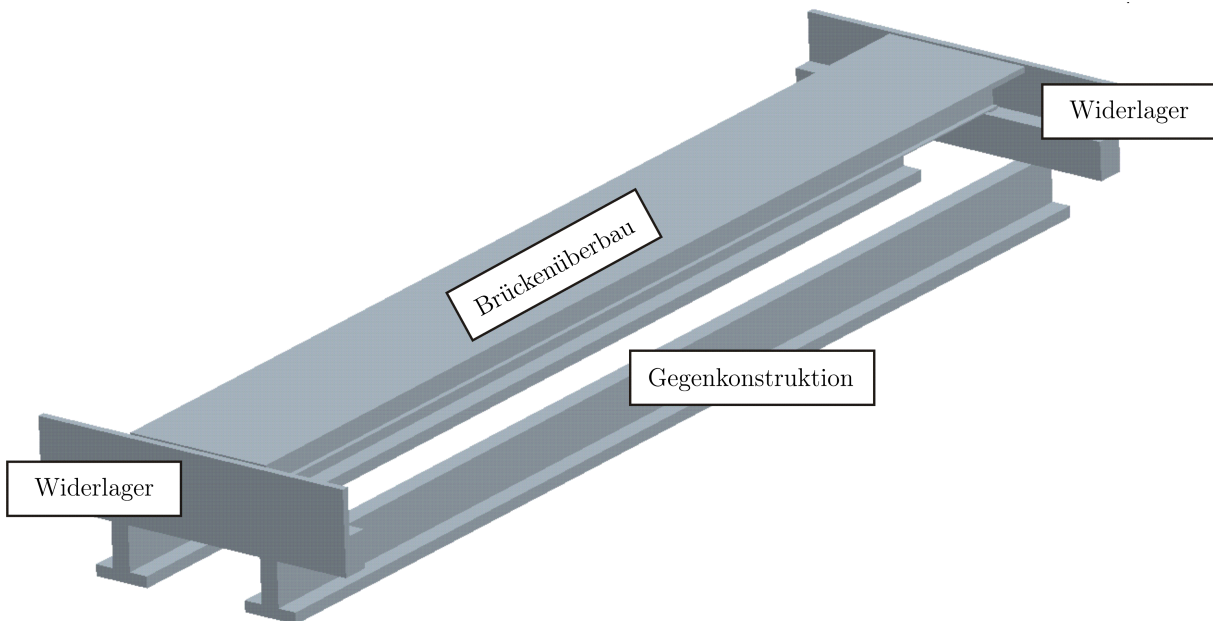


Abbildung 9.17: Schematische Darstellung der Testbrücke

### 9.2.2 Bestimmung des Bauwerkszustandes

Im Rahmen der Bestimmung des Bauwerkszustandes wurden, wie in Abschnitt 4 dargestellt, die für eine Bewertung des Zustands benötigten Daten beschafft. Neben der baulichen Durchbildung, der Geometrie, den Abmessungen und den Lagerungsbedingungen waren im vorliegenden Fall insbesondere die Materialeigenschaften der Stahlträger und der zunächst ungeschädigten Stahlbetonfahrbahnplatte von Interesse. Die Abmessungen der Konstruktion konnten aus den Konstruktionsunterlagen (vgl. Abschnitt 9.2.1) entnommen werden. Die Brückenlager sind als Elastomerlager ausgeführt.

Die Plattenelemente des Überbaus wurden in einem Fertigteilwerk mit einer Betongüte C30/37 nach DIN 1045-1 [10] angefertigt. Im Zuge der Qualitätssicherung wurden stichprobenartig die Rohdichte, die Druckfestigkeit und der Elastizitätsmodul des Betons bestimmt. Die Ergebnisse der Probenauswertungen sind in Tabelle 9.6 zusammengestellt. Wegen der geringen Stichprobenanzahl ist eine statistische Auswertung der Materialdaten nicht sinnvoll. Allerdings können gemäß Abschnitt 4.2 auf der Grundlage weniger Messdaten die Materialkennwerte als Fuzzy-Größen abgebildet werden.

Für die Rohdichte des Betons wurde dazu zunächst mit dem kleinsten Messwert  $2,32 \text{ kg/dm}^3$  und dem größten Wert der Messreihe  $2,35 \text{ kg/dm}^3$  der Erstentwurf für den Support festge-

**Tabelle 9.6:** Versuchsbrücke, Betondaten, Stichprobenauswertung; Rohdichte, Festigkeit, Elastizitätsmodul

Nr	Rohdichte [ $kg/dm^3$ ]	Festigkeit [ $N/mm^2$ ]	E-Modul [ $N/mm^2$ ]
1	2,33	45,5	31100
2	2,32	47,5	34300
3	2,33	49,0	32400
4	2,33	41,5	-
5	2,32	39,5	-
6	2,33	41,0	-
7	2,35	49,5	-
Minimalwert	2,32	39,5	31100
Mittelwert	2,33	44,79	32600
Maximalwert	2,35	49,5	34300
max. Abweichung vom Mittelwert	0,9 %	11,8 %	5,2 %

legt. Der Support ist gemäß Abschnitt 3 ein Intervall, das alle Realisierungen der unscharfen Größe enthält. Werte, die sich außerhalb des Supports befinden, werden mit einem Zugehörigkeitswert  $\mu = 0$  bewertet, d. h. ihr Auftreten wird sicher ausgeschlossen. Der auf den beobachteten Realisierungen basierende Erstentwurf des Supports ist daher unter Einbeziehung von Erfahrungswissen zu modifizieren. Seine Intervallgrenzen sind derart festzulegen, dass er neben den beobachteten auch mögliche nicht beobachtete Realisierungen der Rohdichte enthält. Wegen der geringen Streuung der Messwerte (vgl. Tabelle 9.6) und der im Vergleich zu den zehn Plattenelementen des Überbaus hohen Anzahl an beobachteten Realisierungen, wurde der Support durch das Intervall  $[2,30; 2,36]$   $kg/dm^3$  festgelegt. Der Modalwert der Fuzzy-Rohdichte  $\tilde{\rho}_c$  wurde durch den Mittelwert der Messwerte repräsentiert. Mit diesen Angaben wurde die Fuzzy-Rohdichte als Fuzzy-Dreieckszahl  $\tilde{\rho}_c = \langle 2,30; 2,33; 2,36 \rangle$   $kg/dm^3$  erhalten (vgl. Abbildung 9.18).

Die Ableitung der Fuzzy-Betondruckfestigkeit  $\tilde{f}_c$  erfolgte analog zur Festlegung der Fuzzy-Rohdichte. Der Erstentwurf des Supports ergab sich aus Tabelle 9.6 zu  $[39,5; 49,5]$   $N/mm^2$

und der Modalwert wurde mit  $44,8 \text{ N/mm}^2$  festgelegt. Daraus wurde unter Berücksichtigung der Streuung der gemessenen Betongfestigkeitswerte die Fuzzy-Betondruckfestigkeit  $\tilde{f}_c = \langle 35, 0; 44, 8; 55, 0 \rangle \text{ N/mm}^2$  abgeleitet (vgl. Abbildung 9.18).

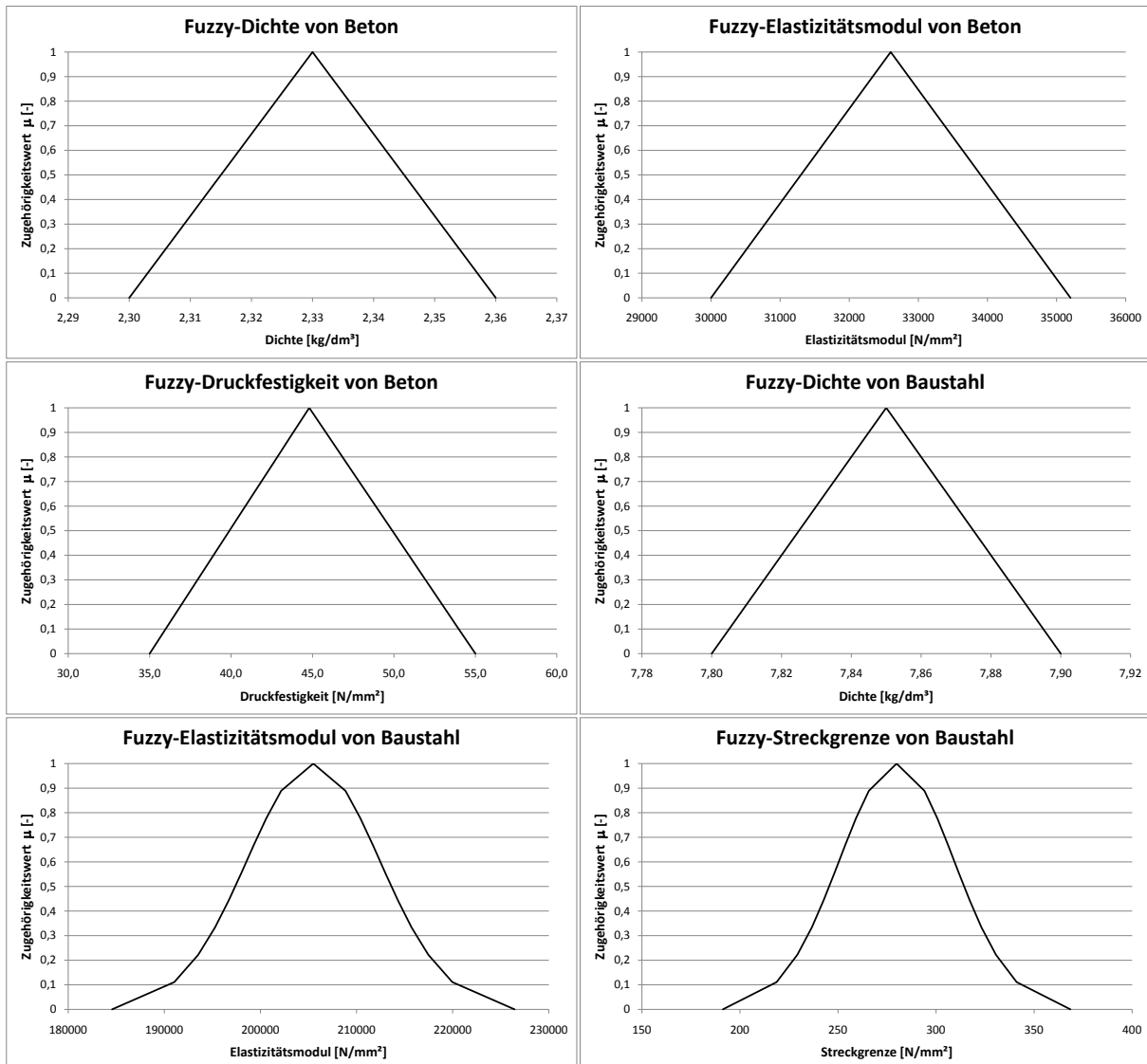


Abbildung 9.18: Fuzzy-Materialkenngrößen

Für die Beurteilung des Elastizitätsmoduls des Betons stand mit drei Messwerten lediglich eine sehr kleine Stichprobe zur Verfügung. Auf dieser Grundlage wurde erneut der Erstentwurf des Supports durch das Intervall  $[31100; 34300] \text{ N/mm}^2$  festgelegt und der Modalwert der Fuzzy-Größe  $\tilde{E}_c$  wurde zu  $32600 \text{ N/mm}^2$  bestimmt. Als zusätzliche Informationsquelle zur endgültigen Spezifikation des Elastizitätsmoduls wurde die DIN 1045-1

[10] herangezogen. Sie gibt mit

$$E_{cm} = 9500 (f_{cm})^{\frac{1}{3}} \quad (9.1)$$

einen Zusammenhang zwischen dem Mittelwert der Zylinderdruckfestigkeit des Betons  $f_{cm}$  und dem mittleren Elastizitätsmodul  $E_{cm}$  an. Gleichung (9.1) wurde genutzt, um zusammen mit der Fuzzy-Betondruckfestigkeit  $\tilde{f}_c$  den Streubereich des Elastizitätsmoduls zu bestimmen. Die Elemente des Supports von  $\tilde{f}_c$  sind mögliche Realisierungen der Druckfestigkeit. Mit den Intervallgrenzen des Supports und Gleichung (9.1) konnte daher die Streubreite des Elastizitätsmoduls abgeschätzt werden. Auf dieser Basis war es möglich, den Fuzzy-Elastizitätsmodul des Betons als Fuzzy-Dreieckszahl  $\tilde{E}_c = \langle 30000; 32600; 35200 \rangle N/mm^2$  festzulegen (vgl. Abbildung 9.18).

Für die Bestimmung der mechanischen Kenngrößen des Baustahls standen keine Messdaten zur Verfügung. Die Fuzzyifizierung der Rohdichte  $\tilde{\rho}_s$ , der Streckgrenze  $\tilde{f}_s$  und des Elastizitätsmoduls  $\tilde{E}_s$  wurde daher auf der Grundlage statistischer Angaben durchgeführt. Die Fuzzy-Rohdichte wurde durch die Fuzzy-Dreieckszahl  $\tilde{\rho}_s = \langle 7, 80; 7, 85; 7, 90 \rangle kg/dm^3$  beschrieben. Hinsichtlich der Streuungen der Streckgrenze und des Elastizitätsmoduls von Baustahl können Angaben der Literatur entnommen werden. So wird in [116] für einen Stahl der Güte S235 der Mittelwert bzw. die Standardabweichung der Streckgrenze mit  $279,9 N/mm^2$  bzw. mit  $29,2 N/mm^2$  angegeben. Der Mittelwert des Elastizitätsmoduls beträgt  $205500 N/mm^2$  und die korrespondierende Standardabweichung weist einen Wert von  $6900 N/mm^2$  auf. Entsprechend Abschnitt 4.2.4 kann eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in eine Möglichkeitsdichtefunktion überführt werden. Unter der Annahme normalverteilter Zufallsgrößen wurden dadurch die in Abbildung 9.18 dargestellten Fuzzy-Größen  $\tilde{f}_s$  und  $\tilde{E}_s$  erhalten. Sie weisen Gauß'sche Zugehörigkeitsfunktionen entsprechend Abschnitt 6.3.5 auf.

### 9.2.3 Fuzzy-Tragwerksanalyse im ungeschädigten Zustand

Die Simulation des Tragverhaltens der in Abschnitt 9.2.1 dargestellten Konstruktion erfolgte auf der Basis der „Finite Elemente Methoden“ (vgl. Abschnitt 2.2). Das numerische Modell der Brücke setzt sich aus Volumenelementen (3D), Schalenelementen (2D) und Stabelementen (1D) zusammen (vgl. Abbildung 9.19). Die Betonfahrbahnplatte wurde mit 20-Knoten Volumenelementen, die Stahlprofile (HEB 1000 und 1/2 HEA 340) mit 8-



Knoten Schalenelementen und die Querträger (HEB 120) mit Balkenelementen modelliert. Die Größe der Schalenelemente ergab sich aus den Abmessungen der kleinsten zu modellierenden Bauteile (Steifen) und der Forderung nach möglichst unverzerrten Elementen mit einem Seitenverhältnis von ca. 1:1. Wegen der sich daraus ergebenden geringen Elementabmessungen von ca. 15 cm Kantenlänge in Verbindung mit der quadratischen Ansatzfunktion der Elemente wurde ohne weiterführende Untersuchungen zum Konvergenzverhalten angenommen, dass das Modell in der Lage ist die moderaten Verformungs- und Spannungsgradienten ausreichend genau abbilden zu können. Zur Beschreibung des Materialverhalten des Baustahls wurde ein linear elastischer Ansatz gewählt. Dies ist durch die Tatsache motiviert, dass auf Grund der Wiederverwendbarkeit der Versuchsbrücke plastische Verformungen im Rahmen der Versuchsdurchführung ausgeschlossen werden. Für die Modellierung der Fahrbahnplatte wurden zunächst einige Vorüberlegungen angestellt. Im Rahmen der untersuchten Biegetragwirkung des Systems in Längsrichtung ist die Betonfahrbahnplatte über die gesamte Höhe überdrückt. Eine überschlägige Berechnung des Spannungszustandes im Querschnitt ergab eine Verzerrung von  $-0,29 \text{ ‰}$  an der Plattenunterseite und von  $-0,53 \text{ ‰}$  an der Plattenoberseite. Das nichtlineare Materialverhalten des Betons wurde entsprechend EC 2 [45] vereinfachend durch eine bilineare Spannungs-Verzerrungs-Beziehung berücksichtigt. Diese weist zwischen  $\epsilon = 0,0 \text{ ‰}$  und  $\epsilon = -1,35 \text{ ‰}$  einen linearen Anstieg von  $\sigma = 0$  auf die Druckfestigkeit  $\sigma = f_c$  auf. Diese Druckspannung bleibt dann bis  $\epsilon = -3,5 \text{ ‰}$  konstant. Da nun die maximale auftretende Verzerrung ( $-0,53 \text{ ‰}$ ) signifikant unterhalb der Übergangsverzerrung  $\epsilon = -1,35 \text{ ‰}$  liegt, wurden die nachfolgenden numerischen Analysen mit einem linear elastischen Materialverhalten für den Beton durchgeführt. Dadurch ist es für die Modellierung der Fahrbahnplatte im ungeschädigten Zustand ausreichend Volumenelemente mit einer Kantenlänge von ca. 20 cm, d. h. mit einem Element in Dickenrichtung der Platte, zu verwenden. Auf die Modellierung der Schädigung wird in Abschnitt 9.2.5 eingegangen. Das unter den dargestellten Gesichtspunkten erstellte numerische Modell ist in Abbildung 9.19 dargestellt und weist insgesamt 10713 Elemente mit 39917 Knoten und 167287 Freiheitsgraden auf.

Die Berechnungen der Strukturantworten wurden mit den in Abschnitt 9.2.2 bestimmten Materialkennwerten durchgeführt. Dazu wurde ein in der Programmiersprache C++ entwickelter FEM-Programmcode entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 6.3.5 „fuzzyfiziert“.

Neben der Bestimmung des Verformungs- und des Spannungszustandes unter der Wir-

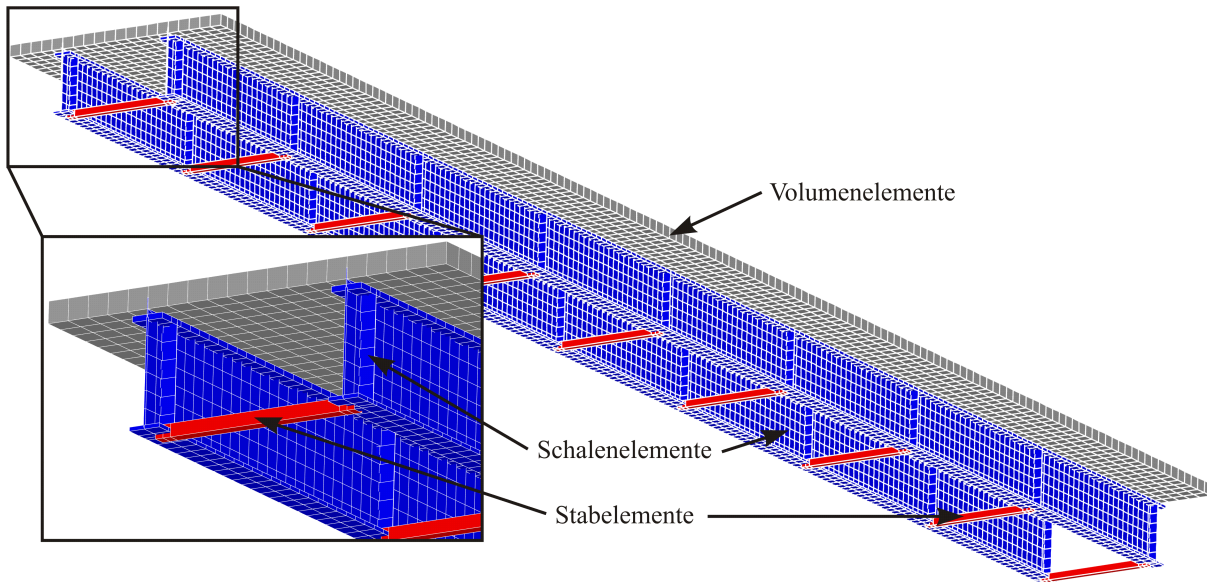


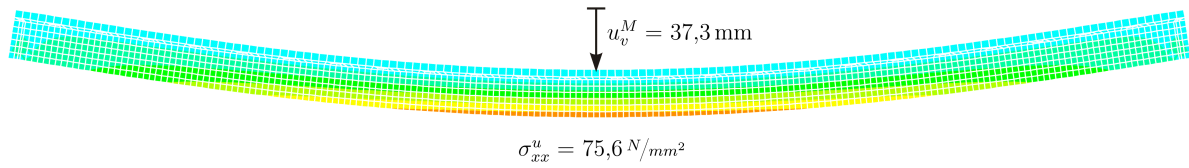
Abbildung 9.19: FEM-Modell der untersuchten Brücke

kung des Eigengewichts wurde eine Modalanalyse durchgeführt.

Der Fuzzy-Verformungszustand (vgl. Abbildung 9.20) wurde durch die vertikale Verformung der Brücke in Feldmitte ( $\tilde{u}_v^M$ ) charakterisiert. Der Spannungszustand wurde zunächst nur für den oberen ( $\tilde{\sigma}_{xx}^o$ ) und den unteren ( $\tilde{\sigma}_{xx}^u$ ) Flansch des HEB 1000 ebenfalls in Feldmitte ausgewertet.

Aus der Modalanalyse wurden die drei kleinsten Eigenfrequenzen des Bauwerks betrachtet. Die erste Eigenfrequenz  $\tilde{f}_1$  korrespondierte zur ersten Biegeeigenform (vgl. Abbildung 9.21), die zweite Eigenfrequenz  $\tilde{f}_2$  zur ersten Torsionseigenform (vgl. Abbildung 9.22) und die dritte Eigenfrequenz  $\tilde{f}_3$  zur zweiten Biegeeigenform (vgl. Abbildung 9.23).

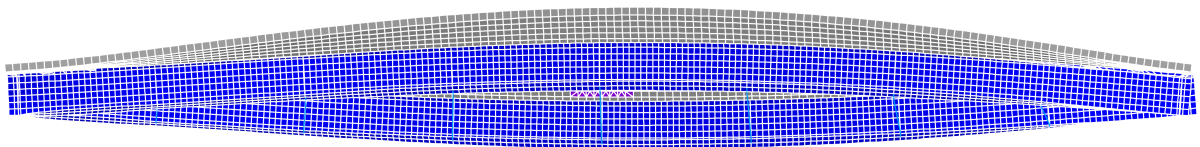
Um für die weiterführenden Analysen des geschädigten Bauwerks den Berechnungsaufwand reduzieren zu können, wurde zunächst der Einfluss der Streuungen der Fuzzy-Materialkennwerte auf die Ergebnisgrößen untersucht. Für jede der sechs ausgewerteten Strukturantworten wurde zunächst mit der Hilfe von Gleichung 8.11 das Maß für den relativen Einfluss der Unschärfe der Fuzzy-Materialkennwerte bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 9.7 zusammengefasst. Wie in Abschnitt 8.3 dargestellt, beschreiben die in Tabelle 9.7 angegebenen Maßzahlen den relativen Einfluss der Unschärfe der Fuzzy-Eingangsgrößen ( $\tilde{E}_c, \tilde{\rho}_c, \tilde{E}_s, \tilde{\rho}_s$ ) auf die jeweilige Fuzzy-Ergebnisgröße. Unter der Voraussetzung, dass alle Fuzzy-Eingangsgrößen symmetrisch sind und ihre Intervallgrenzen der  $\alpha$ -Schnitte die selbe Variation bezogen auf den Modalwert, aufweisen, geben die Maßzah-



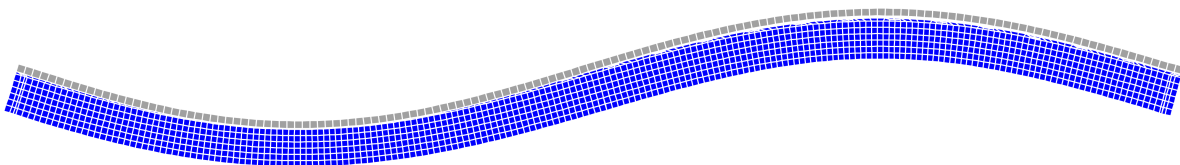
**Abbildung 9.20:** Versuchsbrücke, Numerisches Modell; Verformungs- und Spannungszustand; Scharfe Berechnung mit den Modalwerten der Eingangsgrößen



**Abbildung 9.21:** Versuchsbrücke, Numerisches Modell; Erste Biegeeigenform bei  $f_1 = 2,9 \text{ Hz}$ ; Scharfe Berechnung mit den Modalwerten der Eingangsgrößen



**Abbildung 9.22:** Versuchsbrücke, Numerisches Modell; Erste Torsionseigenform bei  $f_2 = 4,3 \text{ Hz}$ ; Scharfe Berechnung mit den Modalwerten der Eingangsgrößen



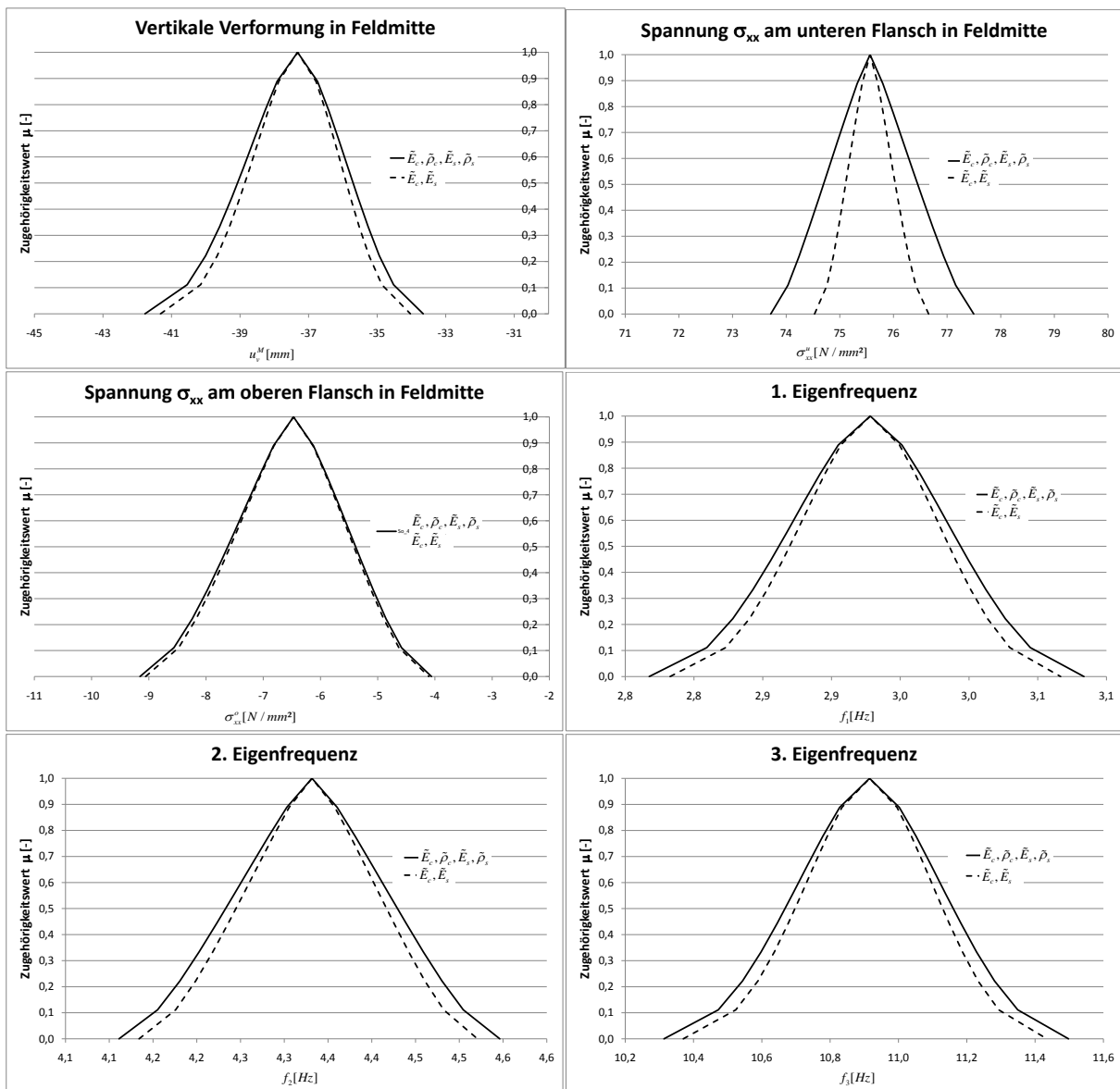
**Abbildung 9.23:** Versuchsbrücke, Numerisches Modell; Zweite Biegeeigenform bei  $f_3 = 10,9 \text{ Hz}$ ; Scharfe Berechnung mit den Modalwerten der Eingangsgrößen

**Tabelle 9.7:** Versuchsbrücke, Einfluss der Unschärfen der Materialkenndaten auf die Unschärfe der Ergebnisgrößen

	$\tilde{E}_c$	$\tilde{\rho}_c$	$\tilde{E}_s$	$\tilde{\rho}_s$	Gesamt
$\tilde{u}_v^M$	11,66 %	35,37 %	38,35 %	14,63 %	100,00 %
$\tilde{\sigma}_{xx}^u$	6,69 %	61,27 %	6,69 %	25,34 %	100,00 %
$\tilde{\sigma}_{xx}^o$	40,38 %	13,61 %	40,38 %	5,63 %	100,00 %
$\tilde{f}_1$	11,39 %	35,60 %	38,62 %	14,39 %	100,00 %
$\tilde{f}_2$	28,73 %	36,88 %	21,27 %	13,12 %	100,00 %
$\tilde{f}_3$	10,22 %	35,68 %	39,79 %	14,31 %	100,00 %
Mittelwert	18,18 %	36,40 %	30,85 %	14,57 %	100,00 %

len direkt den Anteil der Unschärfe der jeweiligen Eingangsgröße an der Unschärfe der Ergebnisgröße an. Im vorliegenden Fall wiesen die Unschärfen der Fuzzy-Eingangsgrößen jedoch erhebliche Unterschiede auf. Die Intervallgrenzen des Supports der Fuzzy-Festigkeit des Betons bzw. des Baustahls wichen beispielsweise um  $\pm 22,77\%$  bzw.  $\pm 31,66\%$  vom Modalwert der Fuzzy-Größe ab. Für den Fuzzy-Elastizitätsmodul des Betons ergab sich eine maximale relative Abweichung von  $\pm 7,98\%$  und für den Baustahl von  $\pm 10,19\%$ . Die Fuzzy-Dichten der beiden Materialien wiesen mit  $\pm 1,29\%$  bzw.  $\pm 0,64\%$  hingegen eine deutlich geringere Varianz auf. Unter Berücksichtigung der ähnlichen Einflussmaße in Tabelle 9.7 war daher zu erwarten, dass die Unschärfen der ausgewerteten Antwortgrößen von den Unschärfen des Fuzzy-Elastizitätsmoduls des Betons  $\tilde{E}_c$  und insbesondere von der Unschärfe des Fuzzy-Elastizitätsmoduls des Baustahls  $\tilde{E}_s$  dominiert werden. Diese Annahme wurde durch die in Abbildung 9.24 dargestellten Berechnungsergebnisse bestätigt. Die Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der rechnerischen Antwortgrößen unter Berücksichtigung der vier Materialkenndaten  $\tilde{E}_c$ ,  $\tilde{\rho}_c$ ,  $\tilde{E}_s$  und  $\tilde{\rho}_s$  mit den Berechnungsergebnissen nur unter Beachtung von  $\tilde{E}_c$  und  $\tilde{E}_s$ . Im letzteren Fall wurden die Fuzzy-Dichten durch ihre jeweiligen Modalwerte ersetzt und als scharfe Größen behandelt. Die so bestimmten Fuzzy-Ergebnisgrößen wiesen eine geringere Unschärfe auf, als bei Berücksichtigung der Streuungen der Dichten des Betons und des Baustahls. Die Unterschiede waren jedoch, mit Ausnahme der Spannung am unteren Flansch des HEB 1000, vernachlässigbar klein. Durch die Vernachlässigung der Unschärfen der Dichten des Betons und des Baustahls

wurde die Dimension des Raums der Fuzzy-Eingangsgrößen von  $n = 4$  auf  $n = 2$  reduziert. Diese Reduktion führt unter Beachtung von Gleichung (6.114) bei gleicher Anzahl  $m$  der  $\alpha$ -Niveaus zu einer Verringerung des Berechnungsaufwandes auf ca. 25% gegenüber einer Analyse mit vier Fuzzy-Eingangsgrößen. Der Einfluss der Vereinfachung auf die für die Bestimmung der Tragfähigkeit wichtige Spannung am unteren Flansch des Stahlträgers wird im folgenden Abschnitt diskutiert.



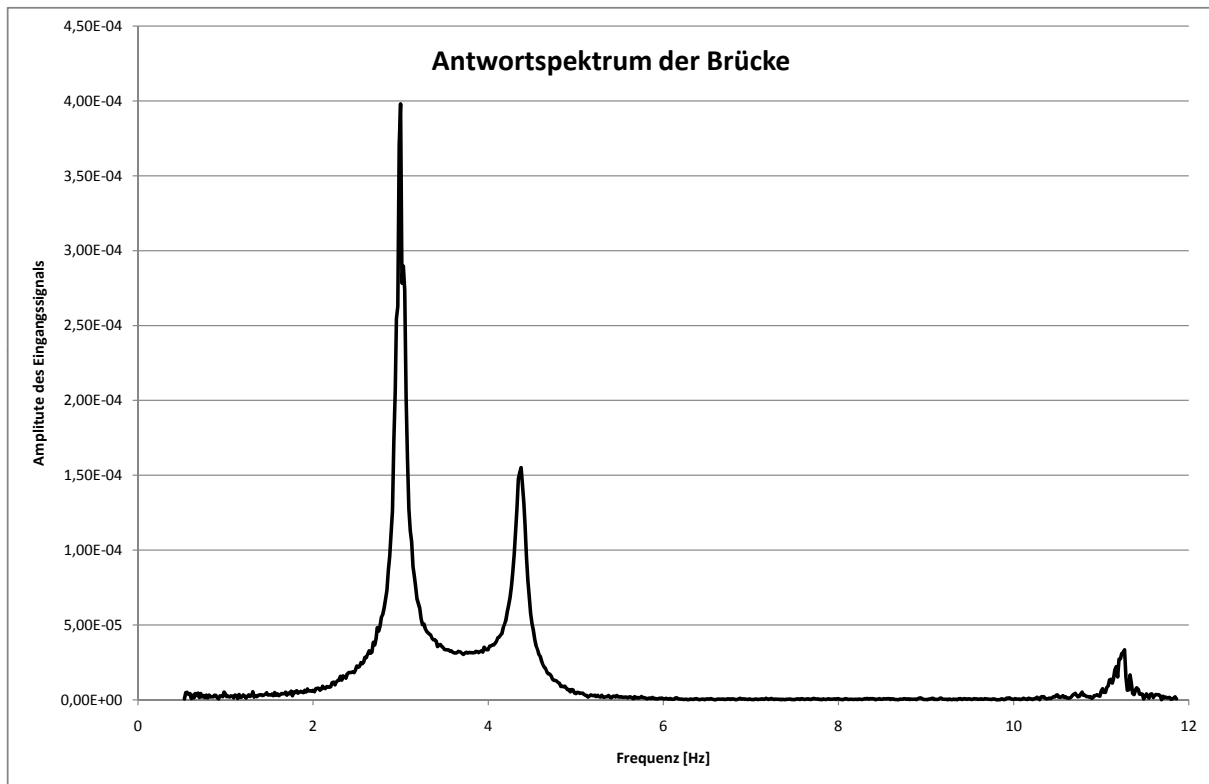
**Abbildung 9.24:** Versuchsbrücke, Fuzzy-Antwortgrößen mit (gestrichelte Linie) und ohne (durchgezogene Linie) Vernachlässigung der Streuung der Materialdichten

### 9.2.4 Modellvalidierung

Die Validierung des Analysemodells wurde für den ungeschädigten Zustand der Brücke durchgeführt. An dem realen Bauwerk wurden dafür ausgewählte Antwortgrößen der Struktur messtechnisch erfasst. So wurden die vertikale Verformung und die resultierenden Längsspannungen im oberen bzw. unteren Flansch des HEB 1000 infolge der Wirkung des Eigengewichts sowie die ersten drei Eigenfrequenzen der Struktur messtechnisch ermittelt.

Die Messung der Verformung und der Spannungen erfolgte direkt nach Fertigstellung der Brücke. Für die Montage der Fertigteileplatten auf den HEB 1000 wurden die Längsträger durch zusätzliche Unterstützungen in der theoretischen Nulllage gehalten. Nachdem die 1/2 HEA 340 der Plattenmodule mit den HEB 1000 verschraubt und die Fugen zwischen den Platten verfüllt und ausgehärtet waren, wies der quasi monolithische Brückenüberbau einen spannungslosen Zustand auf. Durch die Entfernung der provisorischen Unterstützungen wurde die Verbundwirkung aktiviert. Die Verformung aus der Nulllage wurde mit einem induktiven Wegaufnehmer bestimmt und die sich einstellenden Verzerrungen in den Stahllängsträgern wurden mit Dehnmessstreifen aufgezeichnet. Während der Dauer der Aufzeichnungen wiesen die Messdaten auf Grund von kleinen Bewegungen des Überbaus geringfügige Schwankungen auf. Die unscharfen Messwerte wurden entsprechend Abschnitt 4.2 „fuzzyfiziert“ (vgl. Abbildung 9.26).

Die Bestimmung der Eigenfrequenzen wird üblicherweise mit Beschleunigungsaufnehmern durchgeführt. Diese werden an Orten mit möglichst großer Amplitude einzelner Schwingformen platziert. Die Ergebnisse werden anschließend kombiniert ausgewertet und so das Schwingverhalten der Konstruktion bestimmt. Die Versuchsbrücke weist auf Grund ihrer Konstruktion ein ausgeprägtes Schwingverhalten auf und ermöglicht dadurch eine sehr genaue Bestimmung der Eigenfrequenzen. Um eine in der Praxis häufig vorkommende ungünstigere Messsituation zu simulieren, wurde lediglich ein Messaufnehmer verwendet. Darüber hinaus wurde das Bauwerk dabei lediglich auf Grund ambienter Anregung in Schwingung versetzt und die Signale des Messaufnehmers aufgezeichnet. Das zeitdiskrete Signal wurde anschließend mittels einer „Fast Fourier Transformation“ (FFT) in das in Abbildung 9.25 dargestellte Antwortspektrum der Brücke überführt. Das Antwortspektrum gibt die Amplituden der Grund- und Oberschwingungen bei diskreten Frequenzwerten an. Durch die Superposition der Grund- und Oberschwingungen mit den entsprechen-



**Abbildung 9.25:** Versuchsbrücke, Antwortspektrum infolge ambienter Anregung (Auszug)

den Amplituden kann das Messsignal approximiert werden. Die Größe der Amplitude eines Spektralanteils ist ein Maß für den Anteil der Grund- und Oberschwingung an der Gesamtschwingung des Bauwerks. Mögliche Eigenfrequenzen des Bauwerks werden daher üblicherweise durch Amplituden-Peaks identifiziert. Durch die Festlegung einer der Eigenfrequenzen der Struktur durch den singulären Frequenzwert bei einem Peak gehen jedoch Informationen über die Signifikanz und evtl. Streubreiten der Frequenzmessung verloren. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das Antwortspektrum daher als Grundlage für die Ableitung von Fuzzy-Eigenfrequenzen genutzt. Dabei wurden zunächst analog zum klassischen Vorgehen potentielle Eigenfrequenzen durch Amplituden-Peaks identifiziert. Die relative Größe der Amplitudenwerte im Bereich des Peaks wurde als Maß der Möglichkeit interpretiert, dass der entsprechende Frequenzwert eine Eigenfrequenz des Bauwerks charakterisiert. Dazu wurden die Amplitudenwerte in dem betrachteten lokalen Bereich normiert und daraus Fuzzy-Eigenfrequenzen erhalten (vgl. Abbildung 9.26). Durch die „Fuzzyifizierung“ der Messergebnisse wurde implizit ein Maß für die Güte der Messungen in die Analyse integriert.

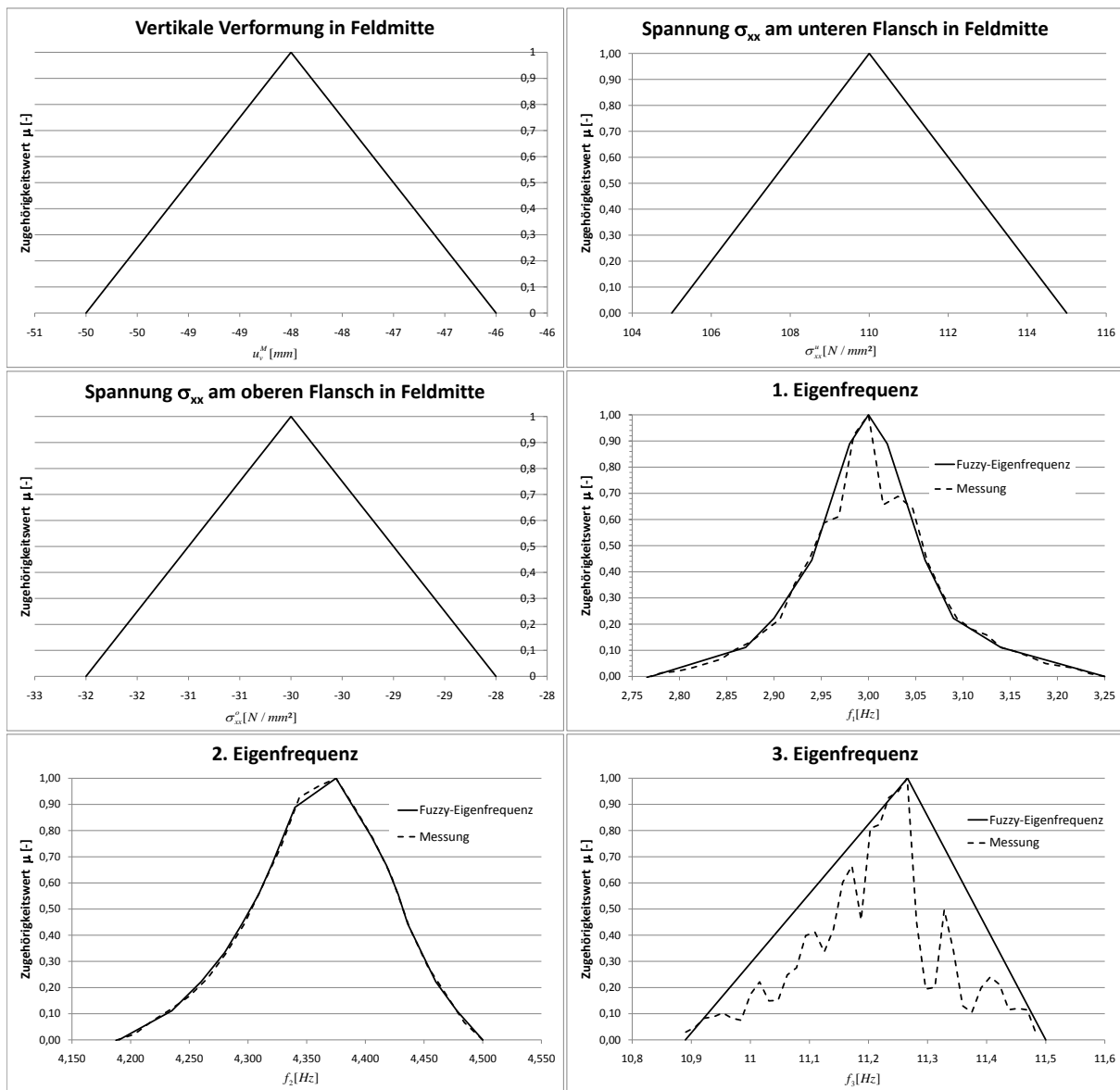


Abbildung 9.26: Versuchsbrücke, Antwortgrößen, unscharfe Messwerte, Fuzzy-Antwortgrößen

Die Validierung des Berechnungsmodells wurde mit dem in Abschnitt 7.2 und Abschnitt 7.3 dargestellten Algorithmus durchgeführt. Ein Vergleich der theoretischen Antwortgrößen (vgl. Abbildung 9.24) mit den in Abbildung 9.26 dargestellten messtechnisch erfassten Größen zeigte auffällige Unterschiede. Während die Eigenfrequenzen eine verhältnismäßig gute Übereinstimmung aufweisen, weichen sowohl die berechneten Spannungen als auch die Verformung in Feldmitte erheblich von den Messungen ab. Die Überprüfung der Qualität des Berechnungsmodells erfolgte daher getrennt für die Modalanalyse und die statische Berechnung. Die Anwendung des Algorithmus zur „Rückrechnung“ der Fuzzy-



Eingangsgößen auf der Basis der drei Eigenfrequenzen aus Abbildung 9.26 ergab die in Abbildung 9.27 dargestellten Elastizitätsmodule für den Beton und den Baustahl. Eine erneute numerische Bestimmung der Eigenfrequenzen mit diesen Fuzzy-Eingangsgößen resultierte in den in Abbildung 9.28 dargestellten Ergebnisgrößen. Sie sind zusammen mit den korrespondierenden Messwerten abgebildet. Die Abbildung verdeutlicht das in Abschnitt 7.3 formulierte Kriterium des Validierungsalgorithmus, die Fuzzy-Eingangsgößen derart zu bestimmen, dass die damit berechneten Fuzzy-Ergebnisgrößen die gemessenen Antwortgrößen einhüllen. Für die Eigenfrequenzen der Brücke gilt  $\tilde{f}_i^{mess} \subseteq \tilde{f}_i^{val}$ . Eine „enge“ Einhüllung ist gewährleistet, falls auf jedem  $\alpha$ -Niveau sowohl der linke als auch der rechte Ast einer Ergebnisgröße mit mindestens einem Ast eines Messwerts übereinstimmt. Abbildung 9.28 ist zu entnehmen, dass die linken Äste der gemessenen und berechneten zweiten Eigenfrequenz vollständig deckungsgleich verliefen. Die rechten Äste der ersten Eigenfrequenz stimmten im unteren Bereich der  $\alpha$ -Niveaus überein und die der dritten Eigenfrequenz wiesen im oberen Bereich identische Werte auf. Die Lösung entsprach also den Voraussetzungen.

Die Auswertung der „rückgerechneten“ Fuzzy-Eingangsgößen zeigte eine deutliche Verringerung der Unschärfe des Elastizitätsmoduls des Betons während die Unschärfe der Kenngröße für den Baustahl stieg. Außerdem war für den Stahl tendenziell eine Verschiebung des Elastizitätsmoduls zu größeren Werten festzustellen. So war die linke Intervallgrenze des Kerns um ca. 4,88 % und die rechte Grenze um ca. 8,33 % größer als der Modalwert des in Abschnitt 9.2.2 bestimmten Fuzzy-Elastizitätsmoduls. Da der Kern des Elastizitätsmoduls des Betons quasi unverändert blieb, bedeutete dies insgesamt eine Erhöhung der Steifigkeit des Bauwerks. Offensichtlich war die Bauwerkssteifigkeit des Berechnungsmodells in der Ausgangskonfiguration zu gering. Diese Annahme wurde durch die Tatsache gestützt, dass die Modalwerte der drei mit den Messwerten der Elastizitätsmoduln berechneten Fuzzy-Eigenwerte (vgl. Abbildung 9.24) kleiner waren als die Modalwerte der aus der Messung abgeleiteten Größen (vgl. Abbildung 9.26). Die Tatsache, dass der Kern des Elastizitätsmoduls des Baustahls ein Intervall war, obwohl die drei Fuzzy-Eingangsgößen (Eigenfrequenzen) singuläre Modalwerte aufwiesen, deutete auf eine Fehlpassung des Berechnungsmodells und/oder eine Inkonsistenz in der Messung hin. Die Variation des Kerns fiel mit ca.  $\pm 3,23\%$ , bezogen auf den Mittelwert der Intervallgrenzen, jedoch moderat aus. Dennoch bewirkten die Unstimmigkeiten zwischen Berechnungs- und Messergebnissen eine Vergrößerung der Intervalle auf allen  $\alpha$ -Niveaus.

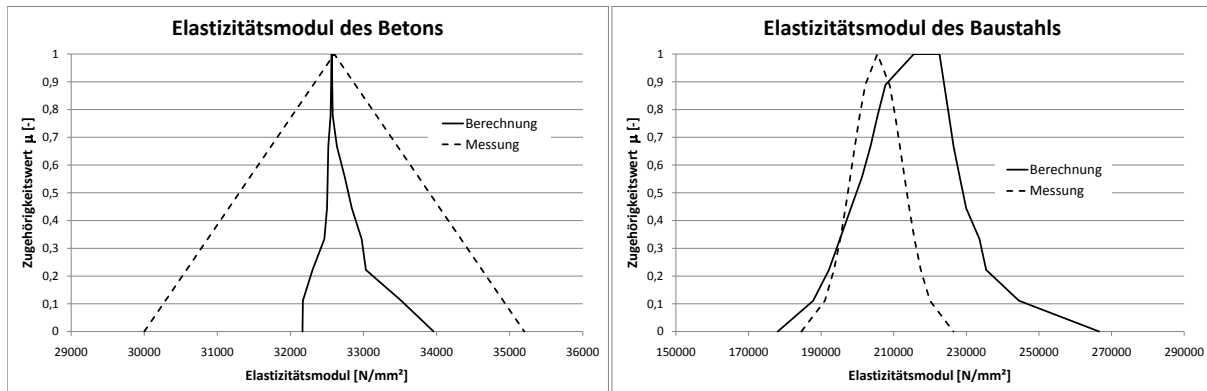


Abbildung 9.27: Versuchsbrücke, Modellvalidierung, Elastizitätsmodule aus inverser Modalanalyse

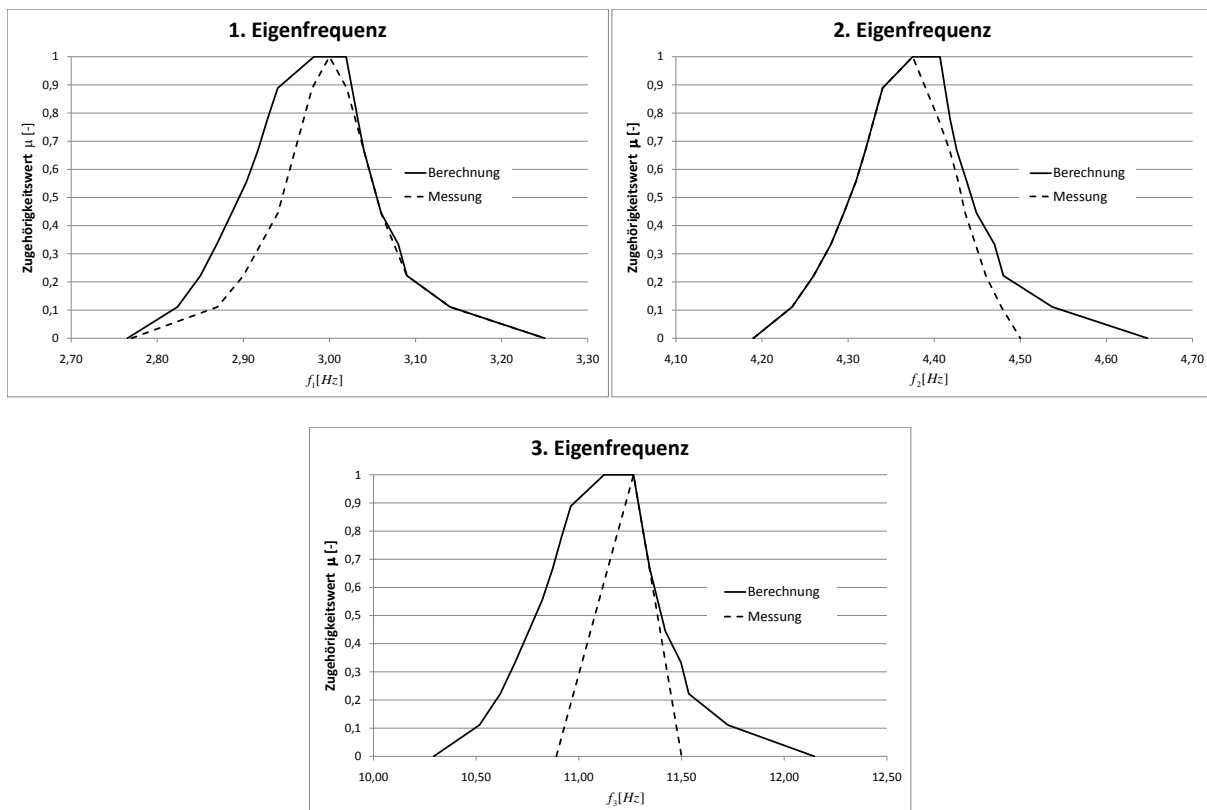
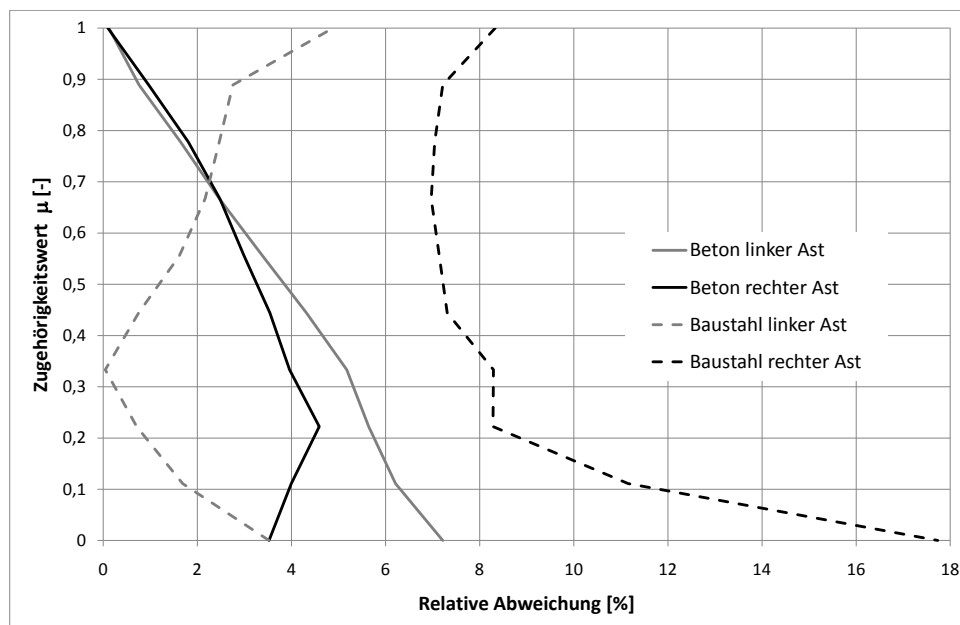


Abbildung 9.28: Versuchsbrücke, Modellvalidierung, „rückgerechnete“ Fuzzy-Eigenfrequenzen und unscharfe Messwerte der Eigenfrequenzen

Dies führte zu einer Erhöhung der Unschärfe der Fuzzy-Größe. Die mit Gleichung (7.41) bestimmte relative Änderung der Unschärfe des Fuzzy-Elastizitätsmoduls des Baustahls lag mit  $V_2^{Baustahl} = 0,94 < 1$  jedoch innerhalb der vorgegebenen Toleranz (vgl. Gleichung (7.42)). Die aggregierte Unschärfe infolge der Fehlpassung des Berechnungsmodells und der Ungenauigkeiten der Messungen lag somit in der Größenordnung der Unschärfe der Eingangsgrößen. Im vorliegenden Fall konnte daher von einem ausgewogenen Verhältnis zwischen der Güte der Berechnungsparameter und der des Berechnungsmodells ausgegangen werden.

Auch das zweite Bewertungskriterium, die relativen Abweichungen der „rückgerechneten“ Elastizitätsmoduln des Betons  $\tilde{V}_1^{Beton}$  und des Baustahls  $\tilde{V}_1^{Baustahl}$  bezogen auf die fuzzyfizierten Messwerte, charakterisierte ein ausreichend genaues Berechnungsmodell. Die mit Gleichung (7.40) bestimmten relativen Abweichungen (vgl. Abbildung 9.29) wiesen im Wesentlichen Werte unter 10% auf. Lediglich die rechte Intervallgrenze des Supports



**Abbildung 9.29:** Versuchsbrücke, Modellvalidierung, relative Abweichung der „rückgerechneten“ Elastizitätsmodulen des Betons und des Baustahls bezogen auf die Fuzzy-Eingangsgrößen, Darstellung der Äste von  $\tilde{V}_1^{Beton}$  und  $\tilde{V}_1^{Baustahl}$

des Elastizitätsmoduls des Baustahls wich um 17,73% von dem in Abschnitt 9.2.2 bestimmten Wert ab. Auf Grund der Datenstruktur der Fuzzy-Ergebnisgrößen (Eigenwerte) konnte ermittelt werden, dass die rechten Äste der Elastizitätsmodule des Betons und des

Baustahls die rechten Äste der Ergebnisgrößen bestimmen. Abbildung 9.28 ist zu entnehmen, dass lediglich für die erste Eigenfrequenz die rechten Intervallgrenzen des Supports der berechneten und der gemessenen Größe übereinstimmen. Die rechten Intervallgrenzen der Träger der berechneten zweiten und dritten Eigenwerte weisen dagegen deutlich höhere Werte als die gemessenen Eigenwerte auf. Daher wurde die Abweichung des Supports des Elastizitätsmoduls des Baustahls auf eine ungenaue Bestimmung der ersten Eigenfrequenz auf den unteren  $\alpha$ -Niveaus zurückgeführt und daher nicht der Modellunschärfe sondern einer ungenauen Messung zugeordnet. Generell konnte in Abbildung 9.28 eine relativ gute Übereinstimmung der mit den „rückgerechneten“ Materialkennwerten bestimmten ersten beiden Eigenfrequenzen mit den Messwerten festgestellt werden. Die dritte berechnete Eigenfrequenz zeigte jedoch eine erheblich größere Unschärfe als der Messwert. Wegen der extremen Bewertung der Messwerte (vgl. Gleichung (7.30)) wurde daraus gefolgert, dass die Bestimmung der Materialkennwerte von den Unschärfen der ersten beiden gemessenen Frequenzen dominiert wurde, und, dass sie mit größerer Ungenauigkeit bestimmt wurden als die dritte Frequenz. Dies lässt die Annahme zu, dass durch eine erneute messtechnische Bestimmung der Eigenfrequenzen der Brücke, beispielsweise mit mehreren Sensoren zur Verbesserung der Eingangssignale, eine erhebliche Verbesserung des Validierungsergebnisses zu erwarten ist. Das Berechnungsmodell wurde daher im Rahmen dieses Beispiels als ausreichend genau eingestuft.

Die Validierung des statischen Berechnungsmodells mit den Messwerten der Verformung und der Spannungen als Bestimmungsgrößen ergab wegen fehlender Konvergenz des iterativen Validierungsalgorithmus keine endgültigen Ergebnisse. Die in Abbildung 9.30 und 9.31 dargestellten Ergebnisse des letzten Iterationsschrittes können jedoch trotzdem als Grundlage einer Interpretation des Systemverhaltens genutzt werden. Bei der Auswertung der Ergebnisse war besonders auffällig, dass der Messwert der Spannung am unteren Flansch in Feldmitte auf keinem  $\alpha$ -Niveau erreicht wurde, obwohl der Algorithmus durch Reduktion des Fuzzy-Elastizitätsmoduls des Betons auf Werte nahe Null (linker Ast) bereits eine maximale Umlagerung der Beanspruchungen auf den Stahlträger durchgeführt hat. Trotz der gleichzeitigen Erhöhung des Elastizitätsmoduls des Baustahls wurde dadurch die Gesamtsteifigkeit der Brücke reduziert und dadurch wurden zu kleine Verformungen (linker Ast) erhalten. Analog dazu wurden zu große Druckspannungen im Obergurt des Stahlträgers berechnet. Die Analyse der Ergebnisse zeigte, dass das Berechnungsmodell der Brücke offensichtlich nicht in der Lage ist, das reale Verhalten der Brücke

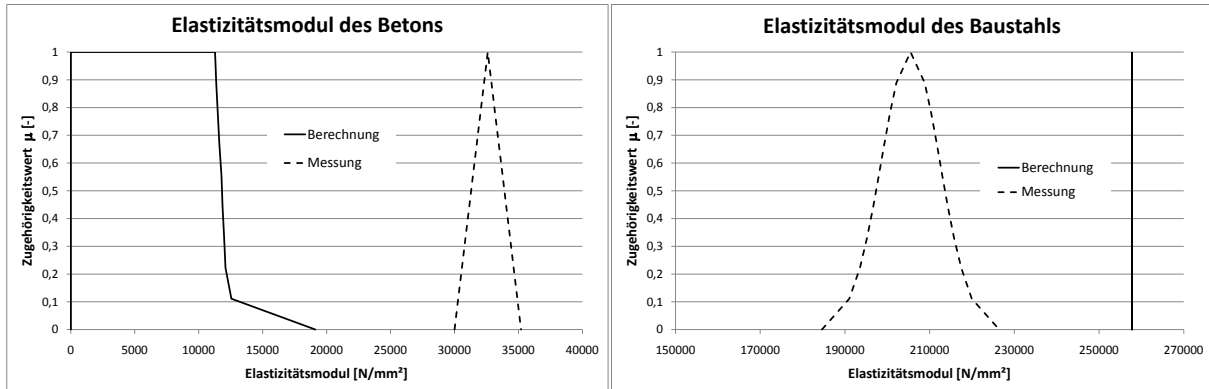


Abbildung 9.30: Versuchsbrücke, Modellvalidierung, Elastizitätsmodule aus inverser statischer Analyse

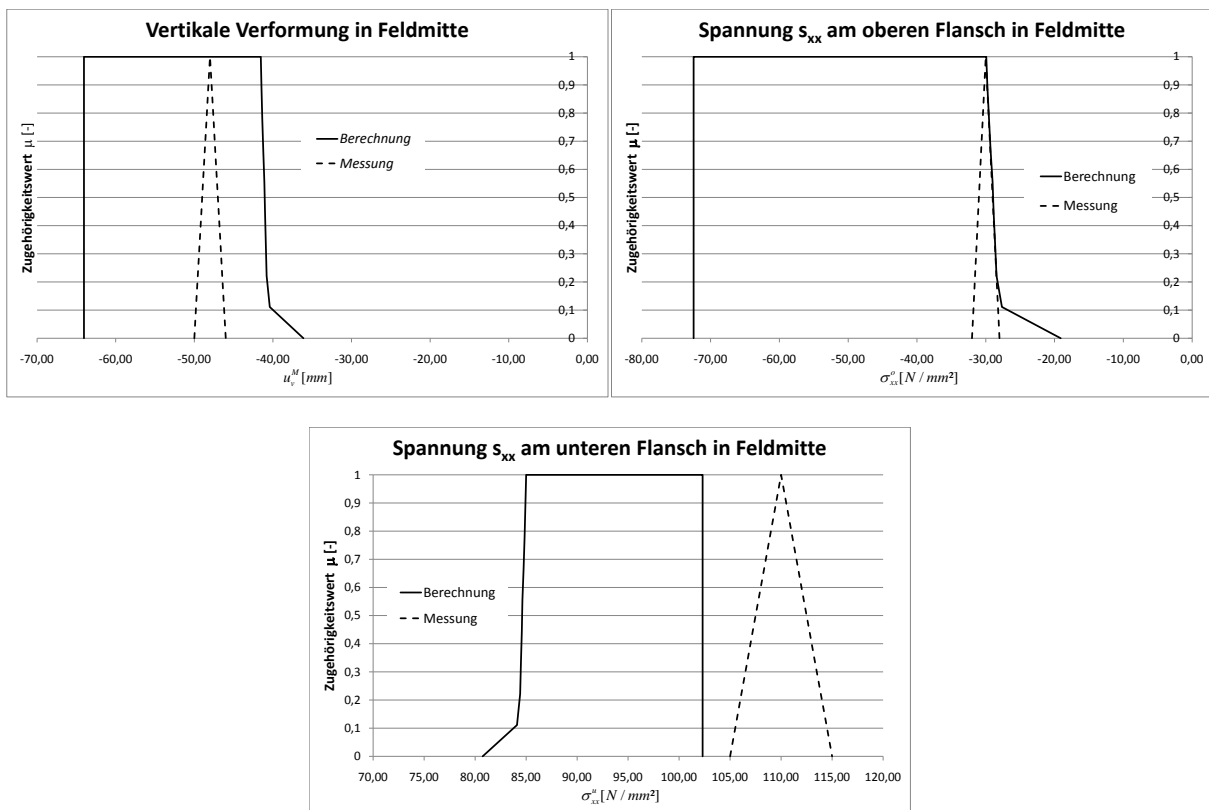


Abbildung 9.31: Versuchsbrücke, Modellvalidierung, „rückgerechnete“ Fuzzy-Verformung und Fuzzy-Spannungen und unscharfe Messwerte der Verformung und Spannungen

ausreichend genau abzubilden. Es war nicht möglich eine Übereinstimmung zwischen theoretischen und messtechnischen Strukturantworten zu erreichen. Der Grund dafür liegt in einer Abweichung der Modellannahmen von den realistischen Gegebenheiten. Die Umlagerung der Beanspruchungen durch Reduktion des Elastizitätsmoduls des Betons legt nahe, dass die Annahme eines idealen Verbundes zwischen den 1/2 HEA 340 und den HEB 1000 einerseits und den 1/2 HEA 340 Profilen und den Betonplatten andererseits nicht der Wirklichkeit entspricht. Nach der Entfernung der Hilfsunterstützungen musste diese Verbundwirkung erst aktiviert werden. Schlupf in den Schraubenverbindungen und in den Dübelleisten führt jedoch dazu, dass zunächst eine bestimmte Relativverschiebung stattfinden muss, bevor die einzelnen Komponenten des Brückenüberbaus monolithisch zusammenwirken. Die Tatsache, dass die Messwerte der Spannung am unteren Flansch sogar bei vollständiger Vernachlässigung der Tragwirkung der Betonplatte rechnerisch nicht erreicht wurden, kann mit einer fehlerhaften Spannungsmessung erklärt werden.

Zusammenfassend wird die Anwendbarkeit des Berechnungsmodells für die Durchführung der numerischen Analysen im geschädigten Zustand bewertet. Bei der in Abschnitt 9.2.5 dargestellten Analyse wird die geschädigte Brücke statisch belastet. Die erörterte Validierung des numerischen Modells im Rahmen der statischen Erstbelastung zeigte signifikante Unterschiede zwischen den theoretischen und den am Bauwerk gemessenen Strukturantworten. Allerdings konnte mit der Hilfe des Validierungsalgorithmus eine hohe Prognosegenauigkeit, hinsichtlich des Schwingungsverhaltens der Versuchsbrücke, für das numerische Modell nachgewiesen werden. Die Massen- und insbesondere die Steifigkeitsverteilung des Systems sind daher korrekt abgebildet. Da das numerische Modell von einem starren Verbund zwischen den Betonsegmenten, den 1/2 HEA 340 Profilen und den HEB 1000 Stahllängsträgern ausgeht, kann daher gefolgert werden, dass zwischen den realen Bauteilen im schwingenden Zustand ebenfalls kein Schlupf statt findet. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Brücke unter der Wirkung des Eigengewichts schwingt, bedeutet dies, dass die Verbundwirkung infolge der Wirkung des Eigengewichts vollständig aktiviert ist und die in Abschnitt 9.2.2 bestimmten Materialkennwerte die Wirklichkeit ausreichend genau wiedergeben. Es ist daher zu erwarten, dass Beanspruchungen, die durch zusätzlich zum Eigengewicht aufgebrauchte Belastungen hervorgerufen werden, ausreichend genau modelliert werden können. Die Wirkung des Eigengewichts hingegen kann im Rahmen der Modellannahmen nicht abgebildet werden. Daher wird bei der im folgenden Abschnitt dargestellten numerischen Simulation des Tragverhaltens der

geschädigten Konstruktion das Eigengewicht rechnerisch nicht erfasst. Statt dessen wird seine Wirkung durch Superposition der Messwerte der Spannungen im Baustahl berücksichtigt.

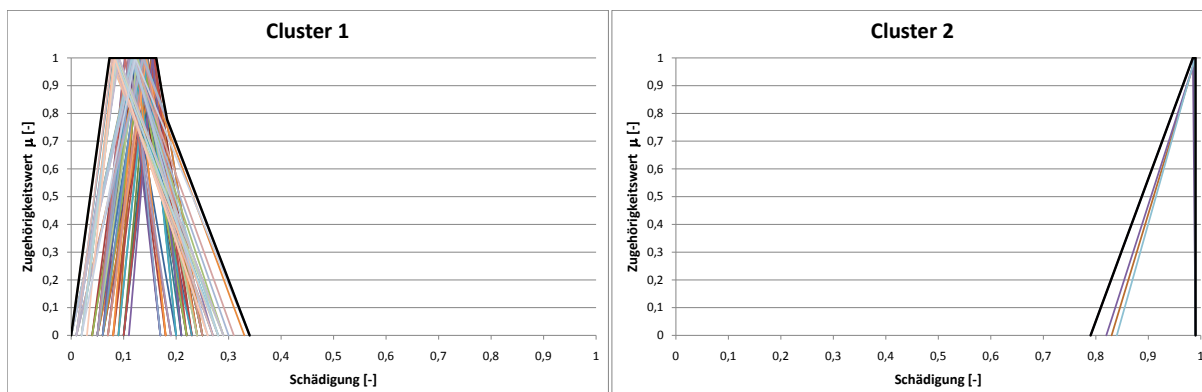
### 9.2.5 Schädigungssimulation und Zustandsbewertung

Wie bereits erwähnt, dient die Konstruktion der Versuchsbrücke u. a. dazu, Auswirkungen von lokalen Schäden an der Betonfahrbahnplatte auf das Tragverhalten des Überbaus unter kontrollierten Bedingungen beobachten zu können. Die im Folgendem untersuchte Schädigung ist durch die Wirkung einer Kontaktdetonation mit 1000 g PETN1.5 hervorgerufen worden. Die Untersuchung umfasste die numerische Bestimmung der lokalen Schädigung, die Transformation des Simulationsergebnisses in das numerische Modell der gesamten Brücke sowie die Bewertung des geschädigten Zustandes der Brücke mit der Hilfe einer „Fuzzy-Finite-Elemente-Berechnung“.

Die Simulation der Wellenausbreitung im Bauteil und die Bestimmung der daraus resultierenden Schädigung des Materials wurde mit einem kommerziellen Hydrocode durchgeführt. Als Schädigungsmodell, das die Verringerung der Steifigkeit und der Festigkeit des Stahlbetons infolge plastischer Verformungen (Kompaktion und Gestaltänderung) beschreibt, wurde ein am Lehrstuhl für Baustatik der Universität der Bundeswehr München entwickeltes Materialmodell [59] eingesetzt. Die numerische Simulation des Schädigungsvorganges wurde mit einem aus dem Plattenmodul herausgeschnittenen Teilstück mit einer Kantenlänge von 120 cm durchgeführt. Das Teilmodell wurden mit Elementen mit einer Größe von 5 mm diskretisiert. Das für das weitere Vorgehen relevante Ergebnis der Simulation, die Schädigungsvariable  $d$ , ist in der Abbildung 4.6 in Abschnitt 4.3 dargestellt.

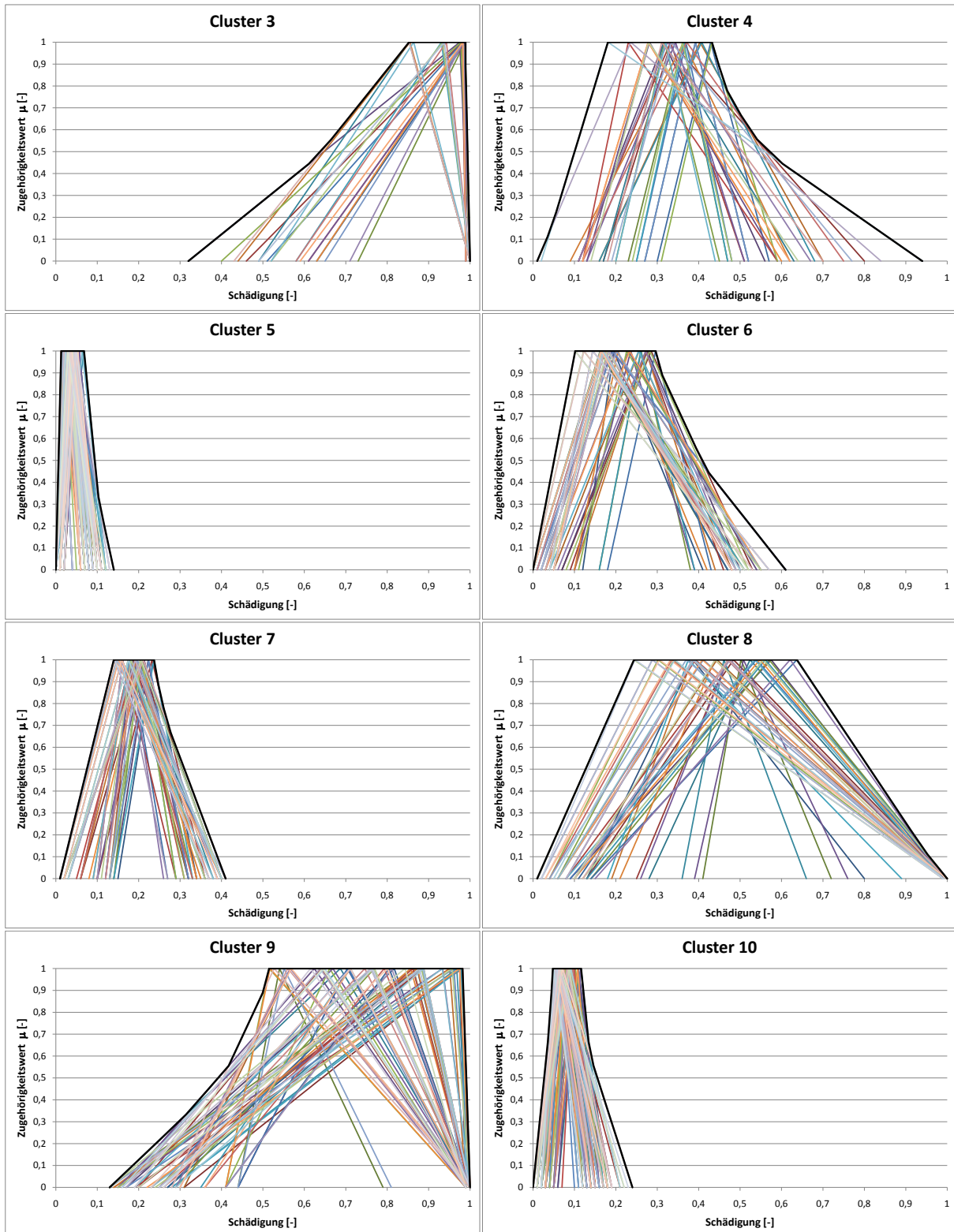
Auf der Grundlage der Ergebnisse der Schädigungssimulation wurde anschließend eine numerische Simulation des Tragverhaltens der geschädigten Brücke mit der Hilfe einer Finite-Elemente-Berechnung durchgeführt. Das Simulationsergebnis war zunächst für die weitere Nutzung aufzubereiten. Dies war notwendig, da auf Grund der sehr hohen Anzahl von Elementen eine direkte Inkorporation des in Abbildung 4.6 dargestellten Simulationsergebnisses in das FEM-Modell der gesamten Brücke zu inakzeptablen Analysedauern geführt hätte. Mit der gewählten Elementgröße von 5 mm würden alleine zur Modellierung des Bereichs der Schädigung 2.304.000 Elemente benötigt. Im Rahmen der FEM-

Berechnung der Brücke wurde daher bei der Modellierung der Fahrbahnplatte im Bereich der Schädigung eine Elementgröße von 5 cm vorgesehen. Es waren also  $10 \times 10 \times 10 = 1000$  Elemente der Hydrocode-Simulation zu jeweils einem repräsentativen Volumenelement des FEM-Modells zusammenzufassen. Dadurch wurde die Anzahl der Elemente im Bereich der Schädigung auf 2.304 reduziert. Die Zusammenfassung der isotropen Schädigungsvariablen erfolgte entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 4.3. Jedem Element des FEM-Modells wurde zunächst eine Fuzzy-Schädigungsvariable zugewiesen, die aus den scharfen Schädigungsvariablen der zusammengefassten Elemente des Hydrocode-Modells abgeleitet wurde. Die linke bzw. rechte Intervallgrenze des Supports der Fuzzy-Dreieckszahl wurde dabei durch den minimalen bzw. maximalen Wert einer Schädigungsvariable bestimmt und der Modalwert wurde mit dem Mittelwert der Schädigungsvariablen gleichgesetzt. Anschließend wurden die erhaltenen unabhängigen Fuzzy-Schädigungsvariablen mit dem in Abschnitt 4.3 dargestellten Cluster-Algorithmus zusammengefasst. Im Rahmen dieser beispielhaften Untersuchung wurden dabei zwei Varianten untersucht. Die Zusammenfassung der Schädigungsvariablen erfolgte sowohl mit zehn (vgl. Abbildung 9.32 und 9.33) als auch mit fünf Clustern (vgl. Abbildung 9.34). Die zu einem Cluster gehörenden Elemente wurden entsprechend Abschnitt 4.3 zu einer Fuzzy-Schädigungsvariable zusammengefasst. Die Anzahl der Cluster bestimmt daher die Anzahl der unabhängigen Fuzzy-Eingangsgrößen. Eine Erhöhung der Genauigkeit durch eine differenzierte Abbildung der Schädigung mit einer höheren Anzahl von Clustern führt dadurch zu einer Erhöhung des Berechnungsaufwands.

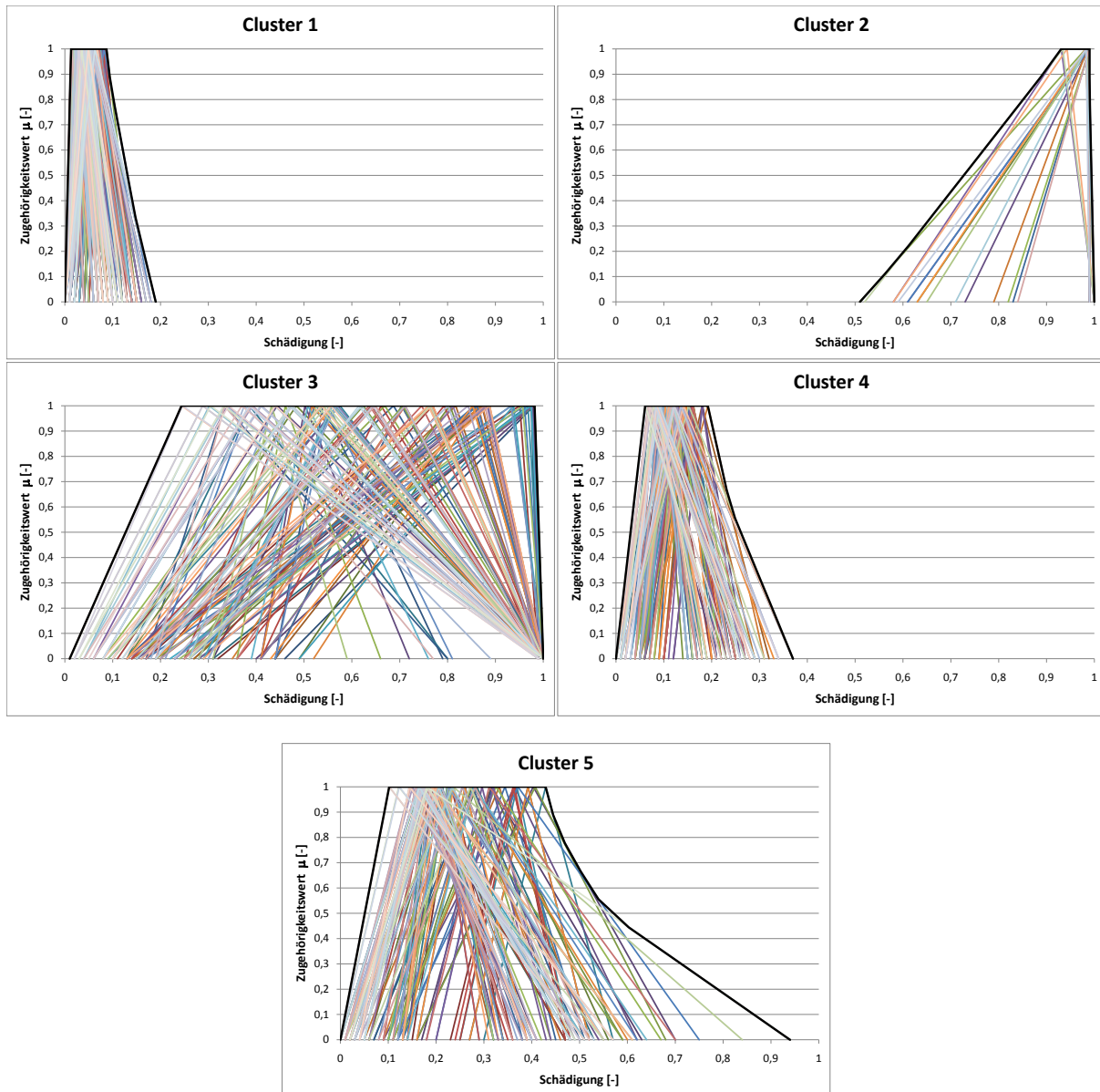


**Abbildung 9.32:** Versuchsbrücke, Schädigungssimulation, Darstellung der Cluster und der zugehörigen Elemente bei der Zusammenfassung der Fuzzy-Schädigung zu zehn Gruppen, Teil 1



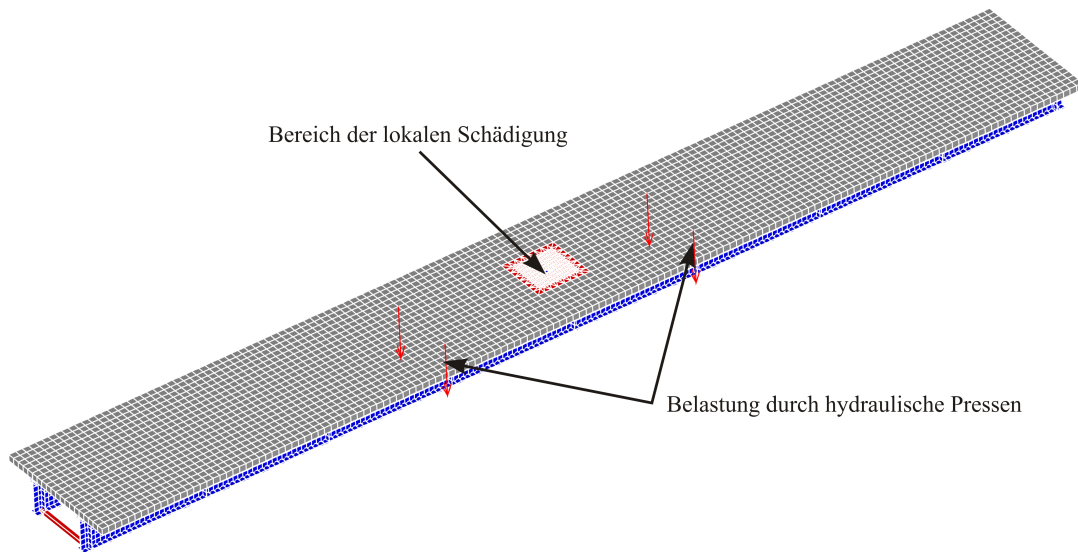


**Abbildung 9.33:** Versuchsbrücke, Schädigungssimulation, Darstellung der Cluster und der zugehörigen Elemente bei der Zusammenfassung der Fuzzy-Schädigung zu zehn Gruppen, Teil 2



**Abbildung 9.34:** Versuchsbrücke, Schädigungssimulation, Darstellung der Cluster und der zugehörigen Elemente bei der Zusammenfassung der Fuzzy-Schädigung zu fünf Gruppen

Das numerische Berechnungsmodell zur Bewertung des Zustandes des geschädigten Bauwerks wurde auf der Grundlage der ungeschädigten Konstruktion (vgl. Abschnitt 9.2.3) erweitert. Für die exemplarische numerische Analyse wurde das Bauwerk mit vier Einzellasten belastet. Die Lasten wurden so angeordnet, dass sie in Querrichtung über den Stegen der entsprechenden Längsträger und in Längsrichtung jeweils über einer Steife zu liegen kamen (vgl. Abbildung 9.35). In Feldmitte ist in Abbildung 9.35 eine Netzverfeinerung auf Elementgrößen von ca. 5 cm zu erkennen. In diesem Bereich wurden die Teil-

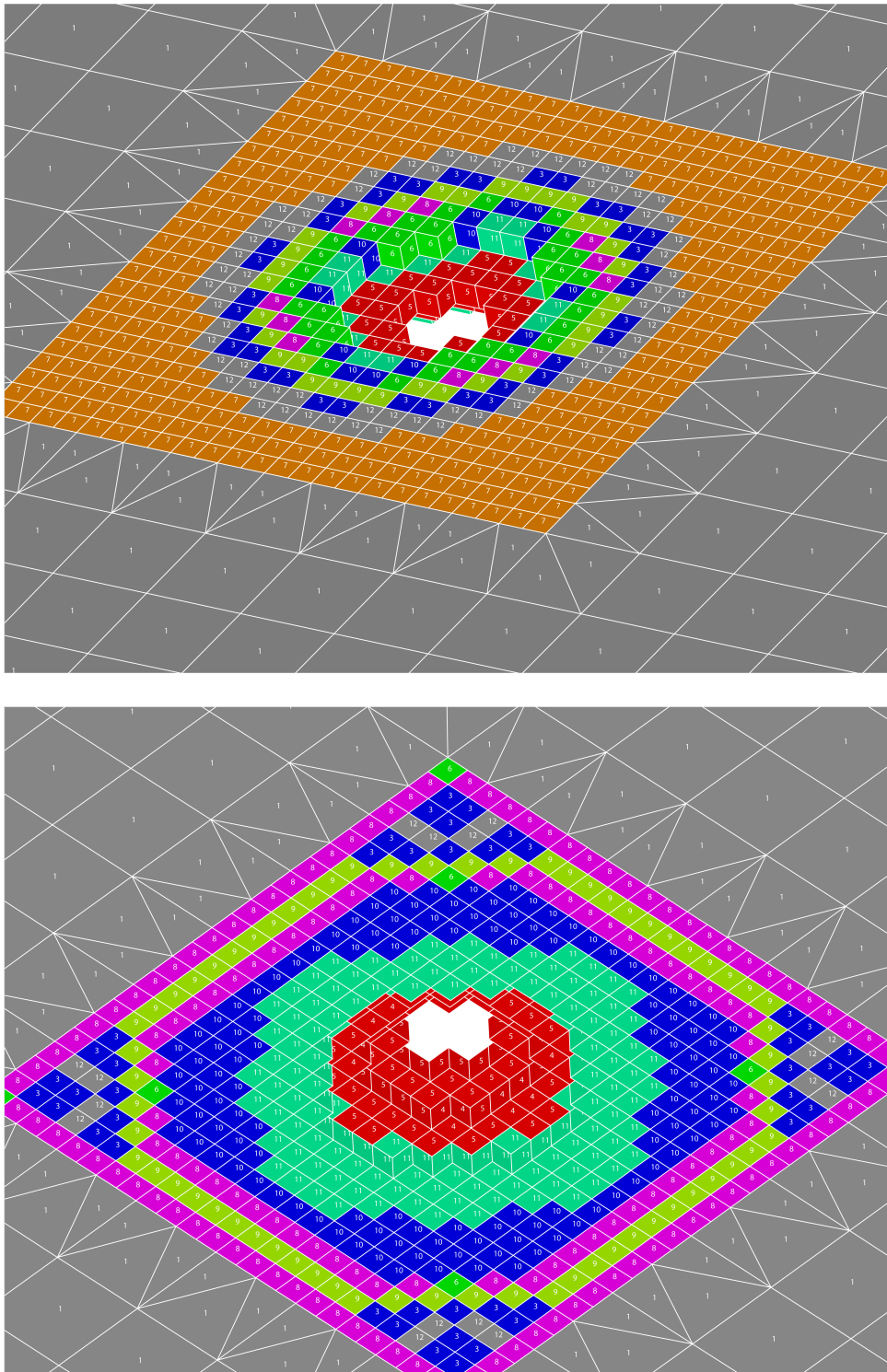


**Abbildung 9.35:** FEM-Modell der geschädigten Brücke, Lasteinleitung, lokale Schädigung

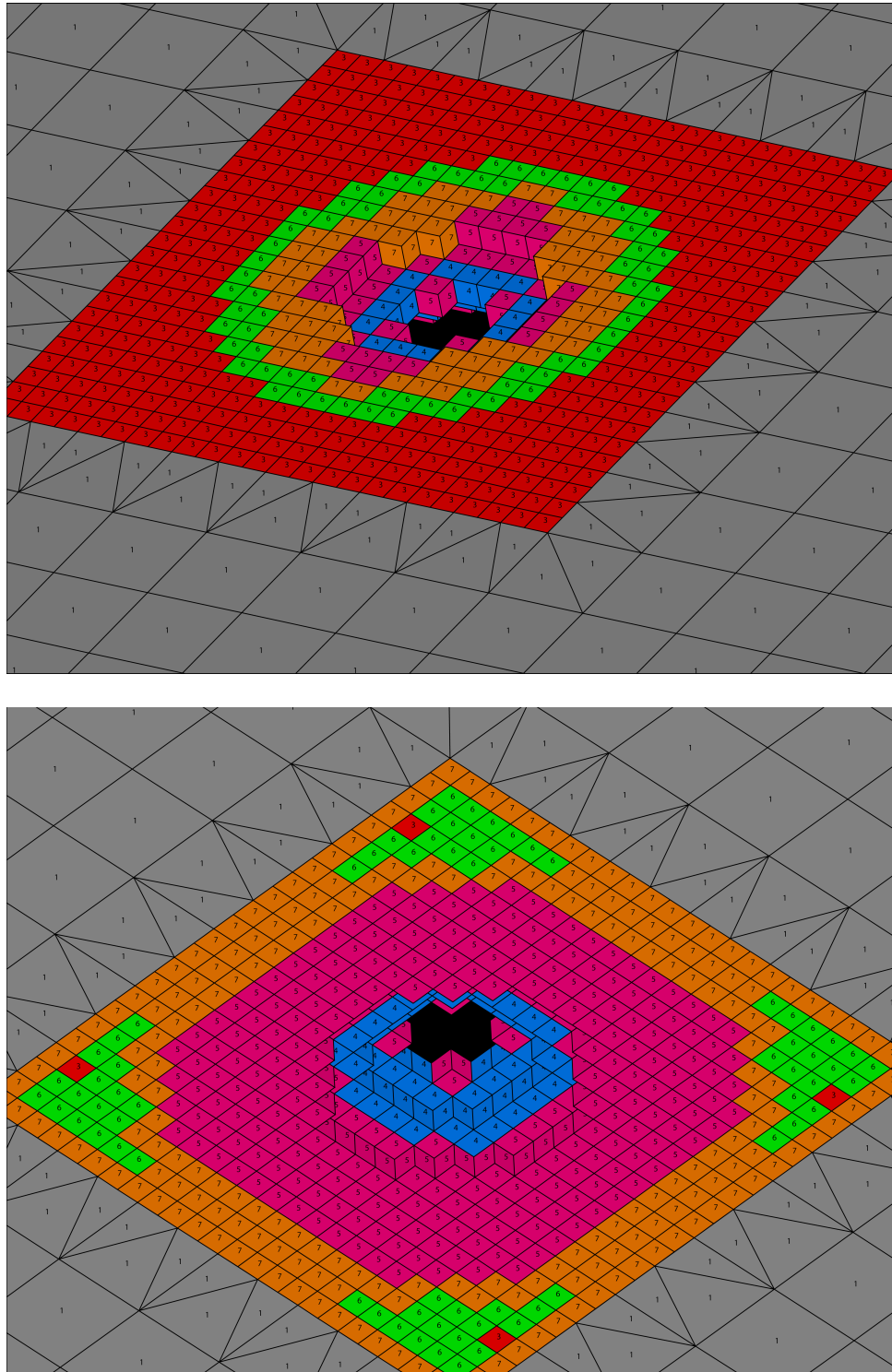
odelle der lokalen Schädigung, sowohl mit zehn Materialgruppen (vgl. Abbildung 9.36) also auch mit fünf Materialgruppen (vgl. Abbildung 9.37) eingefügt. Im Rahmen der Modelaufbereitung wurden zunächst für beide Varianten die Elemente, die sich im Bereich des Kraters und der Abplatzung befanden aus dem Modell entfernt. Die Größe der Bereiche konnte dabei dem Ergebnis der Anspregung des realen Plattensegments (vgl. Abbildung 4.1) entnommen werden. Schließlich wurden den Elementen des FEM-Modells entsprechend der zugeordneten Fuzzy-Schädigungsvariablen die Fuzzy-Materialeigenschaften zugewiesen. Die Elastizitätsmoduln der Elemente im Bereich der Schädigung wurden, einem Ansatzes von *Randles & Libersky* [121] folgend, mittels einer linearen Degradation

$$\tilde{E}(\tilde{D}) = (1 - \tilde{D}) \cdot \tilde{E}_{\tilde{D}=0} + 0.13 \cdot \tilde{D} \cdot E_{\tilde{D}=1} \quad (9.2)$$

mit dem Elastizitätsmodul  $\tilde{E}_{\tilde{D}=0}$  des ungeschädigten Betons und der entsprechenden

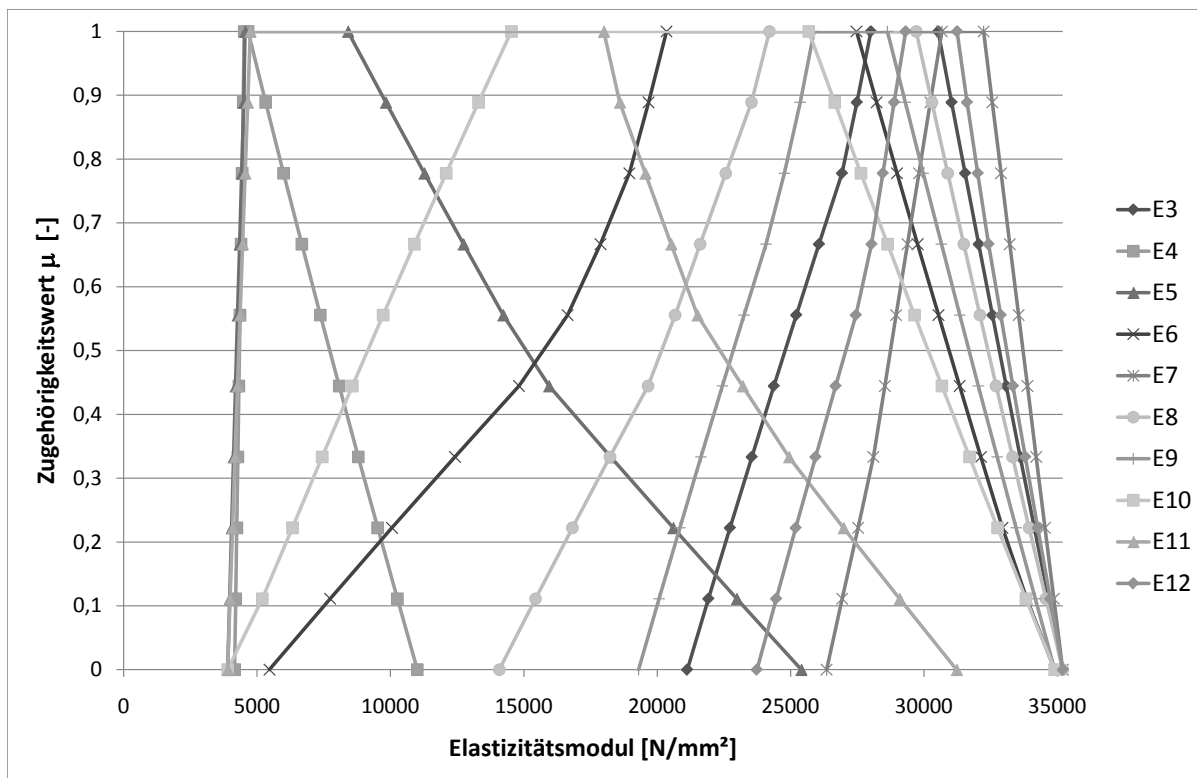


**Abbildung 9.36:** Versuchsbrücke, FEM-Modell, lokale Schädigung mit zehn Materialgruppen, Plattenoberseite (oben) und Plattenunterseite (unten)

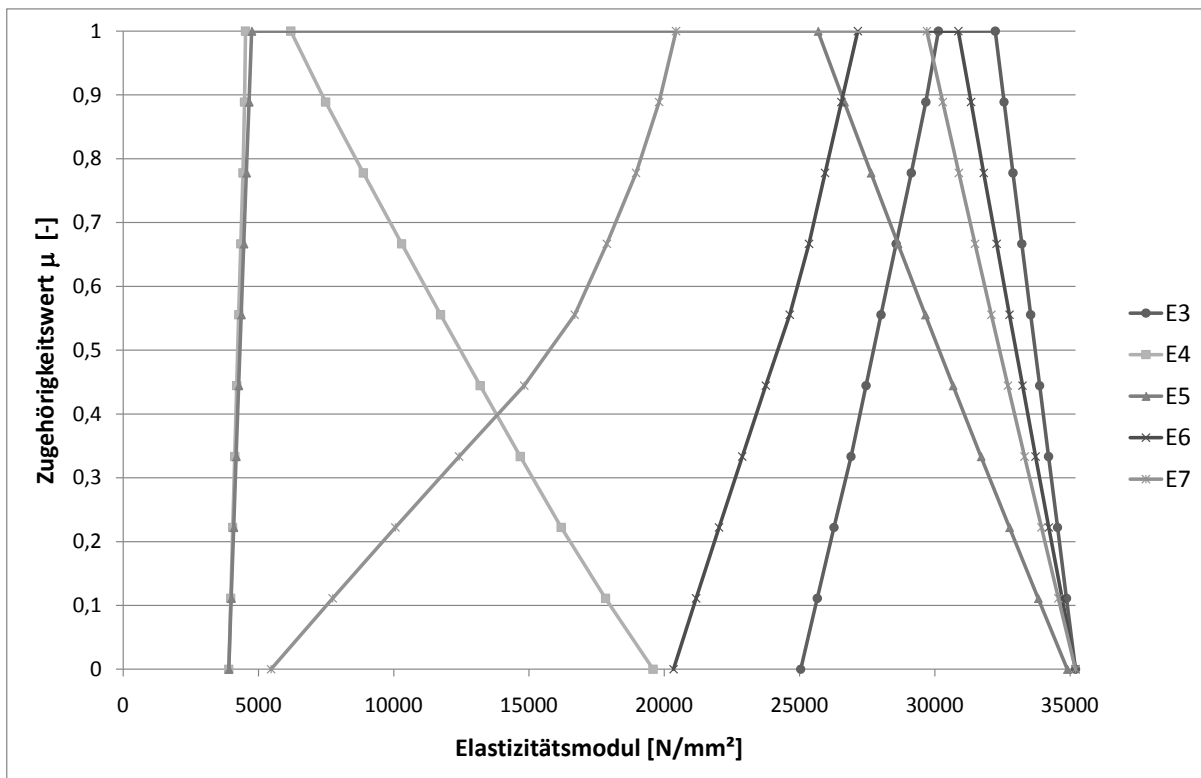


**Abbildung 9.37:** Versuchsbrücke, FEM-Modell, lokale Schädigung mit fünf Materialgruppen, Plattenoberseite (oben) und Plattenunterseite (unten)

Fuzzy-Schädigungsvariable  $\tilde{D}$  ermittelt. Dabei wurde für den quasi zerstörten Beton ( $\tilde{D} = 1$ ) ein verbleibender E-Modul von 13 % des Wertes im ungeschädigten Zustand angenommen. In Abbildung 9.38 sind die so bestimmten Elastizitätsmoduln mit fünf Materialgruppen und in Abbildung 9.39 mit zehn Gruppen zusammengefasst. Die angegebenen Materialnummern korrespondieren dabei mit den Darstellungen in Abbildung 9.36 und 9.37. Die Festigkeit des geschädigten Betons wurde in analoger Weise degradiert. Da die Stahlteile keine Schäden aufwiesen, wurden für den Baustahl die Materialkennwerte aus Abschnitt 9.2.2 übernommen. Allerdings wurde die Fuzzy-Streckgrenze im Rahmen einer konservativen Modellvereinfachung durch die linke Intervallgrenze des Supports ersetzt.

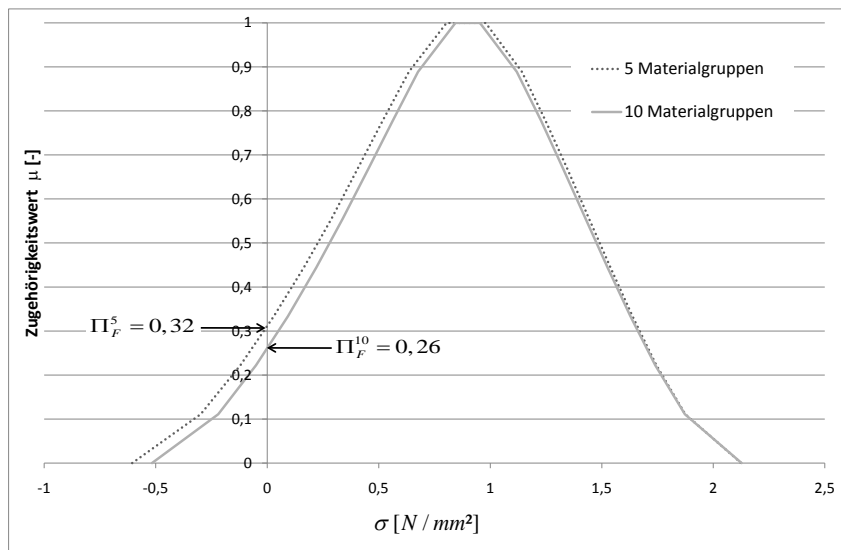


**Abbildung 9.38:** Versuchsbrücke, FEM-Modell, lokale Schädigung, Elastizitätsmodule des geschädigten Betons entsprechend Abbildung 9.36



**Abbildung 9.39:** Versuchsbrücke, FEM-Modell, lokale Schädigung, Elastizitätsmodule des geschädigten Betons entsprechend Abbildung 9.37

Mit dem in Abbildung 9.35 dargestellten FEM-Modell der geschädigten Brücke und den festgelegten Fuzzy-Tragwerksparametern wurde abschließend eine „Fuzzy-Finite-Elemente-Berechnung“ durchgeführt und der unscharfe Spannungszustand des Tragwerks ermittelt. Die rechnerische Belastung wurde dabei so gewählt, dass die ungeschädigte Brücke eine Versagensmöglichkeit  $\Pi_F = 0$  aufwies und somit die Zustandsnote 1 erreichte. Die Versagensmöglichkeit wurde dabei, wie in Abschnitt 8.3 beschrieben, durch den Vergleich des berechneten Fuzzy-Spannungszustandes der Brücke mit den entsprechenden zulässigen Spannungen bestimmt. Sowohl im ungeschädigten als auch im geschädigten Zustand erwies sich dabei die Spannung der Stahllängsträger am unteren Flansch als kritische Größe. In Abbildung 9.40 sind die Ergebnisse des Vergleichs der Beanspruchung mit dem Widerstand ( $\tilde{R} - \tilde{S}$ ) für die Analyse mit zehn bzw. mit fünf Materialgruppen dargestellt. Dabei wurde eine zu Abbildung 8.1 alternative Darstellungsform gewählt. In dieser Darstellung beschreiben die Teilmengen der Fuzzy-Größen mit Werten kleiner als Null Zustände des Versagens. Die Versagensmöglichkeit wird als Höhe dieser Teilmengen



**Abbildung 9.40:** Versuchsbrücke, Ergebnisauswertung, Fuzzy-Grenzzustand, Versagensmöglichkeit

erhalten. Der Vergleich der in Abbildung 8.1 dargestellten Auswertungen verdeutlicht eine für den Praxiseinsatz sehr positive Eigenschaft des entwickelten Ansatzes zur simulationsgestützten Schädigungsbewertung. Offensichtlich weisen die Ergebnisse von Analysen mit weniger differenzierten Modellen, hier mit weniger Materialgruppen, eine größere Streuung und als Resultat davon eine höhere Versagensmöglichkeit auf. Die Ergebnisse „liegen auf der sicheren Seite“.

Abschließend wurde mit Gleichung 8.8 das Kriterium „Standicherheit“ auf der Basis des Analyseergebnisses mit zehn Materialgruppen mit  $S = 1,04$  bewertet. Eine Beurteilung des Einflusses der lokalen Schädigung auf die Standicherheit der Brücke mit der RI-EBW-PRÜF ist hingegen nicht möglich, da das untersuchte Schadensbild außerhalb des Einsatzspektrums der Richtlinie liegt.

Das dargestellte Beispiel unterstreicht das hohe Maß an Flexibilität des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens der Fuzzy-Zustandsbewertung, das durch den modularen Aufbau des Ansatzes gewährleistet wird. Der entwickelte methodische Ansatz ermöglicht nicht nur den Einsatz der bewährten Verhaltensmodelle zur Beschreibung von Schädigungsprozessen, wie es in Abschnitt 9.1 dargestellt wurde, sondern es können die Ergebnisse beliebiger a priori durchgeführter Simulationen des Schädigungsvorganges (vgl. Abschnitt (4.3)) genutzt werden. Die Integration der Ergebnisse einer Schädigungssimulation mit einer vom Analysemodell signifikant abweichenden Diskretisierungseinheit kann dabei mit Hilfe des



---

in Abschnitt 4.3 dargestellten Fuzzy-Clusterverfahrens erfolgen. Der optionale Einsatz des in Abschnitt 7 erörterten Validierungsalgorithmus stellt eine problemangepasste Prognosegenauigkeit des numerischen Modells der geschädigten Struktur sicher. Durch das Zusammenwirken der einzelnen Module wird eine objektive und validierbare Zustandsbewertung von Brücken unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Informationen gewährleistet.



# Kapitel 10

## Zusammenfassende Bewertung

### 10.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt den Themenkomplex der Zustandsbewertung beschädigter Brückenbauwerke, insbesondere bei schwerwiegenden, komplexen oder unklaren Schadensbildern. Dabei muss mit unvollständigen bzw. ungenauen Informationen über die Beschädigung und z. T. sogar über die konstruktive Durchbildung eines Bauwerks adäquat umgegangen werden. Ein Verfahren zur realitätsnahen Zustandsbewertung von Brücken muss daher möglichst alle zur Verfügung stehenden Informationen, wie beispielsweise das Expertenwissen des Brückenprüfers zur Abschätzung fehlender Informationen, abbilden und methodeninhärente Unschärfen entsprechend ihrer natürlichen Form beschreiben können. Die Bewertung von Schäden hinsichtlich der Kriterien „Standicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ ist daher mit subjektiven und objektiven Unsicherheiten behaftet. In dieser Arbeit wurde ein Verfahren entwickelt, welches unter Berücksichtigung der Unschärfen, der während der Bauwerksprüfung durchgeführten Messungen, Beobachtungen und subjektiven Einschätzungen den Zustand eines geschädigten Tragwerks durch strikte Trennung zwischen der unscharfen Zustandsbeschreibung und der Bestimmung der Auswirkungen auf die Tragfähigkeit objektiv und validierbar bewertet.

Einleitend sind die mechanischen, mathematischen und numerischen Grundlagen zur Durchführung von Simulationen des Tragverhaltens von geschädigten Brückentragwerken erörtert worden. Nach einem aus der Literatur systematisch zusammengestellten Überblick über die Charakterisierung nichtdeterministischer Daten und Informationen erfolgte

die Einführung in mathematische Methoden zur Beschreibung nichtdeterministischer Systeme. Eingebettet in die übergeordnete Theorie der unscharfen Maße wurden wesentliche Grundlagen der Evidenztheorie, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Möglichkeitstheorie als Vertreter der Unsicherheitstheorien sowie der unscharfen Mengen als Erweiterung der klassischen Mengentheorie beschrieben. Unter Verwendung der Möglichkeitstheorie wurde anschließend die Festlegung von Fuzzy-Tragwerksparametern zur Beschreibung des unscharfen Bauwerkszustandes diskutiert. Dabei wurde neben typischen Messsituationen auch auf Aspekte der Schädigungssimulation, dem Einsatz von Expertensystemen und der Nutzung des Erfahrungswissens des Prüfenieurs zur Quantifizierung der Zustandsbeschreibung eingegangen. Zur Beschreibung der zeitvarianten Veränderung des Zustandes wurden chemische und physikalische Vorgänge sowie darauf basierende fuzzyfizierte Prognosemodelle für die Schadensentwicklung diskutiert.

Den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit bildet die Entwicklung eines Verfahrens zur Bewertung des Bauwerkszustandes, beschrieben durch Fuzzy-Tragwerksparameter, bzgl. der Kriterien „Standicherheit“, „Verkehrssicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“. Das Verfahren zeichnet sich durch eine konsequente Trennung der mit objektiven und subjektiven Unschärfen behafteten Beschreibung und der darauf basierenden objektiven Bewertung des Bauwerkszustandes aus. Für eine nachvollziehbare und validierbare Zustandsbewertung wurde ein algorithmusorientiertes Vorgehen zur Generierung und Bewertung von „Finite-Elemente-Modellen“ auf der Basis der Zustandsbeschreibung entwickelt. Ergänzend wurden Algorithmen zur Durchführung von „Finite-Elemente-Berechnungen“ mit Fuzzy-Tragwerksparametern zur Ableitung einer Sicherheitsaussage im Rahmen der Möglichkeitstheorie hergeleitet und implementiert. Die bestimmte Versagensmöglichkeit bildet die Grundlage für die abschließende Zustandsbewertung. Im Rahmen dieser Arbeit wurden dabei insbesondere die folgenden Aspekte bearbeitet, um die Zustandsbewertung unter Berücksichtigung der auftretenden Unschärfen in einem durchgängigen neuen Verfahren umzusetzen:

1. zur Zustandsbestimmung:

- Zusammenfassung wesentlicher Ansätze zur Ableitung eines quantitativen, durch Fuzzy-Tragwerksparameter beschriebenen Bauwerkszustandes auf Grund von Messungen, Beobachtungen und Einschätzungen;
- Entwicklung eines allgemeingültigen Verfahrens zur Inkorporation der Ergeb-

nisse externer Schädigungssimulationen in FEM-Modellen von Brücken mit signifikant feinerer Diskretisierung unter Berücksichtigung der Veränderung des Informationsgehaltes,

2. zur Modellbildung:

- Einordnung der Modellbildung geschädigter Brückentragwerke in das Konzept des „Building Information Modeling (BIM)“ und die Entwicklung eines Algorithmus zur automatisierten Generierung von FEM-Modellen auf der Grundlage des allgemeinen Datenmodells,

3. zur „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“:

- Herleitung der mathematischen Grundgleichungen zur Durchführung elementarer fuzzy-arithmetischer Operationen unter besonderer Berücksichtigung von Verknüpfungen interaktiver Variablen,
- Darstellung der Eigenschaften des Körpers der Fuzzy-Größen und kritische Diskussion der daraus folgenden Anwendungsgrenzen bei der Fuzzyfizierung von beliebigen Algorithmen,
- Darstellung der Implementierungsstrategie zur Umsetzung der hergeleiteten Grundgleichungen in eine hochperformante Software-Bibliothek,
- Verifizierung der theoretisch prognostizierten Effizienzerhöhung des entwickelten Ansatzes durch einen Vergleich der Berechnungsgeschwindigkeiten der neuen Implementierung mit bestehenden Verfahren am Beispiel einer „Fuzzy-Finite-Elemente-Berechnung“,

4. zur Modellbewertung:

- Entwicklung eines Verfahrens zur Kalibrierung von Fuzzy-Modellgrößen auf der Grundlage von Messungen des Antwortverhaltens des realen Bauwerks,
- Erweiterung des Kalibrierungsverfahrens zur Bestimmung der Güte eines FEM-Modells einer Brücke mit der Hilfe von zwei eingeführten quantitativen Qualitätsindizes, die die Modellunschärfe charakterisieren,

5. zur Zustandsbewertung:

- Bereitstellung der Zustandszahlen zur Charakterisierung des Bauwerkszustandes auf der Grundlage der ermittelten Versagensmöglichkeit,
- Einordnung des neuen Ansatzes in das bestehende Verfahren der Zustandsbewertung von Brücken nach DIN 1076.

## 10.2 Bewertung

Das neue Bewertungsverfahren gewährleistet eine nachvollziehbare Beurteilung der Auswirkungen von Schäden auf die Nutzbarkeit von Brücken. Insbesondere schwerwiegende Schäden können i. d. R. nicht deterministisch beschrieben werden. Bei der Schadensbeschreibung auftretende Unschärfen werden daher objektiv und validierbar im Rahmen der Zustandsbewertung geschädigter Brücken berücksichtigt. Die herausragenden Eigenschaften des neuen Bewertungsverfahrens sind:

1. Einsatz der Fuzzy-Technologie zur Erfassung der Unschärfen bei der Quantifizierung von Schäden: Dadurch ist es möglich, auf der Basis der i. d. R. wenigen zur Verfügung stehenden objektiven Daten eine unscharfe Schadensquantifizierung vorzunehmen. Darüber hinaus wird dadurch im Rahmen eines mathematisch kohärenten Ansatzes die Anreicherung der Informationen durch sekundäre Quellen wie Erfahrungswissen, Expertensystemen und Schädigungssimulationen ermöglicht.
2. Konsequente Trennung zwischen Zustandsbeschreibung und -bewertung: Objektive und subjektive Unschärfen werden ausschließlich den zustandsbeschreibenden Parametern (z. B. Elastizitätsmodul, Festigkeit, Abmessungen, ...) zugeordnet. Die Bestimmung maßgebender Kenngrößen zur Zustandsbewertung erfolgt mit objektiven Verfahren der Tragwerksanalyse unter Einsatz der Möglichkeitstheorie. Dadurch wird eine objektive Bewertung des Zustandes auf der Grundlage subjektiver Zustandsbeschreibungen erreicht.
3. Hochperformante Implementierung des neuen Ansatzes der Fuzzy-Arithmetik: Die Durchführung von numerischen Tragwerksanalysen mit der „Finite-Elemente-Methode“ unter Berücksichtigung von Fuzzy-Tragwerksparametern erfordert eine Erweiterung bestehender Algorithmen und Verfahren. Die hardwarenahe Umset-

zung des neuen Ansatzes der Fuzzy-Arithmetik ermöglicht die Durchführung von Fuzzy-Tragwerksanalysen trotz des erhöhten Berechnungsaufwands mit verträglichen Berechnungsdauern.

4. Integrierte Bewertung und Kalibrierung von FEM-Modellen geschädigter Brückentragwerke: Mit Hilfe der entwickelten Algorithmen der inversen Fuzzy-Arithmetik ist es möglich, gemessene scharfe und/oder unscharfe Strukturantworten (z. B. Schwingungen, Verformungen, ...) zur Bestimmung der unscharfen Modellgrößen zu nutzen. Dadurch wird einerseits eine Kalibrierung dieser Modellgrößen möglich und andererseits stehen objektive quantitative Kriterien zur Bewertung der Modellgüte bereit.
5. Anbindung an das bestehende Verfahren der Zustandsbewertung von Brücken nach DIN 1076: Dadurch wird die Einsetzbarkeit des Verfahrens im Rahmen des Bauwerks-Management-Systems des Bundes und der Länder sichergestellt. Das neue Bewertungsverfahren kann dadurch als Erweiterung des Programmsystems SIB-Bauwerke bei schwerwiegenden Schäden eingesetzt werden.

Die hohe Leistungsfähigkeit der Implementierung der entwickelten Fuzzy-Arithmetik bzgl. der Berechnungsgeschwindigkeit konnte bereits in Abschnitt 6.4 und Anhang B mit der Hilfe einer Tragwerksanalyse dargestellt werden. Abschließend konnte in Abschnitt 9 die Anwendungstauglichkeit des gesamten Verfahrens verdeutlicht werden. Die Beurteilung einer lokalen Schädigung infolge einer Kontaktdetonation konnte mit den Teilschritten der Zustandsbestimmung durch Messung und Schädigungssimulation, der Tragwerksanalyse mit der „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“ und der Bewertung der Auswirkung des Schadens auf die „Standicherheit“ durchgängig dargestellt werden. Insbesondere konnte das Teilmodul zur Modellbewertung erfolgreich eingesetzt werden, um relevante Unterschiede zwischen dem realen Tragwerk und den Berechnungsannahmen des FEM-Modells zu identifizieren und zu korrigieren.

## 10.3 Ausblick

Mit dem in dieser Arbeit entwickelten Bewertungsverfahren für beschädigte Brücken unter Berücksichtigung unscharfer Tragwerksparameter steht ein flexibles und praktikables Werkzeug für eine einheitliche und vergleichbare Zustandsbewertung zur Verfügung. Die

Notwendigkeit, die für eine nachhaltige und systematische Bauwerkserhaltung benötigten Finanzmittel, insbesondere in wirtschaftlich stagnierenden Phasen immer zielgerichteter einzusetzen, erfordert eine ständige Steigerung der Aussagegenauigkeiten der Prognosewerkzeuge. Mit dem gewählten Ansatz einer von der Zustandserfassung unabhängigen Bewertung von Schäden speziell nach den Kriterien „Standicherheit“ und „Dauerhaftigkeit“ wurde erreicht, dass die Bewertungsergebnisse lediglich von der Qualität der Eingangsdaten, d. h. der Schadensbeschreibung abhängen.

Folgerichtig müssen weitere wissenschaftliche Bemühungen an derzeitige Verfahren zur Schadensbeschreibung anknüpfen. Anzustreben ist, neben einer Verbesserung der Messtechnik, die Verfahren zur Auswertung der aufgezeichneten Daten effizienter zu gestalten. Die in der Praxis bereits angewendete kombinierte Auswertung unterschiedlicher Messverfahren zur Ableitung relevanter Tragwerksparameter bewährt sich zunehmend, setzt jedoch ein hohes Maß an Fachwissen und Erfahrung voraus. Hier scheint der Einsatz von Fuzzy-Expertensystemen sinnvoll, um das Fachwissen der Experten in unscharfen Regelsystemen abzubilden und verfügbar zu machen. Fuzzy-Expertensysteme oder auch andere zur Wissensrepräsentation geeignete Ansätze (z. B. neuronale Netze) können des Weiteren zielführend als Hilfsmittel eingesetzt werden, um Schäden auf Grund sekundärer Parameter (z. B. Rostfahnen, Durchfeuchtung, ...) abzuschätzen. Entsprechende Wissensrepräsentationen, die den problemspezifischen Kenntnisstand zusammenfassen, sind zu entwickeln.

Ein weiteres Anwendungsgebiet des Verfahrens liegt in der schnellen Beurteilung der Infrastruktur im Katastophenfall. Es kann beispielsweise genutzt werden, um Rettungswege zu bewerten oder um das Gefährdungspotential für Rettungskräfte bei Einsätzen an stark beschädigten Brücken abzuschätzen. Vor dem Hintergrund der Bedrohung durch terroristische Anschläge ist darüber hinaus eine Nutzung des Verfahrens im Rahmen von Vulnerabilitätsuntersuchungen zur Risikoabschätzung denkbar. In den beschriebenen Anwendungsfällen ist i. d. R. mit schweren Beschädigungen, die über das Einsatzspektrum der RI-EBW-PRÜF hinausgehen, zu rechnen. Mit dem in dieser Arbeit dargestellten automatisierten Bewertungsverfahren ist jedoch eine schnelle Situationseinschätzung auf der Basis visueller Inspektionen möglich. Dabei würde die im Rahmen des Bewertungsverfahrens ermittelte Versagensmöglichkeit direkt als Bewertungskriterium genutzt werden. Anders als für ihr wahrscheinlichkeitstheoretisches Pendant, die Versagenswahrscheinlichkeit, existieren für die Festlegung akzeptabler Grenzwerte keine anerkannten Konventionen. Zulässige



Versagensmöglichkeiten sind daher unter Berücksichtigung des situationsbedingten Risikos festzulegen und zu begründen.

Die hocheffiziente Umsetzung der Fuzzy-Arithmetik im Rahmen der „Fuzzy-Finite-Elemente-Methode“ und ihr in dieser Arbeit dargestellter Einsatz bei der numerischen Analyse von Tragwerken eröffnet den Einsatz der Fuzzy-Technologien auch bei der Bemessung von Neubauten. Im Gegensatz zum bisher Dargestellten wird die Fuzzy-Arithmetik dann jedoch nicht eingesetzt um bemessungsrelevante Grenzzustände mit dem Maß der Possibilität zu bewerten, statt dessen ist sie dann als ein Approximationsverfahren einer herkömmlichen probabilistischen Bemessung zu verstehen. Dabei erweist sich der geringere numerische Aufwand einer Fuzzy-Berechnung, verglichen mit einer probabilistischen Analyse, z. B. mit der Monte-Carlo-Methode, in Kombination mit der extremen schnellen Implementierung der Fuzzy-Arithmetik als vielversprechender Ausgangspunkt. Mit einer verträglichen Erhöhung des Berechnungsaufwandes könnten dadurch ungenutzte Reserven der semi-probabilistischen Nachweiskonzepte für eine wirtschaftlichere Auslegung von Strukturen genutzt werden. Dabei bliebe das Sicherheitsniveau der Nachweiskonzepte unangetastet. Um das Potential nutzen zu können, sind jedoch Zusammenhänge zwischen der Versagensmöglichkeit und dem Sicherheitsindex  $\beta$  abzuleiten. Dafür kann beispielsweise an den Ansatz von *Beer* [19] angeknüpft werden.



# Literaturverzeichnis

- [1] Bayerisches Staatsministerium des Inneren - Straßenbrücken in Bayern. [www.stmi.bayern.de/bauen/strassenbau/baukultur/07791](http://www.stmi.bayern.de/bauen/strassenbau/baukultur/07791), Abruf: 15.11.2007.
- [2] Cost of corrosion. <http://www.corrosioncost.com/home.html>, Abruf: 19.01.2009.
- [3] *HILTI PS 200 Ferrosan*.
- [4] Industrieallianz für Interoperabilität - IAI. <http://www.buildingsmart.de/>, Abruf: 04.02.2009.
- [5] Sgi altix 4700. <http://www.sgi.com/products/servers/altix/4000/>, Abruf: 30.01.2008.
- [6] *DIN 1045: Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung*, 1988.
- [7] *DIN 4227-1: Spannbeton. Teil 1: Bauteile aus Normalbeton mit voller und beschränkter Vorspannung*, 1988.
- [8] *Canadian Strategic Highway Research Program C-SHRP, Highway Concrete (HWY-CON) Expert System*. Techn. Ber., Transportation Association of Canada, Ontario, Canada, 1995.
- [9] *DIN 1076: Ingenieurbauwerke im Zuge von Straßen und Wegen; Überwachung und Prüfung*, 1999.
- [10] *DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil1: Bemessung und Konstruktion*, 2001.
- [11] *Der Brockhaus in einem Band*, Bd. 10. Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, Mannheim, 2005.

- [12] The technical impact of moore's law. In Lanzerotti, M. Y. (Hg.), *IEEE solid-state circuits society newsletter*, Bd. 20. 2006.
- [13] Ajiz, M. A.; Jennings, A.: A robust incomplete choleski-conjugate gradient algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 20(5): S. 949–966, 1984.
- [14] Anile, A. M.; Deodato, S.; Privitera, G.: Implementing fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 72(2): S. 239–250, 1995.
- [15] Bandemer, H.; Gottwald, S.: *Einführung in Fuzzy-Methoden*. Akademie Verlag GmbH, Berlin, 1993. MAT 010 X 3799.
- [16] Barrett, R.; Berry, M.; Chan, T. F.; Demmel, J.; Donato, J.; Dongarra, J.; Eijkhout, V.; Pozo, R.; Romine, C.; der Vorst, H. V.: *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [17] Basle, H.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistischen Methodenlehre*. Physika-Verlag, Heidelberg, 1986.
- [18] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Aufl., 2002.
- [19] Beer, M.: *Fuzziness und Fuzzy-Zufälligkeit bei der Sicherheitsbeurteilung von Tragwerken*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 2002.
- [20] Benzi, M.; Cullum, J. K.; Tuma, M.: Robust approximate inverse preconditioning for the conjugate gradient method. *SIAM J. Sci. Comput.*, Bd. 22(4): S. 1318–1332, 2000.
- [21] Bilgiç, T.; Türksen, I. B.: Measurement of membership functions: Theoretical and empirical work. In *Handbook of Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 1, Kap. 3, S. 195–232. Kluwer, 1999.
- [22] Bothe, H. H.: *Fuzzy Logic, Einführung in Theorie und Anwendung*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1995. MAT 006 YA 3540.

- [23] Brémaud, P.: *Markov Chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. Springer-Verlag, New York Heidelberg, 1999.
- [24] Broomfield, J. P.: *Corrosion of Steel in Concrete*. Routledge Chapman & Hall, 1997.
- [25] Bundesanstalt für Straßenwesen: *Prüfung und Überwachung von Brücken, Tunneln und anderen Ingenieurbauwerken; - Leitfaden Objektbezogene Schadensanalyse*, 2004.
- [26] Bundesministerium für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen - Abteilung Straßenbau, Straßenverkehr: *Erhaltung - Anweisung Straßeninformationsbank Teilsystem Bauwerksdaten (ASB-ING)*. [www.sib-bauwerke.de](http://www.sib-bauwerke.de), 2004.
- [27] Bundesministerium für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen - Abteilung Straßenbau, Straßenverkehr: *Richtlinien für die Erhaltung von Ingenieurbauwerken - Richtlinie zur einheitlichen Erfassung, Bewertung, Aufzeichnung und Auswertung von Ergebnissen der Bauwerksprüfungen nach DIN 1076 - RI-EBW-PRÜF*. Sammlung Brücken- und Ingenieurbau, 2004.
- [28] Bundesministerium für Verkehr, Bau und Stadtentwicklung: *Richtlinien für die Erhaltung von Ingenieurbauwerken - Richtlinie zur einheitlichen Erfassung, Bewertung, Aufzeichnung und Auswertung von Ergebnissen der Bauwerksprüfungen nach DIN 1076 - RI-EBW-PRÜF*. Sammlung Brücken- und Ingenieurbau, 2007.
- [29] Bundesministerium für Verkehr, Bau und Städteentwicklung: *Berichte über die Qualität, Dauerhaftigkeit und Sicherheit von Spannbetonbrücken - Vorlage an den Ausschuss für Verkehr, Bau und Städteentwicklung des Deutschen Bundestages*. <http://www.bmvbs.de>, 2006.
- [30] Cantor, G.: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, Bd. 46(4): S. 481–512, 1895.
- [31] Civanlar, M. R.; Trussell, H. J.: Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 18(1): S. 1–13, 1986.
- [32] Cuthill, E.; McKee, J.: Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In *Proceedings of the 1969 24th national conference*, S. 157–172. ACM, New York, NY, USA, 1969.

- [33] Czogala, E.; Gottwald, S.; Pedrycz, W.: Contribution to application of energy measure of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 8(2): S. 205–214, 1982.
- [34] D., D.; H., P.; S., S.: *Fuzzy Logic: State of the Art*, Kap. On possibility/probability transformations, S. 103–112. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [35] Delgado, M.; Moral, S.: On the concept of possibility-probability consistency. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 21(3): S. 311–318, 1987.
- [36] Dombi, J.: Membership function as an evaluation. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 35(1): S. 1–21, 1990.
- [37] Dong, W.; Shah, H. C.: Vertex method for computing functions of fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 24(1): S. 65–78, 1987.
- [38] Dubois, D.; Prade, H.: *Possibility Theory An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.
- [39] Dubois, D.: Possibility theory and statistical reasoning. *Computational Statistics & Data Analysis*, Bd. 51(1): S. 47–69, 2006.
- [40] Dubois, D.; Foulloy, L.; Mauris, G.; Prade, H.: Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities. *Reliable Computing*, Bd. 10(4): S. 273–297, 2004.
- [41] Dubois, D.; Prade, H.: Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*, Bd. 9(6): S. 613–626, 1978.
- [42] Dubois, D.; Prade, H.: On several representations of an uncertain body of evidence. In Gupta, M. M.; Sanchez, E. (Hg.), *Fuzzy Information And Decision Processes*. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [43] Dubois, D.; Prade, H.: A set-theoretic view of belief functions logical operations and approximations by fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, Bd. 12(3): S. 193–226, 1986.
- [44] Duncan, R.: A survey of parallel computer architectures. *IEEE Computer*, S. 5–16, 1990.
- [45] EC2: *”Beton und Stahlbeton: Bemessung und Ausführung”*, 1992.

- [46] Einstein, A.: *Mein Weltbild*. Ullstein Buchverlage GmbH, Berlin, 2005.
- [47] Flynn, M.: Some computer organizations and their effectiveness. *IEEE Transactions on Computers*, Bd. 21: S. 948–960, 1972.
- [48] Forkert, L.: *Verfahren zur Prognose von Schadensentwicklungen bei einer kostenoptimierten Brückeninstandhaltung*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 1989.
- [49] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.: Erkundung und Bestimmung der Tragfähigkeit von Brücken. In *Symposium Militärischer Brückenbau*. 2001.
- [50] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.: A computer program to predict the load-bearing capacity of undamaged and damaged bridges for which no documents are available. In Casas, J. R.; Frangopol, D. M.; Nowak, A. S. (Hg.), *First International Conference on Bridge Safety, Maintenance, and Safety*. 2002.
- [51] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.: In situ determination of the residual load-bearing capacity of bridges using fuzzy set theory. In Bathe, K.-J. (Hg.), *Third M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*. 2005.
- [52] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.: Simulating damaged bridges using fuzzy sets. In Gebbeken, N.; Mangerig, I.; Keuser, M. (Hg.), *Munich Bridge Assessment Conference*. 2007.
- [53] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.: In-situ-Ermittlung der Tragfähigkeit von Brücken. *Bautechnik*, Bd. 85(4): S. 233–246, 2008.
- [54] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.: Zur nachhaltigen Erkundung und Tragfähigkeitsbestimmung von Brücken, für die keine Bauunterlagen vorliegen. In Linke, H. J. (Hg.), *Tagungsband 1. Darmstädter Ingenieurkongress - Bau und Umwelt*, S. 1–26. Darmstadt, 2009.
- [55] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.; Ionita, M.: Increasing the reliability and performance through automatisisation and parallel working. In *Xth International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*. 2004.

- [56] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.; Ionita, M.: Bridge reconnaissance and classification system with on-site wireless data acquisition. In *Actual Trends in Highway and bridge Engineering*. Iasi, Romania, 2005.
- [57] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.; Ionita, M.: In situ determination of the load-bearing capacity of existing fixed bridges. In Gebbeken, N.; Mangerig, I.; Keuser, M. (Hg.), *First Munich Bridge Assessment Conference*. 2005.
- [58] Gebbeken, N.; Baumhauer, A.; Mangerig, I.; Retze, U.: Brückenerkundung - Brückentragsfähigkeit - Brückenverhalten. In *Baustatik - Baupraxis 8*. 2002.
- [59] Gebbeken, N.; Greulich, S.; Pietzsch, A.; Hartmann, T.: Modellbildung zur simulation von stahlfaserbeton unter hochdynamischer belastung. *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 103(6): S. 398–412, 2008.
- [60] Gebbeken, N.; Ionita, M.; Baumhauer, A.: Bridge reconnaissance system with on-site wireless data acquisition. In Gebbeken, N.; Mangerig, I.; Keuser, M. (Hg.), *First Munich Bridge Assessment Conference*. 2005.
- [61] Gebbeken, N.; Ruppert, M.: On the safety and reliability of high dynamic hydrocode simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 46(6): S. 839–851, 1999.
- [62] Gehlen, C.: *Probabilistische Lebensdauerbemessung von Stahlbetonbauwerken - Zuverlässigkeitsbetrachtungen zur wirksamen Vermeidung von Bewehrungskorrosion*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, 2000.
- [63] Giachetti, R. E.; Young, R. E.: Analysis of the error in the standard approximation used for multiplication of triangular and trapezoidal fuzzy numbers and the development of a new approximation. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 91(1): S. 1–13, 1997.
- [64] Giachetti, R. E.; Young, R. E.: A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 91(2): S. 185–202, 1997.
- [65] Gottlob, G.; Frühwirth, T.; Horn, W. (Hg.): *Expertensysteme*. Springer-Verlag, Wien, 1990.



- [66] Greulich, S.: *Zur numerischen Simulation von Stahlbeton- und Faserbetonstrukturen unter Detonationsbeanspruchung*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2004.
- [67] Gross, D.: *Bruchmechanik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [68] Grube, H.; Kern, E.; Quitmann, H.-D.: Instandhaltung von Betonbauwerken. In *Betonkalender*. Ernst & Sohn, 1990.
- [69] Guerra, M. L.; Stefanini, L.: Approximate fuzzy arithmetic operations using monotonic interpolations. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 150(1): S. 5–33, 2005.
- [70] Guggenberger, J.: Robustheit bei baudynamischen Prognosen. In *Tag der Baudynamik 2008, Gebrauchstauglichkeit bei baudynamischen Beanspruchungen*. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller, 2008.
- [71] Haardt, P.: *Algorithmen zur Zustandsbewertung von Ingenieurbauwerken*. Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen. Wirtschaftsverlag NW, Bergisch Gladbach, 1999.
- [72] Haardt, P.: *Entwicklung eines Bauwerks-Management-Systems für das deutsche Fernstraßennetz - Stufen 1 und 2*. Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen. Wirtschaftsverlag NW, Bergisch Gladbach, 2003.
- [73] Hanss, M.: The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 130(3): S. 277–289, 2002.
- [74] Hanss, M.: An approach to inverse fuzzy arithmetic. In *Fuzzy Information Processing Society, 2003. NAFIPS 2003. 22nd International Conference of the North American*, S. 474–479. 2003.
- [75] Hanss, M.: *Applied Fuzzy Arithmetic*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [76] Hanss, M.; Klimke, A.: On the reliability of the influence measure in the transformation method of fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 143(3): S. 371–390, 2004.
- [77] Hartmann, D.; Lehner, K.: *Technische Expertensysteme*. Springer-Verlag, 1990.

- [78] Heisenberg, W.: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1958.
- [79] Hestenes, M. R.; Stiefel, E.: Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Bd. 49(6): S. 409–436, 1952.
- [80] Hiermaier, S.: Hydrocodes - Simulation Transienter Vorgänge mit expliziter Zeitintegration. In Gebbeken, N.; Thoma, K. (Hg.), *3. Workshop BAU-Protect*. 2008.
- [81] Inagaki, T.: Interdependence between safety-control policy and multiple-sensor schemes via dempster-shafer theory. *Reliability, IEEE Transactions on*, Bd. 40(2): S. 182–188, 1991.
- [82] Jungwirth, D.; Beyer, E.; Grübl, P.: *Dauerhafte Betonbauwerke*. Beton-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1986.
- [83] Kahlert, J.; Frank, G.: *Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1994.
- [84] Kaufman, L.; Rousseeuw, P. J.: *Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis*. Wiley, 1990.
- [85] Klimke, A.; Wohlmuth, B.: Algorithm 847: spinterp: Piecewise multilinear hierarchical sparse grid interpolation in MATLAB. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Bd. 31(4): S. 561–579, 2005.
- [86] Klimke, A.; Wohlmuth, B.: Computing expensive multivariate functions of fuzzy numbers using sparse grids. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 154(3): S. 432–453, 2005.
- [87] Klir, G. J.: Fuzzy arithmetic with requisite constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 91(2): S. 165–175, 1997.
- [88] Klir, G. J.; Cooper, J. A.: On constrained fuzzy arithmetic. In *Fuzzy Systems, 1996, Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on*, Bd. 2, S. 1285–1290. 1996.
- [89] Klir, G. J.; Folger, T. A.: *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*. Prentice Hall, 1988.

- [90] Klir, G. J.; Pan, Y.: Constrained fuzzy arithmetic: Basic questions and some answers. *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, Bd. 2(2): S. 100–108, 1998.
- [91] Klir, G. J.; Wierman, M. J.: *Uncertainty-Based Information*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Physika-Verlag, Heidelberg New York, 1998.
- [92] Kolda, T. G.; Lewis, R. M.; Torczon, V.: Optimization by direct search: New perspectives on some classical and modern methods. *SIAM Review (SIREV), Society for Industrial and Applied Mathematics*, Bd. 45(3): S. 385–482, 2003.
- [93] Kosheleva, O.; Cabrera, S. D.; Gibson, G. A.; Koshelev, M.: Fast implementations of fuzzy arithmetic operations using fast fourier transform (fft). *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 91(2): S. 269–277, 1997.
- [94] Kosko, B.: *Neural Networks And Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1992. MAG W 11 312 NON.
- [95] Kosko, B.: *fuzzy-logisch: Eine neue Art des Denkens*. Carles Verlag, 1993.
- [96] Kosko, B.: Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*, Bd. 43(11): S. 1329–1333, 1994.
- [97] Krieger, J.; Kaschner, R.; Haardt, P.: Die objektbezogene Untersuchung und Bewertung von Brücken im Rahmen des Bauwerks-Management-Systems. *Bautechnik*, Bd. 7: S. 453–463, 2000.
- [98] Lanczos, C.: An iteration method for the solution of eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Bd. 45(4): S. 255–282, 1950.
- [99] Lücken, T.: *Zur Schadensanalyse von Stahlbeton- und Spannbetonbrücken mit Fuzzy-Expertensystemen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2004.
- [100] Lemaitre, J.; Chaboche, J. L.: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1998.

- [101] Lounis, Z.: Reliability-based life prediction of aging concrete bridge decks. In *Life Prediction and Management of Concrete Structures*. 2000.
- [102] Lueger, O.: *Lexikon der gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften*, Bd. 2. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, Leipzig, 1904.
- [103] Lueger, O.: *Lexikon der gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften*, Bd. 2. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, Leipzig, 1910.
- [104] Manteuffel, T. A.: An incomplete factorization technique for positive definite linear systems. *Mathematics of Computation*, Bd. 34(150): S. 473–497, 1980.
- [105] Meister, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2005.
- [106] Mense, C.: *Konvergenzanalyse von algebraischen Mehr-Gitter-Verfahren für M-Matrizen*. Dissertation, Technischen Universität Berlin, 2007.
- [107] Meschke, G.: *Computergestützte Prognosemodelle im konstruktiven Ingenieurbau*. Ferdinand Schöningh, Paderborn, 2005.
- [108] Möller, B.; Beer, M.: *Fuzzy Randomness, Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [109] Müller, W.: *Risiko und Ungewissheit*, S. 3813–3824. Schaffer-Pöschel Verlag, 1993.
- [110] Moore, R. E.: *Intervallanalyse*. R. Oldenburg Verlag, München, 1966.
- [111] Mosbach, I.-B. W. P.: Programmsystem SIB-Bauwerke. [www.wpm-ingenieure.de](http://www.wpm-ingenieure.de), Abruf: 27.04.2009.
- [112] Naumann, J.: Bauwerksprüfung nach DIN 1076 - Bedeutung, Verantwortung, Durchführung. In *14. Dresdner Brückenbausymposium, Planung, Bauausführung und Erhaltung von Massivbrücken*. 2004.
- [113] Normenausschuss Bauwesen (NABau) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin: *DIN 1055-100*, 2001.
- [114] Ortiz, M.: An analytical study of the localized failure modes of concrete. *Mechanics of Materials*, Bd. 6(2): S. 159–174, 1987.

- [115] Pal, N. R.: On quantification of different facets of uncertainty. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 107(1): S. 81–91, 1999.
- [116] Pasternak, H.: Vorlesungsscript Stahlbau. [http://www.tu-cottbus.de/Stahlbau/lehre/stahlbau/wirtschaft\\_stahl/VL\\_3\\_Teil\\_1\\_Sicherheitskonzept.pdf](http://www.tu-cottbus.de/Stahlbau/lehre/stahlbau/wirtschaft_stahl/VL_3_Teil_1_Sicherheitskonzept.pdf), Abruf: 05.06.2009.
- [117] Petryna, Y.: *Schädigung, Versagen und Zuverlässigkeit von Tragwerken des Konstruktiven Ingenieurbaus*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2004.
- [118] Polyanin, A. D.: *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [119] Polyanin, A. D.; Zaitsev, V. F.: *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [120] Proske, D.: *Unbestimmte Welt*. Dirk Proske Verlag, Dresden, 2006.
- [121] Randles, P.; Libersky, L.: Smoothed particle hydrodynamics. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, Bd. Vol. 139: S. 375–408, 1996.
- [122] Retzlaff, G.; Rust, G.; Waibel, J.: *Statistische Versuchsplanung*, Bd. 2. Verlag Chemie, Weinheim New York, 1978.
- [123] Schnellenbach-Held, M.; Albert, A.: Computergestütztes Entwerfen im Stahlbetonhochbau mit wissensbasierten Systemen und Fuzzy Logic. *Bauingenieur*, Bd. 78(11): S. 517+, 2003.
- [124] Schwarz, W.: *Korrosion von Bewehrungsstahl in Beton*. AEDIFICATIO Verlag, Freiburg, 1999.
- [125] Shafer, G.: *a mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, Princeton and London, 1976.
- [126] Sloan, S. W.: An algorithm for profile and wavefront reduction of sparse matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 23(2): S. 239–251, 1986.
- [127] Smets, P.: Theories of uncertainty. [http://iridia.ulb.ac.be/~psmets/Uncertainty\\_HbkFuzzyComput.pdf](http://iridia.ulb.ac.be/~psmets/Uncertainty_HbkFuzzyComput.pdf), Abruf: 4.9.2008, 1999.

- [128] Smolyak, S. A.: Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Soviet Mathematics Doklady*, Bd. 4: S. 240–243, 1963.
- [129] Späth, H.: *Algorithmen für multivariable Ausgleichsmodelle*. R. Oldenburg Verlag GmbH, München, 1974. MAT 070 C 326.
- [130] Stroustrup, B.: *Die C++-Programmiersprache*. Addison-Wesley, München; Boston, 4. Aufl., 2000.
- [131] Symeonaki, M. A.; Stamou, G. B.: Theory of markov systems with fuzzy states. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 143(3): S. 427–445, 2004.
- [132] Thoft-Christensen, P.; Hansen, H. I.: Optimal strategy for maintenance of concrete bridges using expert systems. In Schueller, G. I.; Shinozuka, M.; Yao, J. T. P. (Hg.), *Structural Safety and Reliability: Proceedings of ICOSSAR '93, 6th International Conference*. Innsbruck, 1993.
- [133] Tran, L.; Duckstein, L.: Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 130(3): S. 331–341, 2002.
- [134] Tran, L.; Duckstein, L.: Multiobjective fuzzy regression with central tendency and possibilistic properties. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 130(1): S. 21–31, 2002.
- [135] Turksen, I. B.: Measurement of membership functions and their acquisition. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 40(1): S. 5–38, 1991.
- [136] Tuutti, K.: *Corrosion of steel in concrete*. Techn. Ber., Swedish Cement and Concrete Research Institute, 1982.
- [137] Wilkinson, J. H.; Reinsch, C.: *Linear Algebra*. Springer-Verlag, 1971.
- [138] Yager, R. R.: On the dempster-shafer framework and new combination rules. *Information Sciences*, Bd. 41(2): S. 93–137, 1987.
- [139] Yager, R. R.; Kacprzyk, J.; Fedrizzi, M. (Hg.): *Representation, independence, and combination of evidence in the Dempster-Shafer theory*, S. 51–69. John Wiley & Sons, Inc, 1994.
- [140] Zadeh, L. A.: Fuzzy sets. *Information and Control*, Bd. 8: S. 338–353, 1965.

- 
- [141] Zadeh, L. A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning–i. *Information Sciences*, Bd. 8(3): S. 199–249, 1975.
- [142] Zadeh, L. A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning–ii. *Information Sciences*, Bd. 8(4): S. 301–357, 1975.
- [143] Zadeh, L. A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning–iii. *Information Sciences*, Bd. 9(1): S. 43–80, 1975.
- [144] Zadeh, L. A.: Book review: A mathematical theory of evidence. *AI Magazine*, Bd. 5(3): S. 81–83, 1984.
- [145] Zhao, Z.; Chen, C.: A fuzzy system for concrete bridge damage diagnosis. *Computers & Structures*, Bd. 80(7-8): S. 629–641, 2002.
- [146] Zienkiewicz, O. C.: *Methode der finiten Elemente*. Carl Kanser Verlag, München Wien, 1975.
- [147] Zimmermann, H.-J.: *Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1987. BWL 061 Q 13 832.
- [148] Zimmermann, H.-J.; Zysno, P.: Decisions and evaluations by hierarchical aggregation of information. *Fuzzy Sets and Systems*, Bd. 10(1-3): S. 243–260, 1983.





# Anhang A

## Bestimmung des Monotonieverhaltens mit dem „adaptiven Modus“

In den folgenden Tabellen sind die Berechnungsvorschriften zur Bestimmung des Monotonieverhaltens der implementierten arithmetischen Operatoren im Rahmen der Durchführung einer Analyse im „adaptiven Modus“ zusammengefasst. Die Operanden liegen gemäß Gleichung (6.54) und (6.55) als Ergebnisse vorausgegangener Auswertungen vor. Die partiellen Ableitungen von  $f_1$  bzw.  $f_2$  in Richtung der Koordinaten des Raumes der Eingangsgrößen  $LR_i^x$  sind an den entsprechenden Koordinaten der Äste zusammen mit den Funktionswerten  $LR_i^x$  hinterlegt. In welchem Ast die partiellen Ableitungen nach welcher Koordinate hinterlegt sind, ist Abschnitt 6.3.5.3 zu entnehmen.

**Tabelle A.1:** Einstellige Operatoren

Operator	$LR_i^z$
$e^{\tilde{x}}$	$LR_i^x e^{LR_i^x}$
$\sqrt{\tilde{x}}$	$\frac{1}{2} \frac{LR_i^x}{\sqrt{LR_i^x}}$
$\log(\tilde{x})$	$\frac{LR_i^x}{LR_i^x \ln(10)}$
$\ln(\tilde{x})$	$\frac{LR_i^x}{LR_i^x}$
$ \tilde{x} $	$\text{sgn}(LR_i^x) LR_i^x$
$\sin(\tilde{x})$	$\cos(LR_i^x) LR_i^x$
$\cos(\tilde{x})$	$-\sin(LR_i^x) LR_i^x$

Operator	$LR'_i{}^z$
$\arcsin(\tilde{x})$	$\frac{LR'_i{}^x}{\sqrt{1-(LR_i{}^x)^2}}$
$\arccos(\tilde{x})$	$-\arcsin(LR_i{}^x) LR'_i{}^x$
$\tan(\tilde{x})$	$(1 + \tan(LR_i{}^x)^2) LR'_i{}^x$
$\cot(\tilde{x})$	$(-1 - \cot(LR_i{}^x)^2) LR'_i{}^x$
$\arctan(\tilde{x})$	$\frac{LR'_i{}^x}{1+(LR_i{}^x)^2}$
$\operatorname{arccos}(\tilde{x})$	$-\frac{LR'_i{}^x}{1+(LR_i{}^x)^2}$
$\sinh(\tilde{x})$	$\cosh(LR_i{}^x) LR'_i{}^x$
$\cosh(\tilde{x})$	$\sinh(LR_i{}^x) LR'_i{}^x$
$\operatorname{arsinh}(\tilde{x})$	$\frac{LR'_i{}^x}{\sqrt{1+(LR_i{}^x)^2}}$
$\operatorname{arcosh}(\tilde{x})$	$\frac{LR'_i{}^x}{\sqrt{LR_i{}^x-1}\sqrt{LR_i{}^x+1}}$
$\tanh(\tilde{x})$	$(1 - \tanh(LR_i{}^x)^2) LR'_i{}^x$
$\operatorname{coth}(\tilde{x})$	$(1 - \operatorname{coth}(LR_i{}^x)^2) LR'_i{}^x$
$\operatorname{arctanh}(\tilde{x})$	$\frac{LR'_i{}^x}{1-(LR_i{}^x)^2}$
$\operatorname{arcoth}(\tilde{x})$	$-\frac{LR'_i{}^x}{-1+(LR_i{}^x)^2}$

**Tabelle A.2:** Gemischt-zweistellige Präfix-Operatoren mit  $c \in \mathbb{R}$

Operator	$LR'_i{}^z$
$c + \tilde{x}$	$LR'_i{}^x$
$c - \tilde{x}$	$-LR'_i{}^x$
$c \cdot \tilde{x}$	$cLR'_i{}^x$
$c \div \tilde{x}$	$-\frac{c \cdot LR'_i{}^x}{(LR_i{}^x)^2}$
$c^{\tilde{x}}$	$c^{LR_i{}^x} LR'_i{}^x \ln(c)$

**Tabelle A.3:** Gemischt-zweistellige Suffix-Operatoren mit  $c \in \mathbb{R}$ 

Operator	$LR'_i{}^z$
$\tilde{x} + c$	$LR'_i{}^x$
$\tilde{x} - c$	$LR'_i{}^x$
$\tilde{x} \cdot c$	$LR'_i{}^x \cdot c$
$\tilde{x} \div c$	$\frac{LR'_i{}^x}{c}$
$\tilde{x}^c$	$(LR_i{}^x)^{c-1} \cdot c \cdot LR'_i{}^x$

Bei der Bestimmung der Ableitungen  $LR'_i{}^z$  der Äste der Ergebnisgröße zweistelliger fuzzyarithmetischer Operationen mit Hilfe der Funktionswerte der Äste der beiden Operanden sowie deren Ableitungen sind drei Fälle zu unterscheiden.

Im ersten Fall entspricht der Wert  $LR'_i{}^z$  der partiellen Ableitung des Zielfunktional  $f$  nach einer Koordinatenrichtung, die zu einer Eingangsgröße korrespondiert, von der lediglich  $\tilde{x}_1$  abhängt.

**Tabelle A.4:** Zweistellige Operatoren; partielle Ableitung nach Koordinatenrichtungen von  $\tilde{x}_1$ 

Operator	$LR'_i{}^z$
$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$	$LR'_i{}^{x_1}$
$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$	$LR'_i{}^{x_1}$
$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$	$LR'_i{}^{x_1} LR_i{}^{x_2}$
$\tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2$	$\frac{LR'_i{}^{x_1}}{LR_i{}^{x_2}}$
$\tilde{x}_1^{\tilde{x}_2}$	$\frac{(LR_i{}^{x_1})^{LR_i{}^{x_2}} \cdot LR_i{}^{x_2} \cdot LR'_i{}^{x_1}}{LR_i{}^{x_1}}$

Im zweiten Fall entspricht der Wert  $LR_i'^z$  der partiellen Ableitung des Zielfunktionals  $f$  nach einer Koordinatenrichtung, die zu einer Eingangsgröße korrespondiert, von der lediglich  $\tilde{x}_2$  abhängt.

**Tabelle A.5:** Zweistellige Operatoren; partielle Ableitung nach Koordinatenrichtungen von  $\tilde{x}_2$

Operator	$LR_i'^z$
$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$	$LR_i'^{x_2}$
$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$	$-LR_i'^{x_2}$
$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$	$LR_i^x \cdot LR_i'^{x_2}$
$\tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2$	$-\frac{LR_i^{x_1} \cdot LR_i'^{x_2}}{(LR_i^{x_2})^2}$
$\tilde{x}_1^{\tilde{x}_2}$	$(LR_i^{x_1})^{LR_i^{x_2}} \cdot LR_i'^{x_2} \cdot \ln(LR_i^{x_1})$

Im dritten Fall entspricht der Wert  $LR_i'^z$  der partiellen Ableitung des Zielfunktionals  $f$  nach einer Koordinatenrichtung, die zu einer Eingangsgröße korrespondiert, von der beide Operanden abhängen.

**Tabelle A.6:** Zweistellige Operatoren; partielle Ableitung nach gemeinsamen Koordinatenrichtungen

Operator	$LR_i'^z$
$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$	$LR_i'^{x_1} + LR_i'^{x_2}$
$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$	$LR_i'^{x_1} - LR_i'^{x_2}$
$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$	$LR_i'^{x_1} LR_i^{x_2} + LR_i^x \cdot LR_i'^{x_2}$
$\tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2$	$\frac{LR_i'^{x_1}}{LR_i^{x_2}} - \frac{LR_i^{x_1} \cdot LR_i'^{x_2}}{(LR_i^{x_2})^2}$
$\tilde{x}_1^{\tilde{x}_2}$	$(LR_i^{x_1})^{LR_i^{x_2}} \left( LR_i'^{x_2} \cdot \ln(LR_i^{x_1}) + \frac{LR_i^{x_2} \cdot LR_i'^{x_1}}{LR_i^{x_1}} \right)$

## Anhang B

### Ergebnisse des Effizienzvergleichs

In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse des Effizienzvergleichs des in Abschnitt 6.3 dargestellten neuen impliziten Verfahrens zur Durchführung numerischer Simulationen unter Berücksichtigung von fuzzyfizierten Berechnungsparametern mit den Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen (vgl. Abschnitt 6.2) zusammengefasst. Eine ausführliche Diskussion der Ergebnisse ist in Abschnitt 6.4 zu finden. Als Maß für die Bewertung der Effizienz der beiden methodischen Ansätze wurde die Dauer einer numerischen Analyse gewählt. Die zu vergleichenden Zeitspannen wurden während der Ermittlung der Zustandsgrößen einer Plattenbalkenbrücke mit Hilfe der „Finite-Elemente-Methode“ gemessen. Die Berechnungen wurden auf einer SGI Altix 4700 [5] durchgeführt. Die Brücke mit einer Spannweite von 30 m wurde dabei als Stabwerk modelliert. Die Fahrbahnplatte wurde in Querrichtung in 30 Streifen mit je einem Meter Breite unterteilt. Insgesamt wies das numerische Modell der Brücke 302 Elemente und 1636 Freiheitsgrade auf. Als Fuzzy-Eingangsgrößen für die Analysen wurden entsprechend der in den folgenden Abschnitten festgelegten Spezifikationen die Elastizitätsmodule der Querträger gewählt. Die Fuzzy-Elastizitätsmodule wurden aus Gründen der Vergleichbarkeit der Berechnungsdauer als Fuzzy-Pendant der scharfen Parameter festgelegt.

Ein wesentlicher Bestandteil bei der Durchführung einer Simulation mit Hilfe der „Finite-Elemente-Methode“ ist die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Dazu stehen zahlreiche Lösungsverfahren zur Verfügung, von denen einige exemplarisch in Abschnitt 2.3 erörtert und im Rahmen des Effizienzvergleichs in den folgenden Abschnitten untersucht wurden.

## B.1 *Cholesky*-Zerlegung

Die *Cholesky*-Zerlegung ist ein direktes Lösungsverfahren. Eine detaillierte Darstellung der Lösungsmethode ist in Abschnitt 2.3.2 zu finden.

Als Referenz für den Vergleich wurde die numerische Simulation mit scharfen Berechnungsparametern durchgeführt. Um betriebssystembedingte Schwankungen zu erfassen, wurde die Simulation  $10^6$  mal durchgeführt und dabei eine durchschnittliche Berechnungsdauer von 45,8 ms mit einem Variationskoeffizienten von 21,89 % ermittelt.

### B.1.1 Monotoner Modus

Für die Untersuchungen des monotonen Modus wurde die fuzzyfizierte Version des scharfen Analysealgorithmus jeweils 50 mal ausgewertet. Die zu variierenden Parameter waren die Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen und die Anzahl  $m$  ihrer  $\alpha$ -Niveaus. Die Ergebnisse der Zeitmessungen sind in den Tabellen B.1 und B.2 zusammengefasst.

Das Systemverhalten der Implementierung wird mit der Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung B.1 ist bei Variation der Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(1, m)$  dargestellt. Der mit „exponentiell“ markierte Graph gibt dabei die entsprechend Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an. In Abbildung B.2 ist  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(n, 2)$  dargestellt. Der Graph mit der Bezeichnung „linear“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an.

Der speedup (Gleichung (6.113)) der mit der Implementierung des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  der Fuzzy-Größen gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  (Tabelle B.1) und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(n, m)$  der scharfen Lösung (siehe oben).  $T_{det}(n, m)$  wird mit Hilfe von Gleichung (6.114) bestimmt und ist die theoretische Untergrenze der für die Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen zu erwartenden Berechnungsdauern. Der speedup ist in Abbildung B.3 und B.4 dargestellt.

**Tabelle B.1:** Mittelwert der Analysedauer mit der *Cholesky*-Zerlegung; Angaben in Sekunden

$n$	Anzahl $m$ der $\alpha$ -Niveaus										
	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	0,23	0,23	0,24	0,25	0,27	0,28	0,29	0,34	0,32	0,35	0,37
2	0,23	0,25	0,27	0,29	0,33	0,37	0,37	0,41	0,42	0,47	0,46
3	0,25	0,28	0,33	0,37	0,41	0,46	0,51	0,55	0,59	0,63	0,67
4	0,27	0,34	0,42	0,50	0,59	0,66	0,79	0,88	1,00	1,11	1,19
5	0,32	0,42	0,59	0,76	0,98	1,18	1,35	1,53	1,69	1,85	2,03
6	0,42	0,61	0,98	1,37	1,66	2,01	2,31	2,66	2,99	3,33	3,71
7	0,60	1,05	1,68	2,32	2,97	3,64	4,32	4,98	5,62	6,23	6,82
8	1,02	1,78	3,02	4,35	5,59	6,72	7,91	9,03	10,24	11,35	12,49
9	1,84	3,26	5,72	7,97	10,18	12,44	14,65	17,07	20,91	21,86	24,36
10	3,43	6,27	10,54	14,90	20,93	24,24	29,26	33,85	39,35	43,19	48,08

**Tabelle B.2:** Variationskoeffizient der Analysedauer mit der *Cholesky*-Zerlegung; Angaben in Prozent

$n$	Anzahl $m$ der $\alpha$ -Niveaus										
	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	2,44	2,30	1,77	1,37	1,09	1,34	1,22	1,00	0,86	0,78	1,09
2	2,42	1,99	1,37	1,02	1,23	1,21	1,30	0,56	0,92	0,91	1,36
3	1,24	1,39	1,32	1,08	0,71	0,93	0,84	1,38	1,02	0,98	0,97
4	1,47	1,08	1,15	0,97	1,33	0,42	1,42	1,72	1,41	2,08	1,43
5	0,83	0,48	0,46	0,54	0,49	1,23	1,32	2,26	1,65	2,02	2,10
6	0,68	0,96	0,79	2,00	1,42	2,12	2,20	2,21	2,28	2,29	2,72
7	0,39	1,85	1,39	2,33	2,34	2,69	3,28	2,90	3,45	3,43	3,57
8	1,43	1,30	2,26	3,02	3,47	3,09	3,77	3,41	3,57	4,29	3,49
9	1,14	2,26	2,87	3,33	3,53	3,66	3,58	4,17	4,39	4,14	4,07
10	1,48	2,68	3,07	3,58	4,21	4,20	4,46	4,33	3,62	3,81	3,73

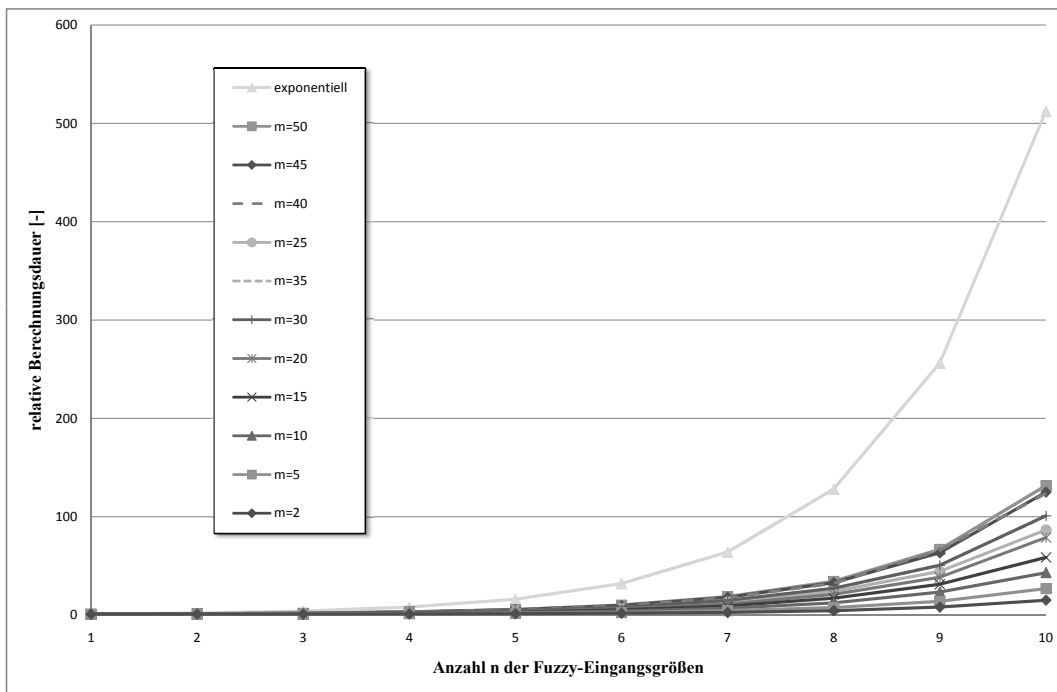


Abbildung B.1: Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizierten *Cholesky*-Zerlegung in Abhängigkeit von  $n$

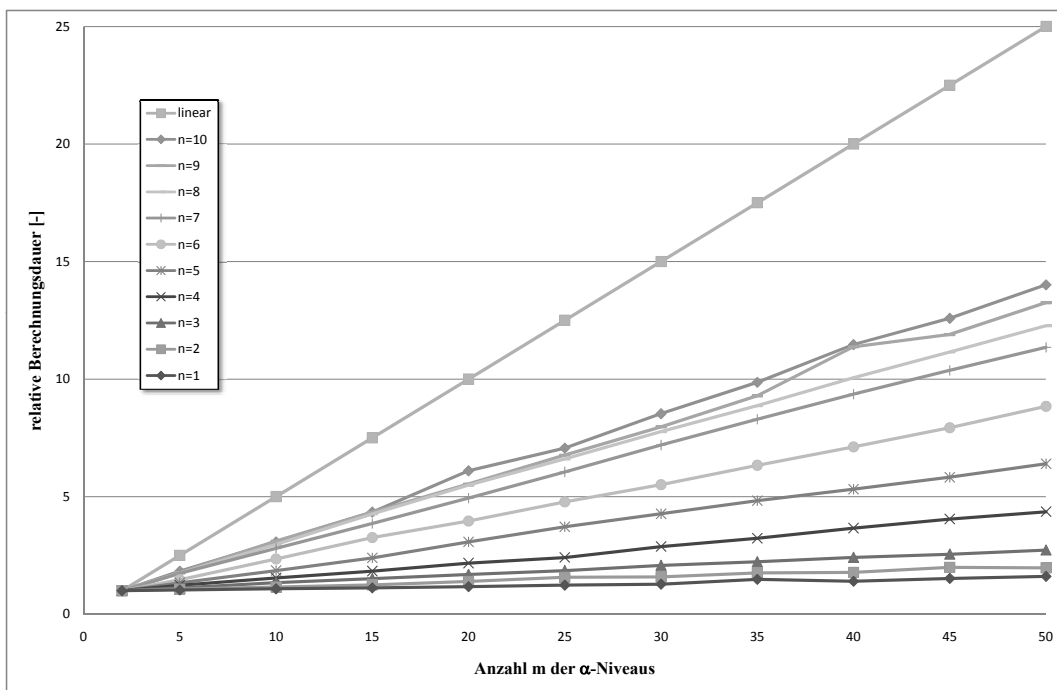


Abbildung B.2: Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizierten *Cholesky*-Zerlegung in Abhängigkeit von  $m$



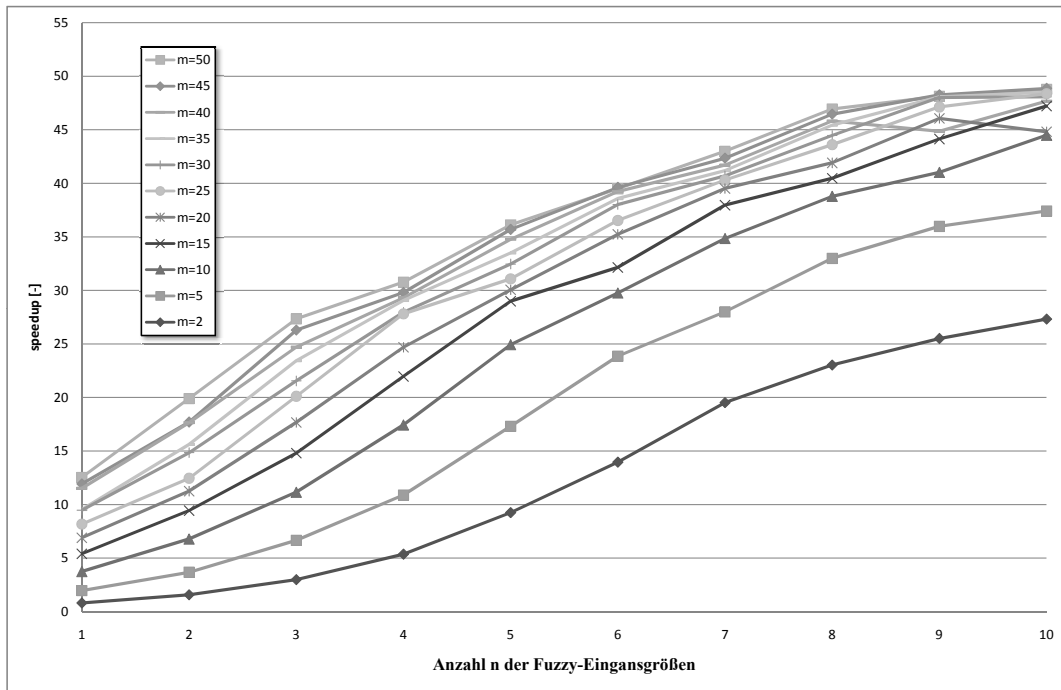


Abbildung B.3: Speedup der fuzzyfizierten *Cholesky*-Zerlegung in Abhängigkeit von  $n$

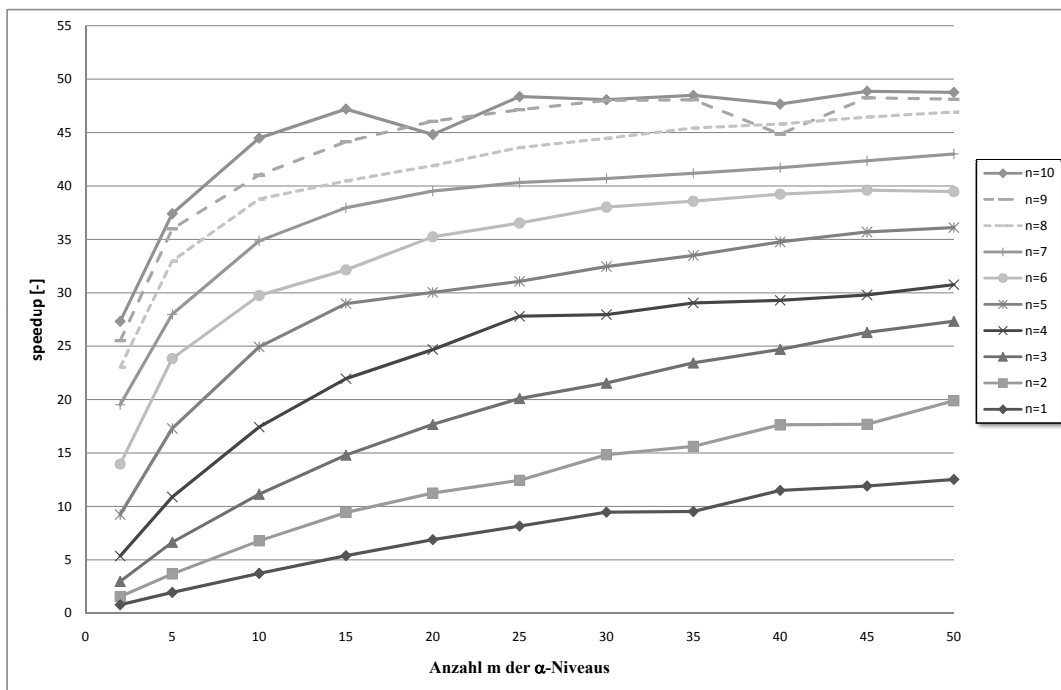


Abbildung B.4: Speedup der fuzzyfizierten *Cholesky*-Zerlegung in Abhängigkeit von  $m$

## B.1.2 Selektiv nicht monotoner Modus

Für die Bestimmung der Effizienz des selektiv nicht monotonen Modus wurde die fuzzyfierte Version des scharfen Analysealgorithmus jeweils 15 mal ausgewertet. Dabei wurden stets fünf Fuzzy-Eingangsgrößen berücksichtigt. Der zu variierende Parameter war die Anzahl  $\bar{n}$  der selektiv nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen. Alle Fuzzy-Größen wurden mit fünf  $\alpha$ -Niveaus und die nicht monotonen Größen mit fünf Ästen diskretisiert. Die Ergebnisse der Zeitmessungen sind in Tabelle B.3 zusammengefasst.

**Tabelle B.3:** Auswertung der Analysedauer mit der *Cholesky*-Zerlegung

$\bar{n}$	1	2	3	4	5
Mittelwert [s]	0,69	1,46	3,14	7,32	17,41
Variationskoeffizient [%]	0,68	0,78	1,11	1,18	1,20

Das Systemverhalten wird mit Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung B.5 ist bei Variation der Anzahl  $\bar{n}$  der nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  bezogen auf  $T_{FQ}(1)$  dargestellt. Der Graph mit der Bezeichnung „exponentiell“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.117) zu erwartende relative Berechnungsdauer an.

Der speedup (Gleichung (6.113)), der mit der impliziten Fuzzy-Arithmetik gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  (Tabelle B.3) und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(\bar{n})$  der scharfen Lösung (siehe oben). Die Bestimmung von  $T_{det}(\bar{n})$  ist dabei vom eingesetzten Verfahren abhängig. Für die erweiterte Transformationsmethode (vgl. Abschnitt 6.2.1) wird  $T_{det}(\bar{n})$  mit Gleichung (6.9) bestimmt. Die Genauigkeit dieses Verfahrens bei der Approximation der globalen Extrema entspricht dabei für das  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha = 0$  (Support) der Genauigkeit des impliziten Verfahrens. Für  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha > 0$  hingegen weist die implizite Fuzzy-Arithmetik eine höhere Genauigkeit auf. Um die selbe Genauigkeit auf der Basis deterministischer Grundlösungen zu erreichen, ist eine durch Gleichung (6.117) festgelegte Anzahl von Auswertungen nötig. Der entsprechende speedup ist in Abbildung B.6 als „äquivalente deterministische Lösung“ bezeichnet. Wird Fuzzy-Arithmetik mit Hilfe dünnbesetzter Gitter (vgl. Abschnitt 6.2.3) durchgeführt, so hängt die Anzahl scharfer Funktionsauswertungen von der Dimension des Raums der Fuzzy-Eingangsgrößen und dem

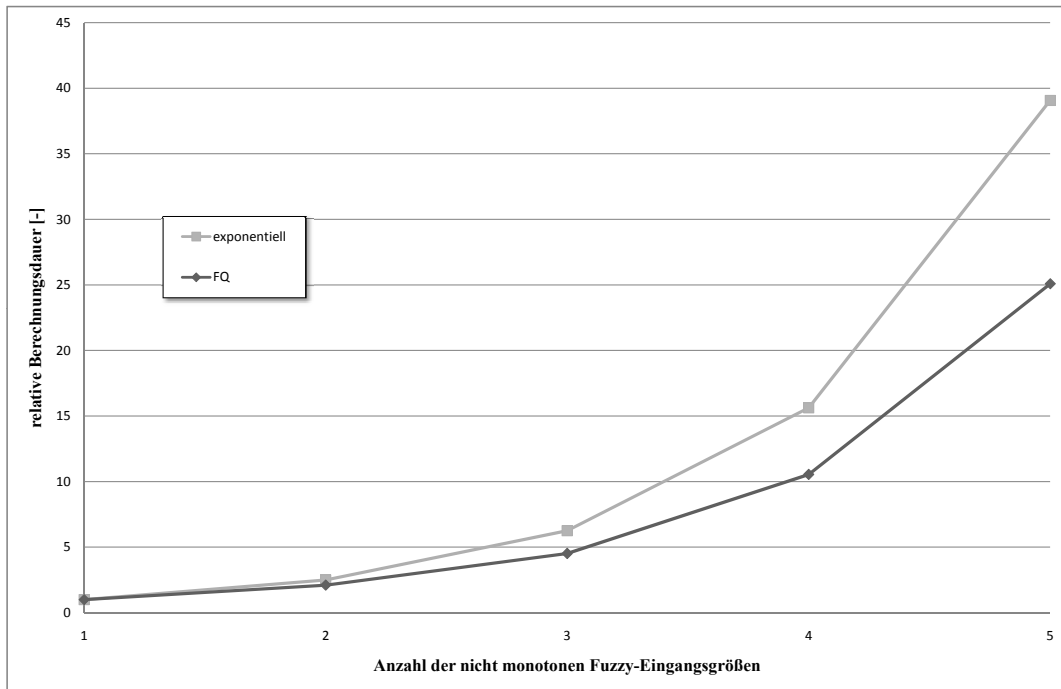


Abbildung B.5: Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizierten *Cholesky*-Zerlegung in Abhängigkeit von  $\bar{n}$

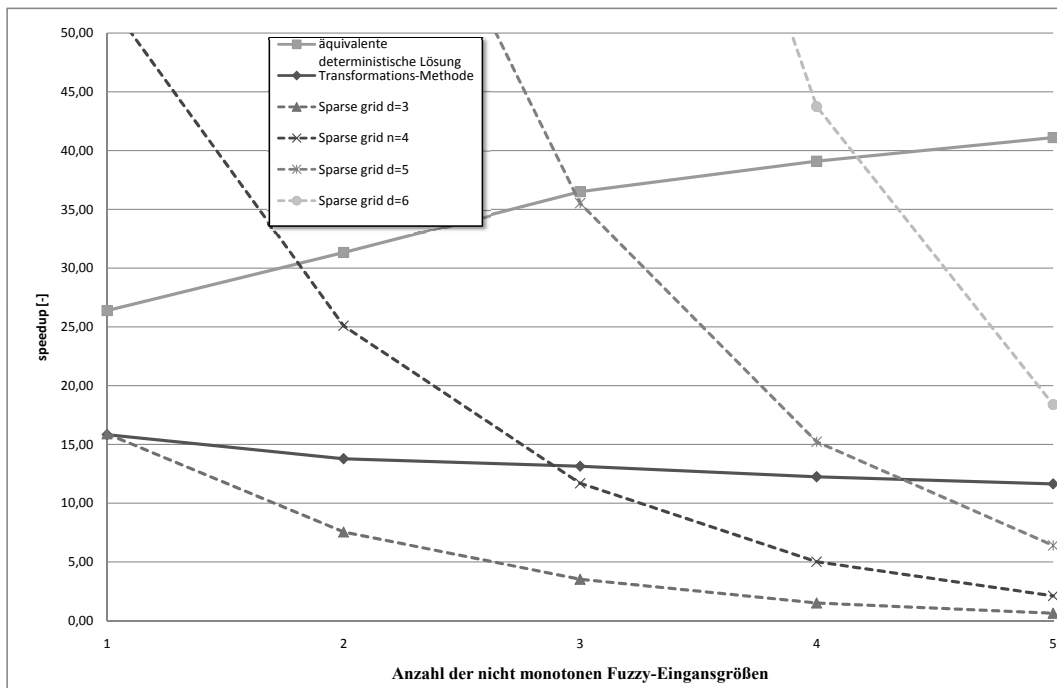


Abbildung B.6: Speedup der fuzzyfizierten *Cholesky*-Zerlegung in Abhängigkeit von  $\bar{n}$

Verfeinerungsniveau  $d$  ab. In Abbildung B.6 ist der speedup des impliziten Verfahrens gegenüber der Methode auf der Basis von dünnbesetzten Gittern für übliche Verfeinerungsniveaus ( $d \in \{3, 4, 5, 6\}$ ) und der daraus resultierenden Anzahl scharfer Auswertungen (241, 801, 2433, 6993) dargestellt.

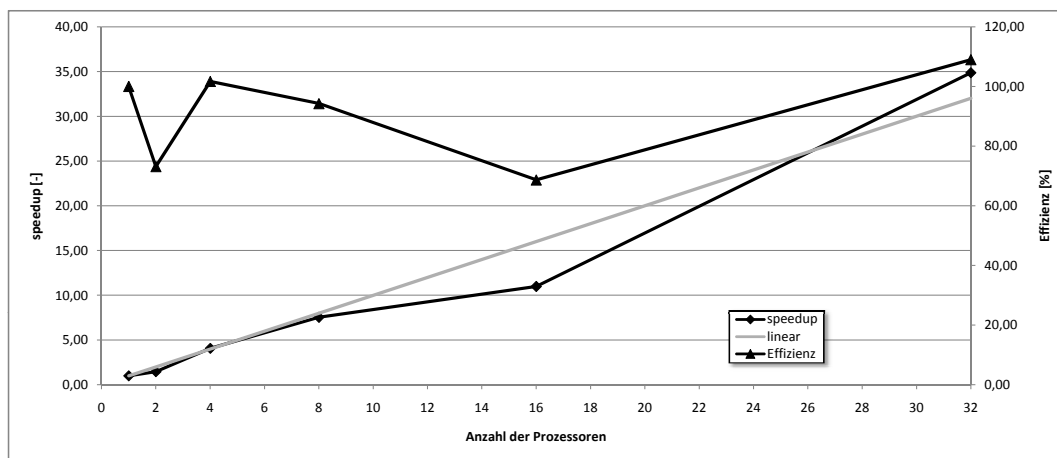
### B.1.3 Parallelisierung

Für die Untersuchung des Verhaltens der parallelisierten impliziten Fuzzy-Arithmetik wurde die numerische Simulation mit 15 Fuzzy-Eingangsgrößen und jeweils fünfzig  $\alpha$ -Niveaus durchgeführt. Die Berechnungen wurden im monotonen Modus jeweils 15 mal wiederholt. Die Ergebnisse der Zeitmessung sind in Tabelle B.4 zusammengefasst.

**Tabelle B.4:** Parallelisierung; Auswertung der Analysedauer mit der *Cholesky*-Zerlegung

Anzahl der Prozessoren	32	16	8	4	2	1
Mittelwert [s]	88,60	281,25	409,77	759,51	2112,61	3089,07
Variationskoeffizient [%]	25,94	42,41	22,54	20,27	11,52	-

Der parallele speedup (Gleichung (6.118)) der Parallelisierung der impliziten Fuzzy-Arithmetik und die entsprechende Effizienz (Gleichung (6.121)) sind in Abbildung B.7 in Abhängigkeit von der Anzahl der eingesetzten Prozessoren dargestellt.



**Abbildung B.7:** Paralleler speedup der fuzzyfizzierten *Cholesky*-Zerlegung in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren

## B.2 „shifted incomplete“ Cholesky-Zerlegung (SICT)

Die „shifted incomplete“ Cholesky-Zerlegung ist eine präkonjugierte Version des CG-Verfahrens. Eine detaillierte Darstellung der Lösungsmethode ist in Abschnitt 2.3.3 und 2.3.4 zu finden.

Als Referenz für den Vergleich wurde die numerische Simulation mit scharfen Berechnungsparametern durchgeführt. Um betriebssystembedingte Schwankungen zu erfassen, wurde die Simulation  $10^6$  durchgeführt und dabei eine durchschnittliche Berechnungsdauer von 61,4 ms mit einem Variationskoeffizienten von 18,70 % ermittelt.

### B.2.1 Monotoner Modus

Für die Untersuchungen des monotonen Modus wurde die fuzzyfizierte Version des scharfen Analysealgorithmus jeweils 50 mal ausgewertet. Die zu variierenden Parameter waren die Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen und die Anzahl  $m$  ihrer  $\alpha$ -Niveaus. Die Ergebnisse der Zeitmessungen sind in den Tabellen B.5 und B.6 zusammengefasst.

Das Systemverhalten der Implementierung wird mit der Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung B.8 ist bei Variation der Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(1, m)$  dargestellt. Der mit „exponentiell“ markierte Graph gibt dabei die entsprechend Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an. In Abbildung B.9 ist  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(n, 2)$  dargestellt. Der Graph mit der Bezeichnung „linear“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an.

Der speedup (Gleichung (6.113)) der mit der Implementierung des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  der Fuzzy-Größen gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  (Tabelle B.5) und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(n, m)$  der scharfen Lösung (siehe oben).  $T_{det}(n, m)$  wird mit Hilfe von Gleichung (6.114) bestimmt und ist die theoretische Untergrenze der für die Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen zu erwartenden Berechnungsdauern. Der speedup ist in Abbildung B.10 und B.11 dargestellt.

**Tabelle B.5:** Mittelwert der Analysedauer mit der shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT); Angaben in Sekunden

$n$	Anzahl $m$ der $\alpha$ -Niveaus										
	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	0,20	0,21	0,22	0,22	0,23	0,24	0,25	0,27	0,27	0,29	0,30
2	0,21	0,22	0,24	0,25	0,28	0,30	0,31	0,34	0,36	0,38	0,39
3	0,22	0,24	0,28	0,31	0,35	0,39	0,43	0,47	0,51	0,55	0,58
4	0,24	0,29	0,35	0,43	0,50	0,57	0,65	0,74	0,81	0,89	0,98
5	0,28	0,36	0,51	0,65	0,81	0,96	1,09	1,23	1,33	1,44	1,58
6	0,37	0,53	0,84	1,10	1,33	1,56	1,78	2,03	2,24	2,46	2,70
7	0,55	0,89	1,38	1,83	2,25	2,69	3,14	3,56	3,96	4,37	4,77
8	0,96	1,54	2,39	3,24	4,04	4,84	5,62	6,42	7,24	8,00	8,78
9	1,78	2,78	4,39	5,92	7,50	9,02	10,58	12,14	14,32	15,29	16,92
10	3,38	5,27	8,28	11,27	14,88	17,45	20,64	23,66	27,29	29,78	33,17

**Tabelle B.6:** Variationskoeffizient der Analysedauer der shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT); Angaben in Prozent

$n$	Anzahl $m$ der $\alpha$ -Niveaus										
	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	1,83	7,04	6,60	1,43	1,19	3,11	0,79	0,78	0,98	1,14	1,36
2	1,69	1,36	1,90	1,06	0,76	0,75	0,62	0,48	2,30	0,73	3,23
3	1,64	1,51	0,99	0,89	0,88	0,68	0,72	0,40	0,94	1,29	0,70
4	0,80	5,05	0,63	0,69	1,09	0,83	0,84	1,18	0,55	1,54	1,37
5	0,58	0,57	1,07	0,86	3,26	1,01	0,41	1,44	0,42	0,82	0,74
6	0,71	0,71	1,50	1,14	0,87	0,88	0,52	1,04	2,24	0,74	0,87
7	3,04	1,00	0,71	1,11	0,82	0,56	0,91	0,59	0,83	0,64	0,62
8	0,69	0,74	0,70	0,74	0,59	0,67	0,66	0,60	0,65	0,57	0,51
9	0,67	0,49	0,56	0,80	0,76	0,76	0,81	0,72	1,25	0,63	0,71
10	0,54	0,56	0,54	0,76	0,63	0,74	0,55	0,81	0,68	0,59	0,67

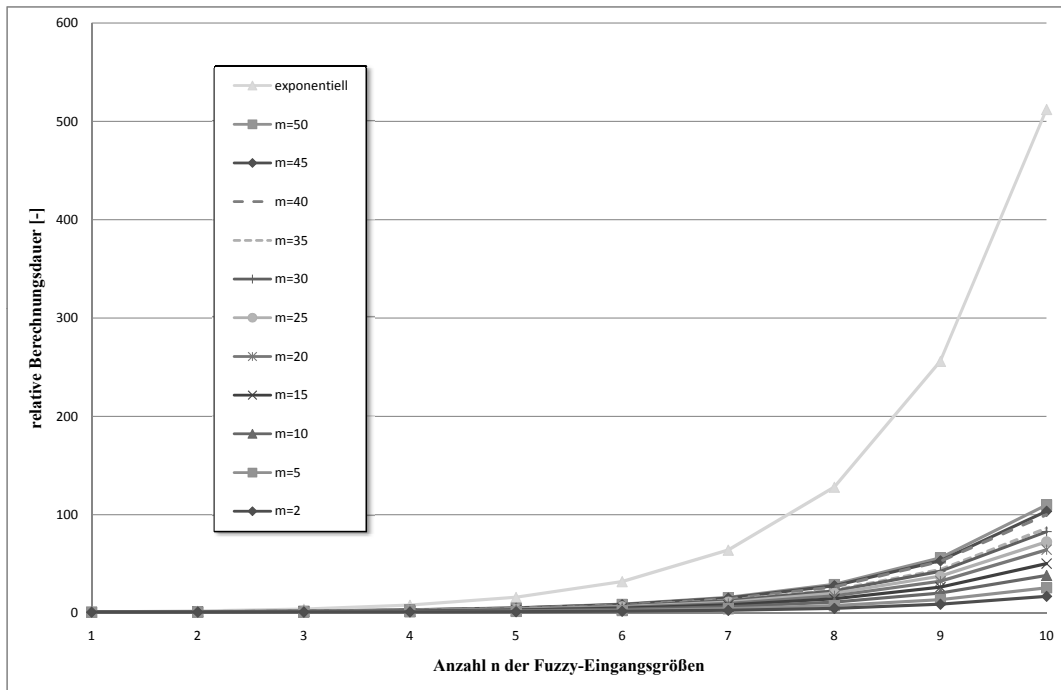


Abbildung B.8: Relative Berechnungsdauer der shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von  $n$

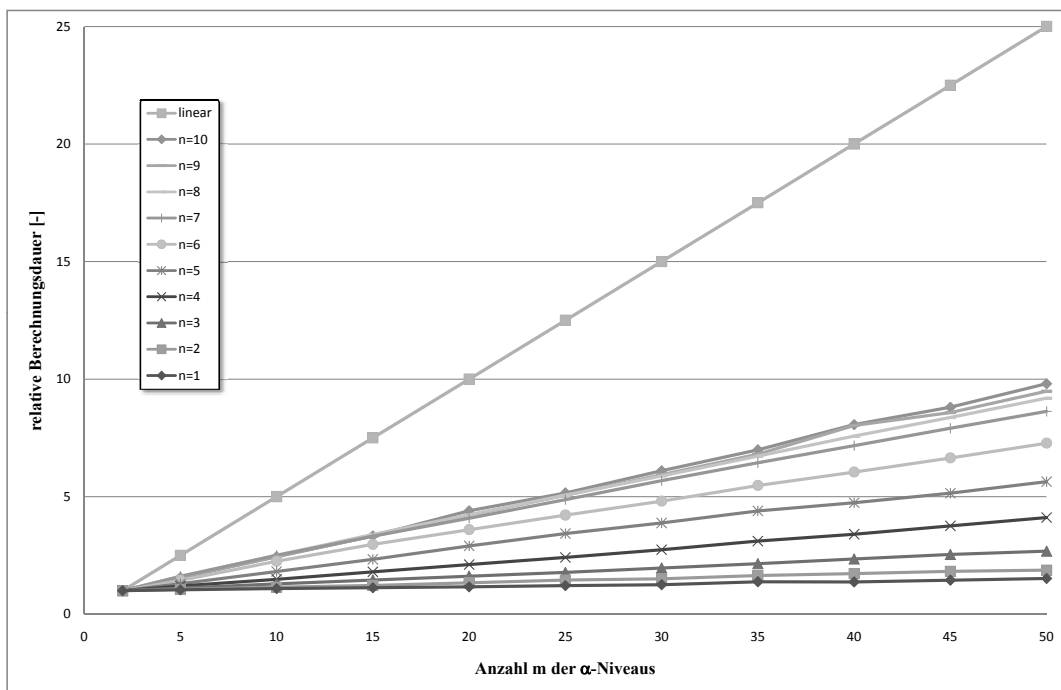


Abbildung B.9: Relative Berechnungsdauer der shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von  $m$

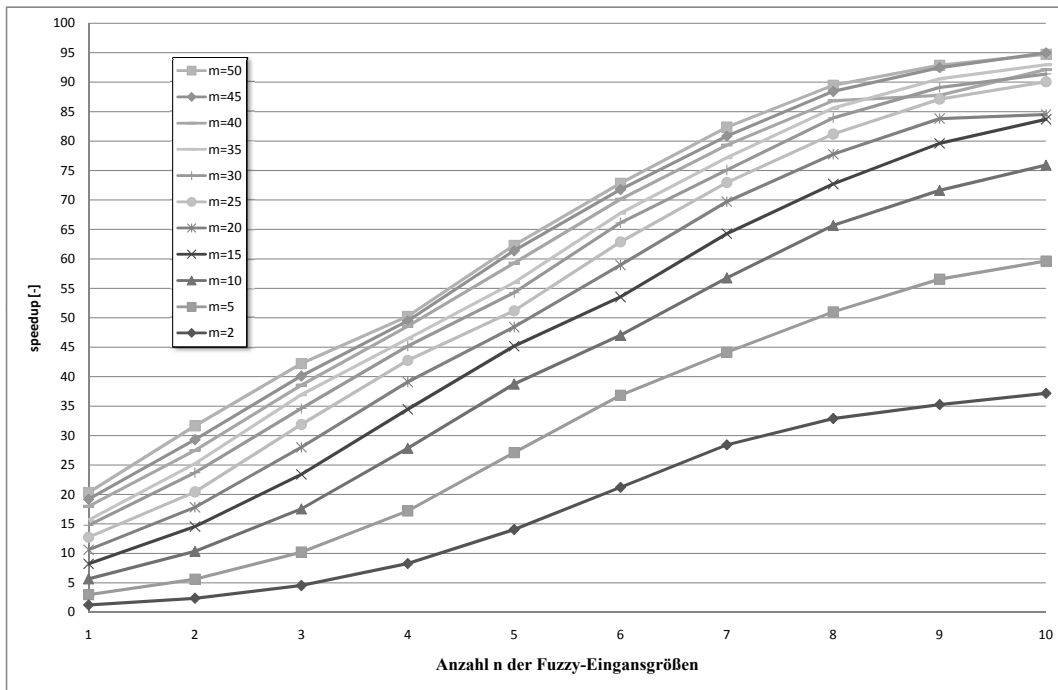


Abbildung B.10: Speedup der fuzzyfizierten shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von  $n$

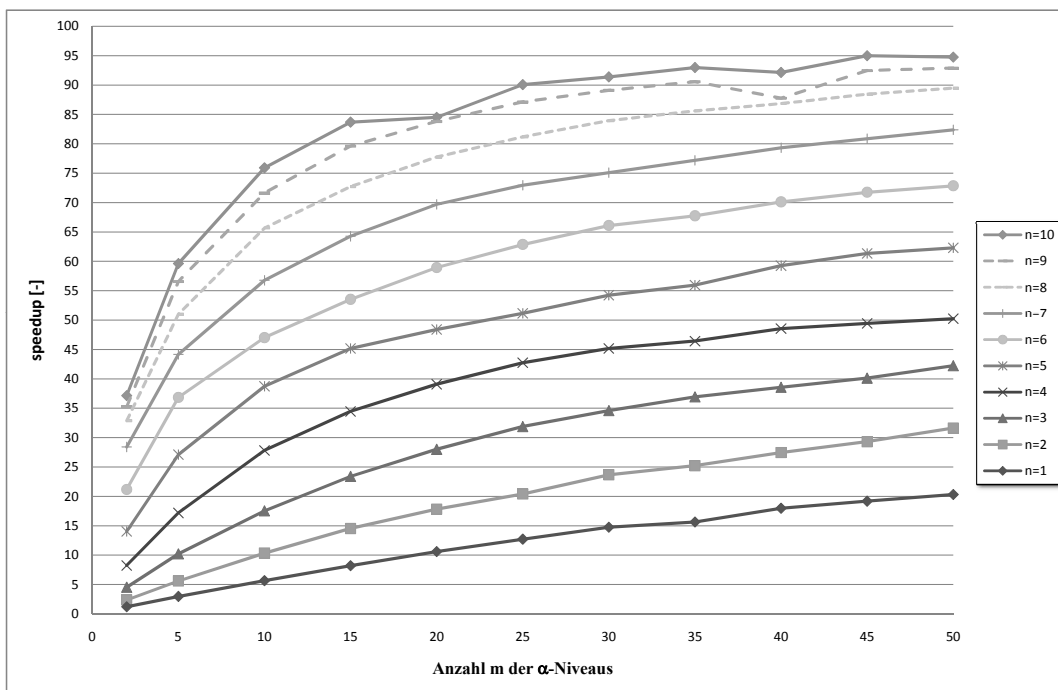


Abbildung B.11: Speedup der fuzzyfizierten shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von  $m$



## B.2.2 Selektiv nicht monotoner Modus

Für die Bestimmung der Effizienz des selektiv nicht monotonen Modus wurde die fuzzyfierte Version des scharfen Analysealgorithmus jeweils 15 mal ausgewertet. Dabei wurden stets fünf Fuzzy-Eingangsgrößen berücksichtigt. Der zu variierende Parameter war die Anzahl  $\bar{n}$  der selektiv nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen. Alle Fuzzy-Größen wurden mit fünf  $\alpha$ -Niveaus und die nicht monotonen Größen mit fünf Ästen diskretisiert. Die Ergebnisse der Zeitmessungen sind in Tabelle B.7 zusammengefasst.

**Tabelle B.7:** Auswertung der Analysedauer mit der shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung

$\bar{n}$	1	2	3	4	5
Mittelwert [s]	0,64	1,30	2,66	5,86	14,05
Variationskoeffizient [%]	0,82	0,92	0,71	0,42	0,17

Das Systemverhalten wird mit Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung B.12 ist bei Variation der Anzahl  $\bar{n}$  der nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  bezogen auf  $T_{FQ}(1)$  dargestellt. Der Graph mit der Bezeichnung „exponentiell“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.117) zu erwartende relative Berechnungsdauer an.

Der speedup (Gleichung (6.113)), der mit der impliziten Fuzzy-Arithmetik gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  (Tabelle B.7) und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(\bar{n})$  der scharfen Lösung (siehe oben). Die Bestimmung von  $T_{det}(\bar{n})$  ist dabei vom eingesetzten Verfahren abhängig. Für die erweiterte Transformationsmethode (vgl. Abschnitt 6.2.1) wird  $T_{det}(\bar{n})$  mit Gleichung (6.9) bestimmt. Die Genauigkeit dieses Verfahrens bei der Approximation der globalen Extrema entspricht dabei für das  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha = 0$  (Support) der Genauigkeit des impliziten Verfahrens. Für  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha > 0$  hingegen weist die implizite Fuzzy-Arithmetik eine höhere Genauigkeit auf. Um die selbe Genauigkeit auf der Basis deterministischer Grundlösungen zu erreichen, ist eine durch Gleichung (6.117) festgelegte Anzahl von Auswertungen nötig. Der entsprechende speedup ist in Abbildung B.13 als „äquivalente deterministische Lösung“ bezeichnet. Wird Fuzzy-Arithmetik mit Hilfe dünnbesetzter Gitter (vgl. Abschnitt 6.2.3) durchgeführt, so hängt die Anzahl scharfer Funktionsauswertungen von der Dimension des Raums der Fuzzy-Eingangsgrößen und

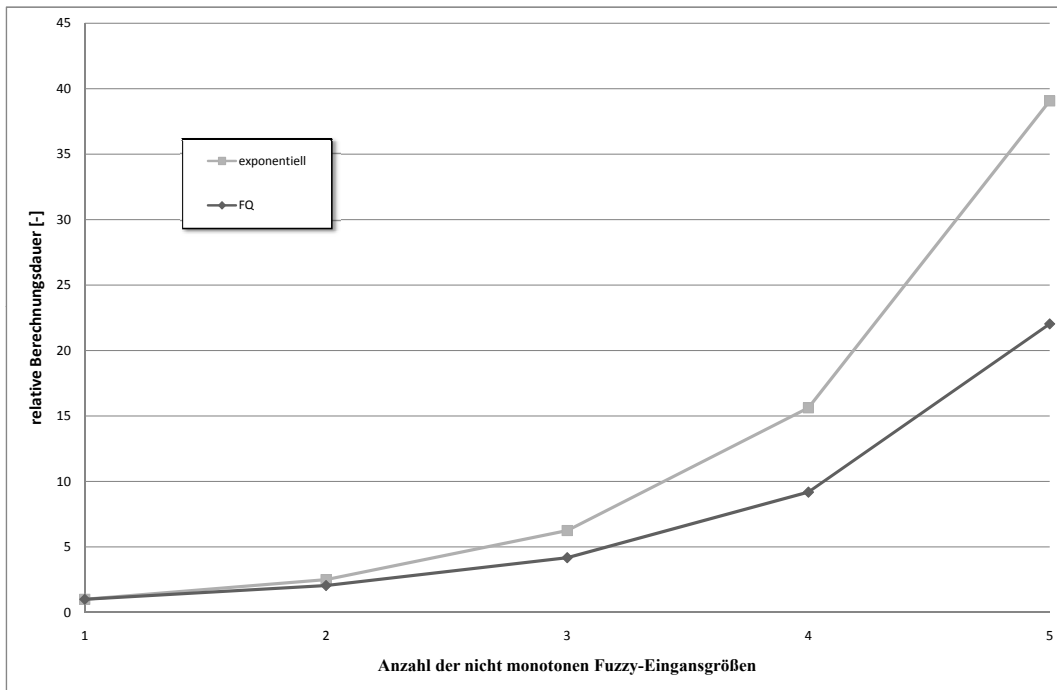


Abbildung B.12: Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizierten shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von  $\bar{n}$

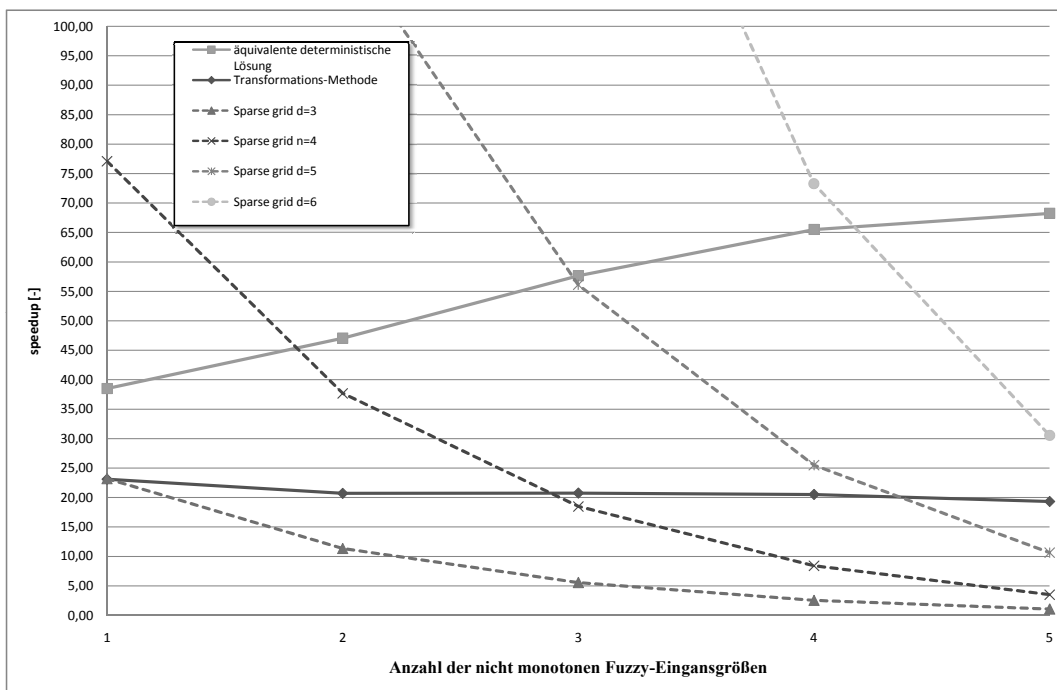


Abbildung B.13: Speedup der fuzzyfizierten shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von  $\bar{n}$

dem Verfeinerungsniveau  $d$  ab. In Abbildung B.13 ist der speedup des impliziten Verfahrens gegenüber der Methode auf der Basis von dünnbesetzten Gittern für übliche Verfeinerungsniveaus ( $d \in \{3, 4, 5, 6\}$ ) und der daraus resultierenden Anzahl scharfer Auswertungen (241, 801, 2433, 6993) dargestellt.

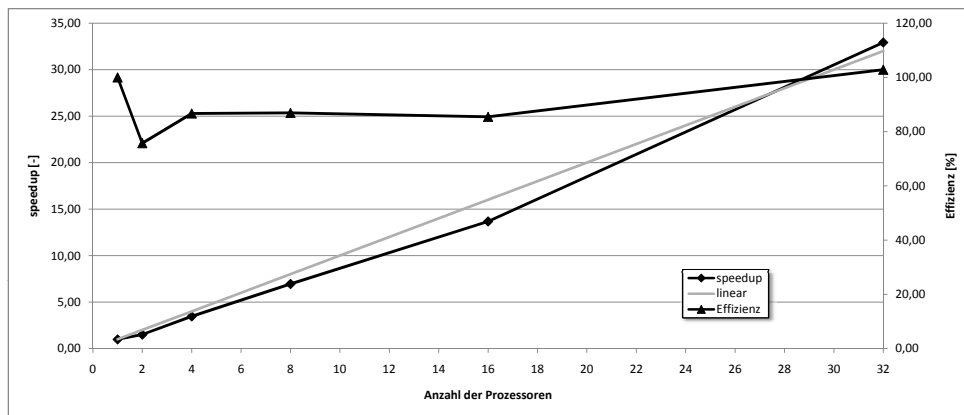
### B.2.3 Parallelisierung

Für die Untersuchung des Verhaltens der parallelisierten impliziten Fuzzy-Arithmetik wurde die numerische Simulation mit 15 Fuzzy-Eingangsgrößen und jeweils fünfzig  $\alpha$ -Niveaus durchgeführt. Die Berechnungen wurden im monotonen Modus jeweils 15 mal wiederholt. Die Ergebnisse der Zeitmessung sind in Tabelle B.8 zusammengefasst.

**Tabelle B.8:** Parallelisierung; Analysedauer mit der shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung

Anzahl der Prozessoren	32	16	8	4	2	1
Mittelwert [s]	63,66	153,22	301,25	604,13	1382,96	2095,18
Variationskoeffizient [%]	5,61	39,72	12,58	2,59	8,07	-

Der parallele speedup (Gleichung (6.118)) der Parallelisierung der impliziten Fuzzy-Arithmetik und die entsprechende Effizienz (Gleichung (6.121)) sind in Abbildung B.14 in Abhängigkeit von der Anzahl der eingesetzten Prozessoren dargestellt.



**Abbildung B.14:** Paralleler speedup der fuzzyfizierten shifted incomplete *Cholesky*-Zerlegung (SICT) in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren

## B.3 robuste unvollständige *Cholesky*-Zerlegung (RICT)

Die robuste unvollständige *Cholesky*-Zerlegung ist eine präkonjugierte Version des CG-Verfahrens. Eine detaillierte Darstellung der Lösungsmethode ist in Abschnitt 2.3.3 und 2.3.4 zu finden.

Als Referenz für den Vergleich wurde die numerische Simulation mit scharfen Berechnungsparametern durchgeführt. Um betriebssystembedingte Schwankungen zu erfassen, wurde die Simulation  $10^6$  durchgeführt und dabei eine durchschnittliche Berechnungsdauer von 63,7 ms mit einem Variationskoeffizienten von 18,07 % ermittelt.

### B.3.1 Monotoner Modus

Für die Untersuchungen des monotonen Modus wurde die fuzzyfizierte Version des scharfen Analysealgorithmus jeweils 50 mal ausgewertet. Die zu variierenden Parameter waren die Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen und die Anzahl  $m$  ihrer  $\alpha$ -Niveaus. Die Ergebnisse der Zeitmessungen sind in den Tabellen B.9 und B.10 zusammengefasst.

Das Systemverhalten der Implementierung wird mit der Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung B.15 ist bei Variation der Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(1, m)$  dargestellt. Der mit „exponentiell“ markierte Graph gibt dabei die entsprechend Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an. In Abbildung B.16 ist  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(n, 2)$  dargestellt. Der Graph mit der Bezeichnung „linear“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an.

Der speedup (Gleichung (6.113)) der mit der Implementierung des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  der Fuzzy-Größen gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  (Tabelle B.9) und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(n, m)$  der scharfen Lösung (siehe oben).  $T_{det}(n, m)$  wird mit Hilfe von Gleichung (6.114) bestimmt und ist die theoretische Untergrenze der für die Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen zu erwartenden Berechnungsdauern. Der speedup ist in Abbildung B.17 und B.18 dargestellt.

**Tabelle B.9:** Mittelwert der Analysedauer mit der robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT); Angaben in Sekunden

$n$	Anzahl $m$ der $\alpha$ -Niveaus										
	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	0,26	0,27	0,28	0,29	0,31	0,33	0,34	0,40	0,39	0,41	0,44
2	0,27	0,28	0,32	0,35	0,39	0,44	0,46	0,52	0,54	0,60	0,63
3	0,29	0,32	0,40	0,47	0,55	0,63	0,71	0,80	0,89	0,98	1,07
4	0,33	0,41	0,56	0,72	0,90	1,07	1,25	1,44	1,63	1,82	2,00
5	0,43	0,60	0,93	1,27	1,65	2,01	2,30	2,58	2,80	3,00	3,26
6	0,65	1,03	1,73	2,37	2,86	3,32	3,76	4,21	4,64	5,04	5,48
7	1,14	1,95	3,05	3,93	4,79	5,65	6,51	7,37	8,20	9,03	9,87
8	2,28	3,64	5,35	7,04	8,71	10,36	11,98	13,63	15,34	16,91	18,55
9	4,71	6,75	10,05	13,26	16,57	19,74	23,05	26,30	30,59	32,91	36,35
10	9,42	13,31	19,72	26,08	33,42	39,23	45,84	52,28	59,56	65,38	72,23

**Tabelle B.10:** Variationskoeffizient der Analysedauer mit der robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT); Angaben in Prozent

$n$	Anzahl $m$ der $\alpha$ -Niveaus										
	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	1,75	1,91	0,92	1,00	1,80	0,92	1,03	0,61	0,96	0,70	0,68
2	1,51	1,19	1,07	0,75	0,98	0,88	0,71	0,73	0,62	0,53	0,77
3	1,22	1,53	0,97	0,78	0,83	0,62	0,76	0,58	0,66	0,69	0,83
4	1,44	0,75	0,52	0,75	0,54	0,73	0,69	0,70	0,78	0,76	0,74
5	0,86	0,45	0,55	0,89	0,70	0,79	0,66	11,49	0,73	0,67	0,68
6	0,44	0,54	0,64	0,61	0,70	0,67	0,59	0,61	0,60	0,12	0,10
7	0,32	0,20	0,15	0,14	0,11	0,13	0,11	0,10	0,10	0,08	0,09
8	0,20	0,14	0,13	0,09	0,08	1,39	0,09	0,09	0,09	0,07	0,07
9	0,12	0,09	0,09	0,07	0,08	0,17	0,07	0,08	0,17	0,06	0,05
10	0,11	0,10	0,08	0,06	0,15	1,68	0,09	0,19	0,04	0,06	0,07

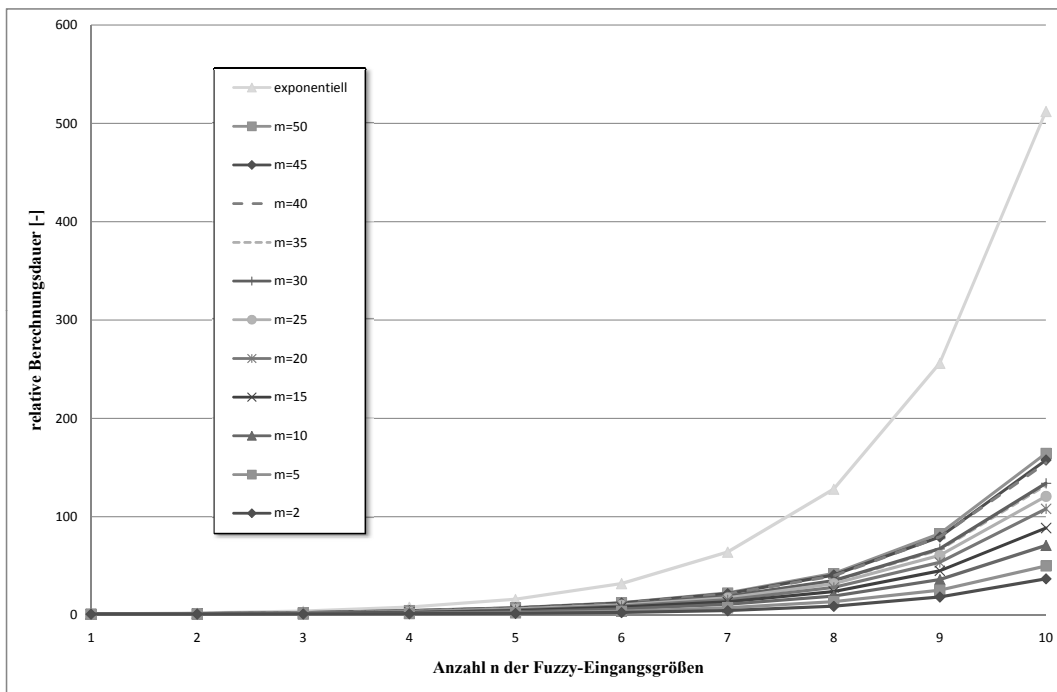


Abbildung B.15: Relative Berechnungsdauer der robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von  $n$

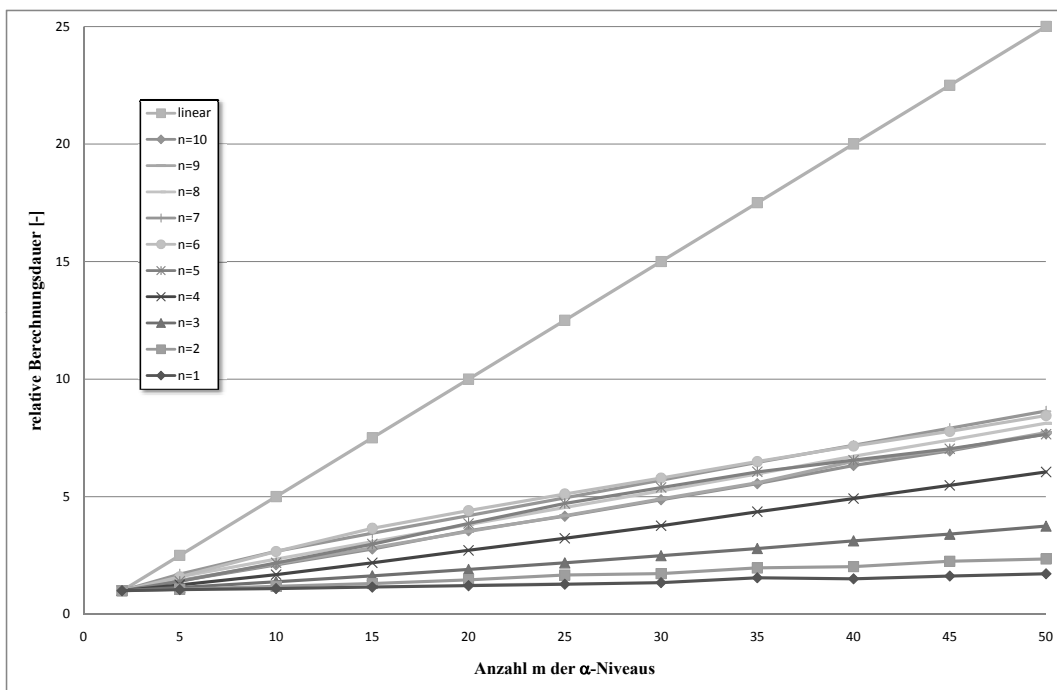


Abbildung B.16: Relative Berechnungsdauer der robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von  $m$

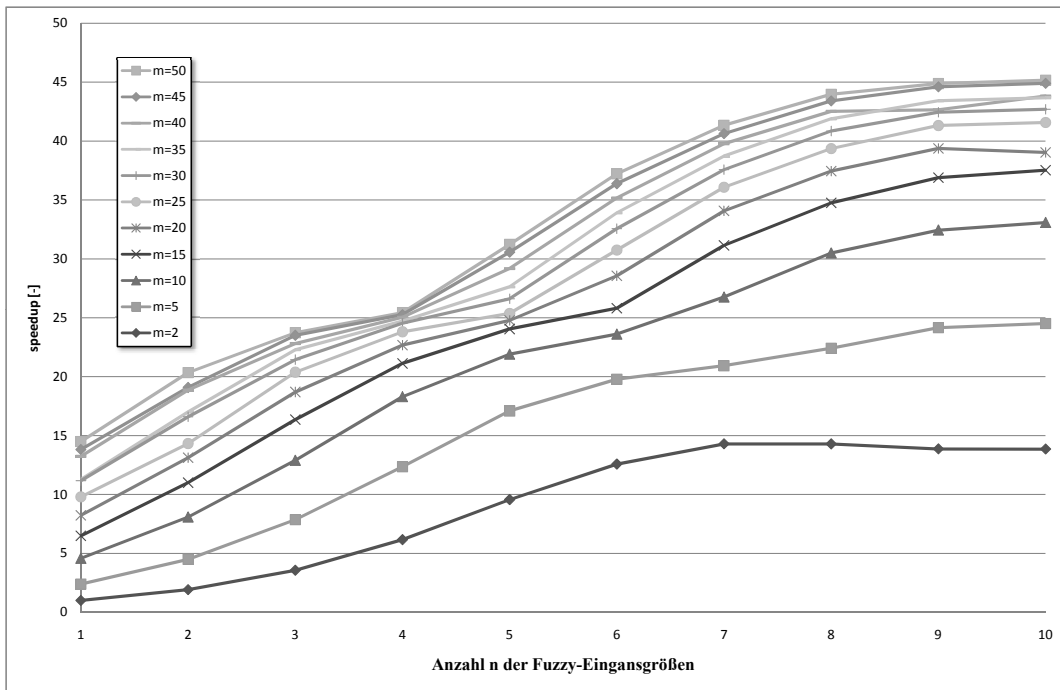


Abbildung B.17: Speedup der fuzzyfizierten robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von  $n$

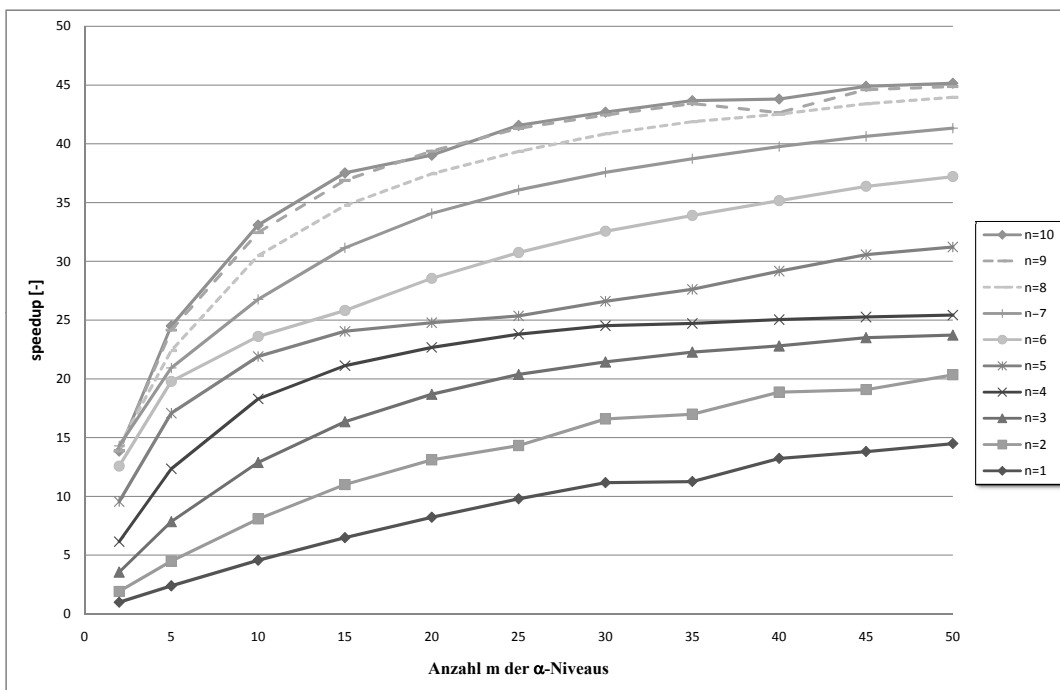


Abbildung B.18: Speedup der fuzzyfizierten robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von  $m$

### B.3.2 Selektiv nicht monotoner Modus

Für die Bestimmung der Effizienz des selektiv nicht monotonen Modus wurde die fuzzyfierte Version des scharfen Analysealgorithmus jeweils 15 mal ausgewertet. Dabei wurden stets fünf Fuzzy-Eingangsgrößen berücksichtigt. Der zu variierende Parameter war die Anzahl  $\bar{n}$  der selektiv nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen. Alle Fuzzy-Größen wurden mit fünf  $\alpha$ -Niveaus und die nicht monotonen Größen mit fünf Ästen diskretisiert. Die Ergebnisse der Zeitmessungen sind in Tabelle B.11 zusammengefasst.

**Tabelle B.11:** Auswertung der Analysedauer mit der robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung

$\bar{n}$	1	2	3	4	5
Mittelwert [s]	1,37	3,09	6,17	13,57	32,90
Variationskoeffizient [%]	1,29	1,29	1,15	0,69	0,37

Das Systemverhalten wird mit Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung B.5 ist bei Variation der Anzahl  $\bar{n}$  der nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  bezogen auf  $T_{FQ}(1)$  dargestellt. Der Graph mit der Bezeichnung „exponentiell“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.117) zu erwartende relative Berechnungsdauer an.

Der speedup (Gleichung (6.113)), der mit der impliziten Fuzzy-Arithmetik gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  (Tabelle B.11) und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(\bar{n})$  der scharfen Lösung (siehe oben). Die Bestimmung von  $T_{det}(\bar{n})$  ist dabei vom eingesetzten Verfahren abhängig. Für die erweiterte Transformationsmethode (vgl. Abschnitt 6.2.1) wird  $T_{det}(\bar{n})$  mit Gleichung (6.9) bestimmt. Die Genauigkeit dieses Verfahrens bei der Approximation der globalen Extrema entspricht dabei für das  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha = 0$  (Support) der Genauigkeit des impliziten Verfahrens. Für  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha > 0$  hingegen weist die implizite Fuzzy-Arithmetik eine höhere Genauigkeit auf. Um die selbe Genauigkeit auf der Basis deterministischer Grundlösungen zu erreichen, ist eine durch Gleichung (6.117) festgelegte Anzahl von Auswertungen nötig. Der entsprechende speedup ist in Abbildung B.20 als „äquivalente deterministische Lösung“ bezeichnet. Wird Fuzzy-Arithmetik mit Hilfe dünnbesetzter Gitter (vgl. Abschnitt 6.2.3) durchgeführt, so hängt die Anzahl scharfer Funktionsauswertungen von der Dimension des Raums der Fuzzy-Eingangsgrößen und



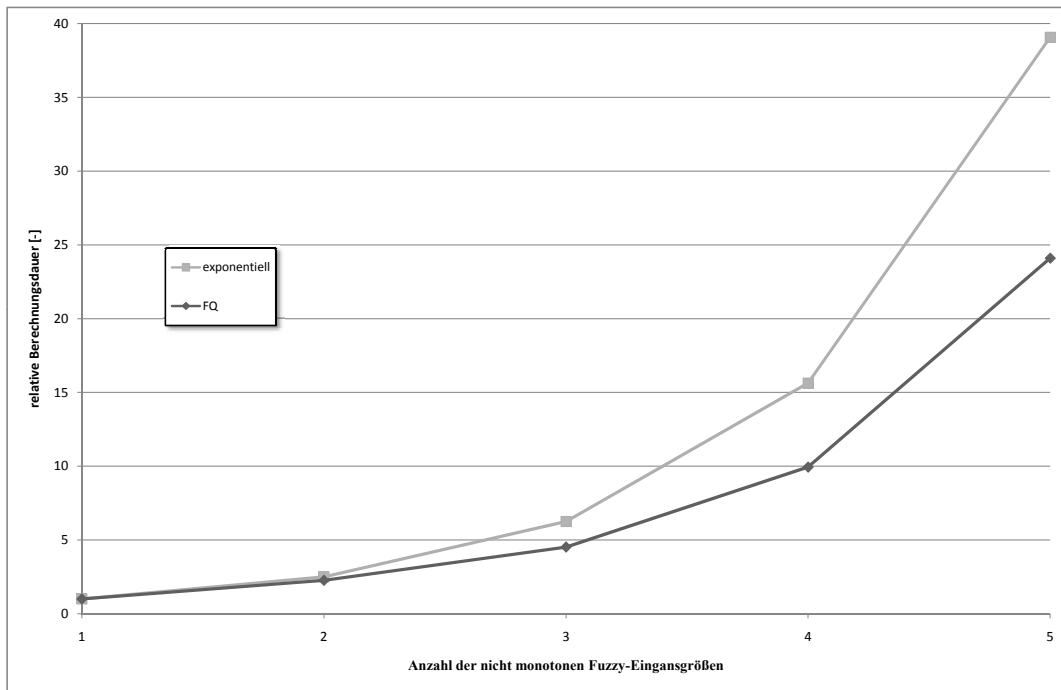


Abbildung B.19: Relative Berechnungsdauer der fuzzyfizierten robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von  $\bar{n}$

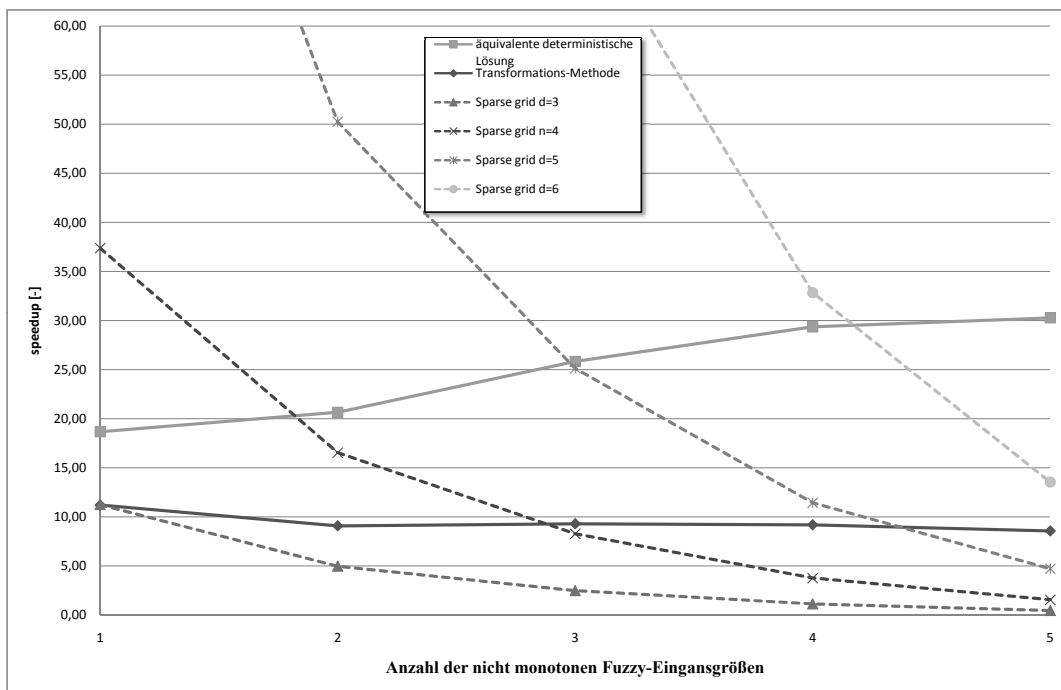


Abbildung B.20: Speedup der fuzzyfizierten robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von  $\bar{n}$

dem Verfeinerungsniveau  $d$  ab. In Abbildung B.20 ist der speedup des impliziten Verfahrens gegenüber der Methode auf der Basis von dünnbesetzten Gittern für übliche Verfeinerungsniveaus ( $d \in \{3, 4, 5, 6\}$ ) und der daraus resultierenden Anzahl scharfer Auswertungen (241, 801, 2433, 6993) dargestellt.

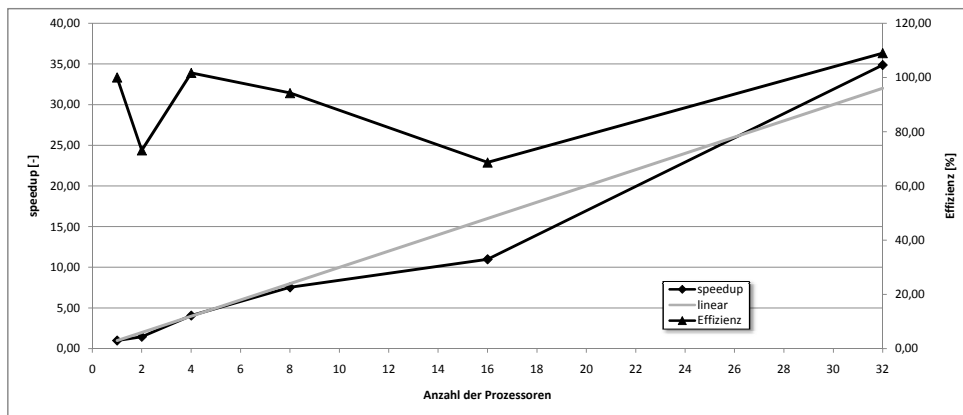
### B.3.3 Parallelisierung

Für die Untersuchung des Verhaltens der parallelisierten impliziten Fuzzy-Arithmetik wurde die numerische Simulation mit 15 Fuzzy-Eingangsgrößen und jeweils fünfzig  $\alpha$ -Niveaus durchgeführt. Die Berechnungen wurden im monotonen Modus jeweils 15 mal wiederholt. Die Ergebnisse der Zeitmessung sind in Tabelle B.12 zusammengefasst.

**Tabelle B.12:** Parallelisierung; Analysedauer mit der robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung

Anzahl der Prozessoren	32	16	8	4	2	1
Mittelwert [s]	152,71	296,56	748,31	1580,97	3584,64	5721,45
Variationskoeffizient [%]	8,27	14,54	20,49	13,17	4,16	-

Der parallele speedup (Gleichung (6.118)) der Parallelisierung der impliziten Fuzzy-Arithmetik und die entsprechende Effizienz (Gleichung (6.121)) sind in Abbildung B.21 in Abhängigkeit von der Anzahl der eingesetzten Prozessoren dargestellt.



**Abbildung B.21:** Paralleler speedup der fuzzyfizzierten robusten incomplete *Cholesky*-Zerlegung (RICT) in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren

## B.4 stabilisierter approximativer inverser Präkonditionierer (SAINV)

Bei dieser Untersuchung wurde das CG-Verfahren mit dem stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer kombiniert. Eine detaillierte Darstellung der Lösungsmethode ist in Abschnitt 2.3.3 und 2.3.4 zu finden.

Als Referenz für den Vergleich wurde die numerische Simulation mit scharfen Berechnungsparametern durchgeführt. Um betriebssystembedingte Schwankungen zu erfassen, wurde die Simulation 5000 durchgeführt und dabei eine durchschnittliche Berechnungsdauer von 11,46 s mit einem Variationskoeffizienten von 1,72 % ermittelt.

### B.4.1 Monotoner Modus

Für die Untersuchungen des monotonen Modus wurde die fuzzyfizierte Version des scharfen Analysealgorithmus ausgewertet. Die zu variierenden Parameter waren die Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen und die Anzahl  $m$  ihrer  $\alpha$ -Niveaus. Die Ergebnisse der Zeitmessungen sind in der Tabelle B.13 zusammengefasst.

Das Systemverhalten der Implementierung wird mit der Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung B.22 ist bei Variation der Anzahl  $n$  der Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(1, m)$  dargestellt. Der mit „exponentiell“ markierte Graph gibt dabei die entsprechend Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an. In Abbildung B.23 ist  $T_{FQ}(n, m)$  bezogen auf  $T_{FQ}(n, 2)$  dargestellt. Der Graph mit der Bezeichnung „linear“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.114) zu erwartende relative Berechnungsdauer an.

Der speedup (Gleichung (6.113)) der mit der Implementierung des Körpers  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  der Fuzzy-Größen gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(n, m)$  (Tabelle B.13) und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(n, m)$  der scharfen Lösung (siehe oben).  $T_{det}(n, m)$  wird mit Hilfe von Gleichung (6.114) bestimmt und ist die theoretische Untergrenze der für die Verfahren auf Basis deterministischer Grundlösungen zu erwartenden Berechnungsdauern. Der speedup ist in Abbildung B.24 und B.25 dargestellt.

**Tabelle B.13:** Analysedauer mit dem stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV); Angaben in Sekunden

n	Anzahl $m$ der $\alpha$ -Niveaus										
	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	18,08	18,39	18,80	19,26	19,70	20,16	20,60	22,53	21,69	22,77	23,39
2	18,46	19,02	19,91	20,86	21,95	23,68	23,75	25,62	25,76	27,85	27,74
3	19,20	20,24	22,26	23,94	25,94	28,17	30,99	33,74	36,65	39,98	43,74
4	20,56	22,81	26,57	31,43	37,49	43,57	50,22	58,09	65,63	73,70	81,27
5	23,36	27,84	38,80	51,29	66,69	82,35	95,37	106,24	115,99	123,94	134,74
6	29,72	41,64	69,90	97,74	118,71	135,48	150,85	166,58	180,69	195,43	209,52
7	44,57	76,98	126,18	158,13	187,74	216,68	245,87	275,28	304,51	333,52	362,71
8	83,70	144,20	205,82	263,72	322,03	380,23	438,10	496,03	554,64	610,88	667,75
9	170,61	247,99	364,17	479,66	596,07	709,31	828,27	944,78	1090,27	1183,21	1308,20
10	321,85	460,72	692,41	924,42	1193,74	1402,62	1650,02	1882,38	2113,70	2330,49	2570,34

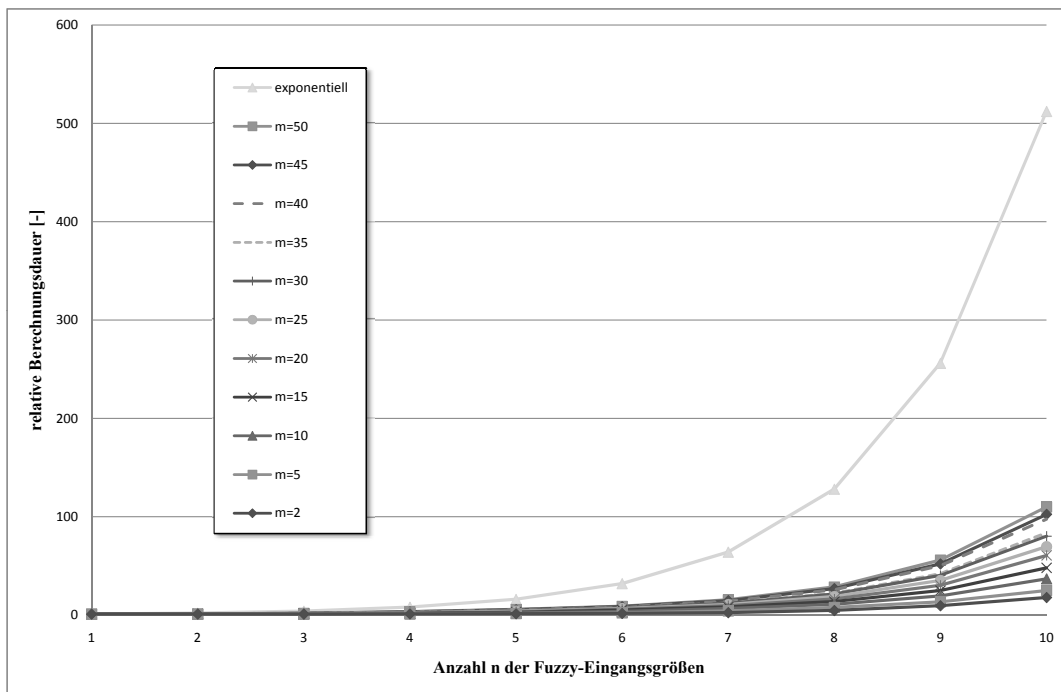


Abbildung B.22: Relative Berechnungsdauer dem stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von  $n$

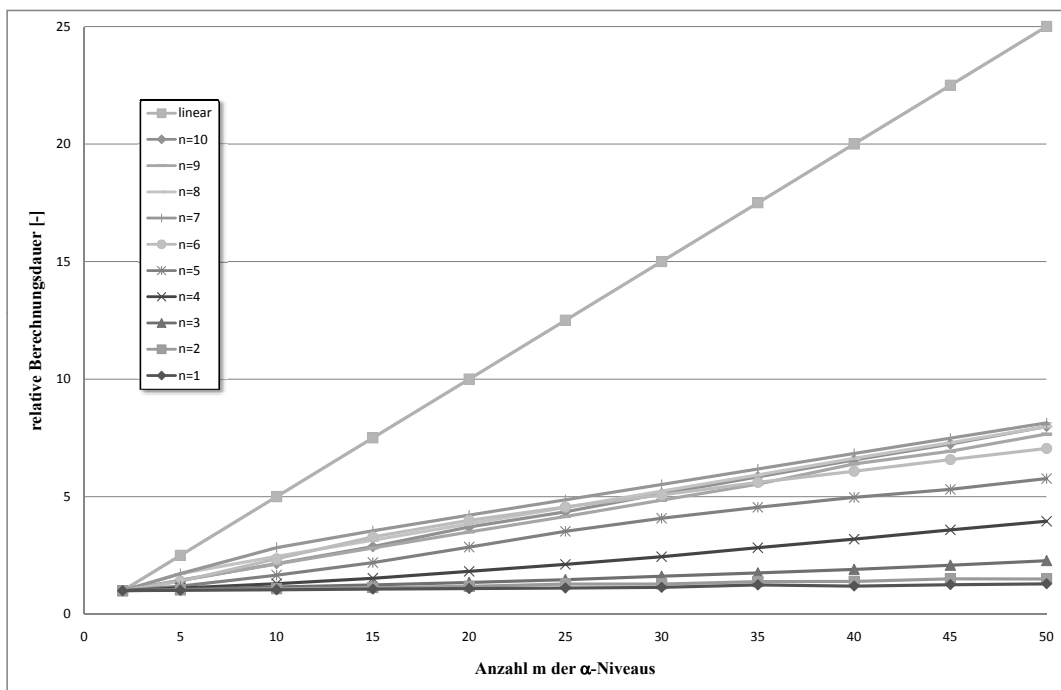


Abbildung B.23: Relative Berechnungsdauer dem stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von  $m$

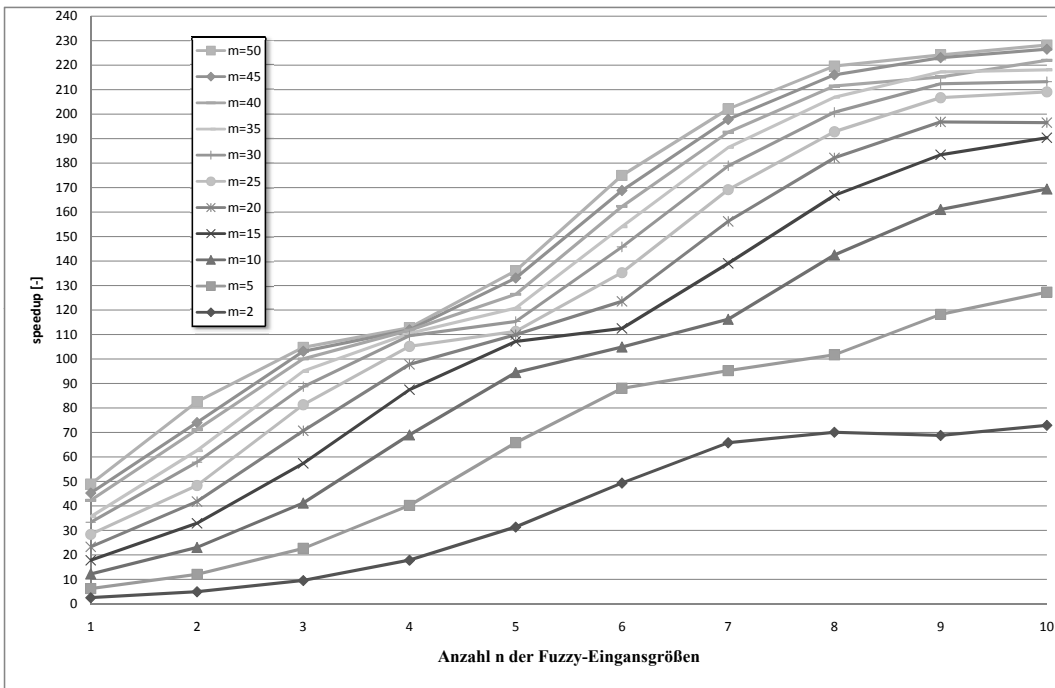


Abbildung B.24: Speedup der fuzzyfizierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von  $n$

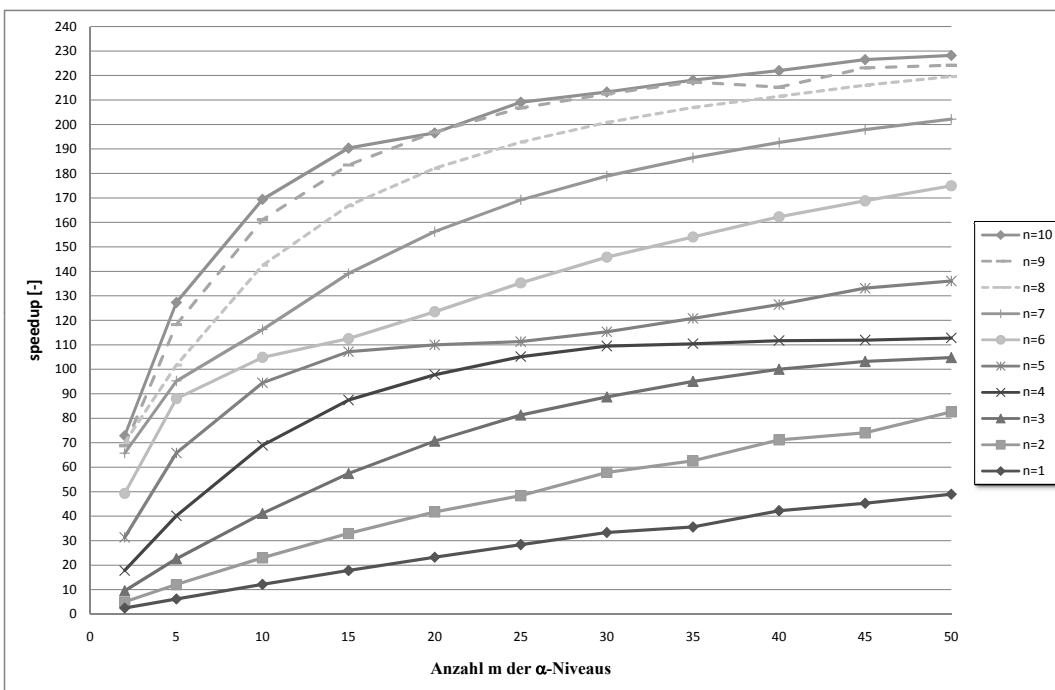


Abbildung B.25: Speedup der fuzzyfizierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von  $m$

### B.4.2 Selektiv nicht monotoner Modus

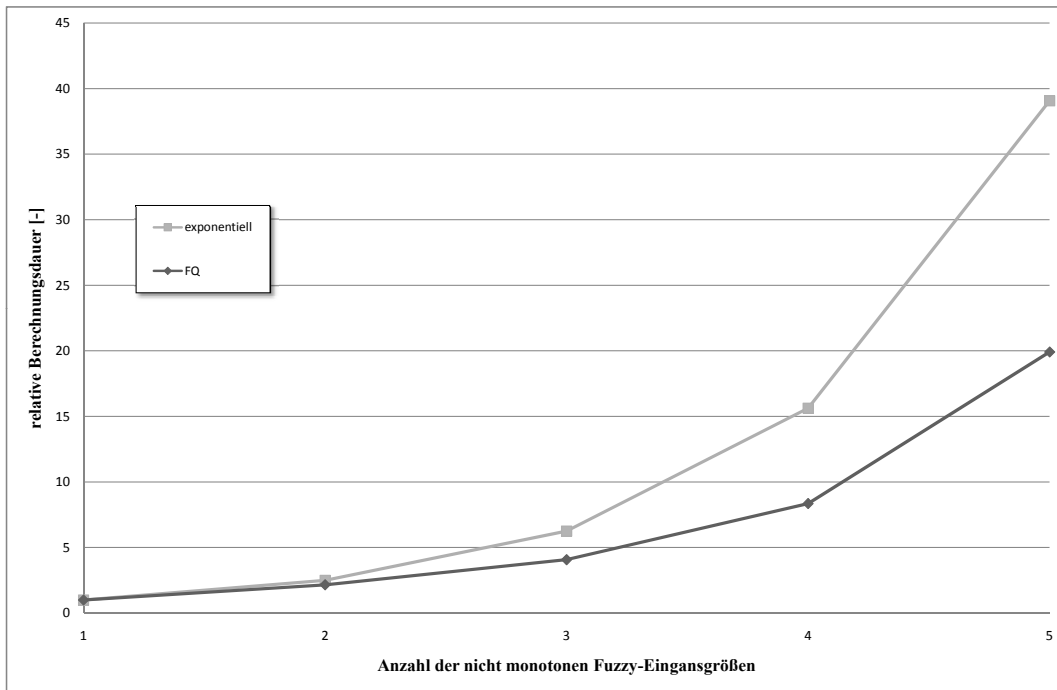
Für die Bestimmung der Effizienz des selektiv nicht monotonen Modus wurde die fuzzyfizierte Version des scharfen Analysealgorithmus ausgewertet. Dabei wurden stets fünf Fuzzy-Eingangsgrößen berücksichtigt. Der zu variierende Parameter war die Anzahl  $\bar{n}$  der selektiv nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen. Alle Fuzzy-Größen wurden mit fünf  $\alpha$ -Niveaus und die nicht monotonen Größen mit fünf Ästen diskretisiert. Die Ergebnisse der Zeitmessungen sind in Tabelle B.14 zusammengefasst.

**Tabelle B.14:** Analysedauer mit dem stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV)

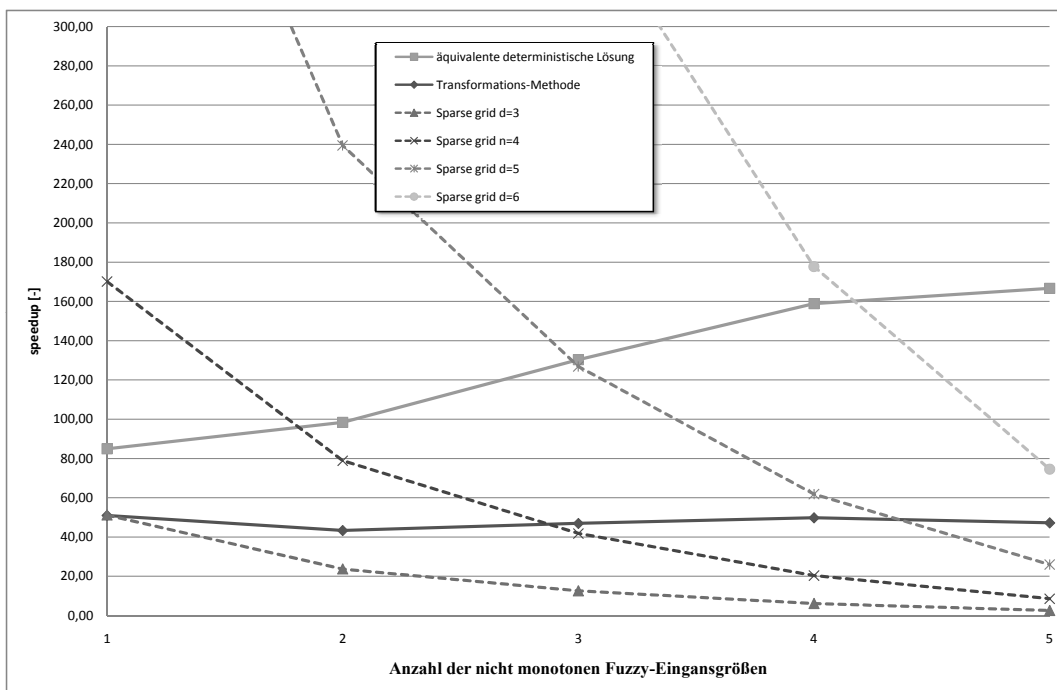
$\bar{n}$	1	2	3	4	5
Analysedauer [s]	53,96	116,41	219,75	450,72	1074,08

Das Systemverhalten wird mit Hilfe einer bezogenen Berechnungsdauer dargestellt. In Abbildung B.26 ist bei Variation der Anzahl  $\bar{n}$  der nicht monotonen Fuzzy-Eingangsgrößen die Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  bezogen auf  $T_{FQ}(1)$  dargestellt. Der Graph mit der Bezeichnung „exponentiell“ gibt dabei die gemäß Gleichung (6.117) zu erwartende relative Berechnungsdauer an.

Der speedup (Gleichung (6.113)), der mit der impliziten Fuzzy-Arithmetik gegenüber den Verfahren mit deterministischer Grundlösung erreicht wird, ermittelt sich aus der Analysedauer  $T_{FQ}(\bar{n})$  (Tabelle B.14) und der akkumulierten Dauer  $T_{det}(\bar{n})$  der scharfen Lösung (siehe oben). Die Bestimmung von  $T_{det}(\bar{n})$  ist dabei vom eingesetzten Verfahren abhängig. Für die erweiterte Transformationsmethode (vgl. Abschnitt 6.2.1) wird  $T_{det}(\bar{n})$  mit Gleichung (6.9) bestimmt. Die Genauigkeit dieses Verfahrens bei der Approximation der globalen Extrema entspricht dabei für das  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha = 0$  (Support) der Genauigkeit des impliziten Verfahrens. Für  $\alpha$ -Niveau mit  $\alpha > 0$  hingegen weist die implizite Fuzzy-Arithmetik eine höhere Genauigkeit auf. Um die selbe Genauigkeit auf der Basis deterministischer Grundlösungen zu erreichen, ist eine durch Gleichung (6.117) festgelegte Anzahl von Auswertungen nötig. Der entsprechende speedup ist in Abbildung B.27 als „äquivalente deterministische Lösung“ bezeichnet. Wird Fuzzy-Arithmetik mit Hilfe dünnbesetzter Gitter (vgl. Abschnitt 6.2.3) durchgeführt, so hängt die Anzahl scharfer Funktionsauswertungen von der Dimension des Raums der Fuzzy-Eingangsgrößen und



**Abbildung B.26:** Relative Berechnungsdauer mit dem fuzzyfizzierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von  $\bar{n}$



**Abbildung B.27:** Speedup mit dem fuzzyfizzierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von  $\bar{n}$



dem Verfeinerungsniveau  $d$  ab. In Abbildung B.27 ist der speedup des impliziten Verfahrens gegenüber der Methode auf der Basis von dünnbesetzten Gittern für übliche Verfeinerungsniveaus ( $d \in \{3, 4, 5, 6\}$ ) und der daraus resultierenden Anzahl scharfer Auswertungen (241, 801, 2433, 6993) dargestellt.

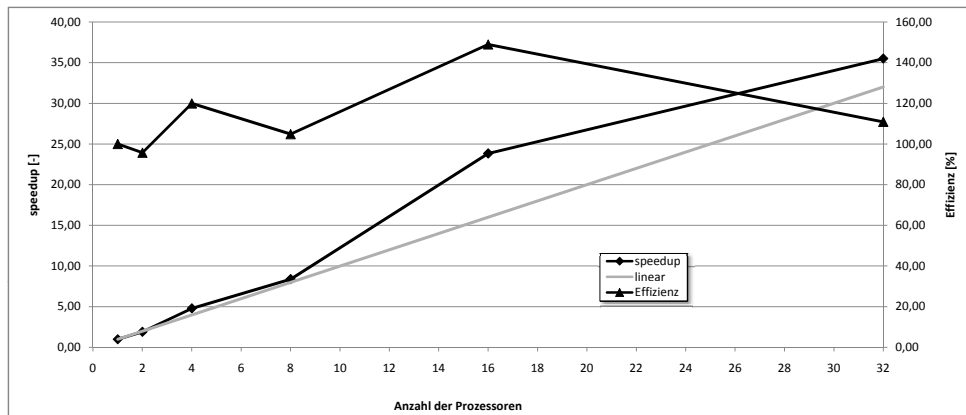
### B.4.3 Parallelisierung

Für die Untersuchung des Verhaltens der parallelisierten impliziten Fuzzy-Arithmetik wurde die numerische Simulation mit 15 Fuzzy-Eingangsgrößen und jeweils fünfzig  $\alpha$ -Niveaus durchgeführt. Die Berechnungen wurden im monotonen Modus jeweils 15 mal wiederholt. Die Ergebnisse der Zeitmessung sind in Tabelle B.15 zusammengefasst.

**Tabelle B.15:** Parallelisierung; Analysedauer mit dem stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV)

Anzahl der Prozessoren	32	16	8	4	2	1
Analysedauer [s]	6107,54	9096,68	25840,64	45184,96	113220,00	216752,78

Der parallele speedup (Gleichung (6.118)) der Parallelisierung der impliziten Fuzzy-Arithmetik und die entsprechende Effizienz (Gleichung (6.121)) sind in Abbildung B.28 in Abhängigkeit von der Anzahl der eingesetzten Prozessoren dargestellt.



**Abbildung B.28:** Paralleler speedup mit dem fuzzyfizierten stabilisierten approximativen inversen Präkonditionierer (SAINV) in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren